

Otimização do Desenvolvimento de Traçados de Estradas de Rodagem: Uma Aplicação da Teoria dos Grafos

Bruno de Athayde Prata, Magno Gonçalves da Costa, Carlos Diego Rodrigues e Ernesto Ferreira Nobre Júnior

Resumo—As estradas de rodagem são obras responsáveis por altos custos de oportunidade no orçamento de um país, devendo ser cuidadosamente planejadas para evitar prejuízos econômicos ao longo do seu tempo de serviço. O projeto geométrico é de suma importância para que a construção de uma estrada seja economicamente viável, pois nesta fase devem ser equilibradas as variáveis extensão da via e movimentos de terra. Para otimizar o desenvolvimento de traçados, analisando somente as variáveis topográficas do projeto de uma rodovia, foi utilizada a técnica da Teoria dos Grafos, onde fatores de custo foram associados aos arcos de um grafo, buscando-se o trajeto que minimiza o custo total. O modelo proposto foi aplicado na região no entorno do Aeroporto Internacional Pinto Martins, onde as simulações realizadas no terreno apresentaram resultados coerentes, corroborando a aplicação do procedimento idealizado neste trabalho para o desenvolvimento de traçados em estradas de rodagem.

Palavras-Chave—Projeto Geométrico, Grafos, Otimização.

I. INTRODUÇÃO

A. Considerações Iniciais

Segundo [1], o projeto de uma estrada é compreendido pela correlação dos elementos físicos desta com características de operação, frenagem, aceleração, condições de segurança, conforto, dentre outras. O projeto de uma estrada deve ser elaborado de tal forma que defina uma via tecnicamente possível de ser construída, economicamente viável e socialmente abrangente.

A etapa do projeto de uma estrada que engloba os estudos topográficos, geológicos, hidrológicos é denominada *fase de reconhecimento*. Nesta fase são definidos os principais obstáculos a serem vencidos e são escolhidos os locais para lançamento de anteprojetos.

Bruno de Athayde Prata, Magno Gonçalves da Costa, Carlos Diego Rodrigues e Ernesto Ferreira Nobre Júnior, Núcleo de Pesquisa em Logística, Transporte e Desenvolvimento, Universidade Federal do Ceará, Ceará, Brasil, E- mails: bruno@nupeltd.ufc.br, magnogc@yahoo.com.br, diego@lia.ufc.br, nobre@nupeltd.ufc.br.

O processo de definir os pontos de passagem de uma estrada consiste no lançamento da *diretriz de traçado* de uma estrada a qual define um itinerário compreendendo uma ampla faixa de terreno do qual se presume possa ser lançado o traçado de uma estrada contemplado pelo projeto da estrada em seu conjunto planta e perfil.

Tendo em vista a complexidade dos fatores analisados na fase de reconhecimento, para interligar dois pontos geográficos distintos por intermédio de uma estrada, pode-se obter uma ampla família de diretrizes, cabendo ao engenheiro definir qual diretriz é mais conveniente para que seja lançado o traçado definitivo. O objetivo do reconhecimento é, portanto a escolha da diretriz que permita o melhor traçado, e que economicamente seja possível adotar [2].

B. Importância do Tema Abordado

Analisando o estado da arte, verificou-se que muitos são os estudos de desenvolvimento otimizado de traçados presentes na literatura, como por exemplo, [3] e [4]. Existem diversos métodos numéricos que analisam as inúmeras variáveis existentes na idealização de uma estrada, tais como custos de movimento de terra, pavimentação [5], aquisição e desapropriação de terrenos, dentre outros. No entanto tais modelos apresentam algumas características que inviabilizam sua aplicação em projetos de pequeno porte. Dentre estas, pode-se citar:

- i) Necessidade de uma ampla gama de dados: São necessários muitos dados para alimentar os modelos em questão, como por exemplo, cartas planialtimétricas, fotografias aéreas, mapas geológicos, preços de propriedades, modelos digitais de terrenos, imagens de satélites, dentre outros.
- ii) Necessidade de softwares e equipamentos específicos: Muitos são os programas e equipamentos necessários para o desenvolvimento de projetos desta natureza, como programas de digitalização e edição vetorial, softwares de geoprocessamento, aparelhos receptores GPS, microcomputadores com boa velocidade de processamento e servidores.

Os modelos propostos por [4] e [5] são mais abrangentes do que o modelo proposto neste trabalho por considerarem variáveis geotécnicas, sociais, ambientais, operacionais e funcionais. Contudo tais procedimentos não são de aplicação prática em situações mais usuais, como o projeto de rodovias rurais ou urbanas de pequeno porte.

Caso seja necessária, por exemplo, a construção de uma estrada vicinal de terra que ligue a região de plantio e o depósito em uma agroindústria. Grandes estudos da área da implantação da estrada não são viáveis e em contrapartida, projetos realizados empiricamente podem causar prejuízos econômicos ao longo do tempo de serviço da via.

O desenvolvimento de traçados pode ser visto como o problema de encontrar o menor percurso em um grafo, onde o peso dos arcos corresponde ao custo de cada trecho da rodovia. Encontrando o caminho mínimo, tem-se a diretriz que possui topografia menos acidentada e por consequência, ter-se-á os menores movimentos de terra possíveis.

II. OBJETIVOS

A. Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho é elaborar um modelo, baseado na Teoria dos Grafos, que otimize o desenvolvimento de traçados de estradas de rodagem em uma região de topografia conhecida. Equações e Teoremas

B. Objetivos Específicos

Como objetivos específicos, podem ser destacados:

- i) Realizar uma pesquisa bibliográfica sobre estudos de desenvolvimento de traçados em estradas de rodagem;
- ii) Minimizar o custo de movimentos de terra na construção de rodovias;
- iii) Aplicar o modelo teórico desenvolvido neste trabalho para propor a diretriz de uma rodovia em uma situação real.

III. METODOLOGIA

A metodologia empregada na elaboração deste trabalho pode ser dividida em quatro partes, citadas a seguir:

- i) Revisão bibliográfica;
- ii) Elaboração de um modelo de desenvolvimento otimizado de traçados de estradas de rodagem;
- iii) Aplicação do modelo proposto;
- iv) Análise e discussão dos resultados obtidos.

IV. BASE CONCEITUAL

Para melhor compreensão do método proposto no presente trabalho, serão definidos os conceitos de gradiente, derivada direcional e grafos.

A. Gradiente

De acordo com [6], seja $f(x,y) = z$ uma função escalar contínua e diferenciável numa região R , o gradiente desta, representado por $\text{grad } z$, é um vetor definido por:

Introduzindo o operador diferencial ∇ (ler *nabla* ou *del*)

$$\text{grad } z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \mathbf{j} \quad (1)$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} \quad (2)$$

em (2), o gradiente de z pode ser escrito como

$$\text{grad } z = \nabla f(x,y) \quad (3)$$

B. Derivada Direcional

Generalizando a definição de uma derivada parcial pode-se obter a taxa de variação de uma função em qualquer direção e sentido. Este é o conceito da derivada direcional.

Segundo [7], seja $z = f(x,y)$ uma função diferenciável de duas variáveis e \mathbf{U} o vetor unitário $\cos\theta \mathbf{i} + \sin\theta \mathbf{j}$, então a derivada direcional de z na direção e sentido de \mathbf{U} , denotada por $D_{\mathbf{U}}f(x,y)$, será dada por:

$$D_{\mathbf{U}}f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \sin\theta \quad (4)$$

A partir deste resultado, pode-se escrever a derivada direcional como o produto escalar de dois vetores. A derivada direcional pode ser facilmente calculada como o produto interno entre o versor em uma direção qualquer e o gradiente da função.

$$D_{\mathbf{U}}f(x,y) = \mathbf{U} \cdot \nabla f(x,y) \quad (5)$$

C. Grafos

A Teoria dos Grafos é um tema antigo com aplicações modernas. A primeira aplicação dos grafos se deve ao matemático Euler que em 1736 estudou o problema de como atravessar as sete pontes da cidade de Königsberg passando uma única vez por cada uma delas.

Conforme [8], um grafo ou grafo não ordenado $G = (V, E)$ consiste em um conjunto V de vértices (ou nós) e um conjunto E de arcos tal que cada arco $e \in E$ é associado com um par não ordenado de nós. Em termos computacionais, um grafo é representado por uma matriz G , em que cada elemento g_{ij} corresponde ao comprimento do arco que liga o ponto i ao ponto j .

As seguintes definições básicas são apresentadas por [9]:

- i) Um *arco* consiste em um par ordenado de vértices e representa uma possível direção de movimento que pode ocorrer entre vértices.

- ii) Uma seqüência de arcos tais que todo arco tem exatamente um vértice em comum com o arco precedente é denominada *cadeia*.
- iii) Um *caminho* é uma cadeia na qual o nó de término de cada arco é idêntico ao nó inicial do arco seguinte.

Um dos problemas básicos de grafos é a determinação da trilha mais curta entre dois nós. O autor [10] coloca tal questão formalmente da seguinte maneira: dado um grafo $G=(V, E)$, a cujos arcos estão associados comprimentos $L(u_i) > 0$, determinar uma trilha t entre dois nós V_1 e V_n de tal forma que o comprimento total,

$$L(t) = \sum_{u_i \in t} L(u_i) \quad (6)$$

seja mínimo.

A literatura cita diversos algoritmos para encontrar o menor percurso em um grafo, dentre os quais pode-se destacar o trabalho de Ford e Fulkerson, e o clássico algoritmo de Dijkstra.

V. MÉTODO PROPOSTO

A. Descrição do Método Proposto

Segundo [11], o ponto de partida para o projetista de uma estrada é o terreno, que pode ser matematicamente representado por uma superfície de equação $z = f(x,y)$, onde z é a cota do terreno no ponto de coordenadas (topográficas ou geográficas) x e y .

O gradiente é um vetor que aponta para a direção e sentido onde a declividade da superfície é máxima. No caso do projeto de uma estrada, deseja-se evitar trajetões muito íngremes por limitações de rampas, logo se deve evitar a direção do vetor gradiente. Da equação (5) pode-se obter o ângulo α entre o vetor unitário e o gradiente de forma que a declividade seja nula.

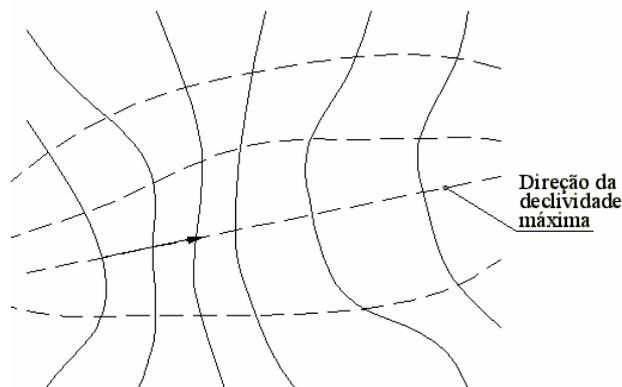
$$0 = \|\mathbf{U}\| \cdot \|\nabla f(x,y)\| \cdot \cos\alpha \quad (7)$$

O ângulo que satisfaz a equação (7) é o ângulo de 90° , portanto pode-se afirmar que a estrada terá, teoricamente, declividade de rampa nula se tiver direção perpendicular à do vetor gradiente. Este resultado comprova matematicamente que a rodovia será mais econômica se acompanhar o traçado das curvas de nível.

Contudo nem sempre é possível desenvolver um traçado que evite as mudanças de nível, sendo muito comum que a estrada tenha que interceptar inúmeras curvas de nível em cotas distintas. São nestes casos que deve se procurar dentro da topografia do terreno as declividades mais apropriadas para o projeto geométrico.

Na Figura 1 percebe-se que na região onde as curvas de nível estão mais próximas entre si, o terreno é mais íngreme. Nesta figura são propostos três traçados que evitam a direção do gradiente, sendo que cada traçado possui uma extensão diferente e apresenta declividades diferentes ao longo do percurso. Cabe ao projetista optar pelo traçado que combine estes atributos de melhor maneira em favor da economia.

FIGURA I
DESENVOLVIMENTO DE TRAÇADOS ECONÔMICOS.



A direção da estrada deve ser a mesma do vetor unitário. Seja i a inclinação do *greide*, o ângulo que o eixo da estrada deve fazer com o vetor gradiente para possuir a declividade desejada pode ser calculado pela expressão (8).

$$\alpha = \arccos\left(\frac{i}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|}\right) \quad (8)$$

Calculando as derivadas direcionais em diversos pontos da malha do terreno, é possível desenvolver o traçado de uma rodovia de maneira racional. No entanto, devido à dificuldade de se aproximar terrenos por funções polinomiais, este procedimento poderia ter muitas limitações. Efetuando uma mudança de variável adequada, pode-se obter um método mais robusto, aplicável em uma maior quantidade de situações. Para obter *greides* que não impliquem em grandes movimentos de terra, deve-se minimizar a seguinte função objetivo:

$$\min \sum \phi \cdot \Delta L + \gamma \cdot \Delta C \quad (9)$$

Onde ΔL : distância entre dois pontos consecutivos do estaqueamento da estrada [m].

ΔC : diferença de cotas do terreno natural entre dois pontos consecutivos do estaqueamento da estrada [m].

ϕ : Parâmetro correspondente ao custo unitário de metro de rodovia [R\$/m].

γ : Parâmetro correspondente ao custo unitário de movimento de terra [R\$/m].

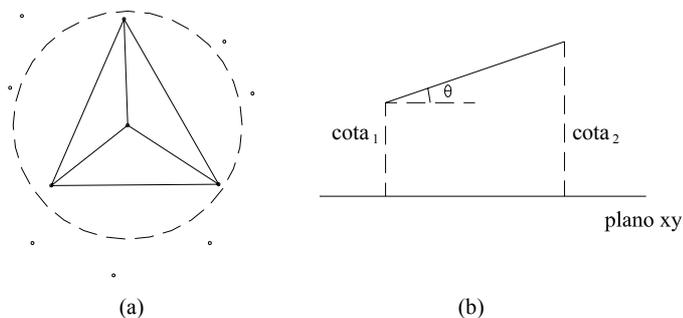
Transformando $\phi \cdot \Delta C + \gamma \cdot \Delta L$ numa variável b , é possível atribuir um peso b a cada arco de um grafo que apresente como vértices um conjunto de pontos do terreno. O algoritmo de caminho mínimo irá escolher os arcos que combinem as menores diferenças de cotas e distâncias, duas variáveis chaves no projeto geométrico de rodovias. Os nós do grafo modelado são na verdade os pontos da malha do Modelo Digital do Terreno analisado.

Conhecendo os vértices do grafo escolhidos pelo algoritmo supracitado e associando fatores de custo aos pesos dos arcos, pode-se utilizar o modelo aqui proposto para lançar uma diretriz que implique em uma estrada de custo de construção mínimo, levando em conta apenas as condições topográficas do terreno. É de conhecimento comum que o projeto de estradas abrange uma gama de variáveis topográficas, hidrológicas e geotécnicas, contudo, *a priori*, o modelo em questão não analisará outras variáveis.

Foi desenvolvido um programa em linguagem de programação C++, utilizando o algoritmo de Dijkstra, que calcula qual a diretriz de custo mínimo entre dois pontos quaisquer do terreno analisado. Para auxiliar o processo de escolha de pontos de passagem da estrada, foram introduzidas duas variáveis no problema:

- r: raio de adjacência dos vértices[m].
- θ : ângulo vertical entre dois pontos do terreno[rad].

FIGURA II
DESCRIÇÃO DAS VARIÁVEIS r E θ .



O raio de adjacência dos vértices (Figura 2.a) é a distância máxima que o algoritmo irá considerar para conectar dois vértices por um arco e o ângulo vertical entre dois pontos do terreno (Figura 2.b) é a declividade de uma reta que passa por dois pontos em relação ao plano xy . Em caso de terrenos de topografia bastante acidentada, pode-se excluir inicialmente vértices do grafo que não atendam aos requisitos de um projeto econômico. Aumentando o raio de adjacência e diminuindo o ângulo θ , o tipo de vértices com os quais se quer trabalhar é restringido e o número de arcos que ligam os nós do grafo modelado é reduzido.

Para modelar o grafo e procurar o menor percurso entre

dois pontos deste, o programa desenvolvido necessita dos seguintes dados de entrada:

- i) Conjunto de pontos x , y e z do terreno salvos em um arquivo do tipo bloco de notas. Esses dados são facilmente obtidos da planilha oriunda do levantamento topográfico da região de estudo;
- ii) Parâmetros de custo unitário de metro de rodovia e de movimento de terra. Tais dados podem ser considerados como valores médios estimados para uma determinada classe de rodovia;
- iii) Raio de adjacência e o ângulo vertical entre dois pontos. Estes dois valores só precisam ser indicados caso o usuário deseje refinar o processo de busca do programa, caso contrário, eles já possuem um valor *default* atribuído.

É possível perceber que a entrada de dados do programa em questão é bastante simples, o que facilita que o usuário simule diversos cenários dentro do processo de projeto.

A saída do programa desenvolvido é um arquivo do bloco de notas que informa ao usuário o somatório dos pesos dos arcos, ou seja, o custo do percurso, e as coordenadas dos pontos por onde a estrada deve passar. Estes pontos podem muito bem ser ligados por tangentes, que posteriormente serão concordadas por curvas circulares horizontais e verticais.

Foi desenvolvida uma rotina na linguagem AutoLISP que, a partir do arquivo gerado, plota o traçado calculado na malha de pontos do terreno em um arquivo do AutoCAD. Esta peculiaridade permite ao usuário do programa a visualização dos diversos traçados simulados.

B. Aplicação do Método Proposto

Conforme exposto na descrição dos objetivos específicos deste trabalho, o modelo idealizado na presente pesquisa foi aplicado em um estudo de caso. A região topográfica no entorno do Aeroporto Internacional Pinto Martins, na cidade de Fortaleza, capital do Estado do Ceará, foi escolhida para o devido fim.

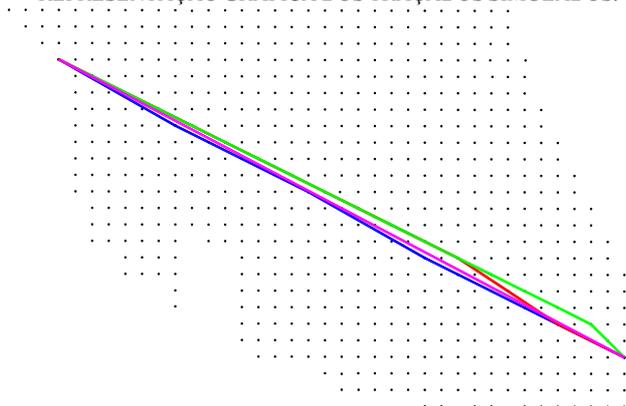
A aplicação do método proposto procedeu no sentido de simular diversos cenários para obtermos uma visão do funcionamento do modelo e do terreno analisado. Admitindo que o custo médio por quilômetro de uma rodovia com duas faixas de 3,6 metros seja de R\$ 200.000,00 e que o custo com terraplanagem seja cerca de 30% deste valor, pode-se estimar valores de ϕ e γ . Foram variados os valores de ϕ , γ , r e $\text{seno}\theta$ e computados os valores de custos obtidos na tabela 1. É imprescindível destacar que os valores de ϕ e γ utilizados na simulação são hipotéticos.

TABELA I
RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES.

	ϕ (R\$/m)	γ (R\$/m)	r(m)	seno θ	Custo(R\$)
1	140,00	60,00	50	1	108.783,35
2	140,00	60,00	50	0,5	108.783,35
3	140,00	60,00	50	0,05	108.783,35
4	140,00	60,00	100	1	108.345,05
5	140,00	60,00	100	0,5	108.345,05
6	140,00	60,00	100	0,05	108.345,05
7	140,00	60,00	200	1	108.013,68
8	140,00	60,00	200	0,5	108.013,68
9	140,00	60,00	200	0,05	108.013,68
10	140,00	60,00	400	1	107.901,65
11	140,00	60,00	400	0,5	107.901,65
12	140,00	60,00	400	0,05	107.901,65

Percebe-se que o terreno analisado é plano, pois as variações de seno θ não são significativas para o valor de custo. Pelo fato do terreno ser plano, as soluções mais econômicas são aquelas onde tem-se longos trechos em tangente pois neste caso $\phi \cdot \Delta L > \gamma \cdot \Delta C$. Na Figura 2, pode-se visualizar as diretrizes calculadas nas simulações.

FIGURA II
REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DOS TRAÇADOS SIMULADOS.



VI. CONCLUSÕES

A. Resultados Obtidos

O modelo idealizado neste trabalho apresentou diversos pontos positivos, dentre os quais destacam-se:

- Através do modelo em questão foi possível estabelecer uma metodologia coerente de otimização de traçado de rodovias.
- O modelo matemático, apesar de levar em conta a análise de diversos pontos de um terreno, é bastante simples, tendo fácil implementação computacional em tempo de execução relativamente pequeno. Analisar um grafo com seiscentos e setenta e dois nós em um computador de processador 600MHz com memória de 32MB, leva cerca de seis segundos.

iii) A caderneta altimétrica do levantamento topográfico é o principal dado para modelar o grafo, o que torna a alimentação do modelo em questão bastante simples.

B. Limitações do Estudo

As limitações do modelo estabelecido neste trabalho são:

- O modelo aqui proposto contempla apenas a variável topografia no processo de projeto de estradas de rodagem, logo os resultados obtidos são significativos apenas para o caso de estradas vicinais de terra.
- Este modelo, apesar de ter proporcionado resultados coerentes no que tange à otimização do desenvolvimento de traçados, deve ser mais minucioso com a consideração de parâmetros de custos mais consistentes.

C. Sugestões para Trabalhos Futuros

Devido às diversas dificuldades encontradas neste processo de pesquisa, algumas diretrizes que foram consideradas importantes para futuros estudos são sugeridas.

- Devem ser acrescentadas ao presente modelo outras variáveis como custo de desapropriação de propriedades, características geotécnicas e hidrológicas do terreno, impactos ambientais, dentre outras.

D. Considerações Finais

Procurou-se através deste trabalho desenvolver uma metodologia baseada na Teoria de Grafos, buscando a alocação otimizada de pontos de passagem de uma estrada em uma dada região topográfica. O uso da técnica matemática supracitada mostrou-se promissor para a aplicação na análise de cenários no projeto geométrico de rodovias. Mesmo que o modelo idealizado no presente trabalho não tenha conseguido otimizar o processo de lançamento de diretrizes de rodovias em toda sua magnitude, o estudo aqui realizado representa um grande passo na direção deste objetivo.

Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer ao professor Mário Ângelo Azevedo Nunes Filho e aos engenheiros José Alysson Benício Correia e Eduardo Rocha Praça pelo apoio técnico indispensável para a realização deste trabalho.

Referências

- [1] Pontes Filho, G. (1998) Estradas de Rodagem: Projeto Geométrico. G. Pontes Filho, São Carlos.
- [2] Carvalho, M. P. (1966) Curso de Estradas. Editora Científica, Rio de Janeiro.
- [3] Lisboa, M. V. (2002) Contribuição para Tomada de Decisão na Classificação e Seleção de Alternativas de Traçado para Rodovias em trechos Urbanizados. São Paulo. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- [4] Weber, E. J. e Hasenack, H. (1998) Análise de alternativas de traçado de uma estrada utilizando rotinas de apoio à decisão em SIG. IV Congresso e Feira para Usuários de Geoprocessamento da América Latina. Curitiba
- [5] Lima, R. X. (2003) Logística da Distribuição de Materiais em Pavimentação Rodoviária: uma Modelagem em Programação Matemática. Fortaleza. Dissertação (Mestrado) Programa de Engenharia de Transportes - PETRAN, Universidade Federal do Ceará.
- [6] Hsu, H. P. (1972) Análise Vetorial. Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro.
- [7] Leithold, L. (1994) O Cálculo com Geometria Analítica. Harbra, São Paulo.
- [8] Cardoso, J. e Valette, R. (1997), “Redes de Petri”. Ed. UFSC. Florianópolis.
- [9] Winston, W. L. (1991) Operations Research: Applications and Algorithms. 2nd . Belmont : PWS-KENT Publishing Company, Belmont.
- [10] Novaes, A. G. (1978) Métodos de Otimização – Aplicações aos Transportes. Editora Edgard Blücher, São Paulo.
- [11] Medeiros, R. C. e Carvalho, P. C. P. (1996) Sistema Interativo para Projeto Geométrico de Vias sobre Modelo Digital de Terreno. Anais do IX SIBGRAPI, Campos do Jordão.