

Luís Gonzaga Rodrigues Filho

Campos tensoriais de matéria abelianos e
não-abelianos: Geração de massa e
dualidade

Fortaleza

31 de agosto de 2007

Luís Gonzaga Rodrigues Filho

Campos tensoriais de matéria abelianos e não-abelianos: Geração de massa e dualidade

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Física

Orientador:

Ricardo Renan Landin de Carvalho

Co-orientador:

Marcony Silva Cunha

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARA - DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Fortaleza

31 de agosto de 2007

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R614c Rodrigues Filho, Luís Gonzaga.

Campos tensoriais de matéria abelianos e não-abelianos : geração de massa e dualidade / Luís Gonzaga Rodrigues Filho. – 2007.
89 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2007.

Orientação: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho.
Coorientação: Prof. Dr. Marcony Silva Cunha.

1. Campos tensoriais. 2. Geração de massa. 3. Dualidade. I. Título.

CDD 530

Luís Gonzaga Rodrigues Filho

Campos tensoriais de matéria abelianos e não-abelianos: Geração de massa e dualidade

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Física

Aprovada em 31 de agosto de 2007

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de
Carvalho(Orientador)
Universidade Federal do Ceará

Prof. Dr. Marcony Silva Cunha(Co-orientador)
Universidade Estadual do Ceará

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos Almeida
Universidade Federal do Ceará

Prof. Dr. Vitor Emanuel Rondino Lemes
Universidade Estadual do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Kleiton do Carmo Mendes
Universidade Estadual do Ceará

*Sonho que se sonha
só, é só um sonho
que se sonha só, mas
sonho que se sonha
junto é realidade.
Para Jac, Pedro
e
Dan*

Agradecimentos

Aos professores Ricardo Renan e Marcony Cunha pela orientação e amizade dado ao longo deste trabalho.

Ao professor Carlos Alberto pelo apoio e amizade dado ao longo deste trabalho.

A coordenação do Curso de Pós-Graduação na pessoa do professor José Soares Andrade Jr.

Aos funcionários do departamento de Física (UFC) pela atenção com que sempre me atenderam.

Aos colegas do curso de Pós-graduação (UFC).

Aos colegas do grupo de Teoria Quântica de Campos (UFC). *LASSCO*

Aos professores do departamento de Física (UFC).

Aos professores do departamento de Física (UECE).

Ao professor Raimundo Alberto Normando (UECE), *in memoriam*.

Aos professores de Física do ensino médio, em especial aos professores do Colégio Marista Cearense e Colégio da Polícia Militar do Ceará, onde trabalhei durante alguns anos.

A minha esposa Jacqueline Morel pela seu apoio incansável e carinho dedicados ao longo dos anos, sendo de importância vital na realização deste trabalho.

Ao meu querido Pedro Luís pela sua compreensão nos momentos em que estive ausente e pelo filho maravilhoso e amável que é.

Ao meu querido João Victor (Dan), que completa 5 anos em setembro de 2007, marcando definitivamente este trabalho ao longo de toda a minha vida.

A Teresa Morel pelo carinho dedicado aos meus filhos e pelo seu apoio dado ao longo deste trabalho.

Aos meus padrinhos Assis e Lídia pelo carinho e dedicação com que sempre me deram.

As minhas queridas tias Lenira e Helena e a minha querida mãe Rosemeyre.

A todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

A CAPES pelo suporte financeiro.

Resumo

Nesta Tese analisaremos a geração de massa para o campo tensorial anti-simétrico de matéria $T_{\mu\nu}$ no modelo de gauge não-abeliano e o mapeamento, no caso abeliano, entre o campo tensorial anti-simétrico de matéria e o campo de gauge anti-simétrico $B_{\mu\nu}$. Com relação à geração de massa, utilizam-se dois mecanismos: O primeiro, denominado quebra espontânea de simetria, consiste em acoplarmos ao modelo campos escalares, com valores esperados no vácuo não-nulos, descrito no modelo de Higgs com simetria de gauge não-abeliana na representação do grupo $SU(N)$. Além do termo massivo para o campo de matéria, obtém-se termos topológicos do tipo $\tilde{T}_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$ como resultado da quebra da simetria de paridade existente no modelo. O segundo, denominado geração de massa topológica, é obtido a partir da inclusão na ação de um campo vetorial complexo e um termo de acoplamento topológico massivo entre $B_{\mu\nu}$ e o campo autodual complexo. O cálculo dos propagadores de Feynman nos revela que o campo de matéria adquire pólo massivo. Analisamos também a influência de termos adicionais, introduzidos na ação, no cálculo do propagador para o campo de matéria. Quanto ao mapeamento dual, podemos afirmar que a ação, correspondente ao campo de matéria com uma corrente conservada $U(1)$, é mapeada em uma ação dual com o campo tensorial anti-simétrico de gauge $B_{\mu\nu}$ e uma corrente topológica idênticamente conservada. Duas características podem ser observadas nesse mapeamento: A primeira é que ele preserva a simetria de paridade existente, em virtude da corrente conservada $U(1)$ na teoria original possuir termos topológicos. O segundo é que, embora a corrente conservada admita termos topológicos, o mapeamento é livre de anomalias, sendo conhecidas como anomalias axiais. A presença dessas anomalias impede a conservação da corrente topológica no modelo dual, uma característica encontrada no procedimento de bosonização em quatro dimensões, neste caso a anomalia é observada devido a presença da matriz γ^5 . Além disso um dos requisitos importantes para que uma teoria seja renormalizável em todas as ordens de \hbar , é que a teoria seja livre de anomalias.

Abstract

In this Thesis we analyze the generation of mass to the antisymmetric tensor matter field $T_{\mu\nu}$ in a non-Abelian model and the mapping of the antisymmetric matter field to the antisymmetric tensor gauge field $B_{\mu\nu}$ in the Abelian case. For the mass generation, we use two different mechanisms. The first one is the spontaneous symmetry breaking, where we use scalar fields with nonzero expected vacuum value in the $SU(N)$ representation. Besides the massive term for the matter field, by relaxing the requirement of parity invariance we obtain topological terms such as $\tilde{T}_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$. The second mechanism is denominated topological mass generation. It consists by introducing in the action of a vectorial complex field and a massive topological coupling term between $B_{\mu\nu}$ and complex selfdual field. Direct calculation of the Feynman propagators show us that the matter field has a massive pole. In dual mapping, we can say that the $U(1)$ invariant action of the matter field is mapped in a dual action described by the antisymmetric tensor gauge field $B_{\mu\nu}$ and a topologically conserved current. Two remarkable characteristics can be observed in this mapping: the first one is the parity preservation due to topological terms in the both dual actions; the second characteristic is that, though the conserved current admits topological terms, the mapping is free of axial anomalies. The presence of anomalies prevents the conservation of topological currents in a mapping such as bosonization in 4 dimensions. In that case, anomalies are present due to the γ^5 matrix. One of the most important requisites for the renormalizability of a theory in all orders of \hbar is that the theory must be free of anomalies.

Sumário

INTRODUÇÃO	p. 10
Trabalhos Publicados	p. 18
1 CAMPO TENSORIAL ANTI-SIMÉTRICO DE MATÉRIA	p. 19
1.1 Introdução	p. 19
1.2 O modelo de Gauge Abeliano	p. 20
1.2.1 A ação de Avdeev e Chizhov	p. 20
1.2.2 Quantização de campos livres	p. 21
1.2.3 A liberdade assintótica	p. 23
1.2.4 Graus de liberdade	p. 24
1.3 Teoria φ^4 para o campo tensorial anti-simétrico de matéria	p. 27
1.3.1 O caso abeliano	p. 27
1.3.2 Acoplamento com campos de gauge	p. 28
1.3.3 O caso não-abeliano	p. 30
1.3.4 Acoplamento com campos de Yang-Mills	p. 31
2 GERAÇÃO DE MASSA PARA CAMPOS TENSORIAIS ANTI-SIMÉTRICOS DE MATÉRIA	p. 34
2.1 Introdução	p. 34
2.2 Quebra espontânea de simetria	p. 35
2.2.1 A ação de Avdeev e Chizhov	p. 36
2.2.2 Acoplamento entre os campos de matéria e escalar	p. 37

2.2.3	Geração de massa	p. 38
2.2.4	Geração de termos topológicos	p. 40
2.3	Integrais de trajetória	p. 42
2.3.1	Ação para o campo de matéria	p. 42
2.3.2	Propagadores	p. 44
2.3.3	Construindo uma ação geral	p. 45
3	GERAÇÃO DE MASSA PARA CAMPOS TENSORIAIS ANTI-SIMÉTRICOS DE MATÉRIA - O CASO NÃO-ABELIANO	p. 47
3.1	Introdução	p. 47
3.2	Quebra espontânea de simetria	p. 48
3.2.1	A ação não-abeliana para o campo de matéria	p. 48
3.2.2	O modelo de Higgs não-abeliano	p. 49
3.2.3	Geração de massa	p. 51
3.2.4	Geração de termos topológicos	p. 52
3.3	Geração de massa topológica	p. 54
3.3.1	Ação para o campo de matéria	p. 54
3.3.2	Propagadores	p. 56
3.3.3	Construindo uma ação geral	p. 57
4	O MAPEAMENTO ENTRE OS CAMPOS TENSORIAL DE MATÉRIA E KALB-RAMOND	p. 60
4.1	Introdução	p. 60
4.2	O mapeamento dual	p. 65
4.3	Campo tensorial anti-simétrico de matéria	p. 69
4.4	O mapeamento do campo de matéria	p. 70
	CONCLUSÃO	p. 77

Apêndice A - Algumas identidades úteis	p. 80
A.1 Notações e convenções	p. 80
A.2 Tensores anti-simétricos	p. 81
Referências	p. 83

INTRODUÇÃO

Os campos tensoriais anti-simétricos têm sido objeto de estudos ao longo dos anos. O seu surgimento pode ser visto como uma conseqüente generalização dos campos vetoriais de gauge (1). Os campos anti-simétricos de gauge aparecem em teorias de supergravidade em várias dimensões (2) e na teoria de campos efetiva de baixas energias, derivadas das cordas relativísticas (3). Uma importante propriedade desses campos é a possibilidade de geração de massa topológica em quatro dimensões para campos de gauge vetoriais (4), descrito numa simetria de gauge abeliana. Tal mecanismo pode ser comparado ao termo de Chern-Simons em três dimensões (5).

Os campos tensoriais anti-simétricos de gauge representam um importante papel na construção de teorias topológicas (6), sendo responsáveis por um grande número de modelos do tipo Schwarz (7). Essas teorias são conhecidas como modelos BF, podendo ser formulada em qualquer dimensão do espaço-tempo, o que representa uma generalização do modelo de Chern-Simons para espaços-tempos de dimensões ímpares e ainda permitem o cálculo de invariantes topológicos (8),(9), (10). Além disso, os modelos BF são um exemplo de teorias de campos completamente finitas (11),(12), ou seja, livres de qualquer divergência ultravioleta.

Outra possibilidade de estudarmos os campos tensoriais anti-simétricos são em teorias de campos do tipo conforme (13), como a supergravidade (14), por exemplo. Tais campos possuem invariância sob transformação conforme, de maneira que devemos tratá-los como campos tensoriais de matéria, ao invés de campos tensoriais de gauge. Alguns estudos têm voltado a atenção para interações tensoriais em decaimentos radioativos descritos na teoria eletrofraca (15). Experimentos realizados em decaimentos do tipo $\pi^- \rightarrow e^- \tilde{\nu} \gamma$ e $\kappa^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu$ (16) mostram que os fatores vetoriais obtidos experimentalmente podem ser explicados na estrutura de uma teoria eletrofraca padrão, o que leva a numerosas discussões na possível existência de termos tensoriais na interação efetiva de Fermi. Dúpletos de partículas tensoriais anti-simétricas como: $(T_{\mu\nu}^+ T_{\mu\nu}^0)$ e $(U_{\mu\nu}^0 U_{\mu\nu})$ têm sido utilizadas numa extensão do modelo eletrofraco padrão na análise de resultados experimentais em decaimentos mésons, o que permitiu a explicação da interferência destrutiva na amplitude do decaimento $\pi^- \rightarrow e^- \tilde{\nu} \gamma$ e o surgimento de fatores tensoriais e escalares no decaimento

$\kappa^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu$ (15). Interações tensoriais efetivas do tipo quark-quark têm sido utilizadas na investigação da diferença de massa $\Delta_{m_{LS}}$ (lepton e quark strange) em decaimentos radioativos, esta interação contribui para a diferença de massa na mesma ordem de contribuição da interação do modelo padrão V-A (17). Podemos ainda citar a utilização de dados experimentais de alta precisão (em DAIINE) na investigação de interações tensoriais entre quarks e léptons (18).

Em 1994 Avdeev e Chizhov (19) propuseram um modelo de gauge simples para campos tensoriais anti-simétricos de matéria de segundo rank, formulado no espaço-tempo de Minkowski. O modelo contém termos de interação destes campos tensoriais com férmions quirais e com o campo de gauge A_μ , possuindo ainda um termo de alto-interação totalmente tensorial, sendo diferente das interações construídas com campos tensoriais anti-simétricos de gauge. A quantização da parte livre para o campo tensorial, usando-se a decomposição padrão em ondas planas, mostrou que as componentes longitudinais podem ser representadas em termos dos operadores de criação e destruição, obtendo-se assim uma hamiltoniana positivamente definida. Ainda neste trabalho foi calculada a renormalização a um loop para o modelo, obtendo-se resultados interessantes sobre a liberdade assintótica da constante de acoplamento de gauge, propriedade que até então não tinha sido observada nas teorias de campos abelianas. Em outro trabalho, também escrito por Avdeev e Chizhov (20), podemos destacar o estudo da dinâmica desses campos, onde foi feita uma investigação sobre seus graus de liberdade. A parte física foi representada no setor longitudinal, levando a soluções do tipo ondas planas no espaço das configurações.

Estes trabalhos têm-se mostrado de grande importância, por abrirem caminho para novas investigações sobre as características dessa nova abordagem para campos tensoriais anti-simétricos, contribuindo assim com a possibilidade de criarmos uma teoria com campos tensoriais, diferente dos campos de gauge. Estudos posteriores têm mostrado resultados interessantes sobre esse novo tipo de campo tensorial. Podemos citar a renormalização algébrica (21) para o campo tensorial de matéria, neste trabalho é feita uma discussão da estabilidade da ação clássica sob correções radioativas e a análise da condição de consistência de Wess-Zumino (22) no modelo, como também a derivação geométrica do modelo em termos de derivadas covariantes. A generalização do modelo abeliano de Avdeev e Chizhov para o caso não-abeliano possibilitou a investigação das propriedades geométricas do campo tensorial de matéria (23), resultando no estudo desse campo através de uma teoria do tipo $\lambda\varphi^4$, satisfazendo a seguinte condição auto-dual complexa ($\varphi_{\mu\nu} = i\tilde{\varphi}_{\mu\nu}$), onde $\tilde{\varphi}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varphi^{\rho\sigma}$ e $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ é o tensor de Levi-Civita. Esta condição fixa unicamente as contrações de Lorentz para o tensor na Lagrangeana φ^4 , reproduzindo

deste modo a ação de Avdeev e Chizhov (19). A generalização não-abeliana para o modelo pôde agora ser obtida de um modo mais simples. A importância da generalização deste modelo para o caso não-abeliano está no fato de que, do ponto de vista fenomenológico, devido as incertezas dos dados experimentais, os campos tensoriais podem ser incluídos em interações nos processos de decaimento semi-leptônico do pión $\pi^- \rightarrow e^- \tilde{\nu} \gamma$ (24). O modelo não-abeliano sem interação com férmions mostrou-se renormalizável (25).

Uma interessante característica da ação, construída para o campo tensorial anti-simétrico de matéria, no modelo de Avdeev e Chizhov (19), é a ausência de termos massivos do tipo $m^2 T_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$, isso pode ser verificado facilmente devido a simetria de gauge existente no modelo. Na teoria $\lambda\varphi^4$, onde o modelo abeliano pôde ser estudado satisfazendo a seguinte condição autodual complexa $\varphi_{\mu\nu} = i\tilde{\varphi}_{\mu\nu}$, podemos verificar também a ausência de termos massivos do tipo $\varphi^{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu}^*$, que pode ser mostrada como uma conseqüência de tal condição. Entretanto, os campos podem adquirir massa através de um mecanismo denominado quebra espontânea de simetria, por exemplo, depois de adicionarmos campos escalares ao modelo (26). Uma importante característica é que esse mecanismo, quando aplicado aos campos, não viola as simetrias impostas na ação de Avdeev e Chizhov, o que faz deste uma ferramenta eficaz na geração de massa para o campo de matéria.

O mecanismo de quebra espontânea de simetria aplicado ao modelo de gauge abeliano para o campo tensorial de matéria (19), apresentou resultados satisfatórios quanto a massa adquirida por $T_{\mu\nu}$ (26). Termos de massa do tipo $m^2 T_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$ puderam ser encontrados através do acoplamento do campo de matéria com o campo escalar complexo ϕ , com valor esperado no vácuo não-nulo, descrito no modelo de Higgs. Um importante resultado, obtido no modelo, foi o surgimento de termos topológicos para o campo de matéria $T_{\mu\nu}$, sendo semelhante ao obtido numa simetria de gauge abeliana com o termo de Chern-Simons em três dimensões (5).

A geração de massa para o campo tensorial de matéria, também foi obtida através da introdução de termos topológicos na ação de Avdeev e Chizhov (27), preservando a simetria de gauge. Isto pôde ser observado, acoplando-se o campo de matéria $T_{\mu\nu}$ com um campo vetorial complexo do tipo B_μ , juntamente com um parâmetro de massa (incluindo-se um termo topológico). O cálculo dos propagadores de Feynman para o campo de matéria apresentou pólo massivo. Também foi analisado a influência de termos cinéticos, construídos com o campo vetorial complexo, no mecanismo de geração de massa para o referido campo.

A generalização do modelo de Avdeev e Chizhov para o caso não-abeliano motivou a

investigação da geração de massa para o campo tensorial anti-simétrico de matéria nesse novo contexto. Teorias de campos não-abelianas tem apresentado um grande sucesso na descrição do mundo real. Teorias baseadas em princípios de gauge mais gerais do que a simples invariância $U(1)$ da eletrodinâmica quântica. Essas teorias, chamadas de teorias de Yang-Mills tem dado uma grande contribuição no entendimento e quantização de três das forças fundamentais da natureza: a eletromagnética, a força forte e fraca. No que concerne as interações entre partículas elementares mediadas pelas forças fraca e eletromagnética, a teoria de Yang-Mills tem dado uma grande contribuição na formulação do modelo padrão eletrofraco. Através dessas teorias as forças eletromagnética e fraca têm sido unificadas em uma teoria renormalizável e fenomenologicamente correta, baseadas no grupo de Lie $SU(2) \times U(1)$. No modelo dos quarks, que interagem entre si através de campos intermediários bosônicos de interação forte, chamados gluons, a interação entre quarks e gluons é descrita pela Cromodinâmica Quântica (QCD), ou seja, através de uma teoria de gauge não-abeliana baseada em uma simetria de gauge do grupo $SU(3)_c$ denominado grupo de cor.

Teorias de gauge prevêem a existência de partículas não-massivas como mediadoras da interação, podemos citar o caso do fóton, que representa o campo vetorial de gauge para a interação eletromagnética. O estudo das interações forte e fraca admitem a existência de partículas massivas como mediadoras de tais interações. Diferentemente do campo eletromagnético, que tem alcance infinito, esses campos são de curto alcance. Durante alguns anos isso representava um empecilho no estudo dessas interações através de uma teoria de gauge, tendo em vista que sua simetria impede a existência de partículas massivas. Entretanto esse problema pôde ser contornado através do mecanismo denominado quebra espontânea de simetria, ou seja, a existência de partículas massivas no modelo pode ser interpretada como resultado da quebra espontânea da simetria de gauge. A quebra espontânea da simetria de gauge representa um ingrediente crucial no modelo da unificação das interações fraca e eletromagnética construídos independentemente por Weinberg e Salam. A idéia geral consiste que interações fracas devem ser mediadas por bósons de gauge W^\pm , que são não-massivos. A lagrangeana para a teoria contém também termos para elétrons, múons e neutrinos, todos não-massivos sendo invariante sob um grupo de simetria interna, que é uma simetria de gauge. Um campo escalar (campo de Higgs) é então introduzido com valor esperado no vácuo não-nulo. A quebra espontânea de simetria permite gerar massa para e , μ e τ e também para os bósons W^\pm sem entretanto, gerar massa para o fóton e o neutrino. Isso mostra uma total concordância com a realidade física, o que faz desse mecanismo uma ferramenta eficaz na descrição das interações fracas.

A geração de massa para o campo tensorial anti-simétrico de matéria para o caso não-abeliano constitui um dos objetivos do nosso trabalho. Para isso utilizaremos a teoria $\lambda\varphi^4$, construída com um campo tensorial anti-simétrico de matéria complexo que obedece uma condição de auto-dualidade complexa (23), no espaço-tempo de Minkowski. Esta condição válida também para o caso não-abeliano não permite a inclusão de termos massivos para o campo de matéria. O modelo possui simetria de gauge local na representação do grupo $SU(N)$ onde foram incluídos os campos de Yang-Mills, com um termo de acoplamento, através da derivada covariante. Além disso consideramos também as simetrias discretas de paridade e conjugação de carga. Neste trabalho veremos que o campo tensorial anti-simétrico de matéria $T_{\mu\nu}$ pode adquirir massa através de dois mecanismos. O primeiro, denominado quebra espontânea de simetria, consiste em acoplarmos o campo de matéria $T_{\mu\nu}$ com um campo escalar complexo ϕ , no modelo de Higgs, com valor esperado no vácuo não-nulo. Ao contrário do mecanismo de Higgs aplicado para o campo de matéria no caso abeliano (26), que permitiu a construção de quatro termos de interação capazes de gerar massa para o campo de matéria, a estrutura do grupo $SU(N)$ permitiu apenas a construção de um termo. Contudo, veremos que, para o caso não-abeliano, esta única interação capaz de gerar massa para o referido campo apresentou estados de vácuo compatíveis com as simetrias de gauge, paridade e livre da presença de *táquions*, enquanto que, no caso abeliano, algumas interações apresentaram problemas quanto a escolha do vácuo, por admitirem a presença de *táquions*. A obtenção de termos topológicos para o campo de matéria também pôde ser observada desprezando-se a condição de simetria sob paridade. O termo topológico vem acompanhado de um termo massivo que, por sua vez, depende da escolha de um vácuo apropriado a fim de evitarmos *táquions* no modelo. O segundo mecanismo, consiste em acoplarmos o campo de matéria $T_{\mu\nu}$ com um campo vetorial complexo B_μ , com um termo de acoplamento incluindo-se um termo topológico. O cálculo dos propagadores de Feynmann nos revela que o campo de matéria $T_{\mu\nu}$ adquire pólo massivo, podendo ser comparado ao propagador no modelo de Avedev e Chizhov (19). Analisamos também a influência de um termo cinético, introduzido na ação, no cálculo do propagador para o campo de matéria. Estes resultados constituem-se assim na generalização não-abeliana do mecanismo de geração de massa topológica para o campo tensorial anti-simétrico de matéria no caso abeliano (27).

Vimos então que muitas propriedades do campo tensorial anti-simétrico de matéria tem sido discutidas e esclarecidas, dando uma importante contribuição na possibilidade de construção de uma teoria com campos tensoriais anti-simétricos de matéria. Entretanto, podemos nos perguntar se existe alguma relação entre o modelo de gauge abeliano

construído com o campo tensorial anti-simétrico de matéria $T_{\mu\nu}$ e o modelo construído com o campo tensorial anti-simétrico de gauge $B_{\mu\nu}$. Esta relação pode ser observada em termos da ação funcional, construída para cada campo, juntamente com um termo de interação associado a corrente conservada em cada modelo. Podemos verificar, por exemplo, a possibilidade desses modelos de campo serem modelos duais. A dualidade aqui refere-se a existência de duas descrições equivalentes de um modelo usando diferentes campos. Um exemplo clássico é a dualidade escalar-tensor em 4 dimensões. O campo livre de Klein-Gordon ϕ possui uma descrição equivalente em termos do campo livre tensorial anti-simétrico de gauge $A_{\mu\nu}$. A relação entre os campos é descrita como uma *transformada de Legendre*. Entretanto, sabemos que um sistema físico pode ser representado por meio de diferentes descrições matemáticas, ou seja, temos liberdade na escolha das variáveis usadas para definir sua configuração. Uma manifestação extrema disso ocorre em alguns modelos bi-dimensionais que podem ser descritos em termos de suas variáveis bosônicas ou fermiônicas. A equivalência entre essas duas descrições é feita explicitamente através de uma técnica não perturbativa denominada bosonização. A bosonização consiste no mapeamento de uma teoria descrita para campos fermiônicos em uma teoria descrita para campos bosônicos (28),(29). Esse mecanismo tem-se tornado muito útil, ao longo dos anos, no estudo de sistemas fermiônicos bi-dimensionais em teoria quântica de campos, como também em física da matéria condensada (30),(31). A generalização das idéias de bosonização para o estudo de sistemas fermiônicos em altas dimensões, com destaque em $(2 + 1)$ dimensões, tem sido objeto de intensas pesquisas. O conjunto desses esforços tem trazido alguns resultados promissores e interessantes (28),(29).

A generalização das técnicas de bosonização, originalmente usada para bosonização de ações fermiônicas, pode ser vista em (32), sendo utilizada para um modelo de teoria de campos arbitrária em $(2+1)$ dimensões. Neste trabalho é feito o mapeamento de um modelo tri-dimensional, com uma carga abeliana conservada do grupo $U(1)$, em uma teoria abeliana de gauge dual. Podemos nos referir a este mapeamento como dualidade, como sugerem os próprios autores (32), ao invés de bosonização, devido ao significado mais geral deste termo. Uma característica importante deste mapeamento, é que a corrente de Noether J_μ correspondente a simetria global do grupo $U(1)$ está associada a uma corrente topológica j_μ^T como correspondente dual na teoria de gauge abeliana.

$$J_\mu \longrightarrow j_\mu^T = \epsilon_{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda.$$

A corrente topológica j_μ^T torna-se então, identificada com \tilde{F}_μ , uma corrente topológica local, invariante de gauge e identicamente conservada que pode ser escrita em termos de

A_μ , na teoria dual, invariante de gauge. Além disso, a invariância da teoria bosonizada deve estar relacionada a renormalizabilidade das integrais funcionais que levam a teoria dual.

A descrição de modelos de campos tri-dimensionais carregados em termos de uma teoria de gauge dual, traz consigo a possibilidade de estendermos esse mecanismo de dualização para diversas dimensões, em particular em $(3+1)$ dimensões. Em três dimensões a corrente topológica é construída com o campo vetorial de gauge A_μ , na ação dual $S_{dual}(A)$. Desta forma, somos levados a pensar que, um modelo de teoria de campos em quatro dimensões, com uma carga abeliana conservada, deve corresponder a uma teoria de gauge dual, isto é, a corrente J_μ de $U(1)$ deve ser mapeada em uma corrente topológica j_μ^T , construída com um campo gauge.

$$J^\mu \longrightarrow j_T^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu B_{\rho\sigma} .$$

Observe que o campo vetorial de gauge A_μ é substituído pelo campo tensorial anti-simétrico de gauge de segundo rank $B_{\mu\nu}$, como resultado da extensão da simetria de gauge para campos tensoriais anti-simétricos.

A segunda parte do nosso trabalho consiste no mapeamento, em quatro dimensões, de uma teoria de campos construída com o campo tensorial anti-simétrico de matéria $T_{\mu\nu}$ em uma teoria de gauge dual com o campo tensorial anti-simétrico de gauge $B_{\mu\nu}$. O mapeamento pode ser entendido como uma relação de equivalência entre os geradores funcionais obtidos da ação correspondente a cada modelo de campo, ou seja, a ação invariante para o campo de matéria $T_{\mu\nu}$, incluindo-se um termo de interação que representa o acoplamento de uma fonte externa com a corrente conservada do grupo $U(1)$, é mapeada em uma ação de gauge dual com o campo $B_{\mu\nu}$ juntamente com um termo de interação, associado a uma corrente topológica identicamente conservada. Para isso, utilizaremos o modelo de gauge abeliano para o campo tensorial anti-simétrico de matéria $T_{\mu\nu}$, descrito na teoria $\lambda\varphi^4$ (23).

Uma característica importante desse mapeamento é que ele preserva a simetria de paridade existente na teoria original, devido ao fato de que a corrente conservada do grupo $U(1)$ possui termos topológicos, sendo desta forma, mapeada em uma corrente topológica identicamente conservada na teoria dual. Esse resultado pode ser comparado ao obtido no mapeamento dual em $(2+1)$ dimensões (32), onde podemos observar que a corrente conservada no modelo original é mapeada em uma corrente topológica na teoria dual, ocorrendo portanto quebra da simetria de paridade. Outra característica importante

é que o mapeamento do campo de matéria não apresentou anomalias, sendo conhecidas como anomalias axiais. As anomalias surgem no procedimento de bosonização em quatro dimensões (33), devido a presença da matriz γ^5 na corrente axial, da teoria fermiônica. Em nosso caso, embora a corrente conservada $U(1)$ para o campo de matéria possua termos topológicos, tal anomalia não é observada. A presença de um termo topológico em nossa teoria é equivalente ao termo γ^5 , na teoria fermiônica, podendo ser observada através da relação ($i\tilde{\sigma}_{\mu\nu} = \gamma^5\sigma_{\mu\nu}$). Além disso o termo de interação no modelo dual pode ser identificado com o termo topológico denominado BF , muito utilizado na construção de teorias topológicas. De fato este termo é responsável por uma grande classe de modelos topológicos do tipo Schwarz, conhecidos na literatura como modelos BF (7).

A tese é organizada da seguinte forma. No primeiro capítulo faremos um breve resumo das propriedades do campo tensorial anti-simétrico de matéria no modelo abeliano de Avdeev e Chizhov, dando destaque na construção geométrica da teoria $\lambda\varphi^4$, o que permitiu a generalização do modelo abeliano de Avdeev e Chizhov para o caso não-abeliano de um modo mais simples. No segundo capítulo faremos um breve comentário sobre o mecanismo de geração de massa para o campo tensorial anti-simétrico de matéria no modelo de gauge abeliano, que será de fundamental importância para a discussão dos resultados obtidos na generalização desse mecanismo para o caso não-abeliano. No terceiro capítulo discutiremos os resultados obtidos relacionados a geração de massa para o campo de matéria no caso não-abeliano. E por fim, no quarto capítulo, discutiremos os resultados obtidos sobre o mapeamento dual para o campo tensorial anti-simétrico de matéria $T_{\mu\nu}$ em uma teoria de gauge dual construída com o campo tensorial anti-simétrico de gauge $B_{\mu\nu}$.

Trabalhos Publicados

- L. Gonzaga Filho, M. S. Cunha, C. A. S. Almeida and R. R. Landim, "Generating mass and topological terms to the antisymmetric tensor matter field by Higgs mechanism" *Phys. Lett. B*646(2007)279;
- L. Gonzaga Filho, M. S. Cunha and R. R. Landim, " Topological mass generalizo to antisymmetric tensor matter field. *Europeus. Lett.* 69(2005)184;
- L. Gonzaga Filho, M. S. Cunha and R. R. Landim, "Generating mass to tensor matter field the nonabelian case" (em preparação)
- L. Gonzaga Filho, M. S. Cunha and R. R. Landim, "Dual mapping between the antisymmetric tensor matter field and the Kalb-Ramond field" (em preparação)

1 CAMPO TENSORIAL ANTI-SIMÉTRICO DE MATÉRIA

1.1 Introdução

Em 1994 Avdeev e Chizhov (19) propuseram um modelo de gauge simples para campos tensoriais anti-simétricos de matéria de segundo rank, formulado no espaço-tempo de Minkowski. O modelo exhibe invariância sob transformação de gauge local (parâmetro da transformação dependente das coordenadas do espaço-tempo) e também sob as transformações discretas de paridade e conjugação de carga. A quantização da parte livre do campo é analisada e a renormalização a um-loop é calculada para o modelo. Uma das propriedades importantes deste modelo é que a constante de acoplamento de calibre adquire liberdade assintótica, isto é, a função β é negativa, resultado até então desconhecido para teorias abelianas (34).

Acredita-se que no espaço Euclidiano o campo tensorial $T_{\mu\nu}$ descreva seis graus de liberdade (35), sendo três físicos e três não-físicos. Uma redução dos graus de liberdade é feita através de um estudo da dinâmica desses campos (20), onde a parte física pode ser representada em termos das componentes longitudinais do vetor \mathbf{A} e do pseudo-vetor \mathbf{B} , propostos na teoria.

Uma nova abordagem para o estudo do campo tensorial anti-simétrico de matéria é observada em (23), onde o modelo para o campo de matéria $T_{\mu\nu}$, proposto por Avdeev e Chizhov (19), pode ser obtido através de uma teoria denominada $\lambda\varphi^4$, construída com o campo tensorial anti-simétrico complexo, satisfazendo a seguinte condição de auto-dualidade complexa ($\varphi_{\mu\nu} = i\tilde{\varphi}_{\mu\nu}$), onde $\tilde{\varphi}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varphi^{\rho\sigma}$ e $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ é o tensor de Levi-Civita. Esta condição fixa unicamente as contrações de Lorentz para o tensor na Lagrangeana φ^4 , reproduzindo deste modo a ação de Avdeev e Chizhov (19). A generalização não-abeliana para o modelo pôde agora ser obtida de um modo mais simples.

1.2 O modelo de Gauge Abeliano

1.2.1 A ação de Avdeev e Chizhov

Iniciaremos o estudo do campo tensorial anti-simétrico de matéria com o modelo originalmente proposto por Avdeev e Chizhov (19). O modelo consiste de um campo tensorial anti-simétrico de segundo rank acoplado ao campo de gauge abeliano axial A_μ e a campos espinoriais de Dirac ψ , sendo um acoplamento do tipo Yukawa com estes espinores. A ação originalmente proposta, em quatro dimensões, tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
S_{inv} = & \int d^4x \left(\frac{1}{2} (\partial_\lambda T_{\mu\nu})^2 - 2 (\partial_\mu T_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi + h\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu A_\mu\psi + \right. \\
& + 4hA_\mu (T_{\mu\nu}\partial_\lambda\tilde{T}_{\lambda\nu} - \tilde{T}_{\mu\nu}\partial_\lambda T_{\lambda\nu}) + 4h^2\frac{1}{2} ((A_\lambda T_{\mu\nu})^2 - (A_\mu T_{\mu\nu})^2) + \\
& \left. + y\psi\sigma_{\mu\nu}T_{\mu\nu}\psi + \frac{1}{4}q \left(\frac{1}{2} (T_{\mu\nu}T_{\nu\mu})^2 - (T_{\mu\nu}T_{\nu\rho}T_{\rho\lambda}T_{\lambda\nu}) \right) \right), \tag{1.1}
\end{aligned}$$

onde (h, y, q) são constantes de acoplamento e $T_{\mu\nu} = -T_{\nu\mu}$ é um tensor de segundo rank anti-simétrico. Observa-se que o acoplamento dos espinores com o campo A_μ é do tipo quiral devido a presença da matriz γ_5 . A interação do tipo AT possui ainda um termo com o tensor de Levi-Civita devido a representação dual do tensor anti-simétrico. O tensor dual \tilde{T} é definido por:

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}T^{\rho\sigma}. \tag{1.2}$$

O modelo é formulado no espaço-tempo de Minkowski cuja métrica é $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$ e denota-se $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}i[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$, para as matrizes de Dirac. São usadas duas identidades para o campo tensorial $T_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{\mu\lambda}\tilde{T}_{\lambda\nu} &= T_{\mu\lambda}T_{\lambda\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T_{\alpha\beta}^2 \\
T_{\mu\lambda}\tilde{T}_{\lambda\nu} &= \frac{1}{4}g_{\mu\nu}T_{\alpha\beta}\tilde{T}_{\beta\alpha}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Verifica-se diretamente que a ação eq.(1.1) é invariante sob as seguintes transformações de gauge (19)

$$\begin{aligned}
\delta A_\mu &= \partial_\mu\omega \\
\delta\psi &= -ih\omega\gamma_5\psi \\
\delta\bar{\psi} &= -ih\omega\bar{\psi}\gamma_5 \\
\delta T_{\mu\nu} &= -2h\omega\tilde{T}_{\mu\nu} \\
\delta\tilde{T}_{\mu\nu} &= 2h\omega T_{\mu\nu},
\end{aligned}$$

e pelas transformações discretas de paridade (\mathcal{P}) e conjugação de carga (\mathcal{C})

i) Paridade \mathcal{P}

$$\begin{aligned}
 x &\rightarrow x_p = (x^0, -x^i), \quad i = 1, 2, 3 \\
 \psi &\rightarrow \psi^p = \gamma^0 \psi, \\
 A_0 &\rightarrow A_0^p = -A_0, \quad A_i \rightarrow A_i^p = A_i, \\
 \varphi_{0i} &\rightarrow \varphi_{0i}^p = -\varphi_{0i}^\dagger, \quad \varphi_{ij} \rightarrow \varphi_{ij}^p = \varphi_{ij}^\dagger.
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

ii) Conjugação de carga \mathcal{C}

$$\begin{aligned}
 \psi &\rightarrow \psi^c = C \bar{\psi}^T, \quad C = i\gamma^0 \gamma^2, \\
 A_\mu &\rightarrow A_\mu^c = A_\mu, \\
 \varphi_{\mu\nu} &\rightarrow \varphi_{\mu\nu}^c = -\varphi_{\mu\nu}.
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Note que as transformações de paridade dos campos são do tipo axial devido a presença do tensor ε e da matriz γ_5 . É importante destacarmos que termos de massa do tipo

$$M^2 T_{\mu\nu} T^{\mu\nu}, \quad m \bar{\psi} \psi \quad e \quad m \bar{\psi} \gamma_5 \psi, \tag{1.6}$$

não podem ser introduzidos na ação eq.(1.1), simplesmente pelo fato de que estes não são invariantes de gauge. Entretanto, os campos podem adquirir massa através do mecanismo denominado quebra espontânea de simetria, adicionando-se ao modelo campos escalares (27). A obtenção de termos topológicos do tipo $T_{\mu\nu} \tilde{T}^{\mu\nu}$ também pode ser verificada através desta técnica. Termos topológicos foram introduzidos inicialmente por Deser-Jackiw (5) no mecanismo conhecido como geração de massa topológica, numa simetria de gauge abeliana com o termo de Chern-Simons ($\varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho$) em três dimensões. A geração de massa via quebra espontânea de simetria e a geração de termos topológicos será tratado no próximo capítulo e sua generalização para o caso não-abeliano constitui um dos objetivos do nosso trabalho.

1.2.2 Quantização de campos livres

Considere a ação livre, descrita para o campo tensorial anti-simétrico de matéria $T_{\mu\nu}$

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} (\partial_\lambda T_{\mu\nu})^2 - 2 (\partial_\mu T_{\mu\nu})^2 \right). \tag{1.7}$$

Da definição do hamiltoniano canônico, temos a seguinte expressão:

$$H_T = (\partial_0 T_{0j})^2 - (\partial T_{0j})^2 + 2(\partial_j T_j)^2 + (\partial_0 T_j)^2 - (\partial T_j)^2 + 2(\partial_j T_j)^2, \quad (1.8)$$

onde ∂ representa o vetor tridimensional e T_{0j} a componente espaço-temporal do campo anti-simétrico, que por sua vez forma um vetor tridimensional $A_i = T_{oi}$. A componente totalmente espacial $T_{jk} = \varepsilon_{jkl} T_l$ é parametrizada por um pseudo-vetor tridimensional, podendo os índices latinos assumir os valores 1,2 e 3, sendo somados sobre índices repetidos. Do princípio da ação mínima ($\delta S = 0$) obtemos as equações clássicas do movimento

$$\partial^2 T_{\mu\nu} + 2\partial_\lambda (\partial_\mu T_{\nu\lambda} - \partial_\nu T_{\mu\lambda}) = 0, \quad (1.9)$$

que em componentes reduzem-se a

$$\begin{aligned} [\delta_{jk} (\partial_0^2 + \partial^2) - 2\partial_j \partial_k] T_{0k} &= -2\varepsilon_{jkl} \partial_0 \partial_k T_l, \\ [\delta_{jk} (\partial_0^2 + \partial^2) - 2\partial_j \partial_k] T_k &= 2\varepsilon_{jkl} \partial_0 \partial_k T_{ol}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

satisfazendo a equação de D'Alembert ($\partial^2 \phi = 0$). Deste modo, as componentes do campo tensorial podem ser escritas na representação padrão de ondas planas e em termos de suas frequência positivas e negativas, podendo ainda serem representadas no espaço dos momentos.

Uma característica do hamiltoniano é que ele não mistura as configurações longitudinais e transversais do campo, sendo por sua vez, independentes. A representação do campo tensorial em ondas planas pode ser comparada a excitações longitudinais de massa nula de campos escalares e pseudo-escalares, com $T_{0j}(p)$ ou $T_j(p)$ paralelos a p_j e $p_o = \sqrt{p^2}$. Desta forma, os campos podem ser escritos em termos dos operadores de criação e destruição

$$T_{0j}(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{p} p_j}{2(\pi p_0)^{3/2}} \left[-a^\dagger(-\mathbf{p}) e^{i k x} + a(\mathbf{p}) e^{-i k x} \right], \quad (1.11)$$

reduzindo o hamiltoniano eq.(1.8) à seguinte forma:

$$H = \int d^3 \mathbf{p} p_0 a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}). \quad (1.12)$$

As duas ondas transversais envolvendo os campos vetorial e pseudo vetorial são ortogonais a p e entre si, sendo então representados por:

$$T_{0j}(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{2(2\pi p_0)^{3/2} \sqrt{p_0}} \left[b^\dagger(-\mathbf{p}) n_j(-\mathbf{p}) e^{i k x} + b(\mathbf{p}) e^{-i k x} \right], \quad (1.13)$$

$$T_j(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p} \varepsilon_{jkl} p_k}{2(2\pi p_0)^{3/2}} \left[-b^\dagger(-\mathbf{p}) n_j(-\mathbf{p}) e^{ikx} + b(\mathbf{p}) n_l(\mathbf{p}) e^{-ikx} \right],$$

onde $\mathbf{n}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{p} = 0$. Entretanto o hamiltoniano nas soluções das equações do movimento é nulo, isto significa dizer que o modelo possui excitações não usuais de energia nula.

O propagador causal para o campo tensorial de matéria pode ser facilmente calculado, não necessitando da introdução de termos apropriados de fixação de calibre para $T_{\mu\nu}$, sendo definido da seguinte forma:

$$\langle T_{\mu\nu}(-\mathbf{p}) T_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) \rangle = \frac{i}{p^2 + i0} \Pi_{\mu\nu\alpha\beta}(\mathbf{p}) \quad (1.14)$$

com

$$\Pi_{\mu\nu\alpha\beta}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}) - \frac{g_{\mu\alpha} p_\nu p_\beta + g_{\mu\beta} p_\mu p_\alpha - g_{\mu\beta} p_\nu p_\alpha - g_{\nu\alpha} p_\mu p_\beta}{p^2}$$

$$\Pi_{\mu\nu\rho\sigma}(\mathbf{p}) \Pi_{\rho\sigma\alpha\beta}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}).$$

Esta propriedade mostra que o campo anti-simétrico $T_{\mu\nu}$ no modelo de Avdeev e Chizhov eq.(1.1) é de fato um campo de matéria. Vemos também, de acordo com a eq.(1.14), que o propagador causal para o campo tensorial de matéria não possui pólo massivo.

Vale ressaltar que a contribuição do termo quártico do potencial eq.(1.1) para o hamiltoniano pode ser reescrito, em termos das componentes do campo, como:

$$q \left[\frac{1}{2} (T_{0j}^2 - T_j^2)^2 + 2(T_{0j} T_j)^2 \right], \quad (1.15)$$

sendo positivamente definido se $q \geq 0$. Deste modo, a existência do vácuo não pode ser violada pelo termo de auto-interação.

1.2.3 A liberdade assintótica

O modelo do campo tensorial anti-simétrico de matéria tem uma propriedade importante que é a liberdade assintótica da constante de acoplamento de calibre h . Este resultado é interessante por que uma teoria com campos de matéria espinoriais e escalares renormalizável só admite liberdade assintótica no caso não-abeliano. O cálculo da função β para a constante de acoplamento h , obtida a um-loop (19), é dado por:

$$\beta_{h^2} = \gamma_A h^2 = (16\pi^2)^{-1} \left(\frac{8}{3}n - 6 \right) h^4. \quad (1.16)$$

O fator $8/3n$ que aparece na eq.(1.16) é a contribuição dos férmions. O fator -6 vem da contribuição dos campos tensoriais. Observe que, para $n = 1$ e $n = 2$ a função β_{h^2} é negativa, adquirindo assim liberdade assintótica.

1.2.4 Graus de liberdade

Considere a seguinte ação, descrita para o campo tensorial anti-simétrico de matéria $T_{\mu\nu}$

$$S_T = \int d^4x \frac{1}{4} (\partial_\lambda T_{\mu\nu}) \partial^\lambda T^{\mu\nu} - (\partial_\mu T^{\mu\lambda}) \partial^\nu T_{\nu\lambda}. \quad (1.17)$$

Façamos um estudo dinâmico (20) desse campo, considerando para isso suas componentes parametrizadas por um vetor tridimensional $A_i = T_{0i}$ e um pseudo-vetor $B_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}T_{jk}$, onde os índices latinos assumem os valores 1, 2 e 3 e são somados sobre índices repetidos. Seguindo o formalismo padrão para os campos clássicos, na representação dos momentos temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx} \mathbf{A}(k) \\ \mathbf{B}(x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx} \mathbf{B}(k). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Escolhendo um sistema de referência do tipo e_i , onde $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$, $[e_i \times e_j] = \varepsilon_{ijk} e_k$, $e_3 = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ e decompondo os campos sobre a base $A(k) = a_i(k) e_i$, $B_i = b_i(k) e_i$ podemos escrever a ação eq.(1.17) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_T &= \pi \int d^4k \left\{ \sum_{i=1}^2 [a_i^*(k) (k_0^2 + \mathbf{k}^2) a_i(k) + b_i^*(k) (k_0^2 + \mathbf{k}^2) b_i(k)] + \right. \\ &\quad + 2k_0 |\vec{k}| [a_1^*(k) b_2(k) + b_2^*(k) a_1(k) - a_2^*(k) b_1(k) - b_1^*(k) a_2(k)] + \\ &\quad \left. + a_3^*(k) (k_0^2 - \mathbf{k}^2) a_3(k) + b_3^*(k) (k_0^2 - \mathbf{k}^2) b_3(k) \right\} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Uma rotação adicional

$$\begin{aligned} a_1(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [c_1(k) + d_2(k)] , \\ a_2(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [c_2(k) + d_1(k)] , \\ a_3(k) &= c_3(k) ; \\ b_1(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [d_1(k) - c_2(k)] , \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned}
b_2(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [d_2(k) - c_1(k)] , \\
b_3(k) &= d_3(k) ,
\end{aligned} \tag{1.21}$$

diagonaliza a ação

$$\begin{aligned}
S_T &= \pi \int d^4k \left[c_1^*(k) (k_0 - |\mathbf{k}|)^2 c_1(k) + c_2^*(k) (k_0 + |\mathbf{k}|)^2 c_2(k) + \right. \\
&\quad \left. + c_3^*(k) (k_0 - |\mathbf{k}|) (k_0 + |\mathbf{k}|) c_3(k) + (c \rightarrow d) \right] .
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Do princípio da ação mínima ($\delta S = 0$), obtemos as seguintes equações para os campos

$$\begin{aligned}
(k_0 - |\mathbf{k}|)^2 c_1(k_0, \mathbf{k}) &= 0 \\
(k_0 + |\mathbf{k}|)^2 c_2(k_0, \mathbf{k}) &= 0 \\
(k_0 + |\mathbf{k}|) (k_0 - |\mathbf{k}|) c_3(k_0, \mathbf{k}) &= 0,
\end{aligned} \tag{1.23}$$

da mesma forma para os $d_i(k)$, cujas soluções gerais são do tipo :

$$\begin{aligned}
c_1(k_0, \mathbf{k}) &= \delta(k_0 - |\mathbf{k}|) c_1(\mathbf{k}) + \delta'(k_0 - |\mathbf{k}|) \tilde{c}_1(\mathbf{k}) \\
c_2(k_0, \mathbf{k}) &= \delta(k_0 + |\mathbf{k}|) c_2(\mathbf{k}) + \delta'(k_0 + |\mathbf{k}|) \tilde{c}_2(\mathbf{k}) \\
c_3(k_0, \mathbf{k}) &= \delta(k_0 - |\mathbf{k}|) \tilde{c}_3(\mathbf{k}) + \delta(k_0 + |\mathbf{k}|) c_3(\mathbf{k}),
\end{aligned} \tag{1.24}$$

onde a derivada da função delta que aparece na eq.(1.24) é com relação a k_0 . Devido a restrição dos campos $\mathbf{A}(x)$ e $\mathbf{B}(x)$ serem reais, os coeficientes de (1.24) não são todos independentes. Pode-se mostrar que c_3 , d_3 e todas as amplitudes com índices 2 não são independentes. Verifica-se também que as componentes transversas $c_1(k_0, \mathbf{k})$, $d_1(k_0, \mathbf{k})$ envolvem somente frequências positivas $k_0 = |\mathbf{k}|$, e as outras componentes $c_2(k_0, \mathbf{k})$, $d_2(k_0, \mathbf{k})$ envolvem somente frequências negativas $k_0 = -|\mathbf{k}|$

O quadrivetor energia-momento para o campo tensorial de matéria é definido como:

$$P_\mu = \int d^3\mathbf{x} \left[(\partial_\mu T_{\alpha\beta}) \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial (\partial_0 T_{\alpha\beta})} - g_{\mu 0} \mathcal{L}_T \right]. \tag{1.25}$$

Através de um cálculo direto da equação acima encontramos:

$$\begin{aligned}
P_0 &= \int d^3\mathbf{k} \left\{ \tilde{c}_1^*(\mathbf{k}) \tilde{c}_1(\mathbf{k}) - |\mathbf{k}| [\tilde{c}_1^*(\mathbf{k}) c_1(\mathbf{k}) + c_1^*(\mathbf{k}) \tilde{c}_1(\mathbf{k})] + \right. \\
&\quad \left. + 2\mathbf{k}^2 c_3^*(\mathbf{k}) c_3(\mathbf{k}) + (c \rightarrow d) \right\}
\end{aligned} \tag{1.26}$$

$$P_i = \int d^3\mathbf{k} k_i \left\{ \tilde{c}_1^*(\mathbf{k}) c_1(\mathbf{k}) + c_1^*(\mathbf{k}) \tilde{c}_1(\mathbf{k}) + 2|\mathbf{k}| c_3^*(\mathbf{k}) c_3(\mathbf{k}) + (c \rightarrow d) \right\}. \tag{1.27}$$

A diagonalização da eq.(1.26) nos revela dois modos transversais de energia positiva e dois modos de energia negativa, não podendo ser interpretados como partículas relativísticas. Isso se deve a presença de δ' nas soluções da eq.(1.24). Na representação das coordenadas tais soluções não correspondem a ondas planas, mas crescem linearmente com o tempo no espaço das configurações. O hamiltoniano não é positivamente definido no setor transversal.

O setor longitudinal, cuja soluções possuem apenas a função δ , nos leva a soluções do tipo ondas planas no espaço das configurações. O hamiltoniano nesse setor é positivo definido. Entretanto se nos limitarmos apenas a soluções no setor de ondas planas, as amplitudes transversais não contribuem para energia e momentum, podendo deste modo, energia e momentum serem escritos da seguinte forma:

$$P_\mu = \int d^3\mathbf{k} k_\mu \left[c_3^+(\mathbf{k}) c_3^-(\mathbf{k}) + d_3^+(\mathbf{k}) d_3^-(\mathbf{k}) \right], \quad (1.28)$$

onde temos $c_3^+(k) = c_3^*(k)/\sqrt{2k_0}$ e $c_3^-(k) = c_3(k)/\sqrt{2k_0}$ sendo $k_0 = |\mathbf{k}|$.

Assim o hamiltoniano torna-se positivamente definido nas soluções de ondas planas. Uma importante propriedade a ser destacada é se introduzirmos na ação um termo de massa do tipo $T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$, este por sua vez, descreverá partículas de massa nula.

Agora consideremos que os campos vetoriais e pseudo-vetoriais sofram uma transformação global do tipo

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad (1.29)$$

levando deste modo a ação livre para o campo tensorial $T_{\mu\nu}$ invariante. Esta propriedade, acompanhada da condição de energia positiva para o hamiltoniano é que não permite a existência do termo massivo para o campo tensorial de matéria $T_{\mu\nu}$.

Como os invariantes dinâmicos para soluções limitadas (ondas planas) não dependem das componentes transversais do campo tensorial, somos levados a concluir que somente as excitações longitudinais são físicas. Em contraste com o campo tensorial de gauge, que tem somente um grau de liberdade on shell, o campo tensorial de matéria $T_{\mu\nu}$ possui dois estados físicos (componentes longitudinais do vetor A e do pseudo-vetor B).

Comparando o campo tensorial de matéria com o campo vetorial de gauge, pode-se dizer que as componentes transversais de ondas planas do campo de matéria são equivalentes as polarizações temporal e longitudinal do fóton. Entretanto, em ultimo caso é a simetria de gauge que é responsável pelo cancelamento dos graus de liberdade não físicos.

1.3 Teoria φ^4 para o campo tensorial anti-simétrico de matéria

1.3.1 O caso abeliano

O modelo para o campo tensorial anti-simétrico de matéria $T_{\mu\nu}$ pode ser visto como componente de um campo complexo $\varphi_{\mu\nu}$ anti-simétrico satisfazendo a seguinte condição auto-dual complexa;

$$\varphi_{\mu\nu} = i\tilde{\varphi}_{\mu\nu} \quad (1.30)$$

onde $\varphi_{\mu\nu}$ é o campo tensorial anti-simétrico complexo e $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ o tensor de Levi-Civita. Vale lembrar que a condição complexa autodual eq.(1.30) tem sido usada em diversos trabalhos ao longo dos anos, como exemplo citaremos a conexão complexa autodual usada por A. Ashtekar em sua formulação da gravidade.

A teoria φ^4 é formulada no espaço-tempo de Minkowski, cuja métrica é $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$ e o tensor anti-simétrico obedece as seguintes propriedades:

$$\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} \varepsilon^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} = -2 \left(\delta_{\mu_1}^{[\nu_1} \dots \delta_{\mu_4}^{\nu_4]} \right). \quad (1.31)$$

Uma característica do espaço-tempo de Minkowski e que ele não permite para o campo auto-dual (ou anti-autodual)

$$\eta_{\mu\nu} = \tilde{\eta}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \eta^{\rho\sigma}, \quad (1.32)$$

onde obtemos :

$$\tilde{\tilde{\eta}}_{\mu\nu} = -\eta_{\mu\nu}, \quad (1.33)$$

que é incompatível com a condição auto-dual eq.(1.32).

Deste modo, trocaremos a eq.(1.32) por uma condição auto-dual complexa envolvendo o campo complexo $\varphi_{\mu\nu}$, ou seja:

$$\varphi_{\mu\nu} = i\tilde{\varphi}_{\mu\nu} \quad (1.34)$$

Fazendo o dual da equação acima, temos:

$$\tilde{\varphi}_{\mu\nu} = i\tilde{\tilde{\varphi}}_{\mu\nu} = -i\varphi_{\mu\nu}. \quad (1.35)$$

Agora escrevendo $\varphi_{\mu\nu}$ como

$$\varphi_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + iR_{\mu\nu}, \quad (1.36)$$

onde T e R são campos reais anti-simétricos e sendo $R = \tilde{T}$, teremos:

$$\varphi_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + i\tilde{T}_{\mu\nu}. \quad (1.37)$$

Esta equação nos mostra explicitamente que o tensor $\varphi_{\mu\nu}$ tem seis componentes independentes apesar de ser um tensor de segundo rank complexo.

1.3.2 Acoplamento com campos de gauge

Agora tentaremos acoplar o campo complexo auto-dual $\varphi_{\mu\nu}$ com o campo de gauge A_μ , considerando-o como um campo de matéria (23). Para isso exigiremos que sobre uma transformação de gauge abeliana o campo A_μ transforme-se como:

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \omega, \quad (1.38)$$

e o campo anti-simétrico $\varphi_{\mu\nu}$ transforma-se como um campo de matéria de acordo com

$$\begin{aligned} \delta\varphi_{\mu\nu} &= i\omega\varphi_{\mu\nu} \\ \delta\varphi_{\mu\nu}^* &= -i\omega\varphi_{\mu\nu}^*. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Para a derivada covariante, temos:

$$D_\sigma\varphi_{\mu\nu} = \partial_\sigma\varphi_{\mu\nu} - iA_\sigma\varphi_{\mu\nu} \quad (1.40)$$

sendo

$$\begin{aligned} \delta(D_\sigma\varphi_{\mu\nu}) &= i\omega(D_\sigma\varphi_{\mu\nu}) \\ \delta(D_\sigma\varphi_{\mu\nu})^* &= -i\omega(D_\sigma\varphi_{\mu\nu})^*. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Vamos construir a ação para o campo anti-simétrico de matéria $\varphi_{\mu\nu}$, com a exigência de que esta seja invariante sobre a transformação de gauge abeliana eq.(1.40). A estrutura de Lorentz para $\varphi_{\mu\nu}$ possibilita escrevermos a seguinte ação invariante para a teoria φ^4

$$S = \int d^4x \left[(D\varphi)^* (D\varphi) - \frac{1}{8}q(\varphi^*\varphi)^2 \right]. \quad (1.42)$$

Introduzindo os índices de Lorentz para o campo $\varphi_{\mu\nu}$ e a derivada covariante D_σ na eq.(1.42), podemos perceber que a condição auto-dual complexa e a invariância de gauge fixam a estrutura de Lorentz, permitindo deste modo apenas um termo para a parte cinética e para a parte de auto-interação da ação descrita acima. Devido essa

característica temos a seguinte propriedade;

$$\varphi^{\mu\nu} M \varphi_{\mu\nu}^* = 0, \quad (1.43)$$

onde M representa um operador arbitrário dependendo do potencial de gauge A_μ e das derivadas espaço-temporais ∂_μ . Podemos verificar que a ausência de um termo de massa do tipo $\varphi^{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu}^*$ ($M = 1$) é uma conseqüência da condição auto-dual complexa (23). Para a parte cinética temos o seguinte termo não-nulo na contração de Lorentz

$$\int d^4x (D_\mu \varphi^{\mu\nu}) (D_\sigma \varphi^\sigma{}_\nu)^*, \quad (1.44)$$

e para o termo quadrático de auto interação temos três expressões, sendo porém equivalentes

$$\begin{aligned} & \varphi^{*\mu\nu} \varphi_{\mu\nu}^* \varphi^{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta} \\ & \varphi^{*\mu\nu} \varphi_{\nu\alpha} \varphi^{*\alpha\beta} \varphi_{\beta\mu} \\ & \varphi^{*\mu\nu} \varphi_{\nu\alpha}^* \varphi^{\alpha\beta} \varphi_{\beta\mu}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Vemos então que a condição auto-dual complexa eq.(1.30) fixa unicamente a estrutura de Lorentz da ação invariante eq.(1.42) o que permite escrevermos, juntamente com o termo de Maxwell, a seguinte expressão:

$$S_{inv.} = -\frac{1}{4g^2} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \int d^4x \left[(D_\mu \varphi^{\mu\nu}) (D_\sigma \varphi^\sigma{}_\nu)^* + \frac{1}{8} q \left(\varphi^{*\mu\nu} \varphi_{\mu\alpha} \varphi^{*\alpha\beta} \varphi_{\beta\mu} \right) \right].$$

Agora podemos obter, através da equação acima, a ação de Avdeev e Chizhov (19). Para isso basta escrevermos o campo $\varphi_{\mu\nu}$ em termos de seus componentes ($\varphi_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \tilde{T}_{\mu\nu}$) e considerarmos as seguintes transformações de gauge para os campos

$$\begin{aligned} \delta A_\mu &= \partial_\mu \omega \\ \delta T_{\mu\nu} &= -\omega \tilde{T}_{\mu\nu} \\ \delta \tilde{T}_{\mu\nu} &= \omega T_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (1.46)$$

De forma análoga, para a derivada covariante $D_\sigma \varphi_{\mu\nu}$, temos:

$$D_\sigma \varphi_{\mu\nu} = D_\sigma T_{\mu\nu} + i D_\sigma \tilde{T}_{\mu\nu}, \quad (1.47)$$

com

$$D_\sigma T_{\mu\nu} = \partial_\sigma T_{\mu\nu} + A_\sigma \tilde{T}_{\mu\nu}, \quad D_\sigma \tilde{T}_{\mu\nu} = \partial_\sigma \tilde{T}_{\mu\nu} - A_\sigma \tilde{T}_{\mu\nu}, \quad (1.48)$$

onde

$$\delta(D_\sigma T_{\mu\nu}) = -\alpha(D_\sigma \tilde{T}_{\mu\nu}), \quad \delta(D_\sigma \tilde{T}_{\mu\nu}) = \alpha(D_\sigma T_{\mu\nu}). \quad (1.49)$$

Finalmente, após alguns cálculos, obtemos para a ação invariante a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} S_{inv.} = & -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \int d^4x \left[(D_\mu T^{\mu\nu}) (D_\sigma T^\sigma{}_\nu) + (D_\mu \tilde{T}^{\mu\nu}) (D_\sigma \tilde{T}^\sigma{}_\nu) \right] + \\ & + \frac{1}{4} q \left(2T_{\mu\nu} T^{\nu\rho} T_{\rho\lambda} T^{\lambda\mu} - \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} T^{\mu\nu})^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{inv.} = & \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\lambda T_{\mu\nu})^2 - 2 (\partial_\mu T^{\mu\nu})^2 + 2A_\mu (T^{\mu\lambda} \partial_\lambda \tilde{T}^\lambda{}_\nu - \tilde{T}^{\mu\nu} \partial_\lambda T^\lambda{}_\nu) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (A_\lambda T^{\mu\nu})^2 - 2 (A^\mu T_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{4} q (2T_{\mu\nu} T^{\nu\rho} T_{\rho\lambda} T^{\lambda\mu}) - \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} T^{\mu\nu})^2 \right], \quad (1.50) \end{aligned}$$

com $\delta S = 0$.

A equação acima representa exatamente a ação invariante de Avdeev e Chizhov (19). Deste modo, podemos concluir que, o modelo para o campo tensorial anti-simétrico de matéria pode ser obtido por meio de uma teoria simples e sugestiva do tipo φ^4 satisfazendo a condição auto-dual complexa. Esta nova interpretação do modelo possibilitou fazer a generalização não-abeliana do campo tensorial anti-simétrico de matéria de uma maneira mais simples e elegante (23).

1.3.3 O caso não-abeliano

Para obtermos a generalização não-abeliana da ação invariante eq.(1.50), procedemos como antes e trataremos o campo tensorial anti-simétrico φ como um campo bosônico ordinário de matéria pertencendo a uma certa representação finita $(\lambda^a)^{ij}$ do grupo de Lie G , sendo semi-simples (o índice a representa os geradores de G , enquanto os índices (ij) especificam a representação). A representação dos geradores, através das matrizes hermitianas $(\lambda^a)^{ij}$, são escritos na seguinte forma complexa

$$\lambda^a = \lambda_R^a + i\lambda_I^a, \quad (1.51)$$

sendo λ_R^a e λ_I^a respectivamente, a parte real e imaginária de λ^a . Das relações de comutação temos:

$$[\lambda^a, \lambda^b] = if^{abc} \lambda^c, \quad (1.52)$$

que podem ser escritas na forma

$$\begin{aligned} [\lambda_R^a, \lambda_R^b] - [\lambda_I^a, \lambda_I^b] &= -f^{abc} \lambda_I^c, \\ [\lambda_R^a, \lambda_I^b] - [\lambda_I^a, \lambda_R^b] &= f^{abc} \lambda_R^c, \end{aligned} \quad (1.53)$$

e da condição de hermiticidade $\lambda^a = \lambda^{a\dagger}$

$$\begin{aligned} (\lambda_R^a)^{ij} &= (\lambda_R^a)^{ji}, \\ (\lambda_I^a)^{ij} &= -(\lambda_I^a)^{ji}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

1.3.4 Acoplamento com campos de Yang-Mills

O modelo não abeliano para o campo tensorial anti-simétrico de matéria, satisfazendo a condição auto-dual complexa (23), pode ser representado da seguinte forma:

$$\varphi_{\mu\nu}^i = i\tilde{\varphi}_{\mu\nu}^i, \quad \varphi_{\mu\nu}^i = T_{\mu\nu}^i + i\tilde{T}_{\mu\nu}^i, \quad (1.55)$$

para acoplarmos com os campos de Yang-Mills A_μ^a , segue as seguintes transformações de gauge não-abelianas

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^a &= \partial_\mu \omega^a + f^{abc} A_\mu \omega^c \\ \delta \varphi_{\mu\nu}^i &= i\omega^a (\lambda^a)^{ij} \varphi_{\mu\nu}^j \\ \delta \varphi_{\mu\nu}^{\dagger i} &= -i\omega^a \varphi_{\mu\nu}^{\dagger j} (\lambda^a)^{ij}. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Em analogia com o caso abeliano, temos para a derivada covariante a seguinte transformação:

$$(D_\sigma \varphi_{\mu\nu})^i = \partial_\sigma \varphi_{\mu\nu}^i - iA_\sigma^a (\lambda^a)^{ij} \varphi_{\mu\nu}^j, \quad (1.57)$$

com

$$\begin{aligned} \delta (D_\sigma \varphi_{\mu\nu})^i &= i\omega^a (\lambda^a)^{ij} (D_\sigma \varphi_{\mu\nu})^j, \\ \delta (D_\sigma \varphi_{\mu\nu})^{\dagger i} &= -i\omega^a (D_\sigma \varphi_{\mu\nu})^{\dagger j} (\lambda^a)^{ji}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

É fácil vermos, de acordo com a condição auto-dual complexa eq.(1.55), que a seguinte propriedade $\varphi^{\mu\nu} \mathcal{M} \varphi_{\mu\nu}^\dagger = 0$ também é válida para o caso não-abeliano. Desta forma, podemos escrever a seguinte expressão para a ação invariante não-abeliana

$$\begin{aligned}
S_{inv.} = & -\frac{1}{4g^2} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \int d^4x \left[(D_\mu \varphi^{\mu\nu})^i (D_\sigma \varphi^\sigma{}_\nu)^{\dagger i} \right. \\
& \left. + \frac{1}{8} q \left(\varphi^{\dagger\mu\nu i} \varphi_{\mu\alpha}^i \varphi^{\dagger\alpha\beta j} \varphi_{\beta\mu}^j \right) \right], \tag{1.59}
\end{aligned}$$

onde foram incluídos os termos de Yang-Mills.

Agora podemos obter, através da equação acima, a generalização não abeliana da ação de Avdeev e Chizhov (19). Para isso basta escrevermos o campo $\varphi_{\mu\nu}^i$ em termos de seus componentes $(T_{\mu\nu}^i, \tilde{T}_{\mu\nu}^i)$ eq.(1.55) e considerarmos as seguintes transformações

$$\begin{aligned}
\delta A_\mu^a &= \partial_\mu \omega^a + f^{abc} A_\mu^b \omega^c, \\
\delta T_{\mu\nu}^i &= -\omega^a \left((\lambda_R^a)^{ij} \tilde{T}_{\mu\nu}^i + (\lambda_I^a)^{ij} T_{\mu\nu}^j \right), \\
\delta \tilde{T}_{\mu\nu}^i &= \omega^a \left((\lambda_R^a)^{ij} T_{\mu\nu}^j - (\lambda_I^a)^{ij} \tilde{T}_{\mu\nu}^j \right). \tag{1.60}
\end{aligned}$$

Devido a representação complexa dos geradores eq.(1.51), as transformações para as componentes do campo de matéria apresentam uma mistura não trivial das componentes quirais (T, \tilde{T}) do campo auto-dual complexo φ , levando desta forma a generalização não-abeliana das transformações quirais de Avdeev e Chizhov.

Para a derivada covariante eq.(1.57) temos :

$$(D_\sigma \varphi_{\mu\nu})^i = (D_\sigma T_{\mu\nu}^i + i(D_\sigma \tilde{T}_{\mu\nu}))^i \tag{1.61}$$

sendo

$$\begin{aligned}
(D_\sigma T_{\mu\nu})^i &= \partial_\sigma T_{\mu\nu}^i + A_\sigma^a (\lambda_I^a)^{ij} T_{\mu\nu}^j + A_\sigma^a (\lambda_R^a)^{ij} \tilde{T}_{\mu\nu}^j, \\
(D_\sigma \tilde{T}_{\mu\nu})^i &= \partial_\sigma \tilde{T}_{\mu\nu}^i + A_\sigma^a (\lambda_I^a)^{ij} \tilde{T}_{\mu\nu}^j - A_\sigma^a (\lambda_R^a)^{ij} T_{\mu\nu}^j. \tag{1.62}
\end{aligned}$$

com as seguintes transformações

$$\begin{aligned}
\delta(D_\sigma T_{\mu\nu})^i &= -c^a \left((\lambda_R^a)^{ij} (D_\sigma \tilde{T}_{\mu\nu})^j + (\lambda_I^a)^{ij} (D_\sigma T_{\mu\nu})^j \right), \\
\delta(D_\sigma \tilde{T}_{\mu\nu})^i &= c^a \left((\lambda_R^a)^{ij} (D_\sigma T_{\mu\nu})^j - (\lambda_I^a)^{ij} (D_\sigma \tilde{T}_{\mu\nu})^j \right). \tag{1.63}
\end{aligned}$$

Deste modo, a ação invariante eq.(1.59) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
S_{inv.} &= -\frac{1}{4g^2} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F^{\alpha\mu\nu} \\
&\quad - \int d^4x \left[(D_\mu T^{\mu\nu})^i (D_\sigma T_\nu^\sigma)^i + (D_\mu \tilde{T}^{\mu\nu})^i (D_\sigma \tilde{T}_\nu^\sigma)^i \right. \\
&\quad \left. + \frac{q}{4} \left(2(T_{\mu\nu}^i T^{i\nu\rho})^2 - \frac{1}{2}(T_{\mu\nu}^i T^{i\mu\nu})^2 \right) \right] \tag{1.64}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{inv.} &= -\frac{1}{4g^2} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F^{\alpha\mu\nu} + \int d^4x \left(\frac{1}{2}(\partial_\lambda T_{\mu\nu})^2 - 2(\partial_\mu T^{\mu\nu})^2 \right) \\
&\quad - 2 \int d^4x A_\mu^a \left((\partial_\sigma T^{\sigma\nu}) \lambda_R^a \tilde{T}_\nu^\mu - (\partial_\sigma \tilde{T}^{\sigma\nu}) \lambda_R^a T_\nu^\mu \right) \\
&\quad - 2 \int d^4x A_\mu^a \left((\partial_\sigma T^{\sigma\nu}) \lambda_R^a \tilde{T}_\nu^\mu - (\partial_\sigma \tilde{T}^{\sigma\nu}) \lambda_R^a T_\nu^\mu \right) \\
&\quad + \int d^4x A_\mu^a A_\sigma^b \left(T_{\mu\nu} \lambda_I^a \lambda_I^b T_\nu^\sigma + T^{\mu\nu} \lambda_I^a \lambda_R^b \tilde{T}_\nu^\sigma \right) \\
&\quad - \int d^4x A_\mu^a A_\sigma^b \left(\tilde{T}^{\mu\nu} \lambda_R^a \lambda_I^b T_\nu^\sigma + \tilde{T}^{\mu\nu} \lambda_R^a \lambda_R^b \tilde{T}_\nu^\sigma \right) \\
&\quad + \int d^4x A_\mu^a A_\sigma^b \left(\tilde{T}^{\mu\nu} \lambda_I^a \lambda_I^b \tilde{T}_\nu^\sigma - \tilde{T}^{\mu\nu} \lambda_I^a \lambda_R^b T_\nu^\sigma \right) \\
&\quad + \int d^4x A_\mu^a A_\sigma^b \left(T^{\mu\nu} \lambda_R^a \lambda_I^b \tilde{T}_\nu^\sigma - T^{\mu\nu} \lambda^{\mu\nu} \lambda_R^a \lambda_R^b T_\nu^\sigma \right) \\
&\quad - \frac{q}{4} \int d^4x \left(2(T_{\mu\nu} T^{\nu\rho})^2 - \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} T^{\mu\nu})^2 \right), \tag{1.65}
\end{aligned}$$

onde a seguinte notação implícita $T \lambda_R^a \tilde{T} = T^i (\lambda_R^a)^{ij} \tilde{T}^j$, etc..., foi usada.

A expressão (1.65) representa assim a generalização não-abeliana do modelo de Avdeev e Chizhov. Diferentemente do caso abeliano eq.(1.50), podemos observar a presença do tensor de Levi-Civita $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ no termo quártico de interação ($AATT$) com os respectivos campos.

O modelo de gauge abeliano para o campo tensorial anti-simétrico de matéria, proposto por Avdeev e Chizhov (19), pode ser interpretado com uma teoria do tipo $\lambda\varphi^4$ de um campo tensorial anti-simétrico complexo, obedecendo uma condição de auto-dualidade complexa. Esta formulação permite obtermos de uma maneira simples e elegante a generalização não-abeliana da ação de Avdeev-Chizhov.

2 GERAÇÃO DE MASSA PARA CAMPOS TENSORIAIS ANTI-SIMÉTRICOS DE MATÉRIA

2.1 Introdução

No capítulo anterior estudamos algumas propriedades do campo tensorial anti-simétrico de matéria no modelo de gauge abeliano, proposto inicialmente por Avdeev e Chizhov (19). O modelo apresentou liberdade assintótica da constante de acoplamento de calibre, um resultado importante por se tratar de uma teoria de campos abeliana. A quantização foi realizada no setor longitudinal, obtendo-se soluções do tipo ondas planas, sendo representada no espaço dos momentos (20). Além disso, vimos que o modelo pode ser obtido por meio de uma teoria denominada $\lambda\varphi^4$ de um campo tensorial anti-simétrico complexo obedecendo uma condição de auto-dualidade complexa ($\varphi_{\mu\nu} = i\tilde{\varphi}_{\mu\nu}$) (23), válida no espaço tempo de Minkowski. Desta forma, a ação de Avdeev e Chizhov pode ser reproduzida de um modo mais simples como também a generalização do modelo para o caso não-abeliano.

Neste capítulo apresentaremos os resultados relacionados à geração de massa para o campo tensorial anti-simétrico de matéria no modelo de gauge abeliano. Em virtude da simetria de gauge, vimos que termos do tipo $M^2 T_{\mu\nu} \tilde{T}^{\mu\nu}$ e $M^2 T_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$ não podem ser introduzidos na ação de Avdeev e Chizhov eq.(1.1). Entretanto, mostraremos que o campo tensorial de matéria $T_{\mu\nu}$ pode adquirir massa através de dois mecanismos. O primeiro, denominado quebra espontânea de simetria (26), consiste em acoplarmos o campo de matéria $T_{\mu\nu}$ com um campo escalar complexo ϕ , no modelo de Higgs. O surgimento de termos topológicos também pode ser observado relaxando-se a simetria de paridade para o campo escalar. O segundo, denominado geração de massa topológica (27), consiste em acoplarmos o campo de matéria $T_{\mu\nu}$ com um campo vetorial complexo B_μ , com um

termo de acoplamento incluindo-se um termo topológico. O cálculo dos propagadores de Feynman nos revela que o campo de matéria $T_{\mu\nu}$ adquire pólo massivo, podendo ser comparado a eq.(1.14), na ação de Avdeev e Chizhov. Também é analisado a influência de termos cinéticos adicionais, construídos com o campo B_μ , no cálculo do propagador causal para o campo de matéria.

A análise desses resultados será de extrema importância, pois possibilitará a generalização deste mecanismo para o caso não-abeliano. A geração de massa para o campo tensorial anti-simétrico de matéria no caso não-abeliano será tratado no próximo capítulo, constituindo-se assim, em um dos resultados do nosso trabalho.

2.2 Quebra espontânea de simetria

A energia de um sistema físico muitas vezes é representada através de uma hamiltoniana, sendo esta invariante sobre certos grupos de simetria (rotação, translação, etc). Na teoria de campos o vácuo descreve o estado de energia mínima de um sistema, ao atingir esse estado perde-se com isso a sua simetria. Entretanto um sistema físico pode chegar a possuir infinitos vácuos representando o mesmo estado fundamental, neste caso não temos um vácuo privilegiado, todos são equivalentes e interligados entre si através de certas transformações. Assim podemos dizer que existe uma simetria associada a degenerescência do estado de vácuo, a escolha de um determinado vácuo faz com que esta simetria seja desfeita, sendo conhecido como quebra espontânea de simetria.

Vale ressaltar que embora a simetria do vácuo seja quebrada o hamiltoniano mantém-se invariante. Esta propriedade torna-se importante pelo fato de que certas partículas antes impedidas de terem massa pela restrição imposta as simetrias de sua lagrangeana, podem agora adquirir massa em virtude da quebra espontânea de simetria. Em contrapartida esse mecanismo quando aplicado em certos campos também prevê o surgimento de partículas não-massivas, os bósons de Goldstone, não encontrados ainda na natureza.

Esses bósons de Goldstone surgem em simetrias de gauge do tipo global onde o parâmetro da transformação é constante. A quebra espontânea realizada nessa simetria é discutida no modelo de Goldstone. Já em teorias de calibre onde a simetria de gauge é do tipo local, cujo parâmetro da transformação depende das coordenadas do espaço-tempo, não surgem bósons de Goldstone. Entretanto o campo de calibre adquire massa, fato que ocorre com o campo vetorial de gauge não-massivo, neste caso a quebra espontânea de simetria é estudada no modelo de Higgs. O modelo de Higgs é um dos

ingredientes principais para a construção do modelo de Weinberg-Salam que descreve as interações eletrofracas.

O exemplo clássico da quebra espontânea de simetria é o ferromagneto de Heisenberg. A hamiltoniana do modelo de Heisenberg é invariante por rotações, mas o mesmo não acontece com o estado de menor energia, quando todos os spins estão alinhados numa determinada direção. Como a direção do alinhamento é arbitrária, o vácuo é infinitamente degenerado. Para estudarmos as propriedades do sistema temos de escolher um desses vácuos e então a simetria é quebrada.

Nas seguintes sub-seções apresentaremos os resultados relacionados à geração de massa para o campo tensorial anti-simétrico de matéria através da quebra espontânea de simetria utilizando o modelo de Higgs.

2.2.1 A ação de Avdeev e Chizhov

Para analisarmos o mecanismo de geração de massa para o campo tensorial anti-simétrico de matéria $T_{\mu\nu}$ consideraremos o modelo $\lambda\varphi^4$ construído para um campo tensorial anti-simétrico complexo $\varphi_{\mu\nu}$ que obedece uma condição de auto-dualidade complexa ($\varphi_{\mu\nu} = i\tilde{\varphi}_{\mu\nu}$), válida no espaço-tempo de Minkowski. Neste modelo o campo tensorial de matéria complexo pode ser acoplado ao campo de gauge axial e aos espinores de Dirac numa forma mais compacta do que originalmente proposto por Avdeev e Chizhov (19). A ação, construída com o campo tensorial complexo, tem a seguinte forma:

$$S_{inv} = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4}g^2 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + h\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu A_\mu\psi - (D_\mu\varphi^{\mu\nu})^\dagger(D^\sigma\varphi_{\sigma\nu}) - \frac{q}{8}(\varphi^{\dagger\mu\nu}\varphi_{\nu\alpha}\varphi^{\dagger\alpha\beta}\varphi_{\beta\mu}) + \frac{1}{2}y\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}(\varphi^{\dagger\mu\nu} + \varphi^{\mu\nu})\psi \right\}. \quad (2.1)$$

sendo invariante sob as transformações de gauge

$$\begin{aligned} \delta A_\mu &= \partial_\mu\omega, & \delta\psi &= -ih\omega\gamma_5\psi \\ \delta\bar{\psi} &= -ih\omega\bar{\psi}\gamma_5, & \delta\varphi_{\mu\nu} &= 2ih\omega\varphi_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

e sob as transformações discretas de paridade (\mathcal{P}) e conjugação de carga (\mathcal{C}):

i) Paridade \mathcal{P}

$$\begin{aligned}
 x &\rightarrow x_p = (x^0, -x^i), & i &= 1, 2, 3 \\
 \psi &\rightarrow \psi^p = \gamma^0 \psi, \\
 A_0 &\rightarrow A_0^p = -A_0, & A_i &\rightarrow A_i^p = A_i, \\
 \varphi_{0i} &\rightarrow \varphi_{0i}^p = -\varphi_{0i}^\dagger, & \varphi_{ij} &\rightarrow \varphi_{ij}^p = \varphi_{ij}^\dagger.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

ii) Conjugação de carga \mathcal{C}

$$\begin{aligned}
 \psi &\rightarrow \psi^c = C\bar{\psi}^T, & C &= i\gamma^0\gamma^2, \\
 A_\mu &\rightarrow A_\mu^c = A_\mu, \\
 \varphi_{\mu\nu} &\rightarrow \varphi_{\mu\nu}^c = -\varphi_{\mu\nu}.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.2.2 Acoplamento entre os campos de matéria e escalar

Considere a seguinte ação, descrita para o campo escalar complexo $\phi = \phi_1 + i\phi_2$, no modelo de Higgs

$$S_{inv}(\phi) = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi + V(\phi) \right), \tag{2.5}$$

onde $V(\phi)$ representa o potencial de Higgs

$$V(\phi) = -\frac{1}{2} \mu^2 \phi^* \phi + \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi)^2. \tag{2.6}$$

Verifica-se diretamente que a ação (2.5) é invariante sob as seguintes transformações:

$$\begin{aligned}
 \delta A_\mu &= \partial_\mu \omega, \\
 \delta \phi &= iq\omega \phi.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Agora construiremos o acoplamento entre o campo auto-dual complexo $\varphi_{\mu\nu}$ e o campo escalar complexo ϕ . Nos limitaremos apenas a interações renormalizáveis por power-counting, invariantes de gauge e simétricas sob as transformações discretas de paridade e conjugação de carga, descritas em (2.2) e (2.3), respectivamente. Como estamos interessados na geração de massa para o campo de matéria, consideraremos apenas os termos quadráticos que podem ser obtidos com $\varphi_{\mu\nu}$. Entretanto, da condição de auto-dualidade complexa eq.(1.30) e das propriedades do tensor de Levi-Civita, no espaço-tempo de Minkowski obtém-se:

$$\varphi_{\mu\nu}^* \varphi^{\mu\nu} = 0. \quad (2.8)$$

Assim o termo quadrático mais geral que podemos construir com $\varphi_{\mu\nu}$ acoplado com o campo escalar complexo ϕ e renormalizável por power-counting tem a seguinte forma:

$$\int d^4x \left(a \varphi^{*\mu\nu} \varphi_{\mu\nu}^* \phi + b \varphi^{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu} \phi + c \varphi^{*\mu\nu} \varphi_{\mu\nu}^* \phi \phi + d \varphi^{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu} \phi \phi + c.c \right), \quad (2.9)$$

onde a, b, c e d são constantes arbitrárias e $c.c$ está para o termo complexo conjugado, de modo a tornar (2.9) real. Vale ressaltar que o tensor auto-dual $\varphi_{\mu\nu}$, descrito no modelo $\lambda\varphi^4$, possui dimensão canônica igual a um. Este mesmo valor também pode ser observado para o campo escalar complexo no modelo de Higgs em quatro dimensões.

A condição de invariância de gauge nos dá quatro diferentes transformações de gauge para o campo escalar, com cargas $\pm 2h$ e $\pm 4h$. Isso significa que apenas um termo de acoplamento na eq.(2.9) pode ser adicionado a lagrangeana (2.1) por vez, resultando assim em quatro possibilidades de investigação de massa para o campo de matéria $T_{\mu\nu}$.

A condição de invariância sob paridade nos dá para o termo quadrático $\varphi_{\mu\nu} \varphi^{\mu\nu}$ a seguinte transformação:

$$\varphi_{\mu\nu} \varphi^{\mu\nu} \rightarrow \varphi_{\mu\nu}^* \varphi^{*\mu\nu}. \quad (2.10)$$

Além disso, para fazermos todos os termos na eq.(2.9) invariantes sob paridade as constantes a, b, c , e d devem ser reais e o campo escalar complexo ϕ deve se transformar como:

$$\phi \rightarrow \phi^*. \quad (2.11)$$

Isso faz com que $\phi_1 \rightarrow \phi_1$ e $\phi_2 \rightarrow -\phi_2$, mostrando que ϕ_2 é um pseudo-escalar.

2.2.3 Geração de massa

Nesta seção analisaremos a geração de massa para o campo tensorial anti-simétrico de matéria $T_{\mu\nu}$ através da quebra espontânea de simetria descrita no modelo de Higgs. Primeiramente voltemos nossa atenção para os termos de interação dados na eq.(2.9) com a simetria de paridade preservada. Como vimos em (2.6) o potencial de Higgs é dado por:

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2 \phi^* \phi + \frac{\lambda}{4}(\phi^* \phi)^2.$$

O estado fundamental é obtido para os valores de ϕ que minimizam o potencial, ou seja, $\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$. Portanto o mínimo ocorre em

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = v^2 ,$$

onde

$$v = \pm(\mu^2/\lambda)^{1/2}. \quad (2.12)$$

Em teoria de campos o estado fundamental refere-se ao valor esperado dos campos no vácuo. Assim para o campo escalar complexo, temos:

$$|\langle 0|\phi|0\rangle|^2 = v^2. \quad (2.13)$$

Além disso a simetria de paridade admite o seguinte valor esperado para os campos ϕ_1 e ϕ_2

$$\begin{aligned} \langle 0|\phi_1|0\rangle &= v \\ \langle 0|\phi_2|0\rangle &= 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde o valor nulo para ϕ_2 ocorre por este ser um pseudo-escalar. Devido a esta condição podemos escrever o campo complexo ϕ redefinindo ϕ_1 na forma $\phi_1 = \phi'_1 + v$, o que resulta em:

$$\phi = v + \phi'_1 + i\phi_2. \quad (2.15)$$

É fácil ver que os termos de interação eq.(2.9), em termos de $T_{\mu\nu}$, assumem a seguinte forma:

i) ϕ com carga $+4h$

$$\int d^4x 4a (T^{\mu\nu}T_{\mu\nu}\phi'_1 + T^{\mu\nu}\tilde{T}_{\mu\nu}\phi_2 + vT^{\mu\nu}T_{\mu\nu}). \quad (2.16)$$

ii) ϕ com carga $-4h$

$$\int d^4x 4b (T^{\mu\nu}T_{\mu\nu}\phi'_1 - T^{\mu\nu}\tilde{T}_{\mu\nu}\phi_2 + vT^{\mu\nu}T_{\mu\nu}). \quad (2.17)$$

iii) ϕ com carga $+2h$

$$\int d^4x 4c ((\phi_1'^2 - \phi_2^2)T^{\mu\nu}T_{\mu\nu} + 2vT^{\mu\nu}T_{\mu\nu}\phi'_1 + v^2T^{\mu\nu}T_{\mu\nu})$$

$$+ \int d^4x 4c (2vT^{\mu\nu}\tilde{T}_{\mu\nu}\phi_2 + 2T^{\mu\nu}\tilde{T}_{\mu\nu}\phi'_1\phi_2) \quad (2.18)$$

iv) ϕ com carga $-2h$

$$\begin{aligned} & \int d^4x 4d ((\phi'_1{}^2 - \phi_2{}^2)T^{\mu\nu}T_{\mu\nu} + 2vT^{\mu\nu}T_{\mu\nu}\phi'_1 + v^2T^{\mu\nu}T_{\mu\nu}) \\ & - \int d^4x 4d (2vT^{\mu\nu}\tilde{T}_{\mu\nu}\phi_2 + 2T^{\mu\nu}\tilde{T}_{\mu\nu}\phi'_1\phi_2). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Agora examinaremos cuidadosamente cada tipo de interação acima. Nas interações *(i)* e *(ii)*, para um valor fixo dos parâmetros a e b , respectivamente, o termo de massa para $T_{\mu\nu}$ possui dependência linear em v , isto é

$$m^2 = 4av, \quad m^2 = 4bv, \quad (2.20)$$

o que torna os produtos $\pm va$ e $\pm vb$ não positivamente definidos, veja (3.14), resultando assim na presença de *táquions* no modelo. Então somos levados a admitir que as duas primeiras interações não são fisicamente aceitáveis. Nas interações *(iii)* e *(iv)* para um valor fixo dos parâmetros c e d , respectivamente, o termo de massa para $T_{\mu\nu}$ possui dependência em v^2 , isto é

$$m^2 = 4cv^2, \quad m^2 = 4dv^2, \quad (2.21)$$

de maneira que não temos problemas com a escolha do vácuo. Para evitarmos *táquions* no modelo c ou d devem ser positivos e conseqüentemente o campo tensorial anti-simétrico de matéria adquire massa $m = 4|v|\sqrt{c}$ para ϕ com carga $2h$ e massa $m = 4|v|\sqrt{d}$ para ϕ com carga $-2h$. Cada pólo do campo tensorial anti-simétrico de matéria é livre de *táquions* desde que aceitemos somente dois estados de vácuos compatíveis com a simetria de paridade.

2.2.4 Geração de termos topológicos

Agora examinaremos a situação em que a simetria de paridade é desprezada. Para simplificarmos a análise consideraremos que as constantes a, b, c e d , nos termos de interação eq.(2.9), sejam reais. Com a simetria de paridade relaxada ϕ_1 e ϕ_2 são supostamente escalares. Isso faz com que o valor esperado do vácuo de ϕ_2 seja diferente de zero, ou seja

$$\begin{aligned} \langle 0|\phi_2|0\rangle &= v_2 \\ \langle 0|\phi_1|0\rangle &= v_1. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Portanto o valor de ϕ que minimiza o potencial ocorre em :

$$v_1^2 + v_2^2 = \mu^2/\lambda. \quad (2.23)$$

Isso por sua vez, modifica todos os termos de interação em (i) – (iv). Como exemplo, considere o termo de interação (i)

$$\int d^4x \, 4a (T^{\mu\nu}\tilde{T}_{\mu\nu}\phi'_2 + T^{\mu\nu}T_{\mu\nu}\phi'_1 + v_1T^{\mu\nu}T_{\mu\nu} + v_2T^{\mu\nu}\tilde{T}_{\mu\nu}). \quad (2.24)$$

Além do termo de massa, verificamos o surgimento de um termo topológico

$$\int d^4x \, 4av_2T^{\mu\nu}\tilde{T}_{\mu\nu}, \quad (2.25)$$

ele é topológico no sentido de ser independente da métrica, ou seja

$$\int_{\mathcal{M}} T_{\mu\nu}\tilde{T}^{\mu\nu} \sqrt{|g|} d^4x = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} T_{\mu\nu} T_{\alpha\beta} d^4x, \quad (2.26)$$

onde \mathcal{M} é uma variedade Lorentziana. Um mecanismo similar ocorre em três dimensões com o acoplamento não mínimo, onde o termo de Chern-Simons é gerado através da quebra espontânea de simetria, por meio da derivada covariante (36),(37). Note que, com a simetria de paridade sendo desprezada, a teoria pode apresentar estados de *táquions*. Para uma melhor compreensão deste fato aconselha-se uma verificação dos outros termos de interação.

Vimos então que o mecanismo de Higgs é capaz de gerar massa para o campo tensorial anti-simétrico de matéria por meio do campo tensorial complexo $\varphi_{\mu\nu}$ seguido de uma condição auto-dual complexa que impede, por sua vez, a representação de um termo massivo para o campo de matéria (23). A simetria de paridade no modelo permite apenas dois tipos de interações fisicamente aceitáveis. Outro resultado interessante vem quando desprezamos a exigência da invariância sob transformação discreta de paridade para o campo escalar complexo. Neste caso obtemos termos massivos e topológicos para o campo de matéria, através da quebra espontânea de simetria. Entretanto os termos de interação podem apresentar estados de *táquions*, o que não é fisicamente aceitável. Diferentemente de (5) onde o termo topológico de Chern-Simons é gerado por meio da derivada covariante no acoplamento não-mínimo, o termo topológico para o campo de matéria é gerado acoplando-se o campo de matéria com o campo escalar complexo.

2.3 Integrais de trajetória

O estudo da quantização dos campos clássicos pode ser feito através do método de quantização canônica, neste caso os campos são tratados como operadores atuando no espaço de Hilbert. As regras de comutação canônica são postuladas para os campos e para o seu momento conjugado, sendo tratado em pontos diferentes do espaço-tempo. Esse método de quantização foi abordado no capítulo 1 na análise do campo tensorial anti-simétrico de matéria $T_{\mu\nu}$, onde as componentes espaciais e temporais do campo foram representadas em termos dos operadores de criação e destruição.

Entretanto o estudo da quantização de campos pode ser feito em uma linguagem bem diferente, conhecida como integral de trajetória, introduzida por Feynman. Nesse novo método o movimento de partículas entre dois pontos pode resultar de uma grande (infinita) variedade de trajetórias clássicas, onde cada uma delas representa a amplitude de transição da partícula entre os dois pontos, levando a noção do propagador $K(q_f t_f ; q_i t_i)$. Dada uma função de onda $\psi(q_i t_i)$ num tempo t_i , o propagador nos dá a correspondente função de onda num tempo posterior t_f , isto é, $\psi(q_f t_f)$. Vale ressaltar que a integração deve ser feita sobre todas as possíveis trajetórias.

O formalismo de integrais de trajetória nos leva aos mesmos resultados obtidos pela quantização canônica, ambas as formulações são equivalentes para a teoria quântica de campos. Entretanto, para alguns sistemas o método canônico torna-se um pouco dispendioso o seu uso. Isso é bem verdade quando tratamos da quantização de campos com vínculos, um problema freqüentemente encontrado em teorias de gauge. Teorias de gauge (não-abelianas) formam hoje a estrutura de muitas teorias físicas modernas, sendo as integrais de trajetória o método mais eficaz e elegante para estudarmos a quantização desses campos.

Nas seguintes sub-seções apresentaremos os resultados referentes à geração de massa para o campo tensorial anti-simétrico de matéria por meio de um mecanismo topológico, através do cálculo dos propagadores de Feynman.

2.3.1 Ação para o campo de matéria

Para analisarmos o mecanismo de geração de massa para o campo tensorial anti-simétrico de matéria $T_{\mu\nu}$ consideraremos o modelo $\lambda\varphi^4$ discutido anteriormente. Neste modelo, introduzimos através de sua ação um termo de acoplamento com um campo vetorial complexo B_μ , incluindo-se um termo topológico. Esse mecanismo é similar ao

proposto por Allen, Bowick and Lahiri (4) onde fizeram uso do termo topológico BF , construído com campos de gauge. A principal diferença entre eles é que, além do termo topológico, usamos também um termo não-topológico ambos construídos com o campo de matéria e o campo vetorial complexo, diferentemente de campos de gauge.

Iniciaremos nossa análise considerando a seguinte ação

$$S = \int d^4x [-(D_\mu B_\sigma)^* (D^\mu B^\sigma) - (D_\mu \varphi^{\mu\nu})^* (D^\sigma \varphi_{\sigma\nu})] + m \int d^4x [B^{\sigma*} D^\mu \varphi_{\mu\sigma} + B^\sigma (D^\mu \varphi_{\mu\sigma})^*], \quad (2.27)$$

onde m é um parâmetro de massa, D_μ representa a derivada covariante, $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$, e B_μ é o campo vetorial complexo

$$B_\mu = B_\mu^{(1)} + iB_\mu^{(2)}. \quad (2.28)$$

A ação possui simetria local $U(1)$, sendo invariante sob as seguintes transformações

$$\begin{aligned} \delta B_\mu &= i\alpha B_\mu, \\ \delta \varphi_{\mu\nu} &= i\alpha \varphi_{\mu\nu}, \\ \delta A_\mu &= \partial_\mu \alpha. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Escrevendo a ação (2.27) em termos das componentes dos campos, teremos:

$$\begin{aligned} S \approx & \int d^4x \left(-\partial_\mu B_\sigma^{(1)} \partial^\mu B^{(1)\sigma} - \partial_\mu B_\sigma^{(2)} \partial^\mu B^{(2)\sigma} \right) + J_\sigma^{(1)} B^{(1)\sigma} + J_\sigma^{(2)} B^{(2)\sigma} \\ & + \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\sigma T_{\mu\nu} \partial^\sigma T^{\mu\nu} - 2\partial^\mu T_{\mu\nu} \partial_\sigma T^{\sigma\nu} \right) + \frac{1}{2} J_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \\ & + 2m \int d^4x \left(B^{(1)\sigma} \partial^\mu T_{\mu\sigma} + B^{(2)\sigma} \partial^\mu \tilde{T}_{\mu\sigma} \right), \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde consideramos somente os termos bi-lineares e os termos envolvendo fontes externas. Observe que o último termo, relacionado ao parâmetro de massa m , possui uma parte topológica e uma não-topológica, construídos com as componentes dos campos.

As equações do movimento para os campos $T_{\mu\nu}$ e B_μ podem ser facilmente calculadas pelo princípio da ação mínima, ($\delta S = 0$), obtendo-se assim

$$\begin{aligned} \partial^2 B^{(1)\sigma} + m \partial_\mu T^{\mu\sigma} + \frac{1}{2} J^{(1)\sigma} &= 0 \\ \partial^2 B^{(2)\sigma} + m \partial_\mu \tilde{T}^{\mu\sigma} + \frac{1}{2} J^{(2)\sigma} &= 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\partial^2 T^{\rho\sigma}(x) - 2\delta_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \partial^\mu \partial_\lambda T^{\lambda\nu}(x) + m \delta_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \partial^\mu B^{\nu(1)}(x) + m \varepsilon^{\rho\sigma\mu\lambda} \partial_\mu B_\lambda^{(2)}(x) - \frac{1}{2} J^{\rho\sigma}(x) = 0.$$

2.3.2 Propagadores

Para o cálculo dos propagadores de Feynman, usaremos o gerador funcional das funções de Green W , com a seguinte transformada de Legendre

$$W[T_{\mu\nu}, B_\mu^{(i)}] = \Gamma[J_{\mu\nu}, J_\mu^{(i)}] - \frac{1}{2} \int dx'^4 J_{\mu\nu}(x') T^{\mu\nu}(x') - \int dx'^4 J_\mu^{(i)}(x') B^{\mu(i)}(x'), \quad (2.32)$$

onde as amplitudes de transição vácuo-a-vácuo são definidas por:

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu}(x) T_{\rho\sigma}(y) \rangle &= -i \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta J_{\mu\nu}(x) \delta J_{\rho\sigma}(y)} \Big|_{J=0} \\ \langle B_\mu^{(i)}(x) T_{\rho\sigma}(y) \rangle &= -i \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta J_\mu(x) \delta J_{\rho\sigma}(y)} \Big|_{J=0}. \end{aligned}$$

Agora, voltamos nossa atenção para as equações do movimento eq.(2.31), onde obtemos três expressões para a amplitude de transição vácuo-a-vácuo para os campos B_μ e $T_{\mu\nu}$. Elas representam o propagador causal em dois pontos distintos do espaço-tempo, ou seja, as funções de Green de dois pontos

$$\langle \partial^2 B^{(1)\sigma}(x) T_{\alpha\beta}(y) \rangle + m \langle \partial_\mu T^{\mu\sigma}(x) T_{\alpha\beta}(y) \rangle = 0, \quad (2.33)$$

$$\langle \partial^2 B^{(2)\sigma}(x) T_{\alpha\beta}(y) \rangle + m \langle \partial_\mu \tilde{T}^{\mu\sigma}(x) T_{\alpha\beta}(y) \rangle = 0 \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} 2 \langle \partial^2 T^{\rho\sigma}(x) T_{\alpha\beta}(y) \rangle - 4\delta_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \langle \partial^\mu \partial_\lambda T^{\lambda\nu}(x) T_{\alpha\beta}(y) \rangle + 2m\delta_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \langle \partial^\mu B^{(1)\nu}(x) T_{\alpha\beta}(y) \rangle \\ + 2m \varepsilon^{\rho\sigma\mu\lambda} \langle \partial_\mu B_\lambda^{(2)}(x) T_{\alpha\beta}(y) \rangle + i \delta_{\alpha\beta}^{\rho\sigma} \delta^4(x-y) = 0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Como estamos interessados em determinar o propagador para o campo de matéria $T_{\mu\nu}$ devemos eliminar, nas expressões acima, os termos que envolvem os campos $B_\mu^{(1)}$ e $B_\mu^{(2)}$. Isso pode ser feito após algumas manipulações algébricas, obtendo-se assim a seguinte expressão:

$$\partial^2(\partial^2 + m^2) \langle T^{\rho\sigma}(x) T_{\alpha\beta}(y) \rangle = i \delta_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \delta_{\alpha\beta}^{\lambda\nu} \partial^\mu \partial_\lambda \delta^4(x-y) - \frac{i}{2} \partial^2 \delta_{\alpha\beta}^{\rho\sigma} \delta^4(x-y). \quad (2.36)$$

Usando a representação de Fourier para a função delta de Dirac e para o propagador de Feynman

$$\delta^4(x-y) = \frac{1}{(4\pi)^4} \int d^4k e^{ik(x-y)},$$

$$\langle T^{\rho\sigma}(x) T_{\alpha\beta}(y) \rangle = \frac{1}{(4\pi)^4} \int d^4k G_{\alpha\beta}^{\rho\sigma}(k) e^{ik(x-y)},$$

obtemos a seguinte expressão para a função de Green

$$G_{\alpha\beta}^{\rho\sigma}(k) = \frac{i}{(k^2 - m^2)} \Pi_{\alpha\beta}^{\rho\sigma}(k), \quad (2.37)$$

com

$$\Pi_{\alpha\beta}^{\rho\sigma}(k) = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta}^{\rho\sigma} - \frac{1}{k^2} \delta_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \delta_{\alpha\beta}^{\lambda\nu} k^\mu k_\lambda.$$

Observe que o propagador causal para o campo tensorial anti-simétrico de matéria possui pólo massivo como conseqüência do acoplamento entre $T_{\mu\nu}$ e o campo vetorial B_μ , com um parâmetro de massa incluindo-se um termo topológico. Se entretanto compararmos este resultado com o obtido por Avdeev e Chizhov eq.(1.14), veremos que a única diferença está relacionada à massa adquirida pelo campo de matéria.

2.3.3 Construindo uma ação geral

Vamos agora construir uma ação mais geral com os campos B_μ e $T_{\mu\nu}$. Para isso, introduziremos na ação eq.(2.27) mais um termo cinético do tipo $a (D_\mu B^\mu)^* (D_\sigma B^\sigma)$, onde a representa uma constante real a ser determinada e também um termo de massa para B_μ . Verificaremos então como esses termos adicionais afetarão no cálculo do propagador causal para o campo de matéria. A nova ação S assume a seguinte forma

$$\begin{aligned} S = & \int d^4x \left[- (D_\mu B_\sigma)^* (D^\mu B^\sigma) + a (D_\mu B^\mu)^* (D_\sigma B^\sigma) - (D_\mu \varphi^{\mu\nu})^* (D^\sigma \varphi_{\sigma\nu}) \right] \\ & + \int d^4x \left[m (B^{\nu*} D^\mu \varphi_{\mu\nu} + B^\nu (D^\mu \varphi_{\mu\nu})^*) + \mu^2 B_\sigma^* B^\sigma \right]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Escrevendo a ação em termos das componentes dos campos e considerando somente os termos bi-lineares mais fontes obtemos, após alguns cálculos, as seguintes equações do movimento

$$\begin{aligned} \partial^2 B^{(1)\sigma} - a \partial_\mu \partial^\sigma B^{(1)\mu} + \mu^2 B^{(1)\sigma} + m \partial_\mu T^{\mu\sigma} + \frac{1}{2} J^{(1)\sigma} &= 0, \\ \partial^2 B_\sigma^{(2)} - a \partial_\mu \partial^\sigma B^{(2)\mu} + \mu^2 B^{(2)\mu} + m \partial_\mu \tilde{T}^{\mu\sigma} + \frac{1}{2} J^{(2)\sigma} &= 0, \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\partial^2 T^{\rho\sigma}(x) - 2\delta_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \partial^\mu \partial_\lambda T^{\lambda\nu}(x) + m \delta_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \partial^\mu B^{\nu(1)}(x) + m \varepsilon^{\rho\sigma\mu\lambda} \partial_\mu B_\lambda^{(2)}(x) - \frac{1}{2} J^{\rho\sigma}(x) = 0.$$

Observe que as duas primeiras equações acima adquiriram dois novos termos comparadas com as equações (2.31). Entretanto a última equação permaneceu inalterada.

Das equações acima obtemos as seguintes expressões para as amplitudes de transição vácuo-a-vácuo, isto é

$$\begin{aligned}
\langle T_{\mu\nu}(x)T^{\rho\sigma}(y) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int G_{\mu\nu}^{\rho\sigma}(k)e^{ik(x-y)}d^4k, \\
\langle B_{\mu}^{(1)}(x)B^{(1)\nu}(y) \rangle &= \langle B_{\mu}^{(2)}(x)B^{(2)\nu}(y) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int G_{\mu}^{\nu}(k)e^{ik(x-y)}d^4k, \\
\langle B_{\mu}^{(1)}(x)B^{(2)\nu}(y) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int G_{\mu}^{(12)\nu}(k)e^{ik(x-y)}d^4k, \\
\langle B_{\mu}^{(1)}(x)T^{\rho\sigma}(y) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \Gamma_{\mu}^{(1)\rho\sigma}(k)e^{ik(x-y)}d^4k, \\
\langle B_{\mu}^{(2)}(x)T^{\rho\sigma}(y) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \Gamma_{\mu}^{(2)\rho\sigma}(k)e^{ik(x-y)}d^4k,
\end{aligned} \tag{2.40}$$

com

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu}^{\rho\sigma}(k) &= \frac{i(k^2 - \mu^2)}{k^2(k^2 - \mu^2 - m^2)}\Pi_{\mu\nu}^{\rho\sigma}(k), \\
G_{\mu}^{\nu}(k) &= \frac{im^2k_{\sigma}k^{\rho}\delta_{\rho\mu}^{\sigma\nu}}{2k^2(k^2 - \mu^2 - m^2)(k^2 - \mu^2)} - \frac{iak_{\mu}k^{\nu}}{2((1-a)k^2 - \mu^2)(k^2 - \mu^2)} - \frac{i\delta_{\mu}^{\nu}}{2(k^2 - \mu^2)}, \\
G_{\mu}^{(12)\nu} &= \frac{im^2k_{\sigma}k^{\rho}\delta_{\rho\mu}^{\sigma\nu}}{2k^2(k^2 - \mu^2 - m^2)(k^2 - \mu^2)}, \\
\Gamma_{\mu}^{(1)\rho\sigma}(k) &= \frac{-mk^{\nu}\delta_{\mu\nu}^{\rho\sigma}}{2k^2(k^2 - m^2 - \mu^2)}, \\
\Gamma_{\mu}^{(2)\rho\sigma}(k) &= \frac{mk^{\nu}\epsilon_{\mu\nu}^{\rho\sigma}}{2k^2(k^2 - m^2 - \mu^2)}.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

De acordo com as expressões acima, podemos concluir que a presença do termo $a(D_{\mu}B^{\mu})^{*}(D_{\sigma}B^{\sigma})$, afeta somente a amplitude $G_{\mu}^{\nu}(k)$. O propagador para o campo tensorial de matéria tem um pólo massivo que não depende do parâmetro a .

Vimos então que é possível gerar massa para o campo tensorial anti-simétrico de matéria por meio de um mecanismo topológico de modo a preservar a simetria $U(1)$ no modelo. Nesse mecanismo o termo topológico é introduzido através de campo vetorial complexo acoplado ao campo tensorial anti-simétrico complexo seguido de uma condição auto-dual complexa. Esta condição é responsável por tornar o campo de matéria não-massivo. Entretanto é o acoplamento com o campo vetorial que faz com que o propagador para o campo tensorial anti-simétrico de matéria adquira pólo massivo.

3 GERAÇÃO DE MASSA PARA CAMPOS TENSORIAIS ANTI-SIMÉTRICOS DE MATÉRIA - O CASO NÃO-ABELIANO

3.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos os resultados relacionados a geração de massa para o campo tensorial anti-simétrico de matéria para o caso não-abeliano. Para isso utilizaremos a teoria $\lambda\varphi^4$, construída com um campo tensorial anti-simétrico de matéria complexo que obedece uma condição de auto-dualidade complexa (23), no espaço-tempo de Minkowski. Esta condição válida também para o caso não-abeliano não permite a inclusão de termos massivos para o campo de matéria. O modelo possui simetria de gauge local na representação do grupo $SU(N)$ onde foram incluídos os campos de Yang-Mills, com um termo de acoplamento, através da derivada covariante. Além disso consideramos também as simetrias discretas de paridade e conjugação de carga. Neste trabalho veremos que o campo tensorial anti-simétrico de matéria $T_{\mu\nu}$ pode adquirir massa através de dois mecanismos. O primeiro, denominado quebra espontânea de simetria, consiste em acoplarmos o campo de matéria $T_{\mu\nu}$ com um campo escalar complexo ϕ , no modelo de Higgs, com valor esperado no vácuo não-nulo. Ao contrário do mecanismo de Higgs aplicado para o campo de matéria no caso abeliano (26), que permitiu a construção de quatro termos de interação capazes de gerar massa para o campo de matéria, a estrutura do grupo $SU(N)$ permitiu apenas a construção de um termo. Contudo, veremos que, para o caso não-abeliano, esta única interação capaz de gerar massa para o referido campo apresentou estados de vácuo compatíveis com as simetria de gauge, paridade e livre da presença de *táquions*. A obtenção de termos topológicos para o campo de matéria também pôde ser observada se

desprezarmos a condição de simetria sob paridade no modelo. O termo topológico vem acompanhado de um termo massivo que, por sua vez, depende da escolha de um vácuo apropriado a fim de apresentarem somente estados fisicamente aceitáveis, ou seja, sem a presença de *táquions*. O segundo mecanismo, consiste em acoplarmos o campo de matéria $T_{\mu\nu}$ com um campo vetorial complexo B_μ , com um termo de acoplamento incluindo-se um termo topológico. O cálculo dos propagadores de Feynman nos revela que o campo de matéria $T_{\mu\nu}$ adquire pólo massivo, podendo ser comparado ao propagador no modelo de Avdeev e Chizhov (19). Analisamos também a influência de um termo cinético, introduzido na ação, no cálculo do propagador para o campo de matéria. Estes resultados constituem-se assim na generalização do mecanismo de geração de massa topológica para o campo tensorial anti-simétrico de matéria para o caso abeliano (27).

3.2 Quebra espontânea de simetria

3.2.1 A ação não-abeliana para o campo de matéria

No capítulo 1 vimos que o modelo de gauge abeliano de Avdeev e Chizhov pode ser generalizado para uma simetria de gauge não-abeliana com campos de Yang-Mills. Essa generalização foi obtida de uma forma simples considerando-se a teoria $\lambda\varphi^4$, construída com o campo tensorial anti-simétrico de matéria complexo (23). Desta forma o modelo não-abeliano para o campo tensorial anti-simétrico de matéria pode ser representado por:

$$\varphi_{\mu\nu}^i = i\tilde{\varphi}_{\mu\nu}^i, \quad \varphi_{\mu\nu}^i = T_{\mu\nu}^i + i\tilde{T}_{\mu\nu}^i, \quad (3.1)$$

com as seguintes transformações de gauge não-abelianas

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^a &= \partial_\mu \omega^a + f^{abc} A_\mu \omega^c \\ \delta \varphi_{\mu\nu}^i &= i\omega^a (\lambda)^{ij} \varphi_{\mu\nu}^j \\ \delta \varphi_{\mu\nu}^{\dagger i} &= -i\omega^a \varphi_{\mu\nu}^{\dagger j} (\lambda^a)^{ji}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

e para a derivada covariante

$$(D_\sigma \varphi_{\mu\nu})^i = \partial_\sigma \varphi_{\mu\nu}^i - iA_\sigma^a (\lambda^a)^{ij} \varphi_{\mu\nu}^j, \quad (3.3)$$

onde

$$\begin{aligned} \delta(D_\sigma \varphi_{\mu\nu})^i &= i\omega^a (\lambda^a)^{ij} (D_\sigma \varphi_{\mu\nu})^j, \\ \delta(D_\sigma \varphi_{\mu\nu})^{\dagger i} &= -i\omega^a (D_\sigma \varphi_{\mu\nu})^{\dagger j} (\lambda^a)^{ji}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

De acordo com a condição auto-dual complexa eq.(3.1), verifica-se facilmente que a seguinte propriedade $\varphi^{\mu\nu} \mathcal{M} \varphi_{\mu\nu}^\dagger = 0$ também é válida para o caso não-abeliano. Assim a ação invariante para o campo tensorial de matéria complexo assume a forma

$$S_{inv.} = -\frac{1}{4g^2} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \int d^4x \left[(D_\mu \varphi^{\mu\nu})^i (D_\sigma \varphi^\sigma{}_\nu)^{\dagger i} + \frac{1}{8} q \left(\varphi^{\dagger\mu\nu i} \varphi_{\mu\alpha}^i \varphi^{\dagger\alpha\beta j} \varphi_{\beta\mu}^j \right) \right], \quad (3.5)$$

onde foram incluídos os campos de Yang-Mills. Se entretanto, escrevermos o campo $\varphi_{\mu\nu}^i$ em seus componentes $(T_{\mu\nu}^i, \tilde{T}_{\mu\nu}^i)$ eq.(3.1), bem como o termo que envolve a derivada covariante, na ação invariante eq.(3.5), obtemos a expressão (1.65), que representa a generalização não-abeliana do modelo de Avdeev e Chizhov.

3.2.2 O modelo de Higgs não-abeliano

Considere a seguinte ação, descrita para o campo escalar complexo $\phi^i = \phi_1^i + i\phi_2^i$, no modelo de Higgs não-abeliano

$$S_{inv}(\phi) = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + (D_\mu \phi)^{\dagger i} (D^\mu \phi)^i + V(\phi) \right), \quad (3.6)$$

onde $V(\phi)$ representa o potencial de Higgs

$$V(\phi) = -\frac{1}{2} \mu^2 \phi^i \phi^{\dagger i} + \frac{\lambda}{4} (\phi^i \phi^{\dagger i})^2. \quad (3.7)$$

A ação é invariante sob as seguintes transformações de gauge não-abelianas

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^a &= \partial_\mu \omega^a + f^{abc} A_\mu \omega^c \\ \delta \phi^i &= i\omega^a (\lambda)^{ij} \phi^j \\ \delta \phi^{\dagger i} &= -i\omega^a \phi^{\dagger j} (\lambda^a)^{ij}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

sendo a derivada covariante definida por

$$(D_\mu \phi)^i = \partial_\mu \phi^i - iA_\mu^a (\lambda^a)^{ij} \phi^j, \quad (3.9)$$

onde

$$\begin{aligned} \delta (D_\mu \phi)^i &= i\omega^a (\lambda^a)^{ij} (D_\mu \phi)^j, \\ \delta (D_\mu \phi)^{\dagger i} &= -i\omega^a (D_\mu \phi_{\mu\nu})^{\dagger j} (\lambda^a)^{ji}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Devemos agora construir o acoplamento entre o campo auto-dual complexo $\varphi_{\mu\nu}^i$ e o campo escalar ϕ^i . Como no caso abeliano consideraremos somente as interações renormalizáveis por power-counting, invariantes de gauge e simétricas sob as transformações discretas de paridade e conjugação de carga. Além disso os termos de interação devem ser quadráticos em $\varphi_{\mu\nu}^i$ já que estamos interessados em obter massa para o campo de matéria. Isso faz com que a seguinte relação seja levada em conta $\varphi_{\mu\nu}^{\dagger i} \varphi^{i\mu\nu} = 0$. Desta forma o termo mais geral que podemos construir com $\varphi_{\mu\nu}^i$ acoplado ao campo escalar complexo ϕ^i , de modo a satisfazer as condições acima, tem a seguinte forma:

$$\int d^4x \left(a \varphi_{\mu\nu}^{\dagger i} \phi^i \varphi^{\mu\nu \dagger j} \phi^j + c.c \right), \quad (3.11)$$

onde a é uma constante arbitrária e $c.c$ está para o termo complexo conjugado, de modo a tornar (3.11) real.

É importante destacarmos que, diferentemente do caso abeliano, que admitia quatro tipos de acoplamentos, temos aqui apenas um termo possível de acoplamento. Isso se justifica pela fato das componentes do campos $\varphi_{\mu\nu}^i$ e ϕ^i estarem organizadas na forma de multipletos, devido a estrutura do espaço interno na representação do grupo não-abeliano $SU(N)$. Entretanto, veremos na próxima seção que este possível acoplamento não apresenta problemas quanto a escolha do vácuo, ao contrário do caso abeliano, onde alguns estados de vácuo admitiam a presença de táquions no modelo, tornando algumas interações fisicamente não aceitáveis.

A condição de invariância sob paridade não é afetada pela simetria interna do grupo em questão de modo que a seguinte transformação para o termo quadrático $\varphi_{\mu\nu} \varphi^{\mu\nu}$ é válida para o caso não-abeliano

$$\varphi_{\mu\nu}^i \varphi^{j\mu\nu} \rightarrow \varphi_{\mu\nu}^{\dagger i} \varphi^{\dagger j\mu\nu}. \quad (3.12)$$

Além disso, para que todos os termos na eq.(3.11) sejam invariantes sob paridade a constante a deve ser real e o campo escalar complexo ϕ deve se transformar como:

$$\phi \rightarrow \phi^\dagger. \quad (3.13)$$

Isso faz com que os campos $\phi_1^i \rightarrow \phi_1^i$ e $\phi_2^i \rightarrow -\phi_2^i$, mostrando que os campos ϕ_2^i sejam pseudo-escalares.

3.2.3 Geração de massa

Nesta seção analisaremos a geração de massa para o campo tensorial anti-simétrico de matéria $T_{\mu\nu}$ através da quebra espontânea de simetria, descrita no modelo de Higgs para o caso não-abeliano. Primeiramente voltemos nossa atenção para os termos de interação dados na eq.(3.11) com a simetria de paridade preservada. Como vimos em (3.7) o potencial de Higgs é dado por:

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^{\dagger i}\phi^i + \frac{\lambda}{4}(\phi^{\dagger i}\phi^i)^2.$$

O estado fundamental é obtido para os valores de ϕ^i que minimizam o potencial, ou seja, $\frac{\partial V}{\partial \phi^i} = 0$. Portanto o mínimo ocorre em

$$\phi_1^{i2} + \phi_2^{i2} = v^2,$$

onde

$$v = \pm(\mu^2/\lambda)^{1/2}. \quad (3.14)$$

Em teoria de campos o estado fundamental refere-se ao valor esperado dos campos no vácuo. Assim para o campo escalar complexo, temos:

$$|\langle 0|\phi|0\rangle|^2 = v^2. \quad (3.15)$$

Além disso, a simetria de paridade admite o seguinte valor esperado para os campos ϕ_1^i e ϕ_2^i

$$\begin{aligned} \langle 0|\phi_1^i|0\rangle &= v^i \\ \langle 0|\phi_2^i|0\rangle &= 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde o valor nulo para ϕ_2^i , ocorre por este ser um pseudo-escalar. Devido a esta condição, podemos escrever o campo complexo ϕ redefinindo ϕ_1^i na forma $\phi_1^i = \rho_1^i + v^i$, o que resulta em:

$$\phi^i = v^i + \rho_1^i + i\phi_2^i. \quad (3.17)$$

Agora examinaremos o termo de interação eq.(3.11). Para isso consideraremos os campos ϕ^i e φ^i escritos em termos de seus componentes reais. Após alguns cálculos chegamos a seguinte expressão:

$$\int d^4x 4a \left((v^i T_{\mu\nu}^i)^2 + (\rho^i T_{\mu\nu}^i)^2 - (\phi_2^i T_{\mu\nu}^i)^2 \right)$$

$$+ \int d^4x 4a \left(2v^i T_{\mu\nu}^i \rho^j T^{\mu\nu j} + 2v^i T_{\mu\nu}^i \phi_2^j \tilde{T}^{\mu\nu j} + 2\rho^i T_{\mu\nu}^i \phi_2^j \tilde{T}^{\mu\nu j} \right), \quad (3.18)$$

onde a convenção de soma sobre os índices repetidos i, j tem sido empregada. Vemos então, que a expressão acima possui um termo quadrático em $T_{\mu\nu}^i$, o que resulta no surgimento de termos massivos do tipo $4a(v^i)^2(T_{\mu\nu}^i)^2$. Isso faz com que cada componente do campo de matéria adquira massa $(m^i)^2$, isto é

$$(m^i)^2 = 4a(v^i)^2. \quad (3.19)$$

Como o termo de massa possui dependência em $(v^i)^2$ não temos problema com a escolha do vácuo. Para evitarmos *táquions* no modelo basta fazermos $a > 0$ e deste modo cada componente do campo tensorial anti-simétrico de matéria adquire massa $m^i = 4|v^i|\sqrt{a}$. Assim o modelo não-abeliano para o campo de matéria adquire pólo massivo livre da presença de *táquions* admitindo-se estados de vácuo compatíveis com a simetria de paridade.

3.2.4 Geração de termos topológicos

Agora examinaremos a situação em que a simetria de paridade é desprezada. Como no caso abeliano consideraremos que a constante de acoplamento a no termo de interação eq.(3.11), seja real. Com a simetria de paridade relaxada os campos ϕ_1^i e ϕ_2^i são supostamente escalares. Isso faz com que o valor esperado do vácuo de ϕ_2^i seja diferente de zero, ou seja

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi_2^i | 0 \rangle &= v_2^i \\ \langle 0 | \phi_1^i | 0 \rangle &= v_1^i. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Desta forma o valor de ϕ que minimiza o potencial ocorre agora em:

$$(v_1^i)^2 + (v_2^i)^2 = \mu^2/\lambda. \quad (3.21)$$

Isso por sua vez, acaba modificando o termo de interação eq.(3.11). Após alguns cálculos chegamos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} & \int d^4x 4a \left((v_1^i T_{\mu\nu}^i)^2 + (\phi_1^i T_{\mu\nu}^i)^2 - (v_2^i T_{\mu\nu}^i)^2 - (\phi_2^i T_{\mu\nu}^i)^2 \right) \\ & + \int d^4x 4a \left(2v_1^i T_{\mu\nu}^i \phi_1^j T^{\mu\nu j} + 2v_1^i T_{\mu\nu}^i \phi_2^j \tilde{T}^{\mu\nu j} + 2v_1^i T_{\mu\nu}^i v_2^j \tilde{T}^{\mu\nu j} \right) \\ & + \int d^4x 4a \left(2\phi_1^i T_{\mu\nu}^i \phi_2^j \tilde{T}^{\mu\nu j} + 2\phi_1^i t_{\mu\nu} v_2^j \tilde{T}^{\mu\nu j} \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Além do termo de massa, obtemos também um termo topológico do tipo

$$\int d^4x \, 4av_1^i v_2^j T^{\mu\nu i} \tilde{T}_{\mu\nu}^j, \quad (3.23)$$

ele é topológico no sentido de ser independente da métrica, ou seja:

$$\int_{\mathcal{M}} T_{\mu\nu} \tilde{T}^{\mu\nu} \sqrt{|g|} d^4x = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} T_{\mu\nu} T_{\alpha\beta} d^4x, \quad (3.24)$$

onde \mathcal{M} é uma variedade Lorentziana. Vale ressaltar que, com a simetria de paridade relaxada, o modelo pode apresentar estados de *táquions*. Isso pode ser observado na eq.(3.22) pelo surgimento de um termo adicional quadrático em $T_{\mu\nu}^i$ como conseqüência dos estados de vácuo dos campos ϕ_2^i agora serem não-nulos. Isso faz com que o termo de massa para as componentes do campo de matéria sejam uma combinação dos estados de vácuo v_1^i e v_2^i , ou seja

$$(m^i)^2 = 4a((v_1^i)^2 - (v_2^i)^2). \quad (3.25)$$

Portanto, a escolha dos possíveis estados de vácuo é importante para uma interpretação física do problema.

Vimos então que o mecanismo de Higgs é capaz de gerar massa para o campo tensorial anti-simétrico de matéria no caso não-abeliano, sendo este descrito através da teoria $\lambda\varphi^4$, construída com o campo tensorial anti-simétrico complexo, seguida de uma condição auto-dual complexa, que impede por sua vez, a representação de um termo massivo para o referido campo, válida também no caso não-abeliano (23). Podemos observar que o mecanismo de Higgs não-abeliano, acompanhado da simetria de gauge na representação do grupo $SU(N)$, onde foram incluídos os campos de Yang-Mills e também da simetria discreta de paridade, permitiu a construção de apenas um termo de acoplamento entre o campo tensorial complexo e o escalar complexo, sendo este último com valor esperado no vácuo não-nulo. Entretanto, esse acoplamento permitiu o surgimento de massa para o campo tensorial de matéria livre da presença de *táquions*, pelo fato do parâmetro de massa ser independente da escolha de um determinado estado de vácuo. Vale ressaltar que o mecanismo de Higgs abeliano (26), utilizado para o campo de matéria, possibilitou a construção de quatro termos de acoplamento compatíveis com as simetrias de gauge e paridade, propostas no modelo. E, ao contrário do caso não-abeliano, algumas interações apresentaram problemas quanto aos estados de vácuo, admitindo-se assim a existência de *táquions* e desta forma, tiveram que ser excluídas por não representarem estados fisicamente aceitáveis. Além disso a obtenção de termos topológicos foi possível quebrando-se a simetria de paridade no modelo, acarretando numa redistribuição dos estados de vácuo

para as componentes do campo escalar de Higgs. Isso por sua vez, modifica os termos de interação (3.11) possibilitando assim o surgimento de um termo topológico para o campo de matéria acompanhado também de um termo massivo. Entretanto alguns estados de vácuo não são fisicamente permitidos por admitirem a presença de *táquions*. Vale ressaltar que, para o caso abeliano, um mecanismo similar ocorre em três dimensões com o acoplamento não-mínimo, onde o termo de Chern-Simons é gerado através da quebra espontânea de simetria, por meio da derivada covariante (36),(37).

3.3 Geração de massa topológica

3.3.1 Ação para o campo de matéria

Agora analisaremos o mecanismo de geração de massa topológica para o campo tensorial anti-simétrico de matéria $T_{\mu\nu}$ para o caso não-abeliano, onde consideraremos o modelo $\lambda\varphi^4$ discutido anteriormente. Neste modelo introduzimos na ação não-abeliana de Avdeev e Chizhov (1.65) um termo de acoplamento com um campo vetorial complexo B_μ , incluindo-se um termo topológico. As componentes dos campos são organizadas em multipletos na estrutura do grupo $SU(N)$, cujos geradores são matrizes hermitianas $n \times n$ unitárias com determinante unitário e traço nulo. O acoplamento preserva a simetria de gauge existente no modelo onde foram incluídos os campos de Yang Mills.

Começaremos nossa análise considerando a seguinte ação:

$$S = \int d^4x \left[-(D_\mu B_\sigma)^{\dagger i} (D^\mu B^\sigma)^i - (D_\mu \varphi^{\mu\nu})^{\dagger i} (D^\sigma \varphi_{\sigma\nu})^i \right] + m \int d^4x \left[B_\sigma^{\dagger i} (D_\mu \varphi^{\mu\sigma})^i + B_\sigma^i (D_\mu \varphi^{\mu\sigma})^i \right], \quad (3.26)$$

onde m é um parâmetro de massa e B_μ^i , $\varphi_{\mu\nu}^i$ são respectivamente, as componentes do campo vetorial complexo e do campo tensorial anti-simétrico complexo na representação do grupo não-abeliano

$$\begin{aligned} B_\mu^i &= B_\mu^{(1)i} + iB_\mu^{(2)i}, \\ \varphi_{\mu\nu}^i &= T_{\mu\nu}^i + i\tilde{T}_{\mu\nu}^i. \end{aligned} \quad (3.27)$$

A ação é invariante sob as seguintes transformações de gauge não-abelianas

$$\begin{aligned}
\delta A_\mu^a &= \partial_\mu \omega^a + f^{abc} A_\mu^b \omega^c, \\
\delta \varphi_{\mu\nu}^i &= i\omega^a (\lambda^a)^{ij} \varphi_{\mu\nu}^j, \\
\delta B_\mu^i &= i\omega^a (\lambda^a)^{ij} B_\mu^j,
\end{aligned} \tag{3.28}$$

e para a derivada covariante

$$\begin{aligned}
(D_\sigma \varphi_{\mu\nu})^i &= \partial_\sigma \varphi_{\mu\nu}^i - iA_\sigma^a (\lambda^a)^{ij} \varphi_{\mu\nu}^j, \\
(D_\mu B_\nu)^i &= \partial_\mu B_\nu^i - iA_\mu^a (\lambda^a)^{ij} B_\nu^j,
\end{aligned} \tag{3.29}$$

temos

$$\begin{aligned}
\delta(D_\sigma \varphi_{\mu\nu})^i &= i\omega^a (\lambda^a)^{ij} (D_\sigma \varphi_{\mu\nu})^j, \\
\delta(D_\mu B_\nu)^i &= i\omega^a (\lambda^a)^{ij} (D_\mu B_\nu)^j.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Escrevendo a ação (3.26) em termos das componentes dos campos, obtemos:

$$\begin{aligned}
S &\approx \int d^4x \left(-\partial_\mu B_\sigma^{(1)i} \partial^\mu B^{(1)i\sigma} - \partial_\mu B_\sigma^{(2)i} \partial^\mu B^{(2)i\sigma} \right) + J_\sigma^{(1)i} B^{(1)i\sigma} + J_\sigma^{(2)i} B^{(2)i\sigma} \\
&+ \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\sigma T_{\mu\nu}^i \partial^\sigma T^{i\mu\nu} - 2\partial^\mu T_{\mu\nu}^i \partial_\sigma T^{i\sigma\nu} \right) + \frac{1}{2} J_{\mu\nu}^i T^{i\mu\nu} \\
&+ 2m \int d^4x \left(B^{(1)i\sigma} \partial^\mu T_{\mu\sigma}^i + B^{(2)i\sigma} \partial^\mu \tilde{T}_{\mu\sigma}^i \right),
\end{aligned} \tag{3.31}$$

onde consideramos somente os termos bi-lineares e os termos envolvendo fontes externas. Observe que o último termo, relacionado ao parâmetro de massa m , possui uma parte topológica e uma não-topológica, construídos com as componentes dos campos.

As equações do movimento para as componentes dos campos $T_{\mu\nu}^i$ e B_μ^i podem ser facilmente calculadas pelo princípio da ação mínima, ($\delta S = 0$), obtendo-se assim

$$\begin{aligned}
\partial^2 B^{(1)i\sigma} + m \partial_\mu T^{i\mu\sigma} + \frac{1}{2} J^{(1)i\sigma} &= 0 \\
\partial^2 B^{(2)i\sigma} + m \partial_\mu \tilde{T}^{i\mu\sigma} + \frac{1}{2} J^{(2)i\sigma} &= 0
\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\partial^2 T^{i\rho\sigma} - 2\delta_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \partial^\mu \partial_\lambda T^{i\lambda\nu} + m \delta_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \partial^\mu B^{(1)i\nu} + m \varepsilon^{\rho\sigma\mu\lambda} \partial_\mu B_\lambda^{(2)i} - \frac{1}{2} J^{i\rho\sigma} = 0.$$

3.3.2 Propagadores

Para o cálculo dos propagadores de Feynman, usaremos o gerador funcional das funções de Green W , com a seguinte transformada de Legendre

$$W[T_{\mu\nu}^i, B_\mu^{(1,2)i}] = \Gamma[J_{\mu\nu}^i, J_\mu^{(1,2)i}] - \frac{1}{2} \int dx'^4 J_{\mu\nu}^i(x') T^{i\mu\nu}(x') - \int dx'^4 J_\mu^{(1,2)i}(x') B^{(1,2)i\mu}(x'), \quad (3.33)$$

onde as amplitudes de transição vácuo-a-vácuo são definidas por:

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu}^i(x) T_{\rho\sigma}^j(y) \rangle &= -i \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta J_{\mu\nu}^i(x) \delta J_{\rho\sigma}^j(y)} \Big|_{J=0} \\ \langle B_\mu^{(1,2)i}(x) T_{\rho\sigma}^j(y) \rangle &= -i \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta J_\mu^{(1,2)i}(x) \delta J_{\rho\sigma}^j(y)} \Big|_{J=0}. \end{aligned}$$

Agora, voltamos nossa atenção para as equações do movimento eq.(3.32), onde obtemos três expressões para a amplitude de transição vácuo-a-vácuo para as componentes dos campos B_μ^i e $T_{\mu\nu}^i$. Elas representam o propagador causal em dois pontos distintos do espaço-tempo, ou seja, as funções de Green de dois pontos

$$\langle \partial^2 B^{(1)i\sigma}(x) T_{\alpha\beta}^j(y) \rangle + m \langle \partial_\mu T^{i\mu\sigma}(x) T_{\alpha\beta}^j(y) \rangle = 0, \quad (3.34)$$

$$\langle \partial^2 B^{(2)i\sigma}(x) T_{\alpha\beta}^j(y) \rangle + m \langle \partial_\mu \tilde{T}^{i\mu\sigma}(x) T_{\alpha\beta}^j(y) \rangle = 0 \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} 2 \langle \partial^2 T^{i\rho\sigma}(x) T_{\alpha\beta}^j(y) \rangle - 4\delta_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \langle \partial^\mu \partial_\lambda T^{i\lambda\nu}(x) T_{\alpha\beta}^j(y) \rangle + 2m\delta_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \langle \partial^\mu B^{(1)i\nu}(x) T_{\alpha\beta}^j(y) \rangle \\ + 2m \varepsilon^{\rho\sigma\mu\lambda} \langle \partial_\mu B_\lambda^{(2)i}(x) T_{\alpha\beta}^j(y) \rangle + i \delta_{\alpha\beta}^{\rho\sigma} \delta^{ij} \delta^4(x-y) = 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Como estamos interessados em determinar o propagador para o campo de matéria $T_{\mu\nu}$ devemos portanto, eliminar nas expressões acima, os termos que envolvem os campos $B_\mu^{(1)i}$ e $B_\mu^{(2)i}$. Isso pode ser feito após algumas manipulações algébricas, obtendo-se assim a seguinte expressão:

$$\partial^2 (\partial^2 + m^2) \langle T^{i\rho\sigma}(x) T_{\alpha\beta}^j(y) \rangle = i \delta_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \delta_{\alpha\beta}^{\lambda\nu} \partial^\mu \partial_\lambda \delta^{ij} \delta^4(x-y) - \frac{i}{2} \partial^2 \delta_{\alpha\beta}^{\rho\sigma} \delta^{ij} \delta^4(x-y). \quad (3.37)$$

Usando a representação de Fourier para a função delta de Dirac e para o propagador de Feynman

$$\begin{aligned} \delta^4(x-y) &= \frac{1}{(4\pi)^4} \int d^4k e^{ik(x-y)}, \\ \langle T^{i\rho\sigma}(x) T_{\alpha\beta}^j(y) \rangle &= \frac{1}{(4\pi)^4} \int d^4k G_{\alpha\beta}^{\rho\sigma ij}(k) e^{ik(x-y)}, \end{aligned}$$

obtemos a seguinte expressão para a função de Green

$$G_{\alpha\beta}^{\rho\sigma ij}(k) = \frac{i}{(k^2 - m^2)} \Pi_{\alpha\beta}^{\rho\sigma ij}(k), \quad (3.38)$$

com

$$\Pi_{\alpha\beta}^{\rho\sigma ij}(k) = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta}^{\rho\sigma} \delta^{ij} - \frac{1}{k^2} \delta_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \delta_{\alpha\beta}^{\lambda\nu} \delta^{ij} k^\mu k_\lambda.$$

Observe que o propagador causal para o campo tensorial anti-simétrico de matéria adquire pólo massivo como conseqüência do acoplamento entre $T_{\mu\nu}$ e o campo vetorial B_μ , com um parâmetro de massa incluindo-se um termo topológico. Se entretanto compararmos com o resultado obtido no caso abeliano, com simetria de gauge $U(1)$, veremos que a única diferença está no fato de que, para o caso não-abeliano os campos $\varphi_{\mu\nu}$ e $B_{\mu\nu}$ são organizados em multipletos, admitindo-se portanto, n componentes. Isso pode ser observado pelos índices i, j que especificam a representação do grupo não-abeliano $SU(N)$. Deste forma, o propagador causal para as componentes do campo tensorial de matéria admite um delta de Kronecker δ^{ij} como conseqüência da condição de ortogonalidade.

3.3.3 Construindo uma ação geral

Vamos agora construir uma ação mais geral com os campos B_μ e $T_{\mu\nu}$. Para isso, introduziremos na ação eq.(3.26) mais um termo cinético do tipo $a(D_\mu B^\mu)^{\dagger i} (D_\sigma B^\sigma)^i$, onde a representa uma constante real a ser determinada e também um termo de massa para B_μ . Verificaremos então como esses termos adicionais afetarão no cálculo do propagador causal para o campo de matéria. A nova ação S assume a seguinte forma

$$\begin{aligned} S = & \int d^4x \left[- (D_\mu B_\sigma)^{\dagger i} (D^\mu B^\sigma)^i + a (D_\mu B^\mu)^{\dagger i} (D_\sigma B^\sigma)^i - (D_\mu \varphi^{\mu\nu})^{\dagger i} (D^\sigma \varphi_{\sigma\nu})^i \right] \\ & + \int d^4x \left[m \left(B_\nu^{\dagger i} (D_\mu \varphi^{\mu\nu})^i + B_\nu^{\dagger i} (D^\mu \varphi_{\mu\nu})^i \right) + \mu^2 B_\sigma^{\dagger i} B^{\sigma i} \right]. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Escrevendo a ação em termos das componentes dos campos e considerando somente os termos bi-lineares mais fontes obtemos, após alguns cálculos, as seguintes equações do movimento

$$\begin{aligned} \partial^2 B^{(1)i\sigma} - a \partial_\mu \partial^\sigma B^{(1)i\mu} + \mu^2 B^{(1)i\sigma} + m \partial_\mu T^{i\mu\sigma} + \frac{1}{2} J^{(1)i\sigma} &= 0, \\ \partial^2 B_\sigma^{(2)i} - a \partial_\mu \partial^\sigma B^{(2)i\mu} + \mu^2 B^{(2)i\mu} + m \partial_\mu \tilde{T}^{i\mu\sigma} + \frac{1}{2} J^{(2)i\sigma} &= 0, \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\partial^2 T^{i\rho\sigma} - 2\delta_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \partial^\mu \partial_\lambda T^{i\lambda\nu} + m \delta_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \partial^\mu B^{(1)i\nu} + m \varepsilon^{\rho\sigma\mu\lambda} \partial_\mu B_\lambda^{(2)i} - \frac{1}{2} J^{i\rho\sigma} = 0$$

Observe que, como no caso abeliano, as duas primeiras equações acima adquiriram dois novos termos comparadas com as equações (3.32). Entretanto a última equação permaneceu inalterada.

Para o cálculo dos propagadores das componentes dos campos $T_{\mu\nu}$ e B_μ , usaremos o gerador funcional das funções de Green W definidos em (3.33), juntamente com a definição da amplitude de transição vácuo-à-vácuo para os campos. Isso nos dá, após algumas manipulações algébricas, as seguintes expressões :

$$\begin{aligned}
\langle T_{\mu\nu}^i(x) T^{\rho\sigma j}(y) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int G_{\mu\nu}^{\rho\sigma ij}(k) e^{ik(x-y)} d^4k, \\
\langle B_\mu^{(1)i}(x) B^{(1)\nu j}(y) \rangle &= \langle B_\mu^{(2)i}(x) B^{(2)\nu j}(y) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int G_\mu^{\nu ij}(k) e^{ik(x-y)} d^4k, \\
\langle B_\mu^{(1)i}(x) B^{(2)\nu j}(y) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int G_\mu^{(12)\nu ij}(k) e^{ik(x-y)} d^4k, \\
\langle B_\mu^{(1)i}(x) T^{\rho\sigma j}(y) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \Gamma_\mu^{(1)\rho\sigma ij}(k) e^{ik(x-y)} d^4k, \\
\langle B_\mu^{(2)i}(x) T^{\rho\sigma j}(y) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \Gamma_\mu^{(2)\rho\sigma ij}(k) e^{ik(x-y)} d^4k,
\end{aligned} \tag{3.41}$$

com

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu}^{\rho\sigma ij}(k) &= \frac{i(k^2 - \mu^2)}{k^2(k^2 - \mu^2 - m^2)} \Pi_{\mu\nu}^{\rho\sigma ij}(k), \\
G_\mu^{\nu ij}(k) &= \frac{im^2 k_\sigma k^\rho \delta_{\rho\mu}^{\sigma\nu} \delta^{ij}}{2k^2(k^2 - \mu^2 - m^2)(k^2 - \mu^2)} - \frac{iak_\mu k^\nu \delta^{ij}}{2((1-a)k^2 - \mu^2)(k^2 - \mu^2)} - \frac{i\delta_{\mu\nu} \delta^{ij}}{2(k^2 - \mu^2)}, \\
G_\mu^{(12)\nu ij} &= \frac{im^2 k_\sigma k^\rho \delta_{\rho\mu}^{\sigma\nu} \delta^{ij}}{2k^2(k^2 - \mu^2 - m^2)(k^2 - \mu^2)}, \\
\Gamma_\mu^{(1)\rho\sigma ij}(k) &= \frac{-mk^\nu \delta_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \delta^{ij}}{2k^2(k^2 - m^2 - \mu^2)}, \\
\Gamma_\mu^{(2)\rho\sigma ij}(k) &= \frac{mk^\nu \epsilon_{\mu\nu}^{\rho\sigma} \delta^{ij}}{2k^2(k^2 - m^2 - \mu^2)}.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

De acordo com as expressões acima, podemos concluir que a presença do termo $a(D_\mu B^\mu)^\dagger{}^i (D_\sigma B^\sigma)^i$ afeta somente a amplitude $G_\mu^{\nu ij}(k)$. O propagador para as componentes do campo tensorial de matéria tem um pólo massivo que não depende do parâmetro a . Podemos observar, nas expressões acima a presença do termo δ^{ij} onde os índices ij especificam a representação do grupo não-abeliano $SU(N)$.

Vimos então que o mecanismo de geração de massa para o campo tensorial anti-simétrico de matéria, por meio de um termo topológico, pode ser generalizado para o caso

não-abeliano de modo a preservar a simetria de gauge no modelo. Nesse mecanismo o termo topológico é introduzido através de campo vetorial complexo acoplado ao campo tensorial anti-simétrico complexo seguido de uma condição auto-dual complexa, também válida para o caso não-abeliano. Esta condição é responsável por tornar o campo de matéria não-massivo. Entretanto é o acoplamento com o campo vetorial que faz com que o propagador para o campo tensorial anti-simétrico de matéria adquira pólo massivo.

O mecanismo de geração de massa não-abeliano para o campo tensorial anti-simétrico de matéria traz consigo uma importante contribuição, do ponto de vista fenomenológico, a cerca da possibilidade desses campos serem incluídos em interações no processo de decaimento radioativo (24) bem como na possibilidade de interações tensoriais descritos na teoria padrão eletrofraca (16) e também em interações tensoriais no modelo dos quarks (17),(18). Essas teorias são descritas em termos de uma teoria de gauge não-abeliana na representação do grupo $SU(2)$, elas prevêm a existência de partículas massivas como mediadoras de suas interações. Desta forma, a geração de massa para o campo de matéria torna-se um ingrediente importante na descrição de interações tensoriais nos processos acima citados.

4 O MAPEAMENTO ENTRE OS CAMPOS TENSORIAL DE MATÉRIA E KALB-RAMOND

4.1 Introdução

Vimos neste trabalho que muitas propriedades do campo tensorial anti-simétrico de matéria tem sido discutidas e esclarecidas, dando uma importante contribuição na possibilidade de construção de uma teoria com campos tensoriais anti-simétricos, diferentes de campos de gauge. Entretanto, podemos nos perguntar se existe alguma relação entre o modelo de gauge abeliano construído com o campo tensorial anti-simétrico de matéria $T_{\mu\nu}$ e o modelo construído com o campo tensorial anti-simétrico de gauge $B_{\mu\nu}$. Esta relação pode ser observada em termos da ação funcional construída para cada campo, com um termo de interação representando uma corrente conservada. Podemos verificar, por exemplo, a possibilidade desses modelos de campo serem modelos duais. A dualidade aqui refere-se a existência de duas descrições equivalentes de um modelo usando diferentes campos. Um exemplo clássico é a dualidade escalar-tensor em 4 dimensões. O campo livre de Klein-Gordon ϕ possui uma descrição equivalente em termos do campo livre tensorial anti-simétrico de gauge $A_{\mu\nu}$. A relação entre os campos é descrita como uma *transformada de Legendre*. Entretanto, sabemos que um sistema físico pode ser representado por meio de diferentes descrições matemáticas, ou seja, temos liberdade na escolha das variáveis usadas para definir sua configuração. Uma manifestação extrema disso ocorre em alguns modelos bi-dimensionais que podem ser descritos em termos de suas variáveis bosônicas ou fermiônicas. A equivalência entre essas duas descrições é feita explicitamente através de uma técnica não perturbativa denominada bosonização. A bosonização consiste no mapeamento de uma teoria de campos fermiônica em uma teoria de campos bosônica (28),(29). Esse mecanismo tem-se tornado muito útil, ao longo dos anos, no estudo de sistemas fermiônicos bi-dimensionais em teoria quântica de campos, como também em

física da matéria condensada (30),(31). A generalização das idéias de bosonização para o estudo de sistemas fermiônicos em altas dimensões, com destaque em $(2 + 1)$ dimensões, tem sido objeto de intensas pesquisas. O conjunto desses esforços tem trazido alguns resultados promissores e interessantes. A generalização das técnicas de bosonização pode ser realizada seguindo dois diferentes métodos, isto é, o método canônico e o método funcional.

O método canônico tem sido empregado na obtenção dos primeiros resultados para bosonização de férmions livres não-massivos em $(2 + 1)$ dimensões (28). Neste caso a bosonização é realizada através da introdução de um campo vetorial de gauge W_μ . Uma característica fundamental da bosonização é que a corrente fermiônica $J_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$, do grupo $U(1)$, é mapeada em uma corrente topológica conservada j_μ^T (28),(29), associada a teoria bosônica, ou seja:

$$J_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi \longrightarrow j_\mu^T = \epsilon_{\mu\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda . \quad (4.1)$$

Desta forma, a ação livre de Dirac

$$S_F[\bar{\psi}, \psi] = \int d^3x \bar{\psi} (\not{\partial} + m) \psi , \quad (4.2)$$

é transformada em uma ação bosônica $S_B[A]$, invariante de gauge

$$S_F[\bar{\psi}, \psi] \longrightarrow S_B[A] , \quad (4.3)$$

cuja forma exata, depende da avaliação do determinante fermiônico em $(2 + 1)$ dimensões.

De maneira geral, podemos dizer que S_B consiste de uma ação de Chern-Simons (termo principal), mais uma infinita série de termos dependentes da curvatura $\tilde{F}_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda$, ou seja:

$$S_B[A] = i \frac{1}{\eta} S_{CS}[A] + R[\tilde{F}] , \quad (4.4)$$

sendo $S_{CS}[A]$ a ação de Chern-Simons

$$S_{CS}[A] = \frac{1}{2} \int d^3x \epsilon_{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda \quad (4.5)$$

e $R[\tilde{F}]$ contribuições de altas ordens na curvatura, incluindo termos não locais e não quadráticos em \tilde{F} .

Enquanto o método canônico é usado para investigar o mapeamento entre os modelos de campos fundamentais, fermiônicos e bosônicos, o método funcional (38),(39) é apropriado para estabelecer as bases gerais da bosonização em altas dimensões, das funções de correlação, com a introdução de correntes fermiônicas do tipo $J_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$, na presença de interações.

Considere, por exemplo, o caso abeliano do modelo de férmions livres em $(2 + 1)$ dimensões. O gerador funcional das funções de correlação das correntes fermiônicas é dado por:

$$Z[s] = e^{-\Gamma[s]} = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S_F - i \int d^3x \bar{\psi} \not{s} \psi}, \quad (4.6)$$

onde

$$S_F = \int d^3x \bar{\psi} (\not{\partial} + m) \psi, \quad (4.7)$$

podendo ser mapeado em uma ação bosônica equivalente

$$Z[s] = \int \mathcal{D}A_\mu e^{-S_B[A] - i \int d^3x s_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho}, \quad (4.8)$$

com s_μ representando uma fonte externa, acoplada a corrente espinorial. Como a ação bosonizada $S_B[A]$ é dada em termos do campo vetorial A_μ , podemos escrevê-la na seguinte forma:

$$e^{-S_B[A]} = \int \mathcal{D}b_\mu e^{-\Gamma[b] + i \int d^3x b_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho}, \quad (4.9)$$

onde

$$e^{-\Gamma[b]} = \det(\not{\partial} + m + i \not{b}). \quad (4.10)$$

Vemos então, que a ação $S_B[A]$ é obtida através da transformada funcional de Fourier do determinante fermiônico. Além disso, diferenciando o gerador funcional $Z[s]$, com relação a fonte externa s_μ , para as funções de Green das correntes fermiônicas, teremos:

$$\langle J_{\mu_1} \dots J_{\mu_n} \rangle_{(S_F + I[J])} = \langle j_{\mu_1}^T \dots j_{\mu_n}^T \rangle_{(S_B + I[j^T])}, \quad (4.11)$$

sugerindo a seguinte regra de bosonização para a corrente

$$J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \leftrightarrow \varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho. \quad (4.12)$$

Isso significa que as regras de bosonização para sistemas fermiônicos, cuja ação contém um termo de interação $I[J^\mu]$, dependendo somente da corrente, podem ser generalizadas para:

$$S_F[\bar{\psi}, \psi] + I[J^\mu] \leftrightarrow S_B[A] + I[\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho], \quad (4.13)$$

onde $S_B[A]$ é a ação funcional que bosoniza a ação fermiônica livre $S_F[\bar{\psi}, \psi]$. Esta relação pode ser interpretada como consequência da igualdade entre as funções de correlação das correntes eq.(4.11), obtida da ação correspondente a cada descrição.

A generalização desta técnica, originalmente usada para bosonização de ações fermiônicas, pode ser vista em (32), sendo utilizada para um modelo de teoria de campos arbitrária em (2+1) dimensões. Neste trabalho é feito o mapeamento de um modelo tri-dimensional, com uma carga abeliana conservada do grupo $U(1)$, em uma teoria abeliana de gauge dual. Podemos nos referir a este mapeamento como dualidade, como sugerem os próprios autores (32), ao invés de bosonização, devido ao significado mais geral deste termo. Uma característica importante deste mapeamento, é que a corrente de Noether J_μ correspondente a simetria global do grupo $U(1)$ está associada a uma corrente topológica j_μ^T como correspondente dual na teoria de gauge abeliana.

$$J_\mu \longrightarrow j_\mu^T = \varepsilon_{\mu\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda. \quad (4.14)$$

A corrente topológica j_μ^T torna-se então, identificada com \tilde{F}_μ , uma corrente topológica local, invariante de gauge e identicamente conservada que pode ser escrita em termos de A_μ , na teoria dual, invariante de gauge. Além disso, a invariância da teoria bosonizada deve está relacionada a renormalizabilidade das integrais funcionais que levam a teoria dual.

A descrição de modelos de campos tri-dimensionais carregados, em termos de uma teoria de gauge dual, traz consigo a possibilidade de estendermos esse mecanismo de dualização para diversas dimensões, em particular em (3 + 1) dimensões. Vimos em três dimensões, que a corrente topológica é construída com o campo vetorial de gauge A_μ , na ação dual $S_{dual}(A)$. Desta forma, somos levados a pensar que, um modelo de teoria de campos em quatro dimensões, com uma carga abeliana conservada, deve corresponder a uma teoria de gauge dual, isto é, a corrente J_μ de $U(1)$ deve ser mapeada em uma corrente topológica j_μ^T , construída com um campo gauge.

$$J^\mu \longrightarrow j_T^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu B_{\rho\sigma}. \quad (4.15)$$

Observe que o campo vetorial de gauge A_μ é substituído pelo campo tensorial anti-simétrico de gauge de segundo rank $B_{\mu\nu}$, como resultado da extensão da simetria de gauge para campos tensoriais anti-simétricos. Sua curvatura é definida como :

$$H_{\mu\nu\rho} = \partial_{[\mu} B_{\nu\rho]}, \quad (4.16)$$

sendo anti-simetrizada nos três índices. Sabendo-se que $\partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu$, podemos generalizar a simetria de gauge do campo A_μ ao campo $B_{\mu\nu}$, tomando

$$\delta(B_{\mu\nu}) = \partial_\mu \alpha_\nu - \partial_\nu \alpha_\mu, \quad (4.17)$$

onde α_μ é um parâmetro vetorial local. A ação do campo $B_{\mu\nu}$ renormalizável por power-counting e invariante sob transformação de gauge eq.(4.17) é dada por (4):

$$S_B = \int d^4x \frac{1}{6} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho}, \quad (4.18)$$

que é a generalização do termo de Maxwell.

O nosso objetivo consiste portanto no mapeamento, em quatro dimensões, de uma teoria de campos construída com o campo de matéria $T_{\mu\nu}$ com uma corrente conservada $U(1)$ em uma teoria de gauge dual, obtida com o campo tensorial anti-simétrico de gauge $B_{\mu\nu}$ com uma corrente topológica identicamente conservada. Para isso, utilizaremos o modelo de gauge abeliano construído com o campo tensorial anti-simétrico de matéria complexo $\varphi_{\mu\nu}$, descrito na teoria $\lambda\varphi^4$ (23).

Uma importante característica do mapeamento com o campo de matéria é que este preserva a simetria de paridade existente no modelo, pelo fato de que a corrente conservada $U(1)$ possui termos topológicos, sendo então mapeada em uma corrente topológica identicamente conservada na teoria de gauge dual. Ao contrário do mapeamento em $(2 + 1)$ dimensões (32) onde podemos verificar a quebra da simetria de paridade. Além disso o mapeamento com o campo de matéria é livre de anomalias do tipo axial, também conhecidas como anomalias quirais. Este tipo de anomalia é encontrada no procedimento de bosonização em $(3 + 1)$ dimensões, devido a presença da matriz γ^5 , em nosso caso a anomalia poderia ser verificada em virtude do termo topológico $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ existente na corrente conservada $U(1)$ (33), entretanto tal anomalia não foi verificada.

O mapeamento do campo tensorial anti-simétrico de matéria $T_{\mu\nu}$ em uma teoria de gauge dual pode ser capaz de esclarecer alguns aspectos sobre os graus de liberdade desse campo. Isso pode ser feito através do estudo dinâmico de seu modelo dual, uma vez que este modelo é construído com o campo tensorial anti-simétrico de gauge $B_{\mu\nu}$, e neste caso, é a própria simetria de gauge que é responsável pelo cancelamento de seus graus de liberdade não físicos.

Este capítulo é organizado da seguinte forma : na seção 2 faremos uma breve descrição sobre o procedimento de mapeamento dual (32) em $(2 + 1)$ dimensões, destacando suas características fundamentais. Na seção 3 faremos um breve resumo das propriedades do campo tensorial anti-simétrico de matéria $T_{\mu\nu}$, destacando-se a construção geométrica da teoria denominada $\lambda\varphi^4$ de um campo tensorial anti-simétrico complexo com uma corrente conservada $U(1)$. Na seção 4 apresentaremos os resultados obtidos com o mapeamento dual do campo tensorial anti-simétrico de matéria em uma teoria de gauge, construída com o campo tensorial anti-simétrico de gauge $B_{\mu\nu}$. Por fim apresentaremos nossas conclusões e perspectivas.

4.2 O mapeamento dual

O procedimento de bosonização, originalmente desenvolvido para campos fermiônicos, é generalizado para um modelo arbitrário de campo com uma carga abeliana global conservada, sendo representado por :

$$\mathcal{Z}[s_\mu] = \int \mathcal{D}A_\mu e^{-S_B[A] - i \int d^3x s_\mu \epsilon_{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda} \quad (4.19)$$

onde a ‘ação bosonizada’ $S_B[A]$ é definida por :

$$e^{-S_B[A]} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}b_\mu \mathcal{Z}[b_\mu] e^{i \int d^3x b_\mu \epsilon_{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda} , \quad (4.20)$$

Observe que a expressão (4.9) é um caso particular de (4.20), onde $\mathcal{Z}[s_\mu]$ é o determinante fermiônico. Desta forma, podemos dizer que diferentes teorias de campos acopladas a uma fonte externa s_μ produzirão uma expressão idêntica, embora a representação de $\mathcal{Z}[s_\mu]$ como uma integral funcional sobre o campo de matéria original seja, naturalmente, diferente para cada modelo.

De maneira geral, considere um par de campos complexos ϕ, ϕ^\dagger (escalares, vetoriais, espinoriais, ...), com carga $U(1)$. Sua ação clássica é dada por:

$$S[\phi^\dagger, \phi] = \int d^3x \mathcal{L}(\phi^\dagger, \phi; \partial\phi^\dagger, \partial\phi) , \quad (4.21)$$

sendo invariante sob as seguintes transformações

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow e^{i\alpha} \phi , \\ \phi^\dagger &\rightarrow e^{-i\alpha} \phi^\dagger , \end{aligned} \quad (4.22)$$

o que leva a conservação da corrente de Noether J_μ

$$\partial_\mu J_\mu = 0, \quad (4.23)$$

satisfeita através das equações do movimento.

Desejamos agora, que a simetria de gauge seja válida na presença de uma fonte externa s_μ . De modo a satisfazer tal condição, o termo de interação com a fonte deve ser um invariante de gauge. Entretanto, isso pode ser assegurado se trocarmos as derivadas normais por derivadas covariantes com relação a fonte s_μ , resultando na seguinte transformação para os campos :

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow e^{i\alpha(x)} \phi(x) , \\ \phi^\dagger(x) &\rightarrow e^{-i\alpha(x)} \phi^\dagger(x) . \end{aligned} \quad (4.24)$$

O gerador funcional $\mathcal{Z}[s_\mu]$ pode ser escrito como:

$$\mathcal{Z}[s_\mu] = \int D\phi D\phi^\dagger e^{-\int d^3x (\mathcal{L}[\phi^\dagger, \phi; (D\phi)^\dagger, D\phi])} , \quad (4.25)$$

onde $D_\mu\phi = (\partial_\mu + is_\mu)\phi$, levando imediatamente a seguinte propriedade

$$\mathcal{Z}[s_\mu] = \mathcal{Z}[s_\mu + \partial_\mu\alpha] . \quad (4.26)$$

Usando agora a relação

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi, \phi^\dagger, (\partial_\mu + is_\mu)\phi, (\partial_\mu - is_\mu)\phi^\dagger) &= \\ \mathcal{L}(\phi, \phi^\dagger, \partial_\mu\phi, \partial_\mu\phi^\dagger) + s_\mu J^\mu , \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde $J_\mu(\phi, \phi^\dagger)$ é a corrente de Noether associada a invariância global $U(1)$, obtemos:

$$\mathcal{Z}[s_\mu] = \int D\phi D\phi^\dagger e^{-\int d^3x (\mathcal{L}[\phi^\dagger, \phi; (\partial\phi)^\dagger, \partial\phi] + s_\mu J^\mu)} . \quad (4.28)$$

A eq.(4.28) pode então, ser interpretada da seguinte forma : acoplando-se uma corrente J_μ de $U(1)$ a uma fonte externa s_μ , isto é equivalente a trocarmos as derivadas espaciais ∂_μ pelas derivadas covariantes $(\partial_\mu + is_\mu)$, em concordância com o princípio do acoplamento mínimo. Embora a relação (4.28) seja evidente para ações que são lineares nas derivadas espaciais dos campos, como por exemplo em ações fermiônicas, ela pode ser satisfeita para casos mais gerais. Isso pode ser observado através da introdução de campos auxiliares na ação, afim de torná-la linear em suas derivadas.

Da invariância de gauge eq.(4.26), temos:

$$\mathcal{Z}[s_\mu] = \int D\phi D\phi^\dagger e^{-\int d^3x \mathcal{L}(\phi, \phi^\dagger; s_\mu + \partial_\mu \alpha)} , \quad (4.29)$$

podendo ser escrito na forma

$$\mathcal{Z}[s_\mu] = \int D\phi D\phi^\dagger D\eta_\mu \delta[\varepsilon_{\mu\nu\lambda} \partial^\nu \eta^\lambda] e^{-\int d^3x \mathcal{L}(\phi, \phi^\dagger; s_\mu + \eta_\mu)} ,$$

onde $\eta_\mu = \partial_\mu \alpha$, o que resulta em

$$\mathcal{Z}[s_\mu] = \int D\phi D\phi^\dagger D\eta_\mu DA_\mu \quad (4.30)$$

$$\exp \left\{ - \int d^3x [\mathcal{L}(\phi, \phi^\dagger, (\partial_\mu + i\eta_\mu - is_\mu)\phi, (\partial_\mu - i\eta_\mu + is_\mu)\phi^\dagger) + i A_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \eta_\rho] \right\} .$$

Fazendo uma mudança de variáveis do tipo

$$\eta_\mu \rightarrow \eta_\mu - s_\mu , \quad (4.31)$$

observa-se que a fonte externa s_μ se desacopla dos campos ϕ e ϕ^\dagger , chegando à seguinte expressão:

$$\mathcal{Z}[s_\mu] = \int D\phi D\phi^\dagger D\eta_\mu DA_\mu \quad (4.32)$$

$$\exp \left\{ - \int d^3x [\mathcal{L}(\phi, \phi^\dagger, (\partial_\mu + i\eta_\mu)\phi, (\partial_\mu - i\eta_\mu)\phi^\dagger) + i A_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu (\eta_\rho - s_\rho)] \right\} .$$

Introduzindo agora a ação efetiva, $S_{\text{eff}}(\eta) = \int d^3x \mathcal{L}_{\text{eff}}(\eta)$, através da equação

$$e^{-S_{\text{eff}}[\eta_\mu]} = \int D\phi D\phi^\dagger e^{-\int d^3x \mathcal{L}(\phi, \phi^\dagger, (\partial_\mu + i\eta_\mu)\phi, (\partial_\mu - i\eta_\mu)\phi^\dagger)} , \quad (4.33)$$

obtém-se:

$$\mathcal{Z}[s] = \int D\eta_\mu DA_\mu e^{-\int d^3x (\mathcal{L}_{\text{eff}}(\eta) - i A_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \eta_\rho + i A_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu s_\rho)} .$$

Finalmente, defini-se a chamada ação dual $S_{\text{dual}}(A)$

$$e^{-S_{\text{dual}}[A_\mu]} = \int D\eta_\mu e^{-\int d^3x (\mathcal{L}_{\text{eff}}(\eta) - i A_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \eta_\rho)} , \quad (4.34)$$

obtendo-se assim, a *representação dual* do gerador funcional $\mathcal{Z}[s_\mu]$, isto é

$$\mathcal{Z}[s_\mu] = \int DA_\mu e^{-(S_{\text{dual}}[A_\mu] + i \int d^3x s_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho)} . \quad (4.35)$$

É importante ressaltar que o campo dual A_μ representa um verdadeiro campo de gauge, onde a ação dual $S_{\text{dual}}(A)$ possui simetria de gauge

$$S_{\text{dual}}[A_\mu] = S_{\text{dual}}[A_\mu + \partial_\mu \omega] . \quad (4.36)$$

A expressão (4.35) assegura a representação das funções de correlação em termos de uma teoria de gauge em $(2 + 1)$ dimensões. De acordo com a eq.(4.35), observa-se que o termo de interação com a fonte externa s_μ pode ser interpretado como uma corrente topológica j_μ^T e desta forma, podemos dizer que a corrente de Noether J^μ associada a simetria $U(1)$ é mapeada em uma corrente topológica dual

$$J_\mu(\phi, \phi^\dagger) \longrightarrow j_\mu^T(A) = \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho . \quad (4.37)$$

Da mesma forma, para a ação clássica tem-se:

$$S[\phi] = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \phi^\dagger, \partial_\mu \phi, \partial_\mu \phi^\dagger) \longrightarrow S_{\text{dual}}[A_\mu] . \quad (4.38)$$

As equações (4.37) e (4.38) representam o mapeamento dual e devem ser entendidas com uma igualdade entre as funções de correlação, ou seja:

$$\begin{aligned} & \langle J_{\mu_1}(x_1) J_{\mu_2}(x_2) \dots J_{\mu_n}(x_n) \rangle_{S[\phi]} \\ &= \langle j_{\mu_1}^T(x_1) j_{\mu_2}^T(x_2) \dots j_{\mu_n}^T(x_n) \rangle_{S_{\text{dual}}[A_\mu]} , \end{aligned} \quad (4.39)$$

obtidas pela diferenciação dos geradores funcionais (4.25) e (4.35) com relação a fonte externa s_μ . A equação (4.39) nos diz que as funções de Green das correntes de Noether de $U(1)$ tem uma representação dual em termos de uma corrente topológica, construída com um campo de gauge.

A generalização das regras de bosonização para sistemas fermiônicos eq.(4.13), definidas como mapeamento dual (32), podem ser interpretadas da seguinte forma : uma teoria de campos com simetria $U(1)$, cuja ação $S[\phi]$, contenha um termo de interação $I[J^\mu]$, dependendo somente da corrente, deve ser mapeada em uma ação de gauge dual $S_{dual}(A)$ com um termo de interação, associado a uma corrente topológica.

$$S[\phi] + I[J^\mu] \leftrightarrow S_{dual}[A] + I[\varepsilon^{\mu\nu\sigma} \partial_\nu A_\sigma] . \quad (4.40)$$

4.3 Campo tensorial anti-simétrico de matéria

Como vimos no capítulo 1, o modelo de gauge abeliano para o campo tensorial anti-simétrico de matéria $T_{\mu\nu}$ pode ser representado como a componente real de um campo tensorial anti-simétrico de segundo rank complexo $\varphi_{\mu\nu}$ obedecendo a seguinte condição de auto-dualidade complexa

$$\varphi_{\mu\nu} = i\tilde{\varphi}_{\mu\nu}, \quad (4.41)$$

$$\tilde{\varphi}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varphi^{\rho\sigma}, \quad (4.42)$$

onde

$$\varphi_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + i\tilde{T}_{\mu\nu}, \quad (4.43)$$

válida no espaço-tempo de Minkowski. A ação $S(\varphi, \varphi^\dagger)$, construída com o campo tensorial complexo, tem a seguinte forma:

$$S(\varphi, \varphi^\dagger) = \int d^4x \left(\partial_\mu \varphi^{\mu\nu} \partial^\rho \varphi^\dagger_{\rho\nu} \right). \quad (4.44)$$

A ausência de um termo massivo do tipo $m^2\varphi\varphi^\dagger$, na expressão acima, pode ser evidenciada como uma consequência da condição auto-dual complexa. O modelo possui simetria $U(1)$, sendo invariante sob a seguinte transformação

$$\begin{aligned} \varphi_{\mu\nu} &\rightarrow e^{i\alpha}\varphi_{\mu\nu}, \\ \varphi^\dagger_{\mu\nu} &\rightarrow e^{-i\alpha}\varphi^\dagger_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Do princípio da ação-mínima $(\delta S) = 0$, obtém-se as equações do movimento

$$\begin{aligned}\partial_\sigma \partial^{[\mu} \varphi^{\sigma\nu]} &= 0 \\ \partial_\sigma \partial^{[\mu} \varphi^{\sigma\nu]\dagger} &= 0,\end{aligned}\tag{4.46}$$

sendo anti-simetrizada nos índices $[\mu, \nu]$. A corrente de Noether J^μ , para o campo de matéria $\varphi_{\mu\nu}$, tem a seguinte forma:

$$J^\mu = i(\varphi^{\mu\nu} \partial^\rho \varphi_{\rho\nu}^\dagger - \varphi^{\mu\nu\dagger} \partial^\rho \varphi_{\rho\nu}),\tag{4.47}$$

podendo ser escrita nas componentes do campo

$$J^\mu = 2(T^{\mu\nu} \partial^\rho \tilde{T}_{\rho\nu} - \tilde{T}^{\mu\nu} \partial^\rho T_{\rho\nu}),\tag{4.48}$$

satisfazendo a seguinte lei de conservação

$$\partial_\mu J^\mu = 0,\tag{4.49}$$

válida através das equações do movimento eq.(4.46).

O campo tensorial anti-simétrico de matéria $T_{\mu\nu}$ pode ser representado por meio de uma teoria do tipo $\lambda\varphi^4$ de um campo carregado complexo $\varphi_{\mu\nu}$, satisfazendo uma condição de auto-dualidade complexa, com uma corrente conservada do grupo $U(1)$. É importante ressaltar que a corrente conservada J_μ , quando representada em termos das componentes do campo complexo, possui termos topológicos devido a presença do tensor auto-dual $\tilde{T}_{\mu\nu}$. O modelo pode ainda ser acoplado com campos de gauge através da derivada covariante e também com férmions, reproduzindo deste modo a ação de Avdeev e Chizhov (19).

4.4 O mapeamento do campo de matéria

Considere a ação $S(\varphi, \varphi^\dagger)$, para o campo tensorial anti-simétrico de matéria $T_{\mu\nu}$, descrita no modelo $\lambda\varphi^4$:

$$S(\varphi, \varphi^\dagger) = \int d^4x \left(\partial_\mu \varphi^{\mu\nu} \partial^\rho \varphi_{\rho\nu}^\dagger \right),\tag{4.50}$$

onde φ, φ^\dagger são campos tensoriais anti-simétricos complexos. Vale ressaltar, que o procedimento de mapeamento dual é adequado para ações que possuem termos lineares em

suas derivadas, fazendo-se necessário pelo uso da relação (4.28). Isso pode ser satisfeito introduzindo-se adequadamente campos auxiliares, reescrevendo a ação eq.(4.50) da seguinte forma :

$$S(\varphi, b) = \int d^4x \left(b_\mu^\dagger \partial_\rho \varphi^{\rho\mu} + b^\mu \partial_\rho \varphi^{\rho\mu\dagger} - b^\mu b_\mu^\dagger \right). \quad (4.51)$$

A equivalência entre as expressões (4.50) e (4.51) é observada, eliminando-se os campos auxiliares b_μ e b_μ^\dagger , através das equações do movimento, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta b^\mu} &= \partial^\rho \varphi_{\rho\mu}^\dagger - c_\mu^\dagger; \\ \frac{\delta S}{\delta b_\mu^\dagger} &= \partial^\rho \varphi_{\rho\mu} - b_\mu. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Em componentes temos:

$$S(T, c, d) = \int d^4x \left(2c_\mu \partial_\rho T^{\rho\mu} + 2d_\mu \partial_\rho \tilde{T}^{\rho\mu} - c_\mu c^\mu - d_\mu d^\mu \right), \quad (4.53)$$

onde foi usada a seguinte representação

$$\begin{aligned} b_\mu &= c_\mu + i d_\mu \\ \varphi_{\mu\nu} &= T_{\mu\nu} + i \tilde{T}_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

A corrente de Noether J^μ correspondente a invariância sob transformação de gauge global do grupo $U(1)$

$$\begin{aligned} \varphi_{\mu\nu} &\rightarrow e^{i\alpha} \varphi_{\mu\nu}, & b_\mu &\rightarrow e^{i\alpha} b_\mu \\ \varphi_{\mu\nu}^\dagger &\rightarrow e^{-i\alpha} \varphi_{\mu\nu}^\dagger, & b_\mu^\dagger &\rightarrow e^{-i\alpha} b_\mu^\dagger, \end{aligned} \quad (4.54)$$

tem a seguinte forma:

$$J^\mu = i \left(b_\mu \varphi^{\mu\nu} - b_\mu \varphi^{\mu\nu\dagger} \right), \quad (4.55)$$

que pode ser escrita em termos das componentes dos campos

$$J^\mu = 2(d_\nu T^{\mu\nu} - c_\nu \tilde{T}^{\mu\nu}), \quad (4.56)$$

satisfazendo a seguinte lei de conservação

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (4.57)$$

Agora consideraremos o gerador funcional $\mathcal{Z}[s]$ das funções de correlação das correntes, sendo definido por:

$$\mathcal{Z}[s_\mu] = \mathcal{N} \int DT_{\mu\nu} Dc_\mu Dd_\mu e^{-i(S(T,c,d) + \int d^4x s_\mu J^\mu)}, \quad (4.58)$$

com $s_\mu J^\mu$ representando o acoplamento da fonte s com a corrente de Noether J de $U(1)$. Devido a linearidade da ação $S(T, c, d)$, é válida a seguinte relação:

$$S(T, c, d) + \int d^4x s_\mu J^\mu = S(T, DT, c, d) \quad (4.59)$$

onde DT representa a derivada covariante para o campo de matéria $T_{\mu\nu}$, obtida da seguinte expressão:

$$D_\mu \varphi_{\rho\sigma} = \partial_\mu \varphi_{\rho\sigma} + i s_\mu \varphi_{\rho\sigma}, \quad (4.60)$$

que em componentes reduz-se a

$$\begin{aligned} D_\mu T_{\rho\sigma} &= \partial_\mu T_{\rho\sigma} - s_\mu \tilde{T}_{\rho\sigma}, \\ D_\mu \tilde{T}_{\rho\sigma} &= \partial_\mu \tilde{T}_{\rho\sigma} + s_\mu T_{\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

O gerador funcional $\mathcal{Z}[s]$ passa então, a ser representado da seguinte forma:

$$\mathcal{Z}[s_\mu] = \mathcal{N} \int DT_{\mu\nu} Dc_\mu Dd_\mu e^{-iS(T,DT,c,d)}. \quad (4.62)$$

Isto equivale a efetuarmos uma transformação de gauge local em $\varphi_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\rightarrow e^{i\alpha(x)} \varphi(x), \\ \varphi^\dagger(x) &\rightarrow e^{-i\alpha(x)} \varphi^\dagger(x), \end{aligned} \quad (4.63)$$

o que mostra que $\mathcal{Z}[s]$ é um invariante de gauge, isto é

$$\mathcal{Z}[s_\mu] = \mathcal{Z}[s_\mu + \partial_\mu \alpha]. \quad (4.64)$$

Da invariância de gauge, temos:

$$\mathcal{Z}[s] = \mathcal{N} \int DT_{\mu\nu} Dc_\mu Dd_\mu e^{-iS[T, \partial_\mu T - (s_\mu + \partial_\mu \alpha) \tilde{T}, c, d]}, \quad (4.65)$$

podendo ser escrito na forma

$$\mathcal{Z}[s_\mu] = \mathcal{N} \int DT_{\mu\nu} Dc_\mu Dd_\mu D\eta_\mu \delta[\tilde{f}_{\mu\nu}(\eta)] e^{-iS(T,c,d;s_\mu+\eta_\mu)}, \quad (4.66)$$

onde introduzimos a ‘delta funcional de Dirac’ através da integração sobre um campo vetorial de gauge η_μ , de modo que $\eta_\mu = \partial_\mu \alpha$ é solução para $\tilde{f}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\rho \eta^\sigma$. Usando a representação da transformada funcional de Fourier para a função delta

$$\delta[\tilde{f}_{\mu\nu}(\eta)] = \int DB_{\mu\nu} e^{-i \int d^4x B_{\mu\nu} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho \eta_\sigma}, \quad (4.67)$$

onde $B_{\mu\nu}$ é o campo tensorial anti-simétrico de gauge (4). A expressão (4.66) reduz-se a

$$Z[s_\mu] = \mathcal{N} \int DB_{\mu\nu} DT_{\mu\nu} D\eta_\mu Dc_\mu Dd_\mu e^{-iS(T,\partial_\mu T - (s_\mu + \eta_\mu)\tilde{T},c,d)} e^{-i \int d^4x B_{\mu\nu} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho \eta_\sigma}. \quad (4.68)$$

Fazendo uma mudança de variável do tipo

$$\eta_\mu \rightarrow \eta_\mu - s_\mu, \quad (4.69)$$

a fonte externa s_μ se desacopla do campo de matéria $T_{\mu\nu}$, ou seja:

$$Z[s_\mu] = \mathcal{N} \int DB_{\mu\nu} DT_{\mu\nu} D\eta_\mu Dc_\mu Dd_\mu e^{-iS(T,\partial_\mu T - \eta_\mu \tilde{T},c,d)} e^{-i \int d^4x B_{\mu\nu} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho (\eta_\sigma - s_\sigma)}. \quad (4.70)$$

Introduzindo-se agora, a ação efetiva $S_{\text{eff}}(\eta) = \int d^3x \mathcal{L}_{\text{eff}}(\eta)$, através da equação

$$e^{-iS_{\text{eff}}[\eta_\mu]} = \int DT_{\mu\nu} Dc_\mu Dd_\mu e^{-i \int d^4x \mathcal{L}(T,\partial_\mu T - \eta_\mu \tilde{T},c,d)}, \quad (4.71)$$

obtem-se:

$$Z[s_\mu] = \int D\eta_\mu DB_{\mu\nu} e^{-i(S_{\text{eff}}[\eta_\mu] - \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho \eta_\sigma + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho s_\sigma)}. \quad (4.72)$$

Finalmente, definimos a chamada ação dual $S_{\text{dual}}(B)$

$$e^{-iS_{\text{dual}}[B_{\mu\nu}]} = \int D\eta_\mu e^{-i \int d^4x (\mathcal{L}_{\text{eff}}(\eta) - B_{\mu\nu} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho \eta_\sigma)}, \quad (4.73)$$

obtendo-se assim, a *representação dual* do gerador funcional $\mathcal{Z}[s_\mu]$, ou seja:

$$\mathcal{Z}[s_\mu] = \int DB_{\mu\nu} e^{-i(S_{\text{dual}}[B_{\mu\nu}] + \int d^4x s_\mu \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu B_{\rho\sigma})}. \quad (4.74)$$

Vemos então, que o campo dual $B_{\mu\nu}$ representa um verdadeiro campo de gauge e desta forma, a ação dual $S_{\text{dual}}(B_{\mu\nu})$, descrita na eq.(4.73), possui simetria de gauge.

$$S_{\text{dual}}[B_{\mu\nu}] = S_{\text{dual}}[B_{\mu\nu} + \partial_\mu\omega_\nu] . \quad (4.75)$$

A expressão (4.74) assegura a representação das funções de correlação em termos de uma teoria de gauge em (3+1) dimensões. Assim, o termo de interação com a fonte externa s_μ pode ser interpretado como uma corrente topológica j_μ^T e deste modo, podemos afirmar que a corrente de Noether J^μ , associada a simetria $U(1)$, é mapeada em uma corrente topológica dual identicamente conservada, isto é

$$J_\mu(\varphi, \varphi^\dagger) \longrightarrow j_\mu^T(B) = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu B_{\rho\sigma} . \quad (4.76)$$

Para a ação clássica tem-se:

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \phi^\dagger, \partial_\mu\phi, \partial_\mu\phi^\dagger) \longrightarrow S_{\text{dual}}[B_{\mu\nu}] . \quad (4.77)$$

Além disso, é fácil ver que o mapeamento preserva a simetria de paridade existente no modelo, uma vez que a corrente de Noether J_μ , escrita em componentes do campo de matéria $\varphi_{\mu\nu}$, possui termos topológicos

$$J^\mu = 2(\partial^\rho \tilde{T}_{\rho\nu} T^{\mu\nu} - \partial^\rho T_{\rho\nu} \tilde{T}^{\mu\nu}), \quad (4.78)$$

o que leva a seguinte expressão:

$$J_\mu(T, \tilde{T}) \longrightarrow j_\mu^T(B) = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu B_{\rho\sigma}, \quad (4.79)$$

sendo invariante sob transformação de paridade. É importante mencionarmos que no mapeamento dual, proposto inicialmente em (32), a simetria de paridade é quebrada. Entretanto, espera-se que as simetrias existentes em um determinado modelo de campo devam ser preservadas ao efetuar-se um mapeamento dual.

As equações (4.76) e (4.77) representam o mapeamento dual e devem ser entendidas com uma igualdade entre as funções de correlação das correntes, ou seja:

$$\begin{aligned} & \langle J_{\mu_1}(x_1) J_{\mu_2}(x_2) \dots J_{\mu_n}(x_n) \rangle_{S[\varphi_{\mu\nu}]} \\ &= \langle j_{\mu_1}^T(x_1) j_{\mu_2}^T(x_2) \dots j_{\mu_n}^T(x_n) \rangle_{S_{\text{dual}}[B_{\mu\nu}]} , \end{aligned} \quad (4.80)$$

obtidas pela diferenciação dos geradores funcionais (4.62) e (4.74) com relação a fonte externa s_μ . A equação (4.80) nos diz que as funções de Green das correntes de Noether de $U(1)$ tem uma representação dual em termos de uma corrente topológica, construída com o campo tensorial anti-simétrico de gauge $B_{\mu\nu}$.

É importante destacar que o termo de interação, correspondente a ação dual eq.(4.74), pode ser identificado com o termo topológico

$$\int d^4x s_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu B_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} , \quad (4.81)$$

denominado termo BF , muito utilizado na construção de teorias topológicas. De fato este termo é responsável por uma grande classe de modelos topológicos do tipo Schwarz, conhecidos na literatura como modelos BF (7). Estes modelos podem ser formulados em um espaço de dimensão arbitrária, e representam também a generalização do modelo de Chern-Simons para espaços-tempos de dimensões ímpares.

Outra característica importante apresentada no mapeamento entre o campo de matéria e o campo de Kalb-Ramond é a ausência de anomalias, conhecidas como anomalias axiais. A presença de anomalias do tipo axiais são encontradas em procedimentos de bosonização em $(3 + 1)$ dimensões (33), neste caso a corrente axial na teoria fermiônica é mapeada em uma corrente topológica com um termo associado ao campo de Kalb-Ramond e outro acoplado a uma fonte externa, sendo este último, o responsável pelo surgimento de anomalias.

$$\begin{aligned} j_\mu = \langle \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \rangle &\rightarrow J_\mu^T = -\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu A_{\rho\sigma} \\ j_{5\mu} = \langle \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi \rangle &\rightarrow J_\mu^T = -\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu B_{\rho\sigma} - \frac{i}{4\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} s_\nu \partial_\rho s_\sigma , \end{aligned} \quad (4.82)$$

onde

$$\begin{aligned} \partial_\mu j_\mu &= 0 \\ \partial_\mu j_\mu^5 &= -\frac{i}{4\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu s_\nu \partial_\rho s_\sigma \end{aligned}$$

Vemos então, que a bosonização da corrente j_μ^5 reproduz a anomalia axial, devido a presença da matriz γ^5 .

Em nosso caso, embora a corrente conservada $U(1)$ para o campo de matéria possa ter termos topológicos, tal anomalia não é observada. A presença do termo topológico

em nossa teoria é equivalente ao termo γ^5 , na teoria fermiônica. Essa relação pode ser observada através da seguinte identidade, válida no espaço-tempo de Minkowski.

$$\tilde{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\sigma_{\rho\lambda} = i\gamma^5\sigma^{\mu\nu}. \quad (4.83)$$

Além disso um dos requisitos importantes para que uma teoria seja renormalizável em todas as ordens de \hbar , é que a teoria seja livre de anomalias.

CONCLUSÃO

Neste trabalho obtivemos dois resultados extremamente importantes para o campo tensorial anti-simétrico de matéria, descrito através de um campo tensorial anti-simétrico complexo, acompanhado de uma condição auto-dual complexa, válida no espaço-tempo de Minkowski, numa teoria denominada $\lambda\varphi^4$. O primeiro resultado refere-se à geração de massa para o campo de matéria no caso não-abeliano. O segundo consiste no mapeamento entre os campos de matéria e Kalb-Ramond no caso abeliano.

Primeiramente mostramos que o campo tensorial anti-simétrico de matéria adquiriu massa através de dois mecanismos, o de Higgs e o de geração de massa topológica. No mecanismo de Higgs podemos observar que a simetria de gauge não-abeliana acompanhada da simetria discreta de paridade, permitiu a construção de apenas um termo de interação entre os campos tensorial complexo e escalar complexo, sendo este último com valor esperado no vácuo não-nulo. Entretanto, este único acoplamento permitiu o surgimento de massa para o campo de matéria livre da presença de *táquions*, devido ao fato do parâmetro de massa ser independente da escolha de um determinado estado de vácuo. Vale ressaltar que o mecanismo de Higgs abeliano (26), utilizado para o campo de matéria, possibilitou a construção de quatro termos de acoplamento, compatíveis com as simetrias de gauge e paridade, propostas no modelo. E, ao contrário do caso não-abeliano, algumas interações apresentaram problemas quanto aos estados de vácuo, admitindo-se assim a existência de *táquions*, e desta forma, tiveram que ser excluídas por não representarem estados fisicamente aceitáveis. Além disso a obtenção de termos topológicos foi possível quebrando-se a simetria de paridade no modelo, acarretando numa redistribuição dos estados de vácuo para as componentes do campo escalar de Higgs. Isso por sua vez, modificou os termos de interação (3.11) possibilitando assim, no surgimento de um termo topológico para o campo de matéria, acompanhado também de um termo massivo. Entretanto alguns estados de vácuo tornaram-se fisicamente não aceitáveis, por admitirem a presença de *táquions*. A geração de massa também foi observada acoplando-se o campo de matéria com um campo vetorial complexo, com um parâmetro de massa incluindo-se um termo topológico. O cálculo dos propagadores de Feynman para o campo de matéria apresentou pólo massivo. Se entretanto compararmos com o resultado obtido no caso abeliano (27), com simetria de

gauge $U(1)$, veremos que a única diferença está no fato de que, para o caso não-abeliano os campos $\varphi_{\mu\nu}$ e $B_{\mu\nu}$ são organizados em multipletos, admitindo-se portanto, n componentes. Isso pode ser observado pelos índices i, j que especificam a representação do grupo não-abeliano $SU(N)$. Deste forma, o propagador causal para as componentes do campo tensorial de matéria admite um delta de Kronecker δ^{ij} como consequência da condição de ortogonalidade.

O mecanismo de geração de massa não-abeliano para o campo tensorial anti-simétrico de matéria traz consigo uma importante contribuição, do ponto de vista fenomenológico, a cerca da possibilidade desses campos serem incluídos em interações no processo de decaimento radioativo (24) bem como na possibilidade de interações tensoriais descritos na teoria padrão eletrofraca (16) e também em interações tensoriais no modelo dos quarks (17),(18). Essa teorias são descritas em termos de uma teoria de gauge não-abeliana na representação do grupo $SU(2)$, elas prevêm a existência de partículas massivas como mediadoras de suas interações. Desta forma, a geração de massa para o campo de matéria torna-se um ingrediente importante na descrição de interações tensoriais nos processos acima citados.

Na segunda parte do nosso trabalho mostramos que o campo tensorial anti-simétrico de matéria $T_{\mu\nu}$ pode ser mapeado no campo tensorial anti-simétrico de Kalb-Ramond $B_{\mu\nu}$, no mecanismo denominado mapeamento dual (32). Nesse caso mostramos que a ação, descrita para o campo tensorial de matéria, com um termo de interação que representa o acoplamento de uma fonte externa com a corrente conservada do grupo $U(1)$, é mapeada em uma ação de gauge dual, construída com o campo tensorial anti-simétrico de gauge, com um termo de interação que representa o acoplamento da fonte externa com uma corrente topológica identicamente conservada.

Uma característica importante obtida no mapeamento é que ele preserva a simetria de paridade existente na teoria original, onde mostramos que a corrente conservada para o campo de matéria possui termos topológicos, sendo por sua vez, mapeada em uma corrente topológica na teoria de gauge dual. Podendo ser comparado em (33), onde ocorre quebra da simetria de paridade. Além disso é importante destacar que o termo de interação, correspondente a ação dual eq(4.74), pode ser identificado com o termo topológico

$$\int d^4x s_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu B_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} , \quad (4.1)$$

denominado BF , muito utilizado na construção de teorias topológicas. De fato este termo é responsável por uma grande classe de modelos topológicos do tipo Schwarz, conhecidos

na literatura como modelos BF (7). Estes modelos podem ser formulados em um espaço de dimensão arbitrária, e representam também a generalização do modelo de Chern-Simons para espaços-tempos de dimensões ímpares.

Outra característica importante é que o mapeamento do campo de matéria não apresentou anomalias, sendo conhecidas como anomalias axiais. As anomalias surgem no procedimento de bosonização em quatro dimensões (33), devido a presença da matriz γ^5 na corrente axial, da teoria fermiônica. Em nosso caso, embora a corrente conservada $U(1)$ para o campo de matéria possua termos topológicos, tal anomalia não é observada. A presença de um termo topológico em nossa teoria é equivalente ao termo γ^5 , na teoria fermiônica, podendo ser observada através da eq(4.83). Além disso, a ausência de anomalias é importante na construção de uma teoria renormalizável em todas as ordens de grandeza de \hbar .

O mapeamento do campo tensorial anti-simétrico de matéria $T_{\mu\nu}$ em um campo tensorial anti-simétrico de gauge $B_{\mu\nu}$ traz uma importante contribuição na construção de uma teoria de campos com o campo de matéria, diferentemente de uma teoria com campos tensoriais de gauge. O mapeamento pode ser capaz de esclarecer as dúvidas existentes quanto ao graus de liberdade para este tipo de campo, e também, como sabemos que o campo de matéria tem sido incluído em interações tensoriais em processos de decaimentos radioativos (24), bem como na possibilidade de interações tensoriais descritos na teoria padrão eletrofraca (16), é importante que os campos tensoriais de gauge possam ser incluídos em tais interações, tendo em vista que essas teorias são construídas através de uma simetria de gauge não-abeliana.

APÊNDICE A – Algumas identidades úteis

Neste apêndice apresentamos as identidades e relações usadas no decorrer deste trabalho, sendo que algumas demonstrações serão omitidas por conveniência.

A.1 Notações e convenções

No espaço-tempo de Minkowski, usamos a métrica:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

As coordenadas contravariante e covariante têm as representações usuais x^μ e x_μ respectivamente dadas por:

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu, x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad (\text{A.2})$$

A derivada com relação às coordenadas contravariante e covariante são simplifcadamente escritas como:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad (\text{A.3})$$

Um vetor tridimensional é representado em **negrito**

$$\mathbf{A} = \{A^i, i = 1, 2, 3\}, \quad (\text{A.4})$$

e um quadrivetor, da seguinte forma:

$$A^\mu = (A^0, \mathbf{A}), A_\mu = (A^0, -\mathbf{A}). \quad (\text{A.5})$$

O operador D'Alambertiano tem a seguinte notação:

$$\partial^2 = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \nabla^2, \quad (\text{A.6})$$

e o operador quadri-momentum tem a forma

$$p^\mu = i\partial^\mu = (i\partial^0, -i\nabla) \quad (\text{A.7})$$

No espaço-tempo de Minkowski o tensor totalmente anti-simétrico de Levi-Civita é dado por:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{se } (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ é uma permutação par de } (0, 1, 2, 3) \\ -1 & \text{se é uma permutação ímpar} \\ 0 & \text{no caso contrário.} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

O tensor $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ satisfaz as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \\ \varepsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\varepsilon_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} &= -\det\left(\delta_{\nu_j}^{\mu_i}\right), i, j = 0, 1, 2, 3 \\ \varepsilon^{\alpha\beta\mu_1\mu_2}\varepsilon_{\alpha\beta\nu_1\nu_2} &= -2\left(\delta_{\nu_1}^{\mu_1}\delta_{\nu_2}^{\mu_2} - \delta_{\nu_2}^{\mu_1}\delta_{\nu_1}^{\mu_2}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

A.2 Tensores anti-simétricos

Um tensor anti-simétrico covariante de rank-r num espaço D-dimensional é definido como

$$T_{\mu_1\mu_2\dots\mu_r} = \text{sgn}(P) T_{P(\mu_1\mu_2\dots\mu_r)} \{\mu_j = 1, \dots, D; j = 1, \dots, r\}, \quad (\text{A.10})$$

onde P é a permutação dos índices $\{\mu_1 \dots \mu_r\}$ e $\text{sgn}(P) = -1, 1$ se a permutação for ímpar, par respectivamente. Desta definição segue que um tensor anti-simétrico de rank- $(D+1)$ em um espaço D-dimensional é identicamente nulo. O tensor de Levi-Civita em um espaço D-dimensional é um tensor anti-simétrico de rank-D onde $\varepsilon_{1,2,\dots,D} = 1$.

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_D} &= g^{-1}\varepsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_D} \\ \varepsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_D}\varepsilon_{\nu_1\nu_2\dots\nu_D} &= g^{-1}\det\left(\delta_{\nu_j}^{\mu_i}\right), (i, j = 1, 2, \dots, D) \\ \varepsilon^{\mu_1\dots\mu_k\dots\mu_D}\varepsilon_{\mu_1\dots\mu_k\dots\mu_D} &= g^{-1}k!\det\left(\delta_{\nu_j}^{\mu_i}\right), (i, j = k+1, k+2, \dots, D) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

onde $g = \det(g_{\mu\nu})$. O dual de um tensor anti-simétrico de rank-r é um tensor de rank- $(D-r)$ definido por:

$$\tilde{T}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{(D-r)}} = \frac{\sqrt{|g|}}{r!}\varepsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{(D-r)}} T^{\nu_1\nu_2\dots\nu_r} \quad (\text{A.12})$$

Um tensor anti-simétrico T é auto-dual se

$$\tilde{\tilde{T}} = T \quad (\text{A.13})$$

Isto implica que apenas espaços de dimensões pares admite a auto-dualidade. Aplicando a operação de dualidade duas vezes à um tensor anti-simétrico T teremos:

$$\tilde{\tilde{T}} = (-1)^{r(D-r)} \text{sig}(g) T, \text{sig}(g) = \frac{|g|}{g} \quad (\text{A.14})$$

Logo temos autodualidade se $(-1)^{r^2} \text{sig}(g) = 1$.

Para variedades Riemannianas ($\text{sig}(g) = 1$) temos tensores autoduais de rank- $r = 2, 4, \dots$ em $D = 4, 8, \dots$, e para variedades Lorentzianas ($\text{sig}(g) = -1$), temos tensores autoduais de rank- $r = 1, 3, \dots$ em $D = 2, 6, \dots$

Um tensor é auto-dual complexo se $\tilde{T} = -iT$, sendo i a unidade imaginária e T um tensor anti-simétrico complexo. Desta definição resulta que temos a autodualidade complexa se $(-1)^{r^2} \text{sig}(g) = -1$. Logo temos tensores auto-duais complexos de rank $r = 2, 4, \dots$ em variedades Lorentzianas de dimensões $D = 2, 6, \dots$ e de rank $r = 1, 3, \dots$ em variedades Riemannianas de dimensões $D = 2, 6, \dots$

Segue algumas identidades úteis no espaço de Minkowski para tensores de segundo rank anti-simétricos

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{\mu\nu} \tilde{A}^{\mu\nu} &= -B_{\mu\nu} A^{\mu\nu} \\ \tilde{B}^{\mu\nu} \tilde{A}_{\nu\sigma} &= \frac{1}{2} \delta_{\sigma}^{\mu} B^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} + A^{\mu\nu} B_{\nu\sigma} \\ \partial_{\rho} \tilde{A}^{\rho\mu} \partial^{\sigma} B_{\sigma\mu} &= \frac{1}{2} \partial_{\sigma} A_{\alpha\beta} \partial^{\sigma} \tilde{B}^{\alpha\beta} - \partial_{\sigma} A_{\rho\mu} \partial^{\rho} \tilde{B}^{\sigma\mu} \\ \partial^{\sigma} \partial_{\rho} \tilde{A}^{\rho\mu} B_{\sigma\mu} &= \frac{1}{2} \partial^2 A_{\alpha\beta} \tilde{B}^{\alpha\beta} - \partial_{\sigma} \partial^{\rho} A_{\rho\mu} \tilde{B}^{\sigma\mu} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

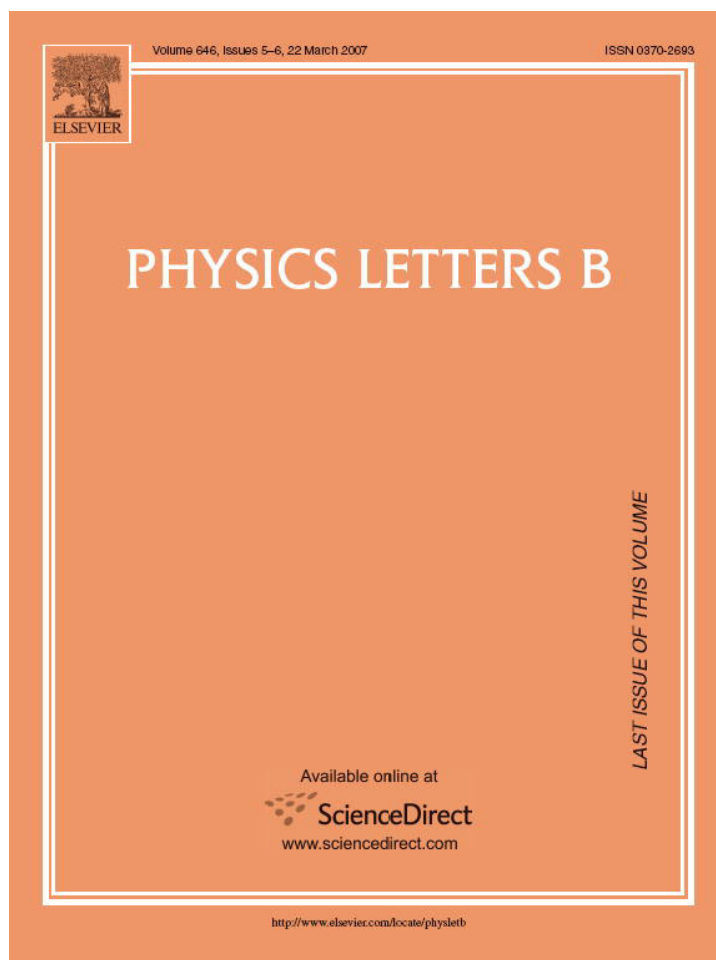
Referências

- 1 OGIEVETSKY, V. I.; POLUBARINOV, I. V. The notoph and its possible interactions. *Yad.Fiz*, v. 4, n. 1-2, p. 216–223, 1966.
- 2 SALAM, A.; SEZGIN, E. *Supergravities in Diverse Dimensions*. [S.l.]: North-Holland and World Scientific, 1969.
- 3 KALB, M.; RAMOND, P. Classical direct interstring action. *Phys. Rev. D*, v. 9, n. 8, p. 2273–2284, 1974.
- 4 ALLEN, T. J.; BOWICK, M. J.; LAHIRI, A. Topological mass generation in 3+1 dimensions. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 6, n. 7, p. 559–571, 1991.
- 5 DESER, S.; JACKIW, R.; TEMPLETON, S. Topologically massive gauge-theories. *Ann. Phys.*, v. 140, n. 2, p. 372–411, 1982.
- 6 BIRMINGHAM, D. et al. Topological field-theory. *Phys. Rep.-Rev. Sec. Phys. Lett.*, v. 209, n. 4-5, p. 129–340, 1991.
- 7 SCHWARZ, A. S. *Topological Conf. Abstracts*. [S.l.]: Baku Intern., 1987.
- 8 HOROWITZ, G. T. Exactly soluble diffeomorphism invariant theories. *Commun. Math. Phys.*, v. 125, n. 3, p. 417–437, 1989.
- 9 HOROWITZ, G. T.; SREDNICKI, M. A quantum-field theoretic description of linking numbers and their generalization. *Commun. Math. Phys.*, v. 130, n. 1, p. 83–94, 1990.
- 10 BLAU, M.; THOMPSON, G. Topological Gauge-theories of antisymmetric tensor-fields. *Ann. Phys.*, v. 205, n. 1, p. 130–172, 1991.
- 11 GUADAGNINI, E.; MAGGIORE, N.; SORELLA, S. P. Supersymmetric structure of 4-dimensional antisymmetric tensor-fields. *Phys. Lett. B*, v. 255, n. 1, p. 65–73, 1991.
- 12 LUCCHESI, C.; PIGUET, O.; SORELLA, S. P. Renormalization and finiteness of topological BF theories. *Nucl. Phys. B*, v. 395, n. 1-2, p. 325–353, 1993.
- 13 TODOROV, I. T.; MINTCHEV, M. C.; PETKOVA, V. B. *Conformal Invariance in Quantum Field Theory*. [S.l.]: ETS, 1978.
- 14 WIT, B. de; HOLTEN, J. W. van. Multiplets of linearized SO(2) supergravity. *Nucl. Phys. B*, v. 155, n. 1-2, p. 530–542, 1974.
- 15 CHIZHOV, M. V. New tensor particles from $\pi^- \rightarrow e^- \tilde{\nu} \gamma$ and $\kappa^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu$ decays. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 8, n. 29, p. 2753–2762, 1993.

- 16 STEINER, H. et al. Analysis of $\kappa^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu$ decay. *Phys. Lett. B*, v. 36, n. 7, p. 521–524, 1971.
- 17 CHIZHOV, M. V. New tensor interactions and the K(L) - K(S) mass difference. *JINR Dubna E2-94-253*, 1994.
- 18 CHIZHOV, M. V. Search for tensor interactions in kaon decays at daphne. *Phys. Lett. B*, v. 1-3, n. 29, p. 359–364, 1996.
- 19 AVDEEV, L. V.; CHIZHOV, M. V. Antisymmetric tensor matter fields - an abelian model. *Phys. Lett. B*, v. 321, n. 3, p. 212–218, 1994.
- 20 AVDEEV, L. V.; CHIZHOV, M. V. A queer reduction of degrees of freedom. *Phys.Part.Nucl.Lett*, v. 2, p. 7–10, 2005.
- 21 LEMES, V.; RENAN, R.; SORELLA, S. P. Algebraic renormalization of antisymmetric tensor matter fields. *Phys. Lett. B*, v. 344, n. 1-4, p. 158–163, 1995.
- 22 WESS, J.; ZUMINO, B. Lagrangian model invariant under supergauge transformations. *Phys. Lett. B*, B 49, n. 1, p. 52–54, 1974.
- 23 LEMES, V.; RENAN, R.; SORELLA, S. P. φ^4 - theory for antisymmetric tensor matter fields in minkowski space-time. *Phys. Lett. B*, v. 352, n. 1-2, p. 37–42, 1995.
- 24 BOLOTOV, V. N. et al. The experimental-study of the $\pi^- \rightarrow e^- \tilde{\nu} \gamma$ - decay in flight. *Phys. Lett. B*, v. 243, n. 3, p. 308–312, 1990.
- 25 LEMES, V.; RENAN, R.; SORELLA, S. P. Renormalization of nonabelian gauge theories with tensor matter. *Phys. Lett. B*, v. 392, n. 1-2, p. 106–114, 1997.
- 26 GONZAGA, L. et al. Generating mass and topological terms to the antisymmetric tensor matter field by higgs mechanism. *Phys. Lett. B*, v. 646, n. 5-6, p. 279–281, 2007.
- 27 GONZAGA, L.; CUNHA, M. S.; LANDIM, R. R. Topological mass generation to antisymmetric tensor matter field. *Europhys. Lett.*, v. 69, n. 2, p. 184–188, 2005.
- 28 MARINO, E. C. Complete bosonization of the dirac fermion field in 2 + 1 dimensions. *Phys. Lett. B*, v. 263, n. 1, p. 63–68, 1991.
- 29 BARCI, D. G.; OXMAN, L. E.; SORELLA, S. P. Topological and universal aspects of bosonized interacting fermionic systems in 2+1 dimensions. *Phys. Rev. D*, v. 59, n. 10, p. 105012, 1999.
- 30 COLEMAN, S. Quantum Sine-Gordon equation as massive Thirring model. *Phys. Rev. D*, v. 11, n. 8, p. 2088–2097, 1975.
- 31 MANDELSTAM, S. Soliton operators for quantized Sine-Gordon equation. *Phys. Rev. D*, v. 11, n. 10, p. 3026–3030, 1975.
- 32 FOSCO, C. D. et al. Dual description of U(1) charged fields in (2+1) dimensions. *Ann. Phys.*, v. 290, n. 1, p. 27–44, 2001.
- 33 FOSCO, C. D.; SCHAPOSNIK, F. A. Bosonization of vector and axial vector currents in (3+1)-dimensions. *Phys. Lett. B*, v. 391, n. 1-2, p. 136–143, 1997.

- 34 COLEMAN, S.; GROSS, D. J. Price of asymptotic freedom. *Phys. Rev. Lett.*, v. 31, n. 13, p. 851–854, 1973.
- 35 FRADKIN, E. S.; TSEYTLIN, A. A. Asymptotic freedom in extended conformal supergravities. *Phys. Lett. B*, v. 110, n. 2, p. 117–122, 1982.
- 36 PAUL, S. K.; KHARE, A. Chern-Simons term by spontaneous symmetry-breaking in an abelian Higgs-model. *Phys. Lett. B*, v. 193, n. 2-3, p. 253–256, 1987.
- 37 PAUL, S. K. Correction. *Phys. Lett. B*, v. 196, n. 4, p. 571–571, 1987.
- 38 FRADKIN, E.; SCHAPOSNIK, F. A. The fermion-boson mapping in 3-dimensional quantum-field theory. *Phys. Lett. B*, v. 338, n. 2-3, p. 253–258, 1994.
- 39 BANERJEE, R. Bosonization in 3-dimensional quantum-field theory. *Phys. Lett. B*, v. 358, n. 3-4, p. 297–302, 1995.

Provided for non-commercial research and educational use only.
Not for reproduction or distribution or commercial use.



This article was originally published in a journal published by Elsevier, and the attached copy is provided by Elsevier for the author's benefit and for the benefit of the author's institution, for non-commercial research and educational use including without limitation use in instruction at your institution, sending it to specific colleagues that you know, and providing a copy to your institution's administrator.

All other uses, reproduction and distribution, including without limitation commercial reprints, selling or licensing copies or access, or posting on open internet sites, your personal or institution's website or repository, are prohibited. For exceptions, permission may be sought for such use through Elsevier's permissions site at:

<http://www.elsevier.com/locate/permissionusematerial>

Generating mass and topological terms to the antisymmetric tensor matter field by Higgs mechanism

L. Gonzaga Filho^a, M.S. Cunha^a, C.A.S. Almeida^b, R.R. Landim^{b,*}

^a Núcleo de Física, Universidade Estadual do Ceará, Av. Paranjana 1700, CEP 60740-000, Fortaleza, Ceará, Brazil

^b Departamento de Física, Universidade Federal do Ceará, Caixa Postal 6030, CEP 60455-760, Fortaleza, Ceará, Brazil

Received 28 November 2006; accepted 12 January 2007

Available online 3 February 2007

Editor: M. Cvetič

Abstract

The interaction between the complex antisymmetric tensor matter field and a scalar field is constructed. We analyze the Higgs mechanism and show the generation of mass and topological terms by spontaneous symmetry breaking.

© 2007 Elsevier B.V. All rights reserved.

PACS: 11.15.Ex; 11.30.Er

Keywords: Spontaneous breaking of gauge symmetries

Antisymmetric tensor matter (ATM) fields are new objects of study in field theory from theoretical as phenomenological point of view [1–6]. They naturally arises in conformal field theory and conformal supergravity [7,8]. When an ATM field is coupled to an Abelian gauge field, it gives an asymptotically free ultraviolet behavior to the gauge coupling, i.e., the renormalization beta function becomes negative [9], and the model is renormalizable in all order of perturbation theory [10]. Another remarkable fact is that the model can be seen as a $\lambda\varphi^4$ theory of a complex antisymmetric tensor which obeys a complex self-dual condition [11].

Some aspects of theories which involve ATM fields still remain to be discussed and clarified. For instance, in Euclidean space they describe three physical and three ghost degrees of freedom [12]. The study of the classical dynamics in the Minkowski space has been done by Avdeev and Chizhov [13] where they have argued the Hamiltonian becomes positive-definite if the solutions are restricted to that bounded at the time infinity. In this case, only two degrees of freedom contribute to the energy and momentum.

As shown by Lemes et al. [11], another aspect of ATM fields forbids the existence of a mass term to them, namely the complex self-dual condition. Despite of this, in this Letter we analyze the possibility to give mass to an ATM field through the Higgs mechanism. As will be shown, a scalar field is coupled to the ATM field and by requirement of parity it is described as a doublet where one of its components is a pseudo-scalar. On the other hand, neglecting the parity, a topological term to the ATM field can also be generated by spontaneous symmetry breaking.

Let us begin by introducing the notations and conventions that will be used throughout this Letter. We use the metric $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$, and the totally antisymmetric tensor $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ is normalized as $\varepsilon_{0123} = 1$. In Minkowski space-time, we take the antisymmetric tensor matter field $T_{\mu\nu}$ as real component of a complex second rank tensor $\varphi_{\mu\nu}$ which obeys the complex self-dual condition [11], namely

$$\varphi_{\mu\nu} = i\tilde{\varphi}_{\mu\nu} \quad (1)$$

where

$$\varphi_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + i\tilde{T}_{\mu\nu}, \quad \tilde{\varphi}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varphi^{\rho\sigma}. \quad (2)$$

* Corresponding author.

E-mail address: renan@fisica.ufc.br (R.R. Landim).

Thus the complex ATM field can be coupled to axial Abelian gauge field and Dirac spinors in a more compact way than that originally proposed by Avdeev and Chizhov [9],

$$S_{\text{inv}} = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + h\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu A_\mu \psi - (\nabla_\mu \varphi^{\mu\nu})^\dagger (\nabla^\sigma \varphi_{\sigma\nu}) - \frac{g}{8} (\varphi^{\dagger\mu\nu} \varphi_{\nu\alpha} \varphi^{\dagger\alpha\beta} \varphi_{\beta\mu}) + \frac{1}{2} y \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} (\varphi^{\dagger\mu\nu} + \varphi^{\mu\nu}) \psi \right\}. \quad (3)$$

The above action is invariant under the following gauge transformations,

$$\begin{aligned} \delta A_\mu &= \partial_\mu \omega, & \delta \psi &= -ih\omega\gamma_5\psi, \\ \delta \bar{\psi} &= -ih\omega\bar{\psi}\gamma_5, & \delta \varphi_{\mu\nu} &= 2ih\omega\varphi_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4)$$

Under parity (\mathcal{P}) and charge conjugation (\mathcal{C}):

(i) Parity \mathcal{P} :

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x_P = (x^0, -x^i), \quad i = 1, 2, 3, \\ \psi &\rightarrow \psi^P = \gamma^0 \psi, \\ A_0 &\rightarrow A_0^P = -A_0, \quad A_i \rightarrow A_i^P = A_i, \\ \varphi_{0i} &\rightarrow \varphi_{0i}^P = -\varphi_{0i}^\dagger, \quad \varphi_{ij} \rightarrow \varphi_{ij}^P = \varphi_{ij}^\dagger. \end{aligned} \quad (5)$$

(ii) Charge conjugation \mathcal{C} :

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi^c = C\bar{\psi}^T, \quad C = i\gamma^0\gamma^2, \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu^c = A_\mu, \\ \varphi_{\mu\nu} &\rightarrow \varphi_{\mu\nu}^c = -\varphi_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (6)$$

Now we construct the coupling between the complex self-dual field $\varphi_{\mu\nu}$ and the complex scalar field $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ restricting ourselves to the power-counting renormalizable interactions, gauge invariance, and the parity symmetry of the model described in (4) and (5), respectively.

Since we are interested in mass generation, we take only quadratic terms in $\varphi_{\mu\nu}$. However, from the self-dual condition (1) and the properties of the Levi-Civita tensor in Minkowski space-time we have $\varphi_{\mu\nu}^* \varphi^{\mu\nu} = 0$, which implies that the most general quadratic terms in $\varphi_{\mu\nu}$ coupled to a complex scalar ϕ and renormalizable by power-counting are the form

$$\begin{aligned} \int (d^4x a \varphi^{*\mu\nu} \varphi_{\mu\nu}^* \phi + b \varphi^{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu} \phi + c \varphi^{*\mu\nu} \varphi_{\mu\nu}^* \phi \phi \\ + d \varphi^{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu} \phi \phi + \text{c.c.}), \end{aligned} \quad (7)$$

where c.c. stands for complex conjugate terms such that (7) becomes real with a, b, c , and d arbitrary constants. Notice that, from the action given by Eq. (3), the self-dual tensor $\varphi_{\mu\nu}$ has canonical dimension equal to one. The value is the same for a scalar field in four dimensions.

The requirement of gauge invariance has given us four different gauge transformations for the scalar field, with charges $\pm 2h$ and $\pm 4h$. This implies that only one term of (7) can be added to the Lagrangian (3).

Now turning back to the parity invariance of the interactions, the quadratic term $\varphi_{\mu\nu} \varphi^{\mu\nu}$ is transformed under parity by

$$\varphi_{\mu\nu} \varphi^{\mu\nu} \rightarrow \varphi_{\mu\nu}^* \varphi^{*\mu\nu}. \quad (8)$$

To make all the terms in (7) invariant under parity, a, b, c , and d must be real and the complex scalar field ϕ must be transformed as $\phi \rightarrow \phi^*$. This implies that $\phi_1 \rightarrow \phi_1$ and $\phi_2 \rightarrow -\phi_2$, i.e., ϕ_2 is a pseudo-scalar.

We are able now to analyze the spontaneous symmetry breaking, first focusing our attention to the interaction term given in (7) with the parity being preserved. The Higgs potential is

$$V(\phi) = -\frac{1}{2} \mu^2 \phi^* \phi + \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi)^2. \quad (9)$$

The minimum of (9) occurs at $\phi_1^2 + \phi_2^2 = v^2$, where $v = (\mu^2/\lambda)^{1/2}$. In principle there exist infinity number of physical equivalent minima. Let us emphasize here that in our case the complex scalar field has a component which is not a scalar but a pseudo-scalar. Under parity the ϕ_2 component is transformed as $\phi_2 \rightarrow -\phi_2$. Consequently, the invariance of the model by parity symmetry fixes its vacuum expected value to be zero, i.e., $\langle 0|\phi_2|0\rangle = 0$. Instead of infinity number of physical equivalent vacua we have only two possibilities: $\langle 0|\phi_2|0\rangle = 0$ and $\langle 0|\phi_1|0\rangle = v$ or $\langle 0|\phi_2|0\rangle = 0$ and $\langle 0|\phi_1|0\rangle = -v$. According to the charge of ϕ field and redefining the ϕ_1 field as $\phi_1 = \phi'_1 \pm v$, the interaction terms in (7) can be written in terms of $T_{\mu\nu}$ as

(i) ϕ with charge $+4h$,

$$\int d^4x 4a (T^{\mu\nu} \tilde{T}_{\mu\nu} \phi_2 + T^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \phi'_1 \pm v T^{\mu\nu} T_{\mu\nu}); \quad (10)$$

(ii) ϕ with charge $-4h$,

$$\int d^4x 4b (T^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \phi'_1 \pm v T^{\mu\nu} T_{\mu\nu} - T^{\mu\nu} \tilde{T}_{\mu\nu} \phi_2); \quad (11)$$

(iii) ϕ with charge $+2h$,

$$\begin{aligned} \int d^4x 4c ((\phi_1'^2 - \phi_2^2) T^{\mu\nu} T_{\mu\nu} + 2 \pm v T^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \phi'_1 \\ + v^2 T^{\mu\nu} T_{\mu\nu}) + \int d^4x 4c (2 \pm v T^{\mu\nu} \tilde{T}_{\mu\nu} \phi_2 \\ + 2 T^{\mu\nu} \tilde{T}_{\mu\nu} \phi'_1 \phi_2); \end{aligned} \quad (12)$$

(iv) ϕ with charge $-2h$,

$$\begin{aligned} \int d^4x 4d ((\phi_1'^2 - \phi_2^2) T^{\mu\nu} T_{\mu\nu} + 2 \pm v T^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \phi'_1 \\ + v^2 T^{\mu\nu} T_{\mu\nu}) - \int d^4x 4d (2 \pm v T^{\mu\nu} \tilde{T}_{\mu\nu} \phi_2 \\ + 2 T^{\mu\nu} \tilde{T}_{\mu\nu} \phi'_1 \phi_2). \end{aligned} \quad (13)$$

Let us examine carefully each type of interactions above. For a fixed value of the parameter a there is no way to avoid tachyons because $\pm va$ is not always positive. The same occur for interaction (ii). Then the first two types of interactions are not physically acceptable. The interactions terms (iii) and (iv) have the mass term dependent on v^2 which is always positive.

In order to avoid tachyons c or d must be positive depending of the charge of ϕ . Consequently the ATM field acquire mass $m = 4|v|\sqrt{c}$ for ϕ with charge $2h$ and mass $m = 4|v|\sqrt{d}$ for ϕ with charge $-2h$. Each pole of ATM field is free of tachyon since we have only two allowed vacua compatible with the parity symmetry.

Let us now examine the case when the parity invariance of the theory is relaxed. In this case ϕ_1 and ϕ_2 are suppose to be scalars. To simplify the analysis, we consider a, b, c and d real constants in (7). We have now that the vacuum expected value of ϕ_2 can be nonzero value, i.e., $\langle 0|\phi_2|0\rangle = v_2$ and $\langle 0|\phi_1|0\rangle = v_1$, where $v_1^2 + v_2^2 = \mu^2/\lambda$. This modify all the terms (i)–(iv). For instance, (i) reads

$$\int d^4x 4a(T^{\mu\nu}\tilde{T}_{\mu\nu}\phi_2' + T^{\mu\nu}T_{\mu\nu}\phi_1' + v_1T^{\mu\nu}T_{\mu\nu} + v_2T^{\mu\nu}\tilde{T}_{\mu\nu}). \quad (14)$$

Besides a mass term, we also have a topological term given by

$$\int d^4x 4av_2T^{\mu\nu}\tilde{T}_{\mu\nu}. \quad (15)$$

This is topological in a sense of metric independence, i.e.,

$$\int_{\mathcal{M}} T_{\mu\nu}\tilde{T}^{\mu\nu}\sqrt{|g|}d^4x = -\frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}T_{\mu\nu}T_{\alpha\beta}d^4x, \quad (16)$$

where \mathcal{M} is a Lorentzian manifold. A similar mechanism occur in three dimensions with nonminimal coupling, where the Chern–Simons term is generated by spontaneous symmetry breaking through the covariant derivative [14]. Note that with the parity being relaxed the theory could presents tachyonic states.

Our study of mass generation for ATM fields is motivated by the interest in possible tensor interactions in weak decays. This is connected with the experiments on $\pi^- \rightarrow e^-\tilde{\nu}\gamma$ and $K^+ \rightarrow \pi^0e^+\nu$ decays [1,2]. The experimentally obtained form factors cannot be explained in the framework of the standard electroweak theory. In Ref. [3] results of the experiment on $\pi^- \rightarrow e^-\tilde{\nu}\gamma$ decay were explained by introducing an additional tensor interaction in the Fermi Lagrangian.

Summarizing, in this Letter we have shown that the Higgs mechanism gave mass to the ATM field even though complex

ATM field $\phi_{\mu\nu}$ cannot have such an explicit mass term. Through the Higgs mechanism, the parity symmetry allows only two possible physically acceptable types of interaction. Another interesting result came from relaxing the obligation of parity invariance of the complex scalar field. In this case, we could obtain massive and topological terms by spontaneous symmetry breaking (SSB). Differently of Ref. [12] where the topological Chern–Simons term generation occurred through gauge covariant derivative, here by SSB it was possible to produce a topological term when we coupled the complex ATM field with a scalar field. Our work can be compared with [15] where we propose a mechanism to generate mass to ATM field which preserves the U(1) symmetry. By this mechanism, a topological term is introduced via a complex vector field.

Acknowledgements

This work was supported by CNPq (Brazilian Research Agency) and Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Estado do Ceará–FUNCAP.

References

- [1] V.N. Bolotov, et al., Phys. Lett. B 243 (1990) 308.
- [2] S.A. Akimenko, et al., Phys. Lett. B 259 (1991) 225.
- [3] A.A. Poblaguev, Phys. Lett. B 238 (1990) 108.
- [4] M.V. Chizhov, Mod. Phys. Lett. A 9 (1994) 2979.
- [5] M.V. Chizhov, New tensor interactions and the $K_L - K_S$ mass difference, JINR E2-94253.
- [6] B. Geyer, D. Mülsch, Phys. Lett. B 321 (2002) 349.
- [7] I.T. Todorov, M.C. Mintchev, V.B. Petkova, Conformal Invariance in Quantum Field Theory, ETS, Pisa, 1978, 8996.
- [8] B. de Wit, J.W. van Holten, Nucl. Phys. B 155 (1979) 530.
- [9] L.V. Avdeev, M.V. Chizhov, Phys. Lett. B 321 (1994) 212.
- [10] V. Lemes, R. Renan, S.P. Sorella, Phys. Lett. B 344 (1995) 158.
- [11] V. Lemes, R. Renan, S.P. Sorella, Phys. Lett. B 352 (1995) 37; V. Lemes, R. Renan, S.P. Sorella, Phys. Lett. B 392 (1997) 106.
- [12] E.S. Fradkin, A.A. Tseytlin, Phys. Lett. B 110 (1982) 117.
- [13] L.V. Avdeev, M.V. Chizhov, Phys. Part. Nucl. Lett. 2 (2005) 7.
- [14] S.K. Paul, A. Khare, Phys. Lett. B 193 (1987) 253; S.K. Paul, A. Khare, Phys. Lett. B 196 (1987) 571.
- [15] L.G. Filho, M.S. Cunha, R.R. Landim, Europhys. Lett. 69 (2005) 184.