

Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante

**Oscilador de Dirac: Implicações da Violação  
da Simetria de Lorentz e da Massa  
Dependente da Posição**

Fortaleza

16 de julho de 2008

Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante

# Oscilador de Dirac: Implicações da Violação da Simetria de Lorentz e da Massa Dependente da Posição

Dissertação submetida à Coordenação do  
Curso de Pós-Graduação em Física, da Uni-  
versidade Federal do Ceará, como requisito  
parcial para a obtenção do grau de Mes-  
tre em Física

Orientador:  
Carlos Alberto Santos de Almeida

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARA - DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Fortaleza

16 de julho de 2008

Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante

# Oscilador de Dirac: Implicações da Violação da Simetria de Lorentz e da Massa Dependente da Posição

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física

Aprovada em 16 de julho de 2008

## BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida  
(Orientador)  
Universidade Federal do Ceará -UFC

---

Prof. Dr. Márcio André de Melo Gomes  
Centro Federal de Educação Tecnológica do Ceará

---

Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Jr.  
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

*À minha esposa  
Clênia: tu és meu  
bem mais precioso.*

# Agradecimentos

À minha esposa Clênia Trindade Lucena Cavalcante, pelo amor em nossas vidas, apoio e compreensão sempre que precisei. Muito em mim é resultado de você.

À minha mãe Ismaria, e irmãos Ricardo e Denize, que sempre apoiaram minhas escolhas e souberam perdoar-me por esses anos de ausência, derrotando a distância e a saudade com muito amor e carinho.

Às minhas tias Beli e Celina, por tudo que sou, pela infância maravilhosa que sempre me traz saudades. Seu carinho e afeto foram fundamentais na minha criação e eu não estaria nem próximo de onde estou sem a presença constante de vocês ao meu lado.

Aos meus avós Artur e Georgete sou eternamente grato por tudo! Estar aqui hoje é resultado direto da ajuda e apoio incondicionais que vocês depositam em mim.

Ao Prof. Carlos Alberto Santos de Almeida por sua constante e estimulante orientação e por sua amizade e grande paciência com relação as minhas dúvidas e falhas.

Ao Prof. Ricardo Renan Landim de Carvalho, que ao longo da minha graduação e mestrado foi um dos principais responsáveis pela minha formação de físico profissional.

Aos professores Nilson Sena, Ramos, Daniel Auto, Raimundo e Murilo pelos conhecimentos adquiridos nas disciplinas que me foram de suma importância na graduação e no mestrado.

Ao Prof. Paulo de Tarso Cavalcante Freire, coordenador do curso de Pós-Graduação.

Agradeço aos professores do departamento de matemática e física da Universidade Federal do Maranhão pelo apoio e incentivo. Em especial a Maxwell, Marcos Antonio, Maria Consuelo, Mairton, Conceição Brandão, Saraiva e Hilcias pela formação que me possibilitou um grande êxito nessa jornada.

Aos colegas Makarius, Wilami(Cabêlin), Wagner(Pikachu), Ivan(Brother), Alex(Firstovol), Luís Gonzaga(PX), Pacheco(Nenémzinho), Luciana Angélica, Hudson e Diego, pela presença e apoio constantes e pelas discussões sobre assuntos importantes em Teorias de Campos.

Aos meus grandes amigos da graduação Lino, Zenner, Pedro, Guilherme, Wendel, Saulo e Gardênia, pela convivência agradável e amizade que eles me proporcionaram.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Aos funcionários e professores do Departamento de Física e a todos os demais colegas, que durante esses anos, direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão desse mestrado.

“ Um passo à frente e você não está mais no mesmo lugar.”

Chico Science

# Resumo

Neste trabalho estudamos o Oscilador de Dirac (OD) em três diferentes situações. Na primeira situação estudamos o OD com violação da simetria de Lorentz. Referida violação é implementada através de um termo vetorial e de um termo axial. Realizamos o limite não-relativístico e obtemos que o campo de *background* vetorial não modifica o espectro de energia do sistema. Contudo, no caso do campo de *background* axial, aparece uma correção similar ao efeito Zeeman. Na segunda questão discutida aqui, relatamos os primeiros estudos sobre o oscilador de Dirac com massa variável. Impomos um vínculo no sistema de modo a preservar a estrutura supersimétrica e obter a solução de função de onda. Esta condição nos permite encontrar uma forma funcional específica para a massa, a qual apresenta interessante característica. Devido a esse aspecto, esse modelo melhora duas conhecidas interpretações físicas do Oscilador de Dirac, ou seja, aquela onde o OD é visto como uma interação entre o momento magnético anômalo de férmions neutros e uma esfera carregada, e a interpretação como um modelo que descreve aproximadamente o confinamento de quarks. Por outro lado, as autofunções e a autoenergias do estado fundamental do sistema são também obtidas. Por fim, na terceira parte do trabalho, usamos a conhecida abordagem de Foldy-Wouthuysen para tratar o problema de ordenamento do operador de energia cinética na teoria de baixas energias. O problema de ordenamento aparece na teoria de Schroedinger quando consideramos massa dependendo da posição, uma vez que a presença de dois operadores no termo cinético torna ambíguo o Hamiltoniano. Neste trabalho, partindo do oscilador de Dirac, no qual a massa depende da posição, usamos a transformação de Foldy-Wouthuysen para obter um Hamiltoniano não-relativístico e anti-hermitiano, sem problemas de ordenamento. Com o intuito de auxiliar a leitura do trabalho do ponto de vista técnico, acrescentamos dois apêndices. No apêndice A apresentamos as equações hipergeométricas confluentes e suas relações com diversas funções especiais. No apêndice B, revisamos brevemente os conceitos básicos da Supersimetria da Mecânica Quântica.

# Abstract

In this work we study the Dirac Oscillator (DO) in a threefold way. In the first way, we study DO with Lorentz symmetry violation. This violation is implemented through vectorial and an axial terms. We realize a non-relativistic limit and we obtain that the background vector field does not modify the energy spectrum. However, in the case of the background axial field, a correction similar to the Zeeman effect shows up. As the second issue studied here, we report first studies on the Dirac oscillator with variable mass. We impose a constraint in the system in order to preserve a supersymmetric structure and hence to obtain a wave function solution. This condition allows us to find a particular functional form to the mass, which presents an interesting feature. Due to this feature, this model enhances twofold physical equivalence for the Dirac oscillator, namely, an interaction term between an anomalous magnetic moment of neutral fermions and a charged sphere, and the confinement of quarks. Also eigenfunctions and eigenenergy of the fundamental state of the system are obtained. Finally, in the third part of our work, we use the so called Foldy-Wouthuysen approach in order to treat the ordering problem of the kinetic energy operator in the low energy theory. The ordering problem appears in the Schroedinger theory when we consider mass depending on position, since due to the presence of two operators in the kinetic term, the Hamiltonian turns ambiguous. In that work, starting from a Dirac oscillator which mass depends on position, we use the Foldy-Wouthuysen transformation to achieve a non-relativistic anti-Hermitian Hamiltonian with no ordering problem. As a matter of completeness we add two appendix, namely, an appendix A in order to present the confluent hypergeometric equation and their relations with special functions, and an appendix B, where we review briefly the Supersymmetric Quantum Mechanics.

# Sumário

<b>INTRODUÇÃO</b>	p. 10
<b>1 O OSCILADOR DE DIRAC</b>	p. 13
1.1 A equação de Dirac . . . . .	p. 13
1.2 O Hamiltoniano do Oscilador de Dirac . . . . .	p. 15
1.3 Origem física do termo de interação . . . . .	p. 17
1.4 Autofunções e autoenergias do oscilador de Dirac . . . . .	p. 19
<b>2 VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ NO OSCILADOR DE DIRAC</b>	p. 25
2.1 Violação da simetria de Lorentz por acoplamento tipo vetorial . . . . .	p. 27
2.2 Violação da simetria de Lorentz por acoplamento tipo axial . . . . .	p. 34
<b>3 IMPLICAÇÕES DA MASSA DEPENDENTE DA POSIÇÃO NO OSCILADOR DE DIRAC</b>	p. 38
3.1 Oscilador de Dirac com Massa Variável . . . . .	p. 39
3.2 Transformação Canônica e a Equação de Dirac . . . . .	p. 41
3.3 Supersimetria e Soluções do Oscilador de Dirac . . . . .	p. 45
<b>4 LIMITE NÃO-RELATIVÍSTICO DO OSCILADOR DE DIRAC COM MASSA DEPENDENTE DA POSIÇÃO</b>	p. 48
4.1 A transformação de Foldy-Wouthuysen . . . . .	p. 48
4.2 Transformação de Foldy-Wouthuysen com a massa dependente da Posição	p. 51
<b>5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS</b>	p. 56

<b>Apêndice A – A equação Hipergeométrica Confluente</b>	p. 58
A.1 Relações com outras funções . . . . .	p. 59
<b>Apêndice B – Breve resumo sobre Mecânica Quântica Supersimétrica</b>	p. 62
<b>Referências</b>	p. 65

# INTRODUÇÃO

A descrição dos fenômenos físicos em altas energias requer como guia a utilização das duas principais teorias surgidas no início do século XX; A teoria da Relatividade Especial (TRE) e a Mecânica Quântica (MQ). A primeira tentativa de unir esses dois pilares da física atual em uma única teoria consistente surgiu com a formulação da Mecânica Quântica Relativística (MQR), que basicamente se propõem a estudar as funções de onda que são soluções das equações relativísticas de Klein-Gordon (para partículas de spin-0) e de Dirac (para partícula de spin-1/2). Essas duas classes de equações de forma alguma esgotam a lista das partículas conhecidas, e para os casos de spins maiores também existem equações de onda correspondentes (Rarita-Schwinger, spin-3/2, Kemmer e Proca, spin-1, e no caso geral as equações de Bargmann-Wigner)[1]. Entretanto, é na equação de Dirac, formulada pela primeira vez em 1927 para elétrons, que podemos verificar o grande sucesso dessa teoria.

A equação de Dirac pode igualmente descrever entidades elementares (isto é, sem estrutura interna) como elétrons ou quarks livres, ou até mesmo entidades compostas livres como prótons e nêutrons. O primeiro ponto importante a se destacar é que ela consegue descrever naturalmente tanto o *spin* intrínseco correto como a *helicidade* dos elétrons (a *helicidade* é definida com relação à direção de movimento de uma partícula, como a componente do spin que tem duas direções possíveis, “up” ou “down”). A equação de Dirac descreve somente objetos de spin  $\hbar/2$ , com duas helicidades  $1/2\hbar$  e  $-1/2\hbar$ .

O segundo ponto a ressaltar na equação de Dirac é que ela prevê que cada partícula de energia positiva tem uma antipartícula com energia negativa, massa e spin iguais, mas carga elétrica oposta. Além disso, uma partícula carregada e sua antipartícula podem se destruir uma à outra; o excedente de energia vai então para a produção de fótons. O contrário também foi verificado experimentalmente, isto é, quando uma partícula e sua antipartícula são criadas a partir do excedente de energia, sempre obedecendo os princípios básicos de conservação da energia e do momento.

Entretanto, uma descrição mais completa e atualmente mais satisfatória das partículas elementares só é possível no contexto da Teoria Quântica de Campos (TQC) que inter-

preta as partículas como modos de vibração de campos fundamentais que preenchem o espaço-tempo. Não obstante, a MQR continua sendo um campo de pesquisa fértil para modelos de sistemas físicos em altas energias que possuam um análogo não-relativístico na MQ ordinária, tornando-se um excelente laboratório teórico para estudar os efeitos relativísticos em sistemas comuns na física da matéria condensada.

Assim como na MQ, os sistemas físicos que possuem solução analítica exata na MQR são bastantes raros, mas são importantes para podermos compreender melhor a física por traz dos fenômenos em questão e possibilitar a realização de experiências que possam confrontá-los com a teoria. Neste contexto o problema mais celebrado e amplamente analisado na MQR é o do potencial Coulombiano, que serviu de base para muitos avanços nessa área e até o final dos anos oitenta era um dos poucos problemas solúveis conhecidos.

No início dos anos noventa, surgiu um importante modelo exatamente solúvel e que atualmente vem sendo bastante explorado na literatura, o chamado oscilador de Dirac (OD). Esta denominação foi cunhado por Moshinsky e Szczepaniak [2] para a equação de Dirac com um acoplamento não-mínimo linear no vetor posição, através da substituição  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - im\omega\beta\mathbf{r}$ , onde  $m$  é a massa da partícula e  $\omega$  é a frequência do oscilador. Dentre as possibilidades nesse cenário, a presente dissertação de mestrado trata do OD em duas situações bastantes distintas mas igualmente importantes na pesquisa atual: A violação de simetria de Lorentz e sistemas quânticos com massa efetiva dependente da posição.

O capítulo 1 é dedicado a uma revisão geral das principais propriedades do OD, onde determinamos suas autoenergias e autofunções.

No capítulo 2, que representa propriamente a primeira parte de nosso trabalho, tratamos do OD com violação de simetria de Lorentz objetivando as implicações não-relativísticas. Iniciamos com dois tipos de acoplamento não-mínimo implementados na equação de Dirac por meio de quadrivetores ( $v^\mu$  e  $b^\mu$ ), que têm o papel de fixar um background, impondo uma anisotropia no espaço-tempo. Estes quadrivetores devem ser entendidos como campos vetoriais de fundo, resultantes de processos de transição de fases em analogia, por exemplo, com o ferromagnetismo no modelo de Ising. Suas componentes, sob transformação de um referencial ligado a partícula, apresentam um comportamento escalar, e sob transformação do referencial ligado ao observador têm um comportamento de um autêntico quadrivetor de Lorentz.

Seguiremos de perto os passos do trabalho da referência [3] e a partir da equação de Dirac modificada pelos termos de quebra, tomaremos o limite não-relativístico, obtendo o Hamiltoniano de violação de Lorentz e calcularemos as prováveis correções no espectro

de energia.

A segunda parte, iniciada no capítulo 3, trata do OD no contexto de uma teoria de massa efetiva bastante discutida em física da matéria condensada. Partimos da equação de Dirac considerando a massa dependente da posição e efetuamos o acoplamento do OD. Nos restringiremos então a tratar a massa como uma função real da distância espacial, impondo a simetria esférica para que o sistema possa ser separável nas variáveis angulares e radiais. No sistema de equações diferenciais resultante, aplicamos uma transformação canônica tipo rotação que permitirá introduzir um vínculo para eliminar as derivadas de primeira ordem nas componentes radiais e fixar uma forma funcional para a massa da partícula. O sistema resultante permitirá a aplicação do formalismo de supersimetria (SUSY) utilizado em sistemas quânticos com massa efetiva dependente da posição [4]. Desta forma, determinaremos as autoenergias e autofunções do estado fundamental do sistema transformado.

No quarto capítulo, buscamos o limite não-relativístico do Hamiltoniano do OD com massa dependente da posição através de uma transformação de Foldy-Wouthuysen que consideramos ser o melhor caminho para tratar do problema do ordenamento do operador energia cinética presente na teoria de baixa energia [5]. Vamos observar o surgimento de um termo anti-Hermitiano no Hamiltoniano resultante da transformação.

No capítulo 5, daremos nossas considerações finais e teceremos alguns comentários sobre os resultados obtidos e perspectivas para futuros trabalhos.

Este trabalho conta ainda com dois apêndices que complementam a discussão realizada nos capítulos apresentados acima. No apêndice A, fazemos uma exposição das funções hipergeométricas confluentes e suas relações com outras funções especiais, complementando a teoria do capítulo 1. O apêndice B, trata-se de uma breve revisão do formalismo da SUSY aplicada à mecânica quântica, complementando as idéias utilizadas no capítulo 3.

# 1 O OSCILADOR DE DIRAC

Nosso propósito neste primeiro capítulo é fazer uma revisão geral das principais características e obter as soluções exatas do Oscilador de Dirac (OD), que é o modelo central dessa dissertação. Em anos recentes, o OD tem se apresentado como um modelo quântico relativístico extremamente frutífero e vem despertando grande interesse em várias áreas de pesquisa, como sugere o grande número de artigos publicados a seu respeito. Podemos citar, como exemplo sua aplicação, modelos de confinamento de quarks na Cromodinâmica Quântica [6, 7, 8], problemas de muitos corpos [9], aplicações das transformações canônicas tipo Foldy-Wouthuysen [10], sistemas da ótica quântica [11], sistemas quase-solúveis [12] e sua conexão com a termodinâmica [13].

Este capítulo é organizado como segue.

Na seção 1, fazemos uma breve revisão sobre a mecânica quântica relativística (MQR) da equação da Dirac. Na seção 2, introduzimos o OD, discutimos suas principais propriedades e falamos de sua conexão com o oscilador quântico não-relativístico. Na seção 3, mostramos uma possível interpretação física do potencial do OD em termos do acoplamento não-mínimo entre férmions neutros com um campo elétrico externo. A solução completa com as autofunções e autoenergias do OD é dada na seção 4, onde analisamos por meio de gráficos, o comportamento das componentes radiais das autofunções. Para sanar quaisquer omissões que certamente ocorrerão aqui, o leitor é remetido às referências padrões sobre MQR [1, 14, 15].

## 1.1 A equação de Dirac

Antes de introduzirmos o oscilador de Dirac, convém primeiramente fazer uma breve revisão sobre a MQR [1]. A equação básica para partículas livres de spin-1/2 é a equação de Dirac (no Sistema Internacional - SI):

$$H_{livre}\psi = (c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2)\psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, t), \quad (1.1)$$

onde  $H_{livre}$  é o Hamiltoniano de Dirac para a partícula livre,  $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$  é o operador momento e as matrizes  $4 \times 4$   $\boldsymbol{\alpha}$  e  $\beta$  na representação de Dirac são definidas por

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

onde as  $\boldsymbol{\sigma}$  são as matrizes de Pauli  $2 \times 2$  e os 1's e 0's em  $\beta$  são, respectivamente matrizes unitárias e nulas  $2 \times 2$ .

A equação de Dirac pode ser escrita numa forma covariante definindo-se as matrizes gama por  $\gamma^0 = \beta$ ,  $\gamma^i = \beta\alpha^i$ , e multiplicando-se à esquerda por  $\beta$  a Eq. (1.1), resultando

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0. \quad (1.3)$$

Uma interação da partícula de Dirac com um campo eletromagnético externo é usualmente introduzida na Eq. (1.1) (ou 1.3) usando a prescrição padrão do acoplamento mínimo:  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$ ,  $H \rightarrow H - e\phi$ , que na forma covariante é dada por  $p^\mu \rightarrow p^\mu - \frac{e}{c}A^\mu$ , onde 'e' é a carga da partícula,  $\mathbf{A}$  e  $\phi$  são, respectivamente, os potenciais vetorial e escalar eletromagnético, com  $A^\mu \equiv (\phi, \mathbf{A})$ . Esta prescrição é suficiente para tratar vários problemas interessantes na MQR, mas de forma alguma abrange todas as situações. Por exemplo, para descrever a interação do momento magnético anômalo de férmions neutros com um campo eletromagnético externo, a equação de Dirac deve ser escrita com o acoplamento não-mínimo [1]

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{1}{2}\mu\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - m_n c)\psi = 0, \quad (1.4)$$

onde  $F^{\mu\nu}$  é o tensor campo eletromagnético,  $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ , ' $\mu$ ' é o momento magnético anômalo e  $m_n$  a massa do neutron.

Como será discutido a seguir, o termo usado para o acoplamento do oscilador de Dirac poderá ser interpretado como uma interação magnética anômala. É importante lembrar que interações anômalas são simplesmente um modo efetivo de descrever o efeito residual das interações eletromagnéticas entre campos eletromagnéticos e os constituintes carregados das partículas neutras.

## 1.2 O Hamiltoniano do Oscilador de Dirac

Como modelo simplificado de interações mais complexas, o oscilador harmônico não-relativístico é um dos sistemas físicos mais importantes tanto do ponto de vista teórico quanto experimental, quer seja no mundo clássico ou quântico. Um dos motivos teóricos para tamanha importância deve-se ao fato do seu hamiltoniano ser uma função quadrática tanto do momento  $\mathbf{p}$  quanto das coordenadas espaciais  $\mathbf{r}$ . Como consequência, tal sistema apresenta diversas simetrias importantes, que refletem a conservação da energia, momento angular e paridade.

Tendo em vista essas observações e o desejo de se obter um modelo análogo para a MQR, Moshinsky e Szczepaniak [2], motivados pela linearidade com que o momento aparece na equação de Dirac, buscaram um potencial que fosse linear no momento e nas coordenadas espaciais e que no limite não-relativístico, reproduzisse o hamiltoniano do oscilador harmônico convencional.

A substituição não-mínima proposta por eles para ser implementada no hamiltoniano  $H_{livre}$  da Eq. (1.1) foi

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - im\omega\beta\mathbf{r}, \quad (1.5)$$

onde  $m$  é a massa da partícula e  $\omega$  é a frequência do oscilador. A equação de Dirac livre é então modificada para

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi = (c\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - im\omega\beta\mathbf{r}) + \beta mc^2)\psi. \quad (1.6)$$

É importante notar que, embora o termo  $\mathbf{p} - im\omega\beta\mathbf{r}$  seja obviamente não-Hermitiano, o Hamiltoniano completo permanece Hermitiano devido a presença da matriz  $\boldsymbol{\alpha}$ . A prescrição (1.5) também preserva as propriedades de invariância C, P, e T dos espinores de Dirac [10].

A dependência de  $\psi$  no tempo pode ser descrita pelo termo  $\exp(-iEt/\hbar)$ , tendo em vista que o potencial do oscilador de Dirac não depende do tempo. Assim, escrevendo

$$\psi(t, \mathbf{r}) = e^{\frac{-iEt}{\hbar}} \psi(\mathbf{r}), \quad (1.7)$$

a Eq. (1.6) torna-se a equação de autovalor  $H\psi = E\psi$ , sendo  $E$  a energia do sistema e  $H$  o Hamiltoniano, dado por

$$H = c\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - im\omega\beta\mathbf{r}) + \beta mc^2. \quad (1.8)$$

Da forma explícita das matrizes  $\alpha$  e  $\beta$  e representando o quadri-espinor  $\psi$  em dois bi-espinores  $\varphi$  e  $\chi$ , isto é,

$$\psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix},$$

podemos reescrever a equação do oscilador de Dirac como um sistema de duas equações acopladas:

$$c\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + im\omega\mathbf{r})\chi = (E - mc^2)\varphi, \quad (1.9)$$

$$c\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - im\omega\mathbf{r})\varphi = (E + mc^2)\chi. \quad (1.10)$$

Vamos agora investigar o limite não-relativístico. Nas Eq. (1.9) e (1.10),  $\chi$  é a componente menor do espinor de Dirac, e tende a zero quanto tomamos o limite não-relativístico. Para desacoplar essas equações, vamos expressar  $\chi$  em termos de  $\varphi$  por meio de (1.10) e substituir o resultado em (1.9). Assim, resulta:

$$c^2\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + im\omega\mathbf{r})\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - im\omega\mathbf{r})\varphi = (E^2 - m^2c^4)\varphi. \quad (1.11)$$

Utilizando agora a relação  $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ , a Eq. (1.11) assume a forma

$$c^2(p^2 + m^2\omega^2r^2 - 3\hbar m\omega - 2m\omega\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L})\varphi(\mathbf{r}) = (E^2 - m^2c^4)\varphi(\mathbf{r}). \quad (1.12)$$

O limite não-relativístico pode ser obtido considerando que a maior parte da energia da partícula está concentrada na sua energia de repouso  $mc^2$ , de modo que podemos tomar a aproximação  $E \approx \mathcal{E} + mc^2$ . Por conseguinte,  $E^2 - m^2c^4 \approx 2\mathcal{E}mc^2$ , se  $\mathcal{E} \ll mc^2$ . Tomando-se esse limite e dividindo por  $2mc^2$  a Eq. (1.12), obtemos o Hamiltoniano não-relativístico do oscilador de Dirac [2]:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2r^2 - \frac{3}{2}\hbar\omega - \frac{2\omega}{\hbar}\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}, \quad (1.13)$$

onde  $\mathbf{S} = (\hbar/2)\boldsymbol{\sigma}$ .

Os dois primeiros termos de (1.13) são os mesmos que aparecem no oscilador harmônico não-relativístico em 3-D, justificando a denominação de oscilador de Dirac para o potencial dado por (1.5). O terceiro termo é uma constante e têm como único efeito provocar

um deslocamento nos níveis de energia do sistema como um todo. O último termo descreve um acoplamento do tipo spin-órbita, geralmente de forte intensidade ( $2\omega/\hbar$ ), sofrido pela partícula.

Em mecânica quântica, o problema do oscilador harmônico isotrópico em 3-D é bem conhecido e possui solução exata [16].

As autofunções satisfazem a equação de autovalor

$$\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2\right)\varphi(\mathbf{r}) = \left(2n + l + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega\varphi(\mathbf{r}) = E_{nl}\varphi(\mathbf{r}), \quad (1.14)$$

onde  $n$  é um inteiro não negativo e  $l$  é o autovalor do operador momento angular dado por  $\mathbf{L}^2 Y_l^m(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi)$ .

A parte radial das autofunções de (1.14) é dada por

$$R_{nl}(r) = A_{nl} \left(\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} r\right)^l e^{-m\omega r^2/2\hbar} M\left(\frac{-E}{2\hbar\omega} - \frac{l}{2} - \frac{3}{4}, l + \frac{3}{2}, \frac{m\omega r^2}{\hbar}\right), \quad (1.15)$$

onde  $M(a, b, x)$  é uma função hipergeométrica confluyente discutida no apêndice B.

Como é sabido, a quantização dos níveis de energia do sistema é decorrente da condição de contorno que exige a anulação das autofunções quanto  $r \rightarrow \infty$ , implicando que o primeiro termo no argumento das funções hipergeométricas deve ser igual a um inteiro não negativo ou zero.

É interessante observar que o termo de interação spin-órbita do oscilador de Dirac em (1.13) só modifica os resultados acima quando  $l \neq 0$ . Para  $l = 0$  os dois sistemas apresentam resultados idênticos.

### 1.3 Origem física do termo de interação

O termo de interação no Hamiltoniano do oscilador de Dirac em (1.8) pode ser interpretado fisicamente como um acoplamento não-mínimo do momento magnético anômalo da partícula com um campo eletromagnético externo [10]. Para tornar mais clara essa relação, retornemos a Eq. (1.4). Vamos primeiramente expressar o segundo termo desta em função dos campos elétricos  $\mathbf{E}$  e magnéticos  $\mathbf{B}$  em uma forma mais explícita. Para

isto, iniciamos fazendo:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= \frac{i}{2}\gamma_\mu\gamma_\nu F^{\mu\nu} - \frac{i}{2}\gamma_\nu\gamma_\mu F^{\mu\nu} \\ &= i\gamma_\mu\gamma_\nu F^{\mu\nu}.\end{aligned}$$

Utilizando as relações conhecidas:  $F^{0i} = E^i$ ,  $F^{ij} = \epsilon^{ij}_k B^k$  e  $\gamma_i\gamma_j = i\epsilon_{ij}^k \Sigma_k$ , com  $\Sigma_k = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}$ , assim como  $\gamma_k\gamma_0 = \alpha_k$ , temos explicitamente:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= i\gamma_0\gamma_i F^{0i} + i\gamma_i\gamma_0 F^{i0} + i\gamma_i\gamma_j F^{ij} \\ &= 2i(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E}) - \epsilon_{ij}^k \epsilon^{ij}_m \Sigma_k B^m \\ &= 2i(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E} + i\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B}).\end{aligned}\tag{1.16}$$

Substituindo (1.16) em (1.4) obtemos o seguinte Hamiltoniano

$$H = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + c\mu(i\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{E} - \beta\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B}) + \beta mc^2.\tag{1.17}$$

Considerando o caso particular quando  $\mathbf{B} = 0$ , ficamos com:

$$H = c\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - i\mu\beta\mathbf{E}) + \beta mc^2.\tag{1.18}$$

Se compararmos com o Hamiltoniano do oscilador de Dirac dado por (1.8), vemos imediatamente que, fazendo a transformação

$$\mu\mathbf{E} \rightarrow m\omega\mathbf{r},$$

recuperamos o acoplamento do oscilador de Dirac (1.5). Concluimos que este é um caso especial de um férmion neutro com momento magnético anômalo na presença de um campo elétrico radial e linear em  $r$ .

Um modelo muito simples que gera um campo elétrico com essas características, consiste de uma distribuição esférica de cargas com densidade uniforme. De fato, basta aplicar a lei de Gauss para uma superfície gaussiana esférica no interior da esfera, que obtemos o campo elétrico

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = Q'/\epsilon_0 \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3},\tag{1.19}$$

onde  $Q$  é a carga total e  $R$  é o raio da esfera.

## 1.4 Autofunções e autoenergias do oscilador de Dirac

Vamos agora determinar as autofunções e autoenergias de (1.8). Como dissemos anteriormente, o problema é exatamente solúvel e será útil determinarmos sua solução, para posteriormente comparar com os resultados obtidos nos capítulos subseqüentes. As demonstrações das principais identidades matemáticas que envolvem os operadores angulares, utilizadas nessa seção podem ser encontradas na ref. [1].

Devido a simetria esférica do problema é simples mostrar que o momento angular total  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$  comuta com  $H$  e, por conseguinte, o momento angular é conservado em nosso sistema. Sabemos ainda que os bi-espinores  $\varphi$  e  $\chi$  possuem paridade oposta, e se definimos o operador  $\hat{K} = \text{diagonal}(\hat{k}, -\hat{k})$  com  $\hat{k} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} + \hbar)$ , que comuta com  $H$  e  $\mathbf{J}$ , poderemos escolher  $(H, \mathbf{J}^2, J_z, \mathbf{S}^2 = \frac{3}{4}, \hat{K})$  como conjunto completo de observáveis para o sistema. Assim, os autoestados comuns destes operadores podem ser escritos como:

$$\psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \varphi_{jm_j}^k \\ \chi_{jm_j}^{-k} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} g(r)\mathcal{Y}_{jm_j}^k(\theta, \phi) \\ if(r)\mathcal{Y}_{jm_j}^{-k}(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

onde  $\mathcal{Y}_{jm_j}^k$  são os espinores esféricos que obedecem as seguintes relações:

$$\mathbf{J}^2 \mathcal{Y}_{jm_j}^k = j(j+1)\hbar^2 \mathcal{Y}_{jm_j}^k, \quad j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \quad (1.21)$$

$$J_z \mathcal{Y}_{jm_j}^k = m_j \hbar \mathcal{Y}_{jm_j}^k, \quad |m_j| \leq j, \quad (1.22)$$

$$\hat{k} \mathcal{Y}_{jm_j}^{\pm k} = \mp k \hbar \mathcal{Y}_{jm_j}^{\pm k}, \quad \text{com } |k| = j + \frac{1}{2}, \quad (1.23)$$

e

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathcal{Y}_{jm_j}^k = -\mathcal{Y}_{jm_j}^{-k}, \quad (1.24)$$

onde  $\hat{\mathbf{r}}$  é o vetor unitário radial.

Utilizando a identidade

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} = i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \left( -\hbar \partial_r + \frac{\hat{k} - \hbar}{r} \right), \quad (1.25)$$

podemos escrever

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} \pm im\omega\mathbf{r}) = i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \left( -\hbar\partial_r + \frac{\hat{k} - \hbar}{r} \pm m\omega r \right). \quad (1.26)$$

Aplicando o resultado anterior em (1.9) e (1.10), obtemos para as componentes radiais  $g(r)$  e  $f(r)$  o seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem acopladas:

$$\left( -\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} + \frac{m\omega r}{\hbar} \right) f(r) = \left( \frac{E - mc^2}{\hbar c} \right) g(r), \quad (1.27)$$

$$\left( \frac{d}{dr} + \frac{k}{r} + \frac{m\omega r}{\hbar} \right) g(r) = \left( \frac{E + mc^2}{\hbar c} \right) f(r). \quad (1.28)$$

Para desacoplar esse sistema e determinar quem são as componentes radiais  $g(r)$  e  $f(r)$ , vamos proceder como em [17, 15]. Da Eq. (1.28), podemos expressar  $f(r)$  em função de  $g(r)$  como:

$$f(r) = \frac{\hbar c}{E + mc^2} \left( \frac{d}{dr} + \frac{k}{r} + \frac{m\omega r}{\hbar} \right) g(r). \quad (1.29)$$

Substituindo a Eq. (1.29) em (1.27), obtemos

$$\left( -\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} + \frac{m\omega r}{\hbar} \right) \left( \frac{d}{dr} + \frac{k}{r} + \frac{m\omega r}{\hbar} \right) g(r) = \frac{E^2 - m^2 c^4}{\hbar^2 c^2} g(r),$$

que pode ser simplificada para finalmente chegarmos a uma equação diferencial de segunda ordem para  $g(r)$  dada por

$$\frac{d^2 g(r)}{dr^2} - \left( \frac{k(k+1)}{r^2} + \frac{m^2 \omega^2 r^2}{\hbar^2} \right) g(r) - \left( \frac{(2k-1)m\omega}{\hbar} - \frac{E^2 - m^2 c^4}{\hbar^2 c^2} \right) g(r) = 0. \quad (1.30)$$

Um procedimento análogo produz uma equação equivalente para  $f(r)$ :

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} - \left( \frac{k(k-1)}{r^2} + \frac{m^2 \omega^2 r^2}{\hbar^2} \right) f(r) - \left( \frac{(2k+1)m\omega}{\hbar} - \frac{E^2 - m^2 c^4}{\hbar^2 c^2} \right) f(r) = 0. \quad (1.31)$$

Para simplificar a Eq. (1.30) vamos realizar uma mudança na variável independente de modo a torná-la adimensional. Façamos  $y = \lambda^2 r^2$ , onde  $\lambda = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ . Assim,

$$\frac{d}{dr} = \frac{dy}{dr} \frac{d}{dy} = 2\lambda^2 r \frac{d}{dy}, \quad \frac{d^2}{dr^2} = 2\lambda^2 \frac{d}{dy} + 4\lambda^2 y \frac{d^2}{dy^2}.$$

Substituindo as relações acima em (1.30) e dividindo por  $4\lambda^2$ , obtemos:

$$y \frac{d^2 g}{dy^2} + \frac{1}{2} \frac{dg}{dy} + \frac{1}{4} \left( W^2 - (2k - 1) - y - \frac{k(k+1)}{y} \right) g = 0 \quad (1.32)$$

onde  $W^2 = (E^2 - m^2 c^4) / mc^2 \hbar \omega$ .

Para resolver a Eq. (1.32) e a análoga para  $f(y)$ , o procedimento usual consiste em escolher um “ansatz” em que tais soluções decaiam exponencialmente, assegurando que sejam de quadrado integrado [17], tomando-se

$$g(y) = A e^{-y/2} y^{(l+1)/2} \phi_1(y), \quad (1.33)$$

$$f(y) = B e^{-y/2} y^{(l'+1)/2} \phi_2(y), \quad (1.34)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes de normalização. Neste ponto, convém lembrar que os números quânticos  $l$ ,  $l'$ ,  $k$  e  $j$  estão relacionados pela paridade oposta de  $\varphi$  e  $\chi$  através das relações [1]

$$l' = \begin{cases} l + 1 & \text{para } j = l + \frac{1}{2} \\ l - 1 & \text{para } j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1.35)$$

e

$$k = \mp(j + \frac{1}{2}) = \begin{cases} -(l + 1) & \text{para } j = l + \frac{1}{2} \\ l & \text{para } j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1.36)$$

Derivando  $g(y)$  obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dy} &= -\frac{A}{2} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{(l+1)}{2}} \phi_1 + \frac{A(l+1)}{2} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{(l-1)}{2}} \phi_1 + A e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{(l+1)}{2}} \frac{d\phi_1}{dy}, \\ \frac{d^2 g}{dy^2} &= \frac{A}{4} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{(l+1)}{2}} \phi_1 - \frac{A(l+1)}{4} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{(l-1)}{2}} \phi_1 - \frac{A}{2} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{(l+1)}{2}} \frac{d\phi_1}{dy} \\ &\quad - \frac{A(l+1)}{4} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{(l-1)}{2}} \phi_1 + \frac{A(l+1)(l-1)}{4} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{(l-3)}{2}} \phi_1 + \frac{A(l+1)}{2} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{(l-1)}{2}} \frac{d\phi_1}{dy} \\ &\quad - \frac{A}{2} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{(l+1)}{2}} \frac{d\phi_1}{dy} + \frac{A(l+1)}{2} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{(l-1)}{2}} \frac{d\phi_1}{dy} + A e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{(l+1)}{2}} \frac{d^2 \phi_1}{dy^2}. \end{aligned}$$

Substituindo esses resultados na Eq. (1.32) ficamos com:

$$y \frac{d^2 \phi_1}{dy^2} + \left( l + \frac{3}{2} - y \right) \frac{d\phi_1}{dy} - \frac{1}{2} \left[ l + \frac{3}{2} - \mu \right] \phi_1 = 0, \quad (1.37)$$

com  $\mu = \frac{1}{2}(W^2 - (2k - 1))$ . Uma equação similar é obtida para  $\phi_2(y)$ , mas com  $\mu' = \frac{1}{2}(W^2 - (2k + 1))$ .

A Eq. (1.37) é uma equação hipergeométrica confluyente, discutida no apêndice B. Podemos então escrever  $\phi_1$  e  $\phi_2$  como funções hipergeométricas com os parâmetros dados por

$$\phi_1(y) = M \left( \frac{1}{2} \left( l + \frac{3}{2} - \mu \right), l + \frac{3}{2}, y \right), \quad (1.38)$$

$$\phi_2(y) = M \left( \frac{1}{2} \left( l' + \frac{3}{2} - \mu' \right), l' + \frac{3}{2}, y \right). \quad (1.39)$$

Conseqüentemente, as componentes radiais maior  $g(r)$  e menor  $f(r)$  do espinor de Dirac são dadas por

$$g(r) = A_{nl} \exp(-m\omega r^2/2\hbar) \left( \left( \frac{m\omega}{\hbar} \right)^{1/2} r \right)^{l+1} M \left( -n, l + \frac{3}{2}, \frac{m\omega r^2}{\hbar} \right), \quad (1.40)$$

$$f(r) = B_{n'l'} \exp(-m\omega r^2/2\hbar) \left( \left( \frac{m\omega}{\hbar} \right)^{1/2} r \right)^{l'+1} M \left( -n', l' + \frac{3}{2}, \frac{m\omega r^2}{\hbar} \right). \quad (1.41)$$

Aqui,  $n$  e  $n'$  são inteiros não-negativos originados da condição de contorno para as funções de onda se anularem no infinito. Eles estão relacionados através de

$$n' = n - \frac{1}{2} + \frac{(l - l')}{2}, \quad \text{com } n, n' \geq 0 \quad (1.42)$$

Finalmente, as constantes  $A$  e  $B$  são determinadas substituindo as soluções (1.40) e (1.41) nas Eq. (1.27, 1.28) e utilizando a condição de normalização dada por

$$\int \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) d^3r = \int \frac{1}{r^2} \left( g(r) \mathcal{Y}_{jm_j}^{k\dagger}, -if(r) \mathcal{Y}_{jm_j}^{-k\dagger} \right) \begin{pmatrix} g(r) \mathcal{Y}_{jm_j}^k \\ if(r) \mathcal{Y}_{jm_j}^{-k} \end{pmatrix} d^3r = 1. \quad (1.43)$$

Como a parte angular já está normalizada, a condição de integrabilidade recai apenas sobre a parte radial:

$$\int_0^\infty (g^2(r) + f^2(r))dr = 1, \quad (1.44)$$

de onde advém o resultado

$$A_{nl} = \frac{m\omega}{\hbar} \epsilon^n \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{mc^2}{E} \right) \right]^{1/2} \left[ \frac{2^{l-n+2}(2n+2l+1)!!}{\pi^{1/2}n![(2l+1)!!]^2} \right]^{1/2}, \quad (1.45)$$

$$B_{n'l'} = \frac{m\omega}{\hbar} \epsilon^{n'} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{mc^2}{E} \right) \right]^{1/2} \left[ \frac{2^{l'-n'+2}(2n'+2l'+1)!!}{\pi^{1/2}n'![(2l'+1)!!]^2} \right]^{1/2}, \quad (1.46)$$

com  $\epsilon = l - l'$ , obtido na ref. [17].

Os autovalores de energia do oscilador de Dirac são obtidos quando impomos a condição sobre o primeiro parâmetro da função hipergeométrica ser igual a  $-n$ . Denotando o número quântico principal por  $N = 2n + l$ , com  $N = 0, 1, 2, \dots$ , obtemos

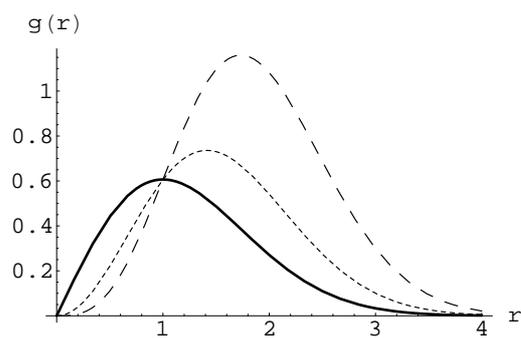
$$E^2 = \begin{cases} m^2c^4 + (2N - 2j + 1)\hbar\omega mc^2 & \text{para } j = l + \frac{1}{2} \\ m^2c^4 + (2N + 2j + 3)\hbar\omega mc^2 & \text{para } j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1.47)$$

Ao analisarmos a expressão acima, concluímos que para  $j = l + 1/2$ , todos os estados com  $N \pm p$ ,  $j \pm p$ , onde  $p$  é um inteiro qualquer, têm a mesma energia, isto é, são degenerados. Para  $j = l - 1/2$ , todos os estados com  $N \pm p$ ,  $j \mp p$  são também degenerados.

É trivial tomar o limite não-relativístico em (1.47) considerando  $E \rightarrow \mathcal{E} + mc^2$ . Assim, obtemos

$$\mathcal{E} = \begin{cases} (N - j + 1/2)\hbar\omega = 2n\hbar\omega & \text{para } j = l + \frac{1}{2} \\ (N + j + 3/2)\hbar\omega = (2n + 2l + 1)\hbar\omega & \text{para } j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1.48)$$

Essas expressões são parecidas com a do oscilador não-relativístico em (1.14), mas diferem pela influência do termo de acoplamento spin-órbita que separa a energia em dois valores distintos correspondentes a cada número quântico  $j$ . Entretanto, como observamos antes, para  $l = 0$  as energias dos dois sistemas são iguais.

Figura 1:  $g(r)$ 

Na figura acima, plotamos a componente  $g(r)$  para  $\hbar = c = \omega = 1$  e  $n = 0$  com  $l = 0$  (curva cheia),  $l = 1$  (curva pontilhada) e  $l = 2$  (curva tracejada).

## 2 VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ NO OSCILADOR DE DIRAC

O século XX foi o período da história da humanidade que mais se verificou avanços científicos e tecnológicos, que de uma forma ou de outra, estão fundamentados no progresso e consolidação das duas teorias físicas mais importantes nascidas nesse período: a Mecânica Quântica (baseada nos princípios de dualidade partícula-onda, probabilidades, superposição) e a Teoria da Relatividade Especial (fundamentada nas idéias de geometrização do espaço-tempo, relatividade do movimento e invariância de Lorentz).

Apesar da Mecânica Quântica e a Relatividade Especial terem origem em problemas distintos, a radiação do corpo negro e a incompatibilidade do eletromagnetismo de Maxwell com a definição clássica de espaço e tempo de Newton, respectivamente, os físicos logo sentiram a necessidade de incorporar seus princípios em uma única teoria, que permitisse inicialmente aplicar a mecânica quântica ao campo eletromagnético (único campo clássico conhecido até então.).

A primeira teoria razoavelmente consistente da eletrodinâmica quântica, que incluía tanto o campo eletromagnético e as partículas carregadas (especificamente, os elétrons), como objetos sujeitos as regras da mecânica quântica, foi criada por Paul Dirac em 1927. Esta teoria quântica poderia ser utilizada para modelar processos importantes, tais como a emissão de um fóton por um elétron quando este cai para uma estado de energia menor ou em processos em que o número de partículas não é conservado.

Criou-se assim a chamada Teoria Quântica de Campos (TQC) que descreve as partículas como estado excitados de campos fundamentais que permeia todo o espaço-tempo. Uma analogia útil para descrever esse cenário é imaginar os campos como se fossem um imenso “colchão de molas” onde as excitações que representam as partículas se propagariam.

O desenvolvimento dessas idéias culminou com a formulação do chamado Modelo Padrão das partículas elementares (MP), baseado nas simetrias de gauge do grupo  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ , descrevendo de forma unificada e com grande sucesso tanto teórico quanto fenomenológico as principais forças de interação que governam o comportamento das partículas elementares, ou seja, a força eletromagnética, nuclear forte e nuclear fraca, numa escala de energia que vai até algumas dezenas de gigaelétron-volts (GeV).

A força da gravidade que governa o comportamento do universo em escalas macroscópicas, e é descrita de maneira satisfatória pela Teoria da Relatividade Geral de Einstein, é deixada de fora do cenário do MP, por apresentar certas características que dificultam sua descrição como uma teoria de campo quantizável e renormalizável, como no caso das outras forças citadas acima.

O MP usual é formulado na linguagem da TQC e ,por conseguinte, deve em princípio satisfazer duas simetrias fundamentais: a covariância de Lorentz e a invariância CPT. Esta última consiste de transformações sucessivas de simetrias discretas que envolvem a conjugação da cargas ( $\hat{C}$ ), reversão espacial ( $\hat{P}$ ) e temporal ( $\hat{T}$ ). Tal afirmativa é baseada num teorema geral da teoria de campos relativísticos, que diz que todo estado quântico de um sistema de partículas é também possível para um sistema com antipartículas, mas com reversão de tempo e espaço.

Na tentativa de ampliar o MP para descrever a força da gravidade, levantou-se a questão de a quebra espontânea da simetria de Lorentz e CPT estarem associadas a uma teoria mais fundamental e ainda desconhecida, que descreve a física de forma unificada na escala de energia de Plank, em torno de  $10^{18}$  GeV.

Baseados em evidencias teóricas no cenário das Teorias das Cordas [18] e na Gravitacão Quântica com Loops [19, 20], as idéias da quebra espontânea de simetria foram incorporadas no chamado Modelo Padrão Estendido (MPE) por Kostelecký e Samuel [21] através do acoplamento na densidade Lagrangiana do MP de termos que envolvessem campos fundamentais de fundo que representam um “background” fixo, responsável pela quebra da simetria de Lorentz no referencial das partículas, mas continuando inalterada do ponto de vista de uma transformação de referencial do observador [22].

O setor fermiônico do MPE é descrito pela densidade Lagrangiana padrão acrescida de termos CPT-ímpar e CPT-par da forma [23]

$$\mathcal{L}_{eletron}^{CPT-par} = -\frac{1}{2}H_{\mu\nu}\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi + \frac{i}{2}c_{\mu\nu}\bar{\psi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{D}^\nu\psi + \frac{i}{2}d_{\mu\nu}\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}^\nu\psi,$$

enquanto os CPT-ímpar são

$$\mathcal{L}_{\text{eltron}}^{CPT\text{-ímpar}} = -v_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - b_\mu \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \psi,$$

onde os coeficientes de acoplamento  $v_\mu$  e  $b_\mu$  tem dimensão canônica de massa,  $c_{\mu\nu}$ ,  $d_{\mu\nu}$  são adimensionais e podem ter ambas componentes simétricas e anti-simétricas, enquanto  $H_{\mu\nu}$  tem dimensão de massa e é anti-simétrico.

Nosso interesse no presente capítulo é trabalhar somente com os dois termos CPT-ímpar, associados com o campo espinorial  $\psi$  por meio dos *backgrounds*  $v_\mu$  e  $b_\mu$  acoplados de modo vetorial e axial, respectivamente. Passaremos a avaliar possíveis efeitos da quebra de simetria de Lorentz no oscilador de Dirac focando no limite não-relativístico e em possíveis implicações sobre o espectro de energia do sistema.

Na seção 1, iniciamos nossa discussão com a Lagrangiana de Dirac livre adicionada do termo de quebra vetorial do tipo  $v_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  e em seguida implementamos o acoplamento do oscilador de Dirac e obtemos a equação de movimento modificada. O limite não-relativístico é então realizado e o efeito do *background* sobre o espectro de energia do sistema é avaliado considerando as correções de primeira ordem via teoria da perturbação. Neste caso, não observamos nenhuma modificação nos autovalores de energia do oscilador. Na seção 2, repetimos o procedimento para o termo de quebra axial do tipo  $b_\mu \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \psi$ , mas neste caso verificamos uma correção similar ao conhecido efeito Zeeman.

## 2.1 Violação da simetria de Lorentz por acoplamento tipo vetorial

Neste capítulo, para maior clareza e simplicidade adotaremos o sistema de unidades naturais, onde  $\hbar = c = 1$ . A construção da Lagrangiana de Dirac com quebra de simetria vetorial de Lorentz é obtida naturalmente através da adição, na Lagrangiana livre, de um escalar de Lorentz formado pela contração de um termo bilinear do tipo  $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ , que se transforma segundo Lorentz como um vetor, com um quadri vetor constante  $v^\mu = (v^0, \mathbf{v})$  que é CPT-ímpar e tem o papel de fixar uma direção preferencial no referencial da partícula mas comporta-se como um autêntico quadri vetor no referencial do observador. Assim,

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}_{Dirac} - v_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad (2.1)$$

onde  $\mathcal{L}_{Dirac}$  é a Lagrangiana livre de Dirac ( $\mathcal{L}_{Dirac} = \frac{1}{2}i\bar{\psi}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$ ). A representação adotada para as matrizes- $\gamma$  é a mesma vista no capítulo 1 e a métrica do espaço-tempo de Minkowski é a usual  $\eta_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$ .

Aplicando a equação de Euler-Lagrange em (2.1), obtemos a equação de Dirac modificada:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - v_\mu\gamma^\mu - m)\psi = 0. \quad (2.2)$$

Reescrevendo a equação (2.2) no espaço dos momenta, onde o operador quadrimomento é definido por  $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ , temos:

$$(\gamma^\mu p_\mu - v_\mu\gamma^\mu - m)\psi = 0. \quad (2.3)$$

Para obter a equação de movimento do oscilador de Dirac nós introduzimos um potencial externo através da substituição não-mínima dada em (1.5). A equação de Dirac para o sistema é:

$$(i\gamma^0\partial_t - \boldsymbol{\gamma} \cdot (\mathbf{p} - im\omega\gamma^0\mathbf{r} - \mathbf{v}) - v_0\gamma^0 - m)\psi = 0. \quad (2.4)$$

Procedendo como na seção 2.2, obtemos equações equivalentes às (1.9) e (1.10), agora modificadas pela presença dos termos de quebra de Lorentz

$$(E - m - v_0)\varphi = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{v} + im\omega\mathbf{r})\chi, \quad (2.5)$$

$$(E + m - v_0)\chi = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{v} - im\omega\mathbf{r})\varphi. \quad (2.6)$$

Seguindo a proposta dos trabalhos das ref. [3, 25], nossa atenção volta-se na investigação do comportamento no sistema em condições de baixas energias e nas possíveis implicações sobre o espectro de energia do oscilador de Dirac. Para chegar ao limite não-relativístico, vamos considerar a aproximação ( $E + m - v_0 \sim 2m$ ), onde assumimos que a magnitude do termo de quebra é obviamente muito menor que a massa da partícula ( $v_0 \ll m$ ). Com isso, podemos escrever a componente fraca  $\chi$  em termos da componente forte  $\varphi$ , obtendo

$$\chi = \frac{1}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{v} - im\omega\mathbf{r})\varphi. \quad (2.7)$$

Substituindo a relação acima na Eq. (2.5), chegamos a uma equação tipo Pauli referente à componente forte do espinor de Dirac

$$\frac{1}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{v} + im\omega\mathbf{r})\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{v} - im\omega\mathbf{r})\varphi = (E - m - v_0)\varphi. \quad (2.8)$$

Para chegarmos ao Hamiltoniano com quebra de simetria de Lorentz vamos considerar  $E = H + m$  e, utilizando a identidade  $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ , a equação (2.8) é reduzida a,

$$H = \left[ \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} - \frac{3\omega}{2} - 2\omega\mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \right] + \left[ -\frac{2\mathbf{v} \cdot \mathbf{p}}{2m} - \frac{1}{m}\mathbf{S} \cdot \nabla \times \mathbf{v} + 2\omega\mathbf{S} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + v_0 + \frac{v^2}{2m} \right] \quad (2.9)$$

com  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  e  $\mathbf{S} = (1/2)\boldsymbol{\sigma}$ . Uma vez que o vetor  $\mathbf{v}$  é considerado constante, então  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ . Assim, o Hamiltoniano não-relativístico do sistema é

$$H = \left[ \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} - \frac{3\omega}{2} - 2\omega\mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \right] + \left[ -\frac{2\mathbf{v} \cdot \mathbf{p}}{2m} + 2\omega\mathbf{S} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + v_0 + \frac{v^2}{2m} \right]. \quad (2.10)$$

Comparando o primeiro termo entre colchetes da equação (2.10) com a Eq. (1.13), vemos claramente que se trata do Hamiltoniano do oscilador de Dirac no limite não-relativístico ( $H_{OD}$ ). O segundo termo, que trataremos como uma perturbação sobre o sistema descrito por  $H_{OD}$ , constitui o Hamiltoniano de violação de Lorentz ( $H_{VL}$ ) que contém todos os termos que envolvem o background vetorial  $v^\mu$ .

Vamos agora analisar a provável modificação que o Hamiltoniano de violação de Lorentz produz nos autovalores de energia do oscilador de Dirac. Primeiramente, observamos que os dois últimos termos de  $H_{VL}$ :  $v_0$  e  $v^2/2m$ , são constantes e apenas deslocam o espectro de energia como um todo sem causar nenhuma mudança na física do sistema. Assim, podemos nos concentrar em aplicar os métodos da teoria de perturbação independente do tempo [26] para avaliar, em primeira ordem, o “shift” sofrido nos autovalores de energia de  $H_{OD}$  decorrente da perturbação provocada pela presença do background  $v^\mu$  contido nos dois primeiros termos de  $H_{VL}$ . Para fazer isto é suficiente calcularmos o valor esperado de  $H_{VL}$  com respeito aos autoestados não-perturbados de  $H_{OD}$ . Para tanto, precisamos primeiramente determinar quem são estes autoestados.

Como vimos na seção 1.2,  $H_{OD}$  consiste do oscilador harmônico 3-D adicionado do termo de interação spin-órbita. Se considerarmos o momento angular total  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ ,

é simples mostrar que  $[\mathbf{J}, H_{OD}] = 0$  e assim poderemos escolher autoestados comuns de  $H_{OD}$  e  $\mathbf{J}$  que denotaremos por  $|nljm_j\rangle$ , com  $n$ ,  $l$ ,  $j$  e  $m_j$  sendo os números quânticos associados. Na representação de coordenadas, esses autoestados assumem a forma [16, 26],

$$\langle \mathbf{r} | nljm_j \rangle = \Psi_{nljm_j} = R_{nl}(r) \mathcal{Y}_l^{jm_j}(\theta, \phi). \quad (2.11)$$

Na expressão acima, a componente radial é dada por:

$$R_{nl}(r) = A(\sqrt{m\omega r})^l \exp(-m\omega r^2/2) M(-n, l + \frac{3}{2}, m\omega r^2), \quad (2.12)$$

onde  $A$  é uma constante de normalização e  $M(a, b, c)$  são funções hipergeométricas confluentes.

A parte angular é formada pelos espinores esféricos de duas componentes determinados pela adição dos momentos angulares orbital ( $\mathbf{L}$ ) e de spin ( $\mathbf{S}$ ) por meio da expressão geral

$$|jm\rangle = \sum_{m_l, m_s} |m_l m_s\rangle \langle m_l m_s | jm\rangle, \quad (2.13)$$

onde  $\langle m_l m_s | jm\rangle$  são os coeficientes de Clebsch-Gordan. Podemos assim escrever a componente angular como

$$\mathcal{Y}_l^{j=l\pm 1/2, m_j} = c_+ Y_l^{m_j-1/2}(\theta, \phi) \chi_+ + c_- Y_l^{m_j+1/2}(\theta, \phi) \chi_- = \begin{pmatrix} c_+ Y_l^{m_j-1/2}(\theta, \phi) \\ c_- Y_l^{m_j+1/2}(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

onde  $c_+ = \pm \sqrt{\frac{l \pm m_j + \frac{1}{2}}{2l+1}}$  e  $c_- = \sqrt{\frac{l \mp m_j + \frac{1}{2}}{2l+1}}$ .

O espectro de energia de  $H_{OD}$  é dado por:

$$E_{nl} = \begin{cases} (2n + l + j + \frac{3}{2})\omega & \text{se } j = l - \frac{1}{2} \\ (2n + l - j + \frac{1}{2})\omega & \text{se } j = l + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Considerando o primeiro termo  $i\mathbf{v} \cdot \nabla/m$ , a correção de primeira ordem é dada por:

$$\Delta E_{\mathbf{v}, \mathbf{p}} = \frac{i}{m} \langle nljm_j | \mathbf{v} \cdot \nabla | nljm_j \rangle. \quad (2.15)$$

Para resolvê-la, vamos escrever o operador nabla em coordenadas esféricas

$$\mathbf{v} \cdot \nabla = (\mathbf{v} \cdot \hat{r}) \partial_r + \frac{(\mathbf{v} \cdot \hat{\theta})}{r} \partial_\theta + \frac{(\mathbf{v} \cdot \hat{\phi})}{r \sin \theta} \partial_\phi, \quad (2.16)$$

com

$$\mathbf{v} \cdot \hat{r} = v_x \sin \theta \cos \phi + v_y \sin \theta \sin \phi + v_z \cos \theta, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{v} \cdot \hat{\theta} = v_x \cos \theta \cos \phi + v_y \cos \theta \sin \phi - v_z \sin \theta, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{v} \cdot \hat{\phi} = -v_x \sin \phi + v_y \cos \phi. \quad (2.19)$$

Substituindo os resultados acima em (2.15), ficamos com três termos:  $\Delta E_{\mathbf{v}, \mathbf{p}} = \frac{i}{m}(\Delta E_r + \Delta E_\theta + \Delta E_\phi)$ , que resultam em

$$\Delta E_r = \int_0^\infty R_{nl}^* \frac{\partial R_{nl}}{\partial r} r^2 dr \int \mathbf{v} \cdot \hat{r} \left( c_+^2 |Y_l^{m-1/2}|^2 + c_-^2 |Y_l^{m+1/2}|^2 \right) d\Omega, \quad (2.20)$$

$$\Delta E_\theta = \int_0^\infty \frac{|R_{nl}|^2}{r} r^2 dr \int \mathbf{v} \cdot \hat{\theta} \left( c_+^2 Y_l^{*m-1/2} \partial_\theta Y_l^{m-1/2} + c_-^2 Y_l^{*m+1/2} \partial_\theta Y_l^{m+1/2} \right) d\Omega, \quad (2.21)$$

$$\Delta E_\phi = \int_0^\infty \frac{|R_{nl}|^2}{r} r^2 dr \int \frac{\mathbf{v} \cdot \hat{\phi}}{\sin \theta} \left( c_+^2 Y_l^{*m-1/2} \partial_\phi Y_l^{m-1/2} + c_-^2 Y_l^{*m+1/2} \partial_\phi Y_l^{m+1/2} \right) d\Omega, \quad (2.22)$$

com  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ .

Para completar o cálculo, usaremos a forma explícita dos harmônicos esféricos [27]:  $Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} = \Theta_l^m(\theta) \Phi_m(\phi)$ . Deste modo é fácil ver que são nulas as integrais que contêm termos do tipo  $\int_0^{2\pi} \left\{ \begin{array}{c} \sin \phi \\ \cos \phi \end{array} \right\} d\phi = 0$ , restando apenas:

$$\Delta E_r = \int_0^\infty R_{nl}^* \frac{\partial R_{nl}}{\partial r} r^2 dr \int_0^\pi v_z \cos \theta \left( c_+^2 |\Theta_l^{m-1/2}|^2 + c_-^2 |\Theta_l^{m+1/2}|^2 \right) \sin \theta d\theta = 0, \quad (2.23)$$

que se anula por causa da relação  $\int_0^\pi [|\Theta_l^m(\theta)|^2 \cos \theta] \sin \theta d\theta = 0$  satisfeita pelos polinômios de Legendre associados.

O segundo termo (2.21) também é nulo, pois envolve derivadas com respeito a variável  $\theta$  na forma  $\int_0^\pi \Theta_l^m(\theta) (\partial_\theta \Theta(\theta)) \sin^2 \theta d\theta = \int_{-1}^{+1} [\Theta_l^m(z) \partial_z \Theta(z)] (z^2 - 1) dz = 0$ , que se verifica em decorrência da relação,  $(1-x^2) \frac{dP_l^m(x)}{dx} = (l+m) P_{l-1}^m(x) - l x P_l^m(x)$  e da ortogonalidade dos  $P_l^m(x)$ , onde  $\int_{-1}^{+1} P_l^m(x) P_q^m(x) dx = 0$  para  $(l \neq q)$ . Logo,

$$\Delta E_\theta = \int_0^\infty \frac{|R_{nl}|^2}{r} r^2 dr \int_0^\pi (-v_z \sin \theta) \left( c_+^2 \Theta_l^{*m-1/2} \partial_\theta \Theta_l^{m-1/2} + c_-^2 \Theta_l^{*m+1/2} \partial_\theta \Theta_l^{m+1/2} \right) \sin \theta d\theta = 0. \quad (2.24)$$

Assim, concluímos que  $\Delta E_{\mathbf{v}, \mathbf{p}} = 0$ .

Considerando a contribuição do segundo termo  $2\omega \mathbf{S} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ , nós temos em primeira ordem:

$$\Delta E_{\mathbf{S}, \mathbf{r} \times \mathbf{v}} = 2\omega \langle n l j m | \mathbf{S} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) | n l j m \rangle \quad (2.25)$$

Para resolvê-lo, nós escrevemos

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{v} = r(S_x g_x + S_y g_y + S_z g_z), \quad (2.26)$$

com,

$$g_x = v_z \sin \theta \sin \phi - v_y \cos \theta,$$

$$g_y = v_x \cos \theta - v_z \sin \theta \cos \phi,$$

$$g_z = \sin \theta (v_y \cos \phi - v_x \sin \phi).$$

Para completar nosso cálculo, devemos lembrar como as componentes do operador de spin  $\mathbf{S}$  atuam sobre autoestados  $\chi_\pm$  de  $S_z$ , isto é:

$$\hat{S}_x \chi_\pm = \frac{1}{2} \chi_\mp, \quad \hat{S}_y \chi_\pm = \pm \frac{i}{2} \chi_\mp, \quad \hat{S}_z \chi_\pm = \pm \frac{1}{2} \chi_\pm. \quad (2.27)$$

Assim, substituindo (2.26) em (2.25) e levando em conta (2.27), temos  $\Delta E_{\mathbf{S}, \mathbf{r} \times \mathbf{v}} = \Delta E_x + \Delta E_y + \Delta E_z$ . A contribuição de cada termo é analisada separadamente abaixo:

$$\begin{aligned}
\Delta E_x &= \frac{c_+c_-}{2} \int_0^\infty (|R_{nl}|^2 r) r^2 dr \int g_x \left( Y_l^{*m-1/2} Y_l^{m+1/2} + Y_l^{*m+1/2} Y_l^{m-1/2} \right) d\Omega \\
&= \frac{c_+c_-}{2} \langle r \rangle \int \left[ (v_z \sin \theta \sin \phi - v_y \cos \theta) \frac{1}{\pi} \Theta_l^{m-1/2} \Theta_l^{m+1/2} \cos \phi \right] d\Omega \\
&= \frac{c_+c_-}{2\pi} \langle r \rangle \left[ v_z \int_0^\pi \Theta_l^{m-1/2} \Theta_l^{m+1/2} \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin(2\phi) d\phi - \right. \\
&\quad \left. - v_y \int_0^\pi \Theta_l^{m-1/2} \Theta_l^{m+1/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi \right] = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta E_y &= \frac{c_+c_-i}{2} \int_0^\infty (|R_{nl}|^2 r) r^2 dr \int g_y \left( Y_l^{*m+1/2} Y_l^{m-1/2} + Y_l^{*m-1/2} Y_l^{m+1/2} \right) d\Omega \\
&= \frac{c_+c_-i}{2} \langle r \rangle \int \left[ (v_x \cos \theta - v_z \sin \theta \cos \phi) \frac{i}{\pi} \Theta_l^{m-1/2} \Theta_l^{m+1/2} \sin \phi \right] d\Omega \\
&= \frac{c_+c_-}{2\pi} \langle r \rangle \left[ v_z \int_0^\pi \Theta_l^{m-1/2} \Theta_l^{m+1/2} \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin(2\phi) d\phi - \right. \\
&\quad \left. - v_x \int_0^\pi \Theta_l^{m-1/2} \Theta_l^{m+1/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi \right] = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta E_z &= \frac{1}{2} \int_0^\infty (|R_{nl}|^2 r) r^2 dr \int g_x \left( c_+^2 |Y_l^{m-1/2}|^2 - c_-^2 |Y_l^{m+1/2}|^2 \right) d\Omega \\
&= \frac{\langle r \rangle}{2} \int (v_y \sin \theta \cos \phi - v_x \sin \theta \sin \phi) \frac{1}{2\pi} (c_+^2 |\Theta_l^{m-1/2}|^2 - c_-^2 |\Theta_l^{m+1/2}|^2) d\Omega \\
&= \frac{\langle r \rangle}{4\pi} \left[ v_y c_+^2 \int_0^\pi |\Theta_l^{m-1/2}|^2 \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos \phi - v_x c_-^2 \int_0^\pi |\Theta_l^{m+1/2}|^2 \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi \right] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

que são todas nulas por evoluírem novamente integrais do tipo  $\int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \sin \phi \\ \cos \phi \end{Bmatrix} d\phi = 0$ .

Concluimos portanto, que a correção total na energia é nula, isto é:  $\Delta E = \Delta E_{\mathbf{v}, \mathbf{p}} + \Delta E_{\mathbf{S}, \mathbf{r} \times \mathbf{v}} = 0$ . Assim, a presença do acoplamento vetorial de quebra de simetria não provoca, em primeira ordem, modificação alguma nos níveis de energia do oscilador de Dirac.

## 2.2 Violação da simetria de Lorentz por acoplamento tipo axial

Nesta seção, investigaremos novamente o limite não-relativístico do oscilador de Dirac com violação de Lorentz, mas agora considerando um tipo diferente de acoplamento, onde aparece a matriz de quiralidade  $\gamma^5$ . Na representação de Dirac,  $\gamma^5$  é definida por

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Algumas de suas propriedades são:

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad (2.29)$$

e

$$[\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}] = 0. \quad (2.30)$$

Além disso, de (2.29) podemos observar que  $\gamma^5$  inverte a paridade, isto é, se  $\psi$  é um estado de paridade definida, por exemplo:  $P\psi = +\psi$  com  $P = e^{i\phi}\gamma^0$ , então  $\gamma^5\psi$  terá paridade oposta:

$$P\gamma^5\psi = -\gamma^5\psi.$$

Análogo ao caso vetorial, a quebra axial da simetria de Lorentz é introduzida na Lagrangiana de Dirac através da adição do termo  $b_\mu\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi$  que também é CPT-ímpar. O quadrivetor  $b_\mu$ , responsável pela fixação do background, acopla-se ao termo bilinear  $\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi$ , que se transforma como um pseudo-vetor segundo Lorentz. Assim, a Lagrangiana livre de Dirac é modificada para:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}i\bar{\psi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - b_\mu\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi. \quad (2.31)$$

Seguindo os passos da seção anterior, a equação de Dirac é

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - b_\mu\gamma_5\gamma^\mu - m)\psi = 0. \quad (2.32)$$

Como antes, reescrevemos esta equação em termos de  $p_\mu$ . Assim

$$(\gamma^\mu p_\mu - b_\mu\gamma_5\gamma^\mu - m)\psi = 0. \quad (2.33)$$

Fazemos agora o acoplamento com o potencial do oscilador de Dirac, obtendo:

$$(i\gamma^0\partial_t - \boldsymbol{\gamma} \cdot (\mathbf{p} - im\omega\boldsymbol{\gamma}^0\mathbf{r}) - b_0\gamma_5\gamma^0 + \gamma_5\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\gamma} - m)\psi = 0. \quad (2.34)$$

Novamente, considerando as definições das matrizes  $\gamma^\mu$  e  $\gamma^5$  dadas em (1.2) e (2.28), vamos escrever o espinor  $\psi$  em termos de suas componentes forte  $\varphi$  e fraca  $\chi$ , donde derivamos duas equações diferenciais acopladas. Assim,

$$(E - m - \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma})\varphi = (\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + im\omega\mathbf{r}) - b_0)\chi, \quad (2.35)$$

$$(E + m - \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma})\chi = (\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - im\omega\mathbf{r}) - b_0)\varphi. \quad (2.36)$$

O limite não-relativístico segue como antes das condições:  $E = m + H$ ,  $m \gg |\mathbf{b}|$  e  $m^2 \gg p^2$ . Assim, (2.35) e (2.36) tornam-se, respectivamente:

$$(H - \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma})\varphi = (\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + im\omega\mathbf{r}) - b_0)\chi, \quad (2.37)$$

$$(2m)\chi = (\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - im\omega\mathbf{r}) - b_0)\varphi. \quad (2.38)$$

Substituindo (2.38) em (2.37) obtemos a equação tipo Pauli correspondente,

$$\frac{1}{2m}(\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + im\omega\mathbf{r}) - b_0)(\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - im\omega\mathbf{r}) - b_0)\varphi = (H - \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad (2.39)$$

onde percebemos que o momento canônico conjugado usual do oscilador de Dirac, dado por  $\mathbf{p} \pm im\omega\mathbf{r}$ , não sofre modificação devido a presença do background  $b^\mu$ , diferentemente do caso vetorial como visto em (2.8).

Utilizando novamente  $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$  chegamos ao Hamiltoniano não-relativístico total do sistema:

$$H = \left[ \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} - \frac{3\omega}{2} - 2\omega \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \right] + \left[ 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{S} - \frac{2b_0}{m} \mathbf{S} \cdot \mathbf{p} + \frac{b_0^2}{2m} \right]. \quad (2.40)$$

Assim como no caso vetorial, o primeiro termo entre colchetes é o Hamiltoniano do

oscilador de Dirac não-relativístico  $H_{OD}$  e o segundo termo constitui o Hamiltoniano que viola a simetria de Lorentz  $H_{VL}$ . Observamos que o Hamiltoniano  $H_{VL}$  é o mesmo obtido no trabalho da ref. [3], onde os autores efetuam a quebra axial de Lorentz em um sistema tipo átomo de hidrogênio, com a equação de Dirac acoplada a um potencial Coulombiano.

Por causa da simetria esférica compartilhada pelos dois sistemas, Dirac-Coulomb e oscilador de Dirac, suas funções de onda associadas só diferem nas componentes radiais e para efeito dos cálculos dos valores médios que envolvem as componentes angulares o resultado final deverá coincidir para os dois casos. Veremos a seguir que nossos resultados concordam com os obtidos em [3].

Precisamos nos preocupar em calcular os valores médios apenas dos dois primeiros termos de  $H_{VL}$ , já que o termo  $b_0^2/2m$  é constante. A correção do primeiro termo é dada por:

$$\begin{aligned}\Delta E_{\mathbf{b},\mathbf{S}} &= 2 \langle nljm_j | \mathbf{b} \cdot \mathbf{S} | nljm_j \rangle \\ &= 2 \int_0^\infty |R_{nl}|^2 r^2 dr \langle jm_j | b_x S_x + b_y S_y + b_z S_z | jm_j \rangle \\ &= 2b_z \langle jm_j | S_z | jm_j \rangle \\ &= \pm \frac{2m_j}{2l+1} b_z,\end{aligned}$$

onde levamos em conta a relação de ortogonalidade dos autoestados de spin

$\langle m' m'_s | m m_s \rangle = \delta_{m'm} \delta_{m'_s m_s}$  e usamos [26]:

$$\langle jm_j | S_z | jm_j \rangle = \frac{1}{2} (|c_+|^2 - |c_-|^2) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2l+1)} \left[ \left( l \pm m_j + \frac{1}{2} \right) - \left( l \mp m_j + \frac{1}{2} \right) \right] = \pm \frac{m_j}{2l+1}$$

O próximo passo é calcular a média do segundo termo de  $H_{VL}$ , dada por:

$$\Delta E_{\mathbf{S},\mathbf{p}} = \frac{2ib_0}{m} \langle nljm_j | \mathbf{S} \cdot \nabla | nljm_j \rangle. \quad (2.41)$$

Escrevendo o operador nabla em coordenadas esféricas, a Eq. (2.41) torna-se

$$\begin{aligned}\Delta E_{\mathbf{S},\mathbf{p}} &= \frac{2ib_0}{m} (\langle nljm_j | \mathbf{S} \cdot \hat{r} \partial_r | nljm_j \rangle + \langle nljm_j | \frac{\mathbf{S} \cdot \hat{\theta}}{r} \partial_\theta | nljm_j \rangle \\ &\quad + \langle nljm_j | \frac{\mathbf{S} \cdot \hat{\phi}}{r \sin \theta} \partial_\phi | nljm_j \rangle),\end{aligned} \quad (2.42)$$

com

$$\mathbf{S} \cdot \hat{r} = \sin \theta \cos \phi S_x + \sin \theta \sin \phi S_y + \cos \theta S_z,$$

$$\mathbf{S} \cdot \hat{\theta} = \cos \theta \cos \phi S_x + \cos \theta \sin \phi S_y - \sin \theta S_z,$$

$$\mathbf{S} \cdot \hat{\phi} = -\sin \phi S_x + \cos \phi S_y.$$

Substituindo as relações anteriores em (2.41), obtemos integrais análogas ao caso vetorial e que também resultam em

$$\Delta E_r = \int_0^\infty R_{nl} \frac{\partial R_{nl}}{\partial r} r^2 dr \langle jm | \mathbf{S} \cdot \hat{r} | jm \rangle = 0$$

$$\Delta E_\theta = \int_0^\infty \frac{|R_{nl}|^2}{r} r^2 dr \langle jm | \mathbf{S} \cdot \hat{\theta} | jm \rangle = 0$$

$$\Delta E_\phi = \int_0^\infty \frac{|R_{nl}|^2}{r} r^2 dr \langle jm | \frac{\mathbf{S} \cdot \hat{\phi}}{\sin \theta} | jm \rangle = 0$$

Concluimos portanto, que a correção provocada pelo acoplamento axial de violação de Lorentz no espectro de energia do oscilador de Dirac é análogo ao conhecido efeito Zeeman (que ocorre em átomos tipo hidrogênio na presença de um campo magnético uniforme) e permite uma comparação *teórica*  $\times$  *experimental* da magnitude do background de quebra.

### 3 IMPLICAÇÕES DA MASSA DEPENDENTE DA POSIÇÃO NO OSCILADOR DE DIRAC

Em física da matéria condensada, o interesse no estudo da equação de Schrödinger com massa dependente da posição (MDP) vem crescendo ao longo dos anos devido a sua utilidade em descrever vários fenômenos físicos que ocorrem em micro-estruturas, tais como poços, fios e pontos quânticos [28, 29], heterojunções de semi-condutores [30], cristais líquidos [31], etc. A principal dificuldade encontrada na teoria de Schrödinger consiste no problema do ordenamento no termo cinético do Hamiltoniano, já que a massa  $M(\mathbf{r})$  passa a ser um operador dependente da posição e dessa forma não comuta mais com o operador momento  $\mathbf{p} = -i\nabla$ , resultando em uma ambigüidade intrínseca na equação de Schrödinger. O termo cinético mais geral, originalmente proposto por von Roos [32] é dado por:

$$T = \frac{1}{4}[m^\alpha(\mathbf{r})\hat{p}m^\beta(\mathbf{r})\hat{p}m^\gamma(\mathbf{r}) + m^\gamma(\mathbf{r})\hat{p}m^\beta(\mathbf{r})\hat{p}m^\alpha(\mathbf{r})],$$

onde os parâmetros são vinculados pela condição  $\alpha + \beta + \gamma = -1$ .

Esta questão já foi bastante discutida e vários modelos foram propostos [4, 5, 33, 34, 35, 36].

Quando tratamos o problema do ponto de vista da Mecânica Quântica Relativística, a partícula passa a obedecer à equação de Dirac, em que  $\mathbf{p}$  e  $M(r)$  aparecem formando uma combinação linear cujos coeficientes são as matrizes de Dirac. Por conseguinte, não apresentam o problema do ordenamento e o fato da massa depender da posição pode ser visto simplesmente como um acoplamento escalar no Hamiltoniano de Dirac [35, 36].

Neste capítulo, estudaremos o oscilador de Dirac com massa dependente da posição seguindo o método proposto em [35, 37]. Para fixarmos uma forma funcional para a massa, vamos aplicar uma transformação canônica para eliminar a derivada primeira das equações radiais resultantes. Em seguida, aplicaremos as técnicas de fatoração da

Mecânica Quântica Supersimétrica [38], para determinar a autofunção e autoenergia do estado fundamental do sistema.

### 3.1 Oscilador de Dirac com Massa Variável

Um acoplamento escalar na Lagrangiana de Dirac pode ser implementado diretamente no termo de massa que passa a ser identificado como uma função escalar  $m = m(x)$  das coordenadas espaço-tempo  $x^\mu$ , preservando a invariância de Lorentz da teoria. Assim, nosso ponto de partida passa a ser a Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \hbar c \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi - m(x) c^2 \bar{\psi} \psi, \quad (3.1)$$

onde  $m(x)$  é a massa variável da partícula.

Aplicando a equação de Euler-Lagrange com respeito a variação de  $\bar{\psi}$  em (3.1), obtemos a equação de Dirac com massa variável:

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - m(x)c)\psi(x) = 0. \quad (3.2)$$

Como dissemos anteriormente, a equação de Dirac determinada acima não sofre da ambigüidade do ordenamento dos operadores  $\mathbf{p}$  e  $m(x)$ , já que a mesma é linear em ambos. Daqui por diante neste capítulo, passaremos a adotar o sistema de unidades atômicas definido por  $\hbar = m_0 = e = 1$  e  $\lambda = c^{-1}$ , com  $m_0$ ,  $e$ ,  $\lambda$  sendo respectivamente a massa de repouso, a carga elétrica e o comprimento de onda Compton da partícula. Deste modo, a equação de Dirac assume a forma

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - M/\lambda)\psi(x) = 0, \quad (3.3)$$

onde tomamos  $m(x) = m_0 M(x) = M(t, \mathbf{r})$ .

O próximo passo é considerar o acoplamento do oscilador de Dirac, só que agora devemos considerar a massa da partícula variável:  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - iM(t, \mathbf{r})\omega\beta\mathbf{r}$ , que nos leva a

$$i\lambda\frac{\partial\psi}{\partial t} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - iM\omega\beta\mathbf{r}) + \beta\frac{M}{\lambda})\psi \equiv \lambda H. \quad (3.4)$$

com  $H$  o Hamiltoniano do sistema. Como de costume, vamos expressar a dependência temporal de  $\psi$  por  $\exp(-iEt)$ . Assim, (3.4) torna-se a equação de autovalor  $\mathcal{H}\psi = \mathcal{E}\psi$ ,

com o Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  dado por

$$\mathcal{H} = \lambda \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - iM\omega\beta\mathbf{r}) + \beta M, \quad (3.5)$$

onde  $\mathcal{H} = \lambda^2 H$  e  $\mathcal{E} = \lambda^2 E$  está representando a energia relativística do sistema.

Da forma explícita das matrizes  $\boldsymbol{\alpha}$  e  $\beta$ , obtemos a seguinte representação matricial para (3.5)

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} M & \lambda \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + iM\omega\mathbf{r}) \\ \lambda \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - iM\omega\mathbf{r}) & -M \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Agora, vamos impor a simetria esférica para a distribuição da massa tomando  $M = M(r)$ , pois neste caso as componentes angulares do espinor podem ser separadas das componentes radiais. Procedendo como na seção 1.4, podemos escrever a função de onda espinorial como

$$\psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \frac{g(r)}{r} \mathcal{Y}_{jm_j}^k(\theta, \phi) \\ \frac{if(r)}{r} \mathcal{Y}_{jm_j}^{-k}(\theta, \phi) \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Após a algebra padrão, a equação radial associada com  $(\mathcal{H} - \mathcal{E})\psi = 0$  assume a forma matricial

$$\begin{pmatrix} M(r) - \mathcal{E} & \lambda \left( -\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} + \omega r M(r) \right) \\ \lambda \left( \frac{d}{dr} + \frac{k}{r} + \omega r M(r) \right) & -M(r) - \mathcal{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(r) \\ f(r) \end{pmatrix} = 0, \quad (3.8)$$

onde  $k$  é o número quântico definido por  $k = \pm(j + 1/2) = \pm 1, \pm 2, \dots$  para  $l = j \pm 1/2$  (ver Eq. (1.23)).

Até agora nada foi dito sobre a forma funcional de  $M(r)$ . Antes de fixar uma função para a massa, vamos expressá-la da seguinte forma [35]

$$M(r) = 1 + \alpha V(r), \quad (3.9)$$

com  $\alpha$  sendo uma constante que fornece a dimensão correta para  $V(r)$  e permite analisar o comportamento familiar de  $M(r)$  no limite da massa constante, isto é

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} M(r) = 1. \quad (3.10)$$

Assim, a Eq. (3.8) é transformada em:

$$\begin{pmatrix} 1 + \alpha V(r) - \mathcal{E} & \lambda \left( -\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} + U(r) \right) \\ \lambda \left( \frac{d}{dr} + \frac{k}{r} + U(r) \right) & -1 - \alpha V(r) - \mathcal{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(r) \\ f(r) \end{pmatrix} = 0, \quad (3.11)$$

com

$$U(r) = \omega r + \omega \alpha r V(r). \quad (3.12)$$

Devemos enfatizar que a forma funcional da distribuição de massa, agora encerrada por  $V(r)$  ainda não foi fixada. Nas próximas seções, mostraremos um modo de simplificar o sistema de equações diferenciais acopladas determinado por (3.11) de forma a preservar a estrutura supersimétrica do oscilador de Dirac descrita nas refs. [4, 17, 38]. Como consequência direta, conseguiremos determinar, a menos de um parâmetro livre, a forma da função  $V(r)$ , encontrando assim a autofunção do estado fundamental do sistema.

## 3.2 Transformação Canônica e a Equação de Dirac

Como vimos no capítulo 1, a separação de variáveis no oscilador de Dirac resulta num sistema de equações diferenciais de primeira ordem acopladas para as componentes radiais maior  $g(r)$  e menor  $f(r)$  do espinor. Ao eliminar-mos  $f(r)$  em favor de  $g(r)$ , obtemos a Eq. (1.30) que é uma equação diferencial de segunda ordem tipo-Schrödinger, isto é, não contém derivada de primeira ordem na componente  $g(r)$ . Ao considerarmos a massa dependente da posição a equação resultante nesse procedimento passa a apresentar derivada de primeira ordem.

De fato, da Eq. (3.11) obtemos o sistema (com  $M(r) = 1 + \alpha V(r)$ )

$$\left( -\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} + U(r) \right) f(r) = \left( \frac{\mathcal{E} - M(r)}{\lambda} \right) g(r), \quad (3.13)$$

$$\left( \frac{d}{dr} + \frac{k}{r} + U(r) \right) g(r) = \left( \frac{\mathcal{E} + M(r)}{\lambda} \right) f(r). \quad (3.14)$$

Expressando  $f(r)$  em função de  $g(r)$ , temos

$$f(r) = \frac{\lambda}{\mathcal{E} + M(r)} \left( \frac{d}{dr} + \frac{k}{r} + U(r) \right) g(r). \quad (3.15)$$

Substituindo (3.15) em (3.13), ficamos com

$$\left(-\frac{d}{dr} + T(r)\right) \frac{1}{\mathcal{E} + M(r)} \left(\frac{d}{dr} + T(r)\right) g(r) = \frac{\mathcal{E}^2 - M^2(r)}{\lambda^2} g(r), \quad (3.16)$$

com  $T(r) = \frac{k}{r} + U(r)$ .

Após alguma álgebra, a Eq. (3.16) resulta em

$$-\left(\frac{d^2g}{dr^2} + \frac{dT}{dr}g\right) + T^2g + \frac{1}{\mathcal{E} + M} \frac{dM}{dr} \left(\frac{dg}{dr} + Tg\right) = \frac{\mathcal{E}^2 - M^2}{\lambda^2} g. \quad (3.17)$$

Da equação acima, observamos diretamente o termo envolvendo a derivada primeira de  $g(r)$ . Para tornar mais evidente as diferenças entre a Eq. (1.30), para a massa constante, e a Eq. (3.17), vamos considerar as formas explícitas de  $T(r)$  e  $U(r)$ , que são relacionadas por

$$T(r) = \frac{k}{r} + U(r) = \frac{k}{r} + \omega M(r)r.$$

Logo, substituindo a expressão acima em (3.17), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2g}{dr^2} - \left(\frac{k(k+1)}{r^2} + M^2\omega^2r^2\right)g - \left((2k-1)M(r)\omega - \frac{\mathcal{E}^2 - M^2(r)}{\lambda^2}\right)g &= \\ = -\frac{dM}{dr} \left[\frac{1}{\mathcal{E} + M} \left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} + \omega M(r)r\right)g + \omega rg\right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Concluimos portanto, que a Eq. (1.30) é uma caso particular de (3.18) ao considerarmos a massa constante.

Para eliminar a derivada de primeira ordem de  $g(r)$  em (3.18), vamos aplicar uma transformação canônica unitária do tipo rotação  $\mathcal{U}(\eta(x)) = \exp(\frac{i}{2}\eta(x)\sigma_2)$  na Eq. (3.11) como segue

$$r = q(x), \quad (3.19)$$

$$\begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\eta(x)}{2}) & \sin(\frac{\eta(x)}{2}) \\ -\sin(\frac{\eta(x)}{2}) & \cos(\frac{\eta(x)}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

e

$$\mathcal{H}' = \mathcal{U} \mathcal{H} \mathcal{U}^{-1}. \quad (3.21)$$

Isto transforma o Hamiltoniano de Dirac em:

$$\mathcal{H}' = \begin{pmatrix} A & B \\ D & F \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

com

$$\begin{aligned} A &= (1 + \alpha V) \cos(\eta(x)) + \lambda \sin(\eta(x)) \left( \frac{k}{q} + U(q(x)) \right) - \frac{\lambda}{2} \frac{d\eta/dx}{dq/dx}, \\ B &= -(1 + \alpha V) \sin(\eta(x)) + \lambda \cos(\eta(x)) \left( \frac{k}{q} + U(q(x)) \right) - \lambda \frac{dx}{dq} \frac{d}{dx}, \\ D &= -(1 + \alpha V) \sin(\eta(x)) + \lambda \cos(\eta(x)) \left( \frac{k}{q} + U(q(x)) \right) + \lambda \frac{dx}{dq} \frac{d}{dx}, \\ F &= -(1 + \alpha V) \cos(\eta(x)) - \lambda \sin(\eta(x)) \left( \frac{k}{q} + U(q(x)) \right) - \frac{\lambda}{2} \frac{d\eta/dx}{dq/dx}. \end{aligned}$$

O requerimento de eliminar a primeira derivada em  $(\mathcal{H}' - \mathcal{E})\psi' = 0$  é conseguido através do vínculo:

$$\left[ \cos(\eta) - \mathcal{E} + \alpha \cos(\eta)V(r) + \lambda \sin(\eta) \left( \frac{k}{q} + U \right) - \frac{\lambda}{2} \frac{d\eta/dx}{dq/dx} \right] = \text{constante} = \rho. \quad (3.23)$$

Aqui, consideraremos o caso particular em que  $q(x) = x$  e  $\frac{d\eta}{dx} = 0$ . Substituindo essas restrições em (3.23), encontramos uma relação linear entre  $V(r)$  e  $U(r)$ :

$$\alpha CV(r) + \lambda S \left( \frac{k}{r} + U(r) \right) = 0 \quad \text{ou} \quad V(r) = -\frac{\lambda T}{\alpha} \left( \frac{k}{r} + U(r) \right), \quad (3.24)$$

$$\rho = C - \mathcal{E}, \quad (3.25)$$

onde:  $C = \cos(\eta)$ ,  $S = \sin(\eta)$ ,  $T = \tan(\eta)$  e  $-\frac{\pi}{2} < \eta < \frac{\pi}{2}$ .

De (3.12) e (3.24), podemos eliminar  $U(r)$  e finalmente fixar a forma da distribuição de massa a menos do parâmetro livre  $T$ :

$$V(r) = \frac{-\lambda T \left( \frac{k}{r} + \omega r \right)}{(1 + \lambda \omega T r)} = -\frac{T}{\lambda} \left( \frac{k + \omega r^2}{r + \lambda \omega T r^2} \right), \quad (3.26)$$

onde tomamos  $\alpha = \lambda^2$  o que torna correta a dimensão para  $V(r)$ .

De posse da Eq. (3.26), podemos analisar a seguir o comportamento assintótico de  $V(r)$ .

Na origem, temos:

$$\lim_{r \rightarrow 0} V(r) = -\frac{T k}{\lambda r}. \quad (3.27)$$

Neste caso, o potencial  $V(r)$  tende ao infinito assumindo a forma de uma barreira “centrífuga”.

No infinito, vale:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = -\frac{1}{\lambda^2}. \quad (3.28)$$

Este comportamento assintótico de  $V(r)$  é compatível com massa nula no infinito, pois:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} M(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} (1 + \lambda^2 V(r)) = 0. \quad (3.29)$$

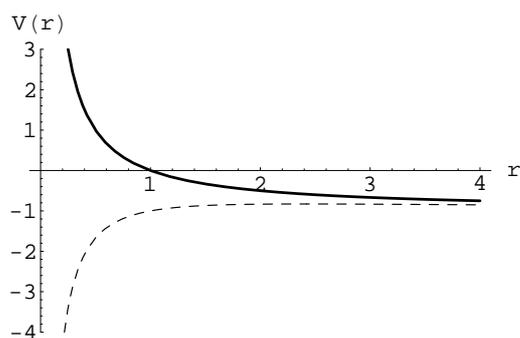


Figura 2: Potencial  $V(r)$

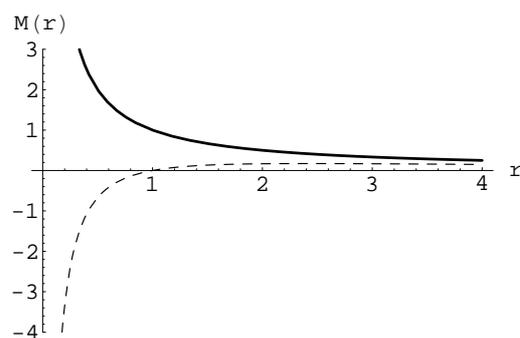


Figura 3: Massa  $M(r)$

As Figuras 2 e 3 mostram respectivamente o comportamento do potencial  $V(r)$  e da massa da partícula  $M(r)$ , para  $T = \omega = \lambda = 1$  e  $k = 1$  (curva pontilhada) e para  $k = -1$  (curva cheia).

### 3.3 Supersimetria e Soluções do Oscilador de Dirac

Nesta seção, mostraremos que os métodos de fatoração da mecânica quântica supersimétrica podem ser usados para determinar a autoenergia e autofunção do estado fundamental do oscilador de Dirac com massa dependente da posição. No apêndice B, apresentamos uma breve revisão sobre este assunto.

Após aplicarmos a transformação canônica em (3.11) e impor o vínculo (3.23) com as restrições (3.24) e (3.25), obtemos o seguinte Hamiltoniano modificado

$$\begin{pmatrix} C - \mathcal{E} & \lambda \left( -\frac{S}{\lambda} - \frac{\lambda}{S} V(r) - \frac{d}{dr} \right) \\ \lambda \left( -\frac{S}{\lambda} - \frac{\lambda}{S} V(r) + \frac{d}{dr} \right) & -C - \mathcal{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix} = 0, \quad (3.30)$$

resultando no par de equações:

$$\left( +\frac{d}{dr} - \frac{\lambda}{S} V(r) - \frac{S}{\lambda} \right) \phi_+ = \frac{\mathcal{E} + C}{\lambda} \phi_-, \quad (3.31)$$

$$\left( -\frac{d}{dr} - \frac{\lambda}{S} V(r) - \frac{S}{\lambda} \right) \phi_- = \frac{\mathcal{E} - C}{\lambda} \phi_+. \quad (3.32)$$

Isto mostra que  $\phi_+$  e  $\phi_-$  satisfazem um par de equações supersimétricas unidimensionais, com o superpotencial  $W(r)$  escrito como

$$W(r) = -\frac{\lambda}{S} V(r) - \frac{S}{\lambda}. \quad (3.33)$$

Então, as Eq. (3.31) e (3.32) tornam-se:

$$A^- A^+ \phi_+ = \left( -\frac{d^2}{dr^2} + W^2 - W' \right) \phi_+ = \frac{\mathcal{E}^2 - C^2}{\lambda^2} \phi_+, \quad (3.34)$$

$$A^+ A^- \phi_- = \left( -\frac{d^2}{dr^2} + W^2 + W' \right) \phi_- = \frac{\mathcal{E}^2 - C^2}{\lambda^2} \phi_-, \quad (3.35)$$

com  $A^\pm = \left[ \pm \frac{d}{dr} + W(r) \right]$  e  $W' = \frac{dW}{dr}$ .

As Eq. (3.34) e (3.35) mostram que todo autovalor de  $A^- A^+$  é também um autovalor de  $A^+ A^-$  exceto quando  $A^+ \phi_+(r) = 0$  e  $\phi_- = 0$  ou  $A^- \phi_-(r) = 0$  e  $\phi_+ = 0$ . Neste caso, as funções de onda do estado fundamental são não-degeneradas e são obtidas considerando  $\mathcal{E}^2 = C^2$  e determinadas por um dos seguintes conjuntos de equações:

$$A^+ \phi_+^{(0)}(r) = 0, \quad \phi_-^{(0)}(r) = 0, \quad (3.36)$$

$$A^- \phi_-^{(0)}(r) = 0, \quad \phi_+^{(0)}(r) = 0. \quad (3.37)$$

A escolha de uma das duas vai depender de qual solução é normalizada e por conseguinte deve satisfazer as condições de contorno de ir a zero quando  $r \rightarrow \infty$ . As soluções de (3.36) e (3.37) são obtidas por integração direta e dadas por

$$\phi_{\pm}^{(0)} = N_{\pm}^{(0)} \exp\left(\int \mp W(r) dr\right), \quad (3.38)$$

com o autovalor de energia do estado fundamental dado por  $\mathcal{E}^2 = C^2$  e  $N_{\pm}^{(0)}$  sendo as constantes de normalização.

Para nosso sistema, de posse da Eq. (3.26) o superpotencial  $W(r)$  assume a forma

$$W(r) = -\frac{S}{\lambda} - \frac{\lambda}{S} V(r) = -\frac{S}{\lambda} + \frac{1}{C} \left( \frac{k + \omega r^2}{r + \lambda \omega T r^2} \right). \quad (3.39)$$

A integral de  $W(r)$  pode ser facilmente realizada por frações parciais, produzindo o resultado:

$$\begin{aligned} \int W(r) dr &= \int \left[ -\frac{S}{\lambda} + \frac{1}{C} \left( \frac{k + \omega r^2}{r + \lambda \omega T r^2} \right) \right] dr \\ &= \frac{C}{\lambda T} r + \ln \left[ r^{\frac{k}{C}} (1 + \lambda \omega T r)^{-\frac{1}{C} (k+1/\omega \lambda^2 T^2)} \right]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Assim,  $\phi_+^{(0)}$  e  $\phi_-^{(0)}$  são dadas por

$$\phi_+^{(0)}(r) = N_+^{(0)} e^{-\frac{C}{\lambda T} r} r^{-\frac{k}{C}} (1 + \omega \lambda T r)^{\frac{1}{C} (k + \frac{1}{\omega \lambda^2 T^2})}, \quad (3.41)$$

$$\phi_-^{(0)}(r) = N_-^{(0)} e^{\frac{C}{\lambda T} r} r^{\frac{k}{C}} (1 + \omega \lambda T r)^{-\frac{1}{C} (k + \frac{1}{\omega \lambda^2 T^2})}. \quad (3.42)$$

Para determinarmos qual solução é normalizável nós consideraremos a situação onde  $k < 0$  e  $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$ , assim  $S, C, T > 0$ . Podemos ver diretamente que  $\phi_+^{(0)}$  é a solução desejada com  $\phi_-^{(0)} = 0$ . Logo,

$$\phi_+^{(0)} = N_+^{(0)} e^{-\frac{C}{\lambda T} r} r^{\frac{|k|}{C}} (1 + \omega \lambda T r)^{\frac{1}{C}(-|k| + \frac{1}{\omega \lambda^2 T^2})}, \quad (3.43)$$

e

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi_+^{(0)}(r) = 0. \quad (3.44)$$

Na Figura 4, plotamos o gráfico da autofunção  $\phi_+^{(0)}$  para  $|k| = 1$  (curva cheia),  $|k| = 2$  (curva pontilhada) e para  $|k| = 3$  (curva tracejada), considerando  $\lambda = \omega = T = 1$ .

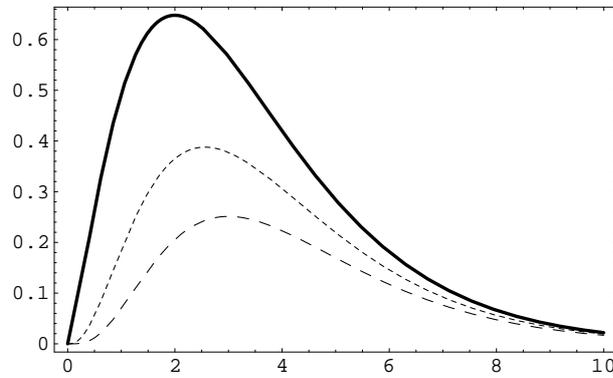


Figura 4: Auto função  $\phi_{(0)}^+$

# 4 LIMITE NÃO-RELATIVÍSTICO DO OSCILADOR DE DIRAC COM MASSA DEPENDENTE DA POSIÇÃO

Neste último capítulo, iremos utilizar uma representação alternativa da teoria de Dirac, conhecida como representação de Foldy-Wouthuysen, com o objetivo de obter o limite não-relativístico do Hamiltoniano do oscilador de Dirac com a massa dependente da posição. Iniciaremos com a exposição do método de Foldy-Wouthuysen aplicado ao caso geral em que a partícula de Dirac está interagindo com um campo externo qualquer. Em seguida, abordaremos o caso particular do potencial do oscilador de Dirac e avaliaremos a contribuição da massa variável no Hamiltoniano de Dirac comparando com o caso constante.

## 4.1 A transformação de Foldy-Wouthuysen

Como vimos no capítulo 1, os espinores  $\psi$  soluções da equação de Dirac consistem de vetores coluna de quatro componentes que podem ser agrupadas em dois bi-espinores  $\phi$  e  $\chi$  denominados de componente maior e menor, respectivamente. Essa denominação é justificada pelo fato de que, quando tomamos o limite não-relativístico dos espinores que representam os estados de energia positiva, as duas componentes superiores que formam  $\phi$  tornam-se muito mais significativas que as componentes inferiores representadas por  $\chi$ . Para os estados de energia negativa observa-se o oposto. Vemos então que, nessa aproximação, o espinor de Dirac fica completamente determinado por somente duas das suas quatro componentes [1].

Na busca por uma transformação canônica unitária que, quando fosse aplicada ao

espinor  $\psi$ , pertencente a um estado de energia definido, produzisse uma função de onda completamente determinada somente por duas componentes em todas as ordens de  $v^2/c^2$  (e não apenas no limite de baixas energias), Foldy e Wouthuysen [40] propuseram um método geral cuja idéia básica consiste em remover do Hamiltoniano de Dirac todos os operadores ‘ímpares’, tais como  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\gamma^i$  e  $\gamma^5$  que são responsáveis por acoplar as componentes maiores e menores do espinor, de modo que o Hamiltoniano transformado fosse expresso como uma série de potências de  $1/m$  que contenha apenas operadores pares do tipo  $\beta$ ,  $\Sigma$  e  $\mathbb{I}$ , que não misturam as componentes maiores e menores.

A seguir, reproduziremos o método de Foldy-Wouthuysen na presença de campos externos que não dependam do tempo, que é o caso do potencial do oscilador de Dirac.

Primeiramente, vamos escrever o Hamiltoniano de Dirac como

$$H = \beta m + \mathcal{E} + \mathcal{O}, \quad (4.1)$$

onde  $\mathcal{E}$  representa a parte par e  $\mathcal{O}$  a parte ímpar de  $H$ .

O acoplamento com campos externos pode ser facilmente implementado considerando por exemplo o caso particular do oscilador de Dirac:

$$\mathcal{O} = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - im\omega\beta\mathbf{r}) \quad \text{e} \quad \mathcal{E} = 0. \quad (4.2)$$

Vamos considerar agora a transformação canônica unitária produzida pelo operador Hermitiano

$$S = -\frac{i}{2m}\beta\mathcal{O}, \quad (4.3)$$

de modo que possamos escrever

$$U = e^{iS}, \quad (4.4)$$

$$\phi = U\psi = e^{iS}\psi, \quad (4.5)$$

onde  $U^\dagger U = e^{-iS}e^{iS} = \mathbb{I}$ .

O Hamiltoniano transformado é dado por (supondo  $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$ )

$$H' = e^{iS} H e^{-iS}, \quad (4.6)$$

que pode se escrita como uma série de potências de  $(1/m)$  com a ajuda da relação de Baker-Hausdorff [27]:

$$\begin{aligned} e^L A e^{-L} &= A + [L, A] + \frac{1}{2!} [L, [L, A]] \\ &+ \cdots + \frac{1}{n!} [L, [L, [L, \cdots, [L, A] \cdots]]] + \cdots, \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde  $[L, A] = LA - AL$  é o comutador de  $L$  e  $A$ .

A expansão de  $H'$  produz

$$H' = H + i[S, H] + \frac{(i)^2}{2!} [S, [S, H]] + \cdots \quad (4.8)$$

Fazendo uso das relações

$$\beta\mathcal{O} = -\mathcal{O}\beta \quad \text{e} \quad \beta\mathcal{E} = \mathcal{E}\beta, \quad (4.9)$$

e restringindo nossa aproximação até potências de  $(1/m)^2$ , vamos agora calcular cada comutador da série (4.8) separadamente:

$$\begin{aligned} i[S, H] &= i \left( \left( \frac{-i}{2m} \beta\mathcal{O} \right) (\beta m + \mathcal{O} + \mathcal{E}) - (\beta m + \mathcal{O} + \mathcal{E}) \left( \frac{-i}{2m} \beta\mathcal{O} \right) \right) \\ &= -\mathcal{O} + \frac{\beta\mathcal{O}^2}{m} + \frac{\beta}{2m} [\mathcal{O}, \mathcal{E}], \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{(i)^2}{2} [S, [S, H]] &= \frac{i}{2} \left\{ \left( \frac{-i}{2m} \beta\mathcal{O} \right) \left( -\mathcal{O} + \frac{\beta\mathcal{O}^2}{m} + \frac{\beta}{2m} [\mathcal{O}, \mathcal{E}] \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( -\mathcal{O} + \frac{\beta\mathcal{O}^2}{m} + \frac{\beta}{2m} [\mathcal{O}, \mathcal{E}] \right) \left( \frac{-i}{2m} \beta\mathcal{O} \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{2m} \beta\mathcal{O}^2 - \frac{1}{2m^2} \mathcal{O}^3 - \frac{1}{8m^2} [\mathcal{O}, [\mathcal{O}, \mathcal{E}]]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Substituindo os resultados acima em (4.8), obtemos

$$\begin{aligned}
H' &= \beta m + \mathcal{E} + \mathcal{O} - \mathcal{O} + \frac{\beta \mathcal{O}^2}{m} + \frac{\beta}{2m} [\mathcal{O}, \mathcal{E}] \\
&\quad - \frac{1}{2m} \beta \mathcal{O}^2 - \frac{1}{2m^2} \mathcal{O}^3 - \frac{1}{8m^2} [\mathcal{O}, [\mathcal{O}, \mathcal{E}]] \\
&= \beta m + \mathcal{E} + \frac{\beta \mathcal{O}^2}{2m} - \frac{1}{8m^2} [\mathcal{O}, [\mathcal{O}, \mathcal{E}]] \\
&\quad + \frac{\beta}{2m} [\mathcal{O}, \mathcal{E}] - \frac{1}{3m^2} \mathcal{O}^3 + \dots .
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Nas duas últimas linhas de (4.12), observamos que essa primeira transformação só consegue eliminar todos os operadores ímpares de ordem igual a  $(1/m)^0$ , restando ainda os de ordem igual ou superior a  $(1/m)$ , presentes na última linha. Entretanto, aplicando uma seqüência de transformações canônicas em que o operador  $S$  é escolhido como sendo

$$S = -\frac{i}{2m} \beta \mathcal{O}', \tag{4.13}$$

com  $\mathcal{O}' =$  termos ímpares restantes no Hamiltoniano transformado, conseguiremos em princípio, remover os termos ímpares remanescentes no Hamiltoniano transformado em qualquer ordem de potências em  $(1/m)$  desejada. Para maiores detalhes, remetemos o leitor a ref. [1].

## 4.2 Transformação de Foldy-Wouthuysen com a massa dependente da Posição

Vamos agora aplicar o método descrito na seção anterior para o caso particular do oscilador de Dirac com a massa dependente da posição. Nosso objetivo é avaliar o limite não-relativístico do sistema, determinando as possíveis alterações no Hamiltoniano provocadas por considerar a massa um operador par, dependente da posição espacial.

Neste caso, o Hamiltoniano é dado por

$$H = \beta m(\mathbf{r}) + \mathcal{O}. \tag{4.14}$$

Como já dissemos antes, ao considerar a massa um operador da posição,  $m(\mathbf{r})$  e  $\mathbf{p}$  não mais comutam e  $S$  não pode mais ser considerado como em (4.3). Seguindo o trabalho da ref. [5], podemos escrever duas possibilidades para o operador  $S$ :

$$S_1 = -\frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{m(\mathbf{r})}} \beta \mathcal{O} \frac{1}{\sqrt{m(\mathbf{r})}}, \quad (4.15)$$

$$S_2 = -\frac{i}{4} \left[ \frac{1}{m(\mathbf{r})} \beta \mathcal{O} + \beta \mathcal{O} \frac{1}{m(\mathbf{r})} \right]. \quad (4.16)$$

Ainda em [5], os autores mostram que ambos os operadores  $S_1$  e  $S_2$ , produzem o mesmo Hamiltoniano transformado para o caso da partícula livre, isto é,  $\mathcal{O} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}$ . Usaremos aqui o operador  $S_1$  para efetuarmos a transformação de Foldy-Wouthuysen que nos conduzirá ao limite não-relativístico de (4.14).

Como antes,

$$H' = e^{iS_1} H e^{-iS_1} = H + i[S_1, H] + \frac{(i)^2}{2!} [S_1, [S_1, H]] + \dots \quad (4.17)$$

No que segue, vamos nos limitar em considerar somente os termos de ordem até  $(1/m)$ .

O primeiro comutador de 4.17 vale:

$$\begin{aligned} i[S_1, H] &= -\frac{(i)^2}{2} \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{m}} \beta \mathcal{O} \frac{1}{\sqrt{m}} \right) (\mathcal{O} + \beta m(\mathbf{r})) - (\mathcal{O} + \beta m(\mathbf{r})) \left( \frac{1}{\sqrt{m}} \beta \mathcal{O} \frac{1}{\sqrt{m}} \right) \right\} \\ &= \frac{\beta}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{m}} \mathcal{O} \frac{1}{\sqrt{m}} \mathcal{O} + \mathcal{O} \frac{1}{\sqrt{m}} \mathcal{O} \frac{1}{\sqrt{m}} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{m}} \mathcal{O} \sqrt{m} + \sqrt{m} \mathcal{O} \frac{1}{\sqrt{m}} \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

O segundo termo entre parênteses em (4.18) pode ser simplificado quando analisamos sua atuação sobre um spinor arbitrário  $\psi$ :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{m}} \mathcal{O} \sqrt{m} + \sqrt{m} \mathcal{O} \frac{1}{\sqrt{m}} \right) \psi &= -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{m}} (\mathcal{O} \sqrt{m}) \psi + \mathcal{O} \psi + \sqrt{m} (\mathcal{O} \frac{1}{\sqrt{m}}) \psi + \mathcal{O} \psi \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{m}} (\mathcal{O} \sqrt{m}) + \sqrt{m} (\mathcal{O} \frac{1}{\sqrt{m}}) \right) + 2\mathcal{O} \right\} \psi \\ &= -\frac{1}{2} \underbrace{\mathcal{O} \left( \sqrt{m} \frac{1}{\sqrt{m}} \right)}_0 \psi - \mathcal{O} \psi. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Assim, a Eq. (4.18) torna-se:

$$i[S_1, H] = -\mathcal{O} + \frac{\beta}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{m}} \mathcal{O} \frac{1}{\sqrt{m}} \mathcal{O} + \mathcal{O} \frac{1}{\sqrt{m}} \mathcal{O} \frac{1}{\sqrt{m}} \right). \quad (4.20)$$

O segundo comutador é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{i^2}{2}[S_1, [S_1, H]] &= \frac{-(i)^2}{4} \left[ \frac{1}{\sqrt{m}}\beta\mathcal{O}\frac{1}{\sqrt{m}}, -\mathcal{O} \right] \\ &+ \frac{-(i)^2}{4} \left[ \frac{1}{\sqrt{m}}\beta\mathcal{O}\frac{1}{\sqrt{m}}, \frac{\beta}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{m}}\mathcal{O}\frac{1}{\sqrt{m}}\mathcal{O} + \mathcal{O}\frac{1}{\sqrt{m}}\mathcal{O}\frac{1}{\sqrt{m}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Que resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{i^2}{2}[S_1, [S_1, H]] &= -\beta\frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{m}}\mathcal{O}\frac{1}{\sqrt{m}}\mathcal{O} + \mathcal{O}\frac{1}{\sqrt{m}}\mathcal{O}\frac{1}{\sqrt{m}} \right) \\ &- \frac{1}{8} \left( \frac{1}{\sqrt{m}}\mathcal{O}\frac{1}{m}\mathcal{O}\frac{1}{\sqrt{m}}\mathcal{O} + \mathcal{O}\frac{1}{\sqrt{m}}\mathcal{O}\frac{1}{m}\mathcal{O}\frac{1}{\sqrt{m}} \right) \\ &+ 2\frac{1}{\sqrt{m}}\mathcal{O}\frac{1}{\sqrt{m}}\mathcal{O}\frac{1}{\sqrt{m}}\mathcal{O}\frac{1}{\sqrt{m}}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Desprezando os termos de ordem superior a  $1/m$ , o Hamiltoniano transformado é dado por:

$$\hat{H}' = \beta \left( m(r) + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{m}}\mathcal{O}\frac{1}{\sqrt{m}}\mathcal{O} + \mathcal{O}\frac{1}{\sqrt{m}}\mathcal{O}\frac{1}{\sqrt{m}} \right) \right). \quad (4.23)$$

A inclusão do potencial de Dirac é feita através da substituição

$$\mathcal{O} = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - im(\mathbf{r})\omega\beta\mathbf{r}). \quad (4.24)$$

Então, podemos escrever  $H'$  como

$$\begin{aligned} H' &= \beta \left\{ m(\mathbf{r}) + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{m}}(\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - im\omega\beta\mathbf{r}))\frac{1}{\sqrt{m}}(\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - im\omega\beta\mathbf{r})) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - im\omega\beta\mathbf{r}))\frac{1}{\sqrt{m}}(\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - im\omega\beta\mathbf{r}))\frac{1}{\sqrt{m}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

O segundo termo de (4.25), que denotaremos por  $H_2$ , resulta em

$$\begin{aligned}
H_2 = & \frac{\beta}{4} \left\{ \frac{1}{\sqrt{m}} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \frac{1}{\sqrt{m}} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \frac{1}{\sqrt{m}} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \frac{1}{\sqrt{m}} \right. \\
& + 2m\omega^2 (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}) \\
& + i\omega\beta [(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) - (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r})] \\
& \left. + i\omega\beta \left[ \sqrt{m}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) \frac{1}{\sqrt{m}} - \frac{1}{\sqrt{m}}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r})\sqrt{m} \right] \right\}. \quad (4.26)
\end{aligned}$$

Da relação:

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i\boldsymbol{\Sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \quad (4.27)$$

com  $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$ , temos:

$$\begin{aligned}
H_2 = & H_{\text{cinético}} + \frac{\beta}{4} \left\{ 2m\omega^2 r^2 - 3\omega\beta - 2\omega\beta \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{L} \right. \\
& + i\omega\beta \left( \sqrt{m}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) \frac{1}{\sqrt{m}} - \frac{1}{\sqrt{m}}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\sqrt{m} \right) \\
& \left. - \omega\beta \boldsymbol{\Sigma} \cdot \left( \sqrt{m}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \frac{1}{\sqrt{m}} - \frac{1}{\sqrt{m}}(\mathbf{p} \times \mathbf{r})\sqrt{m} \right) \right\}, \quad (4.28)
\end{aligned}$$

onde  $H_{\text{cinético}} = \frac{\beta}{4} \left\{ \frac{1}{\sqrt{m}} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \frac{1}{\sqrt{m}} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \frac{1}{\sqrt{m}} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \frac{1}{\sqrt{m}} \right\}$ .

Os dois últimos termos de (4.28) podem ser simplificados ao analisarmos suas atuações sobre um espinor arbitrário  $\psi$ . Assim,

$$\begin{aligned}
\left[ \sqrt{m}(r \cdot p) \frac{1}{\sqrt{m}} - \frac{1}{\sqrt{m}}(p \cdot r)\sqrt{m} \right] \psi &= -i \left[ \sqrt{m}x_j (\partial_j \frac{1}{\sqrt{m}}) \psi + x_j (\partial_j \psi) \right. \\
&\quad \left. - 3\psi - x_j \frac{1}{\sqrt{m}} (\partial_j \sqrt{m}) \psi - x_j (\partial_j \psi) \right] \\
&= \left[ 3i + r \cdot \left( \sqrt{m} \left( p \frac{1}{\sqrt{m}} \right) - \frac{1}{\sqrt{m}} (p \sqrt{m}) \right) \right] \psi. \quad (4.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[ \sqrt{m}(r \times p) \frac{1}{\sqrt{m}} - \frac{1}{\sqrt{m}}(p \times r)\sqrt{m} \right] \psi &= -i \left( \sqrt{m} \varepsilon_{ijk} x_i (\partial_j \frac{1}{\sqrt{m}} \psi) - \frac{1}{\sqrt{m}} \varepsilon_{ijk} (\partial_i x_j \sqrt{m} \psi) \right)_k \\
&= \left[ 2L + r \times \left( \underbrace{\sqrt{m} \left( p \frac{1}{\sqrt{m}} \right) + \frac{1}{\sqrt{m}} (p \sqrt{m})}_0 \right) \right] \psi \\
&= 2\mathbf{L}\psi.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Substituindo os resultados acima em (4.28), obtemos o Hamiltoniano transformado:

$$\begin{aligned}
H' &= \beta \left\{ m + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{m}} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \frac{1}{\sqrt{m}} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \frac{1}{\sqrt{m}} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \frac{1}{\sqrt{m}} \right) \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 - \frac{3}{2} \omega \beta - 2\omega \beta \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \\
&\quad \left. + i\omega \beta \mathbf{r} \cdot \left( \sqrt{m} \left( \mathbf{p} \frac{1}{\sqrt{m}} \right) - \frac{1}{\sqrt{m}} (\mathbf{p} \sqrt{m}) \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Podemos, então, observar que duas mudanças significativas ocorreram no Hamiltoniano do oscilador de Dirac no limite não-relativístico em relação a Eq. (1.13): uma diz respeito ao termo cinético na primeira linha de (4.31), que concorda com a expressão encontrada em [5] e é consequência direta da não comutatividade de  $\mathbf{p}$  e  $m(\mathbf{r})$ . A segunda e mais interessante diferença está na última linha de (4.31), que é escrita separadamente abaixo:

$$H_{aH} = i\omega \mathbf{r} \cdot \left( \sqrt{m} \left( \mathbf{p} \frac{1}{\sqrt{m}} \right) - \frac{1}{\sqrt{m}} (\mathbf{p} \sqrt{m}) \right). \tag{4.32}$$

Este termo adicional é anti-Hermitiano e deve-se exclusivamente à escolha do potencial do oscilador, adicionada à condição de dependência espacial da massa. O estudo de Hamiltonianos não-Hermitianos é tratado por exemplo, na ref. [41]. No nosso caso, a relevância física e as propriedades de  $H_{aH}$  serão discutidas em trabalhos subseqüentes.

## 5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

No presente trabalho, focamos nossa atenção sobre o sistema quântico relativístico descrito pelo oscilador de Dirac (OD). Submetemos esse sistema a duas situações bastante distintas e que estão atualmente em evidência na pesquisa em teoria de campo e física da matéria condensada.

Na primeira situação, analisada no capítulo 2, avaliamos a influência da quebra de simetria de Lorentz no OD, implementada por meio do acoplamento de um background fixo dos tipos vetorial e axial, CPT-ímpar na Lagrangiana de Dirac original. O limite não-relativístico foi trabalhado e os Hamiltonianos de violação de Lorentz foram determinados. Em seguida, avaliamos as correções de primeira ordem induzidas sobre os níveis de energia do OD. Essa abordagem da violação de simetria de Lorentz é recente e tem sido bastante discutida como meio de alcançar uma compreensão maior dos fenômenos de altas energias que possam ser visualizados em sistemas de baixas energias, facilmente testáveis em laboratório.

Não se observou nenhuma modificação nos autovalores de energia do OD para o caso de quebra vetorial, enquanto que se observou a existência de um efeito tipo Zeeman no caso axial. Nossa principal contribuição foi aplicar a quebra de Lorentz na equação de Dirac acoplada ao potencial do tipo oscilador, que ainda não tinha sido avaliada na literatura.

A segunda parte desta dissertação trata do OD com massa dependente da posição. De todas as situações em que o OD é abordado na literatura, até o presente trabalho, não era de nosso conhecimento nenhuma discussão que envolvesse essa idéia. Além disso, nossa escolha baseia-se também no grande número de aplicações em física da matéria condensada, onde sistemas de massa efetiva são usados.

No capítulo 3, consideramos a equação de Dirac acoplada com o potencial do oscilador e tornamos a massa variável  $m(r)$ . Em vez de usarmos funções testes arbitrárias para a

massa da partícula, preferimos prosseguir aplicando uma transformação canônica que possibilitasse introduzir um vínculo para eliminar as derivadas de primeira ordem das componentes radiais na equação diferencial resultante. Assim, conseguimos determinar uma forma funcional para distribuição de massa da partícula e, como bônus, recuperamos a estrutura supersimétrica da equação de Dirac. Em seguida, aplicamos o formalismo da mecânica quântica supersimétrica para determinar as autoenergias e autofunções do estado fundamental do sistema. Das soluções radiais encontradas, geramos gráficos que permitiram a comparação qualitativa com o caso da massa constante visto no capítulo 1.

O quarto capítulo é dedicado à determinação do Hamiltoniano não-relativístico do OD com massa dependente da posição, via aplicação do método de Foldy-Wouthuysen. Encontramos um termo adicional anti-Hermitiano que está ausente quando consideramos a massa constante.

Como perspectiva imediata para estudos posteriores a serem seguidos com base em nosso trabalho, podemos indicar os seguintes caminhos:

1. Analisar a influência no OD de diferentes termos de quebra, como por exemplo termos tensoriais presentes na Lagrangiana de violação de Lorentz do Modelo Padrão Estendido;
2. Aplicar a quebra de simetria de Lorentz para sistemas de baixa dimensão (2+1), associada com acoplamento não-mínimo na presença de campos eletromagnéticos externos;
3. Investigação do comportamento dos Hamiltonianos de violação de Lorentz em baixas energias para outros tipos de acoplamento e também para partículas de spins diferentes de  $1/2$ ;
4. Prosseguir com a análise do papel do termo anti-Hermitiano encontrado no capítulo 4;
5. Analisar o OD na presença do efeito Aharonov-Casher.

# APÊNDICE A – A equação Hipergeométrica Confluente

Neste apêndice, faremos uma breve discussão sobre a equação hipergeométrica confluyente cujas soluções, como vimos no capítulo 1, correspondem às componentes radiais das autofunções do oscilador de Dirac com massa constante. Uma discussão bem mais completa pode ser encontrada em [42].

A função hipergeométrica confluyente é definida como a solução da equação diferencial

$$z \frac{d^2 M}{dz^2} + (b - z) \frac{dM}{dz} - aM = 0. \quad (\text{A.1})$$

A solução é obtida pelo método da expansão em série de potências, que apresenta como solução a série infinita

$$M(a, b, z) = 1 + \frac{az}{b} + \frac{(a)_2 z^2}{2!(b)_2} + \dots + \frac{(a)_n z^n}{n!(b)_n} \dots, \quad (\text{A.2})$$

onde  $(a)_0 = 1$ ,  $(a)_n = a(a+1)(a+2) \dots (a+n-1)$ .

Ao avaliarmos a convergência da série A.2(aplicando por exemplo o teste da razão), vemos que ela é convergente para todos os valores de  $z$  finitos. Entretanto, para  $z \rightarrow \infty$  ela diverge. Para que  $M(a, b, z)$  satisfaça a condição de contorno no infinito e permita que as autofunções do oscilador de Dirac sejam normalizadas, devemos impor que a série seja finita, e isso é facilmente conseguido exigindo-se que o primeiro parâmetro da função hipergeométrica seja igual a um inteiro negativo, isto é,  $a = -m$  e que o segundo parâmetro dado por  $b$ , não seja um inteiro negativo.

O comportamento assintótico de  $M(a, b, z)$  é dado por:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} M(a, b, z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-b} (1 + O(|z|^{-1})) \quad \text{Re } z > 0,$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} M(a, b, z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} (-z)^{-a} (1 + O(|z|^{-1})) \quad \text{Re } z < 0,$$

onde  $\Gamma(b)$  é a função Gama e  $O(x)$  representa os termos de ordem igual ou superior a  $x$ . Notamos também que

$$M(0, b, z) = 1, \quad M(a, 0, z) = \infty.$$

As funções

$$\begin{aligned} y_1 &= M(a, b, z), & y_2 &= z^{1-b} M(1+a-b, 2-b, z), \\ y_3 &= e^z M(b-a, b, -z), & y_4 &= z^{1-b} e^z M(1-a, 2-b, -z), \end{aligned}$$

são todas independentes uma das outras.

## A.1 Relações com outras funções

A função hipergeométrica confluyente (A.2) possui dois parâmetros livres que, ao assumirem valores convenientes, permitem que representemos diversas funções especiais em termos das hipergeométricas. O caso mais simples é obtido quando tomamos  $a = b$ . É simples verificar que

$$M(a, a, z) = e^z. \quad (\text{A.3})$$

Outro exemplo de funções que aparecem em uma grande variedade de problemas físicos e que podem ser representadas pela função hipergeométrica confluyente, são os polinômios de Laguerre. Eles obedecem a equação diferencial

$$x \frac{d^2 L_n^\alpha(x)}{dx^2} + (\alpha + 1 - x) \frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} + nL_n^\alpha(x) = 0. \quad (\text{A.4})$$

Esta equação é obviamente um caso especial de (A.1) e nós temos imediatamente

$$L_n^\alpha(x) = M(-n, \alpha + 1, x) \quad (\text{A.5})$$

Consideremos agora, a mudança na variável independente  $x = z^{1/2}$  em (A.1) que

produz a equação diferencial modificada

$$\frac{1}{4} \frac{d^2 M}{dx^2} - \left( \frac{1}{4X} - \frac{b}{2x} + \frac{x}{2} \right) \frac{dM}{dx} - aM = 0 \quad (\text{A.6})$$

Se tomarmos  $b = 1/2$  obtemos a simplificação

$$\frac{d^2 M}{dx^2} - 2x \frac{dM}{dx} - 4aM = 0 \quad (\text{A.7})$$

Lembrando que a equação diferencial de Hermite é definida como

$$\frac{d^2 H_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH_n(x)}{dx} + 2nH_n(X) = 0 \quad (\text{A.8})$$

Comparando (A.8) com (A.7) chegamos a conclusão que os polinômios de Hermite também podem ser escritos em termos das funções hipergeométricas confluentes como

$$H_n(x) = M \left( -\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, x^2 \right) \quad (\text{A.9})$$

Os polinômios de Hermite são as autofunções do oscilador harmônico quântico não-relativístico e, por isso, que constitui um caso particular das soluções radiais do oscilador de Dirac no limite de baixas energias, como foi visto no capítulo 1.

Como exemplo final, vamos considerar as funções de Bessel. Elas são as soluções da equação diferencial de Bessel que aparece em muitas áreas da física e que é definida por

$$z \frac{d^2 J_\nu(z)}{dz^2} + \frac{dJ_\nu(z)}{dz} + \left( 1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) J_\nu(z) = 0 \quad (\text{A.10})$$

Nesta equação, fazemos a substituição

$$J_\nu(z) = z^\nu e^{-iz} K(z).$$

Após alguma álgebra, obtemos a seguinte equação

$$z \frac{d^2 K(z)}{dz^2} + (2\nu + 1 - 2iz) \frac{dK(z)}{dz} - (2\nu + 1) iK(z) = 0. \quad (\text{A.11})$$

Fazendo, em seguida, a mudança de variável  $y = 2iz$ , temos:

$$y \frac{d^2 K(z)}{dy^2} + (2\nu + 1 - y) \frac{dK(y)}{dy} - \frac{1}{2}(2\nu + 1)K(y) = 0. \quad (\text{A.12})$$

Comparando com (A.1), concluímos que  $K(y)$  é uma função hipergeométrica confluyente, com

$$J_\nu(z) = z^\nu e^{-iz} M\left(\frac{1}{2}(2\nu + 1), 2\nu + 1, 2iz\right)$$

Muitas outras funções que aparecem em diversas áreas da física podem ser escritas em termos das funções hipergeométricas.

## APÊNDICE B – Breve resumo sobre Mecânica Quântica Supersimétrica

No presente apêndice, faremos uma breve revisão das idéias de supersimetria (SUSY) na mecânica quântica. Para maiores detalhes, remetemos o leitor às ref. [43, 44]. O formalismo da Mecânica Quântica Supersimétrica (MQS) é baseado nos métodos de fatoração do Hamiltoniano do oscilador harmônico simples por meio dos operadores  $a^\pm$ , que satisfazem

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + \omega^2 x^2) = \frac{\omega}{2}\{a^+, a^-\} = \omega \left( N + \frac{1}{2} \right), \quad N = a^+ a^-, \quad (\text{B.1})$$

$$a^\pm = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\pm i p_x - \omega x) = (a^\mp)^\dagger, \quad (\text{B.2})$$

$$[a^-, a^+] = 1, \quad [H, a^\pm] = \pm \omega a^\pm, \quad (\text{B.3})$$

cujos autovalores de energia são dados por

$$E = \omega \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (\text{B.4})$$

com  $n$  sendo os autovalores do operador número  $N$ .

A generalização do método acima para um potencial qualquer em uma dimensão é conseguida com  $\sqrt{\omega} a^- \rightarrow A^-$  e  $\sqrt{\omega} a^+ \rightarrow A^+$ , com

$$A^\mp = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mp i p_x - W(x)) = (A^\pm)^\dagger, \quad (\text{B.5})$$

onde  $W = W(x)$ , chamado de superpotencial, é uma função arbitrária da posição.

Definimos ainda os operadores não-Hermitianos autoadjuntos, conhecidos também como supercargas por meio de

$$Q_+ = A^+ \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & A^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_- = A^- \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A^- & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.6})$$

Por conseguinte, o Hamiltoniano supersimétrico  $H$  assume a forma

$$\begin{aligned} H = \{Q_+, Q_-\} &= \frac{1}{2} \left( p_x^2 + W^2(x) - \sigma_3 \frac{d}{dx} W(x) \right) \\ &= \begin{pmatrix} H_- & 0 \\ 0 & H_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^+ A^- & 0 \\ 0 & A^- A^- \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

onde  $\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y)$ ,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  são as matrizes de Pauli.

Os Hamiltonianos  $H_-$  e  $H_+$  são chamados de “parceiros supersimétricos” e são explicitamente dados por

$$H_- = A^+ A^- = \frac{1}{2} \left( p_x^2 + W^2(x) - \frac{d}{dx} W(x) \right), \quad (\text{B.8})$$

$$H_+ = A^- A^+ = \frac{1}{2} \left( p_x^2 + W^2(x) + \frac{d}{dx} W(x) \right). \quad (\text{B.9})$$

Observamos que a escolha particular de  $W(x) = \omega x$ , recupera o resultado do oscilador harmônico simples de modo que

$$A^- = a^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{d}{dx} - \omega x \right) = \psi_-^{(0)} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{dx} \right) \frac{1}{\psi_-^{(0)}}, \quad (\text{B.10})$$

$$A^+ = a^+ = (A^-)^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{d}{dx} - \omega x \right) = \frac{1}{\psi_-^{(0)}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{dx} \right) \psi_-^{(0)}, \quad (\text{B.11})$$

onde

$$\psi_-^{(0)} = \exp \left( -\frac{1}{2} \omega x^2 \right) \quad (\text{B.12})$$

é a função de onda normalizável do estado fundamental do Hamiltoniano  $H_-$ .

De maneira análoga, para o Hamiltoniano supersimétrico (B.7), os operadores  $A^\pm$  de (B.5) podem ser escritos na forma

$$\begin{aligned}
 A^- &= \psi_-^{(0)} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{dx} \right) \frac{1}{\psi_-^{(0)}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{d}{dx} + \frac{1}{\psi_-^{(0)}} \frac{d\psi_-^{(0)}}{dx} \right), \tag{B.13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A^+ &= (A^-)^\dagger = \frac{1}{\psi_-^{(0)}} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{dx} \right) \psi_-^{(0)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{d}{dx} + \frac{1}{\psi_-^{(0)}} \frac{d\psi_-^{(0)}}{dx} \right), \tag{B.14}
 \end{aligned}$$

onde

$$\psi_-^{(0)} \propto \exp \left( -\int^x W(q) dq \right), \tag{B.15}$$

e

$$\psi_+^{(0)} \propto \exp \left( \int^x W(q) dq \right) \Rightarrow \psi_+^{(0)} \propto \frac{1}{\psi_-^{(0)}} \tag{B.16}$$

representam os estados fundamentais de  $H_-$  e  $H_+$ , respectivamente. Além disso, podemos escrever as seguintes condições de aniquilação para os operadores  $A^\pm$ :

$$A^- \psi_-^{(0)} = 0, \quad A^+ \psi_+^{(0)} = 0. \tag{B.17}$$

Quando as autofunções (B.15) e (B.16) são normalizáveis, elas se tornam as únicas autofunções do Hamiltoniano supersimétrico (B.7) correspondendo ao estado fundamental de energia zero. Neste caso, a SUSY é considerada “não quebrada”. Quando nem  $\psi_-^{(0)}$  ou  $\psi_+^{(0)}$  são funções de onda admissíveis, isto é, não é possível normalizá-las, então os estados de energia zero não existem e a SUSY é considerada “quebrada”. De (B.15) e (B.16), é fácil ver que é o comportamento assintótico de  $W(x)$  que vai definir se existe ou não soluções normalizáveis.

# Referências

- [1] W. Greiner, *Relativistic quantum mechanics: wave equations*, Springer, (1997).
- [2] M. Moshinsky and A. Szczepaniak, *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**, L817 (1989).
- [3] Manoel M. Ferreira Jr. and Fernando M. O. Moucherek, *Int. J. Mod. Phys. A* **21**, 6211-6227 (2006).
- [4] A. R. Plastino, A. Rigo, M. Casas, F. Garcias, and A. Plastino, *Phys. Rev. A* **60**(1999)4318.
- [5] F. S. A. Cavalcante, R. N. Costa Filho, J. Ribeiro Filho, C. A. S. de Almeida, V. N. Freire, *Phys. Rev. B* **55** (1997)1326.
- [6] O. L. De Lange, *J. Math. Phys.***32** ,1296-1300, (1991).
- [7] Martínez-y-Romero R P and Salas-Brito A L, *J. Math. Phys.***33**, 1831-1836, (1991).
- [8] Martínez y Romero R. P., Matías Moreno and A. Zentella, *Mod. Phys. Lett. A* **5**, 949-954, (1990).
- [9] M. Moshinsky and Y. Smirnov, *The harmonic oscillator in modern physics*, Hardwood Academic Publisher, 1996, pp. 289-404.
- [10] M. Moreno and A. Zentella, *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**, L821 (1989).
- [11] P. Rozmej and R. Arvieu, *J. Phys. A* **32**, 5367 (1999).
- [12] Choon-Lin Ho and Pinaki Roy, *Annals of Phys.* **312**, 161-176, (2004).
- [13] M. H. Pacheco, R. R. Landim and C. A. S. Almeida, *Phys. Lett.***A311**, 93-96, (2003).
- [14] Bjorken and Drell, *Relativistic quantum mechanics*, Mc Graw Hill, (1964).
- [15] Paul Strange, *Relativistic quantum mechanics, with applications in condensed matter and atomic physics*, Cambridge, (2005).
- [16] W. Greiner, *Quantum mechanics: an introduction*, Springer,(1993).
- [17] J. Benítez, R. P. Martínez y Romero, H. N. Núñez-Yépez and A. L. Salas-Brito, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1643 (1990) and ERRATA **65**, 2085 (1990).
- [18] V. A. Kostelecký and R. Potting, *Phys. Rev. D* **51**, 3923 (1995).
- [19] R. Gambini and J. Pullin, *Phys. Rev.* **D59**,124021 (1999).
- [20] J. Alfaro, H. A. Morales-Tecotl and L. F. Urrutia, *Phys. Rev. Lett.* **84** 2318 (2000).

- [21] V. A. Kostelecký and S. Samuel, *Phys. Rev. D* **39**, 683 (1989).
- [22] H. Belich, T. Costa-Soares, M. A. Santos e M. T. D. Orlando, *Revista Brasileira do Ensino de Física*, v.29, n.1, p. 57-64 (2007).
- [23] D. Colladay and V. A. Kostelecký, *Phys. Rev. D* **58**, 116002 (1998).
- [24] D. Colladay and V. A. Kostelecký, *Phys. Rev. D* **55**, 6760 (1997).
- [25] H. Belich, T. Costa-Soares, M. M. Ferreira, Jr., J. A. Helayël-Neto and F. M. O. Moucherek, *Phys. Rev. D* **74**, 065009 (2006).
- [26] J. J. Sakurai, *Modern quantum mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company,(1994).
- [27] George B. Arfken and Hans J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Elsevier, (2005).
- [28] P. Harrison, *Quantum Wells, Wires and Dots*, Wiley, New York, 2000.
- [29] L. Serra, E. Lipparini, *Europhys. Lett.* 40(1997)667.
- [30] G. Bastard, *Wave Mechanics Applied to Semiconductor Heterostructures*, Editions de Physique, Les Ulis, 1998.
- [31] M. Barranco, M. Pi, S. M. Gatica, E. S. Hernandez and J. Navarro, *Phys. Rev. B*56(1997)8997.
- [32] O. von Roos, *Phys. Rev. B* 27, 7547 (1981).
- [33] R. Koç and M. Koca, *J. Phys. A:Math. Gen.*36(2003)8105.
- [34] S. Cruz y Cruz, J. Negro, L. M. Nieto, *Phys. Lett. A* 369(2007)400.
- [35] A. D. Alhaidari, *Phys. Lett. A* 322,(2004)72-77.
- [36] Y. Nogami and F. M. Toyama, *Phys. Rev. A* 47(1993)1708.
- [37] A. D. Alhaidari, *Phys. Rev. A* 65(2002)042109.
- [38] V. V. Semenov, *J. Phys. A* 23(1990)L721.
- [39] C.-L. Ho and P. Roy, *Annals of Phys.* 312, (2004)161.
- [40] Leslie L. Foldy and Siegfried A. Wouthuysen, *Phys. Rev.* 78 (1950).
- [41] Bijan Bagchi and Toshiaki Tanaka, *A generalized non-Hermitian oscillator Hamiltonian, N-fold supersymmetry and position-dependent mass models*, arXiv.org:0803.0207, (2008).
- [42] Abramowitz. M and Stegun I. A., *Handbook od Mathematical Functions*, Dover, (1972).
- [43] R. Lima Rodrigues, Monograph CBPF-MO-03-01 (2001) arXiv:hep-th/0205017v6 12 Sep (2002).
- [44] Fred Cooper, Avinash khare and Uday Sukhatme, *Phys. Rep.* 267-385 (1995).