**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**
**CENTRO DE CIÊNCIAS**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**JOSÉ EDSON SAMPAIO**

# REGULARIDADE LIPSCHITZ, INVARIÂNCIA DA MULTIPLICIDADE E A GEOMETRIA DOS CONES TANGENTES DE CONJUNTOS ANALÍTICOS

**FORTALEZA**
**2015**

JOSÉ EDSON SAMPAIO

# REGULARIDADE LIPSCHITZ, INVARIÂNCIA DA MULTIPLICIDADE E A GEOMETRIA DOS CONES TANGENTES DE CONJUNTOS ANALÍTICOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Alexandre Cesar Gurgel Fernandes.

Coorientador:
Prof. Dr. Lev Birbrair.

FORTALEZA
2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

S183r Sampaio, José Edson
Regularidade Lipschitz, invariância da multiplicidade e a geometria dos cones tangentes de conjuntos analíticos / José Edson Sampaio. – 2015.
56 f. : enc. ; 31 cm

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2015.
Área de Concentração: Matemática
Orientação: Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes.
Coorientação: Prof. Dr. Lev Birbrair.

1. Homeomorfismo bi-Lipschitz. 2. Homeomorfismo forte. 3. Conjuntos definíveis I. Título.

CDD 514

JOSÉ EDSON SAMPAIO

REGULARIDADE LIPSCHITZ, INVARIÂNCIA DA MULTIPLICIDADE E A GEOMETRIA DOS CONES TANGENTES DE CONJUNTOS ANALÍTICOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovado em: 14/05/2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Alexandre Cesar Gurgel Fernandes (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Lev Birbrair (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Abramo Hefez
Universidade Federal Fluminense (UFF)

Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas
Universidade de São Paulo (ICMC/USP)

Profa. Dra. Maria Pe Pereira
Instituto de Ciencias Matematicas (ICMAT)

*Dedico este trabalho à minha família.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus pela força que Ele tem me dado.

Ao meu pai Geraldo Sampaio, pois sem suas palavras de apoio e incentivo, com certeza eu não estaria aqui, e a minha mãe Suerda pelo amor e carinho.

À minha esposa Syndel pelo amor, carinho, paciência e compreensão.

Ao meu irmão Cristiano Sampaio e ao meus grandes amigos Francisco das Chagas, Euripedes Carvalho, Gilson Gondim e Rui Brasileiro, pela amizade e companheirismo.

Aos meus amigos da Teoria de Singularidades Edvalter, Joserlan e Rodrigo.

Aos meus colegas e amigos da UFC.

Aos meus amigos professores do IFCE - campus Quixadá.

Ao meu orientador Alexandre Fernandes, pelo apoio e orientação nos meus estudos.

Aos professores Lev Birbrair, Lê Dung Trang e Vincent Grandjean pelo aprendizado proporcionado e apoio.

Aos membros da minha banca de defesa de tese Abramo Hefez, Maria Aparecida e Maria Pe Pereira pelas correções, apoio e pelas idéias de projetos futuros.

Aos professores da PGMAT-UFC pelo aprendizado proporcionado.

À Andrea Dantas e Jessyca Soares pela presteza e agilidade.

À FUNCAP pelo apoio financeiro.

# Resumo

Neste texto, é mostrado que conjuntos definíveis bi-Lipschitz homeomorfos têm cones tangentes bi-Lipschitz homeomorfos. Além disso, no caso de conjuntos analíticos complexos, regularidade Lipschitz ou regularidade topológica forte implica em regularidade analítica. Também é feito um estudo sobre regularidade de conjuntos analíticos reais. Ademais, é dada uma classificação completa para curvas analíticas complexas no espaço e são apresentados alguns resultados sobre invariância da multiplicidade. Em especial, é mostrado que a multiplicidade mod 2 de conjuntos analíticos reais é invariante por difeomorfismos.

**Palavras chaves**: Homeomorfismo bi-Lipschitz. Homeomorfismo forte. Conjuntos definíveis.

# Abstract

In this paper, it is shown that definable sets bi-Lipschitz homeomorphic have tangent cones bi-Lipschitz homeomorphic. Furthermore, in the case of complex analytical sets, Lipschitz regularity or strong topological regularity implies analytical regularity. It is also done a complete study on regularity of real analytic sets. Furthermore, it is given a complete classification for complex analytical curves in space and are shown some results about invariance of the multiplicity. In particular, it is shown that the multiplicity of real analytical sets is invariant mod 2 under diffeomorphism.



**Keywords**: Bi-Lipschitz homeomorphism. Strong homeomorphism. Definable sets.

## SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

Geometria e topologia de cones tangentes de conjuntos algébricos, analíticos são de muita importância em várias questões da Teoria de Singularidades. O cone tangente em pontos singulares generaliza a noção de plano tangente em pontos suaves. Em Whitney (1965a, 1965b, 1972) foram estabelecidas várias noções de cones tangentes e provadas algumas equivalências dessas definições, no caso de conjuntos analíticos complexos. Geometria Algébrica Moderna também estuda cones tangentes de conjuntos semialgébricos, subanalíticos ou, mais geralmente, de conjuntos definíveis em uma estrutura O-minimal.

Duas variedades suaves que são difeomorfas, naturalmente tem seus planos tangentes difeormorfos. Na verdade, duas variedades suaves só precisam ser homeomorfas, para que seus planos tangentes sejam difeomorfos. Então, uma pergunta imediata é saber se dois conjuntos definíveis que são homeomorfos ou bi-Lipschitz homeomorfos têm seus cones tangentes homeomorfos ou bi-Lipschitz homeomorfos, respectivamente. Na categoria de conjuntos analíticos complexos, Zariski (1971) fez a seguinte pergunta:

**Problema 1.** (Zariski (1971)) Homeomorfismo entre conjuntos analíticos complexos implica em homeomorfismo entre seus cones tangentes?

Esta pergunta foi respondida negativamente por Bobadilla (2005). Contudo, fazendo algumas mudanças na pergunta de Zariski, obtemos o seguinte:

**Problema 2.** (Zariski) Se existe um homeomorfismo bi-Lipschitz entre dois conjuntos definíveis, então seus cones tangentes são bi-Lipschitz homeomorfos? O que pode ser dito sobre seus cones tangentes?

Koike e Paunescu (2009) na categoria subanalítica e Koike et al (2013) na categoria definível, responderam que os cones têm a mesma dimensão.

Nesta tese, estudamos o comportamento de cones tangentes sob homeomorfismos bi-Lipschitz. Apresentamos uma generalização do resultado de Koike e Paunescu (2009) que, ao mesmo tempo, responde positivamente a pergunta de Zariski (1971) para homeomorfismos bi-Lipschitz, i.e., mostramos que dois conjuntos definíveis bi-Lipschitz homeomorfos, têm necessariamente seus cones bi-Lipschitz homeomorfos. Isto foi provado na categoria subanalítica por Bernig e Lytchak (2007) com a hipótese adicional que o homeomorfismo bi-Lipschitz também é subanalítico. Nós também apresentamos uma prova rápida para este resultado de Bernig e Lytchak (2007) (veja também Birbrair, Fernandes e Neumann (2010)).

Ainda com o problema de Zariski sobre cones em mente, nós definimos homemorfismo forte, que naturalmente é um exemplo onde este problema é respondido positivamente, i.e., se dois conjuntos são fortemente homeomorfos, então seus cones são fortemente homemomorfos. Grosseiramente falando, um homemorfismo forte é um homeomorfismo que guarda informações do conjunto e do seu cone tangente de maneira contínua. Nós damos alguns exemplos de homeomorfismo forte, de fato, mostramos que homeomorfismos bi-Lipschitz subanalíticos e difeomorfismos são homeomorfismos fortes. Com isso, vemos que a classe de homeomorfismos fortes está entre as classes de homeomorfismos e difeomorfismos, assim como, entre as classes de homeomorfismos e homeomorfismos bi-Lipschitz definíveis.

Um outro assunto de interesse para muitos Matemáticos é saber o quão simples é a topologia de conjuntos analíticos. Por exemplo, se regularidade topológica implica em regularidade analítica. Em geral isto não ocorre, mas Mumford (1961) mostrou um resultado nesta linha, o qual podemos enunciar da seguinte maneira:

**Teorema** (Mumford (1961)). *Todo conjunto algébrico complexo $X \subset \mathbb{C}^n$ com* $\dim X = 2$, *que é variedade topológica e normal é suave.*

Este resultado é ótimo no seguinte sentido: o Teorema de Mumford é falso se for retirada qualquer uma das hipóteses. Pois, Brieskorn (1966) deu exemplos de que a hipótese sobre a dimensão, $\dim X = 2$, não pode ser retirada, na verdade, Brieskorn (1966, Theorem) mostrou que

$$X_k = \{(z_0, z_1, ..., z_k) \in \mathbb{C}^{n+1};\, z_1^2 + ... + z_k^2 - z_0^3 = 0\}$$

é uma variedade topológica, para $k$ impar. Já o conjunto algébrico $\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3;\, y^2 = x^3\}$ é uma variedade topológica de dimensão 2 que não é normal e nem suave. E é claro que se um conjunto não é variedade topológica, ele não é suave. Outro resultado nesta linha foi dado por Prill (1967), ele mostrou que qualquer conjunto algébrico complexo homogêneo que é variedade topológica, é necessariamente um plano. No mesmo sentido que o feito acima, o resultado de Prill é ótimo. Contudo, temos as seguintes questões que generalizam os Teoremas de Mumford e de Prill:

**Problema 3.** Se $X$ é um conjunto analítico complexo que é Lipschitz regular, então $X$ é suave?

**Problema 4.** Se $X$ é um conjunto analítico complexo que é topologicamente forte regular, então $X$ é suave?

Observe que não existem restrições nem na dimensão e nem no conjunto singular de $X$. Nesta tese, damos respostas afirmativas para estes dois problemas. Também fazemos um estudo sobre a regularidade Lipschitz e a regularidade topológica forte de conjuntos analíticos reais.

Esses resultados podem ser visto como casos particulares para a seguinte versão da conjectura de Zariski:

**Conjectura 1.** *Se $X$ e $Y$ são conjuntos analíticos complexos bi-Lipschitz ou fortemente homeomorfos, então $m(X) = m(Y)$.*

A saber, Zariski (1971) conjecturou que a multiplicidade analítica de um germe de conjunto analítico complexo (com codimensão 1) era invariante topológico. Pela definição da multiplicidade, ela é naturalmente um invariante analítico. Para ser mais preciso, Zariski conjecturou o seguinte:

**Conjectura** (Conjectura de Zariski para a multiplicidade)**.** *Se $f, g : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ são germes de funções analíticas complexas e existe um homeomorfismo $\varphi : (\mathbb{C}^n, V(f), 0) \to (\mathbb{C}^n, V(g), 0)$, então $m(V(f)) = m(V(g))$.*

A conjectura ainda é um problema em aberto, mas é falsa se a hipótese de $V(f)$ e $V(g)$ serem hipersuperfícies for retirada ou se o homeomorfismo não preservar o ambiente. Contudo, existem alguns resultados parciais, onde é conhecido que a conjectura é verdadeira. Por exemplo, Ephraim (1976a) e, posteriormente, Trotman (1977), provaram que a multiplicidade é um invariante $C^1$ no caso de hipersuperfícies. Gau e Lipman (1983) generalizaram este resultado para qualquer codimensão e Comte (1998) provou que a multiplicidade é um invariante bi-Lipschitz, sob algumas condições sobre as constantes Lipschitz que dão a equivalência. Uma miscelânea de resultados sobre este invariante pode ser encontrada em Eyral (2006) ou em Carvalho (2010).

No capítulo 2, apresentamos algumas definições e notações, bem como alguns resultados (clássicos ou não) da Teoria de Singularidades, que serão usados no decorrer desta tese.

O capítulo 3 é dedicado ao estudo equivalência $C^0$-forte entre conjuntos definíveis. Com isto, encontramos alguns invariantes para esta equivalência, por exemplo, esta equivalência para curvas analíticas complexas, define e é definida pela multiplidade. Além disso, fazemos algumas reduções de versões da conjectura 1. Também estudamos a regularidade topológica forte de conjuntos analíticos reais ou complexos.

No capítulo 4, mostramos que dois conjuntos definíveis bi-Lipschitz homeomorfos possuem cones tangentes bi-Lipschitz homeomorfos. Além disso, estudamos a regularidade Lipschitz de conjuntos analíticos reais ou complexos.

No capítulo 5, fazemos reduções de versões da Conjectura de Zariski para conjuntos analíticos complexos, provamos que a multiplicidade é invariante por homeomorfismo bi-Lipschitz definível no caso de conjuntos analíticos complexos onde todas componentes irredutíveis de seus cones possuem singularidade isolada. Além disso, damos uma outra prova para o resultado provado por Gau e Lipman (1983) sobre a invariância diferenciável da multiplicidade de conjuntos analíticos complexos e, também, provamos que a multiplicidade de conjuntos analíticos reais é um invariante diferenciável.

# 2 PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos algumas definições e notações, bem como alguns resultados (clássicos ou não) da Teoria de Singularidades, que serão usadas nos próximos capítulos.

## 2.1 Excertos de geometria analítica complexa

Nesta Seção, apresentamos os principais resultados e definições sobre geometria analítica complexa utilizados no texto. Para um estudo mais detalhado sobre o assunto veja Chirka (1989), Ebeling (2007), Sebastiani (2010), Taylor (2002) e Whitney (1972).

### *2.1.1 Funções e conjuntos analíticos*

Iniciamos com algumas notações:

**Notação 2.1.1.** *Com a identificação canônica $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, visualizamos $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}^{2n}$ com a norma euclidiana $\| \cdot \|$. Denotamos por $\mathbb{R}^n_+$ o conjunto $\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n;\, x_i > 0,\, i = 1, ..., n\}$.*

**Definição 2.1.2.** *Um* **polidisco** *é um conjunto da forma*

$$\Delta_r(w) := \{(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n;\, |z_i - w_i| < r_i,\, i = 1, ..., n\},$$

*onde $r = (r_1, ..., r_n) \in \mathbb{R}^n_+$ e $w = (w_1, ..., w_n) \in \mathbb{C}^n$. Quando quisermos enfatizar a dimensão, escrevemos $\Delta^n$ ao invés de $\Delta$.*

Relembramos que uma série formal de potências em torno da origem de $\mathbb{C}^n$ é uma expressão

$$\sum_{\nu_1,...,\nu_n=0}^{\infty} a_{\nu_1,...,\nu_n} z_1^{\nu_1} ... z_n^{\nu_n},$$

onde $a_{\nu_1,...,\nu_n} \in \mathbb{C}$.

Com o intuito de escrevermos séries de potências de uma maneira mais amistosa, fazemos uso da seguinte:

**Notação 2.1.3.** *Dados $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ e $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n) \in \mathbb{N}^n$, escrevemos $z^\nu := z_1^{\nu_1} ... z_n^{\nu_n}$. Além disso, escrevemos $|\nu| := \nu_1 + ... + \nu_n$. Com essa notação, escrevemos séries de potências formais em torno de $w \in \mathbb{C}^n$, da seguinte maneira*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - w)^\nu.$$

**Definição 2.1.4.** *Fixado $w \in \mathbb{C}^n$, dizemos que uma série de potências*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-w)^\nu$$

*é convergente em um ponto $z' \in \mathbb{E}^n$, se a série*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z'-w)^\nu$$

*converge absolutamente e, dizemos que ela é convergente, se a série converge em todo ponto de $\Delta_r(w)$, para algum $r \in \mathbb{R}^n_+$.*

**Definição 2.1.5.** *Seja $U \subset \mathbb{C}^n$ um aberto. Uma função $f : U \to \mathbb{C}$ é dita analítica, se para todo $x \in U$, existe $r \in \mathbb{R}^n_+$ tal que $f$ pode ser expressada por uma série de potências convergente em $\Delta_r(x)$, i.e.,*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-x)^\nu, \quad z \in \Delta_r(x).$$

*Neste caso, a série $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-x)^\nu$ é a chamada a série de $f$ em $x$.*

**Definição 2.1.6.** *Seja $U \subset \mathbb{C}^n$ um aberto. Uma função $f : U \to \mathbb{C}^m$ é dita diferenciável complexa em $a \in U$, se existem uma aplicação linear $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ e uma função contínua $r : U \to \mathbb{C}^m$ com $r(a) = 0$ tais que*

$$f(z) = f(a) + T(z-a) + r(z)\|z-a\|.$$

*Quando $f$ é diferenciável complexa em todo ponto de $U$, dizemos que $f$ é holomorfa em $U$ e se $f : U \to f(U)$ é uma bijeção com $f(U)$ sendo um aberto de $\mathbb{C}^m$ e, além disso, é holomorfa e tem inversa $f^{-1} : f(U) \to U$ holomorfa, então dizemos que $f : U \to f(U)$ é bi-holomorfa.*

**Notação 2.1.7.** *Denotamos por $\mathbb{C}\{z-w\}$ o conjunto de todas séries convergentes em $w = (w_1, ..., w_n) \in \mathbb{C}^n$. Também denotamos $\mathbb{C}\{z-w\}$ por $\mathbb{C}\{z_1 - w_1, ..., z_n - w_n\}$*

**Proposição 2.1.8.** *Seja $U \subset \mathbb{C}^n$ um aberto. Uma função $f : U \to \mathbb{C}$ é holomorfa em $U$ se, e somente se, $f$ é analítica em $U$.*

Vamos definir conjuntos algébricos e analíticos complexos.

**Definição 2.1.9.** *Um conjunto $X \subset \mathbb{C}^n$ é chamado de* **conjunto algébrico complexo** *se existem finitos polinômios $f_1, ..., f_k : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ tais que*

$$X = \bigcap_{i=1}^{k} f_i^{-1}(0).$$

**Definição 2.1.10.** *Seja $U \subset \mathbb{C}^n$ um aberto. Um conjunto $X \subset U$ é chamado de* **subconjunto analítico complexo de** $U$*, se para cada $x \in U$ existe um aberto $W \subset U$ contendo $x$ e existem finitas funções analíticas $f_1, ..., f_k : W \to \mathbb{C}$ tais que*

$$X \cap W = \bigcap_{i=1}^{k} f_i^{-1}(0).$$

*Dizemos simplesmente que $X \subset \mathbb{C}^n$ é um* **conjunto analítico complexo** *se existe um aberto $U \subset \mathbb{C}^n$ contendo $X$, tal que $X$ é um subconjunto analítico complexo de $U$.*

**Observação 2.1.11.** As noções de funções e conjuntos algébricos e analíticos reais são definidas similarmente.

### *2.1.2 Anel local de funções holomorfas*

Fixado $w \in \mathbb{R}^m$, definimos uma relação de equivalência no conjunto $\{f : U \to \mathbb{R}^k;\ U \subset \mathbb{R}^m$ é aberto e $w \in U\}$, da seguinte maneira:

**Definição 2.1.12.** *Duas funções $f : U \to \mathbb{R}^m$ e $g : V \to \mathbb{R}^m$ com $U, V \subset \mathbb{R}^m$ abertos e $w \in U \cap V$ são ditas equivalentes em $w$, se existe um aberto $W \subset U \cap V$ contendo $w$ tal que $f|_W = g|_W$ e, neste caso, escrevemos $f \sim g$. Uma classe de equivalência nesta relação é chamada de germe de função em $w$.*

Para o caso particular de funções holomorfas, denotamos por $\mathcal{O}_{n,w} = \{f : U \to \mathbb{C};\ w \in U, U \subset \mathbb{C}^n$ é aberto e $f$ é holomorfa em $U\}/\sim$. No caso em que $w = 0$, escrevemos simplesmente $\mathcal{O}_n$ em vez de $\mathcal{O}_{n,0}$.

**Proposição 2.1.13.** *O anel $\mathcal{O}_{n,w}$ dos germes de funções holomorfas em $w \in \mathbb{C}^n$ é isomorfo ao anel $\mathbb{C}\{z - w\}$ de todas as séries convergentes em $w$. Além disso, $\mathcal{O}_{n,w}$ é um anel local, Noetheriano e fatorial.*

*Demonstração.* Veja Ebeling (2007, p. 61–73, Propositions 2.15, 2.18, 2.19 e 2.20). □

Seguindo a ideia de germe de funções, podemos definir germes de conjuntos:

**Definição 2.1.14.** *Dois connjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}^m$ são ditos equivalentes em $w \in \mathbb{R}^m$, se existe um aberto $W \subset \mathbb{R}^m$ contendo $w$ tal que $X \cap W = Y \cap W$. Uma classe de equivalência de um conjunto $X$ nesta relação é chamada* **germe de** $X$ **em** $w$ *e denotamos o germe de $X$ em $w$ por $(X, w)$. Além disso, escrevemos $(X, w) \subset (Y, w)$ quando existe uma vizinhança aberta de $w$, digamos $W$, tal que $X \cap W \subset Y \cap W$.*

**Definição 2.1.15.** *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $x \in X$. Dizemos que o germe $(X, x)$ é conexo, se existe $r > 0$ tal que $X \cap \mathbb{B}_t(x)$ é um conjunto conexo, para todo $0 < t \leq r$, onde $\mathbb{B}_t(x) \subset \mathbb{R}^m$ é a bola euclidiana de raio $t$ centrada em $x$.*

**Definição 2.1.16.** *Sejam $f_1, ..., f_r : U \to \mathbb{C}$ funções holomorfas no aberto $U \subset \mathbb{C}^n$. Denotamos o conjunto dos zeros de $f_1, ..., f_r$ por $V(f_1, ..., f_r)$, i.e.,*

$$V(f_1, ..., f_r) = \{z \in U;\ f_1(z) = 0, ..., f_r(z) = 0\}.$$

*Com isso, se $w \in U$ e $I$ é um ideal de $\mathcal{O}_{n,w}$ gerado por $f_1, ..., f_r$, então definimos $V(I) := (V(f_1, ..., f_r), w)$.*

**Observação 2.1.17.** Por Ebeling (2007, Proposition 2.25) e usando o fato de $\mathcal{O}_{n,w}$ ser Noetheriano, $V(I)$ está bem definido para todo ideal de $\mathcal{O}_{n,w}$.

Na definição acima, para cada ideal foi feito uma associação para um germe de conjunto analítico. Agora, fazemos o inverso, a cada germe de conjunto analítico associamos um ideal.

**Definição 2.1.18.** *Seja $(X, x)$ um germe de conjunto analítico complexo. Denotamos por $\mathcal{I}(X)$ o conjunto de todos os germes $f \in \mathcal{O}_{n,x}$ representado por $\widetilde{f} : U \to \mathbb{C}$, com $U$ sendo uma vizinhança aberta de $x$, que se anula em um representante $\widetilde{X} \subset U$ de $(X, x)$, i.e., $\widetilde{f}|_{\widetilde{X}} \equiv 0$. $\mathcal{I}(X)$ é chamado* **ideal do germe** *$(X, x)$ ou simplesmente* **ideal de** *$X$.*

**Observação 2.1.19.** Claramente $\mathcal{I}(X)$ é um ideal de $\mathcal{O}_{n,x}$.

Elencamos algumas propriedades importantes acerca das últimas definições feitas acima:

**Proposição 2.1.20.** *Sejam $(X, x)$ e $(Y, x)$ dois germes de conjuntos analíticos complexos e sejam $I, J \subset \mathcal{O}_{n,x}$ dois ideais. Então:*

*a) $I \subset J \Rightarrow V(J) \subset V(I)$;*

*b) $(X, x) \subset (Y, x) \Rightarrow \mathcal{I}(Y) \subset \mathcal{I}(X)$;*

*c) $V(\mathcal{I}(X)) = X$;*

*d) $I \subset \mathcal{I}(V(I))$;*

*e) $\mathcal{I}(V(I)) = Rad(I) := \{f \in \mathcal{O}_{n,x};$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k \in I\}$;*

*f) $(X, x) \neq (Y, x) \Rightarrow \mathcal{I}(X) \neq \mathcal{I}(Y)$*

*Demonstração.* Veja Ebeling (2007, Propositions 2.26, 2.27 e 2.28). □

Além disso, para cada germe de conjunto analítico complexo $(X, x)$, vamos associar uma $\mathbb{C}$-Álgebra:

**Definição 2.1.21.** *Seja $(X, x)$ um germe de conjunto analítico complexo. Denotamos o anel $\mathcal{O}_{n,x}/\mathcal{I}(X)$ por $\mathcal{O}_{X,x}$. Quando $x = 0$ denotamos $\mathcal{O}_{X,x}$ simplesmente por $\mathcal{O}_X$. Além disso, chamamos o anel $\mathcal{O}_{X,x}$ de* **anel local de** *$(X, x)$.*

**Definição 2.1.22.** *Dizemos que um germe* $f \in \mathcal{O}_{n,x}$ *se anula em* $(X,x)$*, se* $f \in \mathcal{I}(X)$*, ou seja, se existem representantes* $\widetilde{f} : U \to \mathbb{C}$ *de* $f$ *e* $\widetilde{X} \subset U$ *de* $(X,x)$ *tais que* $\widetilde{f}|_{\widetilde{X}} \equiv 0$.

Finalizamos esta subseção discutindo a noção de irredutibilade de germes de conjuntos analíticos complexos.

**Definição 2.1.23.** *Um germe de conjunto analítico complexo* $(X,x)$*, é dito* **irredutível**, *se sempre que* $X = X_1 \cup X_2$*, tivermos* $(X,x) = (X_1,x)$ *ou* $(X,x) = (X_2,x)$*. Quando* $(X,x)$ *não é irredutível,* $(X,x)$ *é dito* **redutível**.

**Proposição 2.1.24.** *Um germe de conjunto analítico complexo* $(X,x)$ *é irredutível se, e somente se, o ideal* $\mathcal{I}(X)$ *é um ideal primo.*

*Demonstração.* Veja Ebeling (2007, Proposition 2.31). □

**Proposição 2.1.25.** *Seja* $(X,x)$ *um germe de conjunto analítico complexo em* $x \in \mathbb{C}^n$*. Então,* $(X,x)$ *tem uma decomposição unicamente determinada, a menos da ordem,*

$$X = X_1 \cup ... \cup X_r$$

*em germes irredutíveis* $(X_i,x)$ *com* $(X_i,x) \neq (X_j,x)$*, se* $i \neq j$*. Os germes de conjuntos analíticos* $(X_1,x),...,(X_r,x)$ *são chamados de* **componentes irredutíveis de** $(X,x)$.

*Demonstração.* Veja Ebeling (2007, Proposition 2.32). □

Um resultado sobre componentes irredutíveis é o seguinte:

**Proposição 2.1.26.** *Sejam* $X \subset \mathbb{C}^m$ *e* $Y \subset \mathbb{C}^n$ *dois conjuntos analítcos complexos e* $x \in X$*. Se* $\varphi : X \to Y$ *é um homeomorfismo, então para cada componente irredutível* $(X_i,x)$ *de* $(X,x)$*, temos que* $(\varphi(X_i),\varphi(x))$ *é uma componente irredutível de* $(Y,\varphi(x))$.

*Demonstração.* Veja Gau e Lipman (1983, Lemma A.8). □

### *2.1.3 Regularidade de conjuntos analíticos*

**Definição 2.1.27.** *Seja* $U \subset \mathbb{C}^n$ *um aberto. Um conjunto* $M \subset U$ *é dito uma subvariedade analítica complexa (ou holomorfa), se para cada* $x \in M$ *existem uma vizinhança aberta* $V \subset U$ *de* $x$ *e uma aplicação bi-holomorfa* $\Phi : V \to \Delta$ *sobre um policilindro* $\Delta$ *centrado em* $\Phi(x) = 0$ *tal que*

$$M \cap V = \Phi^{-1}(\Delta^s \times \{0\})$$

*com respeito a decomposição* $\Delta = \Delta^s \times \Delta^{n-s}$*. O número* $s$ *é chamado a* **dimensão de** $M$ **em** $x$ *e é denotado por* $s = \dim_x M$.

**Definição 2.1.28.** *Seja* $G \subset \mathbb{C}^n$ *um conjunto aberto e conexo e* $X \subset G$ *um subconjunto analítico complexo. Um ponto* $x \in X$ *é dito um* **ponto regular de** $X$*, se existe uma vizinhaça aberta* $U$ *de* $x$ *tal que* $X \cap U$ *é uma subvariedade analítica complexa de* $U$*. No caso contrário,* $x$ *é chamado um* **ponto singular de** $X$*. Denotamos por* $\mathrm{Sing}(X)$ *o conjunto dos pontos singulares de* $X$ *e* $\mathrm{Reg}(X) := X \setminus \mathrm{Sing}(X)$*. Quando* $x \in \mathrm{Reg}(X)$*, dizemos que o germe* $(X, x)$ *é regular ou holomorfo.*

**Definição 2.1.29.** *Dizemos que um conjunto analítico complexo* $X \subset \mathbb{C}^n$ *tem* **singularidade isolada***, se* $\mathrm{Sing}(X)$ *só tem pontos isolados.*

**Proposição 2.1.30.** *Seja* $X \subset \mathbb{C}^n$ *um conjunto analítico complexo. Então,* $\mathrm{Reg}(X)$ *é aberto e denso em* $X$*. Em particular, para todo aberto* $U \subset \mathbb{C}^n$ *tal que* $\mathrm{Sing}(X) \cap U \neq \emptyset$*, temos que* $\mathrm{Sing}(X) \cap U$ *não é denso em* $X \cap U$*.*

*Demonstração.* Veja Sebastiani (2010, Lema IV.3.4). □

**Definição 2.1.31.** *Sejam* $X \subset \mathbb{C}^n$ *um conjunto analítico complexo e* $x \in \mathrm{Reg}(X)$*. Definimos a* **dimensão de** $X$ **em** $x$*, denotada por* $\dim_x X$*, como sendo a dimensão da subvariedade holomorfa* $X \cap U$*, i.e.,* $\dim_x X = \dim X \cap U$*. Dizemos que* $X$ *tem* **dimensão pura***, se* $\dim_x X$ *é constante para todo* $x \in \mathrm{Reg}(X)$*. Definimos a* **dimensão de** $X$*, denotada por* $\dim X$*, para ser* $\dim X := \sup_{x \in \mathrm{Reg}(X)} \dim_x X$*.*

**Observação 2.1.32.** Quando $X$ tem dimensão pura, temos que $\mathrm{Reg}(X)$ é uma subvariedade holomorfa de $\mathbb{C}^n$ e $\dim X = \dim \mathrm{Reg}(X)$.

Uma outra informação que $\mathrm{Reg}(X)$ fornece é a seguinte:

**Proposição 2.1.33.** *Sejam* $X \subset \mathbb{C}^n$ *um conjunto analítico complexo e* $x \in X$*. Então,* $(\mathrm{Reg}(X), x)$ *é conexo se, e somente se,* $(X, x)$ *é irredutível.*

*Demonstração.* Veja Chirka (1989, p. 55, Proposition). □

**Proposição 2.1.34.** *Seja* $X \subset \mathbb{C}^n$ *um conjunto analítico complexo com dimensão* $p$*. Então,* $\mathrm{Sing}(X)$ *é um conjunto analítico complexo com dimensão menor que* $p$*.*

*Demonstração.* Veja Chirka (1989, p. 51, Theorem). □

Encerramos esta subseção com o seguinte:

**Teorema 2.1.35** (Teorema de Remmert-Stein-Shiffman)**.** *Seja* $E \subset \mathbb{C}^n$ *um conjunto fechado e seja* $A$ *um subconjunto analítico de* $\mathbb{C}^n \setminus E$ *com* $\dim A = p$*. Se* $\mathcal{H}_{2p-1}(E) = 0$*, então o fecho* $\overline{A}$ *de* $A$ *em* $\mathbb{C}^n$ *é um subconjunto analítico de* $\mathbb{C}^n$*, onde* $\mathcal{H}_{2p-1}(E)$ *é a medida de Hausdorff na dimensão* $2p-1$*.*

*Demonstração.* Veja Chirka (1989, p. 48, Theorem). □

## 2.2 Conjuntos definíveis e cones tangentes

Nesta Seção, fazemos uma breve apresentação de objetos definíveis. Em particular, estudamos especialmente algumas propriedades de cones tangentes de conjuntos definíveis. Mais detalhes sobre esses objetos podem ser encontrados em Bochnak, Coste e Roy (1998), Coste (1999), Van Den Dries (1998) e Whitney (1965a).

**Definição 2.2.1.** *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito* **semialgébrico***, se existem polinômios $f_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, para $i = 0, 1, ..., N$ e $j = 1, ..., \ell$, tais que $X = \bigcup_{i=1}^{N} \{x \in \mathbb{R}^n;\ f_{i0}(x) = 0, f_{i1}(x) > 0, ..., f_{i\ell}(x) > 0\}$.*

**Definição 2.2.2.** *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito* **semianalítico***, se para todo $x \in \mathbb{R}^n$ existem um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo $x$, $N \in \mathbb{N}$ e funções analíticas $f_{ij} : U \to \mathbb{R}$, para $i = 0, 1, ..., N$ e $j = 1, ..., \ell$, tais que $X \cap U = \bigcup_{i=1}^{N} \{x \in \mathbb{R}^n;\ f_{i0}(x) = 0, f_{i1}(x) > 0, ..., f_{i\ell}(x) > 0\}$.*

**Definição 2.2.3.** *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito* **subanalítico***, se para todo $x \in \mathbb{R}^n$ existe aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo $x$ tal que $X \cap U$ é a projeção linear e própria de um conjunto semianalítico relativamente compacto $Y \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Uma função $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é dita subanalítica, se $Graph(f) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ é um conjunto subanalítico.*

**Definição 2.2.4.** *Seja $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a aplicação dada por*

$$\Phi(x_1, ..., x_n) = \left( \frac{x_1}{\sqrt{1 + x_1^2}}, ..., \frac{x_n}{\sqrt{1 + x_n^2}} \right).$$

*Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito* **globalmente subanalítico***, se $\Phi(X)$ é um conjunto subanalítico. Uma função $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é dita globalmente subanalítica, se $Graph(f) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ é um conjunto globalmente subanalítico.*

Conjuntos e funções globalmente subanalíticas (ou semialgébricas) são exemplos de objetos *definíveis*, que são definidos a seguir:

**Definição 2.2.5.** *Seja $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, onde cada $\mathcal{S}_n$ é um conjunto de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que $\mathcal{S}$ é uma* **estrutura O-minimal** *sobre $\mathbb{R}$ se satisfaz os seguintes axiomas:*

1) *Todos subconjuntos algébricos de $\mathbb{R}^n$ estão em $\mathcal{S}_n$.*

2) *Para todo $n$, $\mathcal{S}_n$ é uma subalgebra Booleana do conjunto das partes de $\mathbb{R}^n$, denotado por $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.*

3) *Se $A \in \mathcal{S}_m$ e $B \in S_n$, então $A \times B \in \mathcal{S}_{m+n}$.*

4) *Se $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ é uma projeção ortogonal sobre $\mathbb{R}^n$ e $A \in \mathcal{S}_{n+1}$, então $\pi(A) \in \mathcal{S}_n$.*

*5) Os elementos de $\mathcal{S}_1$ são precisamente uniões finitas de pontos e intervalos.*

*Um elemento de $\mathcal{S}_n$ é chamado de* **subconjunto definível** *de $\mathbb{R}^n$.*

**Observação 2.2.6.** Os conjuntos semialgébricos formam uma estrutura O-minimal. Veja por exemplo Coste (1999).

**Observação 2.2.7.** Os conjuntos globalmente subanalíticos formam uma estrutura O-minimal. Veja por exemplo Van den Dries (1986, Theorem).

**Definição 2.2.8.** *Uma função $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é dita definível, se $Graph(f)$ é um subconjunto definível de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.*

**Observação 2.2.9.** Se $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é definível, então usando o axioma 4) na definição de conjunto definível, temos que $X$ é definível.

Listamos abaixo algumas propriedades importantes dos conjuntos definíveis.

**Proposição 2.2.10.** *A imagem de um conjunto definível por uma aplicação definível é um conjunto definível.*

*Demonstração.* Veja Coste (1999, Proposition 1.6). □

**Proposição 2.2.11.** *Composição finita de aplicações definíveis é uma aplicação definível.*

*Demonstração.* Sejam $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $g : Y \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ funções definíveis, com $f(X) \subset Y$. Mostremos que $Graph(g \circ f)$ é um subconjunto definível de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$. Para isto, sejam $F = Graph(f)$, $G = Graph(g)$ e $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ a projeção ortogonal. Primeiramente observe que $\pi((F \times \mathbb{R}^p) \cap (\mathbb{R}^m \times G))$ , já que usando os axiomas 2), 3) e 4) na definição 2.2.5, $(F \times \mathbb{R}^p) \cap (\mathbb{R}^m \times G)$ é definível. Então, usando o axioma 4) $n$ vezes, vemos que $\pi((F \times \mathbb{R}^p) \cap (\mathbb{R}^m \times G))$ é definível. Por fim, basta ver que

$$Graph(g \circ f) = \pi((F \times \mathbb{R}^p) \cap (\mathbb{R}^m \times G)).$$

□

Como consequência imediata temos o seguinte:

**Corolário 2.2.12.** *$f := (f_1, ..., f_n) : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é definível se, e somente se, cada $f_i : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é definível, $i = 1, ..., n$.*

Uma outra consequência é o seguinte:

**Corolário 2.2.13.** *Fixado $A \subset \mathbb{R}^m$ definível, então $\mathrm{Def}_n(A) := \{f : A \to \mathbb{R}^n; f$ é definível$\}$ é um anel com relação a soma e o produto de funções e juntamente com o produto por escalar usual, $\mathrm{Def}_n(A)$ é uma $\mathbb{R}$-Álgebra.*

*Demonstração.* As aplicações $S, P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por $S(x, y) = x + y$ e $P(x, y) = xy$ são aplicações polinomiais, portanto são definíveis. Assim, se $f, g \in \mathrm{Def}_n(A)$, pelo corolário 2.2.12 e a proposição 2.2.11, $-g = P \circ (-1, g)$, $f + g = S \circ (f, g)$ e $fg = P \circ (f, g)$ são definíveis. Com isso, fica claro que $\mathrm{Def}_n(A)$ é um anel e uma $\mathbb{R}$-Álgebra. □

**Proposição 2.2.14.** *O fecho e o interior de um conjunto definível são conjuntos definíveis.*

*Demonstração.* Veja Coste (1999, Proposition 1.12). □

Além dos resultados citados acima, temos o Teorema da Monotonicidade e o Lema de Seleção de Curva, que são resultados de grande utilidade no estudo de objetos definíveis e, assim, enunciamos tais resultados logo abaixo:

**Teorema 2.2.15** (Teorema da Monotonicidade)**.** *Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ definível. Então, existe uma subdivisão finita $a = a_0 < a_1 < ... < a_k = b$ tal que, em cada intervalo $(a_i, a_{i+1})$, $f$ é contínua e, além disso, é constante ou estritamente monótona.*

*Demonstração.* Veja Coste (1999, Chapter 2, Theorem 2.1). □

**Corolário 2.2.16.** *Se $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ definível, então $\lim\limits_{t \to x^+} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ existe ou é infinito, para todo $x \in [a, b)$.*

**Teorema 2.2.17** (Lema de Seleção de Curva)**.** *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto definível e $p \in \overline{X}$ um ponto não isolado. Então, existe um arco contínuo e definível $\gamma : [0, \varepsilon) \to \overline{X}$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma((0, \varepsilon)) \subset X$.*

*Demonstração.* Veja Coste (1999, Chapter 3, Theorem 3.2). □

### *2.2.1 Cone tangente de um conjunto definível*

**Definição 2.2.18.** *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto definível. Para cada $x \in \overline{X}$, dizemos que o conjunto (definível) $C(X, x) = \{v \in \mathbb{R}^n; \exists \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ e $\exists \{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset (0, +\infty)$ tais que $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x$ e $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{x_k - x}{t_k} = v\}$ é o* **cone tangente de $X$ em $x$**.

Note que $C(X, x_0)$ corresponde ao cone $C_3(X, x_0)$ definido por Whitney (1965a, 1965b, 1972), no caso em que $X$ é um conjunto analítico complexo.

**Observação 2.2.19.** Se $A \subset \mathbb{C}^n$ é um conjunto analítico complexo tal que $x_0 \in A$, então $C(A, x_0)$ é o conjunto de zeros de um conjunto de polinômios homogêneos complexos (veja Whitney (1972, Theorem 4D)). Em particular, $C(A, x_0)$ é uma união de retas complexas passando por $x_0$.

#### *2.2.1.1 Blowing-up esférico*

Nesta seção definimos alguns conceitos de blowing-up esférico.

**Definição 2.2.20.** *A aplicação $\rho_n : \mathbb{S}^{n-1} \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ dada por $\rho_n(x, r) = rx$ é o blowing-up* **esférico da origem de** $\mathbb{R}^n$.

**Observação 2.2.21.** Temos que $\rho_n : \mathbb{S}^{n-1} \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é um difeomorfismo semialgébrico com inversa $\rho_n^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^{n-1} \times (0, +\infty)$ dada por $\rho_n^{-1}(x) = (\frac{x}{\|x\|}, \|x\|)$.

**Definição 2.2.22.** *A transformada estrita de um conjunto definível $X \subset \mathbb{R}^n$ (sob o blowing-up $\rho_n$) é $X' := \overline{\rho_n^{-1}(X \setminus \{0\})}$ e a fronteira $\partial X'$ da transformada estrita, é definida como $\partial X' := X' \cap (\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\})$.*

**Observação 2.2.23.** Note que $\partial X' = \mathbb{S}_0 X \times \{0\}$, onde $\mathbb{S}_0 X = C(X, 0) \cap \mathbb{S}^{n-1}$. Além disso, $\rho_n : \rho_n^{-1}(X \setminus \{0\}) \to X \setminus \{0\}$ é um homeomorfismo definível.

#### *2.2.1.2 Caracterização de cone tangente*

**Teorema 2.2.24.** *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto definível. Então para cada $x \in \overline{X}$, com $x$ sendo um ponto não isolado, temos que $C(X, x) = \{v \in \mathbb{R}^n; \exists \gamma : [0, \varepsilon) \to \overline{X}$ definível tal que $\gamma((0, \varepsilon)) \subset X$ e $\gamma(t) - x = tv + o(t)\}$.*

*Demonstração.* Seja $x \in X$. Então, fazendo uma translação, se necessário, podemos supor que $x = 0$. Seja $\rho : \mathbb{S}^{n-1} \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dada por $\rho(\mathbf{x}, t) = t\mathbf{x}$. Temos que $\rho$ é um homeomorfismo semialgébrico com inversa $\rho^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^{n-1} \times (0, +\infty)$ dada por $\rho_n^{-1}(x) = (\frac{x}{\|x\|}, \|x\|)$. Então, o conjunto $Y = \rho^{-1}(X) \subset \mathbb{S}^{n-1} \times [0, +\infty)$ é definível.

Seja $v \in C(X, 0)$. Então, existem $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ e $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset (0, +\infty)$ tais que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$ e $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{x_k}{t_k} = v$. Se $v \neq 0$, temos que $w = (\frac{v}{\|v\|}, 0) \in \overline{Y}$, então pelo Lema de Seleção de Curva, existe um arco contínuo e definível $\beta : [0, \delta) \to \overline{Y}$ tal que $\beta(0) = w$ e $\beta((0, \delta)) \subset Y$. Escrevendo $\beta(t) = (\mathbf{x}(t), s(t))$, temos que $s : [0, \delta) \to \mathbb{R}$ é contínua, definível e não é constante, já que $s(0) = 0$ e $s(t) > 0$ se $t \in (0, \delta)$. Então, pelo Lema da Monotonicidade, podemos diminuir $\delta$, se necessário, tal que $s$ seja estritamente crescente. Logo, $s : [0, \delta/2] \to [0, \delta']$ é um homeomorfismo definível, onde $\delta' = s(\frac{\delta}{2})$. Assim, sendo $\varepsilon = \min\{\frac{\delta'}{\|v\|}, \delta'\}$, defina $\gamma : [0, \varepsilon) \to \overline{X}$ por

$$\gamma(t) = \rho \circ \beta \circ s^{-1}(t\|v\|) = \rho(\mathbf{x}(s^{-1}(t\|v\|)), s(s^{-1}(t\|v\|)) = t\|v\|\mathbf{x}(s^{-1}(t\|v\|)).$$

Logo,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\gamma(t)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t\|v\|\mathbf{x}(s^{-1}(t))}{t} = \lim_{t\to 0^+} \|v\|\mathbf{x}(s^{-1}(t)) = \|v\|\mathbf{x}(0) = v,$$

e isso nos dá a igualdade $\gamma(t) = tv + o(t)$. Além disso, é claro que $\gamma$ é definível, já que é composição de aplicações definíveis.

Quando $v = 0$, seja $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X \subset \{0\}$ com $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$. Observe que tal sequência existe, pois por hipótese, 0 é um ponto não isolado de $\overline{X}$. Assim, tomando subsequência, se necessário, podemos supor que $\{\frac{x_k}{\|x_k\|}\}_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente, digamos $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{x_k}{\|x_k\|} = w \in C(X, 0)$. Pelo argumento acima, existe $\gamma : [0, \varepsilon) \to \overline{X}$ tal que $\gamma(t) = tw + o(t)$. Definindo $\widetilde{\gamma} : [0, \varepsilon^{\frac{1}{2}}) \to \overline{X}$ por $\widetilde{\gamma}(t) = \gamma(t^2)$, vemos que $\widetilde{\gamma}(t) = o(t) = tv + o(t)$. Com isto concluimos

$$C(X, x) \subset \{v \in \mathbb{R}^n;\, \exists\gamma : [0, \varepsilon) \to \overline{X} \text{ definível t.q. } \gamma((0, \varepsilon)) \subset X \text{ e } \gamma(t) - x = tv + o(t)\}$$

e como a outra inclusão é óbvia, terminamos a prova. □

## 2.3 Equivalências entre conjuntos

**Notação 2.3.1.** *Quando escrevemos $\varphi : (X, x) \to (Y, y)$, significa que $\varphi(x) = y$ e existem representantes $\widetilde{X}$ de $(X, x)$ e $\widetilde{Y}$ de $(Y, y)$ tais que $\varphi : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ está definida.*

**Definição 2.3.2.** *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ e $k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty, \omega\}$. Dizemos que uma aplicação $f : (X, x) \to (Y, y)$ é* ***diferenciável*** *(resp. $C^k$), se a aplicação $f : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ pode ser estendida para uma aplicação diferenciável (resp. $C^k$) $F : U \to V$, onde $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ são abertos tais que $\widetilde{X} \subset U$ e $\widetilde{Y} \subset V$. Quando $X \subset \mathbb{C}^m$, $Y \subset \mathbb{C}^n$, dizemos que uma aplicação $f : (X, x) \to (Y, y)$ é* ***holomorfa*** *ou* ***analítica complexa****, se a aplicação $f : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ pode ser estendida para uma aplicação holomorfa $F : U \to V$, onde $U \subset \mathbb{C}^m$ e $V \subset \mathbb{C}^n$ são abertos tais que $\widetilde{X} \subset U$ e $\widetilde{Y} \subset V$.*

**Definição 2.3.3.** *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, $f : (X, x) \to (Y, y)$ e $k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty, \omega\}$. Suponha que $f : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ é uma bijeção. Então, dizemos que $f : (X, x) \to (Y, y)$ é um:*

*a)* ***homeomorfismo*** *(resp.* ***homeomorfismo bi-Lipschitz****), se $f : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ e $f^{-1} : \widetilde{Y} \to \widetilde{X}$ são aplicações contínuas (resp. Lipschitz);*

*b)* ***difeomorfismo*** *(resp.* ***difeomorfismo*** *$C^k$), se $f : (X, x) \to (Y, y)$ e $f^{-1} : (Y, y) \to (X, x)$ são aplicações diferenciáveis (resp. $C^k$);*

*Quando $X \subset \mathbb{C}^m$ e $Y \subset \mathbb{C}^n$, dizemos que uma aplicação $f : (X, x) \to (Y, y)$ é* ***bi-holomorfa, bi-analítica complexa*** *ou* ***isomorfismo analítico complexo****, se $f : (X, x) \to (Y, y)$ e $f^{-1} : (Y, y) \to (X, x)$ são aplicações holomorfas.*

**Definição 2.3.4.** *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ e $k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty, \omega\}$. Dizemos que $(X, x)$ e $(Y, y)$ são:*

a) ***homeomorfos*** *(resp.* ***bi-Lipschitz homeomorfos****), se existe um homeomorfismo (resp. homeomorfismo bi-Lipschitz)* $\varphi : (X,x) \to (Y,y)$*;*

b) ***difeomorfos*** *(resp.* $C^k$ ***difeomorfos****), se existe um difeomorfismo (resp. difeomorfismo* $C^k$*)* $\varphi : (X,y) \to (Y,y)$*;*

c) ***topologicamente equivalentes*** *ou* **tem a mesma topologia mergulhada**, *se existe um homeomorfismo* $F : U \to V$*, onde* $U \subset \mathbb{R}^m$ *e* $V \subset \mathbb{R}^n$ *são abertos tais que* $\widetilde{X} \subset U$ *e* $\widetilde{Y} \subset V$ *e* $F(\widetilde{X}) = \widetilde{Y}$.

*Quando* $X \subset \mathbb{C}^m$ *e* $Y \subset \mathbb{C}^n$*, dizemos que* $(X,x)$ *e* $(Y,y)$ *são* ***analiticamente isomorfos*** *ou* ***analiticamente equivalentes****, se existe um isomorfismo analítico complexo* $\varphi : (X,x) \to (Y,y)$.

**Notação 2.3.5.** *Mais geralmente, quando dizemos que* $\varphi : (X,x) \to (Y,y)$ *tem uma propriedade* $P$*, significa que* $\varphi : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ *tem a propriedade* $P$*. Da mesma maneira, quando dizemos que* $(X,x)$ *tem uma propriedade* $P$*, significa que* $\widetilde{X}$ *tem a propriedade* $P$*.*

**Definição 2.3.6.** *Sejam* $(X,0)$ *e* $(Y,0)$ *germes de subconjuntos definíveis, na origem de* $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathbb{R}^p$*, respectivamente. Um homeomorfismo* $\varphi : (X,0) \to (Y,0)$*, é dito* **homeomorfismo forte**, *se o homeomorfismo*

$$\rho_p^{-1} \circ \varphi \circ \rho_n : X' \setminus \partial X' \to Y' \setminus \partial Y'$$

*se estende como um homeomorfismo* $\varphi' : X' \to Y'$*. Neste caso, dizemos que* $(X,0)$ *e* $(Y,0)$ *são* **fortemente homeomorfos** *ou* $C^0$**-forte equivalentes**.

Veremos mais adiante que homeomorfismo forte é mais fraco que homeomorfismo bi-Lipschitz definível. Além disso, no capítulo 5 (Lema 5.3.2), é mostrado que homeomorfismo forte é mais fraco que difeomorfismo.

## 2.4 Complexificação de conjuntos e funções

Apresentamos nesta Seção, algumas definições e resultados sobre complexificação de conjuntos e funções. Mais detalhes sobre este assunto, podem ser encontrados em Cartan (1957), Ephraim (1976b), Narasimhan (1966), Whitney (1957) e Whitney e Bruhat (1959).

**Definição 2.4.1.** *Seja* $V \subset \mathbb{C}^n$*. Definimos o* **conjunto conjugado de** $V$ *para ser o conjunto* $c(V) = \{\overline{z} = (\overline{z_1}, ..., \overline{z_n}) \in \mathbb{C}^n;\ z = (z_1, ..., z_n) \in V\}$*.*

**Observação 2.4.2.** Seja $f : W \to \mathbb{C}$ uma função analítica complexa. Então, a função $\overline{f} : c(W) \to \mathbb{C}$ dada por $\overline{f}(z) = \overline{f(\overline{z})}$, para todo $z \in c(W)$, é também uma função analítica complexa.

**Observação 2.4.3.** Se $V \subset \mathbb{C}^n$ é um conjunto analítico complexo, então $c(V)$ é um conjunto analítico complexo.

Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função analítica real. Assim, para cada $y = (y_1, ..., y_n) \in U$, existe $r = (r_1, ..., r_n) \in \mathbb{R}^n_+$ tal que $\mathcal{D}_r(y) := \{(v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n; \, |v_i - y_i| < r_i, \, i = 1, ..., n\} \subset U$ e se $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{D}_r(y)$, então

$$f(x) = \sum_{\nu_1,...,\nu_n=0}^{\infty} a_{\nu_1,...,\nu_n}(x_1 - y_1)^{\nu_1}...(x_n - y_n)^{\nu_n},$$

onde $a_{\nu_1,...,\nu_n} \in \mathbb{R}$. Contudo, a série acima é convergente no polidisco $\Delta_r(y) \subset \mathbb{C}^m$.

**Definição 2.4.4.** *Sendo $\widetilde{U} \subset \mathbb{C}^m$ a união dos $\Delta_r(y)'s$ como acima. Definimos a* **complexificação de** $f : U \to \mathbb{R}$ *como sendo a aplicação $f_{\mathbb{C}} : \widetilde{U} \to \mathbb{C}$ tal que*

$$f_{\mathbb{C}}(z) = \sum_{\nu_1,...,\nu_n=0}^{\infty} a_{\nu_1,...,\nu_n}(z_1 - y_1)^{\nu_1}...(z_n - y_n)^{\nu_n}, \quad z = (z_1, ..., z_n) \in \Delta_r(y),$$

*onde $\mathcal{D}_r(y) \subset U$ e a série de $f$ em $y$ é convergente em $\mathcal{D}_r(y)$.*

**Definição 2.4.5.** *Seja $V \subset \mathbb{R}^m$ um subconjunto analítico real de um aberto $A$ e seja $\widetilde{A}$ a união de todos os polidisco $\Delta_r(y)'s$ tais que $\mathcal{D}_r(y) \subset A$ e existem finitas funções analíticas $f_1, ..., f_k : \mathcal{D}_r(y) \to \mathbb{R}$ satisfazendo $V \cap \mathcal{D}_r(y) = \cap_{i=1}^k f_i^{-1}(0)$. Definimos a* **complexificação de** $V$ *como sendo o subconjunto analítico de $\widetilde{A}$, denotado por $V_{\mathbb{C}}$, tal que $V_{\mathbb{C}} \cap \Delta_r(y) = \cap_{i=1}^k {f_{i\mathbb{C}}}^{-1}(0)$.*

**Proposição 2.4.6.** *Seja $(X, 0)$ um germe de conjunto analítico complexo irredutível. Então, $(X_{\mathbb{C}}, 0)$ e $(X \times c(X), 0)$ são analíticamente isomorfos.*

*Demonstração.* Sejam $W \subset \mathbb{C}^n$ um aberto e $f_1, ..., f_k : W \to \mathbb{C}$ funções analíticas tais que $X = \{z \in W; \, f_1(z) = ... = f_k(z) = 0\}$ e para cada $j = 1, ..., k$, sejam $u_j, v_j : W \to \mathbb{R}$, respectivamente, a parte real e a parte imaginária de $f_j$, i.e., $u_j := Re(f_j)$ e $v_j := Im(f_j)$. Desta forma, $X = \{z \in W; \, u_1(z) = v_1(z) = ... = u_k(z) = v_k(z) = 0\}$ é um subconjunto analítico real de $W$. Escrevendo as coordenadas complexas $(z_1, ..., z_n)$ em coordenadas reais $(x_1, y_1, ..., x_n, y_n)$, onde $z_j = x_j + iy_j$ e complexificando $X$, vemos que

$$X_{\mathbb{C}} = \{\widetilde{z} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{y}_1, ..., \widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) \in \mathbb{C}^{2n}; \, u_{1\mathbb{C}}(\widetilde{z}) = v_{1\mathbb{C}}(\widetilde{z}) = ... = u_{k\mathbb{C}}(\widetilde{z}) = v_{k\mathbb{C}}(\widetilde{z}) = 0\}.$$

Além disso, $X_{\mathbb{C}}$ também pode ser visto como

$$X_{\mathbb{C}} = \{\widetilde{z} \in \mathbb{C}^{2n}; \, u_{j\mathbb{C}}(\widetilde{z}) + iv_{j\mathbb{C}}(\widetilde{z}) = u_{j\mathbb{C}}(\widetilde{z}) - iv_{j\mathbb{C}}(\widetilde{z}) = 0, \text{ para, } j = 1, ..., n\}.$$

Considere a seguinte mudança linear de coordenadas $\Phi = (\phi, \varphi) : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$

dada por

$$\Phi(\widetilde{z}) = (\phi(\widetilde{z}), \varphi(\widetilde{z})) = (\widetilde{x}_1 + i\widetilde{y}_1, ..., \widetilde{x}_n + i\widetilde{y}_n, \widetilde{x}_1 - i\widetilde{y}_1, ..., \widetilde{x}_n - i\widetilde{y}_n).$$

Então para $j = 1, ..., n$, obtemos

$$u_{j\mathbb{C}}(\widetilde{z}) + iv_{j\mathbb{C}}(\widetilde{z}) = f_j(\phi(\widetilde{z}))$$

e

$$u_{j\mathbb{C}}(\widetilde{z}) - iv_{j\mathbb{C}}(\widetilde{z}) = \overline{f}_j(\varphi(\widetilde{z})).$$

Portanto, $\Phi(X_{\mathbb{C}}) = X \times c(X)$. □

## 2.5 Multiplicidade de conjuntos analíticos

Nesta Seção, apresentamos os principais resultados e definições relacionados com a multiplicidade de conjuntos analíticos. Mais detalhes sobre multiplicidade de conjuntos analíticos, podem ser encontrados em Chirka (1989), Draper (1969) e Thie (1967). Para saber sobre multiplicidade, em um contexto mais geral, veja Zariski e Samuel (1960), Atiyah (1969) e Roberts (1998).

**Definição 2.5.1.** *Seja $A$ um anel Noetheriano local e $\mathcal{I} \subset A$ um ideal. Definimos o comprimento de $\mathcal{I}$, denotado por $\ell(\mathcal{I})$, para ser o número máximo de ideais primos $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{p}_d \subseteq \mathcal{I}$.*

**Proposição 2.5.2.** *Seja $A$ um anel local, Noetheriano e $\mathcal{I} \subset A$ um ideal. Se $A/\mathcal{I}$ tem comprimento finito, então existe um polinômio $P_A^{\mathcal{I}} \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $P_A^{\mathcal{I}}(n) = \ell(A/\mathcal{I}^n)$, para todo $n$ suficientemente grande.*

*Demonstração.* Veja Dieudonné (1967, p. 23, Theorem 2.2). □

**Definição 2.5.3.** *Seja $A$ um anel Noetheriano local. $P_A^{\mathcal{I}}$ é chamado de* **Polinômio de Hilbert-Samuel de $A$ com respeito a $\mathcal{I}$**. *Quando $\mathcal{I}$ é o ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $A$, escrevemos simplesmente $P_A$ no lugar de $P_A^{\mathfrak{m}}$ e, neste caso, $P_A$ é chamado de* **Polinômio de Hilbert-Samuel de $A$**.

**Definição 2.5.4.** *Seja $(X, x)$ um germe de conjunto analítico complexo. Sendo $\mathcal{O}_{X,x} := \mathcal{O}_n/\mathcal{I}(X)$ o anel local de $(X, x)$ e $P_{\mathcal{O}_{X,x}}(t) = \sum_{i=0}^{k} a_i t^i$ o polinômio de Hilbert-Samuel de $\mathcal{O}_{X,x}$, com $k = \mathrm{grau}(P_{\mathcal{O}_{X,x}})$, então definimos a multiplicidade de $X$ em $x$ por $m(X, x) := k!a_k$. Quando $x = 0$, dizemos apenas que $m(X) := m(X, 0)$ é a multiplicidade de $X$.*

### *2.5.1 Algumas caracterizações da multiplicidade*

Apresentamos agora algumas caracterizações da multiplicidade que serão usadas nos próximos capítulos.

**Definição 2.5.5.** *Sejam $X \subset \mathbb{C}^n$ um conjunto analítico complexo contendo a origem e $p = \dim X$. Definimos o número de Lelong de $X$ (em 0) por*

$$n(X) := \lim_{r \to 0^+} \frac{\mathcal{H}^{2p}(B_r^n \cap X)}{\mathcal{H}^{2p}(B_r^p)},$$

*onde $\mathcal{H}^{2p}(A)$ denota a medida de Hausdorff de $A$ na dimensão $2p$.*

**Teorema 2.5.6.** *Seja $X \subset \mathbb{C}^n$ um conjunto analítico complexo contendo a origem. Então $n(X) = m(X)$.*

*Demonstração.* Veja Draper (1969, Theorem 7.3). □

**Corolário 2.5.7** (Aditividade da multiplicidade)**.** *Seja $(X, x)$ um germe de conjunto analítico complexo e $(X, x) = (X_1, x) \cup ... \cup (X_r, x)$ sua decomposição em componentes irredutíveis. Então, $m(X, x) = m(X_1, x) + ... + m(X_r, x)$.*

**Definição 2.5.8.** *Sejam $A \subset \mathbb{C}^m$ e $B \subset \mathbb{C}^n$ duas subvariedades analíticas complexas (i.e., $\mathrm{Reg}(A) = A$ e $\mathrm{Reg}(B) = B$). Dizemos que uma aplicação contínua $f : A \to B$ é um $k$-**recobrimento**, se para todo ponto $x \in B$ existe uma vizinhaça aberta $U$ de $x$ tal que $f^{-1}(U)$ tem $k$ componentes conexas, digamos $U_1, ..., U_k$ e, além disso, $f|_{U_i} : U_i \to U$ é uma homeomorfismo bi-holomorfo.*

**Definição 2.5.9.** *Seja $U \subset \mathbb{C}^n$ um aberto. Um conjunto fechado $\sigma \subset U$ é dito* **removível***, se toda função limitada e holomorfa $h : U \setminus \sigma \to \mathbb{C}$ pode ser estendida para uma função holomorfa $\widetilde{h} : U \to \mathbb{C}$. Um conjunto fechado $\sigma \subset U$ é dito* **localmente removível***, se $\sigma$ é removível em uma vizinhança de cada um de seus pontos.*

**Definição 2.5.10.** *Sejam $A \subset \mathbb{C}^m$ um conjunto localmente fechado e $U' \subset \mathbb{C}^n$ um aberto. Dizemos que uma aplicação contínua e própria $f : A \to U'$ é um* $k$-**recobrimento generalizado***, se existe um conjunto localmente removível $\sigma \subset U'$ tal que $f^{-1}(\sigma)$ é nunca denso em $A$, $A \setminus f^{-1}(\sigma)$ é um conjunto analítico complexo tal que $\mathrm{Reg}(A \setminus f^{-1}(\sigma)) = A \setminus f^{-1}(\sigma)$ e $f : A \setminus f^{-1}(\sigma) \to U' \setminus \sigma$ é um $k$-recobrimento. Para $\sigma$ sendo o menor conjunto possível, como na definição acima, escrevemos $br(f) = f^{-1}(\sigma)$.*

**Proposição 2.5.11.** *Sejam $X \subset \mathbb{C}^n$ um conjunto analítico contendo a origem, com $d = \dim X$ e $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^d$ uma projeção linear. Se $\pi^{-1}(0) \cap C(X, 0) = \{0\}$, então existe um aberto $U \subset \mathbb{C}^n$ contendo a origem, tal que $\pi|_{(X \cap U) \setminus br(\pi|_{X \cap U})} : (X \cap U) \setminus br(\pi|_{X \cap U}) \to \mathbb{C}^d \setminus \sigma$ é um $\mu_0(X)$-recobrimento, com $\mu_0(X) = m(X)$ e $\sigma = \pi(br(\pi|_{X \cap U}))$.*

*Demonstração.* Veja Chirka (1989, p. 190, Proposition 2) ou Draper (1969, Theorem 6.3 e Theorem 6.5). □

**Corolário 2.5.12.** *$m(X) = 1 \Leftrightarrow (X, 0)$ é regular.*

*Demonstração.* Se $m(X) = 1$, então pela Proposição 2.5.11, existe um aberto $U \subset \mathbb{C}^n$ contendo a origem e uma projeção linear $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^d$ tais que $\pi|_{(X\cap U)\setminus br(\pi|_{X\cap U})} : (X\cap U)\setminus br(\pi|_{X\cap U}) \to \mathbb{C}^d \setminus \sigma$ é um 1-recobrimento, onde $d = \dim X$. Diminuindo $U$ e fazendo uma mudança holomorfa de variáveis, se necessário, podemos tomar $U = U' \times U'' \subset \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}$. Então, $(X\cap U)\setminus br(\pi|_{X\cap U})$ é o gráfico de uma aplicação holomorfa $F : U'\setminus\sigma \to \mathbb{C}^{n-d}$. Mas $\sigma$ é removível e $F$ é holomorfa e limitada, então $F$ pode ser estendida holomorficamente para $\widetilde{F} : U' \to \mathbb{C}^{n-d}$. Daí, $X\cap U$ é o gráfico de $\widetilde{F}$ e, portanto, $X\cap U$ é variedade holomorfa.

Por outro lado, se existe aberto $U$ tal que $X \cap U$ é variedade holomorfa, então $X \cap U$ é localmente gráfico de aplicação holomorfa $F : U' \to \mathbb{C}^{n-d}$. Então, podemos tomar uma projeção linear $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^d$ tal que $\pi_X : X \to \mathbb{C}^d$ seja um 1-recobrimento, i.e., $m(X) = 1$. □

**Proposição 2.5.13.** *Sejam $X$ e $Y$ conjuntos analíticos complexos. Se $\phi : (\mathbb{C}^n, X, 0) \to (\mathbb{C}^n, Y, 0)$ for uma aplicação bi-holomorfa, então $m(X) = m(Y)$.*

*Demonstração.* Veja Chirka (1989, p. 120, Proposition). □

**Proposição 2.5.14.** *Sejam $X$ e $Y$ conjuntos analíticos complexos. Então,*

$$m(X \times Y) = m(X)m(Y).$$

*Demonstração.* Veja Chirka (1989, p. 124, Corollary 4). □

**Proposição 2.5.15.** *Seja $X$ um conjunto analítico complexo. Então, $m(X) = m(c(X))$.*

*Demonstração.* Basta observar que $w \in X \cap \pi^{-1}(z)$ se, somente se, $\overline{w} \in c(X) \cap \pi^{-1}(\overline{z})$ e que $\pi^{-1}(0) \cap C(X, 0) = \{0\}$ se, e somente se, $\pi^{-1}(0) \cap C(c(X), 0) = \{0\}$. □

## 2.6 Mais alguns resultados sobre regularidade topológica e cones

Fazendo translação, se necessário, trabalhamos apenas com germes de funções e de conjuntos em $x = 0$ e, assim, temos o seguinte:

**Teorema 2.6.1.** *Sejam $X$ e $Y$ conjuntos definíveis contendo a origem. Seja $\varphi : (X, 0) \to (Y, 0)$ um germe de função Lipschitz definível. Então, $d_0\varphi : C(X, 0) \to C(Y, 0)$ dada por*

$$d_0\varphi(v) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi(\gamma(t))}{t},$$

*está bem definida, onde $\gamma : [0, \varepsilon) \to X$ é uma curva definível tal que $\gamma(t) = tv + o(t)$. Então:*

*a)* $d_0\varphi : C(X,0) \to C(Y,0)$ *é Lipschitz, definível e homogênea positiva de grau 1, i.e.,* $d_0\varphi(\lambda v) = \lambda d_0\varphi(v)$*, para todo* $v \in C(X,0)$ *e todo* $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

*b) Se* $\varphi$ *é bi-Lipschitz, então* $d_0\varphi : C(X,0) \to C(Y,0)$ *é bi-Lipschitz e* $(d_0\varphi)^{-1} = d_0\varphi^{-1}$*;*

*c) Se* $X = \mathbb{R}^n$*,* $Y = \mathbb{R}^m$ *e* $r(v) = \varphi(v) - d_0\varphi(v)$*, então* $r(v) = o(|v|)$*;*

*Demonstração.* Mostraremos primeiramente que $d_0\varphi$ é uma aplicação Lipschitz, para isso, sejam $x, y \in C(X,0)$ e $K = Lip(\varphi)$. Sejam $\alpha, \beta : [0,\varepsilon) \to X$, curvas definíveis tais que $\alpha(t) = tv + o(t)$ e $\beta(t) = tw + o(t)$. Então,

$$\begin{aligned}
\|d_0\varphi(v) - d_0\varphi(w)\| &= \left\| \lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi(\alpha(t))}{t} - \lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi(\beta(t))}{t} \right\| \\
&= \lim_{t\to 0^+} \left\| \frac{\varphi(\alpha(t))}{t} - \frac{\varphi(\beta(t))}{t} \right\| \\
&\leq \lim_{t\to 0^+} \frac{K}{t} \|\alpha(t) - \beta(t)\| \\
&= K\|v - w\|.
\end{aligned}$$

é claro que, fazendo $v = w$, o mesmo argumento acima mostra que $d_0\varphi(v)$ não depende da escolha da curva $\alpha$ e, assim, $d_0\varphi(v)$ está bem definido. Além disso, pela caracterização de $C(Y,0)$, é claro que $d_0\varphi(v) \in C(Y,0)$, i.e., $d_0\varphi : C(X,0) \to C(Y,0)$ está bem definida e é Lipschitz.

Agora, pela definição de $d_0\varphi$, também é claro que $d_0\varphi(\lambda v) = \lambda d_0\varphi(v)$, para todo $x \in C(X,0)$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Dando continuidade, no caso do item b) vamos mostrar que $d_0\varphi \circ d_0\varphi^{-1} = id_{C(Y,0)}$ e, para isso, seja $x \in C(Y,0)$ e $y = d_0\varphi^{-1}(x)$. Sejam $\gamma : [0,\varepsilon) \to X$ uma curva definível tal que $\gamma(t) = tx + o(t)$ e $\beta := \varphi^{-1} \circ \gamma$. Em particular,

$$ty = td_0\varphi^{-1}(x) = d_0\varphi^{-1}(tx) = \varphi^{-1}(\gamma(t)) + o(t).$$

Então, temos que $\beta(t) = ty + o(t)$. Daí, $d_0\varphi(y) = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\varphi(\beta(t))}{t}$ e, assim,

$$\begin{aligned}
\|d_0\varphi(y) - x\| &= \left\| \lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi(\beta(t))}{t} - x \right\| \\
&= \lim_{t\to 0^+} \left\| \frac{\varphi(\beta(t))}{t} - \frac{\gamma(t)}{t} \right\| \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} \left\| \varphi(\beta(t)) - \gamma(t) \right\| \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} \left\| \varphi(\beta(t)) - \varphi(\varphi^{-1}(\gamma(t))) \right\| \\
&\leq \lim_{t\to 0^+} \frac{K}{t} \left\| \beta(t) - \varphi^{-1}(\gamma(t)) \right\| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $d_0\varphi(y) = d_0\varphi(d_0\varphi^{-1}(x)) = x$ para todo $x \in C(Y,0)$, i.e., $d_0\varphi \circ d_0\varphi^{-1} = id_{C(Y,0)}$. De forma analoga, mostra-se que $d_0\varphi^{-1} \circ d_0\varphi = id_{C(X,0)}$. Como pelo item a), $d_0\varphi$ e $d_0\varphi^{-1}$ são aplicações Lipschitz, terminamos a prova do item b).

Para o item c), suponha que $r(x) \neq o(x)$, então existe $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $x_n \to 0$ e $\frac{\|r(x_n)\|}{\|x_n\|} \geq \varepsilon > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando subsequência, se necessário, podemos supor que $\frac{x_n}{\|x_n\|} \to x_0$ e $\frac{\varphi(x_n)}{\|x_n\|} \to y_0$, já que ambas sequências são limitadas ($\frac{\|\varphi(x_n)\|}{\|x_n\|} \leq K$). Como $d_0\varphi$ é contínua e homogênea de grau 1, então $\frac{d_0\varphi(x_n)}{\|x_n\|} \to d_0\varphi(x_0)$. Porém,

$$\begin{aligned}
\|d_0\varphi(x_0) - y_0\| &= \left\| \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(\|x_n\|x_0)}{\|x_n\|} - \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(x_n)}{\|x_n\|} \right\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\|x_n\|} \left\| \varphi(\|x_n\|x_0) - \varphi(x_n) \right\| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{K}{\|x_n\|} \left\| \|x_n\|x_0 - x_n \right\| \\
&= \lim_{n\to\infty} K \left\| x_0 - \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\| \\
&= K \left\| x_0 - \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\| \\
&= K\|x_0 - x_0\| = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{r(x_n)}{\|x_n\|} = 0$, que é uma contradição com a sequência tomada. Logo $r(x) = o(x)$. $\square$

**Corolário 2.6.2.** *Sejam $X$ e $Y$ conjuntos definíveis contendo a origem. Se $\varphi : (X,0) \to (Y,0)$ é um homeomorfismo bi-Lipschitz e definível, então $\nu_0\varphi := \frac{d_0\varphi}{|d_0\varphi|} : C(X,0) \cap \mathbb{S}^{2n-1} \to C(Y,0) \cap \mathbb{S}^{2n-1}$ é um homeomorfismo.*

*Demonstração.* É claro que $\nu_0\varphi$ é contínua, então observe que $(\nu_0\varphi)^{-1} = \nu_0\varphi^{-1}$. $\square$

**Teorema 2.6.3.** *Sejam $(X,0)$ e $(Y,0)$ germes de conjuntos definíveis em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^p$, respectivamente. Seja $\varphi : (X,0) \to (Y,0)$ um homeomorfismo bi-Lipschitz e definível. Então, os germes $(X,0)$ e $(Y,0)$ são fortemente homeomorfos.*

*Demonstração.* Veja que $\varphi' : X' \to Y'$ definida por

$$\varphi'(\mathbf{u}, t) = \begin{cases} \left( \frac{\varphi(t\mathbf{u})}{\|\varphi(t\mathbf{u})\|}, \|\varphi(t\mathbf{u})\| \right), & \text{se } t > 0 \\ (\nu_0\varphi(u), 0), & \text{se } t = 0, \end{cases}$$

é contínua e use o Corolário 2.6.2. $\square$

**Exemplo 2.6.4.** *Seja $C$ um cone algébrico e defina $\phi : C \to C$ por $\phi(x) = \|x\| \cdot x$. Temos que $\phi$ é um homeomorfismo forte, já que $\varphi' = \varphi'^{-1} = id_{C'}$. Entretanto, $\varphi$ não é* *bi-Lipschitz, pois*

$$\varphi^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{\|x\|^{\frac{1}{2}}}, & se\ x \neq 0 \\ 0, & se\ x = 0, \end{cases}$$

*é contínua e não é Lipschitz.*

**Definição 2.6.5.** *Sejam $A$ um domínio de integridade e $\mathbb{Q}_A$ seu corpo de frações. Um elemento $f \in \mathbb{Q}_A$ é dito* **inteiro sobre** *$A$, se para algum $n \in \mathbb{N}$ existem $a_0, ..., a_{n-1} \in A$ satisfazendo*

$$f^n + a_{n-1}f^{n-1} + ... + a_0 = 0.$$

*O conjunto de todos os elementos inteiro sobre $A$ é chamado de fecho inteiro (ou fecho integral) de $A$ e é denotado por $\overline{A}$. Além disso, dizemos que $A$ é normal, se $\overline{A} = A$.*

**Definição 2.6.6.** *Um germe $(X, x)$ de conjunto analítico complexo é dito normal, se $\mathcal{O}_{X,x}$ é normal.*

**Definição 2.6.7.** *Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ e $p \in X$. Dizemos que $p$ é um* **ponto topologicamente regular***, se existe uma vizinhaça aberta $U \subset \mathbb{R}^m$ de $x$ tal que $X \cap U$ é uma variedade topológica. Denotamos todos pontos topologicamente regulares de $X$, por $\mathrm{Reg}_{top}(X)$. Quando um ponto $p \in X$ não é topologicamente regular, dizemos que ele é topologicamente singular. Denotamos todos pontos topologicamente singulares de $X$, por $\mathrm{Sing}_{top}(X)$.*

**Teorema 2.6.8** (Mumford (1961, Theorem))**.** *Seja $X$ um conjunto analítico complexo tal que $(X, 0)$ é normal, $0 \in \mathrm{Reg}_{top}(X)$ e $\dim X = 2$. Então, $0$ é um ponto regular de $X$.*

**Definição 2.6.9.** *Dizemos que $C \subset \mathbb{C}^n$ é um* **cone complexo***, se existe um ponto $x \in C$ tal que $C$ é uma união de retas complexas passando por $x$.*

Na linha do Teorema de Mumford (1961), temos um Teorema provado por Prill (1967), que será muito útil nos próximos capítulos:

**Teorema 2.6.10** (Prill (1967, p. 180, Theorem))**.** *Seja $C \subset \mathbb{C}^n$ um cone complexo. Se $0 \in \mathrm{Reg}_{top}(X)$, então $C$ é um hiperplano de $\mathbb{C}^n$.*

# 3 CONJUNTOS DEFINÍVEIS FORTEMENTE HOMEOMORFOS

Esse capítulo é dedicado para estudar homeomorfismos fortes entre conjuntos subanalíticos. É feito um estudo completo acerca de regularidade topológica forte de conjuntos analíticos. Além disso, é dada uma classificação completa de curvas analíticas complexas. Mais alguns exemplos e resultados sobre homeomorfismo forte podem ser encontrados em Birbrair, Fernandes e Grandjean (2012), onde eles chamam isomorfismo blow-esférico em vez de homeomorfismo forte.

## 3.1 Multiplicidades relativas das componentes do cone tangente

**Definição 3.1.1.** *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto subanalítico contendo a origem. Dizemos que $x \in \partial X'$ é um* **ponto simples de** $\partial X'$, *se existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ contendo $x$ satisfazendo o seguinte:*

*a) as componentes conexas de $(X' \cap U) \setminus \partial X'$, digamos $X_1, ..., X_r$, são variedades topológicas;*

*b) $(X_i \cup \partial X') \cap U$ são variedades topológicas com bordo.*

*Seja $Smp(\partial X')$ o conjunto dos pontos simples de $\partial X'$.*

**Definição 3.1.2.** *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto definível contendo a origem. Definimos $k_X : Smp(\partial X') \to \mathbb{N}$, onde $k_X(x)$ é o número mínimo das componentes conexas de $\rho^{-1}(X \setminus \{0\}) \cap U$, para $U$ aberto suficientemente pequeno contendo $x$.*

**Observação 3.1.3.** A função $k_X$ é claramente localmente constante. Na verdade, $k_X$ é constante em cada componente conexa $C_j$ de $Smp(\partial X')$. Então, definimos $k_X(C_j) := k_X(x)$ com $x \in (C_j \times \{0\}) \cap Smp(\partial X')$.

**Observação 3.1.4.** No caso em que $X$ é um conjunto analítico complexo, existe um conjunto analítico $\sigma$ com dimensão menor que $\dim X$, tal que $X_j \setminus \sigma$ intersecta apenas uma componente conexa $C_i$, para cada componente irredutível $X_j$ do cone tangente $C(X, 0)$ e, então definimos $k_X(X_j) := k_X(C_i)$.

**Observação 3.1.5.** O número $k_X(C_j)$ é igual ao $n_j$ definido por Kurdyka e Raby (1989, p. 762) e, também, é igual ao $k_j$ definido por Chirka (1989, chapter 2, sec. 11), quando $X$ é um conjunto analítico complexo.

Com base nisso, vale o seguinte:

**Proposição 3.1.6.** *Seja $X \subset \mathbb{C}^n$ um conjunto analítico complexo e sejam $X_1, ..., X_r$ as componentes irredutíveis de $C(X, 0)$. Então, $m(X) = \sum_{j=1}^{r} k_X(X_j) m(X_j)$.*

*Demonstração.* Veja Chirka (1989, chapter 2, sec. 11, p. 133, proposition). □

Outra demonstração da Proposição 3.1.6, pode ser encontrada em Kurdyka e Raby (1989, p. 766, THÉORÈME 3.8) (olhando a multiplicidade como o número de Lelong, como no Teorema 2.5.6).

**Teorema 3.1.7** (Teorema da Invariância das multiplicidades relativas)**.** *Sejam* $(X,0)$ *e* $(Y,0)$ *germes de conjuntos definíveis e* $\varphi:(X,0)\to(Y,0)$ *um homeomorfismo forte. Se* $X_1,...,X_r$ *são as componentes conexas de* $Smp(\partial X')$ *e* $Smp(\partial X')=\bigcup_{j=1}^{r}Y_j$*, com* $Y_j=\varphi'(X_j)$*, então* $k_X(X_j)=k_Y(Y_j)$*,* $j=1,...,r$*.*

*Demonstração.* Como $\varphi:(X,0)\to(Y,0)$ é um homeomorfismo forte, temos que $\varphi':X'\to Y'$ é homeomorfismo. Fixado $j\in\{1,...,r\}$, para cada $x\in X_j$, seja $U_x$ uma vizinhança aberta de $x$, tal que $\rho^{-1}(X\setminus\{0\})\cap U_x$ tem $k_X(X_j)$ componentes conexas. Então, $\varphi'(\rho^{-1}(X\setminus\{0\})\cap U_x)$ é um aberto de $Y'$ com $k_X(X_j)$ componentes conexas. Então, $k_Y(Y_j)\le k_X(X_j)$ e usando $\varphi'^{-1}$ em vez de $\varphi'$, obtemos a outra desigualdade, $k_X(X_j)\le k_Y(Y_j)$. Portanto, $k_X(X_j)=k_Y(Y_j)$. □

Kurdyka e Raby (1989, p. 767, Propostion 3.9), mostraram que as multiplicidades relativas são invariantes analíticos e Valette (2010, p. 668, Proposition 2.5), mostrou que são invariantes por homeomorfismo bi-Lipschitz subanalítico.

**Teorema 3.1.8.** *Se* $(X,0)$ *e* $(Y,0)$ *são fortemente homeomorfos, então* $C(X,0)$ *e* $C(Y,0)$ *também são fortemente homeomorfos.*

*Demonstração.* Seja $\varphi:(X,0)\to(Y,0)$ um homeomorfismo forte. Então, $\varphi'|_{\partial X'}:\partial X'\to\partial Y'$ é um homeomorfismo. Defina $d_0\varphi':C(X,0)\to C(Y,0)$ por

$$d_0\varphi'(x)=\begin{cases}\|x\|\varphi'(\frac{x}{\|x\|}), & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Temos que $d_0\varphi'$ é um homeomorfismo forte. □

## 3.2 Aplicações do Teorema da Invariância das multiplicidades relativas no caso complexo

### *3.2.1 Regularidade topológica forte*

**Definição 3.2.1.** *Seja* $X\subset\mathbb{R}^n$ *um conjunto subanalítico contendo a origem e* $p=\dim X$*.* $(X,0)$ *é dito topologicamente forte regular, se* $(X,0)$ *e* $(\mathbb{R}^p,0)$ *são fortemente homeomorfos.*

**Teorema 3.2.2** (Teorema da regularidade topológica forte)**.** *Seja $X \subset \mathbb{C}^n$ um conjunto analítico complexo contendo a origem. Se $(X,0)$ é topologicamente forte regular, então $m(X) = 1$, i.e., $(X,0)$ é suave.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 3.1.8, $C(X,0)$ e $\mathbb{C}^k$ são fortemente homeomorfos, onde $k = \dim X$, implicando em $C(X,0)$ ser irredutível, pois $\mathbb{C}^k$ é irredutível. Em particular, $C(X,0)$ é uma variedade topológica. Então, pelo Teorema de Prill, $C(X,0)$ é um hiperplano. Daí, $m(C(X,0)) = 1$ e pelo Teorema 3.1.7, $m(X) = m(C(X,0)) = 1$. □

Como consequência, temos o resultado provado em Birbrair et al (2014) (o mesmo resultado também pode ser encontrado na seção 4.2.1).

**Corolário 3.2.3.** *Se $(X,0)$ é um germe de conjunto analítico complexo e $\varphi : (X,0) \to (\mathbb{C}^d, 0)$ é um homeomorfismo bi-Lipschitz subanalítico, então $(X,0)$ é suave.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 2.6.3, $(X,0)$ é topologicamente forte regular, então pelo Teorema 3.2.2, $(X,0)$ é suave. □

### *3.2.2 Classificação de Curvas fortemente homeomorfas*

Em $\mathbb{C}^2$ a multiplicidade é um invariante da topologia mergulhada para curvas, mas isso não é verdade para $\mathbb{C}^n$, $n > 2$, e como quaisquer dois germes de curvas analíticas complexas irredutíveis são homeomorfas, vemos que a multiplicidade não é invariante por homeomorfismos. Na verdade, a multiplicidade de curvas não é invariante nem mesmo por homeomorfismos preservando o ambiente. Um exemplo desta afirmação é dado abaixo:

**Exemplo 3.2.4.** *Sejam $X = \{(x,0,0) \in \mathbb{C}^3;\, x \in \mathbb{C}\}$ e $Y = \{(0,y,z) \in \mathbb{C}^3;\, y^3 = z^2\}$. Seja $u : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ uma aplicação contínua tal que*

$$u(t^2, t^3) = \begin{cases} t, & |t| \leq 1 \\ \frac{t}{|t|}, & |t| > 1. \end{cases}$$

*Temos que $\varphi : (\mathbb{C}^3, X, 0) \to (\mathbb{C}^3, Y, 0)$ dada por*

$$\varphi(x,y,z) = (x - u(y + x^2, z + x^3), y + x^2, z + x^3)$$

*é um homeomorfismo com inversa*

$$\varphi^{-1}(x,y,z) = (x + u(y,z), y - (x + u(y,z))^2, z - (x + u(y,z))^3),$$

*mas $m(X) = 1$ e $m(Y) = 2$.*

Contudo, a multiplicidade é um invariante completo quando consideramos homeomorfismo forte entre curvas analíticas complexas.

**Corolário 3.2.5.** *Sejam $(X,0),(Y,0)\subset(\mathbb{C}^n,0)$ dois germes de curvas analíticas complexas fortemente homeomorfas. Então, $m(X)=m(Y)$.*

*Demonstração.* Seja $\varphi:(X,0)\to(Y,0)$ um homeomorfismo forte. Pela aditividade da multiplicidade é suficiente supor que $X$ e $Y$ são irredutíveis. Assim, o cone tangente de $X$ ou de $Y$ é uma reta complexa, então $m(C(X,0))=m(C(Y,0))=1$. Pela Proposição 3.1.6, $m(X)=k_X(C(X,0))$ e $m(Y)=k_Y(C(Y,0))$, mas pelo Teorema 3.1.7, $k_X(C(X,0))=k_Y(C(Y,0))$ e isso conclui a prova. □

**Teorema 3.2.6.** *Dois germes de curvas analíticas complexas irredutíveis são fortemente homeomorfas se, e somente se, elas tem a mesma multiplicidade.*

*Demonstração.* Sejam $(X,0),(Y,0)\subset(\mathbb{C}^n,0)$ dois germes de curvas analíticas complexas irredutíveis. Já sabemos que se $(X,0)$ e $(Y,0)$ são fortemente homeomorfas, então elas tem a mesma multiplicidade (Corolário 3.2.5). Mostremos então a recíproca. Suponha que $k=m(X)=m(Y)$. Depois de uma mudança de coordenadas linear, se necessário, suponha que o cone tangente de $(X,0)$ e de $(Y,0)$ seja $\{(\xi,0)\in\mathbb{C}^n;\ \xi\in\mathbb{C}\}$. Sejam $\psi:\mathbb{D}_\varepsilon\to X$ e $\widetilde{\psi}:\mathbb{D}_\varepsilon\to Y$ as parametrizações de Puiseux de $(X,0)$ e $(Y,0)$, respectivamente, dadas por

$$\psi(t)=(t^k,\phi(t))=(t^k,\phi_2(t),...,\phi_n(t))$$

e

$$\widetilde{\psi}(t)=(t^k,\widetilde{\phi}(t))=(t^k,\widetilde{\phi}_2(t),...,\widetilde{\phi}_n(t)),$$

onde $\mathrm{ord}_0\phi_i>k$ e $\mathrm{ord}_0\widetilde{\phi}_i>k$, $i=2,...,n$. Defina $\varphi:X\to Y$ por $\varphi=\widetilde{\psi}\circ\psi^{-1}$. Mostremos que $\varphi$ é um homeomorfismo forte com $\varphi'|_{\partial X'}=\mathrm{id}_{\partial X'}$. Para que isso seja verdade, é suficiente mostrar que se $z_m=(\mathbf{x}_m,t_m)\in X'\setminus\partial X'$ é tal que $\lim\limits_{m\to\infty}z_m=(\mathbf{x},0)$, então temos $\lim\limits_{m\to\infty}\varphi'(z_m)=(\mathbf{x},0)$. De fato, sendo $s_m=\psi^{-1}(t_m\mathbf{x}_m)$, temos

$$\begin{aligned}\varphi'(z_m)&=\left(\frac{\varphi(t_m\mathbf{x}_m)}{\|\varphi(t_m\mathbf{x}_m)\|},\|\varphi(t_m\mathbf{x}_m)\|\right)\\&=\left(\frac{(s_m^k,\widetilde{\phi}(s_m))}{\|(s_m^k,\widetilde{\phi}(s_m))\|},\|(s_m^k,\widetilde{\phi}(s_m))\|\right).\end{aligned}$$

Porém, $t_m\mathbf{x}_m=(s_m^k,\phi(s_m))$ e, assim,

$$z_m=\left(\frac{(s_m^k,\phi(s_m))}{\|(s_m^k,\phi(s_m))\|},\|(s_m^k,\phi(s_m))\|\right).$$

Logo, $\lim\limits_{m\to\infty}\varphi'(z_m)=\lim\limits_{m\to\infty}z_m=(\mathbf{x},0)$. □

Sejam $(X,0),(Y,0)\subset(\mathbb{C}^n,0)$ dois germes de curvas analíticas complexas, $(X_1,0),...,(X_r,0)\subset(\mathbb{C}^n,0)$ as componentes irredutíveis de $(X,0)$ e $(Y_1,0),...,(Y_s,0)\subset(\mathbb{C}^n,0)$ as componentes irredutíveis de $(Y,0)$. Então, temos o seguinte:

**Corolário 3.2.7.** *$(X, 0)$ e $(Y, 0)$ são fortemente homeomorfas se, e somente se, existe uma bijeção $\sigma : \{1, ..., r\} \to \{1, ..., s\}$ tal que $m(X_i) = m(Y_{\sigma(i)})$, para todo $i = 1, ..., r$.*

## 3.3 Aplicações do Teorema da Invariância das multiplicidades relativas no caso real

### *3.3.1 Regularidade topológica forte*

Mostramos nesta Seção, que o Teorema 3.2.2 para conjuntos analíticos reais, não é verdadeiro em geral. Porém, antes disso mostramos, via exemplo, que a melhor regularidade que podemos esperar, no caso de conjuntos analíticos reais, é regularidade $C^1$. A partir daí, apresentamos alguns exemplos de conjuntos que são topologicamente forte regulares, mas não são $C^1$ e, então, mostramos que regularidade topológica forte implica regularidade $C^1$ somente para o caso de curvas analíticas reais. Com isso, finalizamos o estudo sobre regularidade topológica forte de conjuntos analíticos (reais e complexos).

**Exemplo 3.3.1.** *$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z^3 = x^4 + y^4\}$ é $C^1$, em particular, topologicamente forte regular, mas não é $C^2$.*

**Exemplo 3.3.2.** *Seja $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z^3 = x^5y + xy^5\}$. Então, $C(V) = \{z = 0\}$ é um plano e $V$ é hipersuperfície, contudo $V$ não é $C^1$. Na verdade, $V$ é gráfico de uma função derivável em todo ponto, em particular, é variedade diferenciável (possui cartas somente deriváveis) e, assim, topologicamente forte regular, mas não é $C^1$.*

Diante do exemplo acima, temos mais geralmente

**Exemplo 3.3.3.** *Seja $n \geq 3$. Então, $X = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_3^3 = x_1^5x_2 + x_1x_2^5\} = V \times \mathbb{R}^{n-3}$ é topologicamente forte regular, mas não é $C^1$.*

De fato, pelo exemplo 3.3.2, existe um homeomorfismo forte (global) $\phi : V \to \mathbb{R}^2$. Defina $\varphi : X \to \mathbb{R}^{n-1}$ por

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = (\phi(x_1, x_2, x_3), x_4, ..., x_n).$$

É claro que $\varphi$ é um homeomorfismo forte.

**Definição 3.3.4.** *Dizemos que uma curva analítica $X \in \mathbb{R}^n$ é uma* **cúspide** *em $x \in X$ se $C(X, x)$ é uma semi-reta.*

**Proposição 3.3.5.** *Sejam $V \subset \mathbb{R}^n$ uma curva analítica real e $x_0 \in V$ um ponto não isolado. Então, existe uma vizinhança aberta $U \subset \mathbb{R}^n$ de $x_0$ e existem $\Gamma_1, ..., \Gamma_r \subset \mathbb{R}^n$*

*satisfazendo* $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \{x_0\}$, *se* $i \neq j$ *e*

$$V \cap U = \bigcup_{i=1}^{r} \Gamma_i$$

*. Além disso, para cada* $i \in \{1, ..., r\}$, *existe um homemorfismo analítico* $\gamma_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Gamma_i$.

*Demonstração.* Veja Milnor (1968, p.28, Lemma 3.3). □

**Definição 3.3.6.** *Cada* $\Gamma_i$ *no Lemma 3.3.5 é chamado* **ramo de** $V$.

**Observação 3.3.7.** É claro que se $X$ é uma variedade topológica, então $X$ só tem um ramo.

**Lema 3.3.8.** *Seja* $X \subset \mathbb{R}^n$ *uma curva analítica real topologicamente regular em* $x_0 \in X$. *Então,* $C(X, x_0)$ *é uma semi-reta ou uma reta. Além disso,* $C(X, x_0)$ *é uma reta se, e somente se,* $(X, x_0)$ *é* $C^1$.

*Demonstração.* Primeiramente podemos supor que $x_0 = 0$ e pela observação 3.3.9, $X$ só tem um ramo $\Gamma = X$. Seja $\gamma : (-1, 1) \to \Gamma$ um homeomorfismo analítico. Seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ analítica, com $\alpha(0) \neq 0$ e $\gamma(t) = t^k \alpha(t)$, para todo $|t| < \varepsilon$. Reparametrizando $\gamma$, se necessário, podemos supor que $\varepsilon = 1$. Daí, temos o seguinte

$$u = \lim_{t \to 0^+} \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|} = \lim_{t \to 0^+} \frac{t^k \alpha(t)}{\|t^k \alpha(t)\|} = \frac{\alpha(0)}{\|\alpha(0)\|}$$

e

$$v = \lim_{t \to 0^-} \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|} = \lim_{t \to 0^-} \frac{t^k \alpha(t)}{\|t^k \alpha(t)\|} = (-1)^k \frac{\alpha(0)}{\|\alpha(0)\|}.$$

Então, $v = \pm u$. Contudo, observe que $C(X, 0) = \{\lambda u;\ \lambda \geq 0\} \cup \{\mu v;\ \mu \geq 0\}$. Com isso, temos dois casos possíveis:

a) $v = u$ e, neste caso, $k$ é par e $C(X, 0) = \{\lambda u;\ \lambda \geq 0\}$ é uma semi-reta;

b) $v = -u$ e, neste caso, $k$ é impar e $C(X, 0) = \{\lambda u;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ é uma reta.

Para a segunda parte, é claro que se $(X, 0)$ é $C^1$, então $C(X, 0)$ é uma reta. Reciprocamente, se $C(X, 0)$ é uma reta, então $k$ é impar e como $\gamma$ é analítica, podemos supor $\gamma'(t) \neq 0$, se $t \neq 0$. Daí, seja $\beta : (1, -1) \to X$ dada por $\beta(s) = \gamma(s^{\frac{1}{k}})$. Portanto, existe vizinhança aberta $U \subset \mathbb{R}^n$ de 0, tal que $\beta : (1, -1) \to X \cap U$ é um homeomorfismo. De fato, $\beta(s) = s\alpha(s^{\frac{1}{k}})$ e, nesta forma, vemos claramente que $\beta$ é $C^1$. Portanto, $(X, 0)$ é $C^1$. □

**Teorema 3.3.9.** *Seja* $(X, 0) \subset (\mathbb{R}^n, 0)$ *um germe de curva analítica real que é topologicamente forte regular. Então,* $(X, 0)$ *é* $C^1$.

*Demonstração.* Pelo Teorema 3.1.8, $C(X, 0)$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$, então $C(X, 0)$ não é uma semi-reta. Portanto, pelo Lema 3.3.8, $(X, 0)$ é $C^1$. □

# 4 GEOMETRIA LIPSCHITZ DE CONJUNTOS DEFINÍVEIS

Neste capítulo, mostramos que dois conjuntos definíveis bi-Lipschitz homeomorfos possuem cones tangentes bi-Lipschitz homeomorfos. Além disso, estudamos a regularidade Lipschitz de conjuntos analíticos.

**Definição 4.0.10.** *Um conjunto (resp. conjunto subanalítico) $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito* **Lipschitz regular** *(resp.* **Lipschitz subanalítico regular***)* **em** $x_0$*, se existe uma vizinhança aberta $U \subset \mathbb{R}^n$ com $x_0 \in X \cap U$ e uma aplicação bi-Lipschitz (resp. bi-Lipschitz subanalítica) $\varphi : X \cap U \to \mathbb{B}$, onde $\mathbb{B}$ é a bola unitária de $\mathbb{R}^p$. Dizemos que $X$ é* **Lipschitz regular** *(resp.* **Lipschitz subanalítico regular***), se $X$ é Lipschitz regular (resp. Lipschitz subanalítico regular) em todo ponto $x \in X$.*

## 4.1 Equivalência bi-Lipschitz entre conjuntos implica equivalência bi-Lipschitz nos cones tangentes

**Teorema 4.1.1** (Teorema da invariância Lipschitz dos cones tangentes)**.** *Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos definíveis. Se $\phi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ é um homeomorfismo bi-Lipschitz, então $C(X, x_0)$ e $C(Y, y_0)$ são bi-Lipschitz homeomorfos.*

*Demonstração.* Podemos supor sem perda de gereralidade que $x_0 = y_0 = 0$. Pelo Teorema de McShane-Whitney-Kirszbraun (veja Kirszbraun (1934), Whitney (1934) e McShane (1934)), existem aplicações Lipschitz $\widetilde{\phi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $\widetilde{\psi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que são extensões de $\phi$ e $\phi^{-1}$, respectivamente. Seja $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dada por

$$\varphi(x, y) = (x - \widetilde{\psi}(y + \widetilde{\phi}(x)), y + \widetilde{\phi}(x)).$$

**Afirmação.** $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo bi-Lipschitz (i.e, existe $K > 0$ tal que $\frac{1}{K}\|u - v\| \leq \|\varphi(u) - \varphi(v)\| \leq K\|u - v\|$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$) com

$$\varphi^{-1}(z, w) = (z + \widetilde{\psi}(w), w - \widetilde{\phi}(z + \widetilde{\psi}(w)))$$

e $\varphi(X \times \{0\}) = \{0\} \times Y$.

De fato, seja $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dada por $\psi(z, w) = (z + \widetilde{\psi}(w), w - \widetilde{\phi}(z + \widetilde{\psi}(w)))$. Observe que $\varphi$ e $\psi$ são aplicações Lipschitz, pois são composições de aplicações Lipschitz. Além disso, claramente temos que $\varphi(X \times \{0\}) \subset \{0\} \times Y$ e $\psi(\{0\} \times Y) \subset X \times \{0\}$. Assim, para verificarmos a afirmação, basta verificarmos que $\psi = \varphi^{-1}$. Para isto, se $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, então

$$\begin{aligned}
&\varphi^{-1}(\varphi(x,y)) = \varphi^{-1}(x - \widetilde{\psi}(y + \widetilde{\phi}(x)), y + \widetilde{\phi}(x))\\
&= (x - \widetilde{\psi}(y + \widetilde{\phi}(x)) + \widetilde{\psi}(y + \widetilde{\phi}(x)), y + \widetilde{\phi}(x) - \widetilde{\phi}(x - \widetilde{\psi}(y + \widetilde{\phi}(x)) + \widetilde{\psi}(y + \widetilde{\phi}(x)))\\
&= (x, y + \widetilde{\phi}(x) - \widetilde{\phi}(x))\\
&= (x,y).
\end{aligned}$$

e se $(z,w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, estão

$$\begin{aligned}
&\varphi(\psi(z,w)) = \varphi(z + \widetilde{\psi}(w), w - \widetilde{\phi}(z + \widetilde{\psi}(w)))\\
&= (z + \widetilde{\psi}(w) - \widetilde{\psi}(w - \widetilde{\phi}(z + \widetilde{\psi}(w)) + \widetilde{\phi}(z + \widetilde{\psi}(w))), w - \widetilde{\phi}(z + \widetilde{\psi}(w)) + \widetilde{\phi}(z + \widetilde{\psi}(w)))\\
&= (z + \widetilde{\psi}(w) - \widetilde{\psi}(w), w)\\
&= (z,w).
\end{aligned}$$

Portanto, $\psi = \varphi^{-1}$.

Dando continuidade à demosntração, para cada $k \in \mathbb{N}$ defina as aplicações $\varphi_k, \psi_k : R^N \to \mathbb{R}^N$ dadas por $\varphi_k(v) = k\varphi(\frac{v}{k})$ e $\psi_k(v) = k\varphi^{-1}(\frac{v}{k})$, onde $N = 2n$. Daí, para cada inteiro $m \geq 1$ defina $\varphi_{k,m} := \varphi_k|_{\overline{\mathbb{B}}_m} : \overline{\mathbb{B}}_m \to \mathbb{R}^N$ e $\psi_{k,m} := \psi_k|_{\overline{\mathbb{B}}_{mK}} : \overline{\mathbb{B}}_{mK} \to \mathbb{R}^N$. Como

$$\frac{1}{K}\|x-y\| \leq \|\varphi_{k,1}(x) - \varphi_{k,1}(y)\| \leq K\|x-y\|, \quad \forall x,y \in \overline{\mathbb{B}}_1,\ \forall k \in \mathbb{N}$$

e

$$\frac{1}{K}\|u-v\| \leq \|\psi_{k,1}(u) - \psi_{k,1}(v)\| \leq K\|u-v\|, \quad u,v \in \overline{\mathbb{B}}_K,\ \forall k \in \mathbb{N},$$

então existe uma subsequência $\{k_{j,1}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ e aplicações Lipschitz $d\varphi_1 : \overline{\mathbb{B}}_1 \to \mathbb{R}^m$ e $d\psi_1 : \overline{\mathbb{B}}_K \to \mathbb{R}^N$ tais que $\varphi_{k_{j,1},1} \rightrightarrows d\varphi_1$ uniformemente em $\overline{\mathbb{B}}_1$ e $\psi_{k_{j,1},1} \rightrightarrows d\psi_1$ uniformimente em $\overline{\mathbb{B}}_K$, desde que $\{\varphi_{k,1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{\psi_{k,1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tem constantes Lipschitz uniforme. Além disso, claramente vale o seguinte

$$\frac{1}{K}\|u-v\| \leq \|d\varphi_1(u) - d\varphi_1(v)\| \leq K\|u-v\|, \quad \forall u,v \in \overline{\mathbb{B}}_1$$

e

$$\frac{1}{K}\|z-w\| \leq \|d\psi_1(z) - d\psi_1(w)\| \leq K\|z-w\|, \quad \forall z,w \in \overline{\mathbb{B}}_K.$$

Da mesma maneira como acima, para cada $m > 1$, temos

$$\frac{1}{K}\|x-y\| \leq \|\varphi_{k,m}(x) - \varphi_{k,m}(y)\| \leq K\|x-y\|, \quad x,y \in \overline{\mathbb{B}}_m,\ \forall k \in \mathbb{N}$$

e

$$\frac{1}{K}\|u-v\| \leq \|\psi_{k,m}(u) - \psi_{k,m}(v)\| \leq K\|u-v\|, \quad u,v \in \overline{\mathbb{B}}_{mK},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Portanto, para cada $m > 1$, existe uma subsequência $\{k_{j,m}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{k_{j,m-1}\}_{j\in\mathbb{N}}$ e aplicações Lipschitz $d\varphi_m : \overline{\mathbb{B}}_m \to \mathbb{R}^m$ e $d\psi_m : \overline{\mathbb{B}}_{mK} \to \mathbb{R}^N$ tais que $\varphi_{k_{j,m},m} \rightrightarrows d\varphi_m$ uniformemente em $\overline{\mathbb{B}}_m$ e $\psi_{k_{j,m},m} \rightrightarrows d\psi_m$ uniformemente em $\overline{\mathbb{B}}_{mK}$ com $d\varphi_m|_{\overline{\mathbb{B}}_{m-1}} = d\varphi_{m-1}$ e $d\psi_m|_{\overline{\mathbb{B}}_{(m-1)K}} = d\psi_{m-1}$. Além disso, ainda temos

$$\frac{1}{K}\|u-v\| \leq \|d\varphi_m(u) - d\varphi_m(v)\| \leq K\|u-v\|, \quad \forall u, v \in \overline{\mathbb{B}}_m \tag{4.1}$$

e

$$\frac{1}{K}\|z-w\| \leq \|d\psi_m(z) - d\psi_m(w)\| \leq K\|z-w\|, \quad \forall z, w \in \overline{\mathbb{B}}_{mK}. \tag{4.2}$$

Defina $d\varphi, d\psi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ por $d\varphi(x) = d\varphi_m(x)$, se $x \in \mathbb{B}_m$ e $d\psi(x) = d\psi_m(x)$, se $x \in \mathbb{B}_{mK}$ e, para cada $j \in \mathbb{N}$, sejam $n_j = k_{j,j}$ e $t_j = \frac{1}{n_j}$.

**Afirmação.** $\varphi_{n_j} \to d\varphi$ e $\psi_{n_j} \to d\psi$ uniformemente em compactos de $\mathbb{R}^N$.

Seja $F \subset \mathbb{R}^N$ um compacto. Então, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $F \subset \overline{\mathbb{B}}_m \subset \overline{\mathbb{B}}_{mK}$. Com isso, veja que $\{n_j\}_{j>m}$ é uma subsequência de $\{k_{j,m}\}_{j\in\mathbb{N}}$ e como $\varphi_{k_{j,m},m} \rightrightarrows d\varphi_m$ uniformemente em $\overline{\mathbb{B}}_m$ e $\psi_{k_{j,m},m} \rightrightarrows d\psi_m$ uniformimente em $\overline{\mathbb{B}}_{mK}$, vemos que $\varphi_{n_j} \rightrightarrows d\varphi$ e $\psi_{n_j} \rightrightarrows d\psi$ uniformemente em $F$.

**Afirmação.** $d\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é um homeomorfismo bi-Lipschitz e $d\psi = (d\varphi)^{-1}$.

Segue das desigualdades (4.1) e (4.2), que $d\varphi, d\psi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ são aplicações Lipschitz. Sendo assim, é suficiente mostrar que $d\psi = (d\varphi)^{-1}$. Para isso, seja $v \in \mathbb{R}^N$ e $w = d\varphi(v) = \lim\limits_{j\to\infty} \frac{\varphi(t_j v)}{t_j}$.

$$\begin{aligned}
\|d\psi(w) - v\| &= \left\| \lim_{j\to\infty} \tfrac{\psi(t_j w)}{t_j} - v \right\| &&= \lim_{j\to\infty} \left\| \tfrac{\psi(t_j w)}{t_j} - \tfrac{t_j v}{t_j} \right\| \\
&= \lim_{j\to\infty} \tfrac{1}{t_j} \left\| \psi(t_j w) - t_j v \right\| &&= \lim_{j\to\infty} \tfrac{1}{t_j} \left\| \psi(t_j w) - \psi(\varphi(t_j v)) \right\| \\
&\leq \lim_{j\to\infty} \tfrac{K}{t_j} \left\| t_j w - \varphi(t_j v) \right\| &&\leq \lim_{j\to\infty} K \left\| w - \tfrac{\varphi(t_j v)}{t_j} \right\| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $d\psi(w) = d\psi(d\varphi(v)) = v$ para todo $v \in \mathbb{R}^N$, i.e., $d\psi \circ d\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}$. Analogamente, temos $d\varphi \circ d\psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}$.

**Afirmação.** $d\varphi(C(X,0)) = C(Y,0)$.

Pela afirmação anterior, basta verificarmos que $d\varphi(C(X,0)) \subset C(Y,0)$. Seja $v \in C(X,0)$, então existe $\alpha : [0,\varepsilon) \to X$ tal que $\alpha(t) = tv + o(t)$. Assim, $\varphi(\alpha(t)) = \varphi(tv) + o(t)$, desde que $\varphi$ é Lipschitz. Mas $\varphi(t_j v) = t_j d\varphi(v) + o(t_j)$ com $t_j = \frac{1}{n_j}$, então

$$d\varphi(v) = \lim_{j\to\infty} \varphi_{n_j}(v) = \lim_{j\to\infty} \frac{\varphi(t_j v)}{t_j} = \lim_{j\to\infty} \frac{\varphi(\alpha(t_j))}{t_j} \in C(Y,0).$$

Portanto, $d\varphi : C(X,0) \to C(Y,0)$ é um homeomorfismo bi-Lipschitz. □

## 4.2 Aplicações do Teorema 4.1.1 no caso complexo

**Definição 4.2.1.** *Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que $\ell \subset \mathbb{R}^n$ é um* **semi-reta partindo de** *$x$, se existe um vetor unitário $\boldsymbol{u} \in \mathbb{S}^{n-1}$ tal que*

$$\ell = \{x + t\boldsymbol{u};\, t \geq 0\}.$$

**Definição 4.2.2.** *Dizemos que $C \subset \mathbb{R}^n$ é um* **cone real***, se existe um ponto $x \in C$ tal que $C$ é uma união de semi-retas reais partindo de $x$. Neste caso, $x$ é dito* **vertice de** *$C$.*

Como uma primeira aplicação da prova do Teorema da invariância Lipschitz dos cones tangentes, temos o seguinte:

**Corolário 4.2.3.** *Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ dois cones reais com vertices $x$ e $y$, respectivamente. Se $\varphi : (X, x) \to (Y, y)$ é um homeomorfismo bi-Lipschitz, então $X$ e $Y$ são (globalmente) bi-Lipshitz homeomorfos.*

### *4.2.1 Regularidade Lipschitz*

Nesta seção, mostramos que regularidade Lipschitz implica em regularidade analítica. Primeiramente consideramos o caso em que $X$ é um conjunto analítico normalmente mergulhado.

**Definição 4.2.4.** *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito* **normalmente mergulhado** *se a distância intrinseca de $X$, denotada por $d_X$, é equivalente a distância (euclidiana) induzida do $\mathbb{R}^n$, i.e., existem constantes $K, k > 0$ tais que*

$$k d_X(x, y) \leq \|x - y\| \leq K d_X(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

**Lema 4.2.5.** *Seja $X \subset \mathbb{C}^n$ um conjunto analítico complexo normalmente mergulhado. Se $C(X, 0)$ é um hiperplano, então $X$ é uma variedade suave (holomorfa).*

*Demonstração.* Seja $\pi : \mathbb{C}^n \to C(X, 0)$ a projeção ortogonal de $\mathbb{C}^n$ sobre $C(X, 0)$. Daí, seja $v \in C(X, 0) \setminus \pi(br(\pi|_X))$ e $k > 0$ tal que $C_v = \{w;\, \|w - tv\| < kt,\, t \in [0, 1]\}$ é um vizinhança cônica de $v$ com $C_v \cap \pi(br(\pi|_X)) = \{0\}$. Sendo $C_v^* = C_v \setminus \{0\}$ (que é simplesmente conexo), considere $V = (\pi|_X)^{-1}(C_v^*)$. Temos que $\pi|_V : V \to C_v^*$ é uma aplicação de recobrimento e $V$ tem $m(X)$ componentes conexas. Suponha que $m(X) > 1$, então sendo $\gamma : (0, 1] \to C_v$ dada por $\gamma(t) = tv$, temos que existem $\alpha_1, \alpha_2 : (0, 1] \to V$ em componentes distintas de $V$ tais que $\pi \circ \alpha_i = \gamma$, $i = 1, 2$.

Além disso, pela construção de $C_v^*$, é claro que

$$dist(\alpha_i(t), br(\pi|_X)) \geq dist(tv, \pi(br(\pi|_X))) \geq kt,$$

então para cada $t \in (0,1]$, seja $\beta_t : [0,1] \to X$ uma curva retificável ligando $\alpha_1(t)$ e $\alpha_2(t)$, e como cada $\alpha_i$ pertence a uma componente conexa de $V$, segue que $\beta_t([0,1]) \not\subset V$, então temos que $\pi \circ \beta_t$ é um loop em $C(X,0)$ com ponto base $tv$ e $\pi \circ \beta_t([0,1]) \not\subset C_v^*$. Logo, $L(\pi \circ \beta_t) \geq kt$, o que implica em $d_X(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \geq kt$. Contudo, $X$ é normalmente mergulhado, então existe $C > 0$ tal que $\|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\| \geq C.d_X(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \geq Ckt$, o que é uma contradição já que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|}{t} = 0.$$

□

Observe que mesmo que o cone $C(X,0)$ seja um hiperplano, pode acontecer de $X$ não ser suave.

**Exemplo 4.2.6.** *Seja* $X = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2;\ x^3 = y^2\}$ *temos que* $C(X,0) = \{(x,0) \in \mathbb{C}^2;\ x \in \mathbb{C}\}$ *é suave, mas* $m(X) = 2$ *e, contudo, singular.*

**Lema 4.2.7.** *Seja* $X \subset \mathbb{C}^n$ *um conjunto analítico complexo e Lipschitz regular. Então, para todo ponto* $w \in X$*, existe uma vizinhança aberta* $U \subset \mathbb{C}^n$ *de* $w$ *tal que* $X \cap U$ *é um conjunto normalmente mergulhado.*

*Demonstração.* Fixado $w \in X$, por hipótese $X$ é Lipschitz regular em $w$, então existem uma vizinhança aberta $U \subset \mathbb{C}^n$ de $x$ e uma aplicação bi-Lipschitz $\varphi : \mathbb{B} \to X \cap U$ tal que

$$k\|x - y\| \leq \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq K\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{B}.$$

Seja $d := \|\cdot\|$. Sabemos que $d(x,y) \leq d_{X\cap U}(x,y)$ para todos $x, y \in X \cap U$. Sejam $x, y \in X \cap U$ e $\beta : [0,1] \to \mathbb{B}$ é uma curva retificável ligando $\widetilde{x} = \varphi^{-1}(x)$ e $\widetilde{y} = \varphi^{-1}(y)$, i.e., $\beta(0) = \widetilde{x}$ e $\beta(1) = \widetilde{y}$, então $\alpha := \varphi \circ \beta$ é um caminho retificável tal que $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = y$. Seja $P = \{t_0 = 0 < t_1 < ... < t_n = 1\}$ uma partição de $[0,1]$. Daí,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| &= \sum_{i=1}^{n} \|\varphi \circ \beta(t_i) - \varphi \circ \beta(t_{i-1})\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} K\|\beta(t_i) - \beta(t_{i-1})\| \\
&\leq KL(\beta)
\end{aligned}$$

Daí,

$$d_{X\cap U}(x,y) \leq L(\alpha) \leq KL(\beta).$$

Tomando inf sobre $\beta$ e usando o fato de que $d_{\mathbb{B}} = \|\cdot\|$, vemos que

$$d_{X\cap U}(x,y) \leq K d_{\mathbb{B}}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = K\|\widetilde{x} - \widetilde{y}\| \leq \frac{K}{k}\|x - y\|.$$

Pela arbitrariedade de $x$ e $y$, vemos que $X \cap U$ é normalmente mergulhado. □

**Teorema 4.2.8** (Teorema da regularidade Lipschitz)**.** *Seja $X \subset \mathbb{C}^n$ um conjunto analítico e Lipschitz regular. Então, $X$ é uma variedade suave (holomorfa).*

*Demonstração.* Dado $w \in X$ vamos mostrar que $w$ é um ponto regular de $X$. Pelo Lema 4.2.7, existem uma vizinhança aberta $U \subset \mathbb{C}^n$ de $w$ tal que $Y := X \cap U$ é normalmente mergulhado e uma aplicação bi-Lipschitz $\varphi : \mathbb{B} \subset \mathbb{C}^p \to Y$. Daí, observe primeiramente que $C(Y, w) = C(X, w)$ é um conjunto analítico complexo Lipschitz regular, pois $d\varphi : (\mathbb{C}^p, 0) \to (C(Y, w), w)$ é bi-Lipshitz. Pelo Teorema 2.6.10, $C(Y, 0)$ é um hiperplano. Então, pelo Lema 4.2.5, $Y$ é uma variedade holomorfa, i.e., $w$ é um ponto regular de $X$. □

**Corolário 4.2.9** (Birbrair et al (2014))**.** *Seja $X \subset \mathbb{C}^n$ um conjunto algébrico complexo. Se $X$ é Lipschitz subanalítico regular em $x_0 \in X$, então $x_0$ é um ponto suave de $X$.*

## 4.3 Aplicações do Teorema 4.1.1 no caso real

### *4.3.1 Invariância bi-Lipschitz da dimensão do conjunto direcional*

Apresentamos uma nova demosntração de um resultado de Koike e Paunescu (2009) sobre a invariância bi-Lipschitz da dimensão do conjunto direcional de conjuntos subanalíticos. Mas primeiro, introduzimos a definição de conjunto direcional.

**Definição 4.3.1.** *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um germe de conjunto em $0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $0 \in \overline{A}$. Dizemos que $\boldsymbol{x} \in \mathbb{S}^{n-1}$ é uma direção de $A$ em $0 \in \mathbb{R}^n$, se existe uma sequência de pontos $\{x_i\} \subset A \setminus \{0\}$ convergindo para $0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\frac{x_i}{\|x_i\|} \to \boldsymbol{x}$ quando $i \to \infty$. Denotamos o conjunto de todas as direções de $A$ em $0 \in \mathbb{R}^n$ por $D(A)$.*

**Observação 4.3.2.** O link do cone $C(A, 0)$ é $D(A)$, i.e., $D(A) = C(A, 0) \cap \mathbb{S}^{n-1}$.

**Teorema 4.3.3** (Koike e Paunescu (2009, Main Theorem))**.** *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$ dois germes de conjuntos subanalíticos em $0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $0 \in \overline{A} \cap \overline{B}$ e $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ um homeomorfismo bi-Lipschitz. Suponha que $h(A)$, $h(B)$ são tambem subanalíticos. Então a seguinte igualdade é verdadeira*

$$\dim(D(h(A)) \cap D(h(B))) = \dim(D(A) \cap D(B)).$$

*Demonstração.* Pelo Teorema 4.1.1, existe um homeomorfismo bi-Lipschitz $dh : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ tal que

$$dh(C(A, 0)) = C(h(A), 0)$$

e

$$dh(C(B,0)) = C(h(B),0).$$

Desde que $dh$ é um homeomorfismo, $dh$ preserva interseção e, então,

$$\begin{aligned} dh(C(A,0) \cap C(B,0)) &= dh(C(A,0)) \cap dh(C(B,0)) \\ &= C(h(A),0) \cap C(h(B),0) \end{aligned}$$

e desde que $dh$ preserva dimensão, obtemos que

$$\dim(C(h(A),0) \cap C(h(B),0)) = \dim(C(A,0) \cap C(B,0)).$$

Portanto, $\dim(D(h(A)) \cap D(h(B))) = \dim(D(A) \cap D(B))$. □

### *4.3.2 Regularidade Lipschitz*

Para encerrar o nosso estudo sobre regularidade Lipshitz de conjuntos analíticos, iniciamos apresentando um exemplo onde mostramos que a melhor regularidade que podemos esperar no caso real é regularidade $C^1$. Com isso, apresentamos alguns exemplos onde regulariade Lipschitz não implica em regularidade $C^1$. Na verdade, um dos exemplos apresentados, também mostra que o Teorema de Prill (Teorema 2.6.10) não vale no caso real. Por fim, mostramos que regulariade Lipschitz implica em regularidade $C^1$ no caso de curvas analíticas reais, finalizando o estudo sobre regularidade Lipschitz de conjuntos analíticos (reais e complexos).

**Exemplo 4.3.4.** *$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z^3 = x^4 + y^4\}$ é $C^1$, em particular, Lipschitz regular, mas não é $C^2$.*

**Definição 4.3.5.** *Para cada $\beta > 0$ definimos a superfície semialgébrica $X_\beta := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = z^{2\beta},\ z \geq 0\}$.*

**Teorema 4.3.6.** *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície semialgébrica e $x_0 \in X$. Se $X$ tem singularidade isolada e link conexo em $x_0$, então existe $\beta \leq 1$ tal que $(X, x_0)$ e $(X_\beta, 0)$ são bi-Lipschitz homeomorfos com relação as suas métricas intrinsecas.*

*Demonstração.* Veja Birbrair (2008, p. 1349, Theorem 8.3). □

**Exemplo 4.3.7.** *Seja $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z^3 = x^3 + y^3\}$. Temos que $V$ é um cone algébrico que é Lipshitz regular, mas não é $C^1$. Em paritular, $V$ é uma variedade topológica, mas em contraste com o Teorema de D. Prill, $V$ não é um plano.*

Observe que primeiramente $V$ tem singularidade isolada e link conexo na origem. Vamos mostrar que $V$ é normalmente mergulhado.

De fato, o link de $V$, $L := V \cap \mathbb{S}^2$, é uma variedade suave e compacta, então existe uma constante $k > 0$ tal que $\widetilde{d}_L(u,v) \leq k\|u-v\|$ para todo $u, v \in L$, onde $\widetilde{d}_L(u,v)$ é o infimo dos comprimentos das curvas suaves, $\alpha : [0,1] \to L$, tais que $\alpha(0) = u$ e $\alpha(1) = v$. Assim, dados $x, y \in V$, podemos supor que $\|y\| \geq \|x\|$. Se $x = 0$ então $d_V(0,y) = \|0 - y\| = \|y\|$, pois $V$ é um cone real com vertice na origem. Se $x \neq 0$ e novamente usando o fato de que $V$ é um cone real com vertice na origem, temos que $\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \in L$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\alpha : [0,1] \to L$ suave tal que $\alpha(0) = \frac{x}{\|x\|}$, $\alpha(1) = \frac{y}{\|y\|}$ e

$$L(\alpha) = \int_0^1 \|\alpha'(t)\|dt < \widetilde{d}_L(\tfrac{x}{\|x\|}, \tfrac{y}{\|y\|}) + \varepsilon \leq k\left\|\tfrac{x}{\|x\|} - \tfrac{y}{\|y\|}\right\| + \varepsilon.$$

Então, defina $\gamma : [0,1] \to V$ por $\gamma(t) = (t\|y\| + (1-t)\|x\|)\alpha(t)$. Claramente $\gamma$ é suave satisfazendo $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Daí,

$$\begin{aligned}
d_V(x,y) \leq L(\gamma) &= \int_0^1 \|\gamma'(t)\|dt \\
&= \int_0^1 \|(\|y\| - \|x\|)\alpha(t) + (t\|y\| + (1-t)\|x\|)\alpha'(t)\|dt \\
&\leq \int_0^1 \big|\|y\| - \|x\|\big| \cdot \|\alpha(t)\|dt + \int_0^1 (t\|y\| + (1-t)\|x\|)\|\alpha'(t)\|dt \\
&\leq \big|\|y\| - \|x\|\big| + \|y\| \int_0^1 \|\alpha'(t)\|dt, \text{ pois } \|y\| \geq \|x\| \\
&\leq \|x-y\| + \|y\|(k\left\|\tfrac{x}{\|x\|} - \tfrac{y}{\|y\|}\right\| + \varepsilon) \\
&\leq \|x-y\| + k\left\|\tfrac{\|y\|}{\|x\|}x - y\right\| + \varepsilon\|y\| \\
&\leq \|x-y\| + k\left\|\|y\|\tfrac{x}{\|x\|} - \|x\|\tfrac{x}{\|x\|}\right\| + k\|x-y\| + \varepsilon\|y\| \\
&= k\big|\|y\| - \|x\|\big| + (k+1)\|x-y\| + \varepsilon\|y\| \\
&\leq (2k+1)\|x-y\| + \varepsilon\|y\|.
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ foi tomado qualquer, temos que $d_V(x,y) \leq (2k+1)\|x-y\|$, para todo $x, y \in V$, mostrando que $V$ é normalmente mergulhado.

Além disso, pelo Teorema 4.3.6, existe $\beta \geq 1$ tal que $V$ é bi-Lipschitz homeomorfo na métrica intrínseca ao conjunto $X_\beta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\, x^2 + y^2 = z^{2\beta} \text{ e } z \geq 0\}$. Mas o cone de $V$ na origem é o próprio $V$, logo $\beta = 1$. Neste caso, $X_\beta$ é Lipschitz regular e, assim, $X_\beta$ é normalmente mergulhado, então $V$ e $X_\beta$ são bi-Lipschitz homemomorfos na métrica induzida. Portanto $V$ é Lipschitz regular. □

Diante do exemplo acima, temos mais geralmente

**Exemplo 4.3.8.** *Seja $n \geq 3$. Então, $X = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n;\, x_3^3 = x_1^3 + x_2^3\} = V \times \mathbb{R}^{n-3}$ é Lipschitz regular, mas não é $C^1$.*

De fato, pelo exemplo 4.3.7, existe uma aplicação bi-Lipschitz $\phi : (V, 0) \to$

$(\mathbb{R}^2, 0)$. Defina $\varphi : (X, 0) \to (\mathbb{R}^{n-1}, 0)$ por

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = (\phi(x_1, x_2, x_3), x_4, ..., x_n).$$

É claro que $\varphi$ é uma aplicação bi-Lipschitz. $\square$

**Teorema 4.3.9.** *Seja* $(X, 0) \subset (\mathbb{R}^n, 0)$ *um germe de curva analítica real que é Lipschitz regular. Então,* $(X, 0)$ *é* $C^1$*.*

*Demonstração.* Pelo Teorema da invariância Lipschitz dos cones tangentes, $C(X, 0)$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$, então $C(X, 0)$ não é uma semi-reta. Então pelo Lema 3.3.8, $(X, 0)$ é $C^1$. $\square$

# 5 INVARIÂNCIA DA MULTIPLICIDADE DE CONJUNTOS ANALÍTICOS

Neste capítulo, fazemos reduções de versões da Conjectura de Zariski para conjuntos analíticos complexos e apresentamos uma outra prova para o resultado provado por Gau e Lipman (1983) sobre a invariância diferenciável da multiplicidade de conjuntos analíticos complexos. Também é provado que a multiplicidade de conjuntos analíticos reais é um invariante diferenciável.

## 5.1 Conjuntos homogêneos

Esta Seção é dedicada a fazer reduções das seguintes versões da Conjectura de Zariski:

**Conjectura 2** (Caso $C^0$-forte)**.** *Se $(X,0)$ e $(Y,0)$ são germes de conjuntos analíticos complexos fortemente homeomorfos, então $m(X)=m(Y)$.*

**Conjectura 3** (Caso Lipschitz subanalítico)**.** *Se $(X,0)$ e $(Y,0)$ são germes de conjuntos analíticos complexos bi-Lipschitz subanalíticos homeomorfos, então $m(X)=m(Y)$.*

Diante da Conjectura 2, iniciamos provando o seguinte:

**Teorema 5.1.1.** *A Conjectura 2 é verdadeira se, e somente se, ela é verdadeira para conjuntos algébricos homogêneos.*

*Demonstração.* É claro que se a conjectura 2 é verdadeira em geral, ela é verdadeira para conjuntos algébricos homogêneos.

Suponha que a conjectura 2 seja verdadeira para conjuntos algébricos homogêneos. Assim, sejam $X,Y\subset\mathbb{C}^n$ conjuntos analíticos complexos contendo a origem e $\varphi:(X,0)\to(Y,0)$ um homeomorfismo forte. Então, vamos mostrar que $m(X)=m(Y)$. De fato, pelo Teorema 3.1.8, $d_0\varphi':C(X,0)\to C(Y,0)$ é um homeomorfismo forte. Assim, sendo $X_1,...,X_r$ as componentes irredutíveis de $C(X,0)$, temos que $Y_1=d_0\varphi'(X_1),...,Y_r=d_0\varphi'(X_r)$ são as componentes irredutíveis de $C(Y,0)$ e, além disso, $d_0\varphi':X_j\to Y_j$ é um homeomorfismo forte, para $j=1,...,r$. Por hipótese, temos que $m(X_j)=m(Y_j)$, para $j=1,...,r$ e pelo Teorema da Invariância das multiplicidades relativas, $k_X(X_j)=k_Y(Y_j)$, $j=1,...,r$. Por fim, usando a Proposição 3.1.6, obtemos

$$m(X)=\sum_{j=1}^{r}k_X(X_j)m(X_j)=\sum_{j=1}^{r}k_Y(X_j)m(Y_j)=m(Y).$$

$\square$

No caso Lipshitz subanalítico, também vale o seguinte:

**Teorema 5.1.2.** *A Conjectura 3 é verdadeira se, e somente se, ela é verdadeira para conjuntos algébricos homogêneos.*

*Demonstração.* Assim como antes, é claro que se a conjectura 3 é verdadeira em geral, ela é verdadeira para conjuntos algébricos homogêneos.

Suponha que a conjectura 3 seja verdadeira para conjuntos algébricos homogêneos. Novamente como antes, sejam $X, Y \subset \mathbb{C}^n$ conjuntos analíticos complexos contendo a origem e $\varphi : (X, 0) \to (Y, 0)$ um homeomorfismo bi-Lipschitz e subanalítico. Então, vamos mostrar que $m(X) = m(Y)$. Mas temos pelo Teorema 2.6.3, que $\varphi : (X, 0) \to (Y, 0)$ é um homeomorfismo forte e pelo Teorema da Invariância das multiplicidades relativas, $k_X(X_j) = k_Y(Y_j)$, $j = 1, ..., r$, onde os $X_j$'s e os $Y_j$'s são como na prova do Teorema 5.1.1. Além disso, pelo Teorema 2.6.1, $d_0\varphi : X_j \to Y_j$ é um homeomorfismo bi-Lipschitz e subanalítico. Então, usando a hipótese, temos $m(X_j) = m(Y_j)$, para $j = 1, ..., r$. Novamente, usando a Proposição 3.1.6, obtemos

$$m(X) = \sum_{j=1}^{r} k_X(X_j)m(X_j) = \sum_{j=1}^{r} k_Y(X_j)m(Y_j) = m(Y).$$

□

## 5.2 Caso em que as componentes dos cones possuem singularidade isolada

**Definição 5.2.1.** *Denotamos por $\mathcal{C}_n$ a coleção de todos os conjuntos analíticos complexos $X \subset \mathbb{C}^n$ tais que todas componentes de $C(X, 0)$ tem singularidade isolada.*

**Teorema 5.2.2.** *Sejam $f, g : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ duas funções analíticas. Suponha que $V(f) \in \mathcal{C}_n$. Se $\varphi : (\mathbb{C}^n, V(f), 0) \to (\mathbb{C}^n, V(g), 0)$ é um homeomorfismo bi-Lipschitz e definível, então $V(g) \in \mathcal{C}_n$ e $m(V(f)) = m(V(g))$.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 4.1.1 (ou pelo Teorema 2.6.1), existe um homeomorfismo bi-Lipschitz $\psi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ com $\psi(C(V(f), 0)) = C(V(g), 0)$. Sejam $X_1, ..., X_r$ as componentes irredutíveis de $C(V(f), 0)$ e $Y_1, ..., Y_r$ as componentes irredutíveis de $C(V(g), 0)$ com $Y_j = \psi(X_j)$. Então, existem polinômios irredutíveis $f_1, ..., f_r, g_1, ..., g_r : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ tais que $X_j = V(f_j)$ e $Y_j = V(g_j)$ para $j = 1, ..., r$. Pelo Teorema 4.2.8, $V(g) \in \mathcal{C}_n$.

Como $f_j$ e $g_j$ tem singularidade isolada, o número de Milnor é invariante topológico, i.e., $\mu(f_j) = \mu(g_j)$. Mas neste caso, $\mu(f_j) = (ord_0 f_j - 1)^n$ e $\mu(g_j) = (ord_0 g_j - 1)^n$. Logo, $\mathrm{ord}_0 f_j = \mathrm{ord}_0 g_j$, o que nos diz que $m(X_j) = m(Y_j)$, para $j = 1, ..., r$. Isto junto com o Teorema da Invariância das multiplicidades relativas e a Proposição 3.1.6, termina a prova. □

**Exemplo 5.2.3.** *Sejam $p, h : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ germes de funções holomorfas e $f, g : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ reduzidas tais que $f(z', z) = z^m - p(z')$ e $g(z', z) = z^k - h(z')$, onde*

$\text{ord}_0 p > m$ *e* $\text{ord}_0 h > k$*. Se* $V(f)$ *e* $V(g)$ *são fortemente homeomorfos, então m=k.*

## 5.3 Caso diferenciável (Uma prova curta do Teorema de Gau e Lipman)

Em 1976, Ephraim mostrou que a multiplicidade de hipersuperfícies analíticas é invariante diferenciável e, posteriormente, Gau e Lipman (1983) generalizaram tal resultado, provando que a multiplicidade de conjuntos analíticos quaisquer é ainda invariante diferenciável. Aqui é dado uma demonstração mais simples do resultado de Gau e Lipman. Para isso usamos os seguintes resultados:

**Lema 5.3.1.** *Sejam* $X$ *e* $Y$ *conjuntos analíticos complexos. Se* $\varphi : (\mathbb{C}^n, X) \to (\mathbb{C}^n, Y)$ *é um difeomorfismo* $\mathbb{R}$*-linear (i.e., isomorfismo* $\mathbb{R}$*-linear tal que* $\varphi(X) = Y$*), então* $m(X) = m(Y)$*.*

*Demonstração.* Pela aditividade da multiplicidade, podemos supor que $X$ e $Y$ são irredutíveis. Como $\varphi$ é isomorfismo $\mathbb{R}$-linear, claramente $\varphi_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^{2n}$ é isomorfismo $\mathbb{C}$-linear e $\varphi_{\mathbb{C}}(X_{\mathbb{C}}) = Y_{\mathbb{C}}$. Então, pela proposição 2.4.6, $X \times c(X)$ e $Y \times c(Y)$ são analíticamente isomorfos. Mas pela Proposição 2.5.13, $m(X \times c(X)) = m(Y \times c(Y))$ e pelas Proposições 2.5.14 e 2.5.15, $m(X)^2 = m(Y)^2$ e, portanto, $m(X) = m(Y)$, já que a multiplicidade é não negativa. $\square$

O Lema a seguir apresenta mais um exemplo de equivalência $C^0$-forte.

**Lema 5.3.2.** *Sejam* $(X, 0)$ *e* $(Y, 0)$ *dois germes de conjuntos definíveis em* $\mathbb{R}^m$*. Se* $\varphi : (\mathbb{R}^m, X, 0) \to (\mathbb{R}^m, Y, 0)$ *é um homeomorfismo tal que* $\varphi$ *e* $\varphi^{-1}$ *são diferenciáveis na origem, então* $\varphi : (\mathbb{R}^m, X, 0) \to (\mathbb{R}^m, Y, 0)$ *é um homeomorfismo forte.*

*Demonstração.* Observe primeiramente que $\nu_0\varphi : \mathbb{S}^{m-1} \to \mathbb{S}^{m-1}$ dada por $\nu_0\varphi(x) = \frac{D\varphi_0(\mathbf{x})}{\|D\varphi_0(\mathbf{x})\|}$ é um homeomorfismo com inversa $(\nu_0\varphi)^{-1}(x) = \frac{D\varphi_0^{-1}(\mathbf{x})}{\|D\varphi_0^{-1}(\mathbf{x})\|}$. Usando que $\varphi(t\mathbf{x}) = tD\varphi_0(\mathbf{x}) + o(t\mathbf{x})$, então

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi(t\mathbf{x})}{\|\varphi(t\mathbf{x})\|} = \frac{D\varphi_0(\mathbf{x})}{\|D\varphi_0(\mathbf{x})\|} = \nu_0\varphi(x),$$

com isso concluímos que $\varphi' : X' \to Y'$ dada por

$$\varphi'(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \left(\frac{\varphi(t\mathbf{x})}{\|\varphi(t\mathbf{x})\|}, \|\varphi(t\mathbf{x})\|\right), & t \neq 0 \\ (\nu_0\varphi(x), 0), & t = 0, \end{cases}$$

é um homeomorfismo. Portanto, $\varphi$ é um homeomorfismo forte. $\square$

**Teorema 5.3.3.** *Se* $(X, 0)$ *e* $(Y, 0)$ *são conjuntos analíticos complexos difeomorfos, então* $m(X) = m(Y)$*.*

*Demonstração.* Seja $\varphi : (\mathbb{C}^n, X, 0) \to (\mathbb{C}^n, Y, 0)$ um difeomorfismo. Observe que $D\varphi_0 : (\mathbb{C}^n, C(X,0), 0) \to (\mathbb{C}^n, C(Y,0), 0)$ é isomorfismo $\mathbb{R}$-linear. Além disso, $D\varphi_0$ envia bijetivamente as componentes irredutíveis de $C(X,0)$ sobre as componentes irredutíveis de $C(Y,0)$. Sejam $X_1, ..., X_r$ e $Y_1, ..., Y_r$ as componentes irredutíveis de $C(X,0)$ e $C(Y,0)$, respectivamente, tais que $Y_j = D\varphi_0(X_j)$, $j = 1, ..., r$. Como $D\varphi_0$ é isomorfismo $\mathbb{R}$-linear, pelo Lema 5.3.1, temos que $m(X_j) = m(Y_j)$, $j = 1, ...r$.

Além disso, pelo Lema 5.3.2, $\varphi$ é um homeomorfismo forte, então pelo Teorema da Invariância das multiplicidades relativas, $k_X(X_j) = k_Y(Y_j)$, para $j = 1, ..., r$. Pela Proposição 3.1.6, $m(X) = \sum_{j=1}^{r} k_X(X_j)m(X_j)$ e $m(Y) = \sum_{j=1}^{r} k_Y(Y_j)m(Y_j)$. Portanto, $m(X) = m(Y)$. $\square$

## 5.4 Multiplicidade de conjuntos analíticos reais

Nesta Seção, vamos definir multiplicidade para conjuntos analíticos reais e mostrar que a mesma é invariante diferenciável módulo 2. Para isso, seja $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto analítico real $d$-dimensional contendo a origem e

$$X_{\mathbb{C}} = \bigcap_{f \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}}(X)} V(f_{\mathbb{C}}),$$

onde $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}(X)$ é o conjunto dos germes de funções analíticas reais que se anulam no germe $(X, 0)$. Temos que $X_{\mathbb{C}}$ é um conjunto analítico complexo e $\dim_{\mathbb{C}} X_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} X$ (veja Whitney (1957, p. 546, Theorem 1 e p. 552, Lemma 8 e Lemma 9)), então $\#\pi^{-1}(x) \cap X_{\mathbb{C}}$ é constante para uma projeção $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^d$ genérica e $x \in \mathbb{C}^d$ genérico próximo da origem.

**Definição 5.4.1.** *Com a notação acima, definimos* $m_X := m(X_{\mathbb{C}}) = \#\pi^{-1}(x) \cap X_{\mathbb{C}}$ *para ser a* **multiplicidade (real) de $X$ na origem**.

**Observação 5.4.2.** $m_X \equiv \#\pi^{-1}(x) \cap X \mod 2$.

**Definição 5.4.3.** *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto analítico real. Sendo $C_X \subset \mathbb{S}^{n-1}$ o link do cone tangente de $X$, denotamos por $C'_X$ a união de todas as componentes conexas $C_j$ de $Smp(\partial X')$ possuindo $k_X(C_j)$ impar.*

**Definição 5.4.4.** *Sejam $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto analítico real $d$-dimensional contendo a origem e uma projeção ortogonal $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^d$ tal que $\pi^{-1}(0) \cap C(X_{\mathbb{C}}, 0) = \{0\}$. Seja $\pi' : \mathbb{S}^n \setminus L \to \mathbb{S}^{d-1}$ dada por $\pi'(u) = \frac{\pi(u)}{\|\pi(u)\|}$, onde $L = \pi^{-1}(0)$, definimos*

$$\varphi_\pi(x) := \#(\pi'^{-1}(x) \cap C_X).$$

*Neste caso, se $\varphi_\pi(x)$ é constante* $\mathrm{mod}\, 2$ *para $x$ genérico em $\mathbb{S}^{d-1}$, escrevemos $m_\pi(C_X) := \varphi_\pi(x) \mathrm{mod}\, 2$, para $x$ genérico em $\mathbb{S}^{d-1}$.*

É imediado do Teorema da Invariância das multiplicidades relativas, o seguinte

**Lema 5.4.5.** *Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^{n+1}$ dois conjuntos analíticos contendo a origem. Seja $\varphi : (X,0) \to (Y,0)$ um homeomorfismo forte. Então, $\varphi'(C'_X) = C'_Y$.*

**Lema 5.4.6.** *Sejam $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto analítico contendo a origem. Então, $\varphi_\pi(\boldsymbol{y})$ é constante para $\boldsymbol{y}$ genérico em $\mathbb{S}^{d-1}$. Além disso, $m_\pi(C'_X) \equiv m_X$.*

*Demonstração.* Sejam $\mathbf{y} \in \mathbb{S}^{d-1}$ genérico, $u = \#(\pi^{-1}(t\mathbf{y}) \cap X)$, para $t > 0$ suficientemente pequeno, $\{y_1, ..., y_p\} = \pi'^{-1}(\mathbf{y}) \cap C_X$ e para cada $i = 1, ..., u$, seja $\gamma_i : (0, \varepsilon) \to X$ tal que $\pi(\gamma(t)) = t\mathbf{y}$ e $\widetilde{\gamma}_i = \rho^{-1} \circ \gamma_i$.

Vamos mostrar que $u = \sum\limits_{i=1}^{p} k_X(y_j)$.

De fato, sejam $k, \varepsilon > 0$ tais que $C_{k,\varepsilon}(\mathbf{y}) \cap \pi(br(\pi|_X)) = \emptyset$, onde $C_{k,\varepsilon}(x) = \{v \in \mathbb{R}^d;\ \|v - t\mathbf{y}\| \leq kt,\ t \in (0, \varepsilon]\}$. Então, denote por $Y_1, ..., Y_u$, as componentes conexas de $(\pi|_X)^{-1}(C_{k,\varepsilon}(\mathbf{y}))$, para $k, \varepsilon > 0$ suficientemente pequenos. Daí, $\pi|_{Y_i} : Y_i \to C_{k,\varepsilon}(\mathbf{y})$ é homeomorfismo, para $i = 1, ..., u$.

Observe que $\widetilde{\gamma}_i(0) := \lim\limits_{t \to 0^+} \widetilde{\gamma}_i(t) \in \{y_1, ..., y_p\}$, para $i = 1, ..., u$ e, assim $u \leq \sum\limits_{i=1}^{r} k_X(y_j)$. Diminuindo $k$, se necessário, podemos supor que cada $C_{Y_i}$ contém no máximo um $y_j$. Por outro lado, fixado $y_j$ e se $\gamma : [0, \delta) \to X$ é uma curva subanalítica tal que $\rho^{-1} \circ \gamma(0) = y_j$, então existe $\delta_0 > 0$ tal que $\pi(\gamma(t)) \in C_{k,\varepsilon}(\mathbf{y})$, para todo $t < \delta_0$. Daí, existe $i \in \{1, ..., u\}$ tal que $\gamma(t) \in Y_i$, para $0 < t < \delta_0$. Com isso, $\widetilde{\gamma}_i(0) = y_j$, o que nos dá a igualdade $u = \sum\limits_{i=1}^{r} k_X(y_j)$, provando que

$$u = \sum_{i=1}^{r} k_X(C_i) \cdot \#(\pi'^{-1}(\mathbf{y}) \cap C_i).$$

Mas $\sum\limits_{i=1}^{r} k_X(C_i) \cdot \#(\pi'^{-1}(\mathbf{y}) \cap C_i) \equiv \#(\pi'^{-1}(\mathbf{y}) \cap C'_X) \bmod 2$ e $u \equiv m_X \bmod 2$, então

$$m_X \equiv \#(\pi'^{-1}(\mathbf{y}) \cap C_i) \bmod 2,$$

para $\mathbf{y}$ genérico em $\mathbb{S}^{d-1}$ □

Com isso, vemos que $m_\pi(C'_X)$ não depende de $\pi$, pois $m_X$ não depende de $\pi$, então vamos escrever apenas $m(C'_X)$ em vez de $m_\pi(C'_X)$. A priori $m(C'_X)$ depende de $X$, mas isso também não ocorre. De fato, se $X$ e $Y$ são conjuntos analíticos reais com a mesma dimensão $d$ e $C'_X = C'_Y$, então seja $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^d$ uma projeção tal que

$\pi^{-1}(0) \cap (C(X_{\mathbb{C}}, 0) \cup C(Y_{\mathbb{C}}, 0)) = \{0\}$. Daí,

$$\begin{aligned} m(C'_X) &\equiv \#(\pi'^{-1}(0) \cap C'_X) \quad \text{(por definição de } C'_X) \\ &\equiv \#(\pi'^{-1}(0) \cap C'_Y) \quad \text{(pois } C'_X = C'_Y) \\ &\equiv m(C'_Y) \quad \text{(por definição de } C'_Y). \end{aligned}$$

Agora estamos prontos para enunciar e provar o resultado principal desta seção.

**Teorema 5.4.7.** *Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^{n+1}$ dois conjuntos analíticos contendo a origem. Seja $\varphi : (X, 0) \to (Y, 0)$ um homeomorfismo com $\varphi$ e $\varphi^{-1}$ diferenciáveis na origem. Então, $m_X \equiv m_Y$.*

*Demonstração.* Como $D\varphi^{-1} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ é um isomorfismo $\mathbb{R}$-linear, temos que $\widetilde{Y} = D\varphi^{-1}(Y)$ é um conjunto analítico real e $m_{\widetilde{Y}} = m_Y$. Além disso, $\psi := D\varphi^{-1} \circ \varphi : (X, 0) \to (\widetilde{Y}, 0)$ é um um homeomorfismo com $\psi$ e $\psi^{-1}$ diferenciáveis na origem. Isso implica $\psi : (X, 0) \to (\widetilde{Y}, 0)$ ser um homeomorfismo forte, então pelo Lema 5.4.5, $\psi'(C'_X) = C'_{\widetilde{Y}}$. Contudo, $D\psi = \mathrm{id}$, então $\psi' = \mathrm{id}$, o que nos dá $C'_X = C'_Y$ e assim, $m(C'_X) = m(C'_{\widetilde{Y}})$. Então, pelo Lema 5.4.6,

$$m_X \equiv m(C'_X) = m(C'_{\widetilde{Y}}) \equiv m_{\widetilde{Y}}.$$

Portanto, $m_X \equiv m_Y \bmod 2$. □

Terminamos o capítulo fazendo a observação de que o resultado acima é ótimo, pois as hipóteses de $\varphi$ e $\varphi^{-1}$ serem diferenciáveis na origem não podem ser retiradas, como mostra o exemplo abaixo:

**Exemplo 5.4.8.** *Sejam $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \, y^3 = x^2\}$ e $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \, y = 0\}$. Então, $\varphi : (\mathbb{R}^2, X, 0) \to (\mathbb{R}^2, Y, 0)$ dada por $\varphi(x, y) = (x, y^3 - x^2)$ é um homeomorfismo diferenciável na origem, mas sua inversa $\varphi^{-1}(u, v) = (u, (u - v^2)^{\frac{1}{3}})$ não é diferenciável na origem. Contudo, $m_X = 2$ e $m_Y = 1$.*

Além disso, não podemos esperar igualdade no lugar de igualdade $\bmod 2$, como pode ser visto no Exemplo 3.3.2, pois $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \, z^3 = x^5 y + xy^5\}$ é gráfico de uma função diferenciável na origem, mas $m_V = 3$ e $m_{\mathbb{R}^2} = 1$.

## CONCLUSÃO

No capítulo 3 foi feito um estudo completo sobre regularidade topológica forte. Foi mostrado que conjuntos analíticos complexos que são topologicamente forte regulares, são suaves, enquanto conjuntos analíticos reais que são topologicamente forte regulares, em geral, não são $C^1$. Na verdade, foi mostrado que curvas analíticas reais que são topologicamente forte regulares são $C^1$ e foi dado contra-exemplo que em qualquer dimensão maior que um, existem conjuntos analíticos reais que são topologicamente forte regulares, mas não são $C^1$, finalizando o estudo sobre regularidade topológica forte de conjuntos analíticos. Um outro resultado obtido ainda neste capítulo, foi uma clasificação completa de curvas analíticas complexas em termos da multiplicidade.

No capítulo 4 foi mostrado que conjuntos definíveis bi-lipschitz homeomorfos tem cones tangentes bi-Lipschitz homeomorfos. Como aplicação deste resultado também foi feito um estudo completo sobre regularidade Lipschitz de conjuntos analíticos, foi mostrado que conjuntos analíticos complexos que são Lipschitz regulares são suaves, enquanto para conjuntos analíticos reais foi mostrado que este resultado é falso, em geral, para conjuntos com dimensão maior que um e é verdadeiro no caso de curvas, finalizando o estudo sobre regularidade de conjuntos analíticos Lipschitz regulares.

Por fim, no capítulo 5, foram feitas algumas reduções para versões da Conjectura de Zariski, foi mostrado que a mulplicidade é um invariante para conjuntos analíticos complexos tais que as componentes irredutíveis de seus cones possuem singulariade isolada, quando consideramos homemorfismos bi-Lipschitz definível. Além disso, foi dado uma prova para o resultado de Gau e Lipman (1983) sobre a invariância diferenciável da multiplicidade de conjuntos analíticos complexos e, por fim, foi dado uma prova para a invariância diferenciável da multiplicidade de conjuntos analíticos reais.

## REFERÊNCIAS

ARNOLD, V. I.; GUSEIN-ZADE, S. M. e VARCHENKO, A. N. **Singularities of differentiable maps. Vol. I: The classification of critical points, caustics and wave fronts**. Monographs in Mathematics. Boston: Birkhäuser, 1985.

ATIYAH, M. F. e MACDONALD, I. G. **Introduction to commutative algebra. volume II**. California: Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

BERNIG, A. e LYTCHAK, A. Tangent spaces and Gromov-Hausdorff limits of subanalytic spaces. **J. Reine Angew. Math.**, 608: 1–15, 2007.

BOBADILLA, J. F. Answers to some equisingularity questions. **Invent. math.**, 161: 657—675, 2005.

BOCHNAK, J.; COSTE, M. e ROY, MARIE-FRANÇOSE. **Real algebraic geometry**. New York: Springer, 1998.

BIRBRAIR, Lev. Lipschitz geometry of curves and surfaces definable in o-minimal structures. **Illinois J. Math.**, 52 (4): 1325–1353, 2008.

BIRBRAIR, Lev; FERNANDES, A. e GRANDJEAN, Vincent. **Collapsing topology of isolated singularities**. arXiv: 1208.4328v1 [math.MG], 2012. Disponível em: <`http://arxiv.org/abs/1208.4328v1`>. Acesso em: 17 maio 2015.

BIRBRAIR, L.; FERNANDES, A. e NEUMANN, W. D. Normal embedding of complex algebraic surfaces. **Real and Complex Singularities. LMS Lecture Note Series**, 380: 17–21, 2010.

BIRBRAIR, Lev; FERNANDES, A.; LÊ D. T. e SAMPAIO, J. E. **Lipschitz regular complex algebraic sets are smooth**. arXiv: 1404.5678v3 [math.AG], 2014. Disponível em: <`http://arxiv.org/abs/1404.5678v3`>. Acesso em: 17 fev. 2015.

BIRBRAIR, Lev ; NEUMANN, Walter D. e PICHON, Anne. The thick-thin decomposition and the bilipschitz classification of normal surface singularities. **Acta Mathematica**, 212 (2): 199–256, 2014.

BRIESKORN, E. V. Examples of singular normal complex spaces which are topological manifolds. **Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.**, 55: 1395–1397, 1966.

CARVALHO, Emílio de. **A conjectura de Zariski para a multiplicidade**. 2010. 72 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2010.

CARTAN, Henri Variétés analytiques réeles et variétés analytiques complexes. **Bulletin de la S.M.F.**, 85: 77–99, 1957.

CHIRKA, E. M. **Complex analytic sets**. Kluwer Academic Publishers, 1989.

CLARKE, Frank H. Generalized gradients and applications. **Trans. Amer. Math. Soc.**, 205: 247–262, 1975.

COMTE, Georges. Multiplicity of complex analytic sets and bi-Lipshitz maps. **Real analytic and algebraic singularities (Nagoya/Sapporo/Hachioji, 1996) Pitman Res. Notes Math. Ser.**, 381:182–188, 1998.

COSTE, Michel. **An introduction to o-minimal geometry**. Institut de Recherche Methématique de Rennes, 1999.

DIEUDONNÉ, Jean. **Topics in local algebra**. Notre Dame: University of Notre Dame Press, 1967.

DIMCA, Alexandru. **Singularities and topology of hypersurfaces**. New York: Springer-Verlag, 1992.

DRAPER, R.N. Intersection Theory in Analytic Geometry. **Mathematische Annalen**, 180: 175–204, 1969.

EBELING, Wolfgang. **Functions os several complex variable and their singularities**. Tradução de Philip Spain. Providence: American Mathematical Society, 1992. Tradução de: Funktionentheorie, differentialtopologie and singularitäten.

EPHRAIM, R. $C^1$ preservation of multiplicity. **Duke Math.**, 43: 797–803, 1976a.

EPHRAIM, R. The cartesian product structure and $C^\infty$ equivalences of singularities. **Transactions of the American Mathematical Society**, 224 (2): 299–311, 1976b.

EYRAL, Christophe Zariski's multiplicity questions - a survey. **New Zealand Journal Mathematics**, 36: 253–276, 2007.

GAU, Y.-N. e LIPMAN, J. Differential invariance of multiplicity on analytic varieties. **Inventiones mathematicae**, 73 (2): 165–188, 1983.

GHOMI, M. e HOWARD, R. Tangent cones and regularity of real hypersurfaces. **J. reine angew. Math.**, 697: 221–247, 2014.

HEINONEN, Juha e KEITH, Stephen. Flat forms, bi-lipschitz parametrizations, and smoothability of manifolds. **Publications mathématiques de l'IHÉS**, 113 (1): 1–37, 2011.

HUREWICZ, Witold. Beiträge zur topologie der deformationen II. homotopie und homologiegruppen. **Koninklijke Akademie Van Wetenschappen: Proceedings of the Sections of Sciences**, 38: 521–528, 1935.

KIRSZBRAUN, M. *Ü*ber die zusammenziehende und Lipschitzsche Transformationen. **Fundamenta Math.**, 22 (1): 77—108, 1934.

KOIKE, S. e PAUNESCU, L. The directional dimension of subanalytic sets is invariant under bi-Lipschitz homeomorphisms. **Ann. Inst. Fourier (Grenoble)**, 59 (6): 2445–2467, 2009.

KOIKE, S.; LOI, Ta Lê; PAUNESCU, L. e Shiota, M. Directional properties of sets definable on o-minimal structures. **Ann. Inst. Fourier (Grenoble)**, 63 (5): 2017–2047, 2013.

KUEHN, Christian. **A Remark on Geometric Desingularization of a Non-Hyperbolic Point using Hyperbolic Space**. arXiv: 1403.3789v1 [math.CA], 2014. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/1403.3789v1>. Acesso em: 17 maio 2015.

KURDYKA, K. and RABY, G. Densité des ensembles sous-analytiques. **Ann. Inst. Fourier (Grenoble)**, 39 (3): 753–771, 1989.

ŁOJASIEWICZ, Stanisław. **Introduction to complex analytic geometry**. Basel: Birkhäuser, 1991.

MCSHANE, E. J. Extension of range of functions. **Bull. Amer. Math. Soc.**, 40: 837–842, 1934.

MILNOR, John. **Singular points of complex hypersurfaces**. Princeton: Princeton University Press, 1968.

MUMFORD, M. The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity. **Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math**, 9: 5–22, 1961.

NARASIMHAN, R. **Introduction to the theory of analytic spaces**. Berlin: Springer-Verlag, 1966.

PENOT, Jean-Paul. **Calculus Without Derivatives**. Spinger, New York, 2013.

PRILL, David. Cones in complex affine space are topologically singular. **Proc. Amer. Math. Soc.**, 18: 178–182, 1967.

RISLER, J.-J. e TROTMAN, D. Bilipschitz Invariance of the Multiplicity. **Bulletin of The London Mathematical Society**, 29 (2): 200–204, 1997.

ROBERTS, Paul C. **Multiplicities and Chern classes in local algebra**. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

SAEKI, O. Topological types of complex isolated hypersurface singularities. **Kodai Math. J.**, 12: 23–29, 1989.

Sampaio, J. E. **Bi-Lipschitz homeomorphic subanalytic sets have bi-Lipschitz homeomorphic tangent cones**. arXiv: 1412.3049v1 [math.MG], 2014. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/1412.3049v1>. Acesso em: 17 maio 2015.

SEBASTIANI, Marcos. **Introdução à geometria analítica complexa**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

STOLL, W. The multiplicity of a holomorphic map. **Inventiones Math.**, 2: 15–58, 1966.

TAYLOR, Joseph L. **Several complex cariables with connections to algebraic geometry and Lie groups**. Providence: American Mathematical Society, 2002.

THIE, P. R. The Lelong number of a point of a complex analytic set. **Math. Annalen**, 172: 269–312, 1967.

THIE, P. R. The area of an analytic set in complex projective space. **Proc. Amer. Math. Soc.**, 21: 553–554, 1969.

TROTMAN, D. Multiplicity is a $C^1$ invariant. **University Paris 11 (Orsay)**, Preprint, 1977.

TUSCHMANN, Wilderich. Hausdorff convergence and the fundamental group. **Mathematische Zeitschrift**, 218 (1): 207–211, 1995.

VALETTE, Guillaume. Multiplicity mod 2 as a metric invariant. **Discrete Comput. Geom.**, 43: 663–679, 2010.

VAN DEN DRIES, Lou. A generalization of the Tarski-Seidenberg theorem, and some nondefinability results. **Bull. Amer. Math. Soc.**, 15 (2): 189–193, 1986.

VAN DEN DRIES, Lou. **Tame Topology and O-minimal Structures**. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

VAN DEN DRIES, Lou e MILLER, Chris. Geometric categories and o-minimal structures. **Duke Math. J.**, 84 (2): 497–540, 1996.

WHITNEY, H. Analytic extensions of functions defined in closed sets. **Transactions of the American Mathematical Society**, 36: 63–89, 1934.

WHITNEY, H. Elementary structure of real algebraic varieties. **Annals of Mathematics**, 66 (3): 545–556, 1957.

WHITNEY, H. Tangents to an analytic variety. **Annals of Mathematics**, 81 (3): 496—549, 1965a.

WHITNEY, H. Local properties of analytic varieties. **Differential and Combinatorial Topology, Princeton Univ. Press**, 205–244, 1965b.

WHITNEY, H. **Complex Analytic Varieties**. California: Addison-Wesley publishing company, 1972.

WHITNEY, H. e BRUHAT, F. Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques-réels. **Commentarii Mathematici Helvetici**, 33 (1): 132–160, 1959.

ZARISKI, O. Some open questions in the theory of singularities. **Bull. of the Amer. Math. Soc.**, 77 (4): 481–491, 1971.

ZARISKI, 0. e SAMUEL, Pierre. **Commutative algebra. volume II**. New York: D. Van Nostrand Company, 1960.