



Universidade Federal do Ceará
Departamento de Engenharia Elétrica
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Aplicação do Método dos Elementos Finitos como Auxílio ao Projeto e ao
Comissionamento de Sistemas de Aterramento Elétrico

Rooney Ribeiro Albuquerque Coelho

Fortaleza

2015

Rooney Ribeiro Albuquerque Coelho

**Aplicação do Método dos Elementos Finitos como Auxílio ao Projeto e ao
Comissionamento de Sistemas de Aterramento Elétrico**

Dissertação submetida à Universidade Federal do Ceará como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica

Ricardo Silva Thé Pontes

Fortaleza

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca de Pós-Graduação em Engenharia - BPGE

-
- C619a Coelho, Rooney Ribeiro Albuquerque.
Aplicação do método dos elementos finitos como auxílio ao projeto e ao comissionamento de sistemas de aterramento elétrico / Rooney Ribeiro Albuquerque Coelho. – 2015.
111 f. : il. color., enc. ; 30 cm.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Elétrica, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Fortaleza, 2015.
Área de Concentração: Sistemas de Energia Elétrica.
Orientação: Prof. Dr. Ricardo Silva Thé Pontes.
1. Engenharia elétrica. 2. Correntes elétricas - Aterramento. 3. Método dos elementos finitos. I. Título.

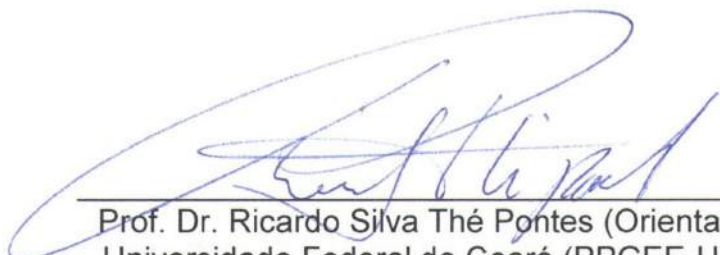
ROONEY RIBEIRO ALBUQUERQUE COELHO

APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS COMO
AUXÍLIO AO PROJETO E COMISSIONAMENTO DE
SISTEMAS DE ATERRAMENTO ELÉTRICO


Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Ceará, como requisito à obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Sistema de Energia Elétrica.

Aprovada em: 27/05/2015


BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Ricardo Silva Thé Pontes (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (PPGEE-UFC)



Prof. Dr. Tobias Rafael Fernandes Neto
Universidade Federal do Ceará (PPGEE-UFC)



Prof. Dr. Luciano Martins Neto
Universidade Federal de Uberlândia (UFU)

Dedico esta Dissertação de Mestrado

Aos meus mestres:

*Professor Dr. Ricardo Silva Thé Pontes e à
Professora M.^a Maria das Graças Santos Rufino Pontes.*

Minha família:

Mário, Joana, Clárisse e Ariel.

Minha namorada:

Kamylla Gradwohl.

Agradecimentos

Primeiramente, a Deus, por ter me concedido o dom da vida, me fazendo viver diariamente a sua misericórdia e amor, e por não me permitir esquecer jamais o grande versículo: "Todas as coisas cooperam para o bem daqueles que amam a Deus".

Agradeço a minha família: ao Engenheiro Mario Coelho, meu pai, por ter-me inspirado na escolha do curso de Engenharia Elétrica sem o qual eu teria com certeza feito a escolha errada. A minha Irmã Clarisse, estudante de Engenharia Elétrica da UFC em cujas escolhas sempre me inspirei. Com isso, me senti na responsabilidade de, como irmão mais velho, zelar pelas minhas escolhas, tentar sempre ser uma pessoa melhor já que sempre seria uma inspiração para a minha irmã mais nova. A Professora *M.^a* Joana Anália, minha mãe, por ter estado sempre presente nos momentos mais decisivos da minha vida, não medindo esforços para estar sempre ao meu lado nas horas que mais precisei. A Kamylla Gradwohl pelo incentivo, apoio, ajuda e por acreditar na minha capacidade. A cadelinha Ariel, membro especial da nossa família, por sempre me fazer companhia durante a escrita deste trabalho.

Ao professor Dr Ricardo Silva Thé Pontes pela orientação, liderança, amizade, confiança e dedicação neste trabalho e em todas as atividades realizadas no Laboratório de Eficiência Energética (LAMOTRIZ) da Universidade Federal do Ceará. À professora *M.^a* Maria das Graças Santos Rufino Pontes, que me acompanhou durante os anos de graduação, e com certeza, por ter sido a grande responsável pela minha escolha de seguir a carreira acadêmica.

Ao professor Dr Arthur Plínio pelo grande conhecimento transmitido nas disciplinas de Inteligência Computacional Aplicada e Redes Neurais Artificiais, que foram bastante úteis para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas Eduardo, Ednardo, Felipe, Renan, Rodrigo, Kleymilson, Victor e Rafael pelo companheirismo e conhecimento compartilhado durante toda a minha pesquisa.

Ao professor Dr Tobias Fernandes e ao Dr. Francisco Alexandre, nos quais me espelho e tenho como referência.

À equipe técnica da pesquisa, em especial, Antônio Thé Pontes pela sua experiência, conhecimento, competência e amizade; itens fundamentais para o andamento dessa pesquisa.

Aos professores Cícero Marcos Tavares Cruz, Tobias Rafael Fernandes e Ricardo Silva Thé Pontes pelas valiosas contribuições para o aperfeiçoamento desta dissertação na ocasião da pré-defesa e em especial ao professor Luciano Martins Neto da Universidade Federal de Uberlândia, pelos valiosos comentários para o aperfeiçoamento deste trabalho na ocasião da defesa.

Os meus agradecimentos se estendem, também, a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram com a realização desta dissertação de mestrado.

"Change is the essential process of all existence."
SPOCK, Star Trek: The Original Series,
"Let That Be Your Last Battlefield"

Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal, aplicar o método dos elementos finitos (FEM), modelados em problemas de condução de corrente de curto-circuito à frequência industrial, calculando a resistência de aterramento e verificando se um determinado projeto está dentro das especificações de segurança. São utilizadas técnicas de otimização para a modelagem do solo e aplicado o FEM como forma de auxílio ao comissionamento de subestações, simulando o método da queda de potencial e ensaios de potenciais de passo e de toque. É apresentado o modelo ótimo do solo, encontrado através da minimização do erro entre a curva de resistividade aparente extraída de medições de resistividade elétrica do solo através do método de Wenner e uma curva de resistividade aparente teórica para um modelo de “N” camadas horizontais. O referido modelo utiliza o algoritmo Particle Swarm Optimization (PSO), uma metaheurística de otimização bastante consolidada e que apresenta uma excelente performance quando aplicada à resolução deste problema. Foram realizadas diversas estratificações do solo utilizando técnicas de otimização. Quanto ao resultado de estudos de caso foram utilizados métodos gráficos extraídos da literatura e confrontados com este método. O modelo de problemas de aterramento utilizando o FEM foi apresentado como solução alternativa ao projeto utilizando a norma IEEE Std 80, sendo possível determinar a distribuição espacial do potencial elétrico em todos os pontos do solo, que foi modelado como heterogêneo, conhecendo-se assim as regiões do projeto que possuem os maiores níveis de potenciais de passo e de toque. O FEM também foi aplicado na determinação da localização exata da sonda de potencial no ensaio de medição de resistência de aterramento, sendo validado através de ensaios de campo e através de resultados extraídos da literatura. O referido método também foi aplicado na determinação dos níveis de potenciais de passo e de toque existentes em uma subestação, sendo os ensaios simulados e comprovados através de experimentos de campo.

Palavras-chaves: Aterramento Elétrico; FEM; Estratificação do solo; PSO; Medição de resistência de aterramento.

Abstract

The main aim of this work is to apply the finite element method (FEM), modeled in short circuit current conduction problems at industrial frequency, calculating grounding resistance and verifying whether a particular project is within the safety specifications. The work optimization techniques for soil modeling are used and the FEM is applied as a way to aid substation commissioning, simulating the Fall of Potential method (FOP) as well as step and touch potential experimenting. The research presents the optimal model of soil found by the minimization of the error between the apparent resistivity curve extracted from electrical soil resistivity measurements. The method of Wenner and a theoretical curve of apparent resistivity for a model of "N" horizontal layers is used as well as the algorithm Particle Swarm Optimization (PSO); a fairly consolidated optimization, a metaheuristic, which recorded an excellent performance when applied to a solution of this problem. Various soil stratification were performed using optimization techniques, and the results of case studies that use graph method, extracted from literature were confronted with this method. The model of grounding problems using the FEM was presented as an alternative solution to the project using the IEEE Std 80, being possible to determine the spatial distribution of the electric potential at all points of the soil, which was modeled as heterogeneous, so getting to know the regions of the project which have the highest potential levels of step and touch. The FEM was also applied to determine the exact location of potential probe in the ground resistance measurement test which was validated through field experiments and through results extracted from literature. The method was also applied to the determination of the potential levels of step and touch existing in a substation, being the testing simulated and proven through field experiments.

Key-words: Electrical grounding; Finite Element Method; Stratification of soil; PSO; Grounding resistance measurement.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação do potencial elétrico gerado por uma fonte pontual de corrente na superfície de um solo formado por camadas horizontais. . . .	23
Figura 2 – Representação das linhas de campo elétrico geradas por uma fonte pontual de corrente em um ponto P qualquer de um solo homogêneo. . . .	25
Figura 3 – Representação do potencial elétrico gerado por uma fonte pontual de corrente na superfície de um solo formado por N camadas horizontais. . . .	28
Figura 4 – O circuito do método de <i>Wenner</i>	30
Figura 5 – Interpretação física do método de <i>Wenner</i>	32
Figura 6 – Ilustração geométrica da velocidade e atualização da posição de uma partícula bidimensional.	35
Figura 7 – Estratificação realizada para um solo específico de duas camadas e evolução da função de avaliação da melhor solução Gbest.	38
Figura 8 – Distribuição espacial das partículas para um caso específico de um solo de duas camadas, a partícula vermelha representa $x(\hat{y})$ e a partícula verde o ponto ótimo.	39
Figura 9 – Arranjo para a utilização do método da queda de potencial.	41
Figura 10 – Interpretação da curva característica do método da queda de potencial.	42
Figura 11 – Potencial elétrico na superfície do solo gerado pelo método da queda de potencial.	43
Figura 12 – Esquema de medição para o potencial de toque.	45
Figura 13 – Esquema de medição para o potencial de passo.	46
Figura 14 – Terrômetro digital MEGABRAS EM-4055	47
Figura 15 – Medidor de potencias de passo e de toque METREL MI 3295	48
Figura 16 – Carretel de altura ajustável	49
Figura 17 – Discretização do domínio em elementos finitos.	52
Figura 18 – Ilustração das condições de contorno homogêneas aplicadas ao problema.	56
Figura 19 – Visualização dos resultados em três dimensões.	57

Figura 20 – Ilustração do espelhamento da matriz de potencial elétrico.	58
Figura 21 – Ilustração de uma malha tridimensional utilizada nas simulações.	60
Figura 22 – Potencial e campo elétrico gerado pela passagem da corrente elétrica no solo no nível da malha ($z = h$).	63
Figura 23 – Potencial de passo e de toque na diagonal da malha	64
Figura 24 – Resultados de simulação	65
Figura 25 – Ilustração das condições de contorno aplicadas ao problema.	66
Figura 26 – Curva de resistividade aparente teórica em comparação aos pontos simulados.	67
Figura 27 – Ilustração das condições de contorno aplicadas ao problema.	68
Figura 28 – Aplicação do método dos elementos finitos para a determinação do patamar de potencial no método da queda de potencial.	68
Figura 29 – Estratificação otimizada do solo aplicada ao caso B1 da NBR 7117.	71
Figura 30 – Estratificação otimizada do solo aplicada ao caso B2 da NBR 7117.	73
Figura 31 – Estratificação otimizada do solo aplicada ao caso B3 da NBR 7117.	74
Figura 32 – Modelo do solo otimizado de duas e três camadas	77
Figura 33 – Malha de aterramento simulada.	78
Figura 34 – Resultados de simulação	79
Figura 35 – Subestação utilizada no estudo de caso (Subestação B)	81
Figura 36 – Sistema de aterramento simulado	81
Figura 37 – Comparação entre a curva gerada pelo algoritmo de otimização e os dados de campo	82
Figura 38 – Potencial de passo na superfície do solo.	84
Figura 39 – Potencial de toque na superfície do solo.	85
Figura 40 – Curva do método da queda de potencial simulado para a haste de retorno de corrente espaçada de $2m$ do sistema de aterramento.	86
Figura 41 – Montagem e ensaio do sistema de aterramento utilizado no estudo de caso.	87
Figura 42 – Procedimento experimental	89
Figura 43 – Curva característica obtida através do procedimento experimental.	90
Figura 44 – Potenciais de passo e de toque próximos ao transformador ensaiado.	91
Figura 45 – Leitura do potencial de passo existente na malha. Os pesos metálicos representam os dois pés de uma pessoa realizando um passo de um metro na subestação.	92
Figura 46 – Representação do potencial elétrico gerado por uma fonte pontual de corrente em um solo formado por camadas horizontais.	102
Figura 47 – Funções de Bessel do primeiro e segundo tipo.	104
Figura 48 – Regressão polinomial realizada.	108
Figura 49 – Curva de resistividade aparente	109

Lista de tabelas

Tabela 1 – funções $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$ para solos com diferentes quantidades de camadas.	29
Tabela 2 – Resultado da simulação em comparação a formulação analítica.	59
Tabela 3 – Resistividade elétrica de revestimentos superficiais típicos [$\Omega.m$]	62
Tabela 4 – Resultados de simulação para o método de <i>Wenner</i>	66
Tabela 5 – Estratificação otimizada do solo aplicada ao caso B1 da NBR 7117.	72
Tabela 6 – Estratificação otimizada do solo aplicada ao caso B2 da NBR 7117.	73
Tabela 7 – Estratificação otimizada do solo aplicada ao caso B3 da NBR 7117.	74
Tabela 8 – Resumo de todas as estratificações de solo realizadas	75
Tabela 9 – Resultados de Simulação	80
Tabela 10 – Resultados da otimização	83
Tabela 11 – Comparação entre o método analítico de (NASSEREDDINE et al., 2014a), as simulações realizadas neste trabalho e a regra prática.	86
Tabela 12 – Comparação entre o método analítico, as simulações realizadas e a regra prática.	88
Tabela 13 – Conjunto de pontos utilizados para a regressão polinomial	107

Lista de abreviaturas e siglas

IEEE	Instituto de Engenheiros Eletricistas e Eletrônicos
NBR	Norma Brasileira Regulamentadora
ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
FEM	Método dos Elementos Finitos
FDM	Método das Diferenças Finitas
FDTD	Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo
LT	Linha de Transmissão
PSO	Particle Swarm Optimization
RMS, RMSE	Raiz do erro médio quadrático
RSE	Erro quadrático
GPR	Máxima elevação de potencial no solo
SOR	Método da sobre-relaxação sucessiva

Lista de símbolos

\vec{J}	Vetor densidade de corrente elétrica
\vec{E}	Vetor campo elétrico
V	Potencial elétrico
\tilde{V}	Potencial elétrico interpolado
σ	Condutividade elétrica
x, y, z	Coordenadas cartesianas
ρ	Resistividade elétrica
ρ_s	Resistividade do material de revestimento
r, ϕ, z	Coordenadas cilíndricas
f, z	Funções desconhecidas
λ	Variável de integração
J_0	Função de Bessel de primeiro tipo e ordem zero
I	Corrente elétrica
h	Espessura de uma camada
k	índice de reflexão
K	Função do índice de reflexão
a	Espaçamento entre eletrodos
ρ_a	Resistividade aparente

E	Variável utilizada para decomposição polinomial
A_i	Índices de um polinômio interpolado
d	Distância entre a malha de terra e a haste de retorno de corrente
R_G	Resistência da malha de aterramento
R_C	Resistência do sistema de retorno de corrente
b	Profundidade do eletrodo no método de Wenner
t	Iteração
x	Posição da partícula
v	Velocidade da partícula
c_1	Parâmetro cognitivo
c_2	Parâmetro social
\hat{y}	Melhor solução
r	Variável aleatória
G_{best}	Ótimo global encontrado
Ω	Domínio
Γ	Contorno
N	Função de interpolação
r	Resíduo
R	Resíduo ponderado
g	Vetor de termos fonte
K	Matriz rigidez
n_{esp}	Número de espelhamentos
R	Resistência elétrica
l	comprimento da haste
a	raio da haste de aterramento
L	Comprimento de cabos

A	Área da malha
h	Profundidade da malha
E_{step}	Potencial de passo limite
E_{touch}	Potencia de toque limite
C_s	Fator de correção para o material de revestimento superficial
t_s	Duração do curto-circuito
GPR	Máxima elevação de potencial no solo
V_t	Potencial de toque
V_p	Potencial de passo
ρ_{at}	Resistividade aparente teórica
ρ_{ae}	Resistividade aparente experimental
D	Diagonal da malha de terra
ρ_0	Resistividade de solo homogêneo
J_{ν}	Função de Bessel do primeiro tipo e ordem ν
Y_{ν}	Função de Bessel do segundo tipo e ordem ν
H_{ν}	Função de Bessel do terceiro tipo e ordem ν
c	constantes de integração
β	Índices do polinômio interpolado
ψ	Função utilizada durante uma mudança de variável
Ψ	Função de ψ

Sumário

Introdução	19
1	MODELAGEM DO COMPORTAMENTO ELÉTRICO DO SOLO 22
1.1	Determinação da função potencial 23
1.1.1	Potencial elétrico em um solo homogêneo 24
1.1.2	Potencial elétrico na superfície de um solo estratificado em duas camadas horizontais 25
1.1.3	Potencial elétrico na superfície de um solo estratificado em N camadas horizontais 28
1.2	Medição de resistividade do solo: o método de <i>Wenner</i> 30
1.3	Aplicação da função potencial elétrico no método de <i>Wenner</i> . 32
1.4	Resolução da Equação 1.51 34
1.5	Estratificação ótima do solo 34
1.5.1	Metaheurística Particle Swarm Optimization (PSO) 35
1.5.2	Aplicação do PSO no método de <i>Wenner</i> 37
2	EXPERIMENTOS DE CAMPO, ANÁLISE E TRATAMENTO DOS DADOS 40
2.1	Medição da resistência de aterramento: o método da queda de potencial 41
2.2	Medição de potenciais de superfície 44
2.3	Instrumentação 46
2.3.1	Terrômetro digital MEGABRAS EM-4055 47
2.3.2	Medidor de potencias de passo e de toque METREL MI 3295 47
2.3.3	Carretel de altura ajustável 48
3	FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS DE ATERRAMENTO ELÉTRICO EM ELEMENTOS FINITOS 50
3.1	Formulação Eletromagnética de Problemas de Aterramento Elétrico 51
3.2	Formulação de Problemas de Aterramento Elétrico em Elementos Finitos 51
3.2.1	Discretização do Domínio 52
3.2.2	Seleção das funções de interpolação 52

3.2.3	Formulação do sistema de equações	53
3.2.4	Resolução do sistema de equações obtido	55
3.3	Condições de contorno em problemas de aterramento elétrico .	55
3.4	Análise dos resultados: pós-processamento	57
3.4.1	Cálculo da resistência de aterramento	58
3.4.2	Cálculo dos parâmetros de segurança para projetos	61
3.4.3	Determinação numérica dos parâmetros de segurança	62
3.5	Simulação de ensaios de sistemas de aterramento elétrico	65
3.5.1	Medição da resistividade do solo: o método de <i>Wenner</i>	65
3.5.2	Medição da resistência de aterramento: o método da queda de potencial	67
4	COMPARAÇÃO TEÓRICO-EXPERIMENTAL	70
4.1	Análise da Norma NBR 7117	71
4.1.1	Estudo de caso 1 – NBR 7117: Anexo B1	71
4.1.2	Estudo de caso 2 – NBR 7117: Anexo B2	72
4.1.3	Estudo de caso 3 – NBR 7117: Anexo B3	73
4.1.4	Considerações sobre os resultados obtidos	76
4.2	Projetos de sistemas de aterramento utilizando o método dos elementos finitos	77
4.2.1	Estudo de caso: Subestação A	77
4.2.2	Estudo de caso: Subestação B	80
4.3	Aplicação do método dos elementos finitos no comissionamento de projetos	85
4.3.1	Estudo de caso: Nassereddine et al. (2014a)	86
4.3.2	Estudo de caso: Nassereddine et al. (2014b)	87
4.3.3	Estudo de caso: Subestação B	89
	Conclusão	93
	Referências	97

ANEXOS 101

ANEXO A	– SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE EM CO- ORDENADAS CILÍNDRICAS COM SIMETRIA AXIAL ¹⁰²	
ANEXO B	– EXEMPLO DE APLICAÇÃO	106

Introdução

O aterramento elétrico é uma área bastante importante da Engenharia Elétrica, pois além de servir como referência para o sistema elétrico e equipamentos eletrônicos, garante a segurança de animais e seres humanos, além de prevenir danos as instalações.

O referido sistema atua na falta de isolação entre parte do enrolamento e a carcaça de máquinas elétricas, atuando quando estas não operam em condições normais com o objetivo de proporcionar segurança a seres humanos. Este também é responsável pela condução da sequência zero em sistemas de potência. Transformadores com o neutro aterrado conduzem a corrente de sequência zero quando há desequilíbrio na corrente de uma das fases do sistema, este aterramento atua permanentemente na instalação, visto que desequilíbrios de corrente são normais.

Sistemas de aterramento também são utilizados para fazer fluir a corrente de descarga atmosférica para o solo; servir de referência para sistemas eletrônicos e atuar como condutor de retorno em sistemas de eletrificação rural do tipo monofilar com retorno pela terra (MRT). Para [Martins Neto \(1998\)](#), dependendo do objetivo para o qual o sistema de aterramento foi projetado, ele pode cumprir um ou mais destes objetivos.

Quanto ao regime utilizado nos projetos de sistemas de aterramento, pode-se dividi-lo em regime permanente, que são os curtos-circuitos a frequência industrial no sistema elétrico de potência e regime transitório, caracterizado por transientes provenientes de descargas atmosféricas e manobras de chaveamento. Para o regime permanente, apenas a parte resistiva do aterramento é utilizada no projeto, já para o regime transitório é importante levar em consideração efeitos reativos como a indutância dos condutores e em alguns casos até mesmo efeitos capacitivos, devido à permissividade elétrica relativa do solo.

Um bom projeto de um sistema de aterramento elétrico depende também do modelo do comportamento elétrico do solo a ser utilizado. Esse modelo é obtido através da

estratificação do solo, que é realizada pela análise de um ensaio de campo, no qual são obtidas as características da resistividade do solo. O solo é geralmente um meio heterogêneo, portanto a sua estratificação irá fornecer um modelo em camadas de resistividade e espessuras distintas.

Motivação

Projetistas geralmente utilizam para o dimensionamento de sistemas de aterramento normas, em nível nacional e internacional, que impõem (ou sugerem) critérios de projetos para os sistemas de aterramento; como é o caso da norma [IEEE Std 80 \(2000\)](#) e da norma brasileira [NBR 15751 \(2013\)](#). Este tipo de dimensionamento é realizado baseando-se no equacionamento apresentado nas normas já citadas, onde se pode observar uma grande variedade de equações para diversos tipos de sistemas de aterramento. Essas equações apresentam certas restrições, como serem modeladas apenas para solos homogêneos, apresentarem apenas formulações voltadas a geometrias simples e adotarem fatores de correção para a determinação dos potenciais existentes na subestação. A utilização deste tipo de equacionamento para a realização de projetos pode levar a erros grosseiros entre os valores obtidos de resistência de aterramento e potenciais de superfície e os valores existentes.

Uma forma alternativa e mais precisa para o dimensionamento de sistemas de aterramento é a dos métodos numéricos para a resolução de equações diferenciais parciais, que têm sido cada vez mais estudados por apresentarem grande versatilidade na solução dos mais diversos problemas, os quais são praticamente inviáveis de serem resolvidos de forma analítica. Dentre estes métodos numéricos está o Método dos Elementos Finitos (FEM) que tem sido bastante adotado, pois permite a criação de uma malha de aterramento genérica, tanto em relação à sua geometria, quanto à posição dos condutores verticais na malha, calculando a resistência do sistema e os potenciais de passo e de toque com a presença ou não da camada de brita, verificando se os potenciais estão dentro dos limites capazes de evitar fibrilação ventricular no ser humano. Outra grande vantagem deste tipo de solução é a possibilidade de utilizarmos meios heterogêneos, como o solo estratificado em camadas, proporcionando uma melhor precisão para os resultados obtidos.

Objetivos

Este trabalho tem como objetivo principal, aplicar o método dos elementos finitos, modelados em problemas de condução de corrente de curto-circuito à frequência industrial, calculando a resistência de aterramento e verificando se um determinado projeto está dentro das especificações de segurança. O trabalho utilizará técnicas de otimização para a modelagem do solo e aplicará o FEM como forma de auxílio ao comissionamento de

subestações, simulando o método da queda de potencial ([IEEE Std 81, 2012](#); [NBR 15749, 2009](#)) e ensaios de potenciais de passo e de toque.

Organização do trabalho

O capítulo 1 apresenta o desenvolvimento de um modelo matemático para um solo heterogêneo. Neste capítulo, a função potencial elétrico para solos heterogêneos é aplicada no ensaio de *Wenner* com o intuito de se obter uma função de resistividade aparente teórica. O capítulo mostra o procedimento experimental para o ensaio de leitura de resistividade do solo pelo método de Wenner e ainda neste capítulo uma técnica de otimização é aplicada para a obtenção de um modelo otimizado do solo a partir dos ensaios realizados em campo.

No capítulo 2 são apresentados os procedimentos experimentais utilizados neste trabalho. O capítulo mostra o procedimento experimental para o ensaio de medição da resistência de aterramento pelo método da queda de potencial e dos ensaios de medição de potenciais de passo e de toque. É mostrada ainda, a instrumentação utilizada para os experimentos realizados.

O capítulo 3 apresenta a modelagem de problemas de aterramento elétrico em elementos finitos. Neste capítulo é mostrado como se interpretar os resultados de pós-processamento obtidos pela simulação e como aplicar o método nos mais diversos ensaios e projetos de aterramentos elétricos.

No capítulo 4 são apresentados os resultados obtidos neste trabalho. Foram realizados modelos otimizados do solo para ensaios de resistividade desenvolvidos pelo autor do trabalho e também ensaios encontrados nas referências. Projetos completos de subestações reais foram realizados utilizando o método dos elementos finitos e o mesmo método também foi aplicado como forma de auxílio ao comissionamento de projetos.

Finalmente, na parte referente aos anexos, são apresentadas algumas deduções de equações e exemplos de aplicação da metodologia apresentada neste trabalho.

Capítulo 1

Modelagem do Comportamento Elétrico do Solo

Introdução

No que diz respeito às características eletromagnéticas do solo somente a permeabilidade pode ser desprezada, tendo o valor igual a unidade. A permissividade relativa do solo varia em um amplo limite, entre 1 e 80, dependendo da natureza do solo ou das rochas que o formam (SUNDE, 1968). A resistividade elétrica varia em um intervalo ainda maior, entre 1 a 80 000 $\Omega.m$, sendo a sua medição local indispensável para aplicações em aterramento elétrico.

Para se desenvolver um modelo matemático do solo é necessário que se conheça o comportamento do potencial elétrico causado devido à condução de corrente no referido solo. Para fenômenos de baixa frequência, os efeitos causados pela corrente de deslocamento no solo podem ser desconsiderados, sendo adotado o modelo quase estático, ou seja, considerar apenas o efeito resistivo do solo.

O objetivo principal deste capítulo é apresentar uma função matemática que descreva o comportamento elétrico de um solo heterogêneo. Esta função representa o comportamento do solo no método de *Wenner* e será utilizada em um algoritmo de otimização para a realização da estratificação do solo a partir de leituras de campo. O modelo do solo obtido através da estratificação será utilizado nas simulações de elementos finitos, sendo as resistividades e espessuras das camadas horizontais do solo parâmetros de grande importância para a confiabilidade dos resultados obtidos através das simulações.

1.1 Determinação da função potencial

Para a determinação da função potencial elétrico no solo, parte-se da equação da continuidade de corrente. A mesma descreve o fenômeno de condução de corrente em um meio e é dada pela Equação 1.1. Neste trabalho todas as variáveis que representam grandezas vetoriais serão indicadas por setas.

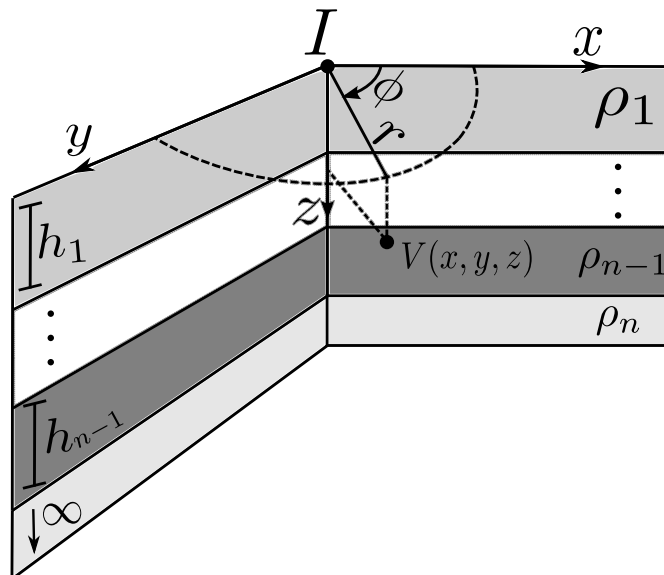
$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (1.1)$$

Aplicando-se a lei de Ohm $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ e utilizando-se a relação entre campo elétrico e potencial elétrico $\vec{E} = -\nabla V$ em 1.1 sendo \vec{J} o vetor densidade de corrente; \vec{E} o vetor intensidade de campo elétrico e $\sigma(x, y, z)$ a condutividade elétrica do meio, é possível concluir que o cálculo da função potencial elétrico é obtido através da resolução da equação de Laplace 1.2 ao se admitir nula a densidade volumétrica de cargas no meio.

$$\nabla^2 \sigma(x, y, z) V = 0 \quad (1.2)$$

Uma maneira de modelar matematicamente o solo é admiti-lo como um meio anisotrópico, ou seja, considerando que a sua condutividade elétrica varia ao longo de sua extensão. Em um modelo do solo em camadas horizontais a resistividade elétrica ρ do mesmo ($\rho = 1/\sigma$) é invariante ao longo das coordenadas x e y na região delimitada pelas espessuras h_i das camadas. Admitindo-se um sistema de coordenadas cilíndricas é possível reduzir a solução da equação de Laplace para duas variáveis devido a simetria ao longo do eixo z .

Figura 1 – Representação do potencial elétrico gerado por uma fonte pontual de corrente na superfície de um solo formado por camadas horizontais.



Fonte: Adaptado de [Martins Neto \(1998\)](#)

A Figura 1 ilustra a transformação de coordenadas realizada para um solo genérico, onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. As variáveis ρ_1 a ρ_n representam a resistividade das camadas do solo e são invariantes ao longo de r . As variáveis h_1 a h_{n-1} representam as espessuras das camadas, sendo a última camada infinita.

A solução genérica para o potencial elétrico no solo é encontrada através do método da separação de variáveis (SUNDE, 1968) e é mostrada na Equação 1.3. As variáveis f e g são funções desconhecidas da variável de integração λ e a função de *Bessel* de primeiro tipo e ordem zero é dada por J_0 . A dedução desta equação se encontra de forma detalhada no Anexo A deste trabalho.

$$V(r, z) = \int_0^\infty [f(\lambda)e^{-\lambda z} + g(\lambda)e^{\lambda z}]J_0(r\lambda)d\lambda \quad (1.3)$$

1.1.1 Potencial elétrico em um solo homogêneo

Para uma fonte de corrente pontual, que assume a simetria radial, temos que a densidade de corrente elétrica em coordenadas esféricas ao considerar o efeito da interface entre o ar e o solo, dada por:

$$\vec{J} = \frac{I}{2\pi|R|^2}\vec{R} \quad (1.4)$$

onde \vec{R} é um vetor na direção radial de um sistema de coordenadas esféricas e é relacionado com o sistema de coordenadas cilíndricas por $|R| = \sqrt{r^2 + z^2}$. Aplicando a lei de ohm $\vec{J} = \sigma\vec{E}$, o potencial elétrico de um ponto em relação ao infinito para um solo homogêneo V_0 pode então ser calculado por:

$$V_0 = \int_R^\infty \vec{E} \cdot d\vec{R} = \frac{\rho I}{2\pi|R|} \quad (1.5)$$

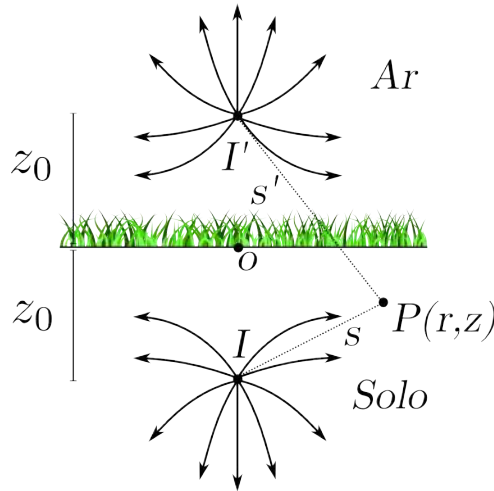
Fazendo-se uma analogia com o potencial elétrico em coordenadas cilíndricas mostrado na Figura 1, a Equação 1.5 pode ser reescrita como:

$$V_0 = \frac{\rho I}{2\pi|R|} = \frac{\rho I}{2\pi\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (1.6)$$

Quando esta fonte de corrente não está na superfície do solo, como mostra a figura 2, o potencial elétrico é determinado pela aplicação do método das imagens. O potencial é calculado considerando um meio homogêneo e infinito em todas as direções e a heterogeneidade gerada pela interface entre o ar e o solo é removida adicionando-se uma fonte de corrente imagem, como mostra a equação 1.7. As distâncias s e s' na figura correspondem às distâncias entre a fonte e o ponto e de sua imagem e este ponto. Note que quando $s = s'$, que corresponde ao ponto na superfície do solo, a equação 1.7 torna-se a equação 1.6.

$$V_0 = \frac{\rho I}{4\pi} \left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} \right] = \frac{\rho I}{4\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + z_0)^2}} \right] \quad (1.7)$$

Figura 2 – Representação das linhas de campo elétrico geradas por uma fonte pontual de corrente em um ponto P qualquer de um solo homogêneo.



Fonte: Adaptado de Sunde (1968)

A equação do potencial pode ser colocada na forma integral para ficar do mesmo tipo da solução genérica (Equação 1.3) através da integral de Lipschitz. Esta propriedade matemática é dada pela Equação 1.8.

$$\int_0^\infty e^{-\lambda\alpha} J_0(\lambda\beta) d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad (1.8)$$

assim, aplicando esta propriedade, podemos transformar a equação 1.6 em:

$$V_0(r, z) = \frac{\rho_0 I}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (1.9)$$

esta transformação será utilizada posteriormente neste trabalho para relacionar o potencial elétrico em um solo homogêneo com o potencial elétrico em um solo heterogêneo.

1.1.2 Potencial elétrico na superfície de um solo estratificado em duas camadas horizontais

Um modelo de solo heterogêneo, como o mostrado na Figura 1, tem sua função potencial determinada pela superposição do potencial fundamental, ou imposto, e do potencial secundário de cada camada (SUNDE, 1968). O potencial primário representa a excitação que será imposta ao potencial secundário, esta excitação é igual ao potencial V_0 gerado pela fonte de corrente na superfície da primeira camada do solo.

O potencial elétrico resultante em cada camada do solo é então dado por:

$$V_1 = V_0 + V_1' \quad (1.10)$$

$$V_2 = V_0 + V_2' \quad (1.11)$$

sendo o potencial secundário na primeira camada:

$$V_1' = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty \{f_1(\lambda)e^{-\lambda z} + g_1(\lambda)e^{\lambda z}\} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (1.12)$$

e o potencial secundário na segunda camada dado por:

$$V_2' = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty \{f_2(\lambda)e^{-\lambda z} + g_2(\lambda)e^{\lambda z}\} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (1.13)$$

substituindo as equações 1.12, 1.13 e 1.9 nas equações 1.10 e 1.11, temos:

$$V_1 = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty \{[1 + f_1(\lambda)]e^{-\lambda z} + g_1(\lambda)e^{\lambda z}\} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (1.14)$$

$$V_2 = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \int_0^\infty \{[1 + f_2(\lambda)]e^{-\lambda z} + g_2(\lambda)e^{\lambda z}\} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (1.15)$$

As funções desconhecidas $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$ são obtidas através da aplicação de condições de contorno ao problema. As mesmas podem ser resumidas como potencial nulo no infinito; vetor densidade de corrente tangencial a superfície do solo; continuidade do potencial elétrico na transição das camadas e continuidade da densidade de corrente elétrica na transição de camadas.

As condições de contorno impostas ao problema segundo Sunde (1968) são:

$$z \rightarrow \infty \quad V_2' \rightarrow 0 \quad (1.16)$$

$$z = 0 \quad \partial V_1' / \partial z = 0 \quad (1.17)$$

$$z = h \quad V_1 = V_2 \quad (1.18)$$

$$z = h \quad (1/\rho_1)(\partial V_1 / \partial z) = (1/\rho_2)(\partial V_2 / \partial z) \quad (1.19)$$

Para que o potencial elétrico se anule no infinito, Equação 1.16, é necessário que $g_2(\lambda) = 0$. Para satisfazer a condição de contorno de campo elétrico tangencial na superfície do solo, Equação 1.17, é necessário que $f_1(\lambda) = g_1(\lambda)$. As funções $f_1(\lambda)$ e $f_2(\lambda)$ são obtidas pela continuidade do potencial e densidade de corrente na transição de camadas.

Da continuidade do potencial elétrico na transição de camadas, Equação 1.18, é possível obter-se:

$$[1 + f_1(\lambda)]e^{-\lambda h} + g_1(\lambda)e^{\lambda h} = [1 + f_2(\lambda)]e^{-\lambda h} \quad (1.20)$$

o que resulta na equação 1.21.

$$f_2(\lambda) \cdot e^{-\lambda h} = f_1(\lambda) \cdot (e^{-\lambda h} + e^{\lambda h}) \quad (1.21)$$

Da continuidade da densidade de corrente elétrica na transição de camadas, Equação 1.19, é possível obter:

$$\frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \{[1 + f_1(\lambda)]e^{-\lambda h} + g_1(\lambda)e^{\lambda h}\} = \frac{1}{\rho_2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \{[1 + f_2(\lambda)]e^{-\lambda h}\} \quad (1.22)$$

substituindo a equação 1.21 na equação 1.22, temos que:

$$f_1(\lambda) \left[(e^{\lambda h} - e^{-\lambda h}) + \frac{\rho_1}{\rho_2} (e^{-\lambda h} + e^{\lambda h}) \right] = e^{-\lambda h} \left[1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right] \quad (1.23)$$

isolando o termo $f_1(\lambda)$ na equação 1.23, é possível obter-se:

$$f_1(\lambda) = \frac{\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) e^{-\lambda h}}{\frac{1 - e^{-2\lambda h}}{e^{-\lambda h}} + \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{1 + e^{-2\lambda h}}{e^{-\lambda h}}} \quad (1.24)$$

organizando a Equação 1.24, teremos então a equação 1.25.

$$f_1(\lambda) = \frac{(1 - \rho_1/\rho_2) e^{-2\lambda h}}{(1 + \rho_1/\rho_2) + (\rho_1/\rho_2 - 1)e^{-2\lambda h}} \quad (1.25)$$

Finalmente, multiplicando a Equação 1.25 por $1/(\rho_2 + \rho_1)$, chegamos a Equação 1.26, onde o índice de reflexão k_1 é dado por $(\rho_2 - \rho_1)/(\rho_2 + \rho_1)$.

$$f_1(\lambda) = g_1(\lambda) = \frac{k_1 e^{-2\lambda h}}{1 - k_1 e^{-2\lambda h}} \quad (1.26)$$

Para a determinação do modelo do solo, somente o potencial gerado na superfície do solo é necessário, ou seja, iremos utilizar $V_1(r, z = 0)$ que será chamada apenas de V por simplicidade.

$$V(r) = \frac{\rho_1 I}{2\pi r} \left[1 + 2r \int_0^\infty \frac{k_1 e^{-2\lambda h}}{1 - k_1 e^{-2\lambda h}} J_0(\lambda r) d\lambda \right] \quad (1.27)$$

Ao realizar a mudança de variável $\psi = k_1 e^{-2\lambda h}$, podemos reescrever o termo que multiplica $J_0(\lambda r)$ como:

$$\Psi = \frac{\psi}{1 - \psi} \quad (1.28)$$

ao expandir esta função em uma série de *Taylor*, teremos:

$$\Psi(\psi) = \Psi(p)(\psi - p) + \frac{\Psi^{(1)}(p)(\psi - p)}{1!} + \frac{\Psi^{(2)}(p)(\psi - p)^2}{2!} + \dots + \frac{\Psi^{(n)}(p)(\psi - p)^n}{n!} + \dots \quad (1.29)$$

tomando a série em torno de zero, ou seja $p = 0$, podemos concluir que:

$$\Psi(\psi) = \frac{0 \cdot \psi}{(1 - 0)} + \frac{\psi}{(1 - 0)^2} + \frac{2 \cdot \psi^2}{(1 - 0)^3 \cdot 2!} + \frac{6 \cdot \psi^3}{(1 - 0)^4 \cdot 3!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \psi^n \quad (1.30)$$

sendo então possível reescrever este termo como:

$$\frac{k_1 e^{-2\lambda h}}{1 - k_1 e^{-2\lambda h}} = \sum_{n=1}^{\infty} k_1^n e^{-2n\lambda h} \quad (1.31)$$

substituindo a Equação 1.31 na Equação 1.27, temos:

$$V(r) = \frac{\rho_1 I}{2\pi r} \left[1 + 2r \sum_{n=1}^{\infty} k_1^n \int_0^\infty e^{-2n\lambda h} J_0(\lambda r) d\lambda \right] \quad (1.32)$$

a equação do potencial para a superfície de um solo estratificado em duas camadas, pode ser finalmente solucionada ao aplicar-se a identidade matemática 1.8 na Equação 1.32.

$$V(r) = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left[\frac{1}{r} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_1^n}{\sqrt{r^2 + (2nh)^2}} \right] \quad (1.33)$$

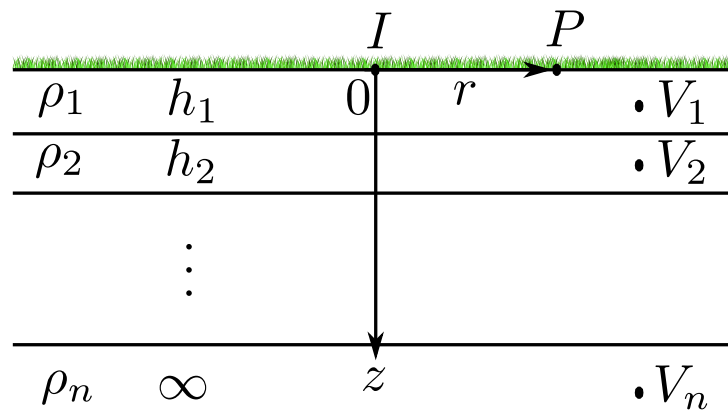
A remoção da integral indefinida tornou esta função mais fácil de ser solucionada, sendo a somatória infinita possivelmente truncada para a obtenção de uma precisão específica. A integração indefinida pode ser resolvida também através de integração numérica, como o de quadratura de *Gauss-Laguerre* mostrado na referência recente [Sadiku \(2009\)](#), porém necessitando de um maior esforço computacional para a realização deste cálculo.

1.1.3 Potencial elétrico na superfície de um solo estratificado em N camadas horizontais

A solução para o potencial elétrico em um solo arbitrário de N camadas é obtida da maneira semelhante ao modelo de duas camadas, sendo esta influenciada pela passagem de corrente em todas as camadas do solo. A Figura 3 ilustra o potencial elétrico em um ponto P qualquer da superfície de um solo heterogêneo, distante de r de uma fonte de corrente pontual I localizada na origem do sistema de referência.

O objetivo principal da resolução do sistema de equações que descrevem o problema apresentado na Figura 3, para todas as camadas do solo é a determinação do potencial elétrico na superfície do solo. Consequentemente, embora todas as funções desconhecidas sejam necessárias no processo de cálculo, no final, determinar somente as pertencentes ao potencial V_1 na primeira camada do solo é suficiente para este fim.

Figura 3 – Representação do potencial elétrico gerado por uma fonte pontual de corrente na superfície de um solo formado por N camadas horizontais.



Fonte: Adaptado de [Martins Neto \(1998\)](#)

A solução das funções desconhecidas $f_1(\lambda)$ e $g_1(\lambda)$ para modelos matemáticos de solos de duas a cinco camadas é mostrada em [Takahashi e Kawase \(1990\)](#), que é um artigo que mostra uma aplicação do equacionamento clássico de [Sunde \(1968\)](#). O valor das funções desconhecidas para diferentes quantidades de camadas é mostrado conforme a Tabela 1, note que $f_1(\lambda)$ e $g_1(\lambda)$ serão equivalentes entre si para qualquer tipo de solo estratificado em múltiplas camadas. Se substituirmos o valor das funções desconhecidas mostradas na Tabela 1 na equação para o potencial elétrico na primeira camada, o po-

tencial elétrico pode ser obtido para qualquer um dos modelos de solo apresentados. As funções desconhecidas são encontradas de forma similar ao modelo matemático de duas camadas, sendo que a mesmas são obtidas através da aplicação de condições de contorno para todas as N camadas do solo.

Tabela 1 – funções $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$ para solos com diferentes quantidades de camadas.

Quantidade de Camadas	$f(\lambda) = g(\lambda)$	Índices de reflexão
2	$\frac{k_1 e^{-2\lambda h_1}}{1 - k_1 e^{-2\lambda h_1}}$	$k_1 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$
3	$\frac{K_{31} e^{-2\lambda h_1}}{1 - K_{31} e^{-2\lambda h_1}}$	$K_{31} = \frac{k_1 + k_2 e^{-2\lambda h_2}}{1 + k_1 \cdot k_2 e^{-2\lambda h_2}}$ $k_2 = \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_3 + \rho_2}$
4	$\frac{K_{41} e^{-2\lambda h_1}}{1 - K_{41} e^{-2\lambda h_1}}$	$K_{41} = \frac{k_1 + K_{42} e^{-2\lambda h_2}}{1 + k_1 \cdot K_{42} e^{-2\lambda h_2}}$ $K_{42} = \frac{k_1 + k_3 e^{-2\lambda h_3}}{1 + k_2 \cdot k_3 e^{-2\lambda h_3}}$ $k_3 = \frac{\rho_4 - \rho_3}{\rho_4 + \rho_3}$
5	$\frac{K_{51} e^{-2\lambda h_1}}{1 - K_{51} e^{-2\lambda h_1}}$	$K_{51} = \frac{k_1 + K_{52} e^{-2\lambda h_2}}{1 + k_1 \cdot K_{52} e^{-2\lambda h_2}}$ $K_{52} = \frac{k_2 + K_{53} e^{-2\lambda h_3}}{1 + k_2 \cdot K_{53} e^{-2\lambda h_3}}$ $K_{53} = \frac{k_3 + k_4 e^{-2\lambda h_4}}{1 + k_3 \cdot k_4 e^{-2\lambda h_4}}$ $k_4 = \frac{\rho_5 - \rho_4}{\rho_5 + \rho_4}$

Fonte: (TAKAHASHI; KAWASE, 1990)

Utilizando as condições de contorno de potencial nulo no infinito; vetor densidade de corrente tangencial a superfície do solo; continuidade do potencial elétrico na transição das camadas e continuidade da densidade de corrente elétrica na transição de camadas, é possível obter-se uma lei de formação para determinar a função potencial na superfície de um solo estratificado em N camadas, como mostra a Equação 1.34. A solução obtida provém de uma série de substituições sucessivas e a mesma é generalizada para solos com uma quantidade arbitrária de camadas.

$$V(r) = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left[\frac{1}{r} + 2 \int_0^\infty \frac{K_{N1} e^{-2\lambda h_1}}{1 - K_{N1} e^{-2\lambda h_1}} J_0(\lambda r) d\lambda \right] \quad (1.34)$$

onde:

$$K_{N1} = \frac{k_1 + K_{N2} e^{-2\lambda h_2}}{1 + k_1 K_{N2} e^{-2\lambda h_2}} \quad (1.35)$$

$$K_{N2} = \frac{k_1 + K_{N3} e^{-2\lambda h_3}}{1 + k_2 K_{N3} e^{-2\lambda h_3}} \quad (1.36)$$

$$\dots K_{NS} = \frac{k_s + K_{NS+1} e^{-2\lambda h_{s+1}}}{1 + k_s K_{NS+1} e^{-2\lambda h_{s+1}}} \dots \quad (1.37)$$

$$K_{NN-2} = \frac{k_{N-2} + K_{NN-1} e^{-2\lambda h_{N-1}}}{1 + k_{N-2} K_{NN-1} e^{-2\lambda h_{N-1}}} \quad (1.38)$$

$$K_{NN-1} = k_{N-1} \quad (1.39)$$

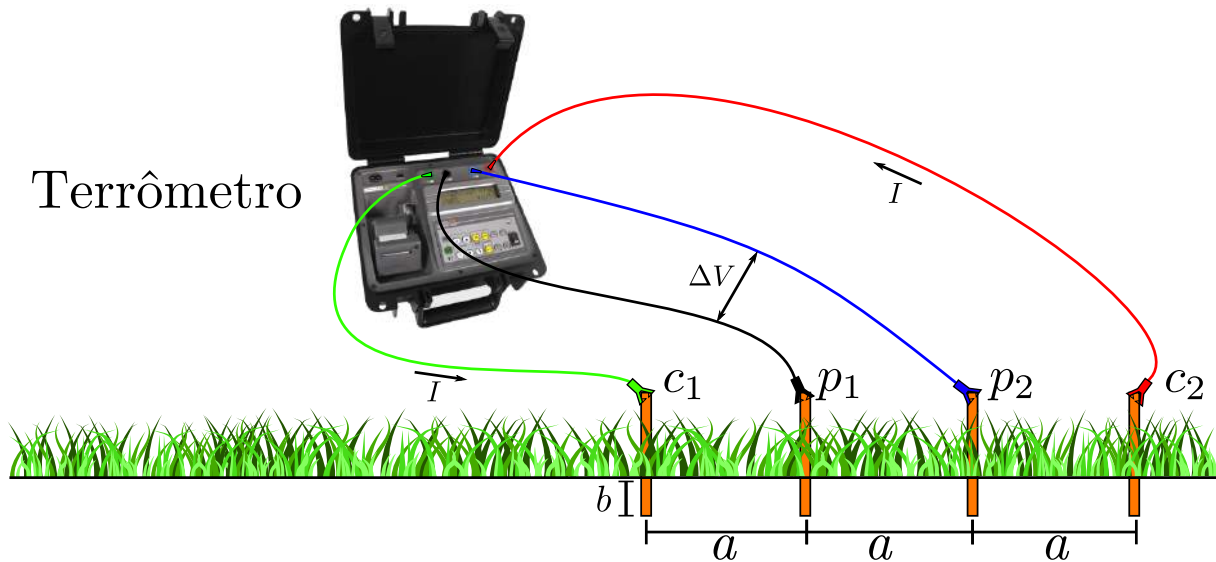
e

$$k_1 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \dots k_s = \frac{\rho_{s+1} - \rho_s}{\rho_{s+1} + \rho_s} \dots k_{N-1} = \frac{\rho_N - \rho_{N-1}}{\rho_N + \rho_{N-1}} \quad (1.40)$$

1.2 Medição de resistividade do solo: o método de Wenner

O método de *Wenner* é um método de prospecção geoeletrica onde para um arranjo de quatro hastes, como mostra a Figura 4, é possível obter uma relação entre a corrente que circula entre as hastes de corrente c_1 e c_2 ; a leitura da tensão entre as hastes de potencial p_1 e p_2 e a resistividade aparente do solo. A resistividade aparente no método de *Wenner* é obtida para uma profundidade proporcional ao espaçamento a das hastes relacionando-se a tensão e a corrente lida no ensaio.

Figura 4 – O circuito do método de *Wenner*.



Fonte: Elaboração própria.

A resistividade aparente no método de *Wenner* é obtida para uma profundidade b dos eletrodos utilizados no ensaio, sendo R a razão entre a tensão obtida e a corrente injetada para o arranjo de eletrodos espaçados a uma igual distância a entre os eletrodos. A seguir será apresentada a relação entre a resistividade aparente do solo e os parâmetros obtidos no ensaio de *Wenner* para um solo uniforme.

O potencial na haste de potencial p_1 , que está enterrada a uma profundidade b , é encontrado aplicando-se a Equação 1.7 ao método de *Wenner*, e o mesmo é dado por:

$$V_{p_1} = \frac{\rho_a I}{4\pi} \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + (2b)^2}} - \frac{1}{2a} - \frac{1}{\sqrt{(2a)^2 + (2b)^2}} \right] \quad (1.41)$$

de maneira semelhante, porém adotando uma corrente negativa, o potencial na haste p_2 é dado por:

$$V_{p_2} = \frac{\rho_a I}{4\pi} \left[\frac{1}{2a} + \frac{1}{\sqrt{(2a)^2 + (2b)^2}} - \frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (2b)^2}} \right] \quad (1.42)$$

então a diferença de potencial entre as hastes de potencial p_1 e p_2 é dada pela Equação 1.43.

$$V_{p_1} - V_{p_2} = \frac{\rho_a I}{4\pi} \left[\frac{1}{a} + \frac{2}{\sqrt{a^2 + 4b^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right] \quad (1.43)$$

A relação entre a diferença de potencial entre as hastes de potencial e a corrente injetada é dimensionalmente igual a resistência. A resistividade aparente lida por este arranjo no ensaio é então dada pela Equação 1.44, também conhecida como equação de *Palmer*.

$$\rho_a = \frac{4\pi a R}{1 + \frac{2a}{\sqrt{a^2 + 4b^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}} \quad (1.44)$$

Para [IEEE Std 81 \(2012\)](#) como os eletrodos geralmente não estão enterrados a uma profundidade maior que dez por cento do espaçamento entre as hastes, pode-se desprezar o termo b na Equação 1.44, porém vale ressaltar que para espaçamentos muito pequenos, como $1m$, esta formula não deve ser negligenciada devido a inviabilidade de se instalar o eletrodo de forma tão superficial. Caso seja necessário, ao se cravar os eletrodos no solo, pode-se melhorar o contato dos mesmos utilizando-se água entre o eletrodo e o solo. O resultado da simplificação realizada, que resulta em hastes cravadas na superfície do solo, é mostrada na Equação 1.45.

$$\rho_a = 2\pi a R \quad (1.45)$$

Para mapear o solo de maneira uniforme no ensaio de resistividade podemos seguir o procedimento mostrado em [NBR 7117 \(2012\)](#). Nesse procedimento são realizadas leituras em várias linhas de medição, distribuídas na área reservada para a subestação. Com o intuito de se modelar o perfil do solo da maneira mais representativa possível, é adotada a média para cada espaçamento das linhas de medição, sendo removidas as medições com um desvio padrão acima de 50%, se a linha inteira de medições possuir um alto desvio padrão em relação às demais, esta linha também poderá ser descartada. Tal procedimento fornece dados para um modelo de solo em camadas horizontais, sendo que uma maneira capaz de gerar um modelo mais realista do solo é apresentada em [Calixto et al. \(2012\)](#), esta é capaz de modelar o solo em camadas não horizontais.

Um bom modelo de solo é essencial para a correta elaboração de projetos de sistemas de aterramento elétrico. Solos mais resistivos irão necessitar de uma maior área e de uma maior quantidade de condutores para a obtenção de um valor de resistência aceitável. As características das camadas do solo também são importantes, pois o tipo de aterramento a ser adotado depende de tais camadas. Um exemplo disso são os sistemas de

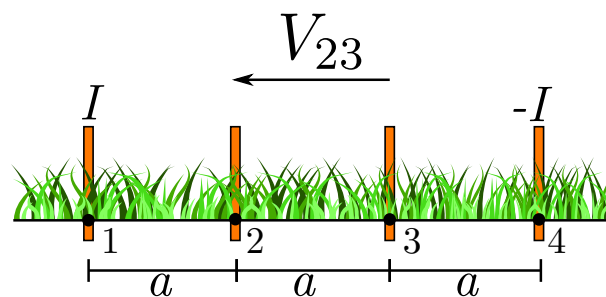
aterramento compostos por hastes profundas, que geralmente são condutores enterrados verticalmente e interconectados de forma a atingir grandes profundidades. Esses sistemas tem melhor desempenho quando as camadas profundas possuem menor resistividade elétrica que as camadas mais superficiais.

De acordo com [NBR 7117 \(2012\)](#) cada linha de medição para o ensaio deve possuir no mínimo cinco medidas com distâncias diferentes entre eletrodos, sendo recomendadas por motivos práticos pela norma, medidas com espaçamentos na forma de potências de 2, como: $1m$, $2m$, $4m$, $8m$, $16m$ e assim por diante. Para projetos de sistemas de aterramento deve ser considerada também a variação sazonal da resistividade do solo, devendo ser realizada uma medição no período mais crítico, que de maneira geral são os períodos mais secos do ano. As medições também devem ser realizadas com intervalos de sete dias sem chuvas devido a distorção nos resultados obtidos nesta situação.

1.3 Aplicação da função potencial elétrico no método de Wenner

Utilizando-se quatro eletrodos igualmente espaçados, é possível que se encontre uma relação entre a corrente injetada e a diferença de potencial lida na superfície do solo, como mostra a [Figura 5](#). Neste método é imposta uma corrente nos eletrodos externos que causa uma elevação de potencial no solo.

Figura 5 – Interpretação física do método de *Wenner*.



FONTE: Adaptado de [Martins Neto \(1998\)](#)

A diferença de potencial entre os dois eletrodos centrais é relacionada com a resistividade do solo a uma profundidade proporcional ao espaçamento a entre as hastes, tanto em solos uniformes como em solos heterogêneos, conforme a [Equação 1.46](#). Para várias leituras com espaçamentos diferentes é possível obter-se uma curva de resistividade aparente experimental do solo.

$$\rho_a = 2\pi a \frac{V_{23}}{I} \quad (1.46)$$

O cálculo da função resistividade aparente é realizado aplicando-se a função potencial elétrico no método de *Wenner* ao substituir-se a diferença de potencial gerada por uma corrente I e $-I$ nos condutores centrais na Equação 1.46, a razão entre V_{23} e I tem dimensão igual a resistência elétrica, como é mostrado na Equação 1.45. A Figura 5 mostra o modelo físico para a determinação desta grandeza. De acordo com esta figura, no caso de um solo de duas camadas, o potencial elétrico gerado pela passagem de corrente nas hastes de corrente no ponto 2 é igual a:

$$V_2 = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left[\frac{1}{a} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_1^n}{\sqrt{a^2 + (2nh)^2}} - \frac{1}{2a} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_1^n}{\sqrt{4a^2 + (2nh)^2}} \right] \quad (1.47)$$

de forma análoga, o potencial elétrico no ponto 3 é igual a:

$$V_3 = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left[\frac{1}{2a} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_1^n}{\sqrt{4a^2 + (2nh)^2}} - \frac{1}{a} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_1^n}{\sqrt{a^2 + (2nh)^2}} \right] \quad (1.48)$$

portanto, a diferença de potencial V_{23} entre as hastes de potencial é:

$$V_{23} = V_2 - V_3 = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left[\frac{1}{a} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_1^n}{\sqrt{a^2 + (2nh)^2}} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_1^n}{\sqrt{4a^2 + (2nh)^2}} \right] \quad (1.49)$$

Para um modelo do solo em duas camadas a função resistividade aparente é então dada pela Equação 1.50,

$$\rho_a = \rho_1 \left\{ 1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{k_1^n}{\sqrt{1 + \left(\frac{2nh}{a}\right)^2}} - \frac{k_1^n}{\sqrt{4 + \left(\frac{2nh}{a}\right)^2}} \right] \right\} \quad (1.50)$$

onde o índice de reflexão k_1 é dado por $(\rho_2 - \rho_1)/(\rho_2 + \rho_1)$.

Para um modelo do solo genérico em N camadas, a função resistividade aparente é deduzida de maneira similar ao modelo de duas camadas, porém utilizando-se a Equação 1.34 para o cálculo da diferença de potencial entre os eletrodos. A função resistividade aparente para um solo heterogêneo é então dada pela Equação 1.51.

$$\rho_a = \rho_1 \left\{ 1 + 4a \int_0^{\infty} \frac{K_{N1} e^{-2\lambda h_1}}{1 - K_{N1} e^{-2\lambda h_1}} [J_0(\lambda a) - J_0(2\lambda a)] d\lambda \right\} \quad (1.51)$$

Esta equação pode ser solucionada por integração numérica, porém o esforço computacional necessário para este procedimento é muito grande. Para se utilizar esta função em um algoritmo computacional onde inúmeras iterações são realizadas é interessante que esta expressão seja solucionada analiticamente. Um método bastante interessante para se resolver esta equação é mostrado nas referências [Sousa \(2003\)](#) e [Calixto \(2012\)](#).

1.4 Resolução da Equação 1.51

A equação da resistividade aparente genérica para um solo estratificado em N camadas horizontais pode ser realizada por um procedimento similar ao solo de duas camadas. Para se usar a propriedade mostrada na Equação 1.8 pode-se utilizar a seguinte mudança de variável:

$$E = e^{-2\lambda h_1} \quad (1.52)$$

definindo $r_i = \frac{h_i}{h_1}$ podemos reescrever $E^{r_i} = e^{-2\lambda h_i}$. Sabendo que $0 \leq E \leq 1$ como todas as resistividades e espessuras das camadas são conhecidas, podemos decompor a função característica do meio heterogêneo estratificado em camadas horizontais N_N por um polinômio como mostrado em Calixto (2012).

$$N_N(\lambda) = \frac{K_{N1}e^{-2\lambda h_1}}{1 - K_{N1}e^{-2\lambda h_1}} \rightarrow N_N(E) = A_0 + A_1E + A_2E^2 + \dots \quad (1.53)$$

substituindo 1.53 em 1.51 temos a Equação 1.54.

$$\rho_a = \rho_1 \left\{ 1 + 4a \int_0^\infty [A_0 + A_1E + A_2E^2 + \dots] [J_0(\lambda a) - J_0(2\lambda a)] d\lambda \right\} \quad (1.54)$$

Com a decomposição realizada torna-se possível simplificar a expressão através da propriedade mostrada na Equação 1.8. A equação simplificada da resistividade aparente para um solo de N camadas é mostrada na Equação 1.55, onde os termos A_i são os coeficientes do polinômio gerado na decomposição de $N_N(E)$. Um exemplo de aplicação deste equacionamento é encontrado no Anexo B deste trabalho.

$$\rho_a = \rho_1 \left\{ 1 + 4a \sum_{i=0}^n A_i \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + 4h_1^2 i^2}} - \frac{1}{\sqrt{4a^2 + 4h_1^2 i^2}} \right] \right\} \quad (1.55)$$

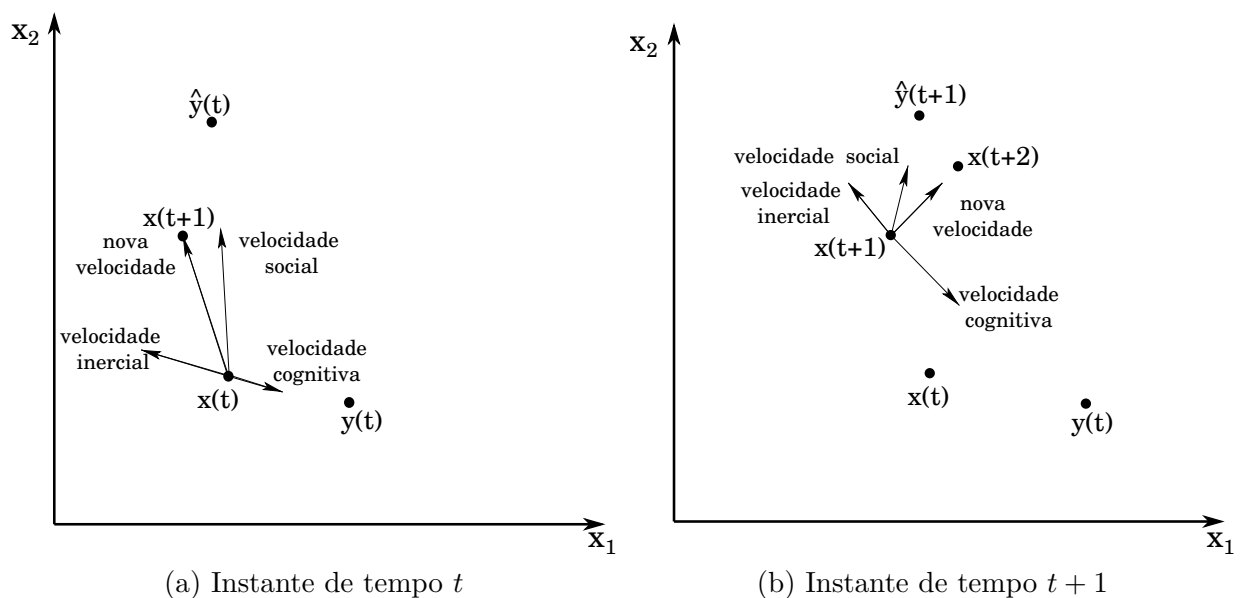
1.5 Estratificação ótima do solo

Nesta parte do capítulo será apresentada uma maneira de se obter a modelagem elétrica do solo a partir de medições de campo utilizando-se o método de *Wenner*. Até aqui foi modelada a solução direta da resistividade aparente lida no método de *Wenner*, onde a partir dos valores de resistividade e espessuras das camadas foi possível calcular a resistividade aparente do solo para um espaçamento específico entre as hastes no ensaio. O problema inverso, também conhecido como estratificação do solo, irá utilizar a curva de resistividade aparente obtida no ensaio de *Wenner* para a obtenção das resistividades e espessuras das camadas do solo. Para o processo inverso será utilizada uma metaheurística de otimização, o *Particle Swarm Optimization* (PSO), onde a partir das medições realizadas em campo este algoritmo ajustará os parâmetros da curva de resistividade aparente teórica, encontrando as resistividades e espessuras das camadas, minimizando o erro em relação a curva de resistividade obtida no ensaio realizado em campo.

1.5.1 Metaheurística Particle Swarm Optimization (PSO)

Metaheurísticas são métodos de solução de problemas genéricos que coordenam procedimentos de busca local com estratégias do mais alto nível, de modo a criar um processo capaz de escapar de ótimos locais e realizar uma busca robusta no espaço de soluções de um problema, abrangendo também qualquer procedimento que empregue estratégias para escapar de ótimos locais. Para [Rodrigues \(2009\)](#) uma metaheurística, portanto, visa produzir um resultado satisfatório para um problema, porém sem qualquer garantia de encontrar o ponto ótimo, ou seja, a melhor solução não necessariamente será obtida pelo fato de ser um método estocástico.

Figura 6 – Ilustração geométrica da velocidade e atualização da posição de uma partícula bidimensional.



Fonte: Adaptado de [Engelbrecht \(2007\)](#)

O método utilizado neste trabalho é o *Particle Swarm Optimization* (PSO) que teve inspiração no comportamento social de agrupamento de animais como revoadas de pássaros e cardumes de peixes. Este algoritmo foi proposto por [James e Russell \(1995\)](#) de forma a ser muito poderoso e implementado em poucas linhas de código. O mesmo utiliza apenas operadores matemáticos básicos e é bem eficiente em termos de memória e velocidade com a vantagem de poder ser adaptado aos mais diversos tipos de problemas apenas codificando o vetor solução e a função de aptidão.

Um algoritmo PSO é composto de um enxame de partículas, onde cada partícula representa um solução potencial. Em analogia com os paradigmas de computação evolucionária, um enxame é semelhante a uma população, enquanto que uma partícula é semelhante a um indivíduo. Em termos simples, as partículas percorrem um espaço de busca multidimensional, onde a posição de cada partícula é ajustada de acordo com a sua

própria experiência e da de seus vizinhos. O comportamento coletivo que surge deste simples comportamento individual é capaz de encontrar regiões ótimas de espaços de busca com uma elevada dimensão. A Figura 6 mostra o movimento de uma partícula bidimensional no decorrer de uma iteração, este movimento depende de parâmetros cognitivos da partícula e de um parâmetro social do enxame.

Algoritmo 1 Algoritmo PSO Global (ENGELBRECHT, 2007)

```

1: Criar e inicializar um enxame de dimensão  $n_x$ ;
2: repeat
3:   for cada partícula  $i = 1, \dots, n_s$  do
4:     //atualizar a melhor posição da partícula.
5:     if  $f(x_i) < f(y_i)$  then
6:        $y_i = x_i$ 
7:     end if
8:     //atualizar a melhor posição do enxame.
9:     if  $f(y_i) < f(\hat{y})$  then
10:       $\hat{y} = y_i$ 
11:    end if
12:  end for
13: for cada partícula  $i = 1, \dots, n_s$  do
14:   //atualizar a velocidade;
15:    $v_{ij}(t+1) = v_{ij}(t) + c_1 r_{1j}(t) [y_{ij}(t) - x_{ij}(t)] + c_2 r_{2j}(t) [\hat{y}_j(t) - x_{ij}(t)]$ 
16:   //atualizar a posição;
17:    $x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1)$ 
18: end for
19: until critério de parada satisfeito;

```

Tomando $x_i(t)$ como a posição da partícula i no espaço de busca em um passo de tempo t . A posição da partícula é alterada pela adição de um vetor velocidade, $v_i(t)$, para a posição atual, ou seja, é o vector de velocidade que conduz o processo de otimização.

$$v_{ij}(t+1) = v_{ij}(t) + c_1 r_{1j}(t) [y_{ij}(t) - x_{ij}(t)] + c_2 r_{2j}(t) [\hat{y}_j(t) - x_{ij}(t)] \quad (1.56)$$

$$x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1) \quad (1.57)$$

O mesmo reflete tanto o conhecimento empírico da partícula como a informação socialmente trocada a partir da partícula de vizinhança. O conhecimento experimental de uma partícula é geralmente referido como o componente cognitivo, que é proporcional à distância entre a partícula até a sua melhor posição encontrada desde a primeira iteração. A informação trocada socialmente é referida como o componente social da equação da velocidade.

Para este trabalho será utilizado o algoritmo PSO global, que é mostrado no algoritmo 1. Neste algoritmo a vizinhança de cada partícula é composta pelo enxame completo. Os parâmetros a serem ajustados são o critério de parada; o número de partículas n_s ; o

parâmetro cognitivo c_1 e o parâmetro social c_2 . A velocidade v (Equação 1.56) será ajustada com uma parcela de aleatoriedade r para a atualização da posição x das partículas (Equação 1.57). A solução inicial é tomada para uma partícula aleatória e a otimizada será a posição da melhor solução $x(\hat{y})$, onde \hat{y} é a melhor solução, quando o critério de parada for satisfeito.

1.5.2 Aplicação do PSO no método de Wenner

Para a determinação de um modelo do comportamento elétrico, ou estratificação do solo é necessário que a partir das medições locais de resistividade do solo pelo método de Wenner se obtenha uma curva de resistividade experimental. A partir do equacionamento desenvolvido por Sunde (1968) pode-se encontrar aplicando algum método de otimização exato ou com a utilização de metaheurísticas, os parâmetros de resistividade e espessura das camadas para um modelo de camadas horizontais, onde o erro entre os pontos medidos e uma curva teórica é minimizado.

A aplicação do algoritmo PSO para a realização da estratificação do solo é resumida como a codificação do vetor solução e da função de aptidão (*fitness*). A codificação do vetor solução (posição das partículas) \mathbf{x} é mostrada na Equação 1.58 e o mesmo representa a resistividade e espessuras das camadas da curva teórica $\rho_a T$. A mesma será ajustada aos valores da curva de resistividade experimental $\rho_a E$. A estratificação é obtida ao se minimizar a diferença entre as leituras de campo e uma curva teórica que no algoritmo são os valores do vetor $\mathbf{x}(\hat{y})$, que também é chamado de *Gbest*.

$$\mathbf{x} = [\rho_1 \quad \rho_2 \quad \cdots \quad \rho_n \quad h_1 \quad h_2 \quad \cdots \quad h_{n-1}] \quad (1.58)$$

A função de fitness a ser otimizada foi adaptada do trabalho de Calixto et al. (2010) e representa o erro RMS (*Erro Médio Quadrático*) das leituras de campo e os valores obtidos na curva teórica. Quanto mais a curva teórica se aproxima das leituras de campo, mais preciso é o modelo do solo.

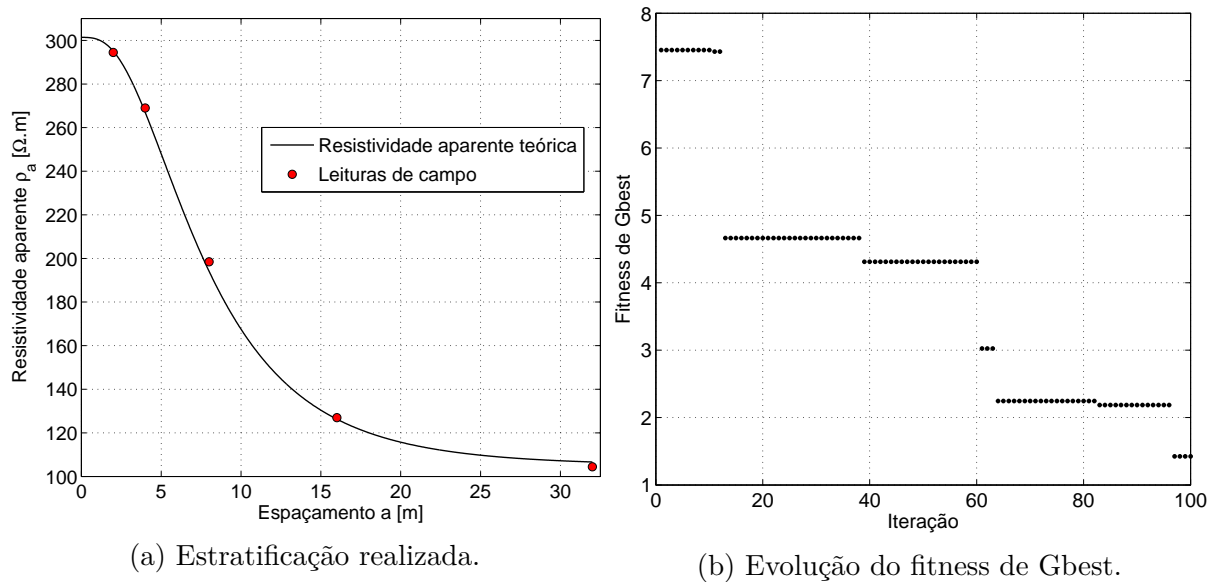
$$f(\mathbf{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\rho_a E_i(a_i) - \rho_a T_i(a_i, x)}{\rho_a E_i(a_i)} \right)^2} \quad (1.59)$$

Com o objetivo de ilustrar a aplicação do PSO para a estratificação do solo, um exemplo é realizado utilizando como dados de campo $\rho_a E$ os valores encontrados com a aplicação da função de resistividade aparente teórica $\rho_a T$ para um solo de duas camadas e com a resistividade da primeira camada $\rho_1 = 300\Omega \cdot m$; resistividade da segunda camada $\rho_2 = 100\Omega \cdot m$ e espessura da primeira camada $h_1 = 5m$. Os valores de espaçamento das hastes a em metros adotados foram de $a = [2, 4, 8, 16, 32]$. O ajuste de parâmetros utilizado neste exemplo foram de 100 iterações; o número de partículas n_s foi igual a 50; o parâmetro cognitivo $c_1 = 0,8$ e o parâmetro social $c_2 = 0,8$. Para as restrições de limites

de solução foram adotados de 0,5 a 10m para a espessura das camadas e de 1 a $3000\Omega \cdot m$ para a resistividade das camadas, que representa praticamente uma busca cega.

A Figura 7 mostra a estratificação realizada para uma inicialização de partículas aleatória específica. Os valores de $Gbest$ obtidos foram utilizados para a geração da curva teórica e uma comparação é feita com os valores exatos utilizados como os dados experimentais conforme a Figura 7a. A evolução da melhor solução no decorrer das iterações é mostrada na Figura 7b, note que a referida figura apresenta a forma escada devido ao fato da melhor solução global ser sobrescrita apenas quando uma melhor solução é encontrada.

Figura 7 – Estratificação realizada para um solo específico de duas camadas e evolução da função de avaliação da melhor solução $Gbest$.



(a) Estratificação realizada.

(b) Evolução do fitness de Gbest.

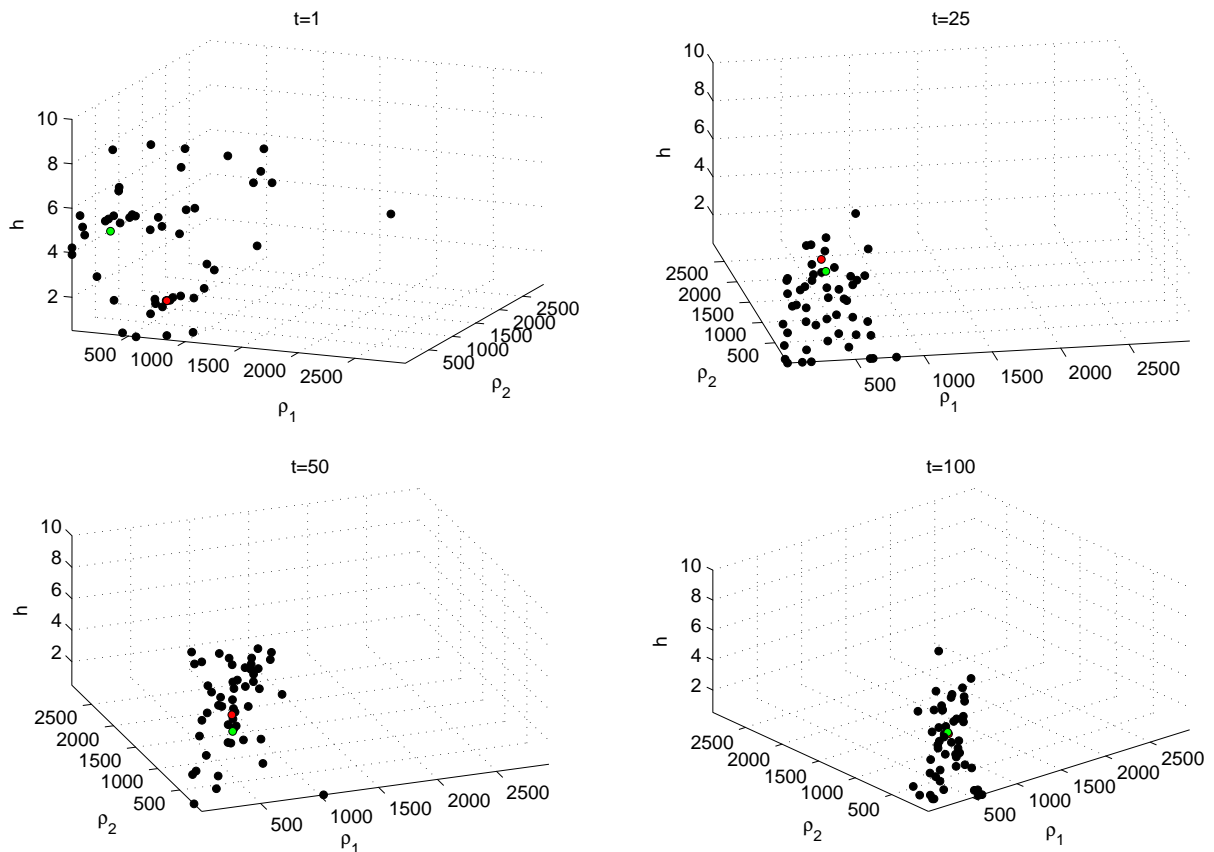
Fonte: Elaboração própria

Os valores encontrados na estratificação realizada foram de $\rho_1 = 302,761\Omega \cdot m$; $\rho_2 = 98,146\Omega \cdot m$ e $h = 5,128m$. O erro médio total entre os valores obtidos utilizando os dados de estratificação obtidos e os dados adotados como experimentais foi de 0,52% e o erro médio absoluto foi de 1,15%. Os valores obtidos para este exemplo são variantes para cada execução do código, por se tratarem de um método estocástico que não garante a obtenção da solução ótima. Com o intuito de incrementar a precisão dos resultados a re-execução do código pode ser realizada; os seus parâmetros podem ser ajustados e a quantidade de iterações pode ser incrementada.

Para a melhor compreensão da heurística na qual o algoritmo se baseia, para modelos do solo em duas camadas é possível mostrar a distribuição espacial das partículas, como mostra a Figura 8. Apesar de ser o caso mais simples de aplicação deste método a estratificação do solo, sua função objetivo a ser otimizada encontra-se no hiperespaço, não sendo possível sua visualização e por consequência a determinação do seu ponto ótimo. Para este problema o ponto ótimo somente é conhecido porque a curva de resistividade

aparente experimental foi gerada a partir de pontos conhecidos. A Figura 8 mostra a distribuição espacial das partícula no decorrer de 100 iterações t , sendo mostradas apenas quatro situações específicas: $t = 1$, $t = 25$, $t = 50$, $t = 100$. O ponto em vermelho na Figura representa a posição da melhor solução da iteração e o ponto verde representa o ótimo da função, que para este caso específico é previamente conhecido.

Figura 8 – Distribuição espacial das partículas para um caso específico de um solo de duas camadas, a partícula vermelha representa $x(\hat{y})$ e a partícula verde o ponto ótimo.



Fonte: Elaboração própria

Analisando a Figura 8 é possível concluir que para uma população de soluções inicialmente posicionadas de forma aleatória dentro do espaço de busca, ao decorrer das iterações as mesmas comportam-se de forma ordenada tendo como referência a posição da melhor partícula representada em vermelho. Este comportamento é bem semelhante ao de revoadas de pássaros, que se agrupam tendo como base um ponto de referência que muda ao decorrer do trajeto. Também é possível observar que as partículas se agruparam em torno da melhor solução no decorrer das iterações, explorando melhor as localidades próximas desta solução em busca de uma solução ainda melhor para o problema.

Capítulo 2

Experimentos de Campo, Análise e Tratamento dos Dados

Introdução

Neste capítulo é apresentada a metodologia para a realização de ensaios de medição da resistência elétrica pelo método da queda de potencial e medições de potenciais de passo e de toque existentes em um sistema de aterramento elétrico. Os procedimentos experimentais que aqui apresentamos serão utilizados para a realização de medições de campo no Capítulo 4. Tais procedimentos foram baseados nas normas ABNT [NBR 15749 \(2009\)](#) e [IEEE Std 81 \(2012\)](#).

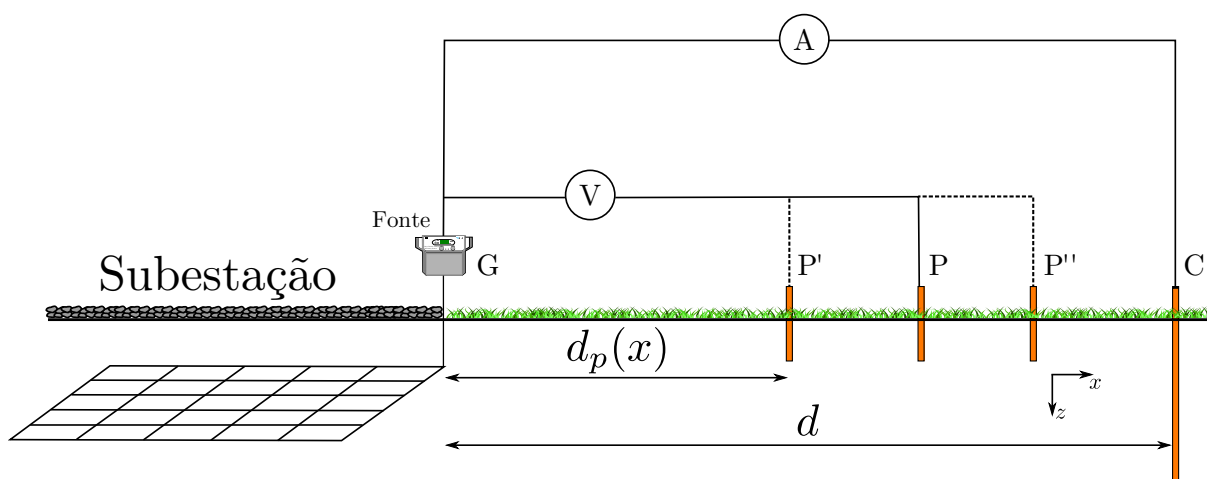
O capítulo também apresenta a fundamentação teórica para os ensaios de sistemas de aterramento elétrico, visando a correta interpretação dos resultados obtidos em campo. Os conceitos aqui apresentados serão também utilizados no Capítulo 3, onde estes procedimentos experimentais serão simulados em um ambiente computacional.

Mostramos ainda a instrumentação utilizada para os experimentos realizados no Capítulo 4. Estes equipamentos são utilizados para a realização das medições de resistividade do solo pelo método de *Wenner*, a medição de resistência de aterramento e as medições das tensões de passo e de toque na subestação.

2.1 Medição da resistência de aterramento: o método da queda de potencial

O método da queda de potencial tem como objetivo realizar a medição da resistência de aterramento em um sistema. O mesmo envolve a passagem de uma corrente entre um sistema de aterramento e uma sonda de corrente C . Em seguida é medida a tensão entre o sistema de aterramento e a sonda de potencial P , sendo a posição da sonda de potencial variada nas direções P' e P'' , como mostra a Figura 9. A sonda de potencial é variada com o objetivo de se obter uma curva característica do método, quando encontrada uma região onde as leituras são constantes, adota-se este valor como a resistência de aterramento do sistema.

Figura 9 – Arranjo para a utilização do método da queda de potencial.



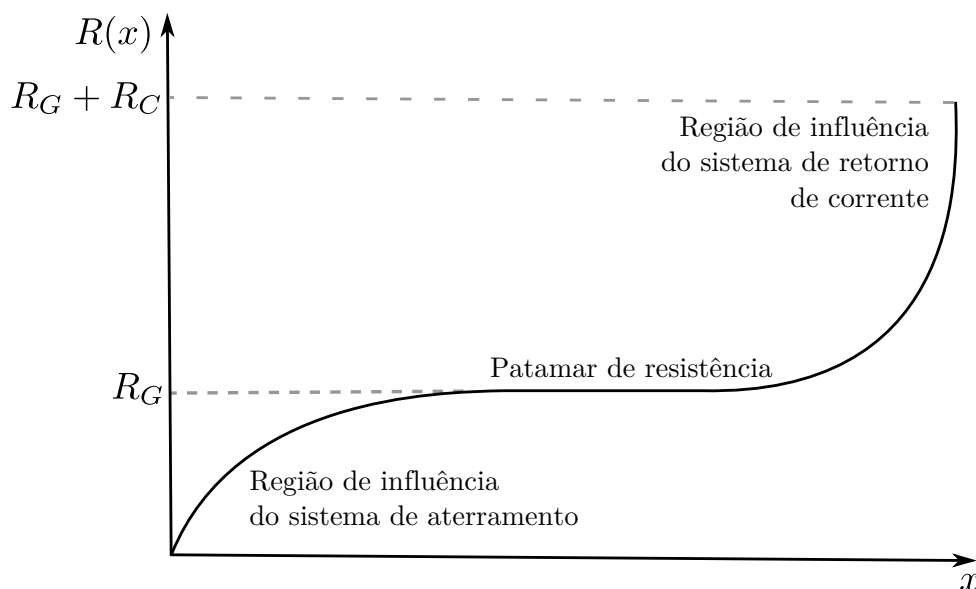
Fonte: Elaboração própria.

Para minimizar influências inter-eletrodos devido a resistências mútuas, o teste é geralmente realizado adotando-se uma distância considerável entre o sistema de aterramento e o eletrodo de retorno de corrente, caso contrário a curva característica do método pode não se estabilizar não sendo possível determinar com precisão o valor da resistência de aterramento do sistema. Normalmente, esta distância do eletrodo de corrente é pelo menos cinco vezes a maior dimensão do sistema de aterramento em teste (IEEE Std 81, 2012).

A sonda de potencial é tipicamente posicionada na mesma direção que a haste de corrente, entretanto, a referida sonda pode ser colocada no sentido oposto se uma grande área é disponível para o ensaio. Na prática, a distância x para a sonda de potencial é frequentemente adotada como 61,8% da distância entre o sistema de aterramento e a haste de corrente como mostrado em IEEE Std 81 (2012), **esta consideração é errônea, pois é válida somente para solos uniformes**. A Figura 10 mostra a curva característica do método quando a sonda de potencial está entre o aterramento e a haste de retorno de

corrente. A variável d representa a distância entre o sistema de aterramento e o condutor de retorno de corrente R_G é a resistência do sistema de aterramento e R_C é a resistência da haste de retorno de corrente.

Figura 10 – Interpretação da curva característica do método da queda de potencial.



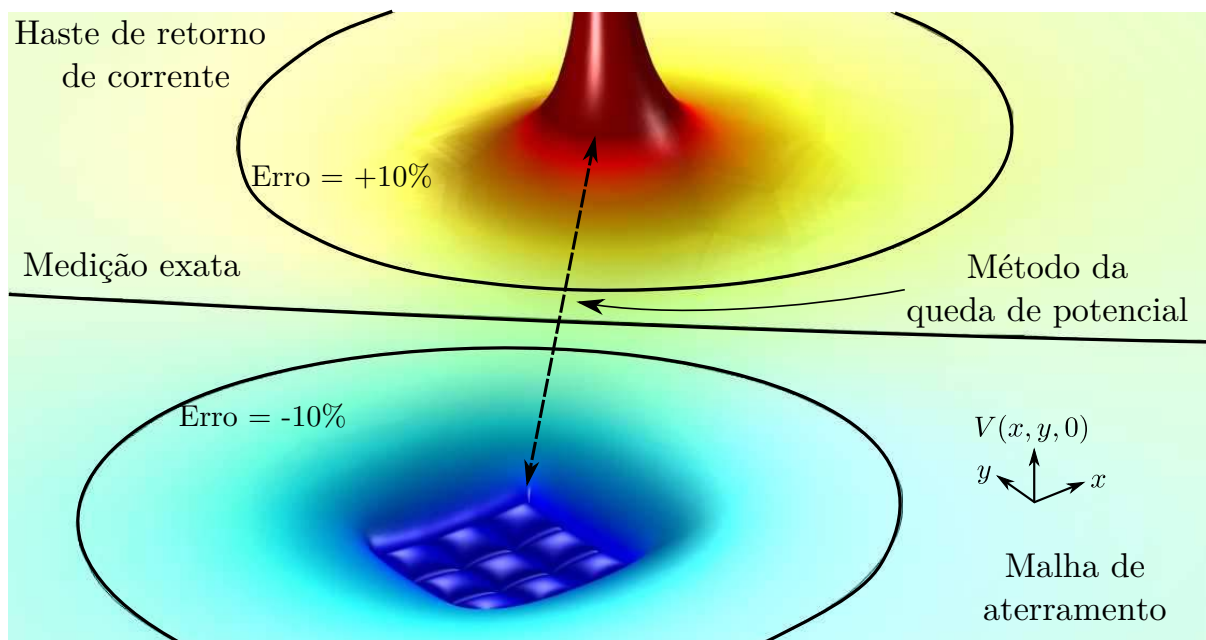
Fonte: Elaboração própria.

Quando a leitura da sonda de potencial é realizada em uma área próxima ao sistema de aterramento, o valor de resistência obtido tende a ser menor que o real em virtude da região de influência do sistema de aterramento. O valor do patamar de resistência representa a leitura correta da resistência do sistema **somente** quando o espaçamento entre a haste de corrente e o aterramento é suficiente, o valor de $0,618d$ costuma representar um ponto nessa região em solos heterogêneos. Para leituras muito próximas da haste de retorno de corrente, o valor de resistência lido tende a ser maior que o valor real devido à zona de influência da haste de corrente.

A localização correta da sonda potencial é crítica para medir com precisão a resistência do sistema de terra. O local precisa estar livre de qualquer influência do sistema de aterramento em teste e da haste de corrente. Uma maneira correta para determinar se a sonda potencial está livre de influências é a obtenção de várias leituras de resistência ao mover a sonda de potencial. O comportamento do potencial elétrico na superfície do solo gerado por este ensaio é mostrado na Figura 11. Como é possível observar na imagem, se a sonda de potencial pode ser posicionada em qualquer região de planície, ou seja, com pouca influência do sistema de aterramento ou do sistema de retorno de corrente. A Figura 11 ainda mostra a linha de medição onde a leitura de resistência obteria um valor exato e as linhas onde este erro seria de 10%. O posicionamento da sonda de potencial pode até mesmo ser em um local fora da linha de medição do método da queda de potencial, desde que este local seja uma região de planície de potencial, pois para estas regiões a diferença

de potencial irá representar o valor correto da medição.

Figura 11 – Potencial elétrico na superfície do solo gerado pelo método da queda de potencial.



Fonte: Elaboração própria.

Quando não há espaço suficiente para o circuito de retorno de corrente, a curva não atinge uma região de patamar devido ao forte efeito da zona de influência do sistema de aterramento, que normalmente é uma malha de terra, e o sistema de retorno de corrente, que pode ser uma haste de aterramento. Para se determinar a localização exata do eletrodo de potencial existem algumas metodologias baseadas em cálculos analíticos a serem adotadas como as de [Ma e Dawalibi \(2002\)](#) e [Nassereddine et al. \(2014a\)](#). Utilizando-se estes métodos é possível calcular-se a localização exata do patamar de resistência, mesmo quando a curva não chega a se estabilizar, sendo bastante útil quando não é possível se obter grandes distâncias para o circuito de retorno de corrente. Situações típicas onde o espaçamento adequado para o circuito de corrente pode não ser atingido são casos de subestações localizadas em áreas urbanas, onde este tipo de ensaio pode ser comprometido devido a restrições de espaço disponível para o ensaio.

Para a realização de medições de resistência de aterramento com valores muito baixos é importante considerar-se o efeito do acoplamento entre os cabos de interligação dos circuitos de corrente e potencial, sendo indispensável para sistemas de grande porte devido ao grande comprimento dos cabos utilizados. Vale ressaltar que ao adotar a frequência de 60 Hz para o ensaio, os erros cometidos nas medições são bastante consideráveis, levando em conta o acoplamento indutivo entre os cabos paralelos ($0,1\Omega/100\text{m}$). Como regra prática a [NBR 15749 \(2009\)](#) despreza problemas de acoplamento para medições de resistência de aterramento acima de $10\ \Omega$; considera significativos para medições

abaixo de 1Ω e passíveis de análise, caso a caso, nas medições entre 1Ω e 10Ω .

Para Holanda (2013) em diversas medições é indispensável o aumento da corrente de ensaio para tornar a medição mais precisa. Quando se usa um equipamento que não permite a variação de corrente, pode-se reduzir a resistência de aterramento do eletrodo de corrente. Isto pode ser feito através da diminuição da resistividade do solo do ponto de instalação do eletrodo auxiliar, com a utilização de água por exemplo. A diminuição da resistência de aterramento do eletrodo de corrente pode também ser obtida com o aumento do número de hastes de retorno de corrente em paralelo ou até mesmo com a utilização de hastes de maior comprimento para este fim. O valor máximo admissível da resistência de aterramento de cada eletrodo auxiliar é geralmente especificado pelos fabricantes dos instrumentos de medição. Sendo a resistência de aterramento do eletrodo de corrente usualmente inferior a 500Ω (NBR 15749, 2009).

O método da queda de potencial aplica-se especialmente às malhas de aterramento de subestações, usinas e outros. Deste modo, a corrente é injetada exclusivamente entre a malha que se deseja realizar a medição e o eletrodo de corrente auxiliar, desconectado os demais caminhos alternativos de retorno. Segundo NBR 15749 (2009) em muitos casos existe o interesse em se verificar o comportamento do sistema de aterramento como um todo, abrangendo a malha; os cabos para-raios; a linha de transmissão; o neutro dos alimentadores; a blindagem de cabos e outros elementos que permanecem no sistema quando o mesmo opera em condições normais. A maneira de se executar esta verificação é através da realização de ensaios de injeção de alta corrente com todos os caminhos de retorno ligados à malha. Este ensaio é realizado com a utilização de uma linha de transmissão (LT) como circuito de corrente, com a possibilidade de utilizar outra malha de aterramento ou o uma torre de uma LT aterrada como eletrodos auxiliares.

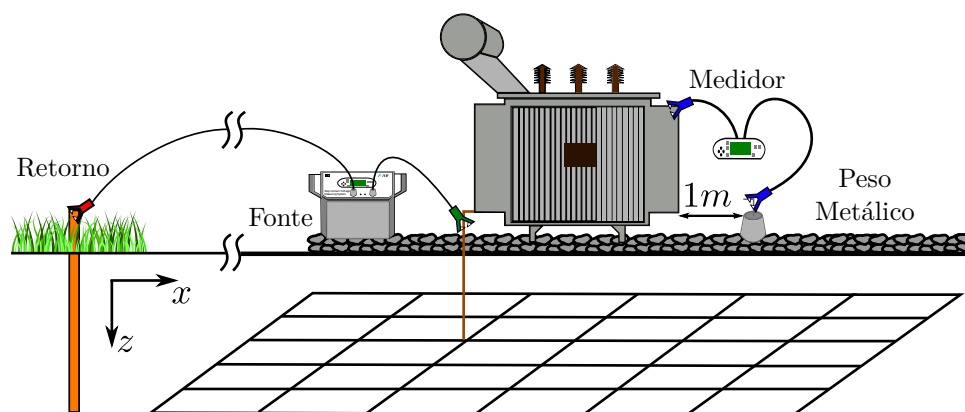
2.2 Medição de potenciais de superfície

A metodologia de medição de potenciais na superfície do solo assemelha-se à utilizada na medição dos valores de resistência de eletrodo. É aconselhável que o levantamento dos perfis de potenciais na superfície do solo e das medições de tensões de toque e de passo sejam realizados com a injeção de elevados valores de corrente elétrica no solo. Nestas medições devem ser utilizados voltímetro e amperímetro com escalas adequadas às faixas de medição ou um instrumento dedicado que atenda às condições necessárias.

Os procedimentos para a realização destes ensaios visam determinar os potenciais superficiais devido a correntes em frequência industrial, principalmente as de curto-circuito que tem como objetivo principal a segurança das pessoas que circulam sobre e nas redondezas dos sistemas de aterramento durante o curto-circuito. Vale ressaltar que os potenciais que ocorrem nos sistemas de aterramento devido às correntes de alta frequência,

por exemplo, as descargas atmosféricas, devem ter um tratamento específico. O circuito de injeção de corrente deve ser estabelecido de uma forma semelhante com a medição da resistência de aterramento, com os valores de correntes que serão injetados na malha de aterramento possuindo valores compatíveis com o sistema de medição. As medições dos potenciais devem ser efetuadas em pontos estratégicos, previamente assinalados no projeto ou no planejamento das medições, com a utilização de um voltímetro de alta impedância de entrada.

Figura 12 – Esquema de medição para o potencial de toque.



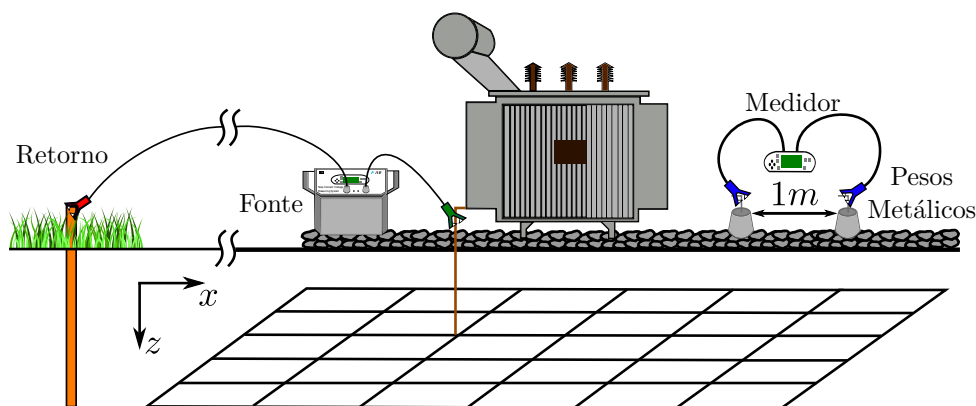
Fonte: Elaboração própria.

A medição da tensão de toque deve ser realizada entre elementos metálicos como estruturas metálicas, carcaças de equipamentos e massas metálicas ligadas ao sistema de aterramento sob estudo e o eletrodo de potencial. Este eletrodo pode ser uma haste cravada no solo ou pesos metálicos, simulando assim o contato com os pés de uma pessoa, como mostra a Figura 12. A distância entre o eletrodo de potencial e a carcaça aterrada deve obedecer à distância horizontal de um metro (NBR 15749, 2009), simulando assim o alcance do braço do operador da subestação. A utilização de um peso metálico como eletrodo de potencial no ensaio resultará em um ensaio mais realista, pois simulará o contato do operador com o solo baseado em seu peso. De forma análoga, a medição da tensão de passo deve ser realizada entre dois eletrodos de potencial cravados no solo, distanciados de um metro, ou com a utilização dos pesos metálicos. Este ensaio é realizado conforme a Figura 13 e tem como objetivo simular a diferença de potencial entre os dois pés de uma pessoa que realiza um passo na subestação no instante do curto-circuito.

Segundo a norma NBR 15749 (2009), a fonte de corrente elétrica para a realização das medições deve ter potência e tensão adequadas para fornecer valores suficientes de corrente elétrica. Geralmente, esses valores são elevados de forma a reduzir os erros nas medições devido às correntes de interferência que geralmente circulam no solo. A fonte empregada pode ser um grupo motor-gerador ou um transformador isolador (abaixador ou não) ligado à rede elétrica próxima ao local da medição.

Quanto ao local, as medições, devem ser preferencialmente realizadas na periferia do sistema de aterramento, onde geralmente são encontradas as maiores tensões na superfície do solo e algumas medições devem ser realizadas na região central do sistema, onde existe uma maior possibilidade da presença de pessoas ou espaçamentos não uniformes dos condutores.

Figura 13 – Esquema de medição para o potencial de passo.



Fonte: Elaboração própria.

Em relação à medição de tensão de toque nas partes metálicas é recomendada a realização de medições em diferentes direções, particularmente nas direções que se afastem dos condutores enterrados do aterramento e/ou as que aproximem-se da periferia do sistema.

Para a realização do ensaio, os cabos pára-raios e contrapesos de linhas de transmissão, neutros dos alimentadores, blindagens e capas metálicas de cabos isolados que chegam à instalação devem ser desconectados do sistema de aterramento sob ensaio. Segundo [NBR 15749 \(2009\)](#) para medições com todo o sistema de aterramento interligado, correntes da ordem de 100 A, ou acima, geralmente são necessárias para que valores obtidos de tensão na superfície do solo sejam confiáveis.

2.3 Instrumentação

Nesta parte do capítulo, serão apresentados os equipamentos utilizados para a realização das medições de resistência de aterramento, tensões de superfície e leituras de resistividade do solo.

Para a realização do ensaio de medição de resistividade foi utilizado o terrômetro digital MEGABRAS EM-4055. Para a realização do ensaio de medição de resistência de aterramento foi utilizado além do terrômetro MEGABRAS, o medidor de potenciais de passo e de toque METREL MI 3295. Os ensaios de medição de potenciais de passo e de toque foram realizados com o equipamento METREL MI 3295.

2.3.1 Terrômetro digital MEGABRAS EM-4055

Este equipamento é um terrômetro digital microprocessado, que permite a medição de resistência de aterramento e de resistividade do terreno (pelo método de *Wenner*), além de detectar correntes parasitas presentes no solo através da função voltímetro (MEGABRAS, 2015). Para testar os sistemas de aterramento, o equipamento permite medições usando corrente de teste com frequência de 270 Hz ou 1470 Hz, selecionada pelo operador. A utilização da frequência mais elevada, aumenta a imunidade a correntes parasitas presentes no solo, o que permite um resultado mais preciso em condições desfavoráveis.

As escalas auto-ajustáveis utilizadas pelo equipamento são de 0 a 20 $k\Omega$ para leituras de resistência; de 0 a 50 $k\Omega \cdot m$ para as leituras de resistividade e de 0 a 60V na função voltímetro. A precisão do equipamento é de $\pm 2\%$ do valor medido ± 2 dígitos para medições de resistência e resistividade e de $\pm 3\%$ do valor medido ± 2 dígitos para medições de tensão. A resolução da leitura é de 0,01 Ω na medição de resistência; 0,01 $\Omega \cdot m$ na medição de resistividade e 0,1 V na medição de tensão. A alimentação do aparelho é por bateria interna recarregável de 12V e 2,3 Ah, sendo a corrente de saída limitada até o valor de 3,5 mA RMS.

Figura 14 – Terrômetro digital MEGABRAS EM-4055



Fonte: (MEGABRAS, 2015)

2.3.2 Medidor de potencias de passo e de toque METREL MI 3295

Este equipamento é um medidor digital microprocessado de potenciais de passo e de toque (METREL, 2015). O aparelho faz além da medição dos potenciais de passo e de toque, com resolução de até 0,01 mV; leituras de resistência de aterramento com resolução de 1 m Ω e de resistividade do solo com resolução de 1 m $\Omega \cdot m$. O equipamento garante uma alta precisão nas leituras devido a uma corrente de saída controlada de até 50A junto a um sistema de supressão de ruído.

Figura 15 – Medidor de potencias de passo e de toque METREL MI 3295



Fonte: (METREL, 2015)

A tensão de circuito aberto do equipamento é de até $55V$ e a de teste é de até $50V$, garantindo segurança durante a realização do ensaio. O medidor de grandezas é autônomo, não sendo necessário carregar a fonte durante as medições de potencias de passo e de toque na subestação. O equipamento permite selecionar uma resistência de entrada de $1\text{ k}\Omega$ ou $1\text{ M}\Omega$. A alimentação da fonte é através da rede elétrica $230V/60Hz$ e do medidor multigrandezas através de baterias.

Este equipamento, além dos eletrodos convencionais para medições de potenciais no solo, possui dois pesos metálicos de $25kg$ cada. Estes pesos são utilizados nos ensaios de medição de potenciais de passo e potenciais de toque como forma de se medir estas grandezas de forma mais realista, pois seu uso simula o contato dos pés do operador da subestação com o solo.

2.3.3 Carretel de altura ajustável

Como forma de otimizar a realização dos ensaios de medição de resistência de aterramento e potenciais de superfície, foi desenvolvido um equipamento de auxílio aos ensaios. Este equipamento é uma carretel de altura ajustável, como mostra a Figura 16, possuindo ainda uma alça de transporte junto a um sistema de manivela para otimizar a forma de enrolar o seu cabo de $200m$ de comprimento, facilitando assim a realização dos ensaios. O cabo do equipamento é soldado a um conector na sua carcaça, permitindo assim a ligação do cabo a um instrumento de medição ou até mesmo prolongar o cabo do equipamento.

Figura 16 – Carretel de altura ajustável



Fonte: Elaboração própria

A utilização deste equipamento foi importante durante a realização dos ensaios devido ao fato de que os equipamentos comerciais não acompanham cabos de comprimento suficiente para a realização dos ensaios realizados neste trabalho. Além da necessidade de sua utilização devido ao comprimento do cabo, o tempo de execução do ensaio foi um fator muito importante de ser reduzido, pois todos os ensaios foram realizados com as subestações desenergizadas.

Capítulo 3

Formulação de Problemas de Aterramento Elétrico em Elementos Finitos

Introdução

Os problemas de aterramento elétrico possuem uma solução analítica bastante complexa, tornando-se prática somente em alguns casos específicos e com a utilização de diversas simplificações para a formulação de suas equações. Neste capítulo será apresentada uma metodologia para a resolução destes problemas de forma numérica, que pode ser aplicada nos mais diversos casos que envolvam aterramentos elétricos como projeto e até como forma de auxílio ao comissionamento dos referidos projetos.

Este capítulo irá mostrar como ajustar as condições de contorno para a simulação de problemas de aterramento elétrico, como o cálculo da resistência de aterramento e a determinação da distribuição espacial dos potenciais de passo e de toque. As condições de contorno para os ensaios de aterramentos elétricos mostrados no Capítulo 2 deste trabalho são apresentadas e estes ensaios são reproduzidos através de modelos computacionais. Para avaliar a precisão dos resultados obtidos, o equacionamento analítico para o cálculo da resistência de aterramento de um condutor vertical será tomado como *benchmark*.

Neste trabalho será utilizado para a realização das simulações em elementos finitos o software comercial *COMSOL Multiphysics* v4.3b, sendo os modelos apresentados neste capítulo aplicáveis a qualquer software de elementos finitos.

3.1 Formulação Eletromagnética de Problemas de Aterramento Elétrico

Para o projeto de sistemas de aterramento elétrico consideram-se os efeitos da corrente elétrica em um meio condutivo, o solo. Para [Silva \(2006\)](#) a corrente elétrica gerada por um curto circuito fase-terra, que está à frequência industrial, mesmo sendo um fenômeno variante no tempo pode ser modelado como de natureza quase-estática.

O problema de aterramentos elétricos, a frequência industrial se resume a encontrar a solução da equação de Laplace para um domínio de estudo Ω sujeita às condições de contorno homogêneas de *Neumann* Γ_N na interface ar-solo e de *Dirichlet* Γ_D que são aplicadas nas regiões que delimitam a solução.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (-\sigma \nabla V) &= 0 & \text{em } \Omega \\ V &= V_0 & \text{em } \Gamma_D \\ \vec{J} \cdot \vec{n} &= 0 & \text{em } \Gamma_N \end{aligned} \quad (3.1)$$

Para um domínio não homogêneo como um solo estratificado em camadas horizontais a solução da equação de *Laplace* deve também respeitar as condições de fronteira Γ_{12} entre dois meios de condutividade elétrica σ distintas, que são:

$$V_1 = V_2 \quad \text{em } \Gamma_{12} \quad (3.2)$$

$$\sigma_1 \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 = \sigma_2 \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 \quad \text{em } \Gamma_{12} \quad (3.3)$$

A atribuição de uma excitação ao sistema é feita através das condições de contorno não homogêneas a um domínio $\partial\Omega$, sendo a condição de *Dirichlet* para uma fonte de potencial e *Neumann* quando temos uma fonte de corrente.

3.2 Formulação de Problemas de Aterramento Elétrico em Elementos Finitos

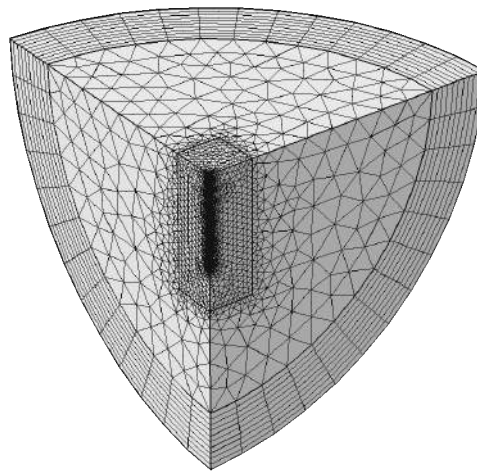
O método dos Elementos Finitos é um método numérico para solução de Equações Diferenciais Parciais baseado no cálculo variacional. Segundo [Jiamming e Jin \(2002\)](#) o referido método pode ser resumido em quatro etapas:

1. Discretização do domínio em um número finito de sub-regiões.
2. Seleção das funções de interpolação.
3. Formulação do sistema de equações.
4. Resolução do sistema de equações obtido.

3.2.1 Discretização do Domínio

Nesta etapa o domínio a ser solucionado será discretizado em uma quantidade finita de subdomínios que podem ser formado por linhas, triângulos, retângulos, tetraedros ou prismas. Para [Jiamming e Jin \(2002\)](#) este é o passo mais importante para a análise por elementos finitos, pois irá afetar diretamente na precisão dos resultados na necessidade de armazenamento e no tempo de processamento.

Figura 17 – Discretização do domínio em elementos finitos.



Fonte: Elaboração própria

A Figura 17 mostra a discretização do domínio em estudo para um problema de aterramento elétrico. Note que a região de interesse que é o condutor de aterramento e adjacências possui elementos menores do que regiões distantes, isto porque seu refinamento irá interferir diretamente na precisão dos resultados da simulação.

3.2.2 Seleção das funções de interpolação

As funções de interpolação irão aproximar a função potencial elétrico no interior de cada elemento. Normalmente, são funções polinomiais de primeiro (lineares) ou segundo grau (quadráticas). Funções de grau mais elevado apesar de mais precisas resultam em uma formulação mais complicada.

A equação que descreve o potencial interpolado para qualquer ponto no interior do elemento, sendo n o número de nós de cada elemento, V_j^e o valor do potencial elétrico no nó j do elemento e N_j^e a sua função de interpolação (ou função de base) é:

$$\tilde{V}(x, y, z) = \sum_{j=1}^n N_j^e(x, y, z) V_j^e \quad (3.4)$$

3.2.3 Formulação do sistema de equações

Para a formulação do sistema de equações existem duas possíveis formulações: a de *Rayleigh-Ritz* e a formulação de *Galerkin*.

Formulação de *Rayleigh-Ritz*

Segundo [Sadiku \(2009\)](#) esta formulação é um método variacional com solução direta para a minimização de um funcional. Sendo o funcional da Equação de Laplace fisicamente igual a energia do sistema, o mesmo em regime eletrocinético corresponde ao efeito *Joule*.

A solução aproximada do problema é então encontrada pela minimização da energia em relação a cada variável das funções de base que descrevem os elementos do domínio discretizado, satisfazendo as condições de contorno homogêneas e não homogêneas impostas ao problema. Neste trabalho por simplicidade será mostrado somente o equacionamento para a formulação residual de *Galerkin*.

Formulação de *Galerkin*

O método de *Galerkin* faz parte dos métodos dos resíduos ponderados, sendo este baseado na minimização de uma equação residual que para o problema de aterramento elétrico corresponde à resolução da equação 3.5, onde r é o resíduo:

$$r = \nabla \cdot (-\sigma \nabla \tilde{V}) \quad (3.5)$$

sendo o resíduo ponderado R dado pelo produto escalar entre uma função peso e a variável incógnita, ao adotarmos a função de ponderação igual à função de base temos que para cada nó i de um elemento e , temos:

$$R_i^e = \int_{\Omega^e} N_i^e \nabla \cdot (-\sigma \nabla V^e) d\Omega \quad (3.6)$$

segundo [Silva \(2006\)](#) após a aplicação da regra da cadeia, teorema da divergência e teorema de Green, podemos escrever a equação 3.6 como:

$$R_i^e = \int_{\Omega^e} N_i^e \sigma \nabla V^e d\Omega - \oint_{\Gamma^e} N_i^e \sigma \nabla V^e \cdot \vec{n}^e d\Gamma \quad (3.7)$$

sendo \vec{n} um vetor normal externo e Γ^e a superfície que delimita Ω^e , a mesma pode ser escrita na forma matricial como:

$$\{R^e\} = [K^e] \{V^e\} - \{g^e\} \quad (3.8)$$

A matriz $[K]$ é chamada matriz de elementos ou matriz de rigidez onde cada elemento (i, j) da mesma representa o acoplamento entre seus nós.

Tomando uma função de base linear para um elemento tetraédrico podemos escrever sua função de forma para um elemento e como:

$$N_i^e(x, y, z) = \frac{1}{6\nu^e}(a_i^e + b_i^e x + c_i^e y + d_i^e z) \quad (3.9)$$

sendo o termo ν^e o volume do elemento que para as coordenadas (x, y, z) é dado por:

$$\nu^e = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1^e & x_2^e & x_3^e & x_4^e \\ y_1^e & y_2^e & y_3^e & y_4^e \\ z_1^e & z_2^e & z_3^e & z_4^e \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

e cada termo da função de base encontrado por:

$$\begin{bmatrix} a^e \\ b^e \\ c^e \\ d^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1^e & x_2^e & x_3^e & x_4^e \\ y_1^e & y_2^e & y_3^e & y_4^e \\ z_1^e & z_2^e & z_3^e & z_4^e \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_1^e \\ V_2^e \\ V_3^e \\ V_4^e \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

ao expandirmos a equação 3.11, cada termo da função de base será composto por uma combinação linear entre uma função $f_i(x, y, z)$ e um termo de potencial nodal V_i^e , denotaremos estes termos como a_i^e, b_i^e, c_i^e e d_i^e .

Segundo Jiamming e Jin (2002) tomando os componentes da função de base de cada nó i , podemos montar a matriz $[K^e]$ para cada linha i e coluna j como:

$$K_{ij}^e = \frac{\sigma}{36\nu^e}(b_i^e b_j^e + c_i^e c_j^e + d_i^e d_j^e) \quad (3.12)$$

O vetor coluna g^e possui valor não nulo somente para nós não pertencentes ao domínio da solução onde não são impostas as condições de contorno homogêneas, para o caso da condição de *Dirichlet* não homogênea o valor de g_i^e é substituído pelo valor da condição imposta e para a de *Neumann* o seu valor na superfície s do elemento para cada nó diretamente ligado a este é dado por:

$$g_i^e = \sum_s b_j^s - \sum_s \sum_{j=1}^3 K_{ij}^s \quad (3.13)$$

O sistema de equações resultante é obtido montando a equação 3.7 para todos os elementos pertencentes ao problema, sendo montada a matriz de coeficientes global $[\bar{K}]$ através do mapeamento das matrizes locais de cada elemento. Se o mesmo nó pertencer simultaneamente a mais de um elemento, o seu respectivo valor mapeado na matriz global será a soma da componente de cada elemento das matrizes locais, o mesmo vale para o vetor coluna global $\{\bar{g}^e\}$.

Tomando a integral de resíduo ponderado associada a cada nó como zero, teremos:

$$\{R\} = \sum_{e=1}^M ([\bar{K}^e] \{\bar{V}^e\} - \{\bar{g}^e\}) = \{0\} \quad (3.14)$$

ou ainda,

$$[\bar{K}] \{\bar{V}\} = \{\bar{g}\} \quad (3.15)$$

3.2.4 Resolução do sistema de equações obtido

Para a resolução do sistema linear obtido na equação 3.15 é possível a utilização de diversos algoritmos, que são divididos em diretos e iterativos. No primeiro caso a solução é obtida através de um número determinado de operações, modificando os coeficientes da matriz $[\bar{K}]$. Já para a solução a partir de métodos iterativos, a partir de uma solução inicial realizam sucessivas iterações de modo que uma precisão pré-especificada seja obtida.

Os métodos diretos utilizam fatoração LU de maneira otimizada para trabalhar com matrizes esparsas através de técnicas de pré-ordenamento que buscam permutar as colunas da matriz de coeficientes de tal maneira a minimizar o número de elementos não nulos nas matrizes diagonal superior L e inferior U. Como o problema simulado é do tipo tridimensional este método possui um custo computacional superior aos métodos iterativos (DE; WHITE, 2003) não sendo o adotado na simulação realizada.

Os métodos iterativos utilizam algoritmos baseados no método do gradiente conjugado com a possibilidade da utilização de pré-condicionadores como o método da sobre-relaxação sucessiva (SOR) e o método de Jacobi como meio de aceleração da convergência da solução. Métodos iterativos são mais recomendados na solução de problemas tridimensionais.

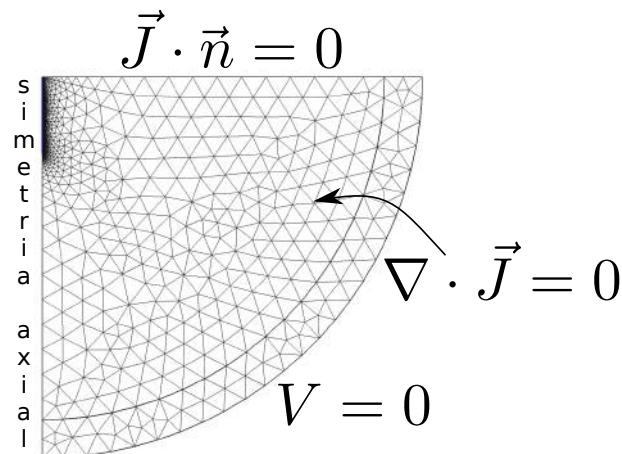
3.3 Condições de contorno em problemas de aterramento elétrico

Para a resolução de um problema de aterramento elétrico em elementos finitos a equação de Laplace deve ser solucionada. A resolução da mesma é obtida através da aplicação de condições de contorno homogêneas que irão modelar o potencial nulo no infinito (que é uma região truncada ou mapeada ao infinito) e a interface entre o ar e o solo. As condições de contorno heterogêneas irão modelar as excitações do sistema, como uma corrente elétrica por exemplo.

Problemas de aterramento elétrico somente em casos muito restritos podem ser resolvidos em duas dimensões, o que aumenta bastante o esforço computacional envolvido para a resolução dos mesmos. A Figura 18 ilustra as condições de contorno necessárias

para a resolução de um problema bidimensional onde uma única haste, que está no eixo de revolução, é simulada utilizando coordenadas cilíndricas como forma de simplificação do problema. As condições necessárias para a resolução do problema também são apresentadas na Figura 18, problemas tridimensionais apresentam condições de contorno semelhantes as apresentadas nos problemas bidimensionais.

Figura 18 – Ilustração das condições de contorno homogêneas aplicadas ao problema.



Fonte: Elaboração própria.

A haste de aterramento é utilizada como o termo fonte do problema, no mesmo uma distribuição (uniforme ou não) de corrente será adotada caracterizando uma condição não homogênea. A excitação do sistema é atribuída a um domínio que pode ser unidimensional, bidimensional ou tridimensional. Na interface entre o ar e o solo considera-se que a componente normal da densidade de corrente elétrica seja nula, o que implica que esta mesma componente do campo elétrico também seja nula. Para modelar a condição de potencial elétrico nulo no infinito o potencial elétrico no contorno externo ao domínio do solo, que não representa o domínio de ar, é considerado nulo. Para o modelo do domínio do solo neste trabalho foi considerado a terra como sendo um paralelepípedo ou uma semiesfera de raio igual a 5 vezes a maior dimensão do sistema de aterramento, como proposto em [Silva \(2006\)](#). Um tratamento especial é utilizado nos elementos da região mais externa da semiesfera de forma a mapear o potencial elétrico da região que foi truncada ao infinito.

Para problemas tridimensionais podem-se aplicar condições de simetria sendo simulada apenas uma fração da geometria total, reduzindo assim o esforço computacional empregado na solução do problema. Ao se redesenhar a geometria do problema baseado em uma fração desta, aplica-se a condição homogênea de *Neumann* para as faces que serão espelhadas para a obtenção da solução completa. Quando a excitação do problema é uma fonte de corrente de acordo com [Sunde \(1968\)](#) é atribuída uma corrente n_{esp} vezes menor para ocasionar a mesma elevação de potencial do modelo sem a utilização das condições de simetria, onde n_{esp} é a quantidade de espelhamentos necessários para a obtenção da

solução completa. Mesmo utilizando as condições de simetria, a matriz de potencial elétrico encontrada pode ser espelhada para fins de pós processamento como a geração de gráficos para a representação do comportamento da distribuição do potencial elétrico no solo.

3.4 Análise dos resultados: pós-processamento

Os resultados obtidos após o cálculo da matriz de potencial nodal são conhecidos como resultados de pós-processamento. O cálculo do campo elétrico é obtido a partir da matriz de potencial elétrico sendo $\vec{E}^e = -\nabla V$ dado pela equação 3.16.

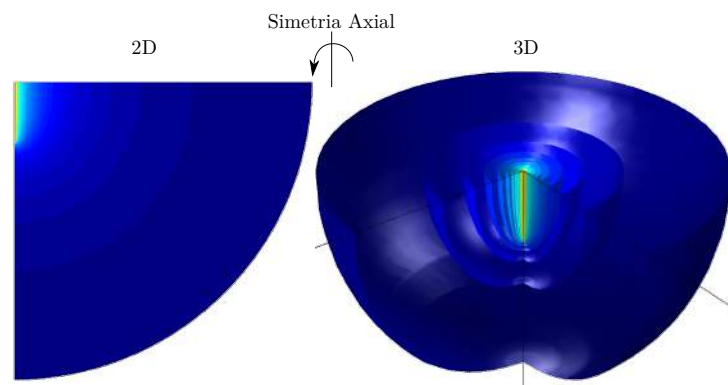
$$\vec{E}^e = -\frac{1}{6\nu^e} \sum_{j=1}^4 (b_j^e \vec{x} + c_j^e \vec{y} + d_j^e \vec{z}) V_j^e \quad (3.16)$$

Para o cálculo da corrente elétrica total em um domínio específico, sendo $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, devemos resolver a equação 3.17. Desta maneira obtemos a corrente elétrica que percorre um domínio, porém geralmente para os problemas de aterramento elétrico a corrente é imposta como condição de contorno para a solução do citado problema.

$$\oint_{\Gamma} \vec{J} \cdot \hat{n} d\Gamma = I \quad (3.17)$$

Um problema mesmo bidimensional pode ter sua solução revolucionada para que se possa visualizá-la em três dimensões. Este fato é interessante para fins de pós-processamento como a geração de imagens. A Figura 19 mostra o espelhamento de uma solução que foi resolvida em duas dimensões devido à simetria, para uma análise em três dimensões. A resolução de um problema em 2D é bem mais simples e exige menos esforço computacional que uma tridimensional, os valores obtidos na simulação são os mesmos, por isso é aconselhável sempre quando possível a redução de uma dimensão na simulação, reduzindo assim o esforço computacional e obtendo o mesmo resultado na simulação.

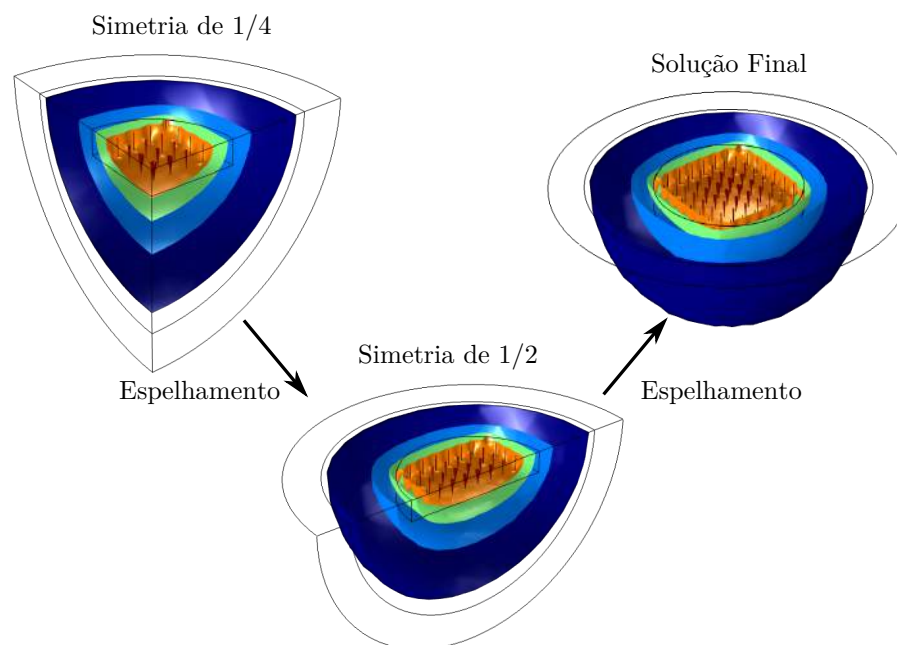
Figura 19 – Visualização dos resultados em três dimensões.



Fonte: Elaboração própria.

Exemplos de imagens que podem ser obtidas através da análise da matriz de potencial elétrico são: linhas ou superfícies equipotenciais (Figura 19); imagens em escala de cores de grandezas escalares em superfícies e a distribuição vetorial de grandezas como o campo elétrico.

Figura 20 – Ilustração do espelhamento da matriz de potencial elétrico.



Fonte: Elaboração própria.

Quando não é possível reduzir uma dimensão do problema, mas a sua geometria pode ser espelhada, é possível a simulação de apenas parte da geometria utilizando as devidas condições de contorno no modelo computacional. A Figura 20 mostra que uma solução mesmo representando 1/4 da geometria, pode ser espelhada de tal maneira a obter uma solução que representa 1/2 da geometria e até a solução completa através do espelhamento da matriz de potencial elétrico.

3.4.1 Cálculo da resistência de aterramento

Outra grandeza que é derivada a partir da matriz de potencial elétrico é a resistência de aterramento. Para o cálculo desta é utilizado a razão entre a máxima elevação de potencial gerada no sistema em relação ao terra remoto, que na literatura é conhecida também como GPR (*Ground Potential Rise*) e o valor da corrente de excitação. Este valor da máxima elevação de potencial elétrico se encontra no condutor que forma o sistema de aterramento. No domínio do solo este valor decai até se anular nos contornos onde a condição de homogênea de *Dirichlet* é imposta.

A fórmula analítica completa para o cálculo da resistência de aterramento para um comprimento l e um raio a de uma haste de aterramento, é dada pela equação 3.18. Esta

fórmula é usualmente apresentada de forma simplificada na literatura ao se considerar o raio da haste desprezível em relação ao seu comprimento.

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} \left[\ln \left[\frac{2l}{a} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{a}{2l} \right)^2} \right) \right] + \frac{a}{2l} - \sqrt{1 + \left(\frac{a}{2l} \right)^2} \right] \quad (3.18)$$

Como forma de ilustração a resistência de aterramento para uma haste de aterramento de 3/4" de diâmetro imersa em um solo homogêneo e de resistividade elétrica igual a $100\Omega \cdot m$ foi obtida através de uma simulação computacional bidimensional e é mostrado na Tabela 2. O cálculo da resistência foi realizado ao se medir a elevação de potencial elétrico na haste de aterramento em relação a uma corrente imposta de valor unitário. É possível concluir que o modelo computacional apresenta valores bem precisos em comparação ao analítico principalmente quando à razão entre o comprimento e o raio da haste aumenta.

Tabela 2 – Resultado da simulação em comparação a formulação analítica.

L [m]	Resistência elétrica [Ω]		RSE [%]
	Analítico	FEM	
1	78.9291	80.2919	1.6973
2	45.0755	45.6429	1.2431
3	32.2352	32.5755	1.0446
4	25.3381	25.5747	0.9251
5	20.9897	21.1693	0.8481
6	17.9813	18.1243	0.7887
7	15.7662	15.8853	0.7496
8	14.0641	14.1651	0.7134
9	12.7128	12.7994	0.6764
10	11.6111	11.6871	0.6498

Fonte: Elaboração própria

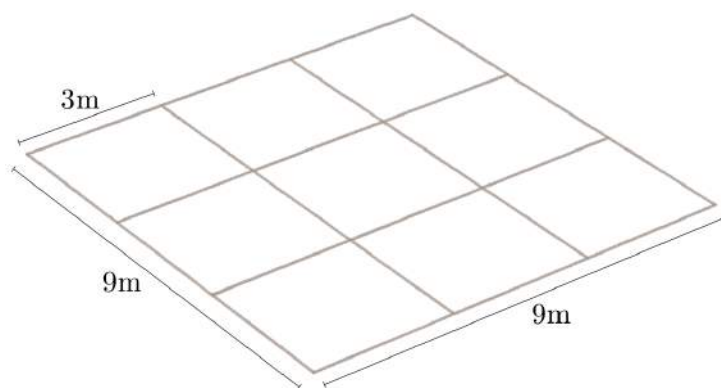
Outra possibilidade de simulação é a utilização de malhas de aterramento, onde o procedimento para o cálculo da resistência de aterramento para geometrias tridimensionais é análogo. Malhas de aterramento de grandes extensões exigem mais esforço computacional devido ao aumento na quantidade de elementos no domínio dos condutores que formam a malha e adjacências, uma simplificação pode ser adotada neste tipo de problema que é a modelagem desta através de elementos unidimensionais. Para o cálculo da resistência de aterramento de uma malha formada por elementos unidimensionais em seus condutores, uma densidade linear de corrente é definida sendo necessário calcular o comprimento linear total dos condutores que formam a referida malha.

O resultado do cálculo da resistência de aterramento para uma malha tridimensional como mostra a Figura 21 imersa em um solo uniforme de resistividade igual a $100 \Omega \cdot m$ a uma profundidade de $0,5m$ e formada por condutores de $0,75''$ de diâmetro foi de $4,35 \Omega$. Esta mesma malha será utilizada nos demais estudos de caso deste capítulo para este mesmo solo hipotético como forma de ilustração. A norma [IEEE Std 80 \(2000\)](#) utiliza como uma das fórmulas para o cálculo da resistência de aterramento de uma malha a fórmula de [Sverak \(1984\)](#) mostrada na Equação 3.19, esta fórmula foi desenvolvida para fins práticos onde simplificações são utilizadas para a determinação desta.

$$R = \rho \left[\frac{1}{L_t} + \frac{1}{\sqrt{20A}} \left(1 + \frac{1}{1 + h\sqrt{20/A}} \right) \right] \quad (3.19)$$

O cálculo da resistência de aterramento é função do comprimento efetivo dos condutores que formam a malha L_t , o que inclui as hastes de aterramento. Para hastes de aterramento é acrescido 15% em seu comprimento real devido ao melhor escoamento da corrente de falta ao solo. A equação proposta também é função da área da malha A e da profundidade h em que a malha está enterrada. Note que esta fórmula despreza o efeito da espessura dos condutores que formam a malha. Este valor de resistência calculado deve ser menor que um limite especificado, no Brasil segundo [Kindermann e Campagnolo \(1992\)](#) adota-se o valor de 10Ω para uma classe de tensão de 15 kV e 5Ω para a classe de $72,5 \text{ kV}$.

Figura 21 – Ilustração de uma malha tridimensional utilizada nas simulações.



Fonte: Elaboração própria.

A resistência de aterramento para esta mesma malha calculada através da Equação 3.19 é de $5,86\Omega$. Nota-se que esta fórmula fornece um valor bastante conservador para o cálculo desta grandeza, fato este que também foi observado em diversos estudos de caso realizados no trabalho de [Salgado e Pinto \(2009\)](#). A diferença entre o valor calculado através de uma fórmula prática e um modelo em elementos finitos é uma motivação para a elaboração de projetos através de métodos computacionais visto que o mesmo será mais otimizado e preciso.

3.4.2 Cálculo dos parâmetros de segurança para projetos

O equacionamento adotado para garantir um projeto seguro de uma malha de aterramento é apresentado em [IEEE Std 80 \(2000\)](#). Nesta norma são mostradas equações para se calcular os potenciais de passo e de toque existentes na malha e o limite tolerável para que não ocorram acidentes fatais na malha devido a corrente de curto circuito. Também é mostrado como se calcula a resistência de aterramento da malha. Segundo [Salgado e Pinto \(2009\)](#) a norma utiliza um conjunto de equações analíticas com alguns fatores empíricos para o projeto de sistemas de aterramento, o que pode ocasionar uma divergência nos resultados obtidos através de métodos numéricos.

Para um projeto de aterramento ser considerado seguro de acordo com [IEEE Std 80 \(2000\)](#), a máxima elevação de potencial na malha e o máximo potencial de passo na superfície do solo devem ser menores que os limites de segurança e o valor da resistência de aterramento menor que o limite imposto para uma classe de tensão. O máximo potencial de passo existente na periferia da malha E_{step} , para um tempo de atuação da proteção t_s , sendo C_s o índice de correção para o revestimento superficial em um solo modelado como homogêneo é dado pela Equação 3.20.

$$E_{step} = (1000 + 6C_s\rho_s) \frac{0,157}{\sqrt{t_s}} \quad (3.20)$$

O valor limite para o potencial de toque E_{touch} é encontrado de maneira análoga ao potencial limite de passo e o mesmo é apresentado na Equação 3.21.

$$E_{touch} = (1000 + 1,5C_s\rho_s) \frac{0,157}{\sqrt{t_s}} \quad (3.21)$$

Como o equacionamento apresentado em [IEEE Std 80 \(2000\)](#) foi desenvolvido para solos uniformes, para se trabalhar com meios heterogêneos se faz necessário encontrar um valor de resistividade equivalente a de solo uniforme. Para isso podemos utilizar o modelo de [Endrenyi \(1963\)](#) onde a partir de um modelo de duas camadas é possível encontrar um modelo equivalente de solo uniforme para uma dado sistema de aterramento.

É muito comum em projetos de aterramentos elétricos a atribuição de uma camada superficial ao solo com um material de alta resistividade, este material adiciona uma camada extra para a estratificação do solo. Segundo [IEEE Std 80 \(2000\)](#) a formula simplificada para o cálculo do fator de correção C_s , de um solo uniforme de resistividade ρ e com uma camada superficial de resistividade ρ_s e espessura h_s , é dada pela Equação 3.22. Note que a equação apresentada pela norma foi desenvolvida somente para solos homogêneos.

$$C_s = 1 - \frac{0,09(1 - \frac{\rho}{\rho_s})}{2h_s + 0,09} \quad (3.22)$$

Para casos onde existem mais de uma camada superficial como uma subestação abrigada ou uma sala de comando que possui uma camada de concreto revestida com bor-

racha proveniente de um tapete isolante, podemos utilizar uma camada de revestimento equivalente. De acordo com os valores encontrados nas referências [NBR 15751 \(2013\)](#), [IEEE Std 80 \(2000\)](#) e [Callister \(2008\)](#) podemos obter valores aproximados da resistividade de alguns materiais utilizados para revestimento superficial, sendo os valores secos adotados em áreas cobertas e os úmidos para áreas expostas ao tempo como mostra a Tabela 3.

Tabela 3 – Resistividade elétrica de revestimentos superficiais típicos [$\Omega.m$]

Material	Seco	Úmido
Asfalto	$2 \cdot 10^6$ a $30 \cdot 10^6$	10^4 a $6 \cdot 10^4$
Brita	$7 \cdot 10^6$	$3 \cdot 10^3$
Concreto	10^6 a 10^9	21 a 100
Borracha	10^{13}	-

Fonte: ([NBR 15751, 2013](#); [IEEE Std 80, 2000](#); [CALLISTER, 2008](#))

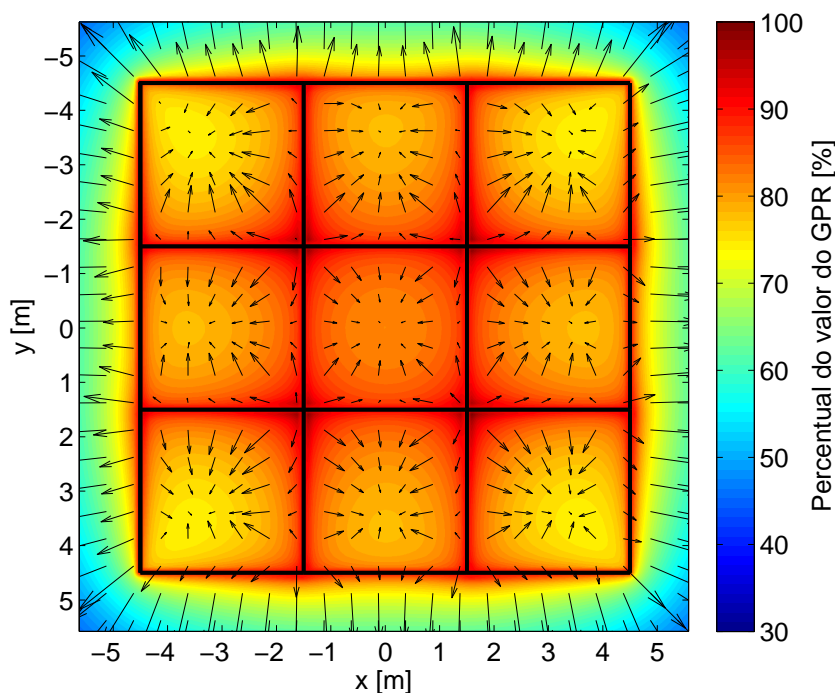
3.4.3 Determinação numérica dos parâmetros de segurança

Um projeto de um sistema de aterramento é considerado seguro quando apresenta tensões de passo e de toque abaixo do limite capaz de causar fibrilação ventricular apresentada nas equações 3.21 e 3.20. Como o projeto de um sistema de aterramento, especificamente malhas de aterramento, é realizado ajustando o número e o espaçamento entre os condutores que irão formar a malha, um projeto se torna mais seguro quando temos uma grande área disponível e pequenos espaçamentos entre os condutores na elaboração do projeto, o que aumenta os custos com material elétrico para a execução do referido projeto.

A Figura 22 mostra a elevação de potencial elétrico, que é gerado devido ao escoamento da corrente elétrica no solo durante a passagem de uma corrente de falta na malha de aterramento. A graduação de cores parte do azul e vai até o vermelho para a intensidade do potencial elétrico no solo e os vetores em preto representam a densidade de corrente elétrica no solo. Através desta figura podemos perceber que a corrente elétrica tem dificuldade de fluir para o solo nas regiões mais centrais da malha de terra, o que torna o potencial elétrico nesta região mais intenso e uniforme. O comportamento do potencial elétrico nas regiões mais externas da malha apresenta uma grande variação, isto é devido a maior facilidade da corrente elétrica escoar no solo.

O fator "*uniformização do potencial*" está relacionado à segurança do projeto e o fator "*melhora da passagem de corrente elétrica no solo*" está relacionado a resistência de aterramento do sistema, ou seja, quanto mais facilidade a corrente elétrica tiver de escoar no solo, mais baixo será o valor da resistência de aterramento do sistema. A inclusão de

Figura 22 – Potencial e campo elétrico gerado pela passagem da corrente elétrica no solo no nível da malha ($z = h$).



Fonte: Elaboração própria.

hastes de aterramento ao projeto irá criar um novo caminho para a passagem da corrente elétrica, ajudando a reduzir os valores de resistência elétrica e potenciais de passo e de toque, porém para esta redução ser significativa, o comprimento total das hastes deve ser proporcional ao comprimento total dos cabos que formam a malha.

O potencial de passo é definido como a diferença de potencial entre dois pontos na superfície do solo espaçados de um metro. Já o potencial de toque é definido como a diferença de potencial entre um ponto no nível da malha e outro na superfície do solo, também espaçados de um metro. Ainda analisando a Figura 22 é possível concluir que as regiões mais externas da malha, também chamadas de periferia da malha possuirão maiores valores de potenciais de passo e de toque devido a maior variação no valor do potencial elétrico.

O cálculo destes valores pode ser feito aplicando a definição destas grandezas para calcular a diferença de potencial elétrico entre dois pontos na simulação. Este trabalho utilizou uma metodologia para calcular estes valores em todos os pontos da superfície do solo, tornando a análise mais fácil e possibilitando a geração de gráficos. O cálculo do potencial de toque foi feito utilizando a matriz de potencial elétrico na superfície do solo. O valor do potencial de toque V_t para cada ponto foi calculado como a diferença entre a máxima elevação de potencial na malha e o potencial elétrico de cada ponto da superfície do solo. Cada ponto da matriz representa o potencial que uma pessoa estará submetida

no contato com uma carcaça aterrada à distância de um metro.

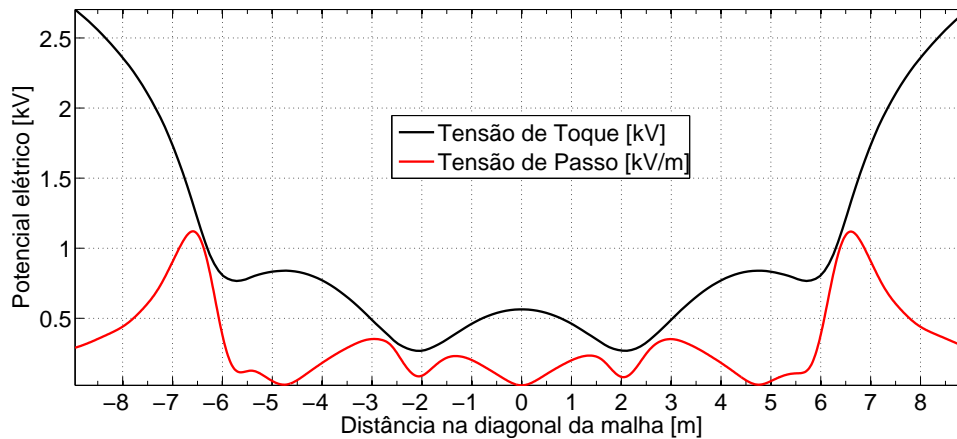
$$[V_t] = GPR - [V(x, y, 0)] \quad (3.23)$$

O valor do potencial de passo V_p foi obtido pelo módulo do gradiente do potencial elétrico na superfície do solo, formulação também utilizada no trabalho de [Heppe \(1979\)](#). Este cálculo fornece o valor absoluto em V/m para cada ponto da superfície do solo.

$$[V_p] = \|\nabla V(x, y, 0)\| = \sqrt{\frac{\partial[V(x, y, 0)]^2}{\partial x} + \frac{\partial[V(x, y, 0)]^2}{\partial y}} \quad (3.24)$$

Aplicando a metodologia de cálculo apresentada na análise da malha apresentada na Figura 21, que está imersa em um solo uniforme de resistividade $100\Omega \cdot m$ e está submetida a uma corrente de curto circuito de $1 kA$, podemos obter o comportamento do potencial de toque e de passo na diagonal da malha de aterramento conforme a Figura 23. Através da análise desta figura podemos observar que os valores destas duas grandezas são maiores para as regiões mais externas a malha.

Figura 23 – Potencial de passo e de toque na diagonal da malha



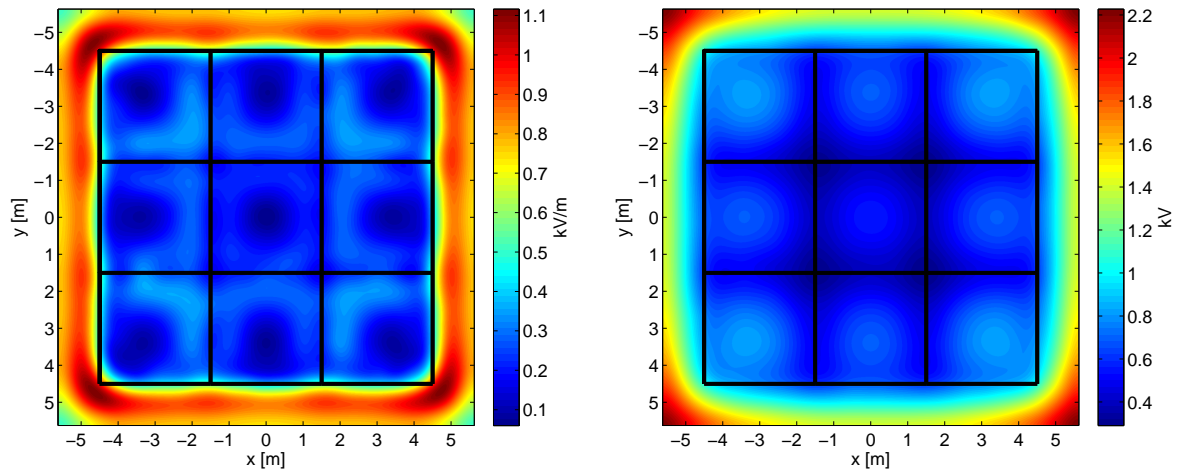
Fonte: Elaboração própria.

Os limites de segurança máximos permitidos para este exemplo são de $1763,04V$ para o potencial de passo e de $563,80V$ para o potencial de toque. Através da simulação foram obtidos $969,6V$ para o potencial de passo e o valor de $1119V$ para o valor do potencial de toque. Se o cálculo fosse realizado aplicando a metodologia da norma [IEEE Std 80 \(2000\)](#) estes valores obtidos seriam de $912,49V$ para o potencial de passo e de $1553,25V$ para o potencial de toque. Note que os valores obtidos através da simulação e do equacionamento da norma apresentam a mesma ordem de grandeza e em ambos os casos esta malha precisaria ser reformulada para atender os requisitos de segurança.

Com a análise da Figura 24, que foi gerada aplicando-se a metodologia de cálculo apresentada neste trabalho, podemos obter o comportamento dos potenciais de passo e de toque na superfície do solo. Com esta análise é possível localizar os pontos exatos onde os

potências de toque e de passo excedem os limites de segurança, o que possibilita readequar o projeto de forma local, como a utilização de uma submalha de equalização, ao invés de mudar a malha por completo.

Figura 24 – Resultados de simulação



(a) Potencial de passo na superfície do solo. (b) Potencial de toque na superfície do solo.

Fonte: Elaboração própria.

A utilização de métodos numéricos para um projeto de um sistema de aterramento tem a vantagem de se conhecer a distribuição de potencial elétrico no solo, o que torna este método mais versátil do que o método tradicional. Com a utilização de métodos computacionais é possível a realização de estudos especiais de sistemas de aterramento elétrico, aumentando a segurança e possibilitando a redução de custos com material elétrico.

3.5 Simulação de ensaios de sistemas de aterramento elétrico

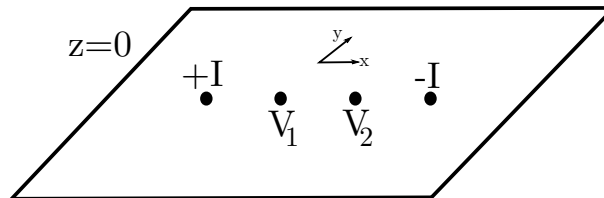
Esta parte do capítulo é dedicada à criação de modelos computacionais para a reprodução dos ensaios de campo realizados como etapas de projetos de sistemas de aterramento. O ensaio de *Wenner* é utilizado na etapa que antecede o projeto para a obtenção das características geométricas do solo. O ensaio do método da queda de potencial é utilizado para a medição local de resistência de aterramento da malha na etapa de comissionamento do projeto.

3.5.1 Medição da resistividade do solo: o método de *Wenner*

O método de *Wenner* (IEEE Std 81, 2012) pode ser reproduzido através de um modelo computacional ao se considerar um dipolo de corrente elétrica na superfície do solo. No método de *Wenner* quatro eletrodos são utilizados durante o ensaio, porém apenas

dois deles são utilizados para a circulação de corrente no solo. Todos os eletrodos estão separados entre si por um igual espaçamento a , sendo os eletrodos de corrente posicionados a uma distância igual a $3a$. O espaçamento das hastes será o parâmetro que será variado durante a simulação.

Figura 25 – Ilustração das condições de contorno aplicadas ao problema.



Fonte: Elaboração própria.

A leitura da resistividade do solo a uma profundidade igual ao espaçamento dos eletrodos é feito aplicando a equação $\rho = 2\pi aR$, onde R é a razão entre a diferença de potencial entre os pontos V_1 e V_2 , que representam os eletrodos de potencial e são ilustrados na Figura 25 e uma corrente imposta de módulo I . Variando o parâmetro a pode-se obter a curva de resistividade aparente experimental do solo através do modelo computacional.

Tabela 4 – Resultados de simulação para o método de *Wenner*

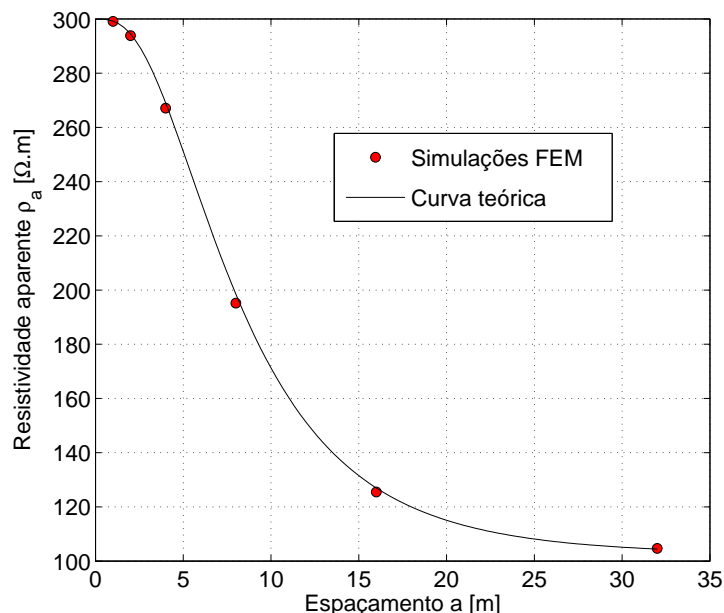
a [m]	Resistividade aparente [$\Omega \cdot m$]		RSE [%]
	Teórica	FEM	
1	299.2303	299.1435	0.0868
2	294.4690	293.8869	0.5821
4	269.0169	267.1324	1.8845
8	198.4438	195.1507	3.2931
16	126.9713	125.5039	1.4674
32	104.4397	104.6950	0.2553

Fonte: Elaboração própria.

A curva de resistividade aparente obtida através da simulação deve ser condizente com o modelo de solo heterogêneo imposto na simulação. Como forma de melhor entendimento desta simulação, o ensaio de *Wenner* foi reproduzido para um solo heterogêneo de duas camadas. A resistividade das camadas são de 300 e 100 $\Omega \cdot m$ respectivamente e a espessura da primeira camada é de 5m. Os resultados de simulação obtidos são mostrados na Tabela 4 para diversos valores de espaçamento entre as hastes, procedimento realizado de maneira análoga ao ensaio de campo com o diferencial que para este caso o modelo do solo já é conhecido. O erro médio quadrático para as leituras realizadas foi de apenas 1,68

%, o que mais uma vez prova a eficácia das simulações realizadas e também da função de resistividade aparente teórica para modelar solos heterogêneos.

Figura 26 – Curva de resistividade aparente teórica em comparação aos pontos simulados.



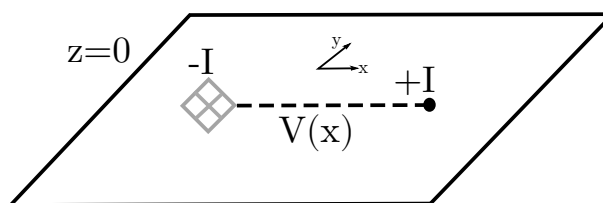
Fonte: Elaboração própria.

A Figura 26 mostra a curva teórica de resistividade aparente para as resistividades das camadas e espessura da primeira camada impostas na simulação. É possível notar que o erro entre os pontos simulados e a curva teórica é bastante baixo. A simulação do método de *Wenner* em elementos finitos neste trabalho teve o intuito somente de testar a eficácia da função de resistividade aparente teórica adotada para a realização dos modelos matemáticos de solo e de reforçar a versatilidade do método dos elementos finitos para a resolução dos mais diversos problemas de aterramento elétrico, não sendo utilizada nos estudos de caso do Capítulo 4.

3.5.2 Medição da resistência de aterramento: o método da queda de potencial

O método da queda de potencial (IEEE Std 81, 2012) é um procedimento experimental para a determinação da resistência de aterramento de um sistema já instalado. A modelagem deste ensaio em elementos finitos é realizada de maneira semelhante ao método de *Wenner*, porém ao invés de utilizarmos uma fonte de corrente pontual para a inserção de corrente no sistema, é utilizado um sistema de aterramento. O retorno de corrente, que é mostrado na Figura 27 como $+I$, pode ser modelado como uma fonte pontual de corrente ou uma geometria de aterramento como uma haste de terra por exemplo, obtendo assim uma simulação mais realista.

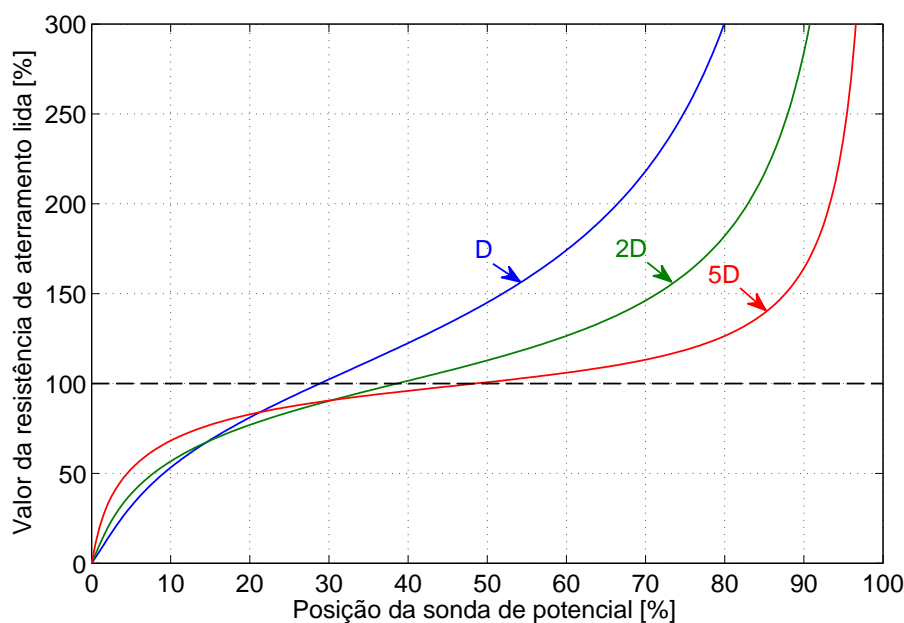
Figura 27 – Ilustração das condições de contorno aplicadas ao problema.



Fonte: Elaboração própria.

O retorno de corrente será posicionado a uma distância que é múltipla da diagonal D da malha. É sugerido pela norma [IEEE Std 81 \(2012\)](#) que a distância do retorno de corrente seja ao menos cinco vezes a maior dimensão do sistema de aterramento. O ensaio do método da queda de potencial foi simulado utilizando a malha de aterramento da Figura 21 para diferentes valores do espaçamento do condutor de retorno de corrente. Para a malha simulada foi adotado um solo homogêneo de $100 \Omega \cdot m$ de resistividade, a escolha deste modelo de solo e desta malha foi utilizada apenas como forma de ilustração de aplicação para esta simulação.

Figura 28 – Aplicação do método dos elementos finitos para a determinação do patamar de potencial no método da queda de potencial.



Fonte: Elaboração própria.

O valor do potencial que seria lido através da variação da sonda de potencial no procedimento experimental é simulado e mostrado na Figura 28 para espaçamentos do condutor de retorno iguais a 1, 2 e 5 vezes o comprimento da diagonal da malha. A simulação mostrou que quanto maior o espaçamento do condutor de retorno menor foi a variação da leitura de resistência de aterramento para o posicionamento correto da sonda de potencial. A simulação também foi capaz de determinar a localização correta da sonda

de potencial. Como resultado de simulação é possível observar que os valores corretos para a localização da sonda de potencial foi de 29,15% para o espaçamento igual a D ; 38,69% para o espaçamento igual a $2D$ e 48,74% da distância total entre a malha e o retorno de corrente para o espaçamento igual a $5D$.

Os valores da localização correta da sonda de potencial apresentaram um erro considerável da localização adotada pela regra prática de 61,8% da distância total. A simulação poderia ser mais realista ao se considerar uma haste de aterramento para este fim. A aplicação da simulação deste ensaio tem grande utilidade prática, pois a esta é capaz de determinar a localização correta da sonda de potencial quando não existe espaço suficiente para o posicionamento do condutor de retorno de corrente.

A importância da determinação do local correto da sonda de potencial é tamanha que já foi abordada nos trabalhos de [Nassereddine et al. \(2014a\)](#) e [Nassereddine et al. \(2014b\)](#), onde os mesmos sugerem um método analítico para esta finalidade. A metodologia abordada neste trabalho tem grande importância para a realização mais precisa do comissionamento de sistemas de aterramento elétrico, principalmente em subestações localizadas em áreas urbanas onde o espaço disponível para este ensaio é incompatível com as dimensões das malhas ensaiadas.

Capítulo 4

Comparação Teórico-Experimental

Introdução

Neste capítulo serão mostradas aplicações das metodologias abordadas neste trabalho. Uma estratificação otimizada é aplicada nos estudos de caso encontrados na norma brasileira de estratificação do solo ([NBR 7117, 2012](#)). Projetos reais de malhas de aterramento são realizados utilizando o método dos elementos finitos e o mesmo método também é utilizado para o comissionamento de um projeto real de uma subestação. O método dos elementos finitos foi aplicado para calcular a resistência de aterramento, foi utilizado como forma de auxílio ao ensaio de medição da resistência de aterramento e como forma de determinar os potenciais de passo e de toque existentes no sistema após a execução do projeto.

Este capítulo mostra exemplos de aplicação do equacionamento desenvolvido no Capítulo 1 junto ao método de otimização para a realização da estratificação do solo. A aplicação da estratificação otimizada foi utilizada para avaliar os casos mostrados na norma [NBR 7117 \(2012\)](#) e também na análise de projetos reais de sistemas de aterramento.

Os procedimentos experimentais apresentados nos Capítulos 1 e 2 são utilizados neste capítulo para medições reais de resistividade elétrica do solo, medição de resistência de aterramento e medição de potenciais de superfície em subestações.

A modelagem em elementos finitos apresentada no Capítulo 3 é aplicada neste capítulo para a análise de projetos reais de subestações e como forma de auxílio a medições locais de resistência de aterramento e potenciais de superfície, otimizando assim a precisão e o tempo necessário para a realização do procedimento experimental.

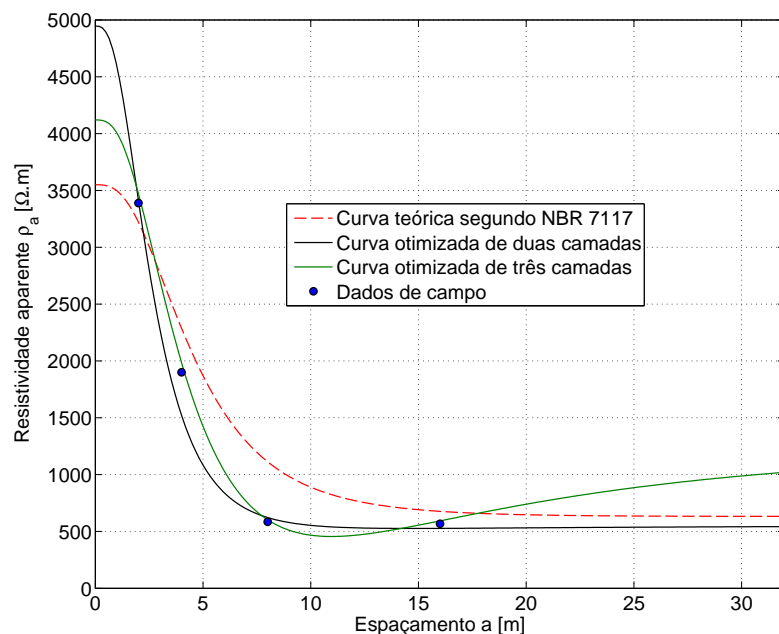
4.1 Análise da Norma NBR 7117

A modelagem convencional do solo é um processo bastante susceptível a erros devido à extrapolação de valores e estimação de alguns parâmetros. Esta seção do trabalho mostra os resultados da aplicação de uma metodologia de estratificação do solo baseada na minimização do erro, utilizando algoritmos de otimização, entre uma função de resistividade aparente teórica e os valores de resistividade medidos em campo através do método de *Wenner*. Os valores da estratificação encontrados no anexo B da norma [NBR 7117 \(2012\)](#) serão otimizados e o erro entre os dados obtidos em campo e as curvas teóricas com valores encontrados na norma e os propostos neste trabalho serão confrontados.

4.1.1 Estudo de caso 1 – NBR 7117: Anexo B1

Neste problema a norma utiliza, para a estratificação do solo, um método simplificado de duas camadas. Esse procedimento deveria ser restrito a curvas que possuíssem apenas um ponto de inflexão e comportamento assintótico ([KINDERMANN; CAMPAGNOLO, 1992](#)). Visto que o procedimento para a escolha dos valores de resistividade da primeira e segunda camada é bastante subjetivo, pois é necessária a extrapolação da curva tanto para a determinação do valor de resistividade da primeira quanto da segunda camada, pode-se esperar um erro bastante elevado entre os valores de campo e a curva teórica obtida através da metodologia apresentada neste trabalho.

Figura 29 – Estratificação otimizada do solo aplicada ao caso B1 da NBR 7117.



FONTE: Elaboração própria.

O modelo mais adequado para este caso é o modelo de três camadas, pois apresenta dois pontos de inflexão, o que caracteriza uma curva de três camadas. Este problema é

apontado, segundo referência Calixto (2012), que também aplica métodos de otimização para a estratificação do solo. A curva de resistividade aparente teórica para o modelo otimizado de duas e três camadas é mostrada na Figura 29. Os modelos otimizados de duas e três camadas são confrontados com o modelo de duas camadas que foi encontrado pela estratificação realizada na norma e também com as leituras de campo.

Tabela 5 – Estratificação otimizada do solo aplicada ao caso B1 da NBR 7117.

Espaçamento [m]	RSE [%]		
	NBR7117	Modelo otimizado 2 camadas	Modelo otimizado 3 camadas
2	4.9215	0.7778	2.4751
4	20.4557	19.8356	4.5717
8	90.2573	6.3657	2.9669
16	19.1899	7.2090	4.4056
32	23.9269	34.7809	22.6186

Fonte: Elaboração própria.

Os valores da estratificação do solo são mostrados na Tabela 8. Os valores de erro, sendo adotado como métrica a raiz do erro quadrático (RSE), das curvas teóricas geradas com os resultados de estratificação do solo em comparação com as leituras de campo são mostradas conforme a Tabela 5. O erro médio quadrático total das leituras foi de 43,66% para o modelo proposto pela norma, 18,42% para o modelo otimizado de duas camadas e 10,65% para o modelo otimizado de três camadas.

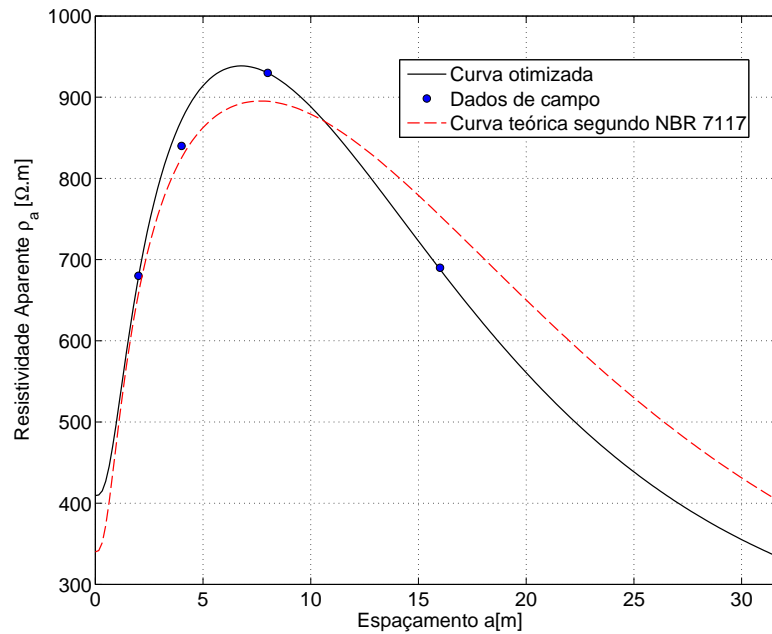
4.1.2 Estudo de caso 2 – NBR 7117: Anexo B2

Neste problema a norma utiliza para a estratificação do solo, o método gráfico de curvas-padrão e auxiliar, adotando um modelo de três camadas para a estratificação do solo. A curva de resistividade aparente teórica para o modelo otimizado de três camadas e o resultado da função de avaliação são mostrados na Figura 30.

Os valores da estratificação do solo são mostrados na Tabela 8. Os valores de erro, sendo adotado como métrica o erro médio quadrático, das curvas teóricas geradas com os resultados de estratificação do solo em comparação com as leituras de campo são mostradas conforme a Tabela 6, sendo o valor do RMSE das leituras igual a 10,42% para o modelo proposto pela norma e de 1,70% para o modelo otimizado de três camadas. No primeiro estudo de caso a norma NBR 7117 (2012) adota um modelo de duas camadas apresentando um erro bastante considerável, pois a modelagem adotada foi inadequada. Para o segundo estudo de caso o modelo adotado condiz com a curva característica obtida no ensaio de campo, o que reduziu o erro do modelo do solo sugerido pela norma.

Neste exemplo a curva de resistividade aparente experimental realmente possui

Figura 30 – Estratificação otimizada do solo aplicada ao caso B2 da NBR 7117.



Fonte: Elaboração própria.

características de um modelo de solo de três camadas. Embora os valores encontrados na norma NBR 7117 (2012) tenham sido aceitáveis, os mesmos não estão otimizados.

Tabela 6 – Estratificação otimizada do solo aplicada ao caso B2 da NBR 7117.

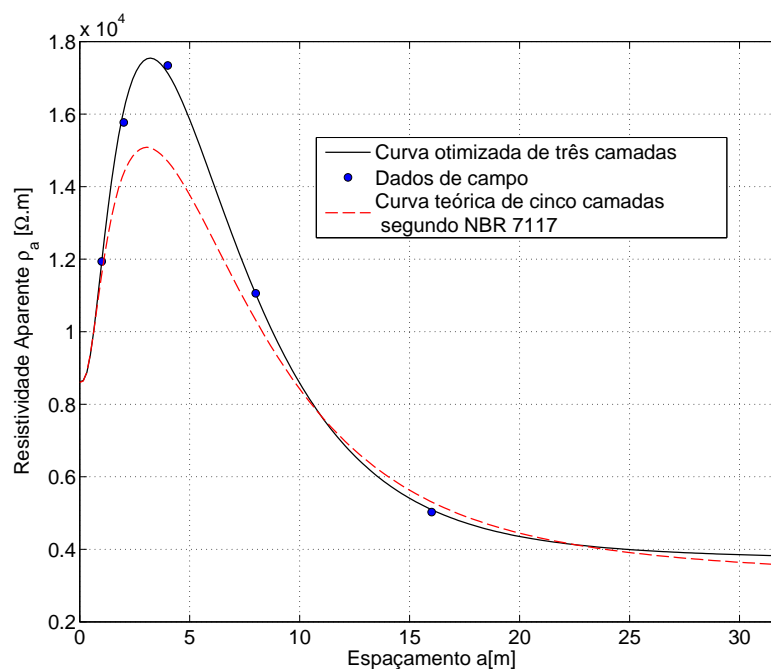
Espaçamento [m]	RSE [%]	
	NBR7117	Modelo otimizado 3 camadas
2	3.2907	0.3063
4	1.7749	3.7841
8	3.7627	0.0109
16	9.2591	0.2945
32	20.7088	0.1314

Fonte: Elaboração própria.

4.1.3 Estudo de caso 3 – NBR 7117: Anexo B3

Neste problema a norma utiliza, para a estratificação do solo, o método de Pirson, adotando um modelo de cinco camadas para a estratificação do solo. A curva de resistividade aparente experimental para este problema apresenta somente dois pontos de inflexão, o que caracteriza um modelo de três camadas para o solo. Neste caso, a modelagem por cinco camadas, apesar de ser desnecessária, não é errada, porém o procedimento realizado pela norma além de bastante extenso, não gerou bons resultados em comparação com o modelo otimizado de três camadas.

Figura 31 – Estratificação otimizada do solo aplicada ao caso B3 da NBR 7117.



Fonte: Elaboração própria.

Ao se traçar a curva de resistividade teórica utilizando os valores sugeridos em NBR 7117 (2012), a respectiva curva teórica não se aproxima com eficácia de todos os dados de campo. Para este caso foi desenvolvido um modelo de três camadas para a solução deste problema, sendo a curva de resistividade aparente teórica para o modelo otimizado de três camadas e o resultado da função de avaliação mostrado conforme a Figura 31.

Tabela 7 – Estratificação otimizada do solo aplicada ao caso B3 da NBR 7117.

Espaçamento [m]	RSE [%]	
	NBR7117 5 camadas	Modelo otimizado 3 camadas
1	2.9337	0.1023
2	8.8711	2.0864
4	15.2505	1.2084
8	6.6644	0.1445
16	5.5615	1.3125
32	6.4288	0.0222

Fonte: Elaboração própria.

Os valores da estratificação do solo são mostrados na Tabela 8. Os valores de erro, sendo adotado como métrica a raiz do erro quadrático, das curvas teóricas geradas com os resultados de estratificação do solo em comparação com as leituras de campo são mostradas conforme a Tabela 7. O erro médio total das leituras foi de 8,53% para o modelo proposto pela norma e de 1,12% para o modelo otimizado de três camadas.

Tabela 8 – Resumo de todas as estratificações de solo realizadas

		Caso B1			Caso B2			Caso B3						
		Modelo otimizado	Modelo otimizado	NBR7117	Modelo otimizado	NBR7117	Modelo otimizado	NBR7117	Modelo otimizado					
		2 camadas	3 camadas	3 camadas	3 camadas	3 camadas	3 camadas	5 camadas	3 camadas					
i	ρ_i	h_i	ρ_i	h_i	ρ_i	h_i	ρ_i	h_i	ρ_i					
1	3550	3.1	4945.528	1.834	4120.425	2.54	340	0.69	409.361	0.934	8600	0.64	8616.103	0.755
2	630		539.3620		241.875	6.534	1020	14.31	1172.783	9.61	21575	0.29	30584.321	2.648
3					1430.828		150		191.49		19146	3.47	36531.1	
4											4460	7.4		
5											3151			

Fonte: Elaboração própria.

^a (NBR 7117, 2012)

^b Todos os valores de resistividade apresentados nesta tabela estão em $\Omega \cdot m$

^c Todos os valores de espessura das camadas apresentados nesta tabela estão em m

4.1.4 Considerações sobre os resultados obtidos

A metodologia apresentada para a estratificação em [NBR 7117 \(2012\)](#) é baseada em quatro métodos gráficos. O procedimento para a realização da estratificação do solo, utilizando estes métodos, é baseado na extrapolação de algumas grandezas e na análise e interpolação de valores apresentados por tabelas, estes métodos são:

1. Método simplificado;
2. Método gráfico de curvas padrão e auxiliar;
3. Método de Pirson;
4. Segundo método de Tagg.

Pelo fato da estratificação segundo a [NBR 7117 \(2012\)](#) ser desenvolvida baseada na interpretação de gráficos e interpolação de tabelas, a utilização da metodologia apresentada na referida norma é bastante susceptível a erros. Existe uma grande parcela de erros que pode ser gerada devido às aproximações realizadas e também devido à grande incerteza na estimativa de parâmetros.

A estimativa da resistividade da primeira camada do solo que é encontrada através da extrapolação dos valores da curva de resistividade aparente experimental é necessária para todos os exemplos encontrados no anexo B da norma. Este fato junto a constante interpolação linear, de uma função que não é linear, através das tabelas, geram erros que tornam imprecisa a estratificação realizada.

A metodologia aqui proposta tem aplicação em qualquer problema de estratificação do solo em camadas horizontais, encontrando valores otimizados para este fim. Apesar de [NBR 7117 \(2012\)](#) deixar bem claro que todos os métodos apresentados são baseados na resolução da equação do potencial elétrico em meios heterogêneos, que é apresentada no Capítulo 1 deste trabalho, e que a referida equação pode ser resolvida através de softwares computacionais, uma metodologia de estratificação otimizada do solo partindo da solução analítica, poderia ser incluída como um dos anexos da norma, como foi feito na norma [IEEE Std 81 \(2012\)](#) para o caso de solos compostos por duas camadas. Como em todos os estudos de caso realizados neste trabalho foi possível notar que o método computacional apresenta um erro consideravelmente menor entre os valores experimentais e a curva teórica desenvolvida, mostrando-se bastante superior, a inclusão deste tipo de metodologia na norma para a resolução da estratificação do solo seria válida.

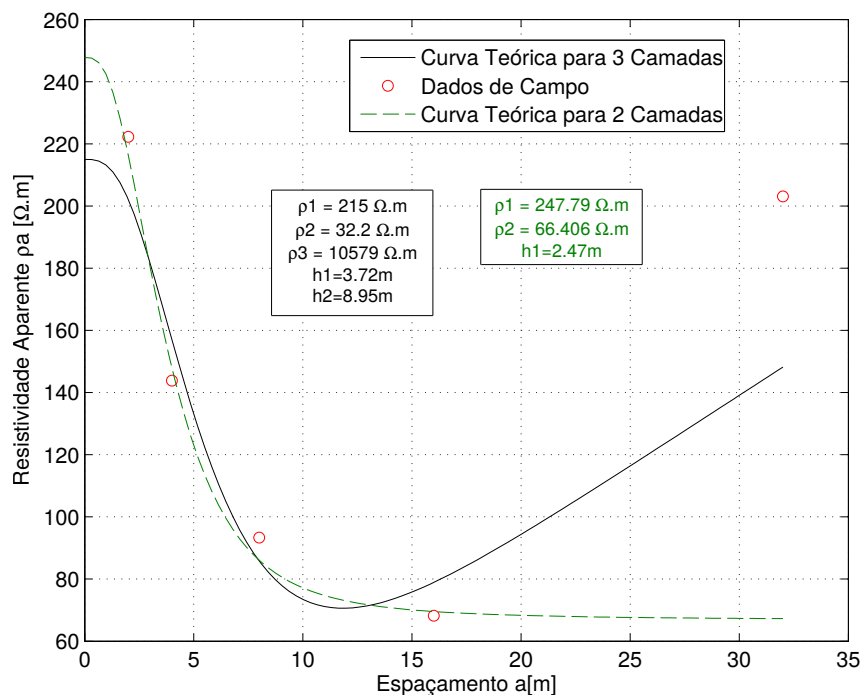
4.2 Projetos de sistemas de aterramento utilizando o método dos elementos finitos

Para a modelagem e simulação dos estudos de caso que serão apresentados nesta seção do trabalho foi utilizado o software baseado em elementos finitos COMSOL *Multiphysics* V4.3b em um servidor na arquitetura cluster localizado no Centro Nacional de Processamento de Alto Desempenho (CENAPAD) da Universidade Federal do Ceará. Apesar da complexidade deste problema específico não exigir tamanho recurso computacional, este foi utilizado como teste para trabalhos futuros de maior complexidade.

4.2.1 Estudo de caso: Subestação A

Para esta parte do capítulo foi escolhido como estudo de caso um projeto real de malha de aterramento de uma subestação localizada no estado do Ceará no complexo industrial do Pecém. Para as medições de resistividade do solo, realizadas pelo método de *Wenner* no local, foram realizadas estratificações de duas e três camadas utilizando o software de estratificação do solo apresentado neste trabalho. O modelo de três camadas do solo representa um modelo mais realista do mesmo e o de duas camadas um modelo simplificado.

Figura 32 – Modelo do solo otimizado de duas e três camadas



Fonte: Elaboração própria.

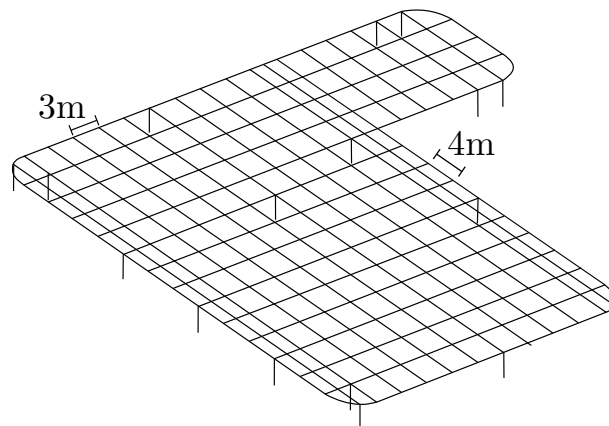
O algoritmo de PSO global, utilizado neste estudo de caso para desenvolver o modelo do solo, teve como parâmetros de ajuste 1000 iterações critério de parada, sendo reinicializada a posição das partidas a cada 50 iterações estagnadas; o número de partículas

n_s igual a 50; o parâmetro cognitivo $c_1 = 0,8$ e o parâmetro social $c_2 = 0,8$. Os limites da solução adotados são de 0,5 a 10 m para a espessura das camadas e de 1 a 1200 $\Omega.m$ para a resistividade das camadas.

O resultado da estratificação obtido é mostrado na Figura 32, onde para as leituras de resistividade do solo obtidas pelo método de *Wenner* foram traçadas as curvas de resistividade teórica que mais se aproximam destes pontos para modelos de duas e três camadas. O projeto deste sistema será realizado para o modelo mais complexo e o modelo simplificado como forma de ilustração.

O projeto do sistema de aterramento a ser estudado é composto de uma malha de aterramento em "L", onde na ramificação da malha será instalada a casa de comando da subestação. A subestação possui uma camada superficial de brita de 15cm, sendo que a área reservada para a casa de comando possui uma camada de concreto de 15cm com um tapete de borracha isolante de 6,4mm de espessura.

Figura 33 – Malha de aterramento simulada.



Fonte: Elaboração própria.

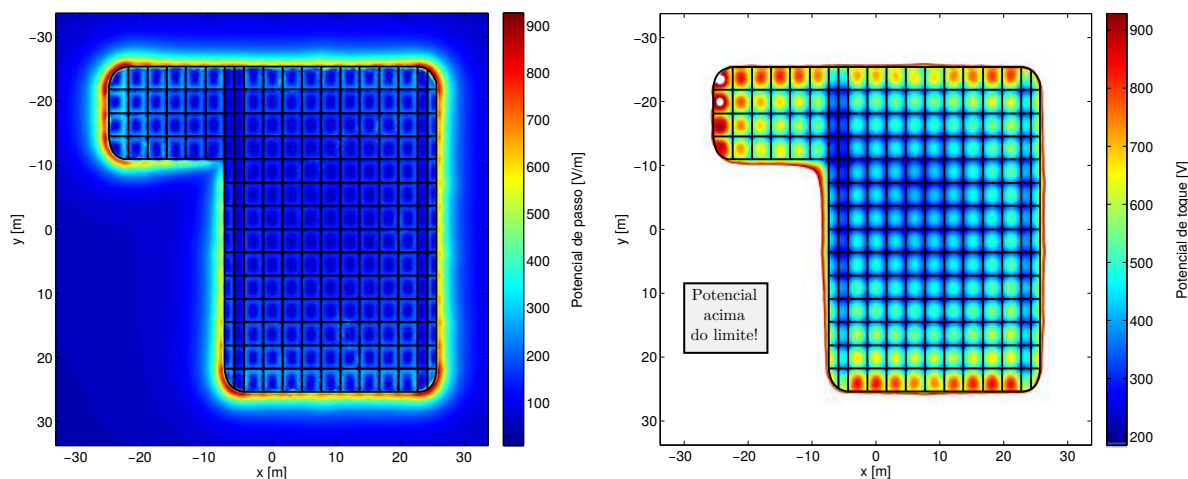
O sistema projetado possui um total de 1890m de cabos de cobre de 40mm² de seção transversal, formando um reticulado de 3m por 4m e 14 hastes de aterramento de 3m de comprimento distribuídas pela periferia do mesmo. A capacidade de curto circuito monofásico no ponto de entrega é de 3,98kA com um tempo máximo de atuação da proteção de 0,5s. O domínio que representa o solo é modelado por camadas horizontais estratificadas, onde a uma profundidade de 0,5m de sua superfície é inserida uma malha de aterramento composta por elementos unidimensionais horizontais representando os cabos, e verticais representando os eletrodos de aterramento. A geometria do sistema de aterramento simulado é mostrada conforme a Figura 33.

Para a simulação realizada, inicialmente o sistema é excitado pela corrente de curto-circuito, que é uniformemente distribuída entre os condutores de aterramento. Após o cálculo da máxima elevação de potencial gerada por esta corrente é feita outra etapa da simulação onde é assumido que os condutores possuem potencial fixo e igual à máxima

elevação de potencial gerada pela passagem de corrente.

O comportamento dos potenciais de passo e de toque é mostrado conforme a Figura 34. O potencial de toque na superfície do solo devido a condução de corrente de curto circuito no sistema de aterramento é mostrado na Figura 34b, onde os tons de azul ao vermelho representam a intensidade do potencial elétrico e as regiões que não foram coloridas, ou seja, que estão representadas em branco na figura, indicam os locais onde o potencial de toque excede o limite de segurança utilizando somente o revestimento de brita. Vale ressaltar que o conceito de potencial de toque somente faz sentido para regiões que possuem carcaças metálicas aterradas, que são locais onde pode haver uma transferência de potencial entre o nível de malha e o operador da subestação que se encontra na superfície do solo.

Figura 34 – Resultados de simulação



(a) Potencial de passo na superfície do solo. (b) Potencial de toque na superfície do solo.

Fonte: Elaboração própria.

Para visualizar as regiões que apresentam o maior gradiente de potencial, podemos plotar o potencial elétrico de passo na superfície do solo, como mostra a Figura 34a. É possível observar que a região da periferia da malha é a que possui o maior gradiente de potencial, e que a adição de condutores menos espaçados nas laterais da malha contribuíram para a uniformização do potencial nestes locais específicos do projeto.

A resistência de aterramento da malha é obtida pela razão entre a máxima elevação de potencial no solo em relação ao terra remoto, que se encontra nos limites da simulação, e a corrente de curto circuito que foi utilizada como excitação do sistema. Para a determinação do máximo potencial de toque e do máximo potencial de passo que uma pessoa estará submetida na subestação, foi feita uma análise destas grandezas na superfície do solo. A máxima diferença de potencial entre dois pontos espaçados de $1m$ na superfície do solo é o potencial de passo e com o mesmo espaçamento entre um ponto na superfície do solo e outro no nível da malha é o potencial de toque. Os valores dos

potenciais de passo e de toque obtidos pela simulação devem ser menores que os valores limites calculados nas equações propostas pela norma [IEEE Std 80 \(2000\)](#). A metodologia utilizada para o cálculo dos potenciais de passo e de toque, e dos limites de segurança são mostrados no Capítulo 3 deste trabalho.

Tabela 9 – Resultados de Simulação

Parâmetro	Modelo de solo		Valor limite
	2 Camadas	3 Camadas	
Resistência	1.22 Ω	1.79 Ω	5 Ω
E_{step} (Subestação)	299V	243V	3048.2839V
E_{step} (Casa de comando)	650V	638V	9.54 · 10 ⁶ V
E_{touch} (Subestação)	802V	625V	928.59V
E_{touch} (Casa de comando)	952V	913V	9.54 · 10 ⁶ V

Fonte: Elaboração própria.

Como resultado da simulação foram calculados a resistência de aterramento e os limites de segurança para o modelo do solo de três camadas e o simplificado de duas camadas, na região revestida com uma camada de 15cm brita e na região da casa de comando, que é uma região abrigada revestida com uma camada de 15cm de concreto com um tapete isolante de 6,4mm. Apesar dos valores de tensões de toque obtidos como resultado da simulação não apresentarem sentido se no ponto medido não houver alguma carcaça metálica aterrada, neste trabalho foi considerado o pior caso possível, que é na periferia da malha. Os resultados obtidos para os dois modelos de solo e para dois tipos de material de revestimento são mostrados na Tabela 9. Note que os potenciais limites para a segurança são bastante dependentes do material de revestimento superficial do solo.

4.2.2 Estudo de caso: Subestação B

Este estudo de caso foi realizado em uma subestação real localizada na cidade de Fortaleza, como mostra a Figura 35. Para a realização deste estudo foi feita a medição de resistividade do solo pelo método da *Wenner* em sua área, o ensaio de medição de resistência elétrica através do método da queda de potencial e da medição dos potenciais de passo e de toque. A medição de resistividade é realizada em uma etapa que antecede o projeto e as medições de resistência e potenciais de passo e de toque na fase de comissionamento do projeto. O nível de curto circuito da subestação é de 5kA com duração da atuação da proteção de 0,5s.

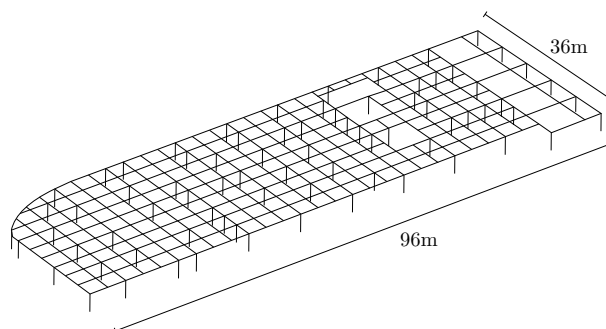
Figura 35 – Subestação utilizada no estudo de caso (Subestação B)



Fonte: Elaboração própria.

O sistema de aterramento projetado é composto por uma malha de aterramento com $96m$ de comprimento por $36m$ de largura, o que totaliza em uma área de $3456m^2$ sendo necessário para a sua composição da mesma $1576m$ de condutores de cobre de $70mm^2$ de seção transversal, e também possui 77 hastes de aterramento de $3m$ de comprimento e $3/4"$ de diâmetro, totalizando $1807m$ de condutores em sua composição.

Figura 36 – Sistema de aterramento simulado



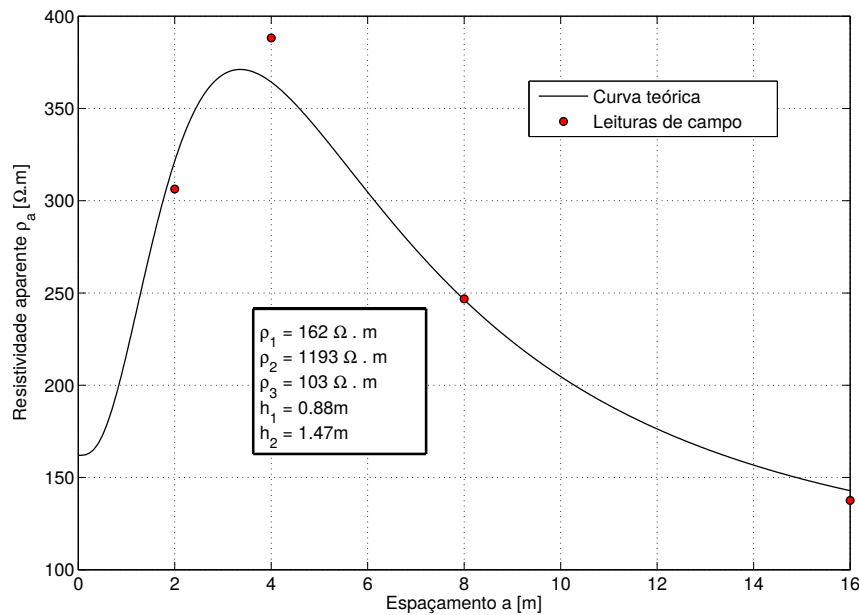
Fonte: Elaboração própria.

A malha projetada para o modelo de solo que foi encontrado pelo algoritmo de otimização, é utilizada no modelo de elementos finitos e é mostrada conforme a Figura 36. Devido ao contraste de dimensões entre o diâmetro dos condutores que formam a malha e as dimensões do domínio de solo utilizado no modelo computacional, os condutores de aterramento foram modelados como unidimensionais. Para geometrias onde o diâmetro é desprezível em relação ao seu comprimento esta simplificação é válida, não gerando erros significativos no resultado da simulação.

O algoritmo de PSO global utilizado neste estudo de caso para desenvolver o modelo do solo teve como parâmetros de ajuste 1000 iterações critério de parada, sendo

reinicializadas a posição das partidas a cada 50 iterações estagnadas; o número de partículas n_s igual a 50; o parâmetro cognitivo $c_1 = 0,8$ e o parâmetro social $c_2 = 0,8$. Os limites da solução adotados são de 0,5 a 10 m para a espessura das camadas e de 1 a 1200 $\Omega.m$ para a resistividade das camadas, sendo a estratificação otimizada do solo obtida com o algoritmo mostrada na Figura 37.

Figura 37 – Comparação entre a curva gerada pelo algoritmo de otimização e os dados de campo



Fonte: Elaboração própria.

O erro médio quadrático de cada ponto da curva calculada em comparação com os pontos medidos em campo são mostrados na Tabela 10, sendo o erro médio total igual a 0,62% e o erro médio absoluto das medições igual a 3,78%. A curva de resistividade aparente teórica gerada com os valores da otimização em comparação com os dados obtidos com o ensaio em campo são mostrados na Figura 37.

O equacionamento utilizado para os cálculos dos limites de segurança para os potenciais de passo e de toque é apresentado na norma [IEEE Std 80 \(2000\)](#), sendo este equacionamento desenvolvido exclusivamente para modelos de solos uniformes. Como os resultados da estratificação do solo realizados para este estudo de caso resultou em um modelo de solo de três camadas, é necessário então relacionar o solo heterogêneo com um modelo de solo homogêneo para o devido cálculo dos potenciais limites de segurança.

Uma forma de se obter uma relação entre o solo heterogêneo homogêneo é utilizando o método apresentado em [Endrenyi \(1963\)](#). Este método utiliza uma simplificação do sistema de aterramento por um anel enterrado em um solo de duas camadas, determinando assim uma família de curvas que relacionam a geometria de um sistema de aterramento representado por este anel e as características do solo estratificado, com o

intuito de se determinar um valor de resistividade equivalente de solo homogêneo que represente este problema.

Tabela 10 – Resultados da otimização

$a[m]$	Resistividade aparente [$\Omega \cdot m$]		RSE [%]
	Experimental	Teórica	
2	306.31	321.51	4.96
4	388.23	364.33	-6.16
8	246.80	246.36	-0.18
16	137.56	142.84	3.84

Fonte: Elaboração própria.

De acordo com [Endrenyi \(1963\)](#) a resistência de aterramento de qualquer sistema é diretamente proporcional à resistividade do solo e função somente da sua geometria. Este mesmo sistema de aterramento imerso em outro solo, uniforme ou não, terá então uma resistência de valor proporcional. Com base neste raciocínio foi desenvolvido uma equação para obtenção do modelo de solo uniforme equivalente através de simulações utilizando o FEM, para este fim calcula-se a razão entre a resistência de aterramento do solo heterogêneo e um solo homogêneo hipotético de resistividade unitária, como mostra a Equação 4.1.

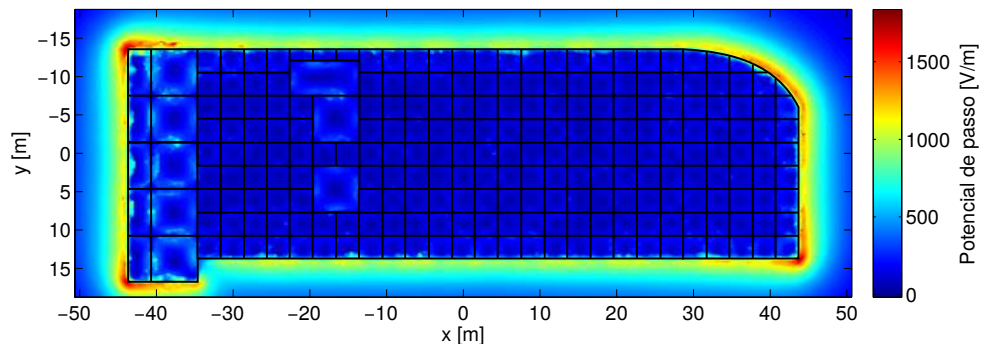
$$\rho_0 = \frac{R(\rho_1, \rho_2, \rho_3)}{R(\rho = 1)} \quad (4.1)$$

A utilização desta equação além de ser bastante útil para o cálculo correto dos parâmetros de segurança para o projeto, inclusive para solos com mais de duas camadas, é capaz de simplificar uma simulação que utiliza um solo heterogêneo em um modelo de solo uniforme. Esta simplificação gera um modelo equivalente que exige menos esforço computacional para ser simulado, gerando o mesmo valor para a resistência de aterramento do modelo heterogêneo, porém com uma distribuição de potencial aproximada. A utilização desta técnica pode ser útil como uma forma de simular um modelo simplificado, que pode ser aplicável em simulações paramétricas ou com domínios muito grandes, que exigem um grande esforço computacional.

A resistividade de solo uniforme ρ_0 encontrada utilizando a Equação 4.1 foi de 183,53 $\Omega \cdot m$. Os valores dos potenciais limites de segurança para um projeto que utiliza como material de revestimento superficial 10cm de brita são de 3054,18V para o potencial de passo e de 930,07V para o potencial de toque, sendo estes valores calculados utilizando o equacionamento apresentado no Capítulo 3.

O comportamento do potencial de passo na malha na superfície do solo é mostrado na Figura 38. Esta grandeza foi calculada pelo módulo do gradiente do potencial elétrico na superfície do solo, e seu valor máximo foi inferior ao limite de segurança para o potencial de passo. Note que os valores máximos de potencial de passo estão na periferia da malha e que o arredondamento de algumas regiões da malha reduziu o seu valor para estes locais específicos. Esta é uma estratégia muito inteligente de se reduzir o gradiente de potencial na periferia de malhas de aterramento, sendo bastante utilizado por projetistas como forma de elevar a segurança dos sistemas projetados.

Figura 38 – Potencial de passo na superfície do solo.



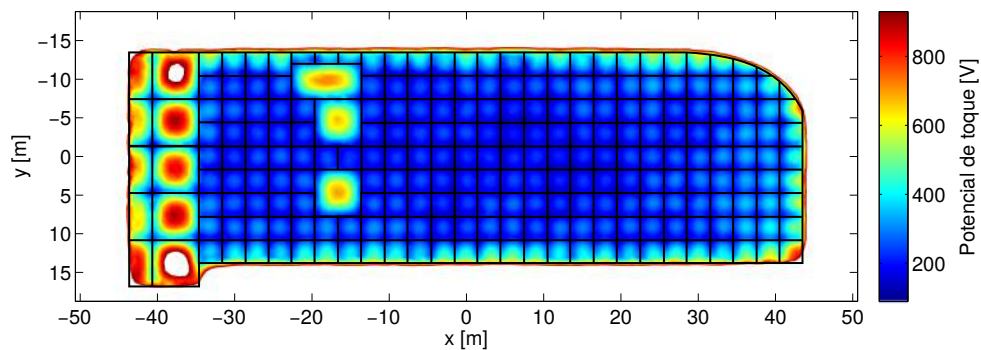
Fonte: Elaboração própria.

O potencial de toque é por definição a diferença de potencial a um metro entre uma carcaça aterrada e um ponto na superfície do solo, sendo calculado pela diferença entre a máxima elevação de potencial na malha causada pela passagem da corrente de curto circuito na malha e o potencial elétrico na superfície do solo. O valor do potencial de toque é mostrado na Figura 39, onde os tons de azul ao vermelho representam sua intensidade e as regiões que não foram coloridas, ou seja, que estão representadas em branco na figura, indicam os locais onde o potencial de toque excede o limite de segurança utilizando o revestimento de 10cm de brita.

Os pontos em que este potencial foi excedido além de não possuírem carcaças aterradas, possuem outro material de revestimento superficial de resistividade equivalente superior à da brita, o que aumenta o valor do limite de segurança para estes locais específicos. Estes pontos são referentes à sala de comando, estradas asfaltadas e calçadas. A sala de comando possui uma camada de 20cm de concreto seco, o que eleva bastante o limite de segurança, em torno de 272 kV ao se considerar uma região coberta. Como na região onde o material de revestimento é o asfalto não existe a possibilidade de ocorrer um acidente devido ao potencial de toque, pois não há possibilidade de contato, pode-se validar este projeto em relação à segurança.

Alguns comentários devem ser feitos a respeito das regiões onde o potencial de toque pode exceder o valor limite capaz de proporcionar segurança ao operador da subestação. Existem tensões de transferência causadas pelo contato com objetos como tubos, trilhos, ou cercas que estão localizados dentro ou perto da área da malha de terra da subestação e não estão ligados ao sistema de aterramento. Na prática, os perigos provenientes deste tipo de contato podem ser evitados ao aterrarem-se pontos potencialmente perigosos à malha de terra da subestação.

Figura 39 – Potencial de toque na superfície do solo.



Fonte: Elaboração própria.

Para casos onde uma pessoa que está em um ponto remoto toca um condutor ligado à rede de aterramento da subestação, na ocorrência de uma falta, a tensão transferida a esta pessoa ao invés de ser uma fração da elevação máxima de potencial da malha será igual ou até superior a este potencial, o que de acordo com [IEEE Std 80 \(2000\)](#) torna impraticável, e muitas vezes impossível, projetar uma malha de aterramento com base na tensão de contato causada pelas tensões externas transferidas. Estes perigos provenientes de tais tensões podem ser evitados rotulando-se de forma clara os circuitos ou tubulações como sendo potencialmente perigosos, da mesma forma que é feita com linhas energizadas.

4.3 Aplicação do método dos elementos finitos no comissionamento de projetos

Nesta parte do trabalho foram realizados três estudos de caso. O primeiro e o segundo são referentes à simulação de ensaios de medição de resistência de aterramento onde a distância do retorno de corrente não é suficiente para uma leitura de campo precisa. O terceiro trata-se de um projeto de uma malha de aterramento na fase de comissionamento. Neste projeto o método dos elementos finitos será utilizado como forma de se determinar o posicionamento correto da sonda de potencial para o ensaio de resistência de aterramento e também para estimar os níveis de potências de passo e de toque em uma região específica da subestação.

Tabela 11 – Comparação entre o método analítico de (NASSEREDDINE et al., 2014a), as simulações realizadas neste trabalho e a regra prática.

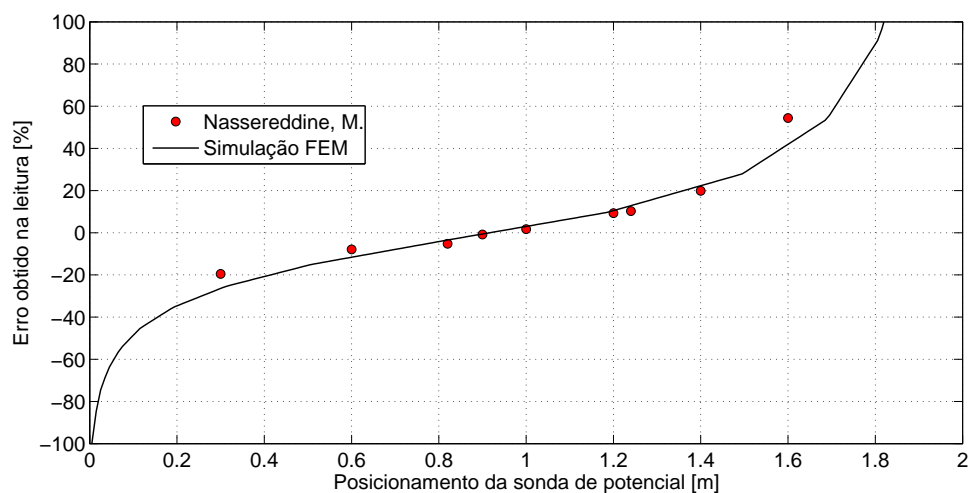
d	Erro na localização da sonda de potencial [%]		
	Nassereddine, M.	Simulação realizada	Regra prática
1	5.5652	6.4627	46.9070
2	-3.3184	-1.7569	10.0648
3	-4.6059	-2.5111	6.2326
4	3.7645	-3.5913	-0.0956
6	-2.6682	-2.3313	0.0483

Fonte: Elaboração própria.

4.3.1 Estudo de caso: Nassereddine et al. (2014a)

O primeiro estudo de caso foi uma reprodução do ensaio de medição de resistência de aterramento através do método da queda de potencial encontrado no trabalho de Nassereddine et al. (2014a). O autor desenvolveu um método analítico para a determinação do local exato para o posicionamento da sonda de potencial. O ensaio realizado foi de um sistema de aterramento composto por uma haste de 1,4m de comprimento e 14mm de diâmetro. Para a realização do ensaio foi utilizado como condutor de retorno um eletrodo de 0,1m de comprimento e de diâmetro iguais ao da haste de aterramento, sendo este posicionado a uma distância d do sistema de aterramento.

Figura 40 – Curva do método da queda de potencial simulado para a haste de retorno de corrente espaçada de 2m do sistema de aterramento.



Fonte: Elaboração própria.

O resumo dos resultados obtidos pelo método analítico, a simulação em elementos finitos e a regra prática de 61.8% da distância total mostrada na norma IEEE Std 80 (2000) é mostrado na Tabela 11. Foi utilizado um polinômio interpolante dos valores ensaiados

para ser possível mensurar o erro entre os pontos calculados através da simulação e o experimento realizado no artigo, obtendo assim o valor de resistência de aterramento para todas as possíveis posições da sonda de potencial. Com a análise dos resultados é possível notar que a regra prática obteve um erro elevado para espaçamentos pequenos entre o condutor de corrente e o sistema de aterramento. O método analítico e a simulação realizada apresentaram bons resultados na determinação da localização do eletrodo de potencial, porém a simulação utilizando métodos numéricos é mais versátil, podendo ser aplicada a qualquer geometria de aterramento e modelos de solo, ao contrário do método analítico proposto.

Como forma de demonstrar a eficácia do modelo computacional, a Figura 40 mostra um comparativo entre a simulação realizada e os dados experimentais para o caso onde o espaçamento d entre o aterramento e o eletrodo de retorno é igual a $2m$. Note que o comportamento das leituras de campo é similar à simulação realizada para esta configuração, o que mostra a eficácia do modelo computacional.

Figura 41 – Montagem e ensaio do sistema de aterramento utilizado no estudo de caso.



(a) Montagem da malha de aterramento.

(b) Procedimento experimental.

Fonte: (NASSEREDDINE et al., 2014b).

4.3.2 Estudo de caso: Nassereddine et al. (2014b)

Este estudo de caso consiste na reprodução do ensaio de medição de resistência de aterramento encontrado no trabalho de Nassereddine et al. (2014b). O autor utilizou um método analítico para a determinação do local exato para o posicionamento da haste de potencial. O ensaio realizado no artigo foi o método da queda de potencial em um sistema de aterramento composto por uma malha de aterramento de $1,4m$ de aresta com 4 hastes de aterramento também de $1,4m$ em seus vértices e $14mm$ de diâmetro. Foi utilizado como condutor de retorno um eletrodo de $0,1m$ de comprimento e diâmetro igual ao da

haste e posicionado a uma distância d do sistema de aterramento. A Figura 41 mostra o procedimento experimental realizado no artigo. A Figura 41a mostra a montagem do sistema de aterramento a ser ensaiado e a Figura 41b mostra o ensaio sendo realizado com a utilização de um terrômetro digital.

O resumo dos resultados obtidos pelo método analítico de [Nassereddine et al. \(2014b\)](#), a simulação em elementos finitos e a regra prática de 61,8% da distância total é mostrado na Tabela 12. Para este estudo de caso também foi utilizado um polinômio interpolante aplicado nos valores ensaiados para ser possível mensurar o erro entre os pontos simulados e o experimento realizado no artigo, obtendo assim o valor de resistência de aterramento para todas as possíveis posições da sonda de potencial. Com a análise dos resultados é possível notar que a regra prática obteve um erro elevado para espaçamentos pequenos do condutor de corrente. O método analítico e a simulação realizada apresentaram bons resultados na determinação da localização exata da sonda de potencial.

Tabela 12 – Comparação entre o método analítico, as simulações realizadas e a regra prática.

d	Erro na localização da sonda de potencial [%]		
	Nassereddine, M.	Simulação realizada	Regra prática
2.4	0.5988	-8.4431	68.0599
4.84	-1.7964	-5.2814	7.5988
7.26	-1.7964	-4.6048	1.2035
24	-	-1.6407	0.2215

Fonte: Elaboração própria.

O valor de $24m$ para a distância d entre a malha de aterramento e o eletrodo de retorno de corrente na Tabela 12 não apresenta nenhum erro para o método analítico, isto porque este ponto foi considerado referência para a medição correta da resistência de aterramento no ensaio. Esta distância corresponde a dez vezes a diagonal da malha ensaiada, o que seria suficiente para se medir com precisão o valor correto da resistência do sistema.

Alguns comentários devem ser feitos a respeito deste estudo de caso, [Nassereddine et al. \(2014b\)](#) em seu artigo fez uma adaptação do seu método analítico para trabalhar também com malhas de terra, obtendo bons resultados ao compará-los com os experimentos realizados. Mesmo tendo o autor adaptado o seu método para situações mais realistas de sistemas de aterramento, o trabalho é feito para malhas com geometrias regulares em solos uniformes. A aplicação do método dos elementos finitos a este caso, mesmo apresentando bons resultados, teve uma precisão inferior ao método analítico e em alguns

casos até para a regra prática. A aplicabilidade do método dos elementos finitos para geometrias complexas e solos heterogêneos ainda torna este método o mais indicado para a determinação da posição da sonda de potencial no ensaio de medição de resistência de aterramento.

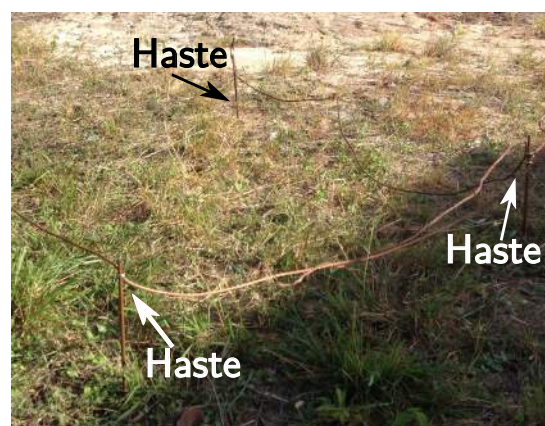
4.3.3 Estudo de caso: Subestação B

Para a realização do ensaio de medição de resistência de aterramento foi utilizado o método da queda de potencial, sendo adotada uma distância de $178m$ para o circuito de retorno de corrente elétrica. Foi adotado um sistema de aterramento com quatro hastes de $1m$ de comprimento e $3/4''$ de diâmetro para o retorno de corrente, como mostra a Figura 42b, com o intuito de se melhorar a precisão dos resultados devido ao aumento do nível da corrente elétrica do circuito.

Figura 42 – Procedimento experimental



(a) Terrômetro utilizado no ensaio.



(b) Sistema de retorno de corrente.

Fonte: Elaboração própria.

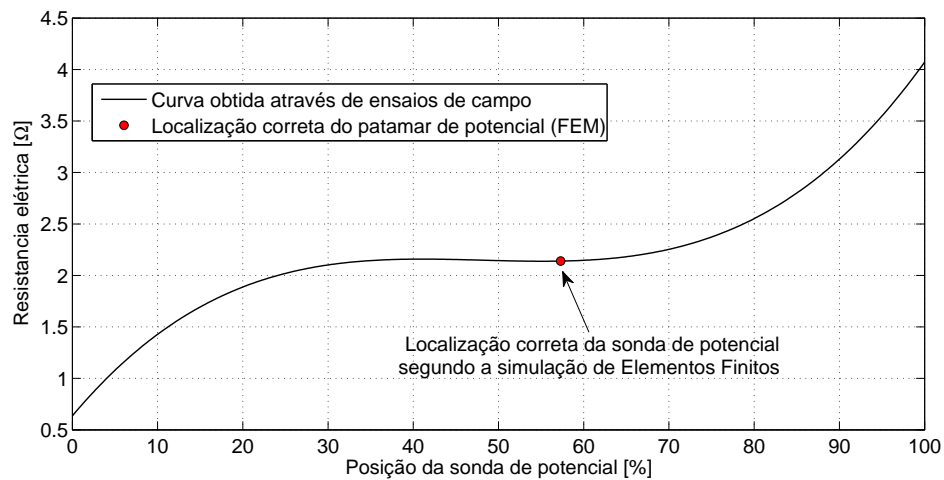
As medições de resistência foram realizadas utilizando-se um terrômetro digital *Megabras* EM4055, como mostra a Figura 42a, variando a posição das sondas de potencial. Para o ensaio foram utilizados 10 eletrodos como sondas de potencial, com o intuito de agilizar o ensaio, sendo as suas posições variadas em uma linha de medição entre o sistema de aterramento e o sistema de retorno de corrente com o intuito de se obter a curva característica deste ensaio.

O valor de resistência de aterramento encontrado pela razão entre a máxima elevação de potencial no solo e a corrente injetada no sistema de aterramento no modelo computacional foi de $2,049\Omega$. O mesmo procedimento experimental foi simulado no FEM injetando uma corrente de $-I$ no sistema de aterramento e $+I$ no retorno de corrente, a posição onde o potencial elétrico no solo é nulo corresponde ao valor correto para a inserção da haste de potencial no solo, pois não apresenta influência de nenhum sistema

de aterramento. As sondas de potencial tiveram suas posições variadas obtendo-se a curva da Figura 43, esta curva foi obtida após a suavização das leituras obtidas no ensaio.

O valor correto do patamar de potencial simulado foi a 57,3% da distância entre o sistema de aterramento e o retorno de corrente. Analisando-se a Figura 43 é possível perceber que o patamar de potencial simulado encontrou-se na região onde a curva está estabilizada, ou seja, a simulação foi precisa na determinação do local exato para o posicionamento do eletrodo de potencial no ensaio. O valor de resistência elétrica obtida pelo ensaio foi de $2,139\Omega$ o que representa um erro de 4,207% entre o modelo computacional e o ensaio realizado. Esta precisão no resultado obtido deve-se a realização da estratificação do solo no local pouco tempo antes da realização do ensaio, o que permitiu a obtenção de um modelo muito representativo do solo e sem erros devido à sazonalidade.

Figura 43 – Curva característica obtida através do procedimento experimental.



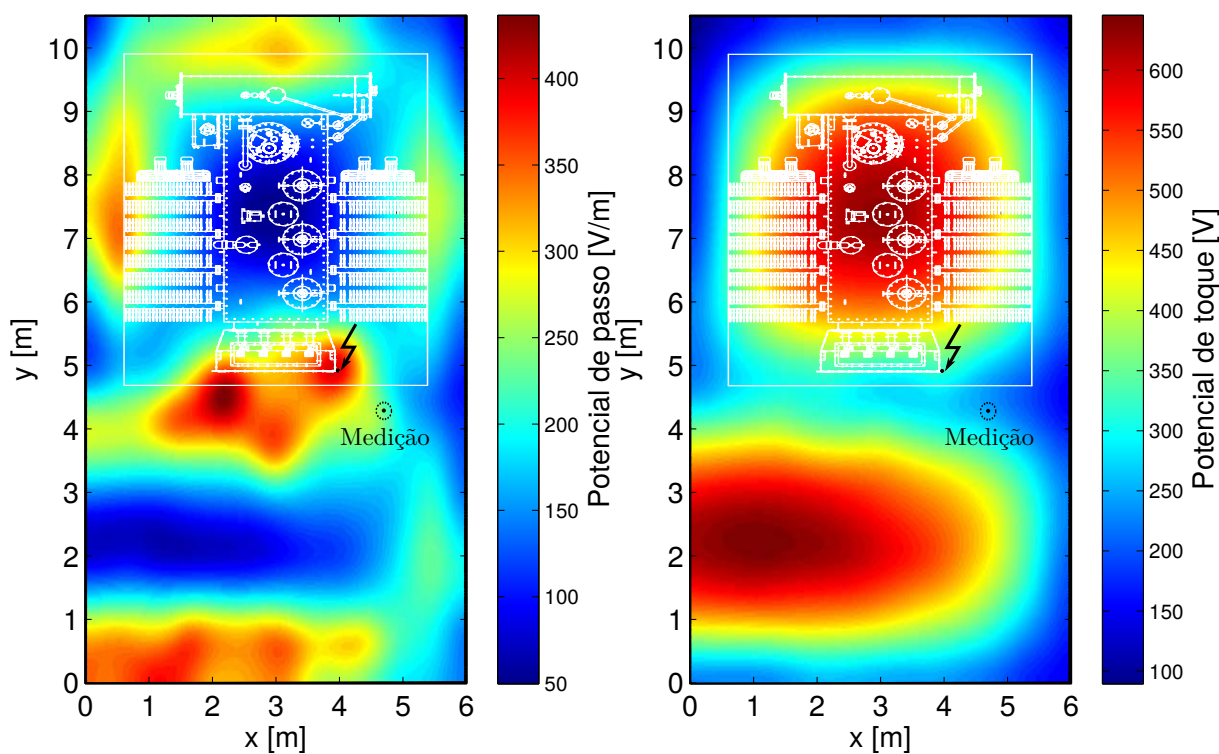
Fonte: Elaboração própria.

Neste estudo de caso também foi realizado um ensaio para a medição dos potenciais de passo e de toque em um ponto específico da subestação com o intuito de comparar as leituras obtidas em campo com a simulação computacional realizada. Para este ensaio foi utilizado o medidor de potenciais de passo e de toque METREL MI 3295, sendo utilizados dois pesos metálicos de $25kg$ cada para simular o contato de um operador com o solo, como mostra a Figura 45. A diferença de potencial obtida entre os dois pesos espaçados a uma distância de um metro simula o potencial de passo devido à passagem de uma corrente elétrica na malha de aterramento e a diferença de potencial entre o peso metálico e uma carcaça metálica aterrada, espaçados de um metro simula o potencial de toque existente na subestação. Como a corrente injetada pelo equipamento é bem inferior a corrente de curto-circuito existente, o valor obtido no ensaio é extrapolado com o intuito de se estimar o valor de potencial gerado devido à passagem da corrente de curto-circuito no sistema.

O potencial de passo distante de um metro do transformador obtido no ensaio mostrado na Figura 45 foi de $162V$. O valor do potencial de toque para um peso metálico

distante de um metro do transformador foi de $174V$. Os potenciais de passo e de toque para a simulação computacional realizada são mostrados na Figura 44, estes valores foram obtidos para a posição exata da conexão com o transformador ensaiado, que está de acordo com a localização mostrada na planta da subestação. O local da conexão do transformador com o sistema de aterramento está representado na figura pelo ponto marcado com um raio, sendo os valores dos potenciais de passo e de toque simulados para a localização dos pesos metálicos de acordo com o ensaio realizado iguais a $244V$ e $222V$ respectivamente. O ponto de medição destacado na figura é o ponto de posicionamento do peso metálico no ensaio de potencial de toque e o ponto médio entre os dois pesos metálicos no ensaio de potencial de passo.

Figura 44 – Potenciais de passo e de toque próximos ao transformador ensaiado.



(a) Potencial de passo na superfície do solo. (b) Potencial de toque na superfície do solo.

Fonte: Elaboração própria.

Mesmo sendo a determinação exata dos valores de potenciais de passo e toque extremamente dependentes da precisão do mapeamento dos pontos de medição, o que torna este procedimento bem complexo, a simulação obteve resultados na mesma ordem de grandeza dos valores obtidos pelo procedimento experimental. Como para um projeto de um sistema de aterramento o mais importante não é o valor correto de uma leitura, mas a determinação de possíveis locais da subestação onde os potenciais de passo e de toque excedem os valores de limite para a segurança, a precisão obtida pela simulação para estes pontos é então considerada válida.

A norma [NBR 15749 \(2009\)](#) recomenda a realização de no mínimo três medições para o potencial de toque, em direções diferentes, nas partes metálicas aterradas. Isto se deve ao fato de não se conhecer previamente a localização do maior potencial a ser lido. É possível concluir então que mesmo com acesso a planta baixa da subestação, na prática a localização do ponto exato para a medição de um local específico é muito complexa. O fato dos resultados obtidos no ensaio de campo estarem na mesma ordem de grandeza da simulação realizada representa então um bom resultado.

Figura 45 – Leitura do potencial de passo existente na malha. Os pesos metálicos representam os dois pés de uma pessoa realizando um passo de um metro na subestação.



Fonte: Elaboração própria.

Conclusão

É possível concluir com este trabalho que projetos de sistemas de aterramento elétrico são geralmente realizados utilizando equacionamentos propostos nas normas [NBR 15751 \(2013\)](#) e [IEEE Std 80 \(2000\)](#). Estas equações além de serem modeladas para solos uniformes são bastante conservadoras no que concerne a segurança. A realização de projetos com a utilização de métodos numéricos, como o método dos elementos finitos, possui a vantagem de se conhecer a distribuição do potencial elétrico em todos os pontos do solo, conhecendo assim as regiões do projeto que tem os maiores níveis de potenciais de passo e de toque. Projetos desenvolvidos com este método não se limitam a geometrias simples e pré-definidas, sendo possível a sua modificação para a correção local de potenciais de passo e de toque que estejam acima do limite, através da utilização de submalhas, por exemplo, economizando assim material elétrico e não influenciando na segurança da subestação. A utilização de métodos numéricos para projetos de sistemas de aterramento possui ainda a vantagem de poder se trabalhar com modelos de solo heterogêneos, aumentando assim a precisão dos resultados obtidos.

Como resultado deste trabalho foi desenvolvido um software de estratificação do solo em multicamadas horizontais, e foi obtido um resultado muito mais preciso em comparação com os exemplos apresentados na norma [NBR 7117 \(2012\)](#), que utiliza métodos gráficos para a realização da estratificação do solo.

Também é possível concluir com este trabalho que o método dos elementos finitos também é aplicável na determinação da localização exata da sonda de potencial no ensaio de medição de resistência de aterramento, sendo validado através de ensaios de campo e através de resultados extraídos da literatura. O método também é aplicável na determinação dos níveis de potenciais de passo e de toque existentes em uma subestação. Os ensaios são, por sua vez, simulados e comprovados através de experimentos de campo.

Foram utilizadas técnicas de otimização para o desenvolvimento de um modelo ótimo de solo, que foi utilizado para projetos de sistemas de aterramento; ensaios de medição de resistência de aterramento e de potenciais de superfície. Visto que são escassos os trabalhos na literatura que realizam experimentos junto a suas simulações, este trabalho contribuiu para a validação do método dos elementos finitos aplicados a problemas de aterramento elétrico em regime estacionário, tanto para geometrias simples como para estudos mais complexos, o que é importante principalmente devido ao avanço dos sistemas computacionais, que tendem a aumentar a aplicação da análise eletromagnética em problemas de engenharia.

Como parte dos resultados das pesquisas desenvolvidas durante o período do mestrado, cinco artigos de conferência foram publicados. O artigo [Coelho e Pontes \(2013\)](#) mostrou a aplicação de algoritmos genéticos para a estratificação do solo nos casos apresentados na [NBR 7117 \(2012\)](#). Em [Coelho, Pontes e Rufino Pontes \(2014a\)](#) foi aplicado o método dos elementos finitos para a realização de projetos de sistemas de aterramento, sendo realizado um estudo de caso de uma subestação real. No artigo [Coelho e Pontes \(2014b\)](#) métodos de otimização foram aplicados na redução de custo para projetos de sistemas de aterramento conforme o equacionamento proposto pela norma internacional [IEEE Std 80 \(2000\)](#). Em [Coelho e Pontes \(2014c\)](#) foi apresentado um algoritmo para a determinação da resistência equivalente de arranjos bidimensionais de eletrodos a partir da sua solução analítica. Este algoritmo foi validado com simulações em elementos finitos e comparado com fórmulas simplificadas apresentadas na literatura. Finalmente, no artigo [Coelho e Pontes \(2014d\)](#) um algoritmo para a determinação da resistência equivalente de arranjos de eletrodos, incluindo eletrodos de comprimentos diferentes e lacunas foi apresentado, sendo este algoritmo aplicado na determinação de um arranjo desconhecido de eletrodos no solo através de técnicas de otimização.

Tópicos para desenvolvimento posterior

Sugere-se a seguir alguns tópicos para desenvolvimentos futuros com vistas a se chegar a uma ferramenta robusta de análise de sistema de aterramento e com domínio amplo de aplicação:

1. Aperfeiçoar, ainda mais, a velocidade de execução do software de estratificação do solo;
2. Desenvolver estudos especiais de sistemas de aterramento, com geometrias ainda mais complexas;
3. Realizar mais estudos de caso de comprovação teórico-experimental de medições de resistência e potenciais de superfície.
4. Desenvolver estudos de aplicação da análise numérica em sistemas de aterramento de linhas de transmissão;
5. Realizar estudos de sistemas de aterramento em regimes transitórios impulsivos e harmônico, junto a modelagem não linear de solos devido ao efeito da ionização do solo.
6. Aplicação de métodos numéricos para projetos otimizados de para-raios e isoladores.
7. Otimização de sistemas de proteção contra descargas atmosféricas (SPDA).

Artigos publicados

1. COELHO, R. R. A.; PONTES, R. S. T. Análise da norma nbr 7117 baseado na estratificação otimizada do solo a partir do algoritmo de sunde e algoritmos genéticos. XI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI), Fortaleza, Ceará, Outubro de 2013.
2. COELHO, R. R. A.; PONTES, R. S. T.; PONTES, M. das G. S. R. Projeto de malhas de aterramento através do método dos elementos finitos. V Simpósio Brasileiro de Sistemas Elétricos (SBSE), Foz do Iguaçu, Paraná, Abril de 2014. ISSN 2177-6164.
3. COELHO, R. R. A.; PONTES, R. S. T. Optimal design of electrical grounding systems using genetic algorithms. 8th International Conference on Grounding and Earthing (GROUND'2014) and 6th International Conference on Lightning Physics and Effects (6th LPE), Manaus, Brazil, May 2014. ISSN 1983-2184.
4. COELHO, R. R. A.; PONTES, R. S. T. An algorithm for rodbed ground resistance calculation with fem validation. In: 12th International Conference on Industrial Informatics (INDIN), Porto Alegre, Brazil. July 2014. p. 452–456.
5. COELHO, R. R. A.; PONTES, R. S. T. Algoritmo inteligente para a verificação da integridade de sistemas de aterramento compostos por condutores verticais. XX Congresso Brasileiro de Automática (CBA), Belo Horizonte, Minas Gerais, p. 2516–2520, Setembro de 2014.

Referências

- CALIXTO, W. et al. 3-d soil stratification methodology for geoelectrical prospection. *Power Delivery, IEEE Transactions on*, v. 27, n. 3, p. 1636–1643, July 2012. ISSN 0885-8977. Citado na página 31.
- CALIXTO, W. et al. Parameters estimation of a horizontal multilayer soil using genetic algorithm. *Power Delivery, IEEE Transactions on*, v. 25, n. 3, p. 1250–1257, July 2010. ISSN 0885-8977. Citado na página 37.
- CALIXTO, W. P. *Métodos matemático e computacional aplicados a prospecção geométrica com estratificação tridimensional*. Tese (Doutorado) — Federal University of Uberlândia, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 33, 34 e 72.
- CALLISTER, W. *Ciência e engenharia de materiais: uma introdução*. Livros Técnicos e Científicos, 2008. ISBN 9788521615958. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=R3BwPgAACAAJ>>. Citado na página 62.
- COELHO, R. R. A.; PONTES, R. S. T. Análise da norma nbr 7117 baseado na estratificação otimizada do solo a partir do algoritmo de sude e algoritmos genéticos. *XI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI), Fortaleza, Ceará*, 2013. Citado na página 94.
- COELHO, R. R. A.; PONTES, R. S. T. Optimal design of electrical grounding systems using genetic algorithms. *8th International Conference on Grounding and Earthing (GROUND'2014) and 6th International Conference on Lightning Physics and Effects (6th LPE), Manaus, Brazil*, 2014b. ISSN 1983-2184. Citado na página 94.
- COELHO, R. R. A.; PONTES, R. S. T. An algorithm for rodbed ground resistance calculation with fem validation. In: *Industrial Informatics (INDIN), 2014 12th IEEE International Conference on*. [S.l.: s.n.], 2014c. p. 452–456. Citado na página 94.
- COELHO, R. R. A.; PONTES, R. S. T. Algoritmo inteligente para a verificação da integridade de sistemas de aterramento compostos por condutores verticais. *XX Congresso Brasileiro de Automática (CBA), Belo Horizonte, Minas Gerais*, p. 2516–2520, 2014d. Citado na página 94.
- COELHO, R. R. A.; PONTES, R. S. T.; Rufino Pontes, M. das G. S. Projeto de malhas de aterramento através do método dos elementos finitos. *V Simpósio Brasileiro de*

Sistemas Elétricos (SBSE), Foz do Iguaçu, Paraná, 2014a. ISSN 2177-6164. Citado na página 94.

DE, S.; WHITE, J. *Numerical Methods for Partial Differential Equations (SMA 5212)*. 2003. <<http://ocw.mit.edu/courses/aeronautics-and-astronautics/16-920j-numerical-methods-for-partial-differential-equations-sma-5212-spring-2003/lecture-notes/>>. Lecture 4: Finite Difference Discretization of Elliptic Equations: FD Formulas and Multidimensional Problems. Acesso: 25/03/2015. Citado na página 55.

ENDRENYI, J. Evaluation or resistivity tests for design of station grounds in nonuniform soil. *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on*, v. 82, n. 69, p. 966–970, 1963. ISSN 0018-9510. Citado 3 vezes nas páginas 61, 82 e 83.

ENGELBRECHT, A. P. *Computational intelligence: an introduction*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 36.

GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. *Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas: Uma Introdução com Aplicações Usando o MATLAB*. BOOKMAN COMPANHIA ED, 2008. ISBN 9788577802050. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=ONh6PgAACAAJ>>. Citado na página 106.

HEPPE, A. Computation of potential at surface above an energized grid or other electrode, allowing for non-uniform current distribution. *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on*, PAS-98, n. 6, p. 1978–1989, Nov 1979. ISSN 0018-9510. Citado na página 64.

HOLANDA, I. S. Medição de resistência de aterramento e de potenciais na superfície do solo de uma subestação de 69kv. trabalho de conclusão de curso (graduação). universidade de fortaleza. 2013. Citado na página 44.

IEEE Std 80. Ieee guide for safety in ac substation grounding. *IEEE Std 80-2000*, p. i–192, 2000. Citado 11 vezes nas páginas 20, 60, 61, 62, 64, 80, 82, 85, 86, 93 e 94.

IEEE Std 81. Ieee guide for measuring earth resistivity, ground impedance, and earth surface potentials of a grounding system. *IEEE Std 81-2012 (Revision of IEEE Std 81-1983)*, p. 1–86, 2012. Citado 8 vezes nas páginas 21, 31, 40, 41, 65, 67, 68 e 76.

JAMES, K.; RUSSELL, E. Particle swarm optimization. In: *Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Neural Networks*. [S.l.: s.n.], 1995. p. 1942–1948. Citado na página 35.

JIAMMING; JIN. *The finite element method in electromagnetics*. [S.l.]: Wiley New York, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 51, 52 e 54.

KINDERMANN, G.; CAMPAGNOLO, J. M. *Aterramento elétrico*. [S.l.]: Sagra-DC Luzzatto, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 71.

MA, J.; DAWALIBI, F. Extended analysis of ground impedance measurement using the fall-of-potential method. *Power Delivery, IEEE Transactions on*, v. 17, n. 4, p. 881–885, Oct 2002. ISSN 0885-8977. Citado na página 43.

MACHADO, K. *Teoria do eletromagnetismo*. UEPG, 2000. ISBN 9788586941078. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=VgB8AAAACAAJ>>. Citado 2 vezes nas páginas 104 e 105.

Martins Neto, L. *Curso em média de aterramentos elétricos*. [S.l.]: Universidade Federal de Uberlândia, 1998. Citado 4 vezes nas páginas 19, 23, 28 e 32.

MEGABRAS. *Terrômetro digital inteligente - Especificações técnicas*. 2015. Acesso: 23/03/2015. Disponível em: <<http://www.megabras.com.br/pt-br/produtos/terrometro/terrometro-digital-EM4055.php#Especificação~oes>>. Citado na página 47.

METREL. *MI 3295 Step Contact Voltage Measuring System*. 2015. Acesso: 23/03/2015. Disponível em: <<http://www.arc.ro/userfiles/docs/ecommm/Brosura%20MI3295.pdf>>. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 48.

NASSEREDDINE, M. et al. Estimation of novel position for the current and potential probe for the fall of potential method. *Generation, Transmission Distribution, IET*, v. 8, n. 4, p. 774–782, April 2014. ISSN 1751-8687. Citado 5 vezes nas páginas 12, 18, 43, 69 e 86.

NASSEREDDINE, M. et al. Substation earth grid measurement using the fall of potential method (fop) for a limited test area. In: *Power Engineering Conference (AUPEC), 2014 Australasian Universities*. [S.l.: s.n.], 2014. p. 1–6. Citado 4 vezes nas páginas 18, 69, 87 e 88.

NBR 15749. *Medição de resistência de aterramento e de potenciais na superfície do solo em sistemas de aterramento*. [S.l.]: Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), ICS 17.220.20; 29.080.01, 2009. 1-49 p. Citado 7 vezes nas páginas 21, 40, 43, 44, 45, 46 e 92.

NBR 15751. *Sistemas de aterramento de subestações - Requisitos*. [S.l.]: Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), ICS 17.220.20;29.080.10, 2013. 1-47 p. Citado 3 vezes nas páginas 20, 62 e 93.

NBR 7117. *Medição da resistividade e determinação da estratificação do solo*. [S.l.]: Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), ICS 13.260;17.220.20;29.240.20, 2012. 1-64 p. Citado 11 vezes nas páginas 31, 32, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 93 e 94.

PEDROSA, D. P. F. *Ajuste de Curvas*. 2005. <<http://www.dca.ufrn.br/~diogo/FTP/dca0304/ajustedecurvas.pdf>>. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Departamento de Engenharia de Computação e Automação. Acesso: 20/03/2015. Citado na página 106.

RODRIGUES, M. C. *Estudo sobre as Metaheurísticas*. [S.l.]: Universidade de São Paulo, Instituto de Matemática e Estatística, 2009. Citado na página 35.

SADIKU, M. *Numerical Techniques in Electromagnetics with MATLAB, Third Edition*. Taylor & Francis, 2009. ISBN 9781420063097. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=DRG5GAAACAAJ>>. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 53.

SALGADO, D. A.; PINTO, M. P. O método dos elementos finitos como ferramenta para projeto de malhas de aterramento de subestações. trabalho de conclusão de curso (graduação). escola politécnica da universidade de são paulo. 2009. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 61.

- SILVA, V. C. *Método de Elementos Finitos Aplicado à Solução de Problemas de Aterramento Elétrico*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 51, 53 e 56.
- SOUSA, K. T. *Resistência e potenciais elétricos para um aterramento situado na primeira camada considerando o solo com qualquer número de camadas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2003. Citado na página 33.
- SUNDE, E. D. *Earth conduction effects in transmission systems*. [S.l.]: Dover Publications New York, 1968. Citado 8 vezes nas páginas 22, 24, 25, 26, 28, 37, 56 e 105.
- SVERAK, J. Simplified analysis of electrical gradients above a ground grid-i how good is the present ieee method? (a special report for wg 78.1). *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on*, PAS-103, n. 1, p. 7–25, Jan 1984. ISSN 0018-9510. Citado na página 60.
- TAKAHASHI, T.; KAWASE, T. Analysis of apparent resistivity in a multi-layer earth structure. *Power Delivery, IEEE Transactions on*, v. 5, n. 2, p. 604–612, Apr 1990. ISSN 0885-8977. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.
- Wolfram MathWorld. *Bessel Function of the First Kind*. 2015. <<http://mathworld.wolfram.com/BesselFunctionoftheFirstKind.html>>. Acesso: 20/03/2015. Citado na página 104.
- Wolfram MathWorld. *Bessel Function of the Second Kind*. 2015. <<http://mathworld.wolfram.com/BesselFunctionoftheSecondKind.html>>. Acesso: 20/03/2015. Citado na página 104.

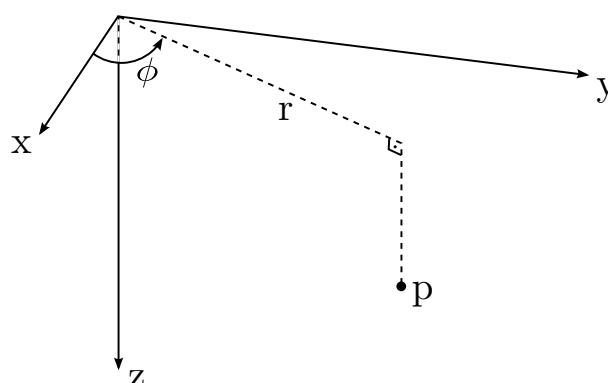
Anexos

ANEXO A

Solução da equação de Laplace em coordenadas cilíndricas com simetria axial

Considerando uma fonte de corrente na superfície do solo, localizado na origem de um sistema de referência, como mostra a Figura 46, o potencial elétrico em um ponto P qualquer do solo devido a esta fonte é dado genericamente pela equação de *Poisson*.

Figura 46 – Representação do potencial elétrico gerado por uma fonte pontual de corrente em um solo formado por camadas horizontais.



FONTE: Elaboração própria.

A equação de *Poisson* em coordenadas retangulares é dada pela Equação A.1, para uma densidade volumétrica de cargas ρ_c e uma permissividade do meio ϵ .

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_c}{\epsilon} \quad (\text{A.1})$$

Como estamos considerando como fonte apenas uma fonte de corrente, não há acúmulo de carga eletrostática, o que leva a Equação A.1 a equação de Laplace.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Passando a equação de Laplace para coordenadas cilíndricas, chegamos a Equação A.3.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A.3})$$

Como um modelo de solo em camadas horizontais possui uma simetria axial, consideramos as variações em torno do eixo ϕ nulas. Neste caso a equação de Laplace A.3 pode ser reduzida ao caso bidimensional como mostra a Equação A.4.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A.4})$$

Uma das soluções para este problema é então o método da separação de variáveis, onde consideraremos a solução como produto de duas funções, a função R e a função Z . A função R é uma função somente de r e a função Z é função somente de z .

$$V = R(r) \cdot Z(z) \quad (\text{A.5})$$

Substituindo A.5 em A.4 e dividindo a equação obtida pelo produto $R(r) \cdot Z(z)$, para se tornar possível isolar cada termo, chegamos a Equação A.6.

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{rR(r)} \frac{\partial R(r)}{\partial r} + \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A.6})$$

Para a resolução pelo método de separação de variáveis, igualamos as parcelas da Equação A.6 que dependem somente de z e as que são função de r a uma constante de separação $-\lambda^2$, como mostra a Equação A.7.

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{rR(r)} \frac{\partial R(r)}{\partial r} = -\frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = -\lambda^2 \quad (\text{A.7})$$

O que resulta em um sistema de equações, mostrado na equação A.8, que deve ser solucionado para ser possível determinar o potencial elétrico.

$$\begin{cases} -\frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = -\lambda^2 \\ \frac{1}{R(r)} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{rR(r)} \frac{\partial R(r)}{\partial r} = -\lambda^2 \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Como ambas as equações do sistema são funções somente de uma variável, a notação de derivada parcial não é mais utilizada, mais sim derivada total. Organizando a primeira equação em forma linear, temos:

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} - \lambda^2 Z(z) = 0 \quad (\text{A.9})$$

As soluções para a equação em z são provenientes de uma equação diferencial ordinária cuja solução é encontrada através das raízes do polinômio característico, como mostra a Equação A.10, onde c_1 e c_2 são constantes numéricas.

$$Z(z) = c_1 \cdot e^{-\lambda z} + c_2 \cdot e^{\lambda z} \quad (\text{A.10})$$

Organizando a equação diferencial na variável r , que é a segunda equação do sistema A.8, em forma linear, temos que a mesma é uma equação diferencial cuja solução não é tão intuitiva quanto a Equação A.10.

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} + R(r)\lambda^2 = 0 \quad (\text{A.11})$$

Para a resolução da mesma inicialmente definimos $\varrho = \lambda r$, assim podemos reescrever a Equação A.11 após o cálculo das derivadas, que é proveniente da substituição de variáveis realizada, como:

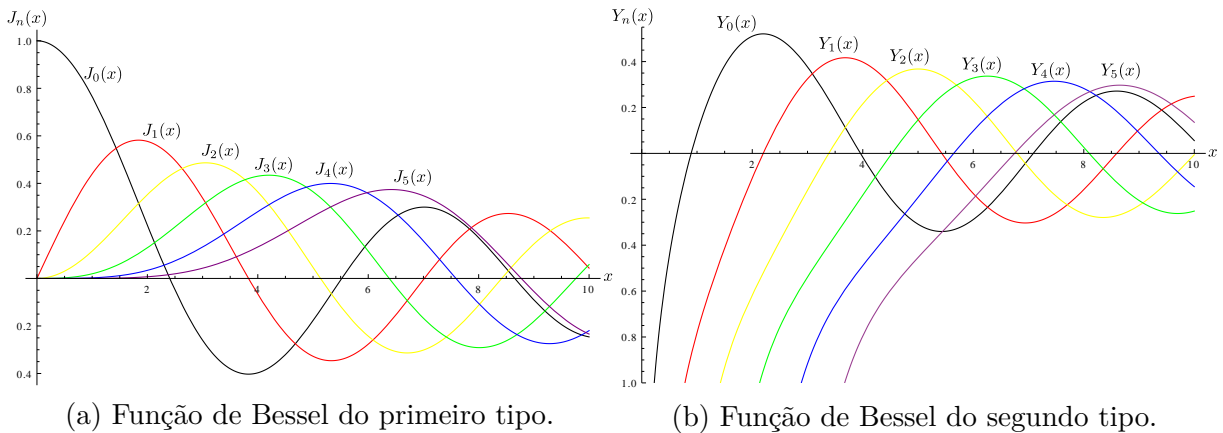
$$\lambda^2 \frac{d^2 R}{d\varrho^2} + \frac{\lambda^2}{\varrho} \frac{dR}{d\varrho} + \lambda^2 R = 0 \quad (\text{A.12})$$

Dividindo agora a Equação A.12 por λ^2 , chegamos a Equação A.13.

$$\frac{d^2 R}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dR}{d\varrho} + R = 0 \quad (\text{A.13})$$

De acordo com Machado (2000) esta é a equação diferencial de Bessel, e suas soluções são as funções de Bessel, que podem ser do primeiro tipo $J_\nu(x)$, de segundo tipo $Y_\nu(x)$, também chamadas de funções de Neumann ou ainda, de terceiro tipo $H_\nu(x)$, conhecidas como funções de Hankel. O gráfico que ilustra o comportamento das funções de Bessel do primeiro e segundo tipos é mostrado na Figura 47.

Figura 47 – Funções de Bessel do primeiro e segundo tipo.



FONTE: (a)(Wolfram MathWorld, 2015a) (b)(Wolfram MathWorld, 2015b)

A equação diferencial de Bessel, em sua forma completa é mostrada na Equação A.14. Comparando a mesma com a Equação A.11, é possível concluir que a solução obtida

por esta equação é composta por polinômios de Bessel de ordem zero, já que o termo $\nu = 0$.

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(1 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right) R = 0 \quad (\text{A.14})$$

Como o valor de ν é inteiro, a solução desta equação deve possuir funções de Bessel do segundo tipo para não obter soluções linearmente dependentes. Uma das soluções para esta equação é a Equação A.15:

$$R(r) = c_3(\lambda) \cdot J_0(\lambda r) + c_4(\lambda) \cdot Y_0(\lambda r) \quad (\text{A.15})$$

e uma das soluções da função potencial é então do tipo:

$$V(r, z) = [c_1 \cdot e^{-\lambda z} + c_2 \cdot e^{\lambda z}] \cdot [c_3(\lambda) \cdot J_0(\lambda r) + c_4(\lambda) \cdot Y_0(\lambda r)] \quad (\text{A.16})$$

Para aplicar a equação para a distribuição de potencial no solo, Sunde (1968) faz a seguinte observação: A Equação A.16 é apropriada para a solução deste problema, desde que o potencial permaneça finito para $r = 0$ (exceto se $z = 0$ ao mesmo tempo), como a função de Bessel do segundo tipo apresenta uma singularidade para valores de $r = 0$, como mostra a Figura 47b, a mesma não é aplicável a este problema. Como a função de Bessel $Y_0(\lambda r)$ não é compatível com a solução física, temos que o valor da função $c_4(\lambda)$ é igual a zero, o que resulta na Equação A.17.

$$V(r, z) = [c_1 \cdot e^{-\lambda z} + c_2 \cdot e^{\lambda z}] \cdot [c_3(\lambda) \cdot J_0(\lambda r)] \quad (\text{A.17})$$

Para encontrar uma solução global para o potencial elétrico no solo, é necessário conhecer o teorema 1, que foi obtido na referência Machado (2000). Este teorema também é conhecido como teorema da superposição.

Teorema 1 *Se V_1, V_2, \dots, V_n forem soluções linearmente independentes da equação de Laplace, então a solução geral é a soma de todas as soluções, com coeficientes apropriados, ou seja,*

$$V = a_1 V_1 + a_2 V_2 + \dots + a_n V_n \quad (\text{A.18})$$

de modo que V satisfaz a equação de Laplace. As constantes a_n devem ser escolhidas de modo a reproduzir as condições de contorno dadas.

Aplicando o teorema apresentado, temos que a solução completa do problema é obtida através da superposição das infinitas soluções para a Equação A.17. Como λ é uma variável contínua, a solução da equação de Laplace para este problema é então:

$$V(r, z) = \int_0^\infty [c_1 \cdot e^{-\lambda z} + c_2 \cdot e^{\lambda z}] \cdot [c_3(\lambda) \cdot J_0(\lambda r)] d\lambda \quad (\text{A.19})$$

Se multiplicarmos a função $c_3(\lambda)$ pelas constantes c_1 e c_2 , obtendo assim as funções $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$, finalmente obtemos a equação a ser deduzida.

$$\boxed{V(r, z) = \int_0^\infty [f(\lambda) \cdot e^{-\lambda z} + g(\lambda) \cdot e^{\lambda z}] J_0(\lambda r) d\lambda}$$

ANEXO B

Exemplo de aplicação

Nesta parte do trabalho a metodologia para o cálculo da resistividade aparente do solo é exemplificada. Para isto será utilizada a equação simplificada da resistividade aparente de um solo multi-camadas, mostrada na Equação B.1 e que foi previamente deduzida no Capítulo 1.

$$\rho_a = \rho_1 \left\{ 1 + 4a \sum_{i=0}^n A_i \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + 4h_1^2 i^2}} - \frac{1}{\sqrt{4a^2 + 4h_1^2 i^2}} \right] \right\} \quad (\text{B.1})$$

Esta equação é função de uma variável E , que é igual a $e^{-2\lambda h_1}$, com λ uma variável de integração e h_1 a resistividade da primeira camada. A mesma utiliza esta variável E na decomposição polinomial de uma função $N_N(\lambda)$ em um polinômio $N_N(E)$. Um método bastante conveniente para se realizar este procedimento é a regressão por mínimos quadrados.

$$N_N(\lambda) = \frac{K_{N1} e^{-2\lambda h_1}}{1 - K_{N1} e^{-2\lambda h_1}} \rightarrow N_N(E) = A_0 + A_1 E + A_2 E^2 + \dots \quad (\text{B.2})$$

Para Gilat e Subramaniam (2008) a regressão por mínimos quadrados é um procedimento no qual os coeficientes de uma função são determinados de tal forma que essa função leve ao melhor ajuste de um determinado conjunto de pontos, sendo o melhor ajuste definido como o menor erro total calculado com a soma dos quadrados dos resíduos. Para o ajuste de um conjunto de pontos (x_i, y_i) por um polinômio utilizando este método, é necessário encontrar os índices β_i da Equação B.3.

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_m x^m \quad (\text{B.3})$$

O procedimento de cálculo para estes índices, para um polinômio de grau m em um conjunto de n pontos, de acordo com Pedrosa (2005), é feito pela resolução da equação

matricial B.4. Esta equação resume a aplicação do método dos mínimos quadrados para a regressão polinomial de forma genérica.

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^m \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \cdots & \sum x_i^{m+1} \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \cdots & \sum x_i^{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_i^m & \sum x_i^{m+1} & \sum x_i^{m+2} & \cdots & \sum x_i^{2m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \\ \vdots \\ \sum y_i x_i^m \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Exemplo numérico de cálculo

Como forma de ilustração, o procedimento para o cálculo da resistividade aparente de um modelo de solo será realizado. Os valores de resistividade do solo são de $100 \Omega \cdot m$ para a primeira camada, $200 \Omega \cdot m$ para a segunda camada e $50 \Omega \cdot m$ para a terceira camada. A espessura da primeira camada é de 1 m e a segunda camada tem 5 m de espessura. O conjunto de pontos utilizados são mostrados na tabela 13, estes pontos foram obtidos da expressão $N_N(E)$ mostrada na Equação B.2.

Tabela 13 – Conjunto de pontos utilizados para a regressão polinomial

Conjunto de pontos utilizados					
E	0	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000
$N_N(E)$	0	0.0908	0.1880	0.1770	-0.2500

Neste exemplo temos que a quantidade de pares ordenados utilizados n é igual a 6 e o valor de m , que é o grau do polinômio interpolante, é igual a 3. Para a resolução deste problema a Equação B.4 se torna então a Equação B.5.

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \sum x_i^5 \\ \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \sum x_i^5 & \sum x_i^6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \\ \sum y_i x_i^3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Substituindo os pontos da tabela 13 na Equação B.5, chegamos a Equação B.6.

$$\begin{bmatrix} 5 & 2.5000 & 1.8750 & 1.5625 \\ 2.5000 & 1.8750 & 1.5625 & 1.3828 \\ 1.8750 & 1.5625 & 1.3828 & 1.2695 \\ 1.5625 & 1.3828 & 1.2695 & 1.1938 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2058 \\ -0.0006 \\ -0.0978 \\ -0.1504 \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Após o cálculo da inversa da matriz que pré-multiplica a matriz de incógnitas, a

Equação B.6 se transforma em:

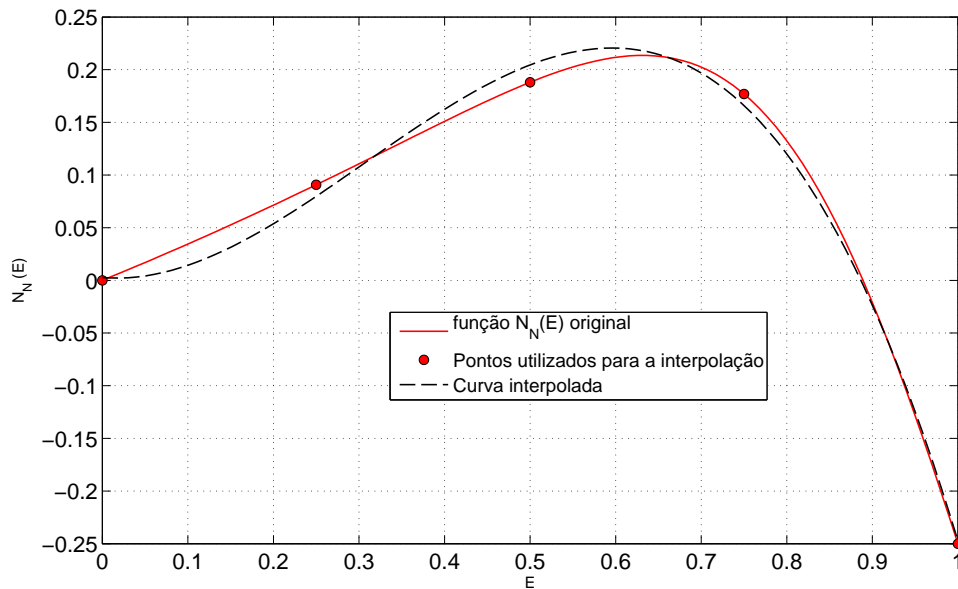
$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9857 & -5.9524 & 10.2857 & -5.3333 \\ -5.9524 & 102.0635 & -247.6190 & 152.8889 \\ 10.2857 & -247.6190 & 658.2857 & -426.6667 \\ -5.3333 & 152.8889 & -426.6667 & 284.4444 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.2058 \\ -0.0006 \\ -0.0978 \\ -0.1504 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

O cálculo dos coeficientes do polinômio interpolante do terceiro grau é finalmente encontrado após o produto matricial na Equação B.7.

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0028 \\ -0.0692 \\ 2.0720 \\ -2.2528 \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

A Figura 48 mostra a curva original $N_N(E)$ em comparação aos pontos utilizados para a regressão polinomial e a curva interpolada com a utilização do polinômio obtido. Foram escolhidos seis pontos para se obter um polinômio do terceiro grau, porém para o método dos mínimos quadrados a utilização de uma quantidade maior de pontos implicará em uma melhor aproximação.

Figura 48 – Regressão polinomial realizada.



FONTE: Elaboração própria.

Com os coeficientes do polinômio interpolante calculados, o próximo passo é resolver a Equação B.1, onde os valores do vetor A da equação são iguais aos valores de β calculado pela regressão. Sendo o valor de a na Equação B.1 igual a profundidade no solo onde será calculada a resistividade aparente, temos:

$$\rho_a(a) = \rho_1 \left\{ 1 + 4a \sum_{i=0}^n A_i \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + 4h_1^2 i^2}} - \frac{1}{\sqrt{4a^2 + 4h_1^2 i^2}} \right] \right\}$$

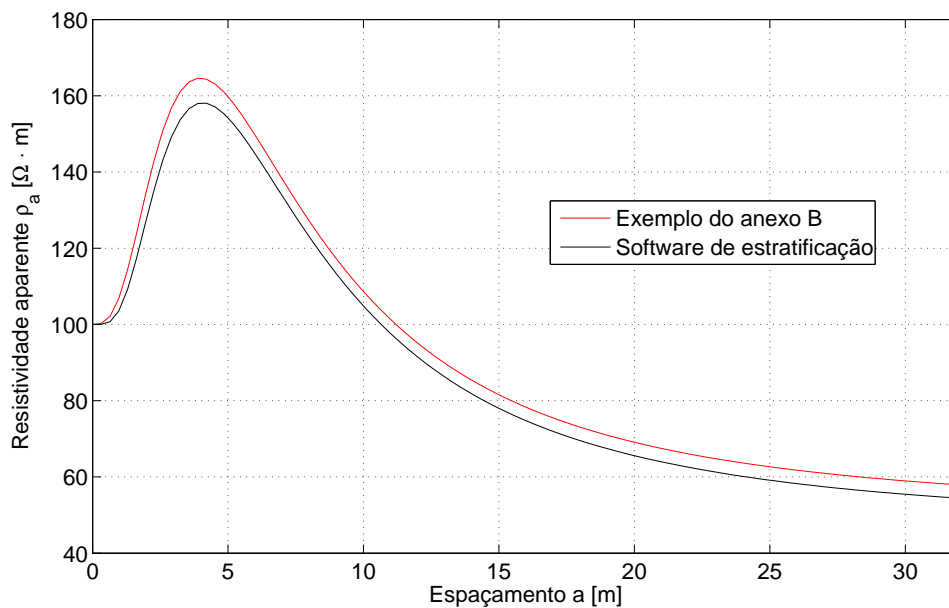
Considere agora um exemplo para a igual a 2 metros, o cálculo da resistividade aparente para esta profundidade será:

$$\rho_a(2) = 100 \left\{ 1 + 8 \cdot \left(0.0028 \left[\frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{16}} \right] - 0.0692 \left[\frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{20}} \right] + 2.0720 \left[\frac{1}{\sqrt{20}} - \frac{1}{\sqrt{32}} \right] - 2.2528 \left[\frac{1}{\sqrt{40}} - \frac{1}{\sqrt{52}} \right] \right) \right\}$$

$$\rho_a(2) = 135.9583 \Omega \cdot m$$
(B.9)

Para se determinar a curva de resistividade aparente o cálculo desta grandeza deverá ser feito para todos os espaçamentos realizados nos ensaios de campo. A Figura 49 foi plotada para valores de a variando de 0 a 32 metros, mesmo não sendo possível a leitura em campo de resistividade para um espaçamento nulo, é interessante plotar este valor para mostrar que a resistividade neste ponto é igual a resistividade da primeira camada do solo.

Figura 49 – Curva de resistividade aparente



FONTE: Elaboração própria.

Para este estudo a escolha de um polinômio do terceiro grau para a regressão realizada não foi aleatória, como a função de resistividade aparente para um solo de três camadas apresenta dois pontos de inflexão, este valor é adequado para aproximar a curva $N_N(E)$, sendo a mesma lógica também válida para outros modelos de solo. O software desenvolvido neste trabalho utiliza 100 pontos uniformemente espaçados para a obtenção de um polinômio de grau 10, gerando assim uma melhor aproximação da função $N_N(E)$. O valor do erro RMS entre a curva obtida nesta parte do trabalho e a curva obtida utilizando o software de estratificação do solo foi de 4,72%, este erro foi devido a baixa quantidade de pontos utilizados no método dos mínimos quadrados.