



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

RENAN DA SILVA SANTOS

GEOMETRIA ENUMERATIVA VIA INVARIANTES DE
GROMOV-WITTEN E MAPAS ESTÁVEIS

FORTALEZA

2015

RENAN DA SILVA SANTOS

GEOMETRIA ENUMERATIVA VIA INVARIANTES DE
GROMOV-WITTEN E MAPAS ESTÁVEIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Algébrica.

Orientador: Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia

FORTALEZA

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

S238g Santos, Renan da Silva
Geometria enumerativa via invariantes de Gromov-Witten e mapas estáveis / Renan da Silva
Santos. – 2015.
78 f. : enc. ; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2015.

Área de Concentração: Geometria Algébrica

Orientação: Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia.

1. Invariantes de Gromov-Witten. 2. Mapas estáveis. 3. Curvas racionais. I. Título

CDD 516.35

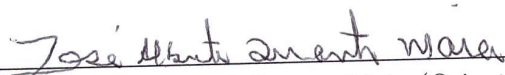
RENAN DA SILVA SANTOS

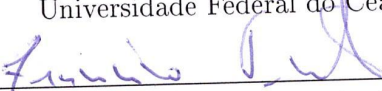
GEOMETRIA ENUMERATIVA VIA INVARIANTES DE
GROMOV-WITTEN E MAPAS ESTÁVEIS

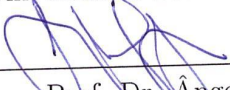
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Algébrica.

Aprovada em: 17/ 03 / 2015.

BANCA EXAMINADORA


Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)


Prof. Dr. Francisco Luiz Rocha Pimentel
Universidade Federal do Ceará (UFC)


Prof. Dr. Angelo Papa Neto
Instituto Federal do Ceará (IFCE)

Dedico este trabalho ao meu grande amigo
Eduardo Garcez, pelas lições de vida que
aprendi com ele.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter criado os ventos e delimitado os mares.

Ao meu orientador e 'pai acadêmico' Prof. Alberto Maia, por ter me guiado pelos caminhos da Geometria Algébrica.

A todos os professores que direta ou indiretamente contribuíram para a minha formação acadêmica, transmitindo conhecimento (matemático e não matemático) e por terem acreditado em meu potencial. Em especial aos professores: Manoel Azevedo, Tiago Caúla, Romildo Silva, Francisco Pimentel, Antônio Caminha, Alexandre Fernandes e Lev Birbrair.

A todos os amigos e colegas de pós-graduação. Em especial ao Eduardo Garcez, Itamar Sales, Gilson Granja, João Luiz, João Victor, Marlon Oliveira, Nicolas Alcântara, Rafael Alves, Rodrigo Matos, Roger Oliveira e Walner Mendonça, pela amizade, apoio, momentos de descontração e por todas as discussões matemáticas e não matemáticas.

Ao professor Fábio Montenegro, por ter dedicado grande parte de seu tempo no trabalho de criar o modelo em .tex, modelo este que utilizo nesta. E ao Diego Sousa, pelo suporte técnico.

A CAPES, pelo suporte financeiro.

Nenhuma razão para ficar excitado
O Ladrão falou amavelmente
Há muitos aqui entre nós
Que pensam que a vida é apenas uma piada
Mas você e eu, já passamos por isso
E este não é o nosso destino
Então vamos parar de falar hipocritamente
A hora está chegando
Trecho de 'All along the watchtower' de Bob
Dylan

RESUMO

Neste trabalho apresento a teoria de Gromov-Witten, cohomologia quântica e mapas estáveis e uso estas ferramentas para obter alguns resultados enumerativos. Em particular, provo a fórmula de Kontsevich para curvas racionais projetivas planas de grau d . Faço um estudo introdutório dos espaços de Mumford-Knudsen e construo os espaços de Kontsevich a fim de definir os invariantes de Gromov-Witten. Estes são usados para definir o anel de cohomologia quântica. Em seguida, aplico a teoria geral para o caso do plano projetivo e, usando a associatividade do produto quântico, obtenho a fórmula de Kontsevich. Também estudo a fronteira do espaço moduli de mapas estáveis e descrevo o grupo de Picard destes. Com isso, seguindo as ideias de Pandharipand, especialmente o algoritmo por este desenvolvido, calculo alguns números característicos de curvas no espaço projetivo.

Palavras-chave: Invariantes de gromov-witten. Mapas estáveis. Curvas racionais.

ABSTRACT

In this work, I present the Gromov-Witten theory, quantum cohomology and stable maps and use these tools to obtain some enumerative results. In particular, I prove the Kontsevich formula for projective rational plane curves of degree d . I do an introductory study of Mumford-Knudsen spaces and construct the Kontsevich spaces in order to define Gromov-Witten invariants. These are used to define the quantum cohomology ring. Next, I apply the general theory to the case of the projective plane and, using the associativity of the quantum product, I obtain the Kontsevich formula. I also study the boundary of the moduli space of stable maps and describe its Picard group. Following the ideas of Pandharipand, especially the algorithm he developed, I calculate some characteristic numbers of curves in the projective space.

Keywords: Gromov-Witten invariants. Stable maps. Rational curves.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Os números N_d para d pequeno	69
Tabela 2 – Produtos top em $\overline{M}_{0,1}(\mathbb{P}^2, 2)$	73
Tabela 3 – Números característicos de cônicas em \mathbb{P}^2	73
Tabela 4 – Produtos top em $\overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^3, 2)$	73
Tabela 5 – Números característicos de cônicas em \mathbb{P}^3	74
Tabela 6 – Produtos top em $\overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 3)$	74
Tabela 7 – Números característicos de cúbicas racionais em \mathbb{P}^2	74

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	PRELIMINARES	15
2.1	Divisores de Weil	15
2.2	Divisores de Cartier	16
2.3	Feixes Invertíveis	17
2.4	Sistemas e Séries Lineares	17
2.5	Teoremas de Bertini e Kleiman	19
3	CLASSES DE CHERN	20
3.1	Ciclos e Equivalência Racional	20
3.2	Imagem direta e inversa	22
3.3	As classes de Chern e Segre	25
3.4	Anel de Chow	30
4	CURVAS DE MUMFORD-KNUDSEN	32
4.1	Espaços Modulli	32
4.2	Curvas n-marcadas estáveis	34
4.2.1	<i>Morfismos</i>	36
4.2.2	<i>A fronteira</i>	38
5	MAPAS ESTÁVEIS	40
5.1	Visão geral	40
5.2	Construção dos Espaços de Kontsevich	44
5.2.1	<i>Espaços rigidificados</i>	45
5.2.2	<i>A colagem</i>	49
5.3	Divisores de Fronteira	50
5.3.1	<i>Estrutura recursiva</i>	51
5.3.2	<i>Divisores especiais</i>	51
5.3.3	<i>Lema de Recursão</i>	51
5.4	Divisores em $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$	53
5.4.1	<i>Geradores para o grupo de Picard</i>	53
5.4.2	<i>O algoritmo de recursão</i>	54
6	INVARIANTES DE GROMOV-WITTEN	57
6.1	Definições e conceitos básicos	57
6.2	Propriedade básicas dos invariantes	60
6.3	O anel de cohomologia quântica	61
7	INVARIANTES E GEOMETRIA ENUMERATIVA	66
7.1	A Fórmula de Kontsevich	66
7.2	Números característicos de curvas em \mathbb{P}^r	70

8	CONCLUSÃO	76
	REFERÊNCIAS	77

1 INTRODUÇÃO

Geometria Enumerativa tem por objetivo contar ou enumerar configurações geométricas e para isso se utiliza, modernamente, das técnicas oriundas da Teoria da Interseção. Essas duas áreas do estudo são inseparáveis e ambas são temas centrais em Geometria Algébrica, sendo tão ou mais antigas quanto esta. Os gregos, por exemplo, já consideravam questões enumerativas. Apolônio de Perga se perguntou sobre o número de círculos que são tangentes a três círculos dados. Ele mesmo obteve a resposta: $2^3 = 8$ círculos. Mais recentemente, os matemáticos estavam interessados em saber o número de soluções de um sistema de equações polinomiais. Esse estudo nos leva facilmente ao estudo de curvas e ao quase folclórico Teorema de Bezout. É claro que devemos nos preocupar em considerar soluções complexas e "no infinito", mas tomados os devidos cuidados e nas condições adequadas, sabemos contar o número de pontos de intersecção entre duas curvas planas.

No final século XIX, este ramo tomou um novo fôlego através dos trabalhos de matemáticos como H. Zeuthen e H. Schubert. Os trabalhos desse último levaram a criação do Cálculo de Schubert. Suas técnicas, por exemplo, levaram ao monstruoso número de cúbricas retorcidas tangente a 12 quárticas em \mathbb{P}^3 : 5.819.539.783.680. Entretanto, as técnicas de contagem utilizadas eram ingênuas e, se usadas sem cuidado, levavam a resultados incorretos. D. Hilbert vislumbrou a importância de uma formalização rigorosa desse campo e assim o tópico "geometria enumerativa" entrou na sua famosa lista de 23 problemas. O décimo quinto problema de Hilbert dizia o seguinte:

O problema consiste no seguinte: Estabelecer com rigor e determinar com exatidão os limites da validade desses números geométricos os quais tem Schubert especialmente determinado com base no assim chamado princípio da posição especial ou conservação do número por meio do cálculo enumerativo desenvolvido por ele.

Embora a Álgebra de hoje garanta, em princípio, a possibilidade de realizar os processos de eliminação, para a prova dos teoremas de geometria enumerativa, decididamente é necessário mais, a saber, a realização efetiva do processo de eliminação no caso de equações de forma especial, de tal maneira que o grau das equações finais e a multiplicidade de suas soluções possam ser previstas.

Traduzido de (HILBERT, 1902)

A teoria se desenvolveu bastante nas décadas subsequentes graças aos trabalhos de matemáticos como O. Zariski, P. Samuel, A. Weil, B.L van der Waerden e J.P. Serre. E continua se desenvolvendo até hoje. Um dos mais recentes capítulos nessa jornada é o que concerne a invariantes de Gromov-Witten e cohomologia quântica. Físicos teóricos tiveram uma inesperada participação neste ato.

Desde meados do século passado, os físicos teóricos estavam interessado em "topological quantum field theory". De modo um tanto vago, eles queriam estudar funções

que não dependessem da métrica do espaço-tempo. Em termos práticos, tal teoria não deveria captar mudanças na forma do espaço, como contrações, por exemplo. Ou seja, eles estavam interessados em invariantes topológicos. Alguns matemáticos também se interessaram por essas questões. M. Atiyah, por exemplo, chegou a propor um conjunto de axiomas para a TQFT. O primeiro exemplo de uma tal teoria veio com os trabalhos de E. Witten (WITTEN, 1988).

Em paralelo a isso, um problema particular em geometria enumerativa vinha atormentando os matemáticos. Considere o número N_d das curvas planas racionais de grau d passando por $3d - 1$ pontos em posição geral. O objetivo é determinar esses N_d para todo d . Obviamente $N_1 = 1$, pois por dois pontos distintos passa uma única reta. Também são resultados clássicos $N_2 = 1, N_3 = 12$. H. Zeuthen determinou em (ZEUTHEN, 1873) $N_4 = 620$, utilizando métodos clássicos. Em meados dos anos 90, I. Vainsencher obteve $N_5 = 87304$ (VAINSENCHEER, 1995). Mas as técnicas utilizadas eram completamente diferentes. Ansiava-se por um método que pudesse encontrar todos os N_d de uma única vez. É aqui que entram os nossos colegas físicos.

E. Witten, em outro de seus artigos (WITTEN, 1991), introduziu o conceito de cohomologia quântica. Para a fundamentação matemática viu-se que eram necessários certos mapas lineares, mais tarde batizados de invariantes de Gromov-Witten. Mas a construção desses invariantes envolvia certos espaços moduli de mapas estáveis. O problema: ninguém até aquele momento havia provado que tais espaços existiam. Bem, em 1994, M. Kontsevich e Y. Manin publicaram um trabalho (KONTSEVICH and MANIN, 1994) em que se propunham a estudar o problema dos invariantes de GW. Utilizando as relações de associatividade que encontraram para o produto quântico, eles obtiveram, surpreendentemente, uma recorrência entre os números N_d :

$$N_d = \sum_{d_1+d_2=d} N_{d_1} N_{d_2} d_1^2 d_2 \left[d_2 \binom{3d-4}{3d_1-2} - d_1 \binom{3d-4}{3d_1-1} \right]$$

Como veremos, podemos interpretar os números N_d como certos invariantes de Gromov-Witten, e portanto é razoável esperar que podemos obtê-los por meio dessa teoria. A construção formal dos espaços de mapas estáveis $\overline{M}_{g,n}(X, \beta)$ foi feita por K. Behrend e Y. Manin, dois anos depois (BEHREND and MANIN, 1996).

O objetivo deste trabalho é apresentar essas novas ferramentas, invariantes de Gromov-Witten, cohomologia quântica e mapas estáveis, e determinar alguns resultados enumerativos utilizando essas técnicas. Este trabalho está dividido em seis partes. Na primeira, veremos alguns preliminares importantes. Na segunda, faremos um rápido *tour* pela teoria da intersecção, destacando os resultados principais que serão usando nos capítulos subsequentes. Na terceira, discutiremos brevemente o conceito de espaços de moduli e estudaremos com certo detalhe o espaço moduli de curvas marcadas, um objeto de essencial importância na teoria. A quarta parte dedica-se ao estudo detalhado dos

espaços moduli de mapas estáveis. Na quinta parte desenvolveremos os conceitos de invariantes de Gromov-Witten e cohomologia quântica. Na sexta e última parte, utilizaremos a teoria desenvolvida para obtermos alguns resultados enumerativos.

2 PRELIMINARES

2.1 Divisores de Weil

Consideraremos apenas esquemas X noetherianos integrais separáveis e regulares em codimensão 1 (i.e., todo anel local \mathcal{O}_x de dimensão 1 é regular).

Definição 2.1. Um *divisor primo* em X é um subesquema fechado integral Y de codimensão 1. Um *divisor de Weil* é um elemento do grupo abeliano livre $\text{Div}X$ gerado pelos divisores primos.

Ou seja, um divisor de Weil é uma soma formal do tipo

$$D = \sum n_Y Y$$

onde os $n_Y \in \mathbb{Z}$ e $n_Y = 0$ para quase todo Y , a soma sendo sob todos os divisores primos de X

O divisor é dito efetivo quando $n_Y \geq 0$ para todo Y .

Definição 2.2. Seja $f \in K^*$ uma função racional não nula em X . Para cada divisor primo Y denote por ν_Y a valoração discreta correspondente a Y . Definimos o divisor de f , denotado (f) , por

$$(f) = \sum \nu_Y(f) Y$$

Note que $\nu_Y(f) = 0$ para quase todo Y (cf. HARTSHORNE, 1977, Lema II.6.1), logo (f) está bem definido e é chamado *divisor principal*. Segue das propriedades de valoração que $\left(\frac{f}{g}\right) = (f) - (g)$. Ou seja, temos um homomorfismo de grupos:

$$K^* \rightarrow \text{Div}(X)$$

A imagem são os divisores principais. O grupo das classes de X , denotado $\text{Cl}X$, é o quociente de $\text{Div}X$ pelos divisores principais. Dois divisores D, D' são ditos linearmente equivalentes quando $D = D'$ em $\text{Cl}X$ isto é, quando $D - D'$ é um divisor principal. Em geral não é simples calcular o grupo $\text{Cl}X$, mas em alguns casos podemos determiná-lo. Por exemplo, se $X = \mathbb{P}^n$ e $H \subset \mathbb{P}^n$ é um hiperplano qualquer (digamos definido por $x_0 = 0$) então $\text{Cl}X$ é isomorfo a \mathbb{Z} e a classe de H é um gerador. (cf. HARTSHORNE, 1977, Proposição II.6.4).

2.2 Divisores de Cartier

Relembremos agora a noção de divisor de Cartier. É um conceito mais buscado que o conceito de divisor de Weil, mas veremos que são essencialmente a mesma coisa, se o esquema for suficientemente bom. Seja X um esquema. Para cada aberto afim $U = \text{Spec} A$ seja

$$S = \{a \in A \mid a \text{ não é divisor de zero}\}$$

e $K(U) = S^{-1}A$ seu corpo total de frações. Para cada aberto U denote por $S(U)$ o conjunto dos elementos de $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ que não são divisores de zero em cada anel local \mathcal{O}_x para todo $x \in U$. Os anéis $S(U)^{-1}\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ formam um pre-feixe cujo feixe de anéis associado \mathcal{K} é chamado *feixe de frações totais* de \mathcal{O} . Denotamos por \mathcal{K}^* o feixe de grupos multiplicativos dos elementos invertíveis em \mathcal{K} .

Definição 2.3. Um *divisor de Cartier* sobre um esquema X é uma secção global do feixe $\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*$

Assim, limpa e seca a definição parece difícil de digerir. Dissecando a definição, podemos descrever um divisor de Cartier do seguinte modo. Temos uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de X e para cada α é dado um elemento $f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{K}^*)$ de modo que para cada par α, β exige-se que $f_\alpha/f_\beta \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathcal{O}^*)$. Podemos nos perguntar em que sentido isso é um divisor. Bem, suponha que $\{f_\alpha, U_\alpha\}$ determina um divisor de Cartier. Sobre U_β o divisor (de Weil) principal definido por f_β pode ser escrito em $U_\alpha \cap U_\beta$ como $f_\alpha = g_{\alpha\beta} f_\beta$ onde $g_{\alpha\beta} \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathcal{O}_X^*)$. Assim, como $g_{\alpha\beta}$ não possui zeros ou polos, o divisor (de Weil) principais (f_α) e (f_β) coincidem. Um divisor de Cartier é *principal* se está na imagem do mapa natural

$$\Gamma(X, \mathcal{K}^*) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)$$

Ou seja $f_\alpha = f_\beta$ em $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$. As equações são portanto compatíveis e nos dão uma secção global de \mathcal{K}^* . Dois divisores de Cartier são linearmente equivalentes se sua diferença é principal. Denotamos $D_1 \sim D_2$

Um divisor de Cartier é *efetivo* se pode ser representado por $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ onde $f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_{U_\alpha})$ para todo α . Nas condições adequadas, divisores de Cartier e divisores de Weil são essencialmente a mesma coisa.

Proposição 2.1. Seja X um esquema integral, separável e noetheriano tal que todos seus anéis locais são domínios de fatoração única. Então o grupo $\text{Div} X$ é isomorfo ao grupo dos divisores de Cartier $\Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)$. Ademais, divisores de Weil principais correspondem a divisores de Cartier principais.

Demonstração. Vide (HARTSHORNE, 1977, Proposição II.6.11). □

2.3 Feixes Invertíveis

Relembremos um pouco sobre feixes invertíveis.

Definição 2.4. Um *feixe invertível* sobre um espaço anelado X é um \mathcal{O}_X -módulo localmente livre de posto 1.

Assim, é fácil observar que se \mathcal{L} e \mathcal{M} são dois feixes invertíveis, então $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$ é também um feixe invertível. Além disso, existe um feixe invertível \mathcal{L}^{-1} tal que $\mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X$. Basta tomar $\mathcal{L}^{-1} = \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$. Portanto, a menos de isomorfismo, os feixes invertíveis formam um grupo sob a operação \otimes , chamado *grupo de Picard* de X , denotado $\text{Pic}X$. Queremos agora relacionar os feixes invertíveis com a noção de divisor.

Definição 2.5. Seja D um divisor de Cartier sobre um esquema X , representado por $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$. Definimos um subfeixe $\mathcal{L}(D)$ do feixe de frações totais \mathcal{K} do seguinte modo: $\mathcal{L}(D)$ é o sub- \mathcal{O}_X -módulo de \mathcal{K} gerado por f_α^{-1} em U_α . Como f_α/f_β é invertível em $U_\alpha \cap U_\beta$, tem-se que f_α^{-1} e f_β^{-1} geram o mesmo \mathcal{O}_X -módulo, logo $\mathcal{L}(D)$ está bem definido. Ele é chamado de *feixe associado* a D .

Pode-se provar que $\mathcal{L}(D)$ é um feixe invertível, que se comporta bem com relação as operações de divisores: $\mathcal{L}(D_1 - D_2) \cong \mathcal{L}(D_1) \otimes \mathcal{L}(D_2)^{-1}$ e $D_1 \sim D_2 \iff \mathcal{L}(D_1) \cong \mathcal{L}(D_2)$ Ademais, a associação

$$D \longmapsto \mathcal{L}(D)$$

é uma correspondência biunívoca entre divisores de Cartier em X e subfeixes invertíveis de \mathcal{O}_X . Vide (HARTSHORNE, 1977, Proposição II.6.13).

2.4 Sistemas e Séries Lineares

Seja X uma variedade projetiva sobre um corpo algebricamente fechado. Neste caso vimos que os conceitos de divisores de Weil e Cartier são equivalentes e temos uma correspondência 1-1 entre classes de equivalência linear de divisores e classes de isomorfismos de feixes invertíveis sobre X . Seja \mathcal{L} um feixe invertível sobre X e $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ uma secção não-nula. Queremos definir o *divisor de zeros* de s , $D = (s)_0$. Seja U um aberto que trivializa \mathcal{L} e $\varphi : \mathcal{L}|_U \simeq \mathcal{O}_U$ um isomorfismo. Então $\varphi(s) \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$. Variando U em uma cobertura de X , a coleção $\{(U, \varphi(s))\}$ determina um divisor de Cartier efetivo em X .

Proposição 2.2. Seja X uma variedade projetiva não-singular sobre um corpo algebricamente fechado k . Seja D_0 um divisor sobre X e $\mathcal{L} = \mathcal{L}(D_0)$ o feixe invertível associado. Então: a) Para $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ não-nula, o divisor de zeros $(s)_0$ é efetivo e linearmente equivalente a D_0 . b) Reciprocamente, todo divisor efetivo linearmente equivalente a D_0 é da forma $(s)_0$ para alguma secção s . c) Duas secções s, s' determinam o mesmo divisor de

zeros se, e somente se, existe $\lambda \in k^*$ tal que $s' = \lambda s$.

Definição 2.6. Um *sistema linear completo* sobre uma variedade projetiva não-singular é o conjunto (talvez vazio) de todos os divisores efetivos linearmente equivalentes a algum divisor D_0 . Denotamos por $|D_0|$. Um *sistema linear* \mathfrak{d} em X é um subconjunto de um linear completo $|D_0|$ que é um subespaço linear para a estrutura de espaço projetivo de $|D_0|$. Assim, \mathfrak{d} corresponde a um subespaço vetorial $V \subset \Gamma(X, \mathcal{L})$, onde $V = \{s \in \Gamma(X, \mathcal{L}) \mid (s)_0 \in \mathfrak{d}\} \cup \{0\}$. Temos $\dim \mathfrak{d} = \dim V - 1$.

Definição 2.7. Um ponto $P \in X$ é um *ponto de base* de um sistema linear \mathfrak{d} se $P \in \text{Supp}(D)$ para todo $D \in \mathfrak{d}$.

Trataremos agora de séries lineares. Considere uma variedade algébrica X sobre um corpo algebricamente fechado k .

Definição 2.8. Uma *série linear* (\mathcal{L}, V, α) sobre uma variedade X consiste de um fibrado em retas \mathcal{L} sobre X , um k -espaço vetorial de dimensão finita V e um homomorfismo não-nulo $\alpha : V \rightarrow H^0 \mathcal{L}$. Convencionamos que a dimensão projetiva da série linear é $(\dim V - 1)$. A série linear é dita ser *não degenerada* se α for injetiva. Neste caso, podemos pensar V como um subespaço de $H^0 \mathcal{L}$. A *série linear completa* definido pelo fibrado em retas \mathcal{L} é simplesmente $(\mathcal{L}, H^0 \mathcal{L}, \text{Id})$. Denotamos por $|\mathcal{L}|$.

Geometricamente, podemos ver uma série linear como uma família de divisores sobre X parametrizada pelos elementos não-nulos de V . Simplesmente a cada $v \in V$ faça corresponder ao divisor dado pelo lugar de zeros da secção $\alpha(v) \in H^0 \mathcal{L}$. Como o divisor não muda se trocamos v por rv , $0 \neq r \in k$, a família é de fato parametrizada pelo espaço projetivo $\mathbb{P}(V)$.

Definição 2.9. Um ponto $p \in X$ é dito ser um *ponto de base* da série linear $L = (\mathcal{L}, V, \alpha)$ se p pertence $\tilde{\mathbb{A}}$ intersecção de todos os zero loci de todas as secções em $\alpha(V)$, ou seja, se p pertence $\tilde{\mathbb{A}}$ todos os divisores da série. A série L é dita ser *livre de pontos de base* se não possui pontos de base.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.1 (Série hiperplana). Este é o exemplo mais simples. Considere um mergulho projetivo $X \subset \mathbb{P}(V)$ e a família de secções hiperplanas de X . Precisamente, a série linear é $(\mathcal{O}_X(1), V, \alpha)$, onde $\mathcal{O}_X(1)$ é o fibrado $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ restrito $\tilde{\mathbb{A}}$ X e $\alpha : V = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_X(1))$ é o mapa de restrição. Dado qualquer ponto, existe um hiperplano que não passa por este ponto, logo esta série linear é livre de pontos de base. *Subexemplo:* Se $X \subset \mathbb{P}^r$ é uma curva racional normal de grau r , a sua série hiperplana é precisamente a série linear completa $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(r)|$.

Exemplo 2.2 (Série linear das cônicas por p). Dado $p \in \mathbb{P}^2$ podemos construir uma série linear como segue. Tome $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$. Assim, as secções globais de \mathcal{L} são formas quadráticas em 3 variáveis. Suponha sem perda de generalidade que $p = (0 : 0 : 1)$ e

tomemos V para ser o espaço das formas que se anulam em p e α a inclusão. Geometricamente, a série (\mathcal{L}, V, α) corresponde a cônicas em \mathbb{P}^2 passando por p . Note que p é um ponto de base para esta série linear.

Considere uma série linear $L = (\mathcal{L}, V, \alpha)$. Se denotarmos por U o conjunto aberto dos pontos de X que não são pontos de base L , podemos definir um morfismo $\Phi_L : U \rightarrow \mathbb{P}(V)$. A cada ponto $p \in U$, associe o hiperplano em V das secções $v \in V$ tais que $\alpha(v)(p) = 0$. Se L é livre de pontos de base, temos um morfismo $\Phi_L : X \rightarrow \mathbb{P}(V)$. O resultado que estamos interessado é o seguinte:

Proposição 2.3. Seja $L = (\mathcal{L}, V, \alpha)$ uma série linear livre de pontos de base sobre uma variedade X . Então L é não-degenerada se, e somente se, $\Phi_L(X) \subset \mathbb{P}(V)$ é subvariedade não-degenerada (i.e., não está contida em nenhum hiperplano).

Demonstração. Basta observar que os elementos de $\text{Ker}(\alpha)$ são precisamente as formas lineares em $\mathbb{P}(V)$ se anulam em $\Phi_L(X)$. \square

2.5 Teoremas de Bertini e Kleiman

Por fim, encerraremos esta secção com o enunciado de teoremas muito importantes que utilizaremos neste trabalho: o teorema de Bertini e o teorema do translado genérico de Kleiman. Sejam G um grupo algébrico conexo e X uma variedade irredutível com uma G -ação transitiva. Sejam ainda $f : X \rightarrow Y$ e $Z \rightarrow X$ morfismos de variedades irredutíveis. Para cada $\sigma \in G$ denote por Y^σ a variedade Y considerada como variedade sobre X através da composição $\sigma \circ f$.

Teorema 2.1 (Kleiman, 1974). Existe um subconjunto aberto denso $U \subset G$ tal que para cada $\sigma \in U$ o produto fibrado $Y^\sigma \times_X Z$ é vazio ou

$$\dim(Y^\sigma \times_X Z) = \dim(Y) + \dim(Z) - \dim(X)$$

Além disso, se Y e Z forem lisos, o produto fibrado $Y^\sigma \times_X Z$ também é liso.

Demonstração. Uma demonstração rápida utilizando suavidade genérica pode ser encontrada em (HARTSHORNE, 1977, Teorema III.10.8, pág 273). \square

Teorema 2.2 (Bertini Clássico). Seja X uma subvariedade fechado não singular de \mathbb{P}^n sobre um corpo algebricamente fechado. Então o conjunto dos hiperplanos $H \subset \mathbb{P}^n$ tais que H não está contido em X e $X \cap H$ é não-singular formam um aberto denso do sistema linear completo $|H|$ considerado como espaço projetivo. Em outras palavras, a condição de a intersecção $X \cap H$ ser não-singular é uma condição genérica.

Esse resultado pode ser generalizado para sistemas lineares mais gerais.

Teorema 2.3 (Bertini). Seja X uma variedade projetiva não-singular sobre um corpo algebricamente fechado de característica 0. Seja \mathfrak{d} um sistema linear sem pontos de base. Então, quase todo elemento de \mathfrak{d} , considerado como um subesquema de X é não-singular.

A prova do primeiro teorema de Bertini pode ser encontrada em (HARTSHORNE, 1977, Teorema II.8.18, pág 179). O segundo é corolário do Teorema de Kleiman.

3 CLASSES DE CHERN

Algumas das principais ferramentas que utilizaremos ao longo do trabalho vem da Teoria da Intersecção. Nesse capítulo, desenvolveremos brevemente essas ferramentas.

3.1 Ciclos e Equivalência Racional

Definição 3.1. Seja X um esquema. O grupo de ciclos de dimensão k ou k -ciclos em X é o grupo abeliano livre gerado pelas subvariedades irredutíveis fechadas de dimensão k de X , e será denotado por $C_k X$. O grupo de ciclos de X é o grupo graduado

$$C_* X = \bigoplus C_k X$$

Observe que $C_k X = 0$ se $k > \dim X$. Além disso, como as subvariedades do esquema reduzido X_{red} são as mesmas subvariedades de X , então $C_k X_{\text{red}} = C_k X$. Se escrevemos um ciclo

$$c = \sum_V n_V V$$

o suporte de c é definido por

$$|c| = \bigcup_{n_V \neq 0} V$$

Definição 3.2. Seja X um esquema e X_1, \dots, X_r suas componentes irredutíveis (reduzidas). A multiplicidade genérica de X em X_i é

$$m_i = l(\mathcal{O}_{X, X_i})$$

a longura do anel local de X no ponto genérico de X_i . O ciclo fundamental de X é definido por:

$$[X] = \sum_{i=1}^r m_i X_i$$

O grupo de ciclos, porém, não é o mais adequado para o estudo das propriedades enumerativas. Devemos passar a um quociente por um certo subgrupo e neste quociente identificaremos ciclos em X que provêm de fibras de morfismos $X \rightarrow \mathbb{P}^1$.

Definição 3.3. Seja V uma subvariedade e $f \in K(V)$ uma função racional não-nula. Seja $W \subset V$ uma subvariedade de codimensão 1. Escreva $f = a/b$ onde $a, b \in A = \mathcal{O}_{V,W}$. Definimos a *ordem* de f ao longo de W por

$$\text{ord}_W^V(f) = \text{ord}_W(f) = l(A/(a)) - l(A/(b))$$

Como A é anel de dimensão 1 e a, b são não-divisores de zero, temos uma sequência exata de módulos:

$$0 \rightarrow A/(b) \cong (a)/(ab) \rightarrow A/(ab) \rightarrow A/(a) \rightarrow 0$$

Sendo a longura aditiva, segue que

$$l(A/(ab)) = l(A/(a)) + l(A/(b))$$

Logo, a definição não depende da escolha da representação $f = a/b$. De fato, se $f = a/b = c/d$, então $ad = cd$ em A e portanto

$$l(A/(a)) + l(A/(d)) = l(A/(b)) + l(A/(c))$$

Daí

$$l(A/(a)) - l(A/(b)) = l(A/(c)) - l(A/(d))$$

Verifica-se também facilmente que

$$\text{ord}_W(fg) = \text{ord}_W(f) + \text{ord}_W(g), \quad \forall f, g \in K(V)$$

Ademais, observe que $\text{ord}_W(f) = 0$ para quase todo W (i.e., a menos de um número finito). Com efeito, seja $U \subset V$ um aberto afim e escreva $f = a/b$ com a, b regulares em U . Basta observar então que

$$\{W \mid W \cap U \neq \emptyset \text{ e } \text{ord}_W(f) \neq 0\}$$

está contido em

$$\{W \mid W \cap U \text{ é esquema de zeros de } ab\}$$

que é conjunto finito. Agora basta tomar uma cobertura finita de X por abertos U . Com isso em mente, a seguinte definição faz sentido:

Definição 3.4. Seja $f \in K(V)$ uma função racional. O *ciclo associado* $\tilde{A} f$ é definido por

$$[f] = \sum_W \text{ord}_W(f)W$$

onde a soma é sob todas as subvariedades $W \subset V$ de codimensão 1. O *grupo de k -ciclos racionalmente equivalentes a zero* é o subgrupo R_k de C_k gerado pelos ciclos associados a funções racionais de subvariedades de X de dimensão $k + 1$. O *grupo de Chow* é o quociente graduado:

$$A_*X = \bigoplus A_kX = \bigoplus C_k/R_k$$

Exemplo 3.1. Temos que $A_{n-1}\mathbb{P}^n = \mathbb{Z}$ e o gerador é a classe hiperplana h . Mais geralmente, $A_i\mathbb{P}^n = \mathbb{Z}$ para todo $0 \leq i \leq n$. Já no caso afim, $A_{n-1}\mathbb{A}^n = 0$, isto é, todos os hiperplanos são racionalmente equivalentes.

Exemplo 3.2. Considere agora uma curva não-singular C . Cada função racional não-constante $f \in K(C)$ induz um morfismo $\tilde{f} : C \rightarrow \mathbb{P}^1$. As fibras não-vazias de \tilde{f} são 0-ciclos racionalmente equivalentes entre si. De fato se P não é nem zero nem polo de f , então $\text{ord}_P(f) = 0$, logo podemos escrever

$$[f] = \sum_{P \in C} \text{ord}_P(f) = \sum_{P \in C | P \text{ é zero de } f} \text{ord}_P(f) - \sum_{P \in C | P \text{ é polo de } f} \text{ord}_P(f)$$

Da definição de \tilde{f} notamos que:

$$[f] = [\tilde{f}^{-1}(0)] - [\tilde{f}^{-1}(\infty)]$$

3.2 Imagem direta e inversa

Se considerarmos um subsquema X de um esquema Y , temos uma inclusão natural $C_*X \subset C_*Y$. Melhor ainda, esta inclusão preserva equivalência racional, e assim podemos passar ao quociente. Podemos generalizar isso para mapas $f : X \rightarrow Y$, mas teremos que exigir que seja próprio, caso desejemos preservar a equivalência racional e passar ao quociente.

Definição 3.5. Seja $f : V \rightarrow W$ um morfismo dominante de variedades irredutíveis. Definimos o *grau* de f como o inteiro:

$$\text{deg}(f) = \begin{cases} 0 & \text{se } \dim V > \dim W \\ [K(V) : K(W)] & \text{se } \dim V = \dim W \end{cases}$$

No caso em que $\dim V = \dim W$, $K(V)$ e $K(W)$ são extensões finitamente geradas como mesmo grau de transcendência sobre o corpo de base, e portanto $\text{deg } f$ é finito. A interpretação geométrica é a seguinte: existe um aberto denso $U \subset W$ tal que a fibra $f^{-1}(Q)$ consiste de $\text{deg } f/i$ pontos, onde i é o grau de inseparabilidade, para todo $Q \in U$. Considere agora um morfismo próprio $p : X \rightarrow Y$. Em particular, para cada fechado $V \subset X$, $f(V)$ é fechado em Y . Seja $V \subset X$ uma subvariedade fechada irredutível

e $W = f(V) \subset Y$. Definimos

$$p_*(V) = (\deg f)W \text{ em } C_*Y$$

e estendemos linearmente, obtendo assim um morfismo

$$p_* : C_*X \rightarrow C_*Y$$

que chamamos de *imagem direta*. Observe que p_* preserva as graduações, i.e., $p_*(C_k X) \subset C_k Y$. Mais importante ainda, a associação $p \mapsto p_*$ é funtorial. Ou seja, se $q : Y \rightarrow X$ é outro morfismo próprio, vale que $(q \circ p)_* = q_* \circ p_*$. Isso segue do fato que o grau numa torre de corpos é multiplicativo. O ponto essencial é que a imagem direta se comporta bem com respeito a equivalência racional.

Proposição 3.1. Seja $p : V \rightarrow W$ um morfismo próprio e sobrejetivo, com $\dim V = \dim W$. Então p_* preserva equivalência racional. Mais precisamente, temos que se $r \in K(V)$ então

$$p_*([r]) = [N(r)] \text{ em } C_*W$$

onde $N(r)$ denota a norma de r , isto é, o determinante do operador $K(W)$ -linear

$$\begin{aligned} K(V) &\longrightarrow K(V) \\ f &\longmapsto rf \end{aligned}$$

Demonstração. Vide (VAINSENCER, 1985, Proposição 3.5). □

No caso em que $\dim V > \dim W$ a situação é ainda mais simples:

Proposição 3.2. Seja $p : V \rightarrow W$ um morfismo próprio e sobrejetivo de variedades e suponha $\dim V > \dim W$. Então para cada $r \in K(V)$, vale que $p_*([r]) = 0$.

Demonstração. Confira (VAINSENCER, 1985, Proposição 3.7) □

Assim, se temos um morfismo próprio $p : X \rightarrow Y$, o homomorfismo imagem direta induz um homomorfismo nos quocientes

$$p_* : A_k(X) \rightarrow A_k(Y)$$

Exemplo 3.3. Esse é um exemplo interessante. Considere C uma curva projetiva e $p : C \rightarrow \text{Spec}(k)$ o morfismo estrutural e r uma função racional em C . Assim, a proposição acima garante que

$$\sum_{P \in C} \text{ord}_P(r)[K(P) : k] = 0$$

Ou seja, r possui a mesma quantidade de zeros e polos, se contados da maneira correta.

Um caso de particular interesse é quando tomamos $Y = \text{Spec}(k)$. Assim, podemos identificar $A_*Y = \mathbb{Z}$

Definição 3.6. Seja $p : X \rightarrow \text{Spec}(k)$ o morfismo estrutural de uma variedade projetiva (i.e., completa) X . O homomorfismo imagem direta $p_* : A_*(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ é chamado *grau* e denotamos por \int_X .

Em termos explícitos, se $z \in A_*(X)$ é um ciclo temos

$$\int_X z = \sum_{i=1}^r m_i [K(P_i) : k]$$

onde $\sum_{i=1}^r m_i P_i$ é a componente homogênea de dimensão zero de z , Ou seja

$$z = \sum_{i=1}^r m_i P_i + z'$$

onde

$$z' \in \bigoplus_{j \geq 1} A_j(X)$$

Trabalharemos agora na definição de imagem inversa.

Definição 3.7. Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo e $V \subset Y$ uma subvariedade. Definimos o *ciclo imagem inversa* de V por

$$f^*(V) = [f^{-1}(V)] \in C_*X$$

Estendendo por linearidade, obtemos um homomorfismo

$$f^* : C_*Y \rightarrow C_*X$$

Apesar de a definição ser para um morfismo f bem geral, estamos interessado em morfismos planos (cf. HARTSHORNE, 1977, seção III.9 para referência). Isso porque os morfismos planos se comportam bem com respeito a imagem inversa.

Proposição 3.3. Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo plano de dimensão relativa n . Então, para cada subesquema fechado $Z \subset Y$ de dimensão pura k , temos que

$$f^*[Z] = [f^{-1}(Z)] \text{ em } C_{k+n}X$$

Demonstração. Vide (VAINSENER, 1985, Proposição 4.4). □

Como consequência, obtemos a functorialidade da imagem inversa.

Corolário 3.1. Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ morfismos planos de dimensão relativa m

e n respectivamente. Então

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* : C_k Z \rightarrow C_{k+m+n} X$$

Demonstração. Seja V uma subvariedade de Z . Então temos □

A imagem inversa também é compatível com imagem direta, sob as hipóteses adequadas:

Proposição 3.4. Considere o diagrama cartesiano:

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ \downarrow g' & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

onde f é morfismo plano de dimensão relativa n e g é morfismo próprio. Então f' (resp. g') é plano (resp. próprio) e vale:

$$g'_* \circ f'^* = f^* \circ g_* : C_k Y' \rightarrow C_{k+n} X$$

Demonstração. Vide (VAINSENER, 1985, Proposição 4.6). □

Por fim, também prova-se que no caso em que $f : X \rightarrow Y$ é plano, a imagem inversa é compatível com equivalência racional (VAINSENER, 1985, Proposição 4.7), logo temos morfismos induzidos

$$f^* : A_k(Y) \rightarrow A_{k+n} X$$

3.3 As classes de Chern e Segre

Definição 3.8. Seja $\mathcal{L} \rightarrow X$ um fibrado em retas e $V \subset X$ uma subvariedade. Tome um divisor de Cartier C em V de tal modo que $\mathcal{L}|_V$ seja isomorfo a $\mathcal{L}(C)$. Seja

$$c_1(\mathcal{L}) \cap V = [C] \text{ em } A_* V$$

Considerando $A_* V \subset A_* X$ e estendendo por linearidade, temos então bem definido o operador $1\hat{A}^a$ classe de Chern:

$$c_1(\mathcal{L}) : C_* X \rightarrow A_* X$$

Observe que se \mathcal{L} e \mathcal{L}' são fibrados em reta isomorfos, então $c_1(\mathcal{L}) = c_1(\mathcal{L}')$, pois os divisores de Cartier associados C e C' serão racionalmente equivalentes, logo $[C] = [C']$ em $A_*(V)$.

Definição 3.9. Seja D um divisor de Cartier em X e $V \subset X$ uma subvariedade de dimensão k . A *classe de intersecção* de V com D é definida pela fórmula

$$D \bullet V = c_1(\mathcal{L}(D)) \cap V \text{ em } A_{k-1}(V \cap |D|)$$

Estendemos por linearidade

$$D \bullet z = \sum n_i D \bullet V_i \text{ em } A_{k-1}(|D| \cap |z|)$$

se

$$z = \sum n_i V_i$$

e obtemos o *homomorfismo de intersecção com D*

$$D \bullet : C_k X \rightarrow A_{k-1} X$$

Geometricamente, o que estamos fazendo é considerar D em posição geral com respeito a V . Por exemplo, se $H \subset \mathbb{P}^n$ é um hiperplano e V é uma subvariedade de dimensão k então

$$H \bullet V = [H' \cap V] \text{ em } A_{k-1}(V \cap H)$$

onde H' é um hiperplano que não contém V . As principais propriedades da classe de Chern estão sumarizadas na proposição abaixo:

Proposição 3.5 (Propriedades da 1ª classe de Chern). Valem as propriedades: a) (Normalização) Sejam X um esquema de dimensão pura n e D um divisor de Cartier em X . Temos então

$$c_1(\mathcal{L}(D)) \cap [X] = [D] \text{ em } A_{n-1} X$$

b) (Aditividade) Sejam \mathcal{L} e \mathcal{M} dois fibrados em retas sobre X . Então

$$c_1(\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}) = c_1(\mathcal{L}) + c_1(\mathcal{M})$$

e

$$c_1(\mathcal{L}^{-1}) = -c_1(\mathcal{L})$$

c) (Naturalidade) Se $f : X' \rightarrow X$ é um morfismo plano e $z \in C_* X$ então vale:

$$f^*(c_1(\mathcal{L}) \cap z) = c_1(f^* \mathcal{L}) \cap f^* z \text{ em } A_* X'$$

d) (Fórmula de projeção) Se $p : X' \rightarrow X$ é um morfismo próprio e $z' \in C_* X'$ então vale:

$$p_*(c_1(p^*(\mathcal{L}) \cap z')) = c_1(\mathcal{L}) \cap p_* z' \text{ em } A_* X$$

Demonstração. Vide (VAINSENER, 1985, Proposição 7.1). \square

Um ponto essencial é a comutatividade da classe de intersecção quando V é outro divisor de Cartier.

Proposição 3.6. Seja X uma variedade e sejam D e D' dois divisores de Cartier em X . Vale:

$$D \bullet [D'] = D' \bullet [D] \text{ em } A_{n-2}(|D| \cap |D'|)$$

Demonstração. Confira (VAINSENER, 1985, Teorema 8.1). \square

Como consequência, obtemos que o operador classe de Chern passa ao quociente por equivalência racional:

Corolário 3.2. Seja X um esquema e $\mathcal{L} \rightarrow X$ um fibrado em retas. Se $z \in C_*X$ é racionalmente equivalente a zero em X , então

$$c_1(\mathcal{L}) \cap z = 0$$

Demonstração. Podemos supor sem perda de generalidade que z é o ciclo associado a alguma função racional $r \in K(V)$ de alguma subvariedade V . Tome D o divisor associado a $\mathcal{L}|_V$ e D' o divisor principal definido por r . Então

$$\begin{aligned} c_1(\mathcal{L}) \cap z &= D \bullet D' \\ &= D' \bullet D \\ &= c_1(\mathbb{A}_V^1) \cap [D] = 0 \end{aligned}$$

pois $\mathcal{L}(D') \simeq \mathbb{A}_V^1$, onde \mathbb{A}_V^1 denota o fibrado trivial sobre V . \square

Assim, o operador $1\hat{A}^a$ classe de Chern induz um operador no quociente:

$$c_1(\mathcal{L}) : A_*X \rightarrow A_*X$$

De maneira semelhante, o homomorfismo de intersecção com D também passa ao quociente, induzindo:

$$D \bullet : A_kX \rightarrow A_{k-1}X$$

Agora que temos operadores em A_*X nada mais natural que compô-los:

Corolário 3.3. Sejam \mathcal{L} e \mathcal{M} fibrados em retas sobre um esquema X . Para cada $z \in A_kX$ temos:

$$c_1(\mathcal{L}) \cap (c_1(\mathcal{M}) \cap z) = c_1(\mathcal{M}) \cap (c_1(\mathcal{L}) \cap z) \text{ em } A_{k-2}X$$

Este resultado é bom por que nos permite construir novos operadores formando polinômios nas classes de Chern de fibrados em retas $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_r$.

Exemplo 3.4. Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ um subesquema de dimensão pura k e grau d . Podemos recuperar o grau d por meio das classes de Chern. Denote $h = c_1(\mathcal{O}(1))$. Agora note que

$$[X] = dh^{n-k} \cap [\mathbb{P}^n] \text{ em } A_k \mathbb{P}^n$$

e

$$h \cap [\mathbb{P}^i] = [\mathbb{P}^{i-1}] \text{ em } A_{i-1} \mathbb{P}^n$$

Segue então que

$$d = h^k \cap [X]$$

Agora que temos a primeira classe de Chern, o próximo passo é construirmos a i -ésima classe de Chern, mas antes disso devemos construir as classes de Segre.

Definição 3.10. Seja $E \rightarrow X$ um fibrado vetorial de posto r e $p : \mathbb{P}(E) \rightarrow X$ o fibrado projetivo associado, $\mathcal{O}_E(1)$ o fibrado em retas canônico sobre $\mathbb{P}(E)$. Para cada $z \in A_k X$ defina

$$s_i(E) \cap z = p_*(c_1(\mathcal{O}_E(1))^{r-1+i} \cap p^* \cap z) \in A_{k-i} X$$

O operador

$$s_i(E) : A_k X \rightarrow A_{k-i} X$$

é chamado *i -ésima classe de Segre* de E .

Algumas propriedades deste operador estão listadas na proposição abaixo. A demonstração pode ser encontrada em (VAINSENCHE, 1985, Proposição 9.3), mas usa essencialmente as propriedades análogas da 1ª classe de Chern.

Proposição 3.7. Nas notações acima, valem: a) $s_0(E)$ é o operador identidade b) $s_i = 0$ se $i < 0$ ou $i > \dim X$ c) (Naturalidade) Se $g : X' \rightarrow X$ é um morfismo plano e $z \in A_* X$ então

$$s_i(g^* E) \cap g^* z = g^*(s_i(E) \cap z)$$

d) (Normalização) Se E é fibrado em retas, então

$$s_1(E) = -c_1(E)$$

e) (Fórmula de projeção) Se $g : X' \rightarrow X$ é morfismo próprio e $z' \in A_* X'$, então

$$g_*(s_i(E) \cap z') = s_i(E) \cap g_* z'$$

f) (Comutatividade) Se E e F são fibrados vetoriais sobre X e $z \in A_* X$, então

$$s_i(E) \cap (s_j(F) \cap z) = s_j(F) \cap (s_i(E) \cap z)$$

Definição 3.11. Seja $E \rightarrow X$ um fibrado vetorial. Definimos a *classe de Segre total* de E como a soma

$$s(E) = \sum_{i \geq 0} s_i(E)$$

Agora, observe que $s_0(E) = 1$ e $s_i(E)$ comuta com $s_j(E)$, além de serem operadores nilpotentes. Isso nos permite inverter a soma formal $s(E)$

Definição 3.12. Seja $E \rightarrow X$ um fibrado vetorial. Definimos a *classe total de Chern* de E como a inversa formal de $s(E)$:

$$c(E) = s(E)^{-1}$$

Podemos decompor $c(E)$ com o soma de suas partes homogêneas:

$$c(E) = \sum_{i \geq 0} c_i(E)$$

onde

$$c_i(E) \cap A_k X \subset A_{k-i} X$$

Dizemos que $c_i(E)$ é a *i -ésima classe de Chern* de E .

Como era de se esperar, as classes de Chern gozam de propriedades análogas às das classes de Segre, listadas na proposição acima. Evidentemente, também vale:

$$\sum_j s_{i-j}(E) c_j(E) = 0 \text{ para } i \geq 1$$

Mas em adição, elas também satisfazem as seguintes propriedades:

Proposição 3.8. Nas notações acima, valem: a) Se $E \rightarrow X$ é um fibrado de posto r , então $c_i = 0$ se $i > r$ b) (Aditividade) Se temos uma sequência exata de fibrados vetoriais:

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$$

então vale:

$$c(E) = c(E') \cdot C(E'')$$

Em particular, vale a *fórmula de Witney*:

$$c_k(E) = \sum_{i+j=k} c_i(E') c_j(E'')$$

Demonstração. A demonstração se utiliza do princípio da cisão e consiste em reduzir ao caso de posto 1. Os detalhes podem ser encontrados em (VAINSENER, 1985, Proposições 9.5 e 9.6). \square

3.4 Anel de Chow

Nesta secção queremos construir os anéis de intersecção. Precisamente, queremos munir o grupo de Chow A_*X com um produto de modo a torná-lo um anel.

Definição 3.13. Seja $f : X \rightarrow Y$ um mergulho regular de codimensão d . Definimos os *homomorfismos de Gysin*

$$f^* : A_k Y \rightarrow A_{k-d} X$$

por

$$f^* \left(\sum n_V [V] \right) = \sum n_V (X \bullet V)$$

Como esboçado em (FULTON, 1983, Secção 5.1), essa fórmula respeita equivalência racional, logo passa ao quociente. Existem também um refinamento desse conceito

Definição 3.14. Sejam $f : X \rightarrow Y$ um mergulho regular de codimensão d e $g : Y' \rightarrow Y$ um morfismo arbitrário. Considere o produto fibrado:

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Definimos os *homomorfismos de Gysin refinados*

$$f_k^! Y' \rightarrow A_{k-d} X'$$

pela mesma fórmula:

$$f_k^! [V] = X \bullet V \text{ em } A_{k-d}(V \cap X')$$

Nossa intenção é construir um produto no grupo de Chow. Note que o mergulho diagonal $\delta : X \rightarrow X \times X$ é um mergulho regular de codimensão n , se X é variedade não-singular de dimensão n .

Definição 3.15. Seja X uma variedade não-singular de dimensão n . Dados $\alpha \in A_r X$ e $\beta \in A_s X$, definimos o produto $\alpha \bullet \beta \in A_m X$, onde $m = r + s - n$ por:

$$\alpha \bullet \beta = \delta^*(\alpha \times \beta)$$

Se denotarmos $A^p X = A_{n-p} X$, então o produto torna-se um homomorfismo

$$A^p X \otimes A^q X \longrightarrow A^{p+q} X$$

Denote $1 \in A^0 X$ como sendo $[X] \in A_n X$. Se $f : Y \rightarrow X$ é um morfismo de variedades

não-singulares, então o gráfico $\gamma_f : Y \rightarrow Y \times X$ é um mergulho regular de codimensão $n = \dim X$. Defina $f^* : A^p X \rightarrow A^p Y$ por

$$f^* \alpha = \gamma_f^*(\alpha \times [X])$$

Com esse produto, temos uma estrutura de anel em $A^* X$

Teorema 3.1. Em uma variedade não-singular X o produto definido acima torna $A^* X$ um anel comutativo com unidade 1. Se $f : Y \rightarrow X$ é um morfismo de variedades não-singulares, o homomorfismo $f^* A^* X \rightarrow A^* Y$ é um homomorfismo de anéis. Vale ainda uma a functorialidade: se $g : Z \rightarrow Y$ é outro morfismo de variedades não-singulares, então $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Demonstração. Uma prova é esboçada em (FULTON, 1983, Secção 5.2). Já (VAINSENCHE, 1985, Teorema 13.14) demonstra o resultado, com as hipóteses adicionais que X é completa e a diagonal $\Delta = \delta(X)$ é o esquema de zeros de uma secção regular s de um fibrado $E \rightarrow X \times X$. \square

Por fim, a seguinte relação será útil em momentos futuros, por isso a deixaremos registrada aqui:

Proposição 3.9 (Decomposição de Kunneth). No produto $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^r$ a classe da diagonal Δ pode ser expressa:

$$[\Delta] = \sum_{j=0}^r (\pi_1^*(h^j) \cup \pi_2^*(h^{r-j})) = \sum_{j=0}^r (h^j \times j^{r-j})$$

Demonstração. Vide (KOCK and VAINSENCHE, 1999, Proposição 4.3.1). \square

4 CURVAS DE MUMFORD-KNUDSEN

Neste capítulo vamos falar brevemente sobre o espaço moduli de curvas estáveis $\overline{M}_{g,n}$. Tal espaço é importante primeiro porque é um caso particular do espaço de mapas estáveis $\overline{M}_{g,n}(X, \beta)$ e segundo por que aquele é usado na construção deste. Definiremos curvas marcadas estáveis e veremos que existe um espaço moduli que parametriza essas curvas, módulo isomorfismos. Estudaremos os morfismos de esquecimento de marcas entre esses espaços e veremos que eles são precisamente a família universal. Por fim, estudaremos as propriedades da fronteira e obteremos relações úteis. Mas antes de tudo, devemos nos familiarizar um pouco com esse abstrato conceito de espaço moduli.

4.1 Espaços Moduli

Uma primeira ideia do que sejam os espaços moduli é que eles são generalizações de espaços de parâmetros. Um espaço de parâmetros é simplesmente um espaço (conjunto) que em certo sentido 'parametriza' objetos de acordo com algum critério, como por exemplo, subvariedades de uma variedade satisfazendo alguma propriedade específica. Um exemplo trivial, se considerarmos o conjunto de todas as retas que passam pela origem em \mathbb{R}^3 obteremos, por definição, o espaço projetivo $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Um exemplo mais interessante, podemos estar interessados em estudar as hipersuperfícies $H \subset \mathbb{P}^n$ e, neste caso, talvez queiramos considerar um espaço de parâmetros para a coleção dessas hipersuperfícies. Ou podemos querer nos restringir a hipersuperfícies com alguma propriedade específica, por exemplo, as hipersuperfícies com mesmo grau d . Não é difícil nos convencer que podemos parametrizar o conjunto de todas essas tais hipersuperfícies por um espaço projetivo \mathbb{P}^N , onde $N = \binom{n+d}{d} - 1$. Basta ver que as hipersuperfícies de \mathbb{P}^n de grau d são determinadas, a menos de multiplicação por constante não-nula, por um polinômio homogêneo de grau d . Podemos determinar este polinômio pelos seus coeficientes e uma combinatória simples nos diz que são ao todo $\binom{n+d}{d}$ coeficientes. Em outras palavras, a ideia por trás dos espaços de parâmetros (e espaços moduli) é que queremos identificar os objetos que estamos estudando com pontos fechados de uma variedade algébrica (ou esquema, ou stack ou orbifold). Mais ainda, queremos que essa identificação seja boa de tal maneira que as propriedades que dos objetos que estamos interessado possam ser reinterpretadas como propriedades de alguma subvariedade do espaço de parâmetros. No exemplo acima, identificamos as hipersuperfícies de \mathbb{P}^n com pontos de \mathbb{P}^N . Podemos estar interessados em estudar aquelas hipersuperfícies que passam por um ponto pre-determinado ou contém uma reta específica. Os conjuntos de tais hipersuperfícies são fechados em \mathbb{P}^N . O primeiro é um hiperplano e o segundo é um subespaço linear de codimensão $d + 1$. Um espaço de moduli é um espaço de parâmetros, mas exigimos algumas coisas a mais. De maneira um pouco vaga, podemos dizer que espaços de moduli são respostas para problemas de

classificação. No segundo exemplo acima, queríamos classificar as hipersuperfícies de \mathbb{P}^n pelo seu grau d . O ingrediente básico de problema de classificação é em uma coleção de objetos algébricas \mathcal{C} (e.g., hipersuperfícies de \mathbb{P}^n) munidos de uma relação de equivalência \sim ou algum invariante (e.g., o grau). Conforme dito em (ESTEVEZ, 1997), um *problema de modulli* associado ao problema de classificação (\mathcal{C}, \sim) consiste nos seguintes dados: 1) uma noção de família algébrica de objetos de \mathcal{C} : para cada variedade (ou esquema) S , temos um conjunto $\mathcal{F}(S)$ cujos elementos serão chamados de 'famílias' sobre S . 2) uma noção de indução: para cada morfismo $f : T \rightarrow S$ temos uma função $f^* : \mathcal{F}(S) \rightarrow \mathcal{F}(T)$ 3) deve haver compatibilidade com a composição: $Id_S^* = Id_{\mathcal{F}(S)}$ e $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$. 4) exigimos ainda $\mathcal{F}(\{\text{ponto}\}) = \mathcal{C}$ A maneira correta de formalizar isso é utilizando o conceito de funtor de pontos. Seja X um esquema. O *funtor de pontos* de X é o funtor:

$$h_X : \mathbf{sch}^0 \rightarrow \mathbf{set}$$

onde \mathbf{sch}^0 é a categoria dos esquemas com flechas invertidas e \mathbf{set} é a categoria dos conjuntos, que associa a cada esquema Y o conjunto

$$h_X(Y) = \text{Mor}(Y, X)$$

e cada morfismo $f : Y \rightarrow Z$ ao mapa

$$h_X(Z) \rightarrow h_X(Y)$$

que leva $g \in h_X(Z)$ na composição $g \circ f \in h_X(Y)$. Dizemos que um funtor $F : \mathbf{sch}^0 \rightarrow \mathbf{set}$ é *representável* se existe um esquema X tal que $F = h_X$. Neste caso, dizemos que X *representa* F . Segue do lema de Yoneda que tal X é único, se existir (cf EISENBUD and HARRIS, 2000, Lema VI-1). Dado um problema de modulli (\mathcal{C}, \sim) podemos construir um funtor $F : \mathbf{sch}^0 \rightarrow \mathbf{set}$ associando, para cada esquema S , o conjunto $F(S) = \{\text{famílias sobre } S\} = \mathcal{F}(S)$. Se acontecer deste funtor ser representável, digamos por um esquema M , então tivemos a sorte de encontrar um espaço *modulli refinado* para o nosso problema de classificação e, a partir de agora, podemos atacar nosso problema estudando o esquema M . Isso significa, em particular, que para cada esquema S , existe uma bijeção de conjuntos

$$\mathcal{F}(S) \simeq \text{Hom}(S, M)$$

Ou seja, cada família parametrizada por S corresponde a um único morfismo $S \rightarrow M$. Existir um espaço modulli refinado M é equivalente a existir uma *família universal* $\mathcal{U} \rightarrow M$ tal que toda outra família $X \rightarrow S$ é induzida por um único mapa $S \rightarrow M$. A família universal \mathcal{U} é o elemento de $F(M)$ que corresponde a identidade $Id_M \in \text{Mor}(M, M)$. A existência de um espaço modulli refinado para um problema de classificação é algo

um tanto forte e muitas vezes não se pode obter tal refinado espaço de parâmetros. A existência de automorfismos não-triviais, por exemplo, em geral constitui um empecilho para a existência de moduli refinados. Por isso existe a noção de *espaço moduli grosseiro*. Como o nome sugere, eles também são espaços de parâmetros que resolvem problemas de classificação, mas suas propriedades geométricas não são tão boas quanto as dos espaços moduli refinados, mas boas o suficientes para se trabalhar. A principal diferença é que não existe uma família universal. Em termos precisos, um espaço moduli grosseiro para o problema moduli (\mathcal{C}, \sim) é um esquema M munido de uma transformação natural de funtores

$$\Psi_M : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}om(-, M)$$

tal que: 1) $\Psi_M(\{\text{ponto}\})$ é bijetivo 2) Para cada esquema N e qualquer transformação natural de funtores

$$\Psi_N : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}om(-, N)$$

existe única transformação de funtores $\chi : \mathcal{H}om(-, M) \rightarrow \mathcal{H}om(-, N)$ que comuta o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\Psi_M} & \mathcal{H}om(-, M) \\ & \searrow \Psi_N & \downarrow \chi \\ & & \mathcal{H}om(-, N) \end{array}$$

4.2 Curvas n-marcadas estáveis

Definição 4.1. Uma *curva racional lisa n-marcada* (C, p_1, \dots, p_n) é simplesmente uma curva projetiva lisa racional C (em outras palavras, um \mathbb{P}^1) munida de n pontos distintos $p_1, \dots, p_n \in C$ que são chamadas de *marcas*. Um isomorfismo de curvas n -marcadas é simplesmente um isomorfismo que preserva (fixa) as marcas.

Prova-se que existe um espaço moduli refinado $M_{0,n}$ que parametriza tais curvas. O zero no sub-índice denota o gênero $g = 0$ indicando que podemos generalizar tal construção para gênero arbitrário. Note que esse espaço já é uma generalização dos espaços M_g que parametrizam famílias de curvas projetivas de gênero g . Lembre que dados três pontos distintos $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}^1$ existe uma única transformação projetiva que leva estes pontos em $0, 1, \infty \in \mathbb{P}^1$, logo $M_{0,3}$ é apenas um ponto.

Exemplo 4.1. Para $n = 4$, note que, como antes, podemos fixar $p_0 = 0, p_1 = 1, p_3 = \infty$. Ou seja, uma curva com quatro marcas (C, p_1, p_2, p_3, p_4) é isomorfa a $(\mathbb{P}^1, 0, 1, \infty, q)$, onde $q \in \mathbb{P}^1$ é diferente de $0, 1, \infty$. Logo somos levados a crer que $M_{0,4} = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. E de fato, $U_{0,4} = \mathbb{P}^1 \times M_{0,4} \rightarrow M_{0,4}$ é a família universal. As secções são: a secção diagonal Δ e as secções constantes $S_0 = 0 \times M_{0,4}, S_1 = 1 \times M_{0,4}, S_\infty = \infty \times M_{0,4}$. A fibra sobre cada ponto $q \in M_{0,4}$ é uma reta projetiva U_q onde as marcas são intersecções com as quatro

secções supracitadas. Em geral,

$$M_{0,n} = M_{0,4} \times \dots \times M_{0,4} \setminus \cup \text{ diagonais}$$

O que queremos é compactificar esse espaço $M_{0,n}$, mas devemos fazer isso de maneira inteligente. Uma primeira ideia, ingênua, seria permitir que as marcas possam coincidir. Assim, a pretendida compactificação seria $(\mathbb{P}^1)^{n-3}$. Porém, fazendo isso nós perdemos informações geométricas. Vejamos o seguinte exemplo, retirado de (KOCK and VAINSENER, 1999).

Exemplo 4.2. Considere as duas famílias de quádruplas

$$C_t = (0, 1, \infty, t) \quad D_t = (0, t^{-1}, \infty, 1)$$

Para $t \neq 0, 1, \infty$ temos duas famílias de curvas racionais 4-marcadas lisas. Note que elas possuem a mesma razão cruzada t , logo são isomorfas, ou seja, são consideradas um mesmo ponto em $M_{0,4}$. Porém, quando $t \rightarrow 0$, por exemplo, as duas famílias passam a ter marcas coincidentes e, pior ainda, as duas configurações não são mais projetivamente equivalentes.

O que precisamos é uma maneira de "estabilizar" as famílias de modo que situações como descritas acima não ocorram e incluir curvas "na fronteira" de $M_{0,4}$. A maneira encontrada por Knudsen e Mumford foi incluir configurações com mais de uma componente irredutível, onde cada componente satisfaz certa condição de estabilidade. Daremos a definição para gênero arbitrário, mas sempre teremos em mente que o caso de interesse é $g = 0$.

Definição 4.2. Uma *curva n -marcada de gênero g quase estável*

$$(C, p_1, \dots, p_n)$$

é uma curva projetiva, conexa, reduzida com no máximo pontos duplos ordinários de gênero aritmético g munida de n pontos distintos e não-singulares p_1, \dots, p_n . Mais geralmente, se S é uma esquema algébrico sobre um corpo algebricamente fechado k , uma *família* de curvas n -marcadas quase estáveis de gênero g sobre S é um morfismo projetivo e plano $\pi : \mathcal{C} \rightarrow S$ munido de n secções p_1, \dots, p_n tal que cada fibra geométrica $(\mathcal{C}_s, p_1(s), \dots, p_n(s))$ é uma curva quase estável n -marcada de gênero g . A família é *estável* se, adicionalmente, satisfaz a seguinte condição: se E é uma componente racional irredutível de \mathcal{C}_s , então o número de pontos onde E intersecta a curva \mathcal{C}_s mais o número de marcas $p_i(s)$ em E é pelo menos 3.

Algumas convenções de terminologia: cada componente irredutível $E \subset \mathcal{C}_s$ é chamada de *galho*. Um *ponto especial* é uma marca $p_i(s)$ ou um nó (ponto de intersecção

com outra componente). Note que, uma vez que exigimos três ou mais pontos especiais numa componente racional, não sobram mais automorfismos, além da identidade. Assim, a condição de exigir que cada galho possua três ou mais pontos especiais é equivalente a pedir que a curva não possua automorfismos não-triviais. Podemos considerar o problema modulli de classificar estas famílias de curvas n -marcadas de gênero g módulo isomorfismo de famílias. Knudsen provou que existem stacks algébricos $\overline{M}_{g,n}$ suaves e próprios de dimensão $3g - 3 + n$ que são espaços modulli grosseiros para este problema de classificação (cf. KNUDSEN, 1983, Teorema 2.7). Mas no caso $g = 0$ as coisas se comportam muito bem.

Teorema 4.1 (Knudsen, 1983). Para cada $n \geq 3$ existe uma variedade lisa e projetiva $\overline{M}_{0,n}$ que é um espaço modulli refinado para curvas racionais n -marcadas estáveis e podemos mergulhar

$$M_{0,n} \hookrightarrow \overline{M}_{0,n}$$

como um aberto denso.

Veremos em breve quem é a família universal. Antes disso, estudemos com algum detalhe o espaço $\overline{M}_{0,4}$. Este exemplo se encontra em (KOCK and VAINSENER, 1999).

Exemplo 4.3. Uma compactificação de $M_{0,4} \subset \mathbb{P}^1$. Entretanto, apenas colocando de volta os pontos retirados causa problemas, uma vez que as secções deixam de ser disjuntas. Cada uma das três fibras especiais, digamos a fibra U_0 sobre $q = 0$ apresenta um ponto marcado duas vezes, pois Δ e S_0 encontram U_0 no mesmo ponto. A solução é explodir $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ nesses três pontos patológicos e definimos $\overline{U}_{0,4} = \text{Bl}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$. Sejam E_0, E_1, E_∞ os divisores excepcionais. Agora está tudo bem. Observe que agora, a fibra sobre $q = 0$ é $\tilde{U}_0 \cup E_0$, onde \tilde{U}_0 é o transformado estrito de U_0 e ele possui três pontos especiais, a saber: o ponto de intersecção com o divisor excepcional E_0 , e as duas marcas provenientes da intersecção com os transformados estritos \tilde{S}_1 e \tilde{S}_∞ . Em E_0 também há duas marcas: as intersecções com os transformados estritos de S_0 e Δ . Elas são distintas pois tais divisores se intersectam transversalmente em $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Em resumo, a fibra sobre $q = 0$ é uma curva estável 4-marcada com duas componentes. Situação similar ocorre com as fibras sobre $q = 1$ e $q = \infty$.

4.2.1 Morfismos

Estamos agora interessados em estudar certos morfismos entre os espaços $\overline{M}_{0,n}$: estabilização e esquecimento. Dada uma curva n -marcada (C, p_1, \dots, p_n) e $q \in C$, existe uma maneira canônica de obtermos uma curva $(n + 1)$ -marcada. Euristicamente, o processo é bem simples. De início, pomos $p_{n+1} = q$. O problema é que isso pode desestabilizar a curva. Há dois casos em que isso acontece. *Caso 1:* Quando q é um nó, i.e., um ponto de intersecção de dois galhos. Neste caso, nasce um novo galho, separando

os galhos inicialmente ligados por este nó e marcamos p_{n+1} sobre este novo galho. *Caso 2*: $q = p_i$, i.e., o ponto já era uma marca. Neste caso, brota-se um novo galho em p_i e marcamos p_i e p_{n+1} nele. Knudsen provou que esse processo, descrito apenas em linhas gerais aqui, é de fato um morfismo (cf. KNUDSEN, 1983, Proposição 2.1). A proposição abaixo enuncia de forma mais precisa.

Proposição 4.1 (Knudsen, 1983). Dada uma família de curvas n marcadas estáveis $(\mathcal{C}, p_1, \dots, p_n)$ sobre um esquema S e dada uma secção $\delta : S \rightarrow \mathcal{C}$ qualquer, existe uma família $(\mathcal{C}', p'_1, \dots, p'_{n+1})$ de curvas $(n+1)$ -marcadas estáveis sobre S e um S -morfismo $\kappa : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ tal que:

(i) a restrição $\kappa^{-1}(\mathcal{C} \setminus \delta) \rightarrow \mathcal{C} \setminus \delta$ é um isomorfismo.

(ii) $\kappa \circ p'_{n+1} = \delta$

(iii) $\kappa \circ p'_i = p_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. Tal família é única a menos de isomorfismo e é chamada de *estabilização* de $(\mathcal{C}, p_1, \dots, p_n)$. Vale ainda que tal processo comuta com produtos fibrados.

Demonstração. Como já dito, a demonstração encontra-se em (KNUDSEN, 1983, Proposição 2.1). Vale notar que a demonstração encontrada lá vale para todos os gêneros $g \geq 0$. \square

Podemos também fazer o processo inverso. Dada uma curva $(n+1)$ -marcada estável (C, p_1, \dots, p_{n+1}) , com $n \geq 3$, existe uma maneira canônica de obtermos, a partir dela, uma curva n -marcada estável. Começamos simplesmente removendo a última marca p_{n+1} . Como anteriormente, isso pode desestabilizar a curva, quando C for redutível. Também temos dois casos a considerar. *Caso 1*: Se p_{n+1} é a única marca de um galho, então esse galho é contraído. *Caso 2*: Se p_{n+1} fica num galho com somente outra marca, p_i . Neste caso, tal galho é contraído e o ponto de intersecção recebe a marca p_i . De maneira precisa:

Proposição 4.2 (Knudsen, 1983). Seja $(\mathcal{C}', p'_1, \dots, p'_{n+1})$ uma família de curvas $(n+1)$ -marcadas estáveis sobre um esquema S . Então existe uma família $(\mathcal{C}, p_1, \dots, p_n)$ de curvas n -marcadas estáveis sobre S e um S -morfismo $\kappa : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ tal que:

(i) $\kappa \circ p'_i = p_i$

(ii) para cada $s \in S$ o morfismo induzido nas fibras $\mathcal{C}'_s \rightarrow \mathcal{C}_s$ é um isomorfismo quando restrito a qualquer galho estável e contrai galhos não-estáveis.

Tal família é única a menos de isomorfismo e dizemos que \mathcal{C} é obtida de \mathcal{C}' por *esquecimento* de p'_{n+1} . Em particular temos o morfismo de esquecimento $\overline{M}_{0,n+1} \rightarrow \overline{M}_{0,n}$. Também vale que esquecimento comuta com produtos fibrados. E esquecimento e estabilização são inversas uma da outra. Em particular, $\overline{M}_{0,n+1} \rightarrow \overline{M}_{0,n}$ é a família universal.

Demonstração. Vide (KNUDSEN, 1983, Teorema 2.4 e Corolário 2.6). O resultado vale para gênero arbitrário. \square

Exemplo 4.4. Novamente, um exemplo com $n = 4$ para sentirmos, pelo menos eurística-mente, porque $\overline{U}_{0,n} = \overline{M}_{0,n+1}$, mas o procedimento é análogo para $n > 4$. Vamos nos convencer de que existe uma bijeção natural entre esses dois conjuntos: a cada ponto $q \in \overline{U}_{0,4}$ iremos associar uma curva 5-marcada $C_q \in \overline{M}_{0,5}$. é muito simples. Seja $\pi : \overline{U}_{0,4} \rightarrow \overline{M}_{0,4}$ a família universal e denote $F_q = \pi^{-1}(\pi(q))$ a fibra passando por q . Em outra palavras, $\pi(q) \in \overline{M}_{0,4}$ representa uma curva 4-marcada estável que isomorfa a fibra geométrica F_q . Note agora que o próprio ponto q especifica a quinta marca. Talvez precisemos estabilizar a curva, caso q seja um ponto especial, mas em todo caso obtemos uma curva 5-marcada $C_q \in \overline{M}_{0,5}$ (que é igual a F_q se não houve a necessidade de estabilização). Evidentemente, a associação

$$\begin{array}{ccc} \overline{U}_{0,4} & \longrightarrow & \overline{M}_{0,5} \\ q & \longmapsto & C_q \end{array}$$

é injetiva, visto que se $C_{q_1} = C_{q_2}$, então esquecendo a última marca q_i , reobtemos as curvas $\pi(q_i) \in \overline{M}_{0,4}$ que são isomorfas (como curvas 4-marcadas) e portanto representam o mesmo ponto, logo $q_1 = q_2$. Um argumento similar pode ser usado para concluirmos que a aplicação é sobrejetiva. De fato, se começamos com uma curva 5-marcada (C, p_1, \dots, p_5) , podemos esquecer p_5 , obtendo uma curva 4-marcada estável, munido de um ponto destacado (a saber, o ponto onde estava p_5). Ou seja, temos uma fibra de π mais um ponto nesta fibra, logo especificamos um ponto de $\overline{U}_{0,4}$. Em (KOCK and VAINSENER, 1999, Exemplo 1.4.2) é esboçado um argumento mostrando que de fato, $\overline{U}_{0,4}$ e $\overline{M}_{0,5}$ não somente estão em bijeção como de fato $\overline{M}_{0,5}$ é uma família tautológica.

4.2.2 A fronteira

A fronteira de $\overline{M}_{0,n}$ é formada por elementos que corresponde a curvas re- dutíveis, que são as degenerações que precisamos introduzir a fim de obtermos um espaço compacto. Estamos particularmente interessado nos *divisores de fronteira*, i.e., ciclos con- tidos na fronteira de codimensão 1. Vamos estabelecer algumas notações. Denotemos por $[n]$ o conjunto das marcas. Para cada partição $A \cup B = [n]$, onde A e B possuem pelo menos dois elementos cada, podemos associar um divisor irreduzível $D(A|B)$. Um ponto genérico deste divisor corresponde a uma curva n -marcada com dois galhos $C = C_A \cup C_B$, onde os pontos de A (resp. B) estão em C_A (resp. C_B). Knudsen mostrou que a fronteira de $\overline{M}_{0,n}$ é um divisor de cruzamentos normais (cf. KNUDSEN, 1983, Teorema 2.7). Ele também estudou (cf. KNUDSEN, 1983, Secção 3) certos morfismos 'clutching' e encon- trou um estrutura recursiva na fronteira. Cada ciclo de fronteira é naturalmente isomorfo ao produto de espaços modulli de dimensão menor. Se, por exemplo, considerarmos o divisor $D(A|B)$ e denotarmos por x o ponto de intersecção dos galhos, então teremos um elemento de $\overline{M}_{0,A \cup \{x\}}$ e um elemento de $\overline{M}_{0,B \cup \{x\}}$. Reciprocamente, cada elemento de $\overline{M}_{0,A \cup \{x\}} \times \overline{M}_{0,B \cup \{x\}}$ produz um divisor do tipo $D(A|B)$. Assim, obtemos um isomorfismo

canônico:

$$D(A|B) \cong \overline{M}_{0,A \cup \{x\}} \times \overline{M}_{0,B \cup \{x\}}$$

Em particular, concluímos que os divisores de fronteira são lisos e irredutíveis, visto que os espaços moduli o são. O mapa de esquecimento $\overline{M}_{0,n} \rightarrow \overline{M}_{0,4} = \mathbb{P}^1$ é de especial interesse. Tome um dos divisores de fronteira de $\overline{M}_{0,4}$, digamos $D(ij|kl)$. O pull-back para $\overline{M}_{0,n}$ é uma soma de divisores $D(A|B)$ sob todas as partições $A \cup B = [n]$ onde $i, j \in A$ e $k, l \in B$. Como todos os pontos de \mathbb{P}^1 são linearmente equivalentes, segue que os pull-back também o são. Assim, obtemos as *relações fundamentais*:

$$\sum_{i,j \in A|k,l \in B} D(A|B) = \sum_{i,k \in A|j,l \in B} D(A|B) = \sum_{i,l \in A|j,k \in B} D(A|B)$$

em $A^1(\overline{M}_{0,n})$. Também vale a seguinte relação de intersecção entre os divisores

$$D(A|B) = D(A'|B') = \emptyset$$

sempre que não houver relação de inclusão entre os conjuntos A, B, A', B' . Essas relações, juntamente com as relações fundamentais determinam o anel de Chow $A(\overline{M}_{0,n})$ (cf. KEEL, 1992, Teorema 1). Em seu artigo, S. Keel ainda dá uma construção alternativa para os espaços $\overline{M}_{0,n}$ além de calcular seus números de Betti.

5 MAPAS ESTÁVEIS

Neste capítulo trataremos de um dos principais objetos do nosso estudo: o espaço moduli de mapas estáveis. No seguinte estudaremos os invariantes de Gromov-Witten. Começamos tratando das definições e conceitos básicos. O conceito de estabilidade de Kontsevich diz respeito a mapas n -marcados e está intimamente relacionado as curvas n -marcadas e com os espaços de Mumford-Knudsen, estudados no capítulo anterior. Veremos que a noção de estabilidade de um mapa é equivalente ao fato de o mapa possuir finitos automorfismos. Consideraremos um problema moduli relacionado e veremos que existe um espaço moduli grosseiro $\overline{M}_{g,n}(X, \beta)$ associado, se X for uma variedade suficientemente boa. Tal espaço será obtido pela colagem de espaços moduli de mapas 'rigidificados', e estes últimos serão obtidos pelo quociente de um fibrado sobre os espaços de Mumford-Knudsen por um grupo de simetrias finito. Por fim, estudaremos as propriedades da fronteira de $\overline{M}_{g,n}(X, \beta)$.

5.1 Visão geral

Definição 5.1. Seja X um esquema sobre \mathbb{C} . Uma *família de mapas* sobre S de curvas n -marcadas quase-estáveis de gênero g para X

$$(\pi : \mathcal{C} \rightarrow S, \{p_i\}_{1 \leq i \leq n}, \mu : \mathcal{C} \rightarrow X)$$

consiste em: (i) Uma família de curvas n -marcadas de gênero g quase-estáveis $\pi : \mathcal{C} \rightarrow S$ com n secções p_1, \dots, p_n . (ii) Um morfismo $\mu : \mathcal{C} \rightarrow X$. Duas famílias de mapas sobre S

$$(\pi : \mathcal{C} \rightarrow S, \{p_i\}, \mu)$$

e

$$(\pi' : \mathcal{C}' \rightarrow S, \{p'_i\}, \mu')$$

são isomorfas se existe um isomorfismo $\tau : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ que comuta os diagramas:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{C}' \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi' \\ & S & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{C}' \\ p_i \swarrow & & \searrow p'_i \\ & S & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{C}' \\ \mu \searrow & & \swarrow \mu' \\ & X & \end{array}$$

Quando $\pi : \mathcal{C} \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{C})$ é o mapa estrutural, $(\pi : \mathcal{C} \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{C}), \{p_i\}, \mu)$ é escrito apenas $(\mathcal{C}, \{p_i\}, \mu)$. Neste caso, $(\mathcal{C}, \{p_i\}, \mu)$ pode ser visto simplesmente como um mapa $\mu : \mathcal{C} \rightarrow X$, onde \mathcal{C} é uma curva n -marcada.

Definição 5.2. O mapa $(\mathcal{C}, \{p_i\}, \mu)$ é dito *estável* se as seguintes condições valem para

cada componente $E \subset C$: (1) Se $E \cong \mathbb{P}^1$ e $\mu(E)$ é um ponto, então E contém pelo menos três pontos especiais. (2) Se E tem gênero aritmético $g = 1$ e é mapeado a um ponto por μ , então E contém pelo menos um ponto especial. Uma família de mapas marcados $(\pi : \mathcal{C} \rightarrow S, \{p_i\}, \mu)$ é dita estável se o mapa marcado em cada fibra geométrica de π é estável.

Seja X um esquema sobre \mathbb{C} e $\beta \in A_1 X$. Um mapa $\mu : C \rightarrow X$ representa β se $\mu^*([C]) = \beta$, onde $[C]$ denota a classe fundamental de C . Defina um funtor contravariante $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$ da categoria dos esquemas algébricos complexos para a categoria dos conjuntos como segue. Para cada esquema S , seja $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)(S)$ o conjunto das classes de isomorfismo de famílias de mapas estáveis sobre S de curvas n -marcadas de gênero g para X que representam a classe β . Behrend e Manin provaram que existem Deligne-Mumford stacks algébricos próprios que são espaços de moduli grosseiros projetivos para qualquer gênero g , para o problema moduli descrito acima (cf BEHREND and MANIN, 1996, Teoremas 3.6 e 3.14) Em gênero $g = 0$, se X é variedade projetiva não-singular e convexa, os espaços de moduli grosseiros são variedades normais e são o quociente de variedades não-singulares por um grupo finito.

Teorema 5.1 (Behrend, Manin - 1996). Existe um espaço de moduli grosseiro e projetivo $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$ que representa o funtor $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$

Assim, $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$ é um esquema munido de uma transformação natural de funtores

$$\phi : \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta) \rightarrow \mathcal{H}om(*, \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta))$$

satisfazendo as propriedades: (I) $\phi(\text{Spec}(\mathbb{C})) : \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)(\text{Spec}(\mathbb{C})) \rightarrow \mathcal{H}om(\text{Spec}(\mathbb{C}), \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta))$ é uma bijeção de conjuntos (II) Se Z é um esquema e $\psi : \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta) \rightarrow \mathcal{H}om(*, Z)$ é uma transformação natural de funtores, então existe um único morfismo de esquemas

$$\gamma : \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta) \rightarrow Z$$

tal que $\psi = \tilde{\gamma} \circ \phi$ (onde $\tilde{\gamma} : \mathcal{H}om(*, \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)) \rightarrow \mathcal{H}om(*, Z)$ é a transformação natural induzida por γ). Lembremos que os espaços de Mumford-Knudsen $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ também satisfazem propriedades análogas as propriedades (I) e (II) acima. Em particular, temos uma transformação natural de funtores:

$$\phi_0 : \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \rightarrow \mathcal{H}om(*, \overline{\mathcal{M}}_{g,n})$$

Observe que os espaços $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$ generalizam os espaços $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. De fato, temos:

Proposição 5.1. Seja $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ o espaço de Mumford-Knudsen de curvas n -marcadas estáveis de gênero g . Então: a) $\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^1, 1) = \text{Spec}(\mathbb{C})$ b) $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathbb{P}^0, 0) = \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ c) $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathbb{P}^r, 0) = \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \times \mathbb{P}^r$

Demonstração. Fixemos a notação. Denote simplesmente $\overline{\mathcal{M}} = \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathbb{P}^r, d)$. Seja $\phi_0 : \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \rightarrow \mathcal{H}om(*, \overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ a transformação natural de funtores. (a) é óbvio pois um elemento $\xi = (C, \{p_i\}, \mu) \in \overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^1, 1)$ é simplesmente um mapa $\mu : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ de grau 1, onde C é curva racional, logo $C \cong \mathbb{P}^1$. Assim, todos os tais mapas são isomorfos e existe somente uma classe de equivalência. Logo, $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathbb{P}^1, 1)$ é um ponto, isto é, $\text{Spec}(\mathbb{C})$. (b) Um elemento $\xi = (C, \{p_i\}, \mu) \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathbb{P}^0, 0)$ é essencialmente uma curva n -marcada $(C, \{p_i\})$ pois $\mu : C \rightarrow \mathbb{P}^0 = \text{Spec}(\mathbb{C})$ é o mapa estrutural. Construiremos formalmente uma transformação natural de funtores

$$\phi : \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathbb{P}^0, 0) \rightarrow \mathcal{H}om(*, \overline{\mathcal{M}}_{g,n})$$

que vai satisfazer as propriedades (I) e (II) acima, do seguinte modo. Dado $\xi = (C \rightarrow S, \{p_i\}, \mu) \in \overline{\mathcal{M}}(S)$, seja $\phi(S)(\xi) \in \mathcal{H}om(S, \overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ o morfismo

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \\ s &\longmapsto (C_s, \{p_i(s)\}) \end{aligned}$$

é fácil ver que $\phi(\text{Spec}(\mathbb{C})) : \overline{\mathcal{M}}(\text{Spec}(\mathbb{C})) \rightarrow \mathcal{H}om(\text{Spec}(\mathbb{C}), \overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ é uma bijeção de conjuntos. Assim a condição (I) é satisfeita. Para a condição (II), seja Z um esquema e $\psi : \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathbb{P}^0, 0) \rightarrow \mathcal{H}om(*, Z)$ uma transformação natural de funtores. Devemos mostrar que existe um único $\gamma : \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \rightarrow Z$ tal que ψ se fatora por $\tilde{\gamma}$. Para isso, definamos uma nova transformação de funtores

$$\psi_0 : \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \rightarrow \mathcal{H}om(*, Z)$$

do seguinte modo. Para cada $\xi = (C \rightarrow S, \{p_i\}) \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(S)$ seja $\psi_0(S)(\xi) = \psi(\xi, \mu)$, onde μ é o mapa estrutural $\mu : C \rightarrow \mathbb{P}^0$. Assim, pela propriedade universal dos espaços $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, existe um único morfismo $\gamma : \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \rightarrow Z$ tal que $\psi_0 = \tilde{\gamma} \circ \phi_0$. Daí, é fácil ver que $\psi = \tilde{\gamma} \circ \phi$. Com efeito, se $\xi = (C \rightarrow S, \{p_i\}, \mu) \in \overline{\mathcal{M}}(S)$, então $\tilde{\gamma} \circ \phi(S)(\xi) = \tilde{\gamma} \circ \phi_0(C \rightarrow S, \{p_i\}) = \psi_0(S)(C \rightarrow S, \{p_i\}) = \psi(S)(\xi)$. (c) Isso também é claro, pois um elemento $\xi = (C \rightarrow S, \{p_i\}, \mu) \in \overline{\mathcal{M}}(S)$ é determinado especificando uma curva n -marcada $(C \rightarrow S, \{p_i\})$ e um ponto $p \in \mathbb{P}^r$ que é a imagem de C por μ . Formalizando, defina

$$\phi : \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathbb{P}^r, 0) \rightarrow \mathcal{H}om(*, \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \times \mathbb{P}^r)$$

do seguinte modo. Dado $\xi = (C \rightarrow S, \{p_i\}, \mu) \in \overline{\mathcal{M}}(S)$ seja $\phi(S)(\xi) \in \mathcal{H}om(S, \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \times \mathbb{P}^r)$ o morfismo

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \times \mathbb{P}^r \\ s &\longmapsto (C_s, \{p_i(s)\}) \times \mu(C_s) \end{aligned}$$

Pela observação acima, é claro que

$$\phi(\text{Spec}(\mathbb{C}) : \overline{\mathcal{M}}(\text{Spec}(\mathbb{C})) \rightarrow \mathcal{H}om(\text{Spec}(\mathbb{C}), \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \times \mathbb{P}^r)$$

é uma bijeção de conjuntos. Agora, seja $\psi : \overline{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{H}om(*, Z)$ outra transformação natural de funtores. Para cada $p \in \mathbb{P}^r$ defina

$$\psi_p : \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \rightarrow \mathcal{H}om(*, Z)$$

como segue. Para cada $\xi = (C \rightarrow S, \{p_i\}) \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(S)$ seja $\psi_p(S)(\xi) = \psi(\xi, \mu)$, onde $\mu(C) = p \in \mathbb{P}^r$. Para este ψ_p existe um único $\gamma_p : \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \rightarrow Z$ tal que $\psi_p = \tilde{\gamma}_p \circ \phi_0$. Defina agora $\gamma : \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \times \mathbb{P}^r \rightarrow Z$ por $\gamma(\xi, p) = \gamma_p(\xi) \in Z$. Uma conta análoga a feita acima mostra que $\psi = \tilde{\gamma} \circ \phi$. \square

Seja $(C, \{p_i\}, \mu)$ um mapa de uma curva n -marcada quase-estável para X . Um automorfismo do mapa é um automorfismo $\tau : C \rightarrow C$ satisfazendo $p_i = \tau(p_i)$ e $\mu = \mu \circ \tau$.

Lema 5.1. Um mapa $(C, \{p_i\}, \mu)$ é estável se, e somente se, possui um número finito de automorfismos.

Demonstração. Seja $\mu : C \rightarrow X$ um mapa estável. Se a curva (C, p_1, \dots, p_n) é estável como curva n -marcada, não há o que fazer. Suponha então que ela não seja estável e seja $E \subset C$ um galho instável. Pela condição de estabilidade do mapa, necessariamente E não é mapeado a um ponto. Considere um automorfismo ϕ de μ e $E' = \phi(E)$. Temos, $\mu|_{E'} \circ \phi|_E = \mu|_E$. A implicação estará concluída se provarmos o seguinte fato: **Fato:** Sejam $\mu, \mu' : \mathbb{P}^1 \rightarrow X$ mapas não constantes. Então existe apenas um número finito de automorfismos $\phi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ tais que $\mu' = \mu \circ \phi$. *Prova:* Seja L o corpo de funções de \mathbb{P}^1 e K o corpo de funções da curva imagem $\mu(\mathbb{P}^1)$. O mapa μ induz uma inclusão $K \subset L$ e existe apenas um número finito de automorfismos de L que respeitam tal inclusão. Reciprocamente, suponha que μ não seja estável. Então existe um galho instável $E \subset C$ que é mapeado a um ponto. Existem infinitos automorfismos neste galho e cada um desses automorfismos pode ser estendido para C definindo-os como a identidade nas outras componentes. Como $\mu(E) = \{\text{ponto}\}$, esses automorfismos claramente comutam com μ , logo encontramos infinitos automorfismos do mapa. \square

Dizemos que uma variedade não-singular X é convexa se para todo mapa $\mu : \mathbb{P}^1 \rightarrow X$ tem-se que $H^1(\mathbb{P}^1, \mu^*(T_X)) = 0$. Denotemos por $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}^*(X, \beta) \subset \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$ o lugar aberto dos mapas sem automorfismos não-triviais. O segundo teorema dá mais informações sobre os espaços de modulli dessas variedades:

Teorema 5.2. Seja X uma variedade convexa projetiva não-singular.

1. $\overline{M}_{g,n}(X, \beta)$ é uma variedade projetiva normal de dimensão pura igual a

$$\dim(X) + \int_{\beta} c_1(T_X) + n - 3$$

2. $\overline{M}_{g,n}(X, \beta)$ é localmente o quociente de uma variedade não-singular por um grupo finito.
3. $\overline{M}_{g,n}^*(X, \beta)$ é uma variedade não-singular e, ademais, é um espaço de modulli refinado para mapas estáveis sem automorfismos.

A fronteira de $\overline{M}_{g,n}(X, \beta)$ é o lugar que corresponde a curvas de domínio irreduzível. Lembre que a fronteira dos espaços de Mumford-Knudsen $\overline{M}_{g,n}$ é um divisor de cruzamentos normais. Aqui acontece a mesma coisa, conforme o teorema seguinte:

Teorema 5.3. Seja X uma variedade convexa projetiva não-singular. A fronteira de $\overline{M}_{g,n}(X, \beta)$ é um divisor de cruzamentos normais (a menos de um quociente por um grupo finito).

As n marcas induzem n mapas de avaliação canônicos ρ_1, \dots, ρ_n em $\overline{M}_{g,n}(X, \beta)$. Para cada $1 \leq i \leq n$ defina uma transformação natural

$$\theta_i : \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta) \rightarrow \mathcal{H}om(*, X)$$

como segue. Seja $\xi = (\pi : \mathcal{C} \rightarrow S, \{p_i\}, \mu) \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$ e defina $\theta_i(S)(\xi) = \mu \circ p_i \in \mathcal{H}om(S, X)$. Pelo Teorema 5.1, segue que θ_i induz um único morfismo de esquemas $\rho_i : \overline{M}_{g,n}(X, \beta) \rightarrow X$. Pela propriedade universal dos espaço de Mumford-Knudsen $\overline{M}_{g,n}$, cada elemento $\xi \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$ induz naturalmente um morfismo $S \rightarrow \overline{M}_{g,n}$. Portanto existe um mapa de esquecimento natural $\eta : \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta) \rightarrow \overline{M}_{g,n}$ que essencialmente esquece o mapa. As provas desses teoremas são longas, técnicas e maçantes, mas não iremos privar o leitor totalmente delas. Nas secções que se seguem, daremos um esboço geral da construção desses espaços de Kontsevich de mapas estáveis. Os espaços de Mumford-Knudsen são usados de maneira fundamental. Os detalhes podem ser encontrados no artigo original (BEHREND and MANIN, 1996) ou nas excelentes notas (FULTON and PANDHARIPANDE, 1995). Embora sejamos um pouco genéricos, sempre teremos em mente o caso $X = \mathbb{P}^r$ que é o que mais nos interessa.

5.2 Construção dos Espaços de Kontsevich

A construção dos espaços de mapas estáveis é feita em duas etapas. Primeiro construiremos espaços modulli rigidificados que correspondem a uma condição mais restritiva, que, no final, serão abertos de $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$. Em seguida, colaremos estes abertos para obtermos o espaço desejado. A ideia geral é usarmos os espaços de Mumford-Knudsen e a

partir deles construir fibrados sobre abertos de $\overline{M}_{0,m}$. A seguir, construiremos quocientes desse fibrados para obtermos os espaços rigidificados.

5.2.1 Espaços rigidificados

Nesta subsecção esboçaremos a construção dos espaços rigidificados, que correspondem a mapas com certa condição de transversalidade. Antes, porém, de nos aventurarmos em detalhes mais técnicos, vejamos a ideia geral em um exemplo mais simples, com $r = 2$. Suponha que os espaços de mapas estáveis já foram construídos. Vamos olhar para $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^2, d)$ e fixemos três retas l_1, l_2, l_3 em \mathbb{P}^2 definidas por formas lineares x_1, x_2, x_3 em $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$. Olhamos agora para o conjunto de mapas $\mu : C \rightarrow \mathbb{P}^2$ que satisfazem a seguinte condição: para cada $j = 0, 1, 2$ o divisor $D_j := \mu^*l_j$ consiste em d pontos distintos não especiais de C . Além disso, os pontos de D_j são distribuídos nos galhos de acordo com os graus destes: se μ restrito ao galho E tem grau d_0 então D_j tem d_0 pontos em E . Tal conjunto é um aberto de $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^2, d)$. Denotemos:

$$D_j = q_{j1} + \cdots + q_{jd}$$

Note que os três divisores são linearmente equivalentes, pois são determinados pelas secções $s_j = \mu^*x_j$ do mesmo fibrado linear $\mu^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ (veja Proposição 2.2). Observe ainda que tais mapas realmente cobre todas as possibilidades, isto é, para cada mapa $\mu : C \rightarrow \mathbb{P}^2$ existe uma escolha de três retas tais que μ pertence ao aberto correspondente. Para ver isso, use Bertini 2.2. Agora, para cada mapa $\mu : C \rightarrow \mathbb{P}^2$ que satisfaz a condição de transversalidade descrita acima, podemos associar uma curva racional m -marcada \tilde{C} , onde $m = n + 3d$. A curva base é simplesmente C e as marcas são as n marcas originais juntamente com as $3d$ marcas q_{jk} com $0 \leq j \leq 2, 1 \leq k \leq d$. O fato relevante aqui é que a curva \tilde{C} é estável como curva m -marcada se, e somente se, o mapa $\mu : C \rightarrow \mathbb{P}^2$ é estável como mapa. De fato, suponha que μ é estável e consideremos um galho $E \subset C$. Se este galho tiver grau 0, então ele já é estável, pela condição de estabilidade do mapa μ . Se ele tiver grau $d_0 > 0$, então são adicionados mais $3d_0 \geq 3$ marcas, distintas dos pontos especiais já existentes, o que garante a estabilidade deste galho. Reciprocamente, suponha que μ não seja estável. Então teríamos um galho de grau 0 com menos de três marcas, ou seja, instável. Como ele tem grau 0, não receberá nenhuma das marcas novas q_{jk} e continuará instável. Observe agora que para as curvas \tilde{C} construídas dessa maneira são tais que os divisores $D_j = \sum_k q_{jk}$ são equivalentes. Reciprocamente, se \tilde{C} satisfaz essa propriedade, então ela é uma curva que provem desse tipo de construção, isto é, existe uma curva estável C e um mapa estável $\mu : C \rightarrow \mathbb{P}^2$ tal que a curva \tilde{C} é obtida de C acrescentando as marcas provenientes dos pull-back μ^*l_j . O subconjunto de $\overline{M}_{0,m}$ dessas curvas \tilde{C} assim obtidas será denotado por B . Note que B certamente contém todas as curvas irredutíveis. A condição necessária e suficiente para que uma curva m -marcada

($\tilde{C}, \{p_i\}, \{q_{jk}\}$) esteja em B é que ela seja *balanceada*. O que queremos dizer é que o número de pontos do divisor D_j em cada galho de \tilde{C} não dependa de j . Ou seja, os três divisores se distribuem igualmente nos galhos. Temos que B é um aberto não vazio de $\overline{M}_{0,m}$. Observe, porém, que existem ambiguidades na construção de \tilde{C} . Por exemplo, ao passo que os divisores D_j estão bem definidos, a ordem dos pontos q_{jk} não é dada canonicamente. Podemos permutar estes pontos (com j fixo) e obtermos curvas diferentes (não isomorfas). Outro ponto a considerar, é que mapas distintos podem induzir a mesma curva \tilde{C} . Basta, por exemplo, compor μ com um automorfismo $\phi : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ que preserve as retas l_j . Assim, existe um $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ de mapas não-isomorfos que produzem a mesma curva m -marcada. Precisamos, então, refinar mais a construção, de modo a evitar tais ambiguidades. Temos um $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ -fibrado sobre B . Consideremos o espaço total Y desse fibrado. Agora está tudo bem: cada ponto de Y define um único mapa estável n -marcado que satisfaz a condição de transversalidade imposta acima. O passo seguinte é considerarmos os quociente Y/G , onde G é o produto de três cópias do grupo de permutações de d letras. Observamos que G age em Y permutando os pontos q_{j1}, \dots, q_{jd} com j fixo. A princípio esta ação pode mudar a curva m -marcada \tilde{C} , mas os mapas associados são isomorfos. Assim, quando passamos ao quociente Y/G obtemos uma bijeção com B . Agora que temos uma ideia geral do tópico, vejamos tecnicamente. Advertimos que aqui algumas provas serão omitidas. Suporemos durante a construção que $r > 0$, $d > 0$ e $(g, n, d, r) \neq (0, 0, 1, 1)$.

Definição 5.3. Seja $\mathbb{P}^r = \mathbb{P}(V)$. Então $V^* = H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1))$. Seja $\bar{t} = (t_0, \dots, t_r)$ uma base de V^* . Uma família *estável \bar{t} -rígida* de mapas de grau d de curvas gênero g n -marcadas para \mathbb{P}^r consiste na seguinte informação:

$$(\pi : \mathcal{C} \rightarrow S, \{p_i\}_{1 \leq i \leq n}, \{q_{ij}\}_{\substack{0 \leq j \leq d \\ 0 \leq i \leq r}}, \mu)$$

onde: (i) $(\pi : \mathcal{C} \rightarrow S, \{p_i\}, \mu)$ é uma família estável de mapas de grau d de curvas gênero g n -marcadas para \mathbb{P}^r (ii) $(\pi : \mathcal{C} \rightarrow S, \{p_i\}, \{q_{ij}\})$ é uma família plana e projetiva de curvas m -marcadas gênero g com secções $\{p_i\}$ e $\{q_{ij}\}$ (onde $m = n + d(r + 1)$). (iii) Para cada $0 \leq i \leq r$ existe uma igualdade de divisores de Cartier

$$\mu^*(t_i) = q_{i1} + q_{i2} + \dots + q_{id}$$

Observe que a condição (iii) implica que cada mapa fibrado da família intersecta cada hiperplano $(t_i) \subset \mathbb{P}^r$ transversalmente. A condição (ii) garante que essas intersecções são pontos não marcados e não singulares. Se $(g, n, d, r) = (0, 0, 1, 1)$, então $m = 2$. Não existem curvas racionais 2-marcadas, por isso o caso $(0, 0, 1, 1)$ é excluído. Defina agora um funtor contravariante $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathbb{P}^r, d, \bar{t})$ da categoria dos esquemas algébricos complexos para a categoria dos conjuntos como segue. Para cada esquema

S , seja $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathbb{P}^r, d, \bar{t})(S)$ o conjunto das classes de isomorfismo de famílias de mapas de grau d estáveis \bar{t} -rígidas sobre S de curvas gênero g n -marcadas para \mathbb{P}^r . Note que tal funtor depende somente dos hiperplanos gerados $(t_i) \subset \mathbb{P}^r$ e não da particular escolha das equações t_i .

Proposição 5.2. Existe uma variedade não-singular $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \bar{t})$ que representa o funtor $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \bar{t})$.

Provaremos a 5.2 construindo explicitamente $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \bar{t})$, munido de uma família universal de mapas estáveis \bar{t} -rígidos. Antes, porém, fixemos alguma notação e terminologia. Seja $\pi : \overline{U}_{0,m} \rightarrow \overline{M}_{0,m}$ a curva universal com m secções $\{p_i\}$ e $\{q_{i,j}\}$. Como $\overline{U}_{0,m}$ é não-singular e as secções são de codimensão 1, existem fibrados em retas canonicamente definidos:

$$\mathcal{H}_i := \mathcal{O}_{\overline{U}_{0,m}}(q_{i,1} + \cdots + q_{i,d}), \quad 0 \leq i \leq r$$

Sejam $s_i \in H^0(\overline{U}_{0,m}, \mathcal{H}_i)$ a secção canônica que representa do divisor de Cartier $(q_{i,1} + \cdots + q_{i,d})$. Dado agora qualquer morfismo $\gamma : X \rightarrow \overline{M}_{0,m}$, considere o produto fibrado

$$\begin{array}{ccc} X \times_{\overline{M}_{0,m}} \overline{U}_{0,m} & \xrightarrow{\bar{\gamma}} & \overline{U}_{0,m} \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{\gamma} & \overline{M}_{0,m} \end{array}$$

Dizemos que o morfismo $\gamma : X \rightarrow \overline{M}_{0,m}$ é \mathcal{H} -balanceado se: (a) $\forall 1 \leq i \leq r$, $\pi_{X*} \bar{\gamma}^*(\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_0^{-1})$ é localmente livre (b) $\forall 1 \leq i \leq r$, o mapa canônico $\pi_X^* \pi_{X*} \bar{\gamma}^*(\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_0^{-1}) \rightarrow \bar{\gamma}^*(\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_0^{-1})$ é um isomorfismo. Note que se γ é \mathcal{H} -balanceado, os fibrados em retas $\bar{\gamma}^*(\mathcal{H}_i)$ são isomorfos nas fibras de π_X .

Demonstração. (da Proposição 5.2) Visto que os \mathcal{H}_i possuem o mesmo multigrau em cada fibra geométrica de π_X , então existe um subesquema localmente fechado $B \subset \overline{M}_{0,m}$ satisfazendo as seguintes propriedades: (i) A inclusão $i : B \hookrightarrow \overline{M}_{0,m}$ é \mathcal{H} -balanceada. (ii) Todo morfismo \mathcal{H} -balanceado $\gamma : X \rightarrow \overline{M}_{0,m}$ se fatora (unicamente) através de B . E de fato, $B \subset \overline{M}_{0,m}$ é um aberto de Zariski. (cf. FULTON and PANDHARIPANDE, 1995, Proposição 1) Seja $\mathcal{G}_i = \pi_{B*} i^*(\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_0^{-1})$ para $1 \leq i \leq r$. Seja $\tau_i : Y_i \rightarrow B$ o espaço total do \mathbb{C}^* -fibrado associado a \mathcal{G}_i . Assim, Y_i é o fibrado vetorial afim associado a \mathcal{G}_i menos a secção nula. O pull-back $\tau_i^*(\mathcal{G}_i)$ possui uma secção tautológica que não se anula e portanto é canonicamente trivial. Considere o produto

$$Y := Y_1 \times_B Y_2 \cdots \times_B Y_r$$

munido das projeções $\rho_i : Y \rightarrow Y_i$ e de um morfismo $\tau : Y \rightarrow B$. Do diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{U} & \xrightarrow{\bar{\tau}} & \bar{U}_{0,m} \\
\pi_X \downarrow & & \downarrow \pi \\
Y & \xrightarrow{\tau} & B \subset \bar{M}_{0,m}
\end{array}$$

segue que os fibrados $\bar{\tau}^*(\mathcal{H}_i)$ são isomorfos a $\mathcal{L} := \bar{\tau}^*(\mathcal{H}_0)$ em \mathcal{U} para todo $1 \leq i \leq r$, visto que $\bar{\tau}^*(\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_0^{-1}) \cong \pi_Y^* \rho_i^* \tau_i^*(\mathcal{G}_i)$ e $\tau_i^*(\mathcal{G}_i)$ é canonicamente trivial. Agora, via pull-back e isomorfismos canônicos, $\bar{\tau}_i^*(s_i)$ corresponde canonicamente a uma secção de \mathcal{L} . Como essas $r+1$ secções não se anulam simultaneamente, elas definem um morfismo $\mu : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{P}^r$ como segue. Defina um mapa de espaços vetoriais

$$\begin{aligned}
V^* &\longrightarrow H^0(\mathcal{L}) \\
t_i &\longmapsto \bar{\tau}_i^*(s_i)
\end{aligned}$$

O mapa sobrejetivo induzido $V^* \otimes \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{L}$ induz um morfismo $\mu : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{P}^r$. As secções $\{p_i\}$, $\{q_{i,j}\}$ podem ser vistas, via pull-back, como secções de π_Y . **Afirmção:** A família

$$(\pi_Y : \mathcal{U} \rightarrow Y, \{p_i\}, \{q_{i,j}\}, \mu)$$

é uma família universal de mapas estáveis \bar{t} -rígidos, e portanto $\bar{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d, \bar{t}) = Y$. *Prova da Afirmção:* A estabilidade da família de mapas $(\pi_Y : \mathcal{U} \rightarrow Y, \{p_i\}, \mu)$ é fácil. Cada fibra C de π_Y é uma curva racional m -marcada estável com marcas $\{p_i\}$ e $\{q_{i,j}\}$. Seja $E \subset C$ um galho. Suponha que $\dim(\mu(E)) = 0$. Pela condição de transversalidade (iii), E não possui marcas das secções $\{q_{i,j}\}$. Mas como C é estável m -marcada e nenhuma das marcas $\{q_{i,j}\}$ cai em E , devemos ter $\deg_E(\omega_C(p_1 + \dots + p_n)) > 0$. Logo a condição (1) da definição de estabilidade de mapas é satisfeita por E . Portanto a família de mapas $(\pi_Y : \mathcal{U} \rightarrow Y, \{p_i\}, \mu)$ é estável. Por construção, tal família é \bar{t} -rígida. Por fim, devemos mostrar que a família $(\pi_Y : \mathcal{U} \rightarrow Y, \{p_i\}, \{q_{i,j}\}, \mu)$ é universal. Para isso, seja

$$(\pi : \mathcal{C} \rightarrow S, \{p_i\}, \{q_{i,j}\}, \nu)$$

uma família de mapas estáveis \bar{t} -rígidos. Ora, como $(\pi : \mathcal{C} \rightarrow S, \{p_i\}, \{q_{i,j}\})$ é uma família plana de curvas racionais m -marcadas estáveis, existe um mapa induzido $\lambda : S \rightarrow \bar{M}_{0,m}$ tal que a família induzida por pull-back $S \times_{\bar{M}_{0,m}} \bar{U}_{0,m}$ é canonicamente isomorfa a $(\pi : \mathcal{C} \rightarrow S, \{p_i\}, \{q_{i,j}\})$. Mostraremos que λ é \mathcal{H}_i -balanceada. O par $(\bar{\lambda}^*(\mathcal{H}_i), \bar{\lambda}^*(s_i))$ determina o divisor de Cartier $q_{i,1} + \dots + q_{i,d}$ em \mathcal{C} . O mapa ν é induzido por uma transformação linear $\psi : V^* \rightarrow H^0(\mathcal{C}, \nu^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r(V)}(1)))$. Seja $z_i = \psi(t_i)$. Pela condição (iii) de estabilidade \bar{t} -rígida, o par $(\nu^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r(V)}(1)), z_i)$ determina o divisor de Cartier $q_{i,1} + \dots + q_{i,d}$ em \mathcal{C} . Por

2.2, existem isomorfismos canônicos

$$\bar{\lambda}^*(\mathcal{H}_i) \cong \nu^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r(V)}(1)) \quad \forall i$$

Portanto λ é \mathcal{H}_i -balanceado. Pela propriedade universal de B , λ se fatora por B : $\lambda : S \rightarrow B$. Existem isomorfismos canônicos

$$\pi_*(\bar{\lambda}^*(\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_0^{-1}) \cong \lambda^*(\mathcal{G}_i)$$

Os isomorfismos $\bar{\lambda}^*(\mathcal{H}_i) \cong \nu^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r(V)}(1))$ determinam secções canônicas de $\bar{\lambda}^*(\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_0^{-1})$. Os isomorfismos $\pi_*(\bar{\lambda}^*(\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_0^{-1}) \cong \lambda^*(\mathcal{G}_i)$ determinam então secções de $\lambda^*(\mathcal{G}_i)$ que não se anulam. Portanto existe um mapa $S \rightarrow Y$. Verifica-se que o pull-back da família universal sobre Y nos dá uma família de mapas estáveis \bar{t} -rígida que é canonicamente isomorfa a família $(\pi : \mathcal{C} \rightarrow S, \{p_i\}, \{q_{i,j}\}, \nu)$. \square

5.2.2 A colagem

Agora que temos os esquemas 'rigidificados' $\overline{M}_{g,n}(\mathbb{P}^r, d, \bar{t})$, o próximo passo será colá-los para obtermos os espaço $\overline{M}_{g,n}(\mathbb{P}^r, d)$ desejado. é claro que dado um mapa de curvas marcadas $\mu : C \rightarrow \mathbb{P}^r$ e uma dada base \bar{t} de $V^* = H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1))$, pode ser que μ não seja rígido para esta escolha de base. Porém, o Teorema de Bertini 2.2 nos garante que μ será rígido com respeito a alguma base. Assim, é razoável supor que os espaço modulli de mapas estáveis $\overline{M}_{g,n}(\mathbb{P}^r, d)$ será, de fato, obtido pela colagem de todos os espaços $\overline{M}_{g,n}(\mathbb{P}^r, d, \bar{t})$ para todas as escolhas de bases \bar{t} de V^* . Esboçaremos como se dá essa colagem. Os detalhes podem ser encontrados em (FULTON and PANDHARIPANDE, 1995, subsecção 4.1). **Notação:** $\overline{M}(\bar{t}) = \overline{M}_{g,n}(\mathbb{P}^r, d, \bar{t})$. Escrevemos $(\pi : \mathcal{U} \rightarrow \overline{M}(\bar{t}), \{p_i\}, \{q_{i,j}\}, \mu)$ para a família universal de mapas \bar{t} -rígidos em gênero 0. Denotaremos por \mathfrak{S}_d o grupo de simetrias de d letras. Seja o produto de $r + 1$ cópias de \mathfrak{S}_d :

$$G = G_{d,r} = \mathfrak{S}_d \times \cdots \times \mathfrak{S}_d$$

Note que existe uma ação natural de G em $\overline{M}(\bar{t})$ que permuta a ordem de cada um dos $r + 1$ conjuntos de secções $\{q_{i,1}, \dots, q_{i,d}\}$ para $0 \leq i \leq r$. Ou seja, para cada $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_r) \in G$ a família

$$(\pi : \mathcal{U} \rightarrow \overline{M}(\bar{t}), \{p_i\}, \{q_{i,\sigma_i(j)}\}, \mu)$$

também é uma família \bar{t} -rígida sobre $\overline{M}(\bar{t})$. Pela propriedade universal, a família permutada induz um automorfismo de $\overline{M}(\bar{t})$. Mas $\overline{M}(\bar{t})$ é quasi-projetivo e G é finito, logo o existe um esquema quociente quase-projetivo $\overline{M}(\bar{t})/G$. Agora, suponha que temos duas escolhas distintas para bases de V^* , digamos, \bar{t} e \bar{t}' . Seja $\mu : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{P}^r$ a família univer-

sal sobre $\overline{M}(\bar{t})$. Denote ainda $\overline{M}(\bar{t}, \bar{t}') \subset \overline{M}(\bar{t})$ o lugar aberto sobre o qual os divisores $\mu^*(\bar{t}'_0), \dots, \mu^*(\bar{t}'_r)$ são \mathbb{A}^1 -tales, disjuntos e disjuntos das secções $\{p_i\}$. O aberto $\overline{M}(\bar{t}, \bar{t}')$ é G -invariante, assim temos um quociente quase-projetivo bem definido $\overline{M}(\bar{t}, \bar{t}')/G$. Como é de se esperar, existe um isomorfismo canônico

$$\overline{M}(\bar{t}, \bar{t}')/G \cong \overline{M}(\bar{t}', \bar{t})/G$$

(vide FULTON and PANDHARIPANDE, 1995, Proposição 4 para a demonstração desse fato) Além disso, tais abertos satisfazem as condições de cociclo. Assim, podemos colar os esquemas $\overline{M}(\bar{t})/G$ ao longo dos abertos $\overline{M}(\bar{t}, \bar{t}')/G$. O que obtemos como resultado é o esquema $\overline{M}_{g,n}(\mathbb{P}^r, d)$. As propriedades universais de $\overline{M}_{g,n}(\mathbb{P}^r, d)$ derivam das propriedades universais de $\overline{M}(\bar{t})$. Mostra-se ainda que $\overline{M}_{g,n}(\mathbb{P}^r, d)$ é um esquema algébrico de tipo finito sobre \mathbb{C} . Usando os critérios valorativos, mostra-se que $\overline{M}_{g,n}(\mathbb{P}^r, d)$ é um esquema algébrico complexo separável e próprio. Usando uma técnica devida a J. Kóllar, prova-se que também é projetivo. (cf. FULTON and PANDHARIPANDE, 1995, subsecções 4.3 e 4.4 para os detalhes técnicos). Construídos os espaços $\overline{M}_{g,n}(\mathbb{P}^r, d)$, usa-se teoria da deformação para construir os espaços $\overline{M}_{g,n}(X, \beta)$, onde X é variedade projetiva e $\beta \in A^1(X)$ (veja FULTON and PANDHARIPANDE, 1995, Secção 5).

5.3 Divisores de Fronteira

Nos concentraremos agora no estudo da fronteira de $\overline{M}_{g,n}(\mathbb{P}^r, d)$. A estrutura da fronteira de $\overline{M}_{g,n}(\mathbb{P}^r, d)$ é bastante similar aquela dos espaços de Mumford-Knudsen, pois as propriedades da fronteira $\overline{M}_{g,m}$ (com $m = n + d(r+1)$) são herdadas pela fronteira de $\overline{M}_{g,n}(\mathbb{P}^r, d)$. Assim, tal fronteira corresponde a mapas com domínio redutível. é importante lembrar também que a fronteira de $\overline{M}_{0,n}$ é um divisor de cruzamentos normais. O mesmo ocorre com a fronteira de $\overline{M}_{g,n}(\mathbb{P}^r, d)$. A fim de estudarmos a fronteira com mais detalhes, necessitamos de alguma terminologia. Assim, uma *partição d -ponderada* de $[n] = \{1, \dots, n\}$ é uma partição $A \cup B = [n]$ e uma partição de inteiros não negativos $d = d_A + d_B$. Consideremos então uma partição d -ponderada com $A \cup B = [n]$ com $\#A \geq 2$ (resp. $\#B \geq 2$) se $d_A = 0$ (resp. $d_B = 0$). A esta partição associamos um divisor irreduzível, chamado *divisor de fronteira*, denotado $D(A, B; d_A, d_B)$. Tal divisor corresponde ao lugar dos mapas μ com domínio redutível $C = C_A \cup C_B$ tais que os pontos de A (resp. B) pertencem ao galho C_A (resp. C_B) e tal que μ restrito a C_A (resp. C_B) tem grau d_A (resp. d_B). Note a analogia com os divisores de fronteira $D(A|B)$ dos espaços de Mumford-Knudsen.

Proposição 5.3. A união dos divisores de fronteira em $\overline{M}_{g,n}(\mathbb{P}^r, d)$ é um divisor de cruzamento normais, módulo um quociente finito.

5.3.1 Estrutura recursiva

Lembre que no caso dos espaços de Mumford-Knudsen, o divisor de fronteira que corresponde a partição $A \cup B = [n]$ é naturalmente isomorfo (por colagem) ao produto fibrado:

$$\overline{M}_{0,A \cup \{x\}} \times \overline{M}_{0,B \cup \{x\}}$$

Como esperado, uma construção análoga existe para o divisor de fronteira $K = D(A, B; d_A, d_B)$ de $\overline{M}_{g,n}(\mathbb{P}^r, d)$. Se denotamos $\overline{M}_A = \overline{M}_{0,A \cup \{x\}}$ e $\overline{M}_B = \overline{M}_{0,B \cup \{x\}}$ e consideramos os mapas de avaliação na marca $\{x\}$: $e_A : \overline{M}_A \rightarrow X$ e $e_B : \overline{M}_B \rightarrow X$. Sejam ainda τ_A e τ_B as projeções de $\overline{M}_A \times \overline{M}_B$ no primeiro e segundo fator, respectivamente. Denotamos por \tilde{K} o produto fibrado $\tilde{K} = \overline{M}_A \times_{\mathbb{P}^r} \overline{M}_B$, com respeito aos mapas de avaliação e_A e e_B . Mostra-se que \tilde{K} é uma variedade projetiva normal de dimensão pura. Ademais, se $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$, existe um isomorfismo canônico $\psi : \tilde{K} \rightarrow D(A, B; d_A, d_B)$ (cf. FULTON and PANDHARIPANDE, 1995, Lema 12).

5.3.2 Divisores especiais

Para $n \geq 4$ podemos considerar a composição dos mapas de esquecimento: $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d) \rightarrow \overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, 4) \rightarrow \overline{M}_{0,4}$, o qual é um mapa plano. Definimos o divisor $D(ij|kl)$ em $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ como sendo o pull-back do divisor $(ij|kl)$ em $\overline{M}_{0,4}$. Em outras palavras:

$$D(ij|kl) = \sum D(A, B; d_A, d_B)$$

onde a soma é sobre todas as partições d-ponderadas tais que $i, j \in A$ e $k, l \in B$. Agora, lembrando que em $\overline{M}_{0,4} \cong \mathbb{P}^1$ os três divisores $D(ij|kl)$, $D(ik|jl)$, $D(il|jk)$ são equivalentes, obtemos a relação fundamental, uma equivalência entre os divisores especiais:

$$D(ij|kl) \equiv D(ik|jl) \equiv D(il|jk)$$

Tal equivalência será essencial na demonstração da fórmula de Kontsevich.

5.3.3 Lema de Recursão

Um resultado de extrema importância é o Lema de Recursão, provado abaixo, que será fundamental na demonstração da associatividade do produto quântico (vide o próximo capítulo). Vamos considerar os espaços mais gerais $\overline{M}_{0,g}(X, \beta)$, onde X é uma variedade homogênea e $\beta \in A^1 X$. Definimos os divisores $D(A, B; \beta_1, \beta_2)$. Seja $n \geq 4$ e $A \cup B$ uma partição de $[n]$ e $\beta_1 + \beta_2 = \beta \in A^1 X$. Assim, definimos:

$$D(A, B; \beta_1, \beta_2) := \overline{M}_{0,A \cup \{x\}}(X, \beta_1) \times_X \overline{M}_{0,B \cup \{x\}}(X, \beta_2) \subset \overline{M}_{0,n}(X, \beta)$$

Um ponto em $D(A, B; \beta_1, \beta_2)$ corresponde a uma mapa com domínio redutível $C = C_1 \cup C_2$ em que $\mu_*([C_i]) = \beta_i$, $i = 1, 2$. Os pontos marcados com índices em A (resp. B) pertencem a C_1 (resp. C_2) e as curvas C_1 e C_2 se intersectam no ponto x . E finalmente, a condição de produto fibrado na definição nos garante que os mapas tem o mesmo valor em x , de modo que eles colam bem para formar o mapa μ . Podemos enunciar agora o lema de recursão:

Lema 5.2 (Lema de Recursão). Seja

$$i : D(A, B; \beta_1, \beta_2) \hookrightarrow \overline{M}_{0, A \cup \{x\}}(X, \beta_1) \times \overline{M}_{0, B \cup \{x\}}(X, \beta_2)$$

a inclusão natural e seja α o mergulho natural de $D(A, B; \beta_1, \beta_2)$ como divisor em $\overline{M}_{0, n}(X, \beta)$. Então para quaisquer classes $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in A_1 X$, vale que:

$$\begin{aligned} i_* \circ \alpha^*(\rho_1^*(\gamma_1) \cup \dots \cup \rho_n^*(\gamma_n)) &= \\ &= \sum_{e, f} g^{ef} \left(\prod_{a \in A} \rho_a^*(\gamma_a) \cdot \rho_x^*(T_e) \right) \times \left(\prod_{b \in B} \rho_b^*(\gamma_b) \cdot \rho_x^*(T_f) \right) \end{aligned}$$

Demonstração. Para facilitar a notação, denote: $\overline{M}_A = \overline{M}_{0, A \cup \{x\}}(X, \beta_1)$, $\overline{M}_B = \overline{M}_{0, B \cup \{x\}}(X, \beta_2)$, $\overline{M} = \overline{M}_{0, n}(X, \beta)$ e $D = D(A, B; \beta_1, \beta_2)$. Da identificação de D com $\overline{M}_A \times_X \overline{M}_B$, temos o seguinte diagrama comutativo, onde o quadrado a direita é o produto fibrado.

$$\begin{array}{ccccc} \overline{M} & \xleftarrow{\alpha} & D & \xrightarrow{i} & \overline{M}_A \times \overline{M}_B \\ \downarrow \rho & & \downarrow \eta & & \downarrow \rho' \\ X^n & \xleftarrow{p} & X^{n+1} & \xrightarrow{\delta} & X^{n+2} \end{array}$$

Uma rápida explicação sobre os mapas que aparecem no diagrama. Aqui $\rho : \overline{M} \rightarrow X^n$ é o produto dos mapas de avaliação, os quais serão denotados por ρ_i . O mapa $\rho' : \overline{M}_A \times \overline{M}_B \rightarrow X^{n+2}$ é o produto dos mapas ρ_i e dois mapas ρ_x . O mapa $\delta : X^{n+1} \rightarrow X^{n+2}$ é o mergulho diagonal que repete o último fator. E $p : X^{n+1} \rightarrow X^n$ é a projeção nos primeiros n fatores. Assim, temos:

$$\begin{aligned} i_* \circ \alpha^*(\rho_1^*(\gamma_1) \cup \dots \cup \rho_n^*(\gamma_n)) &= i_* \circ \alpha^* \circ \rho^*(\gamma_1 \times \dots \times \gamma_n) \\ &= i_* \circ \eta^* \circ p^*(\gamma_1 \times \dots \times \gamma_n) \\ &= i_* \circ \eta^*(\gamma_1 \times \dots \times \gamma_n \times [X]) \\ &= \rho'^* \circ \delta_*(\gamma_1 \times \dots \times \gamma_n \times [X]) \\ &= \rho'^*(\gamma_1 \times \dots \times \gamma_n \times [\Delta]) \\ &= \sum_{e, f} g^{ef} \rho'^*(\gamma_1 \times \dots \times \gamma_n \times T_e \times T_f) \\ &= \sum_{e, f} g^{ef} \left(\prod_{a \in A} \rho_a^*(\gamma_a) \cdot \rho_x^*(T_e) \right) \times \left(\prod_{b \in B} \rho_b^*(\gamma_b) \cdot \rho_x^*(T_f) \right) \end{aligned}$$

Algumas explicações sobre essa cadeia de igualdades: a segunda linha segue da comuta-

tividade do diagrama; a terceira segue porque $p^*(\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n) = \gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n \times [X]$; a quarta segue da comutatividade do diagrama; a quinta porque $\delta_*(\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n \times [X]) = \gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n \times [\Delta]$; a sexta segue da fórmula de de KÄ $\frac{1}{4}$ neth; e a sétima é apenas uma reescritura da sexta linha. \square

5.4 Divisores em $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$

No caso em que $X = \mathbb{P}^r$, um estudo detalhado dos divisores de $\overline{M} = \overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ foi feito por (PANDHARIPANDE, 1999). Ele encontrou geradores explícitos para o grupo $\text{Pic}(\overline{M}) \otimes \mathbb{Q}$. Como consequência, ele exibiu um algoritmo efetivo para calcular os produtos de intersecção top. De posse destes produtos, é possível determinar todos os números característicos de curvas racionais no espaço projetivo. Nesta secção esboçaremos em linhas gerais os resultados obtidos por ele e no capítulo 6 determinaremos alguns desses números característicos utilizando sua técnica.

5.4.1 Geradores para o grupo de Picard

Denote por $\overline{M} = \overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$. Sua dimensão é $m = d(r+1) + r + n - 3$. Neste espaço, todo divisor de Weil é \mathbb{Q} -Cartier, portanto existe isomorfismo

$$\text{Pic} \otimes \mathbb{Q} \simeq A_{m-1}(\overline{M}) \otimes \mathbb{Q}$$

Assim, via este isomorfismo, todo divisor de Weil determina uma classe em $\text{Pic} \otimes \mathbb{Q}$. Considere as seguintes classes: Os n mapas da avaliação de \overline{M} determinam n fibrados em retas $\mathcal{L}_i = \nu_i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1))$. Denote ainda por Δ o conjunto das componentes de fronteira de \overline{M} . Finalmente, considere o divisor de Weil em \overline{M} que corresponde ao lugar dos mapas que intersectam um $(r-2)$ -espaço linear fixado de \mathbb{P}^r . Denote por \mathcal{H} a classe que corresponde a este divisor em $\text{Pic} \otimes \mathbb{Q}$. Se $d = 0$, ponha $\mathcal{H} = 0$. Em seu trabalho, Pandharipande mostrou que $\{\mathcal{H}\}, \{\mathcal{L}_i\} \cup \Delta$ é um conjunto de geradores para $\text{Pic} \otimes \mathbb{Q}$. Na secção 1.2, ele estabeleceu a independência \mathbb{Q} -linear destes geradores para $0 \leq n \leq 2$. Eis o resumo da ópera:

Teorema 5.4. Sejam $\mathcal{H}, \mathcal{L}_i, \Delta$ como acima. 1) Se $n \geq 3$, então $\text{Pic} \otimes \mathbb{Q}$ é gerado por $\Delta \cup \{\mathcal{H}\}$. 2) Se $n = 2$, então $\Delta \cup \{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\}$ é uma \mathbb{Q} -base para $\text{Pic} \otimes \mathbb{Q}$ 3) Se $n = 1$, então $\Delta \cup \{\mathcal{H}, \mathcal{L}_1\}$ é uma \mathbb{Q} -base para $\text{Pic} \otimes \mathbb{Q}$ 4) Se $n = 0$, então $\Delta \cup \{\mathcal{H}\}$ é uma \mathbb{Q} -base para $\text{Pic} \otimes \mathbb{Q}$

Demonstração. Vide (PANDHARIPANDE, 1999, secções 1.1 e 1.2) \square

5.4.2 O algoritmo de recursão

O objetivo é calcularmos os produtos top das classes geradoras e interpretarmos enumerativamente. O fato é que podemos nos utilizar da estrutura recursiva da fronteira de \overline{M} e reduzir o cálculo a espaços de dimensão menor ou com menos marcas. Como sabemos o valor inicial $N_1 =$ retas passando por dois pontos distintos $= 1$, o algoritmo determinará completamente todos os outros números característicos. Sejam $K, \tilde{K}, e_A, e_B, \tau_A, \tau_B, \overline{M}_A, \overline{M}_B, \psi$ como na secção 4.3.1. A classe de \tilde{K} pode ser expressa, via decomposição de Kunneth, por

$$[\tilde{K}] = \sum_{i=0}^r \tau_A^*(c_1(\mathcal{L}_A)^i) \cdot \tau_B^*(c_1(\mathcal{L}_B)^{r-i})$$

onde \mathcal{L}_A e \mathcal{L}_B são os fibrados em retas induzidos pelas marcas p_A, p_B . O pullback de \mathcal{H} via ψ é expresso

$$\psi^*(\mathcal{H}) = (\tau_A^*(\mathcal{H}_A) + \tau_B^*(\mathcal{H}_B))|_{\tilde{K}}$$

onde \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B denotam classes de hiperplanos de codimensão 2 em \overline{M}_A e \overline{M}_B respectivamente. Segue ainda que

$$\psi^*(\mathcal{L}_i) = \tau_A^*(\mathcal{L}_i)|_{\tilde{K}} \text{ ou } \psi^*(\mathcal{L}_i) = \tau_B^*(\mathcal{L}_i)|_{\tilde{K}}$$

dependendo se a marca p_i está em A ou B . Considere agora uma outra componente de fronteira $T = (A' \cup B'; d_{A'}, d_{B'})$ diferente de K . Então T intersecta K exatamente quando uma das duas situações abaixo ocorre: i) Existe um subconjunto $C \subset A$ e um inteiro d_C tais que

$$T = ((A \setminus C) \cup (B \cup C); d_A - d_C, d_B + d_C)$$

ou seu 'dual': ii) Existe um subconjunto $C \subset B$ e um inteiro d_C tais que

$$T = ((A \cup C) \cup (B \setminus C); d_A + d_C, d_B - d_C)$$

Assim, podemos escrever:

$$\psi^*(T) = \sum_{C, d_C} \tau_A^*(A \cup (C \cup \{p_A\}), d_A, d_C)|_{\tilde{K}} + \sum_{C, d_C} \tau_B^*(B \cup (C \cup \{p_B\}), d_B, d_C)|_{\tilde{K}}$$

onde as somas são sob todos os pares (C, d_C) que satisfazem a condição i) e ii) respectivamente. Seja $\overline{M}^* \subset \overline{M}$ o lugar dos mapas livres de automorfismos e $\pi : \overline{U}^* \rightarrow \overline{M}^*$ a família universal, munida das secções S_1, \dots, S_n e do morfismo $\mu : \overline{U}^* \rightarrow \mathbb{P}^r$. Seja ω_π o feixe dualizante relativo a π . Considere os elementos $\pi_*(c_1(\omega_\pi)^2)$ e $\pi_*(s_i^2)$ pertencentes a $\text{Pic}(\overline{M}) \otimes \mathbb{Q}$ via a identificação $\text{Pic}(\overline{M}) \otimes \mathbb{Q} \simeq A_{m-1}(\overline{M}) \otimes \mathbb{Q}$. Podemos expressar essas

classes em termos dos geradores $\{\mathcal{H}\}, \{\mathcal{L}_i\}, \Delta$. Pandharipande determinou explicitamente os coeficientes. Vamos estabelecer a notação. Considere a partição

$$\Delta = \bigcup_{j=1}^{n-1} \Delta_j^1$$

onde $(A \cup B) \in \Delta_j^1$ se, e somente se, $1 \in A$ e $|A| = j$. Defina

$$K_j^1 = \sum_{K \in \Delta_j^1} K$$

Também temos essa outra decomposição:

$$\Delta = \bigcup_{j=1}^{n-1} \Delta^{1,j}$$

onde $(A \cup B, d_A, d_B) \in \Delta^{1,j}$ se, e somente se, $1 \in A$ e $d_A = j$. Defina:

$$K^{1,j} = \sum_{K \in \Delta^{1,j}} K$$

Proposição 5.4. Com as notações acima, temos: 1) Para $r \geq 2$ e $d \geq 0$, vale:

$$\pi_*(c_1(\omega_\pi)^2) = - \sum_{K \in \Delta} K \text{ em } \text{Pic} \otimes \mathbb{Q}$$

2) Para $d = 0$, vale:

$$\pi_*(s_1^2) = - \frac{1}{\binom{n-1}{2}} \sum_{j=2}^{n-2} \binom{n-j}{2} K_j^1 \text{ em } \text{Pic} \otimes \mathbb{Q}$$

3) Para $d \geq 1$, vale:

$$\pi_*(s_1^2) = - \frac{1}{d^2} \mathcal{H} + \frac{2}{d} \mathcal{L}_1 - \sum_{j=0}^d \frac{(d-j)^2}{d^2} k^{1,j}$$

Demonstração. As provas completas podem ser encontradas em (PANDHARIPANDE, 1999, Lemas 2.1.2, 2.2.1 e 2.2.2). \square

Sejam agora $\omega_{\pi_A}, \omega_{\pi_B}$ os feixes dualizantes das famílias universais sobre \overline{M}_A e

\overline{M}_B e s_{p_A}, s_{p_B} definidos da forma óbvia. Então vale a relação

$$\begin{aligned} -\psi^*(K) &= \sum_{T \in \Delta, T \neq K} \psi^*(T) + \tau_A^*(\pi_{A*}(c_1(\omega_{\pi_A})^2 - s_{p_A}^2)) \\ &+ \tau_B^*(\pi_{B*}(c_1(\omega_{\pi_B})^2 - s_{p_B}^2)) \end{aligned}$$

Agora está claro como funciona o algoritmo. Como podemos expressar $\pi_{A*}(c_1(\omega_{\pi_A})^2$ e $\pi_{A*}(s_{p_A}^2)$ explicitamente em termos das classes $\{\mathcal{L}_i\}, \{\mathcal{H}\}, \Delta$ em \overline{M}_A e similarmente em \overline{M}_B , o mesmo é verdade para $\psi^*(K)$. E pelas equações acima, o pullback via ψ de $\{\mathcal{L}_i\}, \{\mathcal{H}\}, \Delta$ em \overline{M} pode ser expresso como a restrição a \tilde{K} dos pullback via τ_A, τ_B das classes correspondentes em $\overline{M}_A, \overline{M}_B$. Assim, os monômios top em \overline{M} são conhecidos. Se um deles inclui uma classe de fronteira, K , a intersecção acontece em \tilde{K} e as fórmulas acima nos permite escrevê-lo como uma soma de produtos top das classes correspondentes em $\overline{M}_A, \overline{M}_B$, que possuem grau menor ou menos marcas, logo o processo termina.

6 INVARIANTES DE GROMOV-WITTEN

O objetivo central desse capítulo é estudar os invariantes de Gromov-Witten, que são obtidos calculando o grau de certos ciclos no espaço de Kontsevich. Estudaremos suas propriedades e veremos sua interpretação enumerativa. A seguir, veremos como usá-los para construir o anel de cohomologia quântica de uma variedade homogênea X . Em particular, será definido um produto e, a partir de sua associatividade, obteremos relações entre os coeficientes de uma determinada função potencial. Ao estudarmos o caso em que $X = \mathbb{P}^2$, encontraremos a fórmula de Kontsevich.

6.1 Definições e conceitos básicos

Definição 6.1. Seja X uma variedade homogênea, $\overline{M}_{0,n}(X, \beta)$ o espaço moduli de mapas estáveis n -marcados com gênero $g = 0$. Sejam ainda $\rho_i : \overline{M}_{0,n}(X, \beta) \rightarrow X$ os morfismos de avaliação. Dadas classes arbitrárias $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in A^*X$, podemos construir uma classe de cohomologia

$$\rho_1^*(\gamma_1) \cup \dots \cup \rho_n^*(\gamma_n)$$

sobre $\overline{M}_{0,n}(X, \beta)$ e então calcular sua componente homogênea de codimensão máxima na classe fundamental para produzir um número, chamado *invariante de Gromov-Witten*:

$$I_\beta(\gamma_1 \cdots \gamma_n) = \int_{\overline{M}_{0,n}(X, \beta)} \rho_1^*(\gamma_1) \cup \dots \cup \rho_n^*(\gamma_n)$$

Se as classes são homogêneas, tal número será não-nulo se, e somente se, a soma de suas codimensões for igual a dimensão de $\overline{M}_{0,n}(X, \beta)$:

$$\sum \text{codim}(\gamma_i) = \dim X + \int_\beta c_1(T_X) + n - 3$$

Segue da definição que $I_\beta(\gamma_1 \cdots \gamma_n)$ é invariante por permutação das classes $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Denotamos por $M_{0,n}^*(X, \beta)$ o lugar dos mapas sem automorfismos.

Lema 6.1. Se $n \geq 1$ então $M_{0,n}^*(X, \beta) \subset \overline{M}_{0,n}(X, \beta)$ é um aberto denso.

Demonstração. Se $\beta = 0$, então $\overline{M}_{0,n}(X, 0) \neq \emptyset$ se, e somente se, $n \geq 3$. De fato, $\overline{M}_{0,n}(X, 0) = \overline{M}_{0,n} \times X$. Deste modo, a igualdade $M_{0,n}^*(X, 0) = \overline{M}_{0,n}(X, 0)$ segue da igualdade correspondente igualdade entre os $\overline{M}_{0,n}$. Suponha $\beta \neq 0$. Sabemos que $M_{0,n}(X, \beta) \subset \overline{M}_{0,n}(X, \beta)$ é um aberto denso. Seja $(\mathbb{P}^1, \{p_i\}, \mu)$ um ponto em $M_{0,n}(X, \beta)$. É suficiente mostrarmos que $(\mathbb{P}^1, \{p'_i\}, \mu)$ é livre de automorfismos para pontos gerais $p_i \in \mathbb{P}^1$. O grupo de automorfismos A do mapa não-marcado $\mu : \mathbb{P}^1 \rightarrow X$ é finito, uma vez que $\beta \neq 0$. Existe um aberto não-vazio, de \mathbb{P}^1 constituído de pontos com não fixados por τ , para todo $\tau \in A$. Tome p'_1, \dots, p'_n pertencentes a este aberto. Logo $(C, \{p'_i\}\mu)$ é

livre de automorfismos. □

Consideremos agora um grupo algábrico G agindo transitivamente numa variedade X . Sejam $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ subvariedades de X de dimensão pura e $\gamma_i = [\Gamma_i] \in A^*X$ as classes correspondentes. Suponha

$$\sum \text{codim}(\gamma_i) = \dim X + \int_{\beta} c_1(T_X) + n - 3$$

Denote por $g\Gamma_i$ o g -translado de Γ por $g \in G$. O resultado que queremos provar á que a inteseccão

$$\rho_1^{-1}(g_1\Gamma_1) \cap \dots \cap \rho_n^{-1}(g_n\Gamma_n)$$

á um número finito de pontos. E mais, o invariante de Gromov-Witten relacionado á extamente igual ao número de pontos desta intersecção:

$$I_{\beta}(\gamma_1 \cdots \gamma_n) = \# \rho_1^{-1}(g_1\Gamma_1) \cap \dots \cap \rho_n^{-1}(g_n\Gamma_n)$$

Se isso for realmente verdade, então teremos uma interpretação enumerativa para os invariantes de Gromov-Witten. Vemos que $I_{\beta}(\gamma_1 \cdots \gamma_n)$ á precisamente o número de mapas marcados $\mu : \mathbb{P}^1 \rightarrow X$ tais que $\mu(p_i) \in g_i\Gamma_i$ para todo i (alám da condição $\mu_*([\mathbb{P}^1]) = \beta$). Vejamos os detalhes.

Lema 6.2. Para escolhas genéricas de $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \subset X$ com $\sum \text{codim}(\gamma_i) = \dim \overline{M}_{0,n}(X, \beta)$, a intersecção esquemática

$$\rho_1^{-1}(g_1\Gamma_1) \cap \dots \cap \rho_n^{-1}(g_n\Gamma_n)$$

consiste em um número finito de pontos reduzidos, com suporte contido em qualquer aberto não-vazio pre-fixado. Em particular, tal intersecção está contida em M^* , o lugar dos mapas livre de automorfismos com domínio irredutível.

Demonstração. Faremos a prova para o aberto M^* , mas ficará claro que o argumento funcionará pra um aberto qualquer. Seja \underline{G} o produto de n cópias de G . Assim, \underline{G} age transitivamente em X^n . Apliquemos o teorema de Kleiman 2.1 com $Z = \overline{M} \setminus M^*$. Observe que Z á uma subvariedade fechada de codimensão ≥ 1 em $\overline{M} = \overline{M}_{0,n}(X, \beta)$. Dado um $\sigma \in \underline{G}$, a imagem inversa do translado $\underline{\Gamma}^{\sigma}$ á identificado com o produto fibrado

$$\underline{\Gamma}^{\sigma} \times_{X^n} Z$$

Tome $Y = \underline{\Gamma}$. Pelo teorema de Kleiman 2.1, existe um aberto denso $V_1 \subset \underline{G}$ tal que para todo $\sigma \in V_1$, temos que $\underline{\Gamma}^{\sigma} \times_{X^n} Z$ á vazio ou tem $\dim \underline{\Gamma}^{\sigma} \times_{X^n} Z = \dim \underline{\Gamma} + \dim Z - \dim X^n$.

Mas

$$\begin{aligned} \dim \underline{\Gamma} + \dim Z - \dim X^n &= \dim \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_n + \dim Z - \dim X^n \\ &= \dim Z - \sum \operatorname{codim} \Gamma_i < 0 \end{aligned}$$

Logo concluímos que $\Gamma^\sigma \times_{X^n} Z$ é vazio. Assim, em geral, a intersecção é suportada em M^* . Seja agora $Y = \operatorname{Sing} \underline{\Gamma}$ e aplique o teorema de Kleiman 2.1 ao diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & M^* \\ & & \downarrow \\ Y \hookrightarrow & \longrightarrow & X^n \end{array}$$

onde o mapa vertical é $\rho : M^* \rightarrow X^n$. Novamente, como $\dim \operatorname{Sing} \underline{\Gamma} + \dim M^* - \dim X^n < 0$ concluímos que existe aberto denso $V_2 \subset \underline{G}$ tal que $\rho^{-1}(Y^\sigma) = \emptyset$ para todo $\sigma \in V_2$. Tome agora $Y = \underline{\Gamma} \setminus \operatorname{Sing} \underline{\Gamma}$. Agora estamos trabalhando com variedade lisas e mais $\dim Y + \dim Z - \dim X^n = \dim \overline{M} - \sum \operatorname{codim} \Gamma_i = 0$. Logo existe um terceiro aberto denso $V_3 \subset \underline{G}$ tal que para todo $\sigma \in V_3$, a imagem inversa do translado é liso e de dimensão 0 (ou vazio). Portanto consiste em um número finitos de pontos reduzidos (talvez vazio). Se tomarmos um $\sigma \in V_1 \cap V_2 \cap V_3$ a imagem inversa do translado será portanto um número finito de pontos reduzidos inteiramente contido em M^* . \square

Já sabemos então que a intersecção esquemática $\rho_1^{-1}(g_1 \Gamma_1) \cap \cdots \cap \rho_n^{-1}(g_n \Gamma_n)$ é finita, mas falta ainda relacionar com os invariantes de Gromov-Witten. é o que será feito no lema abaixo.

Lema 6.3. Com as hipóteses e notação acima, temos que

$$I_\beta(\gamma_1 \cdots \gamma_n) = \# \rho_1^{-1}(g_1 \Gamma_1) \cap \cdots \cap \rho_n^{-1}(g_n \Gamma_n)$$

Demonstração. Suponha $n \geq 1$. Assim, pelo Lema 5.1, $M_{0,n}^*(X, \beta) \subset \overline{M}_{0,n}(X, \beta)$ é um aberto denso, logo pelo Lema 2 a intersecção $\rho_1^{-1}(g_1 \Gamma_1) \cap \cdots \cap \rho_n^{-1}(g_n \Gamma_n)$ consiste em um número finito de pontos reduzidos suportados em $M_{0,n}^*(X, \beta)$. Considere agora o diagrama fibrado:

$$\begin{array}{ccc} \bigcap \rho_i^{-1}(g_i \Gamma_i) & \longrightarrow & \overline{M} \times \prod g_i \Gamma_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{M} & \xrightarrow{i} & \overline{M} \times X^n \end{array}$$

onde $\overline{M} = \overline{M}_{0,n}(X, \beta)$ e i é o gráfico do morfismos (ρ_1, \dots, ρ_n) . Deste diagrama obtemos que

$$\prod \rho_i^*[g_i \Gamma_i] \cap [\overline{M}] = i^* \left[\overline{M} \times \prod g_i \Gamma_i \right] = \left[\bigcap \rho_i^{-1}(g_i \Gamma_i) \right]$$

em $A_0(\overline{M})$, que á a asserção requerida. \square

6.2 Propriedade básicas dos invariantes

Veamos como calcular os invariantes de Gromov-Witten em alguns casos particulares.

1 $\hat{\mathbf{A}}^\circ$ Caso: $\beta = \mathbf{0}$ Neste caso, $\overline{M}_{0,n}(X, \beta) = \overline{M}_{0,n} \times X$ (Proposição 5.1) e os mapas ρ_i são todos iguais a projeção $p : \overline{M}_{0,n} \times X \rightarrow X$ no segundo fator. Como

$$\rho_1^*(\gamma_1) \cup \cdots \cup \rho_n^*(\gamma_n) = p^*(\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_n)$$

então

$$I_0(\gamma_1 \cdots \gamma_n) = \int_{\overline{M}_{0,n} \times X} p^*(\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_n) = \int_{p_*(\overline{M}_{0,n} \times X)} \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_n$$

onde a última igualdade á a fórmula de projeção. Agora, observe que $\overline{M}_{0,n}$ á vazio se $0 \leq n \leq 2$. E se $n > 3$, então p tem fibras de dimensão positiva, logo $p_*(\overline{M}_{0,n} \times X) = 0$. Sendo assim, a única maneira de $I_0(\gamma_1 \cdots \gamma_n)$ ser não nulo á quando $n = 3$. E $\overline{M}_{0,3}$ á um ponto, e neste caso $I_0(\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3)$ á o número de intersecção clássico: $\int_X \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$. **2 $\hat{\mathbf{A}}^\circ$**

Caso: $\gamma_1 = \mathbf{1} \in \mathbf{A}^0 \mathbf{X}$ Se $\beta \neq \mathbf{0}$, então o produto $\rho_1^*(\gamma_1) \cup \cdots \cup \rho_n^*(\gamma_n)$ á o pull-back de uma classe em $\overline{M}_{0,n-1}(X, \beta)$ pelo mapa de esquecimento $\epsilon : \overline{M}_{0,n}(X, \beta) \rightarrow \overline{M}_{0,n-1}(X, \beta)$ que esquece a primeira marca. Mas como as fibras desse mapa tem dimensão positiva, então $I_\beta(\mathbf{1} \cdot \gamma_2 \cdots \gamma_n) = 0$. E se considerarmos $\beta = \mathbf{0}$, então pelo 1 $\hat{\mathbf{A}}^\circ$ Caso, $I_0(\mathbf{1} \cdot \gamma_1 \cdots \gamma_n)$ se anula, a menos que $n = 3$. E neste caso, $I_0(\mathbf{1} \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3) = \int_X \gamma_2 \cup \gamma_3$. **3 $\hat{\mathbf{A}}^\circ$ Caso:**

$\gamma_1 \in \mathbf{A}^1 \mathbf{X}$ e $\beta \neq \mathbf{0}$ Neste caso, tem-se:

$$I_\beta(\gamma_1 \cdots \gamma_n) = \left(\int_\beta \gamma_1 \right) \cdot I_\beta(\gamma_2 \cdots \gamma_n)$$

De fato, intuitivamente, para um mapa $\mu : C \rightarrow X$ com $\mu_*([C]) = \beta$, existem $\int_\beta \gamma_1$ escolhas para o que o ponto $p_1 \in C$ seja mapeado em Γ_1 (onde $\gamma_1 = [\Gamma_1]$). Para uma prova formal, considere o mapa

$$\psi : \overline{M}_{0,n}(X, \beta) \rightarrow X \times \overline{M}_{0,n-1}(X, \beta)$$

que á o produto de ρ_1 com o mapa que esquece a primeira marca. Pela fórmula de $\text{K}\tilde{\mathbf{A}}_{\frac{1}{4}}^{\text{neth}}$, podemos escrever $\psi_*[\overline{M}_{0,n}(X, \beta)] = \beta' \times [\overline{M}_{0,n-1}(X, \beta)] + \alpha$, onde β' á uma classe em $A_1 X$ e α á alguma classe de homologia que á suportada sobre um fechado próprio de $\overline{M}_{0,n-1}(X, \beta)$. A classe de β' pode ser calculada restringindo ao que acontece sobre o ponto genérico de $\overline{M}_{0,n-1}(X, \beta)$. Representando tal ponto por $(C, p_1, \dots, p_n, \mu)$,

com \mathbb{P}^1 , vemos que a fibra deste ponto é isomorfa a C e $\beta' = \mu_*([C]) = \beta$. Usando a fórmula de projeção, segue que

$$\begin{aligned} I_\beta(\gamma_1 \cdots \gamma_n) &= \int_{\beta \times [\overline{M}_{0,n-1}(X,\beta)]} \gamma_1 \times \rho_2^*(\gamma_2) \cup \cdots \cup \rho_n^*(\gamma_n) \\ &= \left(\int_\beta \gamma_1 \right) \cdot \int_{\overline{M}_{0,n-1}(X,\beta)} \rho_2^*(\gamma_2) \cup \cdots \cup \rho_n^*(\gamma_n) \\ &= \left(\int_\beta \gamma_1 \right) \cdot I_\beta(\gamma_2 \cdots \gamma_n) \end{aligned}$$

Devemos observar que o elemento genérico de $\overline{M}_{0,0}(X, \beta)$ pode não ser um mapa birracional $\mathbb{P}^1 \rightarrow X$. Isso fica claro se tomarmos, por exemplo, $X = \mathbb{P}^1$. Neste caso, o elemento genérico de $\overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^1, d)$ é um recobrimento de d folhas de \mathbb{P}^1 .

6.3 O anel de cohomologia quântica

Seja $T_0 = 1 \in A^0 X$, T_1, \dots, T_p uma base de $A^1 X$ e T_{p+1}, \dots, T_m uma base para os outros grupos de cohomologia. As classes de variedade de Schubert formam uma base natural para variedades homogêneas. Os números fundamentais contados pelos invariantes de Gromov-Witten são os números

$$N(n_{p+1}, \dots, n_m; \beta) = I_\beta(T_{p+1}^{n_{p+1}}, \dots, T_m^{n_m})$$

para $n_i \geq 0$. Os números acima são não-nulos somente quando $\sum n_i(\text{codim} T_i - 1) = \dim X + \int_\beta c_1(T_X) - 3$. E neste caso, esse é o número de mapas racionais marcados que intersectam n_i representantes gerais dos T_i para cada $i = p+1, \dots, m$. Defina agora os números g_{ij} para $0 \leq i, j \leq m$ da seguinte maneira:

$$g_{ij} = \int_X T_i \cup T_j$$

Observe que se os T_i forem classes de Schubert então para cada i existe um único j tal que $g_{ij} \neq 0$ e para este j de fato tem-se $g_{ij} = 1$. Seja então (g^{ij}) a inversa da matriz (g_{ij}) . Ou, de forma equivalente, a classe da diagonal Δ em $X \times X$ é dada por:

$$[\Delta] = \sum_{e,f} g^{ef} T_e \otimes T_f$$

em $A^*(X \times X) = A^* X \otimes A^* X$. Assim, vale a seguinte relação para o produto 'cup':

$$T_i \cup T_j = \sum_{e,f} \left(\int_X T_i \cup T_j \cup T_e \right) g^{ef} T_f = \sum I_0(T_i \cdot T_j \cdot T_e) g^{ef} T_f$$

A ideia é definir uma espécie de 'deformação quântica' para o produto cup, permitindo agora classes não-nulas β . E aqui entra uma idéia da Física: escrever uma função potencial que carrega toda a informação enumerativa. Assim, dada uma classe $\gamma \in A^*X$, defina a $\Phi(\gamma)$ por:

$$\Phi(\gamma) = \sum_{n \geq 3} \sum_{\beta} \frac{1}{n!} I_{\beta}(\gamma^n)$$

A soma, em princípio, é tomada sob todos os $n \geq 3$ e sob todos as classes $\beta \in A_1X$, mas ela de fato faz sentido como série formal, pelo seguinte Lema:

Lema 6.4. Para um dado inteiro n , existe somente um número finito de classes $\beta \in A_1X$ tais que $I_{\beta}(\gamma^n) \neq 0$

Demonstração. Como X é um espaço homogêneo, as classes efetivas em A_1X são combinações lineares não-negativas de um número finito de classes efetivas não-nulas β_1, \dots, β_p . Temos que $\int_{\beta_i} c_1(T_X) \geq 2$ (cf. FULTON and PANDHARIPANDE, 1995, Lema 11). Portanto, para um dado inteiro N , existe apenas um número finito de classes efetiva β para as quais tem-se $\int_{\beta} c_1(T_X) \leq N$. Se $I_{\beta}(\gamma^n) \neq 0$, então

$$\dim M_{0,n}(X, \beta) \leq n \dim X$$

o que implica que

$$\int_{\beta} c_1(T_X) \leq (n-1) \dim X + 3 - n$$

□

Seja $\gamma = \sum y_i T_i$. O Lema garante que $\Phi(y) = \Phi(y_0, \dots, y_m)$ torna-se uma série formal em $\mathbb{Q}[[y]] = \mathbb{Q}[[y_0, \dots, y_m]]$:

$$\Phi(y_0, \dots, y_m) = \sum_{n_0 + \dots + n_m \geq 3} \sum_{\beta} I_{\beta}(T_0^{n_0} \dots T_m^{n_m}) \frac{y_0^{n_0}}{n_0!} \dots \frac{y_m^{n_m}}{n_m!}$$

pois

$$\gamma^n = \left(\sum y_i T_i \right)^n = n! \sum \frac{y_0^{n_0}}{n_0!} \dots \frac{y_m^{n_m}}{n_m!} T_0^{n_0} \dots T_m^{n_m}$$

pela fórmula binomial. Agora defina

$$\Phi_{ijk} = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y_i \partial y_j \partial y_k} \quad 0 \leq i, j, k \leq m$$

Vamos reescrever esses Φ_{ijk} em função de γ e das classes T_i, T_j, T_k . Note por exemplo que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_k} = \sum_{n_0 + \dots + n_m \geq 3} \sum_{\beta} I_{\beta}(T_0^{n_0} \dots T_m^{n_m}) \frac{y_0^{n_0}}{n_0!} \dots \frac{y_k^{n_k-1}}{(n_k-1)!} \dots \frac{y_m^{n_m}}{n_m!}$$

e analogamente com as outras derivadas, de modo que no final temos:

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y_i \partial y_j \partial y_k} = \sum_{n_0 + \dots + n_m \geq 3} \sum_{\beta} I_{\beta}(T_0^{n_0} \dots T_m^{n_m}) \frac{y_0^{n_0}}{n_0!} \dots \frac{y_i^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \dots \frac{y_j^{n_j-1}}{(n_j-1)!} \dots \frac{y_k^{n_k-1}}{(n_k-1)!} \dots \frac{y_m^{n_m}}{n_m!}$$

Após uma mudança de índices, obtemos:

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y_i \partial y_j \partial y_k} = \sum_{n_0 + \dots + n_m \geq 0} \sum_{\beta} I_{\beta}(T_0^{n_0} \dots T_i^{n_i+1} \dots T_j^{n_j+1} \dots T_k^{n_k+1} \dots T_m^{n_m}) \frac{y_0^{n_0}}{n_0!} \dots \frac{y_m^{n_m}}{n_m!}$$

Agora,

$$\gamma^n \cup T_i \cup T_j \cup T_k = n! \sum_{n_0 + \dots + n_m = n} \frac{y_0^{n_0}}{n_0!} \dots \frac{y_m^{n_m}}{n_m!} T_0^{n_0} \dots T_m^{n_m} T_i \cdot T_j \cdot T_k$$

daí

$$\frac{1}{n!} I_{\beta}(\gamma \cdot T_i \cdot T_j \cdot T_k) = \sum_{n_0 + \dots + n_m = n} I_{\beta}(T_0^{n_0} \dots T_m^{n_m} \cdot T_i \cdot T_j \cdot T_k) \frac{y_0^{n_0}}{n_0!} \dots \frac{y_m^{n_m}}{n_m!}$$

E portanto,

$$\Phi_{ijk} = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y_i \partial y_j \partial y_k} = \sum_{n \geq 0} \sum_{\beta} \frac{1}{n!} I_{\beta}(\gamma \cdot T_i \cdot T_j \cdot T_k) \quad (1)$$

Defina agora um produto "quântico" $*$ pela fórmula:

$$T_i * T_j = \sum_{e,f} \Phi_{ije} g^{ef} T_f$$

e estendemos por linearidade para o $\mathbb{Q}[[y]]$ -módulo $A^* X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}[[y]]$, tornando-o assim uma $\mathbb{Q}[[y]]$ -álgebra. Como as derivadas parciais são simétricas nos índices, o produto é claramente comutativo:

$$T_i * T_j = \sum_{e,f} \Phi_{ije} g^{ef} T_f = \sum_{e,f} \Phi_{jie} g^{ef} T_f = T_j * T_i$$

Segue também que $T_0 = 1$ é uma unidade para este produto. De fato, segue da propriedade (II) e da definição que:

$$\Phi_{0ik} = I_0(T_0 \cdot T_j \cdot T_k) = \int_X T_j \cup T_k = g_{jk}$$

e então temos:

$$T_0 * T_j = \sum_{e,f} \Phi_{0je} g^{ef} T_f = \sum_{e,f} g_{je} g^{ef} T_f = \sum_f \delta_{jf} T_f = T_j$$

O ponto principal é provarmos a associatividade do produto quântico e esta seguirá das propriedades recursivas da fronteira dos espaços $\overline{M}_{0,n}(X, \beta)$. Para este fim, o Lema de Recursão 5.2 será fundamental.

Proposição 6.1. O anel $A^*X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}[[y]]$ munido da soma usual e do produto quântico * á uma $\mathbb{Q}[[y]]$ -álgebra comutativa e associativa com unidade T_0

Demonstração. Obviamente, basta mostrar a associatividade nos geradores T_i . Escrevamos explicitamente cada termo:

$$(T_i * T_j) * T_k = \left(\sum_{e,f} \Phi_{ije} g^{ef} T_f \right) * T_k = \sum_{e,f} \sum_{c,d} \Phi_{ije} g^{ef} \Phi_{fkc} g^{cd} T_d$$

e

$$T_i * (T_j * T_k) = \sum_{e,f} \Phi_{jke} g^{ef} T_i * T_f = \sum_{e,f} \sum_{c,d} \Phi_{jke} g^{ef} \Phi_{ifc} g^{cd} T_d$$

Como a matriz (g^{cd}) é não-singular, a igualdade $(T_i * T_j) * T_k = T_i * (T_j * T_k)$ é equivalente a equação

$$\sum_{e,f} \Phi_{ije} g^{ef} \Phi_{fkl} = \sum_{e,f} \Phi_{jke} g^{ef} \Phi_{ifl} \quad \forall l$$

Denotemos

$$F(i, j|k, l) = \sum_{e,f} \Phi_{ije} g^{ef} \Phi_{fkl}$$

Usando a simetria $\Phi_{ifl} = \Phi_{fil}$, vemos que a associatividade é equivalente a

$$F(i, j|k, l) = F(j, k|i, l)$$

Segue da equação 1 que

$$F(i, j|k, l) = \sum \frac{1}{n_1! n_2!} I_{\beta_1}(\gamma^{n_1} \cdot T_i \cdot T_j \cdot T_e) g^{ef} I_{\beta_2}(\gamma^{n_2} \cdot T_k \cdot T_l \cdot T_f)$$

onde a soma é sob todos os inteiros não-negativos n_1, n_2 , sob todos $\beta_1, \beta_2 \in A_1X$ e sob todos os $0 \leq e, f \leq m$. Agora, fixe um $\beta \in A_1X$ e $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in A^*X$ e fixe quatro inteiros distintos q, r, s, t em $[n]$. Denote

$$G(q, r|s, t) = \sum g^{ef} I_{\beta_1} \left(\prod_{a \in A} \gamma_a \cdot T_e \right) \cdot I_{\beta_2} \left(\prod_{b \in B} \gamma_b \cdot T_f \right)$$

onde esta soma é sob todas as partições de $[n]$ em dois conjuntos A e B tais que $q, r \in A$ e $s, t \in B$ e sob todos os β_1 e β_2 com $\beta_1 + \beta_2 = \beta$ e sob todos os $0 \leq e, f \leq m$. Segue do

Lema de Recursão que

$$G(q, r|s, t) = \sum \int_{D(A, B; \beta_1, \beta_2)} \rho_1^*(\gamma_1) \cup \cdots \cup \rho_n^*(\gamma_n)$$

onde a soma é sob todos os A, B e β_1, β_2 como acima. Por outro lado, como os divisores $D(i, j|k, l)$ e $D(i, l|j, k)$ são equivalentes, obtemos:

$$G(q, r|s, t) = G(r, s|q, t)$$

Agora, aplicamos esta última equação ao caso particular:

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \gamma \text{ para } 1 \leq i \leq n-4 \\ \gamma_{n-3} &= T_i; \quad \gamma_{n-2} = T_j; \quad \gamma_{n-1} = T_k \text{ e } \gamma_n = T_l \\ q &= n-3, \quad r = n-2, \quad s = n-1, \quad t = n \end{aligned}$$

temos que:

$$G(q, r|s, t) = \sum \binom{n-4}{n_1-2} g^{ef} I_{\beta_1}(\gamma^{n_1-2} \cdot T_i \cdot T_j \cdot T_e) \cdot I_{\beta_2}(\gamma^{n_2-2} \cdot T_k \cdot T_l \cdot T_f)$$

onde a soma é sob todos $n_1, n_2 \geq 2$ com $n_1 + n_2 = n$ e $\beta_1 + \beta_2 = \beta$. O coeficiente binomial que aparece é o número de partições $A \cup B = [n]$ para as quais A (resp. B) possui n_1 (resp. n_2) elementos. Mas a equação acima pode ser reescrita:

$$G(q, r|s, t) = (n-4)! \sum \frac{1}{n_1! n_2!} g^{ef} I_{\beta_1}(\gamma^{n_1} \cdot T_i \cdot T_j \cdot T_e) \cdot I_{\beta_2}(\gamma^{n_2} \cdot T_k \cdot T_l \cdot T_f)$$

onde a soma é sob todos os inteiros não negativos n_1, n_2 com $n_1 + n_2 = n$ e sob todas as classes β_1, β_2 com $\beta_1 + \beta_2 = \beta$. Dai segue que $F(i, j|k, l) = F(j, k|i, l)$ e a prova está completa. \square

Observe que a definição do anel de cohomologia quântica depende da escolha da base $\{T_0, \dots, T_m\}$ de A^*X . Entretanto, os anéis obtidos por bases diferentes são canonicamente isomorfos. As variáveis y_0, \dots, y_m devem ser identificadas com a base dual de T_0, \dots, T_m . Se $\{T'_0, \dots, T'_m\}$ é outra base de A^*X e $T'_i = \sum a_{ij} T_j$ é a mudança de coordenadas, seja $y_i = \sum a_{ji} y'_j$ a mudança de coordenadas dual. Esta última relação nos dá um isomorfismo de \mathbb{Q} -espaços vetoriais:

$$A^*X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}[[y]] \cong A^*X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}[[y']]$$

7 INVARIANTES E GEOMETRIA ENUMERATIVA

7.1 A Fórmula de Kontsevich

Invariantes de Gromov-Witten e cohomologia quântica podem simplificar muito a investigação de certos problemas enumerativos. Se conseguirmos interpretar a informação enumerativa que estamos interessado como invariantes de GW, podemos nos utilizar da associatividade do produto quântico associado e extrairmos relações entre os números característicos envolvidos. Com sorte, essas relações determinam completamente a informação procurada. Vejamos como isso se procede. Podemos escrever a função potencial Φ como uma soma, da parte 'clássica' com a parte 'quântica':

$$\Phi(y_0, \dots, y_m) = \Phi_{\text{cl}}(y) + \Phi_{\text{qu}}(y)$$

A parte clássica envolve os termos com $\beta = 0$:

$$\Phi_{\text{cl}}(y) = \sum_{n_0 + \dots + n_m = 3} \int_X (T_0^{n_0} \cup \dots \cup T_m^{n_m}) \frac{y_0^{n_0}}{n_0!} \dots \frac{y_m^{n_m}}{n_m!}$$

Como as equações da associatividade envolvem apenas derivadas de terceira ordem, podemos modificar Φ por quaisquer termos de ordem no máximo 2. Usando as propriedades (I)-(III), vemos que a parte quântica $\Phi_{\text{qu}}(y)$ pode ser trocada por $\Gamma(y)$:

$$\Gamma(y) = \sum_{n_{p+1} + \dots + n_m \geq 0} \sum_{\beta \neq 0} N(n_{p+1}, \dots, n_m; \beta) \prod_{i=1}^p e^{(\int_{\beta} T_i) y_i} \cdot \prod_{i=p+1}^m \frac{y_i^{n_i}}{n_i!}$$

onde

$$N(n_{p+1}, \dots, n_m; \beta) = I_{\beta}(T_{p+1}^{n_{p+1}}, \dots, T_m^{n_m})$$

Para ver isso, basta usar que

$$I_{\beta}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \left(\int_{\beta} \gamma_1 \right) \cdot I_{\beta}(\gamma_2, \dots, \gamma_n)$$

se $\gamma_1 \in A^1 X$

e a expansão da função exponencial em série de Taylor.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

As derivadas parciais de Φ_{cl} envolvem apenas os números $\int_X T_i \cup T_j \cup T_k$ enquanto que Γ envolve os números interessantes em Geometria Enumerativa. Isso é tudo que precisamos para provarmos a fórmula de Kontsevich, que foi o clímax inesperado dessa teoria. Para cada $d \geq 1$, denote por N_d o número de curvas projetivas racionais planas que passam

por $3d - 1$ pontos em posição geral em \mathbb{P}^2 . Obviamente vale que $N_1 = 1$, pois por dois pontos distintos no plano projetivo passa uma única reta. Já $N_2 = 1$ é um resultado clássico. Ele nos diz que por cinco pontos em posição geral passa uma única cônica. Um argumento utilizando apenas mapas estáveis é feito em (KOCK and VAINSENER, 1999, Proposição 3.2.2) demonstrando esse fato. Também é clássico que por oito pontos em posição geral no plano passam $N_3 = 12$ cúbicas racionais. O problema geral, porém, mostrou-se ser mais difícil do que parece. Ainda no século XIX, Zeuthen calculou $N_4 = 620$ (ZEUTHEN, 1873). Em 1995, Vainsencher determinou $N_5 = 87304$ (VAINSENER, 1995). A questão foi completamente elucidada por Kontsevich e Manin que obtiveram a fórmula abaixo:

Teorema 7.1 (Kontsevich, Manin - 1994). Para cada $d \geq 1$, denote por N_d o número de curvas projetivas racionais planas que passam por $3d - 1$ pontos em posição geral em \mathbb{P}^2 . Então vale a fórmula de Kontsevich:

$$N_d = \sum_{d_1+d_2=d} N_{d_1} N_{d_2} d_1^2 d_2 \left[d_2 \binom{3d-4}{3d_1-2} - d_1 \binom{3d-4}{3d_1-1} \right]$$

Demonstração. Vamos olhar para \mathbb{P}^2 sob esta nova ótica. Tomemos a base óbvia $T_0 = 1$, $T_1 =$ classe de uma reta e $T_2 =$ classe de um ponto. Assim:

$$g_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i + j = 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

E portanto:

$$g^{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i + j = 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Assim, quando calculamos o produto quântico:

$$T_i * T_j = \Gamma_{ij0} T_2 + \Gamma_{ij1} T_1 + \Gamma_{ij2} T_0$$

Por exemplo:

$$\begin{aligned} T_1 * T_1 &= T_2 + \Gamma_{111} T_1 + \Gamma_{112} T_0 \\ T_1 * T_2 &= \Gamma_{121} T_1 + \Gamma_{122} T_0 \\ T_2 * T_2 &= \Gamma_{221} T_1 + \Gamma_{222} T_2 \end{aligned}$$

O que queremos fazer é escrever as equações que expressam a associatividade do produto quântico $*$ e derivar relações entre os Γ_{ijk} . O único caso não trivial da associatividade é

$(T_1 * T_1) * T_2 = T_1 * (T_1 * T_2)$. Expandindo as expressões e usando a simetria dos Φ_{ijk} :

$$\begin{aligned} (T_1 * T_1) * T_2 &= (T_2 + \Gamma_{111}T_1 + \Gamma_{112}T_0) * T_2 \\ &= (\Gamma_{221}T_1 + \Gamma_{222}T_0) + \Gamma_{111}(\Gamma_{121}T_1 + \Gamma_{122}T_0) + \Gamma_{112}T_2 \\ &= (\Gamma_{222} + \Gamma_{111}\Gamma_{122})T_0 + (\Gamma_{221} + \Gamma_{111}\Gamma_{121})T_1 + \Gamma_{112}T_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1 * (T_1 * T_2) &= T_1 * (\Gamma_{121}T_1 + \Gamma_{122}T_0) \\ &= \Gamma_{121}(T_2 + \Gamma_{111}T_1 + \Gamma_{112}T_0) + \Gamma_{122}T_1 \\ &= \Gamma_{112}^2T_0 + (\Gamma_{121}\Gamma_{111} + \Gamma_{122})T_1 + \Gamma_{121}T_2 \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes de T_0 nas duas expressões, obtemos:

$$\Gamma_{112}^2 = \Gamma_{222} + \Gamma_{111}\Gamma_{122}$$

ou

$$\Gamma_{222} = \Gamma_{112}^2 - \Gamma_{111}\Gamma_{122}$$

Agora, se $\beta = d$ [reta] então o número $N(n; \beta)$ é não nulo somente quando $n = 3d - 1$. E neste caso, ele é igual a N_d , o número de curvas racionais de grau d passando por $3d - 1$ pontos em posição geral. Assim:

$$\Gamma(y) = \sum_{d \geq 1} N_d e^{dy_1} \frac{y_2^{3d-1}}{(3d-1)!}$$

Agora, calculando as derivadas parciais temos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{222} &= \sum_{d \geq 2} N_d e^{dy_1} \frac{y_2^{3d-4}}{(3d-4)!} \\ \Gamma_{112} &= \sum_{d \geq 1} d^2 N_d e^{dy_1} \frac{y_2^{3d-2}}{(3d-2)!} \\ \Gamma_{111} &= \sum_{d \geq 1} d^3 N_d e^{dy_1} \frac{y_2^{3d-1}}{(3d-1)!} \\ \Gamma_{122} &= \sum_{d \geq 1} d N_d e^{dy_1} \frac{y_2^{3d-3}}{(3d-3)!} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\Gamma_{112}^2 = \sum_{d \geq 2} \sum_{d_1+d_2=d} d_1^2 d_2^2 N_{d_1} N_{d_2} e^{dy_1} \frac{y_2^{3d-4}}{(3d_1-2)!(3d_2-2)!}$$

Podemos reorganizar os termos e reescrever a última expressão do seguinte modo:

$$\sum_{d \geq 0} \left\{ \sum_{d_1+d_2=d} d_1^2 d_2^2 N_{d_1} N_{d_2} \binom{3d-4}{3d_1-2} \right\} e^{dy_1} \frac{y_2^{3d-4}}{(3d-4)!}$$

Agora, expandindo o termo $\Gamma_{111}\Gamma_{122}$:

$$\Gamma_{111}\Gamma_{122} = \sum_{d \geq 2} \sum_{d_1+d_2=d} d_1^3 d_2 N_{d_1} N_{d_2} e^{dy_1} \frac{y_2^{3d-4}}{(3d_1-1)!(3d_2-3)!}$$

ou, reescrevendo:

$$\sum_{d \geq 0} \left\{ \sum_{d_1+d_2=d} d_1^3 d_2 N_{d_1} N_{d_2} \binom{3d-4}{3d_1-1} \right\} e^{dy_1} \frac{y_2^{3d-4}}{(3d-4)!}$$

Finalmente, comparando os coeficientes de

$$e^{dy_1} \frac{y_2^{3d-4}}{(3d-4)!}$$

obtemos a fórmula de Kontsevich:

$$N_d = \sum_{d_1+d_2=d} N_{d_1} N_{d_2} d_1^2 d_2 \left[d_2 \binom{3d-4}{3d_1-2} - d_1 \binom{3d-4}{3d_1-1} \right]$$

□

A Tabela abaixo mostra os valores de N_d para $d = 1, \dots, 12$. Percebe-se que

Tabela 1: Os números N_d para d pequeno

d	N_d	$3d-1$
1	1	2
2	1	5
3	12	8
4	620	11
5	87304	14
6	26312976	17
7	14616808192	20
8	13525751027392	23
9	19385778269260800	26
10	40739017561997799680	29
11	120278021410937387514880	32
12	482113680618029292368686080	35

Fonte: FRANCESCO and ITZYKSON (1995)

o crescimento é muito rápido. De fato, Francesco e Itzykson determinaram a ordem de

crescimento assintótico da função N_d em função de d . Eles mostraram em (FRANCESCO and ITZYKSON, 1995, Proposição 3) que

$$\frac{N_d}{(3d-1)!} \sim (0.138)^d d^{-\frac{7}{2}} (6.1)(1 + O(d^{-1}))$$

A prova desse fato é tediosa e técnica. O leitor interessado em se aventurar em várias páginas de cálculos maçantes pode consultar (FRANCESCO and ITZYKSON, 1995).

7.2 Números característicos de curvas em \mathbb{P}^r

Conforme já dito, (PANDHARIPANDE, 1999) utilizou seu algoritmo descrito no capítulo 4 para determinar os números característicos de curvas projetivas. Precisamos definir uma classe de tangência. Seja $H \subset \mathbb{P}^r$ um hiperplano. Considero o lugar $W_H \subset \overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^r, d)$ dos mapas $\mu : C \rightarrow \mathbb{P}^r$ tais que $\mu^{-1}(H)$ consiste de d pontos reduzidos não-singulares em C . Seja $\rho : \overline{M} = \overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d) \rightarrow \overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^r, d)$ o mapa de esquecimento. Definimos o divisor de tangência $\mathcal{T}_H \subset \overline{M}$ como o complementar de $\rho^{-1}(W_H)$. Observamos que \mathcal{T}_H é de codimensão pura 1 em \overline{M} . Seja $M_H \subset \overline{M}$ o lugar dos mapas $\mu : C \rightarrow \mathbb{P}^r$ que satisfazem: $d\mu_x \neq 0$ para todo ponto não-singular $x \in \mu^{-1}(H)$. Geometricamente, a intersecção $\mathcal{T}_H \cap M_H$ corresponde a mapas que "tangenciam" H . Isso é uma condição de codimensão 1 em M_H , se $d \geq 2$. O complementar $\overline{M} \setminus M_H$ tem codimensão 2 em \overline{M} . Queremos expressar essa classe \mathcal{T}_H em termos dos geradores. Para cada $0 \leq j \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ defina $\Delta^j \subset \Delta$ para ser o lugar dos divisores $(A \cup B; d_A, d_B)$ tais que $d_A = j$. Ponha

$$K^j = \sum_{K \in \Delta^j} K$$

Lema 7.1. Com as notações acima, vale:

$$\mathcal{T} = \frac{d-1}{d} \mathcal{H} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \frac{j(d-j)}{d} K^j$$

Demonstração. Vide (PANDHARIPANDE, 1999, Lema 2.3.1). □

Em particular, devido ao algoritmo descrito no capítulo 4, podemos calcular efetivamente todos os produtos top envolvendo as classes $\{\mathcal{L}_i\}, \{\mathcal{H}, \mathcal{T}\}$. Para que estes produtos tenha interesse enumerativo, precisamos nos convencer de que eles realmente nos dão os números característicos que estamos interessados. Considere então o produto top

$$c_1(\mathcal{L}_1)^{l_1} \bullet \cdots \bullet c_1(\mathcal{L}_n)^{l_n} \bullet \mathcal{H}^\alpha \bullet \mathcal{T}^\beta \quad (*)$$

em \overline{M} Subespaços lineares de codimensão l_i em \mathbb{P}^r determinam representantes para as

classes $c_1(\mathcal{L}_i)^{l_i}$. Já o ciclo \mathcal{H}^α é determinado por α subespaços lineares de codimensão 2 em \mathbb{P}^r . E o ciclo \mathcal{T}^β é determinado por β hiperplanos em \mathbb{P}^r . O que precisamos fazer é nos convencer de que a intersecção (*) tem no máximo dimensão 0 e corresponde ao lugar geométrico de interesse. Seja $\tilde{\mathbb{P}}^r$ o espaço de parâmetros das hipersuperfícies de \mathbb{P}^r . Seja $W_{\text{univ}} \subset \overline{M} \times \tilde{\mathbb{P}}^r$ o lugar dos pares (μ, H) tais que $\mu^{-1}(H)$ consiste de d pontos reduzidos e não-singulares de C . Definimos uma subvariedade de tangência universal:

$$\mathcal{T}_{\text{univ}} \subset \overline{M} \times \tilde{\mathbb{P}}^r$$

como sendo o complementar de W_{univ} . Observe que \mathcal{T}_H é justamente a fibra de $\mathcal{T}_{\text{univ}}$ sobre $H \in \tilde{\mathbb{P}}^r$. Considere ainda a variedade de incidência de hiperplanos de codimensão 2:

$$\mathcal{H}_{\text{univ}} \subset \overline{M} \times \mathbb{G}(r-2, r)$$

Ou seja, o par $(\mu, P) \in \mathcal{H}_{\text{univ}}$ se, e somente se, $\mu^{-1}(P) \neq \emptyset$. A fibra sobre $P \in \mathbb{G}(r-2, r)$ será denotada por \mathcal{H}_P . Por fim, considere a variedade de incidência universal de interesse:

$$\mathcal{I}_{\text{univ}} = \prod_{i=1}^n \mathbb{G}(r-l_i, r) \times \prod_{j=1}^{\alpha} \mathbb{G}(r-2, r) \times \prod_{j=1}^{\beta} \tilde{\mathbb{P}}^r$$

Definição 7.1. Dizemos que um mapa $\mu : C \rightarrow \mathbb{P}^r$ tangencia simplesmente o hiperplano H se: i) $\mu^{-1}(H)$ está contido na parte não singular de C . ii) como esquema, $\mu^{-1}(H)$ consiste de 1 ponto duplo e $d-2$ pontos reduzidos. Dizemos que μ possui intersecção simples com o hiperplano de codimensão 2 P se: i) $\mu^{-1}(P)$ consiste de um ponto não-singular $x \in C$. ii) A imagem da derivada $\text{Im}(d\mu_x)$ e P se intersectam transversalmente.

Agora podemos enunciar precisamente o resultado.

Proposição 7.1. Para escolhas genéricas de subespaços lineares

$$L_1, \dots, L_n, P_1, \dots, P_\alpha, H_1, \dots, H_\beta \quad (**)$$

o ciclo de intersecção (*) possui dimensão ≤ 0 e corresponde (conjuntisticamente) aos mapas $\mu : C \rightarrow \mathbb{P}^r$ tais que: 1) $C \simeq \mathbb{P}^1$ e μ é imersão\mergulho ($r=2$ \($r \geq 3$). 2) μ tangencia simplesmente H_k para todo k 3) μ possui intersecção simples com P_j para todo j 4) a imagem da i -ésima marca cai em L_i para todo i

Demonstração. O ciclo de intersecção determinado por (**) é a fibra de $\mathcal{I}_{\text{univ}}$ sobre os pontos que correspondem aos subespaços em (**). Dado $[\mu] \in \overline{M}$, o teorema de Bertini nos diz que o hiperplano genérico H é transversal a μ . Portanto $[\mu] \notin \mathcal{T}_H$ para uma escolha genérica de H . Analogamente, dado um subespaço $P \subset \mathbb{P}^r$ de codimensão 2 genérico, por Bezout, não é esperado que μ intersecte P , logo $[\mu] \notin \mathcal{H}_P$, para P geral. Assim, se em

cada passo, escolhemos divisores \mathcal{T}_H e \mathcal{H}_P que efetivamente baixam a dimensão de pelo menos 1, então a intersecção

$$\mathcal{H}_{P_1} \cap \cdots \cap \mathcal{H}_{P_\alpha} \cap \mathcal{T}_{H_1} \cap \cdots \cap \mathcal{T}_{H_\beta}$$

tem codimensão pelo menos $\alpha + \beta$. Finalmente, os \mathcal{L}_i induzem séries lineares não-degeneradas livres de pontos de base, visto que são pullback de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$ pelos mapas de avaliação. A proposição 2.3 garante então o lugar dos mapas μ que correspondem a intersecção com L_i é não-degenerado, e portanto cada intersecção faz a dimensão cair de pelo menos 1. Como estamos considerando produtos top em (*), o ciclo de intersecção genérico I possui dimensão no máximo 0. Se a intersecção I for vazia, não há o que fazer. Logo, considere o lugar W do espaço de parâmetros onde $\dim(I) = 0$. As condições 1), 2) e 3) determinam abertos $W_1, W_2, W_3 \subset W$. É suficiente mostrarmos que $W_i \neq \emptyset$. O conjunto $Y \subset \overline{M}$ dos mapas que não são imersão\mergulho ($r = 2 \setminus r \geq 3$) tem codimensão pelo menos 1 (cf. KOCK and VAINSENCHER, 1999, Lema 2.1.3). Portanto um argumento de redução de dimensão como acima nos diz que $I \cap Y = \emptyset$, daí $W \neq \emptyset$. Sejam $W_{2,k}, W_{3,j} \subset W$ o conjunto dos mapas que satisfazem 2) e 3) para o hiperplano H_k e para subespaço linear P_j . É suficiente mostrarmos que $W_{2,k}, W_{3,j} \neq \emptyset$, visto que $W_2 = \cap W_{2,k}$ e $W_3 = \cap W_{3,j}$. Mas o lugar dos mapas $[\mu] \in \mathcal{T}_{H_k}$ que não são simplesmente tangentes a H_k tem codimensão pelo menos 2. Analogamente, o lugar dos mapas $[\mu] \in \mathcal{H}_{P_j}$ que não possuem intersecção simples com P_j também tem codimensão pelo menos 2. Assim, o mesmo argumento de redução de dimensão nos garante que $W_{2,k}, W_{3,j} \neq \emptyset$. Por fim, falta mostrar que o ciclo de intersecção (*) é reduzido. Essa parte é um pouco mais técnica. É necessário um argumento de transversalidade tipo Kleiman, mas o resultado não pode ser aplicado diretamente. Pandharipande se utiliza de uma construção auxiliar na curva universal sobre \overline{M} . Os detalhes podem ser encontrados em (PANDHARIPANDE, 1999, discussão logo após no Lema 3.4.1). \square

Bem, agora temos tudo para determinar os números característicos de curvas em \mathbb{P}^r . Implementando o algoritmo descrito no capítulo 4, calculamos os produtos top das classes de intersecção e tangência e estes correspondem a informação enumerativa procurada. Por exemplo, se quisermos saber o número de cúbicas retorcidas em \mathbb{P}^3 que passam por 2 pontos, 6 retas e são tangentes a 2 planos, basta calcular

$$c_1(\mathcal{L}_1)^3 \bullet c_1(\mathcal{L}_2) \bullet c_1(\mathcal{L}_3)^2 \bullet \dots \bullet c_1(\mathcal{L}_8)^2 \bullet \mathcal{T}^2$$

onde $\overline{M}_{0,8}(\mathbb{P}^3, 3)$ ou

$$c_1(\mathcal{L}_1)^3 \bullet c_1(\mathcal{L}_2)^3 \bullet \mathcal{H}^6 \bullet \mathcal{T}^2$$

em $\overline{M}_{0,2}(\mathbb{P}^3, 3)$.

Exemplo 7.1 (Cônicas em \mathbb{P}^2). Quando $\overline{M} = \overline{M}_{0,1}(\mathbb{P}^2, 2)$, vimos que $\text{Pic}(\overline{M}) \otimes \mathbb{Q}$ é gerado pelas classes $\mathcal{H}, \mathcal{L}_1$ e pela única componente de fronteira K que corresponde a partição $(\{1\} \cup \emptyset; 1 + 1 = 2)$. Temos que $\dim \overline{M} = 6$, neste caso, e as intersecções top estão listadas na tabela abaixo. Como $\mathcal{L}_1^3 = 0$, os monômios em que figurariam \mathcal{L}_1^j , com $j \geq 3$ não estão listados. A classe de tangência é expressa por $\mathcal{T} = \frac{1}{2}(\mathcal{H} + K)$. Os

Tabela 2: Produtos top em $\overline{M}_{0,1}(\mathbb{P}^2, 2)$

\mathcal{H}^6	0	$\mathcal{H}^5 K$	0	$\mathcal{H}^4 K^2$	0
$\mathcal{H}^3 K^3$	0	$\mathcal{H}^2 K^4$	0	$\mathcal{H} K^5$	0
K^6	0	$\mathcal{H}^5 \mathcal{L}_1$	+2	$\mathcal{H}^4 \mathcal{L}_1^2$	+1
$\mathcal{H}^4 \mathcal{L}_1 K$	+6	$\mathcal{H}^3 \mathcal{L}_1^2 K$	+3	$\mathcal{H}^3 \mathcal{L}_1 K^2$	+18
$\mathcal{H}^2 \mathcal{L}_1^2 K^2$	+9	$\mathcal{H}^2 \mathcal{L}_1 K^3$	-10	$\mathcal{H} \mathcal{L}_1^2 K^3$	-5
$\mathcal{H} \mathcal{L}_1 K^4$	-30	$\mathcal{L}_1^2 K^4$	-15	$\mathcal{L}_1 K^5$	+102

Fonte: PANDHARIPANDE (1999)

números característicos de cônicas planas passando por α pontos e β retas é $\frac{1}{2} \mathcal{H}^\alpha \mathcal{T}^\beta \mathcal{L}_1$. Expandindo a expressão de \mathcal{T} e utilizando os valores da Tabela 2 encontramos: Observe

Tabela 3: Números característicos de cônicas em \mathbb{P}^2

$\frac{1}{2} \mathcal{H}^5 \mathcal{L}_1$	1
$\frac{1}{2} \mathcal{H}^4 \mathcal{T} \mathcal{L}_1$	2
$\frac{1}{2} \mathcal{H}^3 \mathcal{T}^2 \mathcal{L}_1$	4
$\frac{1}{2} \mathcal{H}^2 \mathcal{T}^3 \mathcal{L}_1$	4
$\frac{1}{2} \mathcal{H} \mathcal{T}^4 \mathcal{L}_1$	2
$\mathcal{T}^5 \mathcal{L}_1$	1

que reobtivemos, na primeira linha, $N_2 = 1$.

Exemplo 7.2 (Cônicas em \mathbb{P}^3). O espaço $\overline{M} = \overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^3, 2)$ tem dimensão 8 e o grupo $\text{Pic}(\overline{M}) \otimes \mathbb{Q}$ é gerado pela classe \mathcal{H} e pela única componente de fronteira K que corresponde a partição de grau $1+1 = 2$. Os produtos top são listados na tabela abaixo: A classe de

Tabela 4: Produtos top em $\overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^3, 2)$

\mathcal{H}^8	+92
$\mathcal{H}^7 K$	+140
$\mathcal{H}^6 K^2$	+140
$\mathcal{H}^5 K^3$	-100
$\mathcal{H}^4 K^4$	-68
$\mathcal{H}^3 K^5$	+172
$\mathcal{H}^2 K^6$	-20
$\mathcal{H} K^7$	-580
K^8	+1820

Fonte: PANDHARIPANDE (1999)

tangência novamente é dada por $\mathcal{T} = \frac{1}{2}(\mathcal{H} + K)$. O número de cônicas em \mathbb{P}^3 passando por α retas e tangentes a β planos é dado por $\mathcal{H}^\alpha \mathcal{T}^\beta$. Novamente, abrindo as contas, obtemos os números desejados. A tabela seguinte resume estes números.

Tabela 5: Números característicos de cônicas em \mathbb{P}^3

\mathcal{H}^8	92
$\mathcal{H}^7\mathcal{T}$	116
$\mathcal{H}^6\mathcal{T}^2$	128
$\mathcal{H}^5\mathcal{T}^3$	104
$\mathcal{H}^4\mathcal{T}^4$	64
$\mathcal{H}^3\mathcal{T}^5$	32
$\mathcal{H}^2\mathcal{T}^6$	16
$\mathcal{H}\mathcal{T}^7$	8
\mathcal{T}^8	4

Exemplo 7.3 (Cúbicas planas racionais). O espaço $\overline{M} = \overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 3)$ também tem dimensão 8 e o grupo $\text{Pic}(\overline{M}) \otimes \mathbb{Q}$ é gerado pela classe \mathcal{H} e pela única componente de fronteira K que corresponde a partição de grau $1+2=3$. Os produtos top são listados na tabela abaixo. Observe que como K é um divisor \mathbb{Q} -Cartier, as intersecções são racionais, em geral, e portanto não necessariamente inteiras. A classe de tangência é dada por

Tabela 6: Produtos top em $\overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 3)$

\mathcal{H}^8	+12
\mathcal{H}^7K	+42
\mathcal{H}^6K^2	+129
\mathcal{H}^5K^3	+285
\mathcal{H}^4K^4	+336
\mathcal{H}^3K^5	-(2541/4)
\mathcal{H}^2K^6	-(8259/16)
$\mathcal{H}K^7$	+(19641/8)
K^8	-(44835/16)

Fonte: PANDHARIPANDE (1999)

$\mathcal{T} = \frac{2}{3}(\mathcal{H} + K)$. A intersecção $\mathcal{H}^\alpha\mathcal{T}^\beta$ expressa o número de cúbicas planas passando por α pontos e tangente a β retas. Eles são listados abaixo. Note que reobtemos o número característico $N_3 = 12$ de cúbicas racionais passando por 8 pontos.

Tabela 7: Números característicos de cúbicas racionais em \mathbb{P}^2

\mathcal{H}^8	12
$\mathcal{H}^7\mathcal{T}$	36
$\mathcal{H}^6\mathcal{T}^2$	100
$\mathcal{H}^5\mathcal{T}^3$	240
$\mathcal{H}^4\mathcal{T}^4$	480
$\mathcal{H}^3\mathcal{T}^5$	712
$\mathcal{H}^2\mathcal{T}^6$	756
$\mathcal{H}\mathcal{T}^7$	600
\mathcal{T}^8	400

Acredito que estes exemplos são suficientes para demonstrar o poder da técnica. Em seu artigo (PANDHARIPANDE, 1999) determina ainda os números característicos de

cúbicas retorcidas, de quárticas racionais planas. Vale notar que todos esses resultados são clássicos, mas foram obtidos por diferentes métodos ao longo dos anos. Pandharipande apenas mostrou como reobtê-los usando uma única ferramenta, o que claramente mostra a poder desta.

8 CONCLUSÃO

Atualmente, a teoria de Gromov-Witten é um dos tópicos de maior interesse entre os matemáticos e físicos teóricos. Ela não apenas lançou uma nova luz no estudo da geometria enumerativa como uniu dois campos do conhecimento aparentemente distintos, a saber, geometria algébrica e a física teórica. A teoria tem relação com outros tópicos bastante interessantes, tais como mirror symmetry, variedades Calabi-Yau, geometria simplética, curvas pseudo-holomorfas, teoria de Donaldson-Thomas, etc. Também é estudada por matemáticos e físicos que trabalham com teoria das cordas, na tentativa de unificar a relatividade geral e a mecânica quântica.

O objetivo do trabalho foi dar uma apresentação simples e motivadora para o estudo da teoria de Gromov-Witten sem, entretanto, nos aprofundarmos nos tópicos mais excitantes citados acima. Usamos o problema de calcular o número de curvas racionais planas de grau d no plano projetivo para introduzir a teoria e vimos como isso relaciona geometria enumerativa e física teórica, através dos trabalhos do físico americano Edward Witten. Precisávamos definir os invariantes de Gromov-Witten, e para isso foi preciso estudar os espaços moduli de mapas estáveis e espaços de Mumford-Knudsen de curvas n -marcadas. Tendo esse conceito em mãos, definimos o anel de cohomologia quântica e, ao aplicarmos a teoria no caso particular do plano projetivo, obtivemos a fórmula de Kontsevich, nosso principal objetivo.

Vale notar que os invariantes que definimos foram os invariantes algébricos. Existe essa mesma teoria no caso simplético. Neste caso, os invariantes de Gromov-Witten contam o número de curvas pseudo-holomorfas em uma variedade simplética. Esse foi o tema dos estudos do matemático russo Mikhail Gromov.

Meu objetivo agora é continuar estudando esse tema, apenas levemente tocado nesse trabalho, e alguns tópicos relacionados, a saber, mirror symmetry e variedades Calabi-Yau (do ponto de vista da geometria algébrica, é claro).

REFERÊNCIAS

- BEHREND, Kai; MANIN, Yuri. Stacks of stable maps and Gromov-Witten invariants. **Duke. J. Math.**, Durham, v. 85, p. 1–60, 1996.
- EISENBUD, David; HARRIS, Joe. **The geometry of schemes**. Springer (Graduate Texts in Mathematics), 2000.
- ESTEVEVES, Eduardo. **Construção de espaços moduli**. IMPA, 1997.
- FRANCESCO, Philippe di; ITZYKSON, Claude. Quantum intersection rings. **Progress in Mathematics**, Boston, v. 129, p. 81–148, 1995.
- FULTON, William. **Introduction to Intersection Theory in Algebraic Geometry**. CBMS (Regional Conference Series in Mathematics), 1983.
- FULTON, William; PANDHARIPANDE, Rahul. Note on stable maps and quantum cohomology. **Proc. Symp. Pure. Math.**, Santa Cruz, v. 62, p. 45–96, 1995.
- HARTSHORNE, Robin. **Algebraic Geometry**. Springer (Graduate Texts in Mathematics), 1977.
- HILBERT, David. Mathematische Probleme. **Bull. Amer. Math. Soc.**, Vancouver, v. 8, p. 437–479, 1902.
- KEEL, Sean. Intersection theory of moduli spaces of stable n -pointed curves of genus zero. **Trans. Amer. Math. Soc.**, Vancouver, v. 330, p. 545–574, 1992.
- KNUDSEN, Finn. The projectivity of the moduli space of stable curves II. **Math. Scand.**, Aarhus, v. 52, p. 161–199, 1983.
- KOCK, Joachim; VAINSENER, Israel. **A fórmula de Kontsevich para curvas racionais planas**. IMPA, 1999.
- KONTSEVICH, Maxim; MANIN, Yuri. Gromov-Witten classes, quantum cohomology and enumerative geometry. **Commun. Math. Phys.**, Dordrecht, v. 164, p. 525–562, 1994.
- PANDHARIPANDE, Rahul. Intersection of \mathbb{Q} -divisors on Kontsevich's moduli space $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ and enumerative geometry. **Trans. Amer. Math. Soc.**, Vancouver, v. 351, p. 1481–1505, 1999.
- VAINSENER, Israel. **Classes características em Geometria Algébrica**. IMPA, 1985.

VAINSENER, Israel. Enumeration of n -fold tangent hyperplanes to a surface. **J. Alg. Geom.**, Haidian, v. 4, p. 503–526, 1995.

WITTEN, Edward. Topological quantum field theory. **Commun. Math. Phys.**, Dordrecht, v. 117, p. 353–386, 1988.

WITTEN, Edward. Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space. **Surveys in Diff. Geom.**, Somerville, v. 1, p. 243–310, 1991.

ZEUTHEN, Hieronymus G. Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver. **Vidensk. Selsk. Skr.**, Kobenhavn, v. 10, 1873.