UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

EMANUEL WENDELL DAMASCENO DANTAS

GRAVITAÇÃO HOLOGRÁFICA

FORTALEZA

2014

EMANUEL WENDELL DAMASCENO DANTAS

GRAVITAÇÃO HOLOGRÁFICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho

Coorientador: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho

FORTALEZA

2014

EMANUEL WENDELL DAMASCENO DANTAS

GRAVITAÇÃO HOLOGRÁFICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 17/07/2014

BANCA EXAMINADORA

Dr. Geová Maciel de Alencar Filho (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho
(Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dr. Célio Rodrigues Muniz
Universidade Estadual do Ceará (FECLI/IGUATU)

Dr. Makarius Oliveira Tahim
Universidade Estadual do Ceará
(FECLESC/QUIXADÁ)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Física

D21g Dantas, Emanuel Wendell Damasceno
Gravitação holográfica / Emanuel Wendell Damasceno Dantas. – Fortaleza, 2014.
38 f.: il. enc.; 30 cm.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Física, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2014.
Orientação: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.
Coorientação: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho.
Área de concentração: Física da Matéria Condensada.

1. Altas energias. 2. Termo de superfície. 3. Equações de campo. I. Alencar Filho, Geová Maciel de. II. Carvalho, Ricardo Renan Landim de. III. Título.

CDD 530

RESUMO

Neste trabalho iremos mostrar uma nova perspectiva para a gravidade, consequentemente para a dinâmica do espaço. Faremos uma exposição padrão do tratamento da ação gravitacional e as condições para que obtenhamos as equações de campo. Daí exploraremos uma característica notável da Lagrangeana gravitacional, que é o fato de ela dar origem à equações de segunda ordem mesmo que ela contenha termos de derivada segunda ordem. Em seguida mostraremos que, ao impor que a ação gravitacional seja invariante por uma certa transformação de difeomorfismos, nós conseguimos obter as equações de campo gravitacional usando o termo de superfície, ao invés do termo de bulk como é padrão na literatura. Em seguida mostramos que isso só é possível para o caso de gravidade pura, e discutimos sua invalidade quando matéria é rigorosamente tratada.

Palavras-chave: termo de superfície equações de campo

ABSTRACT

In this work we will expose a new perspective on gravity, consequently on the dynamics of spacetime. We will present a standard treatment on the gravitational action and the conditions to hold in order to arrive on the field equations. Then we shall investigate a remarkable gravitational Lagrangean feature: even though the Lagrangean itself has second order derivatives on the metric, we can still arrive at second order field equations. After we show that imposing invariance by a special class of diffeomorphisms on the gravitational action, we can get the field equations when using surface term, rather than the bulk term as it is standard on literature. Then we show it is possibly only for pure gravity, and we discuss about it's validity when matter is rigorously considered.

Keywords: surface term. field equations. . . .

LISTA DE SÍMBOLOS

Adotaremos a notação na qual símbolos gregos (μ, ν, etc) variam de 0 a 3, onde 0 se refere ao tempo, enquanto que símbolos latinos (i, j, etc) variam de 1 a 3.
Usaremos também a notação de soma: quando aparecerem dois índices iguais, um covariante e outro contravariante, é indício de soma. Ex.: $\Gamma^{\mu}_{\mu} = \Gamma^{0}_{0} + \Gamma^{1}_{1} + \Gamma^{2}_{2} + \Gamma^{3}_{3}$

$\eta_{\mu\nu}$	Métrica do espaço de Minkowsky
$g_{\mu\nu}$	Métrica do espaço curvo
x^{μ}	Coleção de 4 coordenadas

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Queremos, de início, expor as principais ferramentas matemáticas que usaremos no decorrer do texto. Muita coisa foi deixada de fora pois não temos a intenção de fazer uma completa exposição matemática, ou nem mesmo muito rigorosa, do que necessitaremos para tratar a Relatividade Especial e a Geral. Após essa exposição matemática faremos uma breve revisão da Relatividade Especial.

1.1 Relatividade Especial

O início do que conhecemos hoje por Relatividade Especial, provavelmente ocorreu quando a Teoria do Eletromagnetismo de Maxwell (1984) conseguiu explicar a luz como sendo uma onda eletromagnética. Porém, até então, todas as ondas eram conhecidas por se propagarem em algum meio, o que levou a crer que as ondas eletromagnéticas também o faziam. Tal meio foi proposto como sendo éter. Vários foram os que tentaram provar sua existência, com experimentos se propunham verificar variações na velocidade da luz, modificações no índice de refração de certos dielétricos ou efeitos de "arrasto" nas placas de um condensador. Todas falharam.

Como uma solução para esse problema, Einstein, em 1905, abandona o conceito de éter e afirma que as ondas eletromagnéticas não necessitam de um meio para se propagarem. Ele postula o *Princípio da Relatividade*, que nos diz que nenhum referencial é melhor que outro para descrever fenômenos físicos. Ele também postula a invariância da velocidade da luz.

Considerando-se que as transformações entre dois referênciais devem ser lineares, ou seja, $t' = At + Bx + Cy + Dz$, $x' = Et + Fx + \cdots$, onde $A, B, \cdots$, são constantes que, a princípio, podem depender de $\vec{v}$, podemos verificar que, para referenciais que se deslocam com velocidade v no eixo-x, as coordenadas espaciais se resumem a

$$\begin{aligned} x' &= A(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{1.1}$$

e por reversão de eixos

$$\begin{aligned} x &= A(x' - vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned} \tag{1.2}$$

Nesse estágio, usaremos a invariância dos sinais de luz em ambos os referênciais, $x = ct$ e $x' = ct'$, o que nos leva a conclusão que $A^2 = (1 - v^2/c^2)^{-1}$. Como $x \to 0$ implica $x' = x$, devemos usar a raiz positiva, o que nos deixa com

$$A = \gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-1} \tag{1.3}$$

conhecido como *fator de Lorentz*.

Finalmente, substituindo x' dado por (1.1) em (1.2), as transformações entre referenciais inerciais podem ser escritas como

$$\left.\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ x' &= \gamma\left(-vt + x\right) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

que claramente obedecem à

$$\Delta s'^2 = \Delta s^2 \tag{1.5}$$

onde $\Delta s^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$, é chamado de *intervalo quadrático*. Note que, para a luz, $\Delta s^2 = 0$. As transformações (1.4) são as Transformações de Lorentz (TL).

Podemos reescrever (1.4) em uma maneira mais interessante como

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu \tag{1.6}$$

onde $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, e

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} -\gamma v/c & \gamma & 0 & 0 \\ \gamma & -\gamma v/c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

sujeito a $\eta'_{\alpha\beta} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\,\eta_{\mu\nu}$, com $\eta_{\mu\nu} = diag(-1, 1, 1, 1)$.

Uma característica fundamental das TL é que elas deixam invariante intervalo quadrático e o tempo próprio, definido por

$$ds^2 = -c^2dt^2 + \vec{x}\cdot\vec{x} = -c^2d\tau^2 \tag{1.8}$$

que define um referencial que se move junto a partícula, chamado de *referencial próprio*.

Pela forma da equação (1.6), ou (1.4), vemos que essas novas transformações não são as velhas conhecidas da Mecânica Clássica, portanto, nessa nova visão, a velha Mecânica falha. É necessária uma nova Mecânica. Porém, ao fazer $c \to \infty$, as TL recaem nas conhecidas transformações clássicas de Galileu. Com isso, a nova Mecânica deve ser construida de modo que, a baixas velocidades, re-obtemos a Mecânica de Newton.

Definiremos uma *força relativística*, na linguagem de 4-vetores, em analogia à Lei de Newton,

$$f^{\mu} = m\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} \tag{1.9}$$

e, usando a lei de transformação de 4-vetores para f^{μ}, e, que no referencial próprio, o tempo próprio e o tempo (coordenada) são o mesmo,

$$f^{\mu} = F^{\mu} \qquad \text{com} \qquad F^0 \equiv 0$$

pois, a força Newtoniana não possui uma componente temporal.

A 4-força é $f^{\mu} = (f^0, \vec{f}\,)$, e podemos mostrar facilmente que $(c = 1)$

$$\vec{f} = \vec{F} + (\gamma - 1)\vec{v}\;\frac{\vec{v}\cdot\vec{F}}{v^2}$$

$$f^0 = \gamma\vec{v}\cdot\vec{F} = \vec{v}\cdot\vec{F}$$

A componente temporal da força relativística é a própria potência.

O *momento relativístico*, assim como a força, é definido de modo semelhante ao clássico

$$p^\mu \equiv m \, \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{1.10}$$

que tem componentes $p^\mu = (E, \vec{p}\ ) = m\gamma(1, \vec{v}\ )$.

Um invariante bastante conhecido, derivado do 4-momento, é $-m^2 = -E^2 + \vec{p} \cdot \vec{p}$, que mostra que uma partícula, mesmo parada, ainda apresenta uma energia interna, chamada de energia de repouso, $E = mc^2$, reintroduzindo c.

Podemos construir o eletromagnetismo definindo-se um tensor antissimétrico de 2ª ordem, que tem por componentes os campos elétrico e magnético,

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

Com isso, as equações de Maxwell não-homogêneas podem ser reescritas como

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu$$

enquanto que as homogêneas ficam da forma

$$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \partial_\beta F_{\mu\nu} = 0$$

onde J^ν é a 4-corrente e obedece à equação da continuidade $\partial_\mu J^\mu = 0$. As equações homogêneas nos permitem representar $F_{\mu\nu}$ como o rotacional de algum A_μ,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{1.12}$$

porém temos uma certa liberdade na definição, podemos adicionar $\partial_\alpha \psi$ e ainda assim manter $F_{\mu\nu}$ inalterado. Com isso, impomos que A_μ obedeça a $\partial^\mu A_\mu = 0$.

1.2 Fundamentos Matemáticos

Temos por objetivo escrever equações que sejam invariantes sob transformações gerais de coordenadas, e para isso devemos conhecer como as quantidades que entrarão nas equações devem se comportar sob tais transformações. Para tal usaremos objetos tensoriais, pois são invariantes. Um tensor é definido como sendo uma função linear de 1-formas (vetores covariantes) e vetores (contravariantes) em números reais (invariantes). Porém não os apresentaremos com rigor matemático exigido para os mesmos. Optaremos por uma exposição clássica, em termos de como suas componentes se transformam.

Seja x o antigo sistema coordenado, e x' o novo. Um tensor contravariante de ordem i e covariante de ordem j, que simbolizaremos por $\binom{i}{j}$, é um objeto que se transforma de acordo com

$$T'^{\alpha_1 \cdots \alpha_i}_{\beta_1 \cdots \beta_j} = \frac{\partial x'^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\alpha_i}}{\partial x^{\mu_i}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_j}}{\partial x'^{\beta_j}} \, T^{\mu_1 \cdots \mu_i}_{\nu_1 \cdots \nu_j} \tag{1.13}$$

Essa regra deixa claro que um tensor $\binom{i}{j}$ não muda de ordem após a tranformação. A transformação mais simples é a de um escalar, que é um tensor $\binom{0}{0}$, ou seja, ele não se transform: um número.

De especial importância são os tensores de primeira e segunda ordem. O tensor $\binom{1}{0}$ é chamado de vetor contravariante, o tensor $\binom{0}{1}$ é um vetor covariante. Os de segunda ordem tem papel central na teoria eletromagnética, pois as equações de Maxwell são escritas em termos do tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$. Porém, talvez o de maior importância seja o tensor métrico $g_{\mu\nu}$,

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \, g_{\mu\nu}$$

e definimos $g^{\alpha\beta}$ de modo a obedecer

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma \tag{1.14}$$

onde δ^α_β é a delta de Kronecker. A métrica é um tensor simétrico.

O tensor métrico é usado nas operações de contração, como $T^{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} T^{\mu\nu\alpha\beta}$, e para abaixamento ou levantamento de índices, $T^\mu{}_\nu = g_{\alpha\nu} T^{\mu\alpha}$ e $T_\nu{}^\mu = g^{\alpha\mu} T_{\nu\alpha}$, respectivamente. Devemos notar que (1.14) é uma operação de levantamento/abaixamento de índice da métrica covariante/contravariante, onde, por definição, $\delta^\mu_\nu = g^\mu_\nu$.

O processo de derivação em coordenadas gerais é um pouco mais delicado. No sistema de coordenadas Cartesiano, por exemplo, temos que

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial (v^\nu \hat{e}_\nu)}{\partial x^\mu} = \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu} \hat{e}_\nu$$

porém, em coordenadas generalizadas, devemos levar em conta que os vetores base do espaço variam de ponto a ponto. Queremos construir um operador de derivação ∇ que obedeça certas imposições: regra da cadeia, linearidade e atue como derivação parcial quando atuando em funções, ou seja,

$$\nabla_\mu \, \vec{v} = \nabla_\mu \, (v^\nu \hat{e}_\nu) = \hat{e}_\nu \partial_\mu v^\nu + v^\nu \nabla_\mu \hat{e}_\nu$$

Esperamos que $\nabla_\mu \hat{e}_\nu$ seja proporcional aos vetores de base, logo, escreveremos que

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \hat{e}_\nu &\equiv \Gamma^\lambda_{\nu\mu}\hat{e}_\lambda \\ \nabla_\mu \hat{f}^\nu &\equiv -\Gamma^\nu_{\lambda\mu}\hat{f}^\lambda \end{aligned} \tag{1.15}$$

onde já escrevemos a expressão para os vetores $\hat{f}$, duais aos $\hat{e}$, que seguem diretamente de sua definição, $\langle \hat{e}_\mu, \hat{f}^\nu \rangle \equiv \delta^\nu_\mu$, onde $\langle \ , \rangle$ é o produto escalar.

Com isso vemos que a forma para a derivada fica

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \vec{v} = (\nabla_\mu v^\nu)\hat{e}_\nu = (\partial_\mu v^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} v^\lambda)\hat{e}_\nu \\ \nabla_\mu \vec{v} = (\nabla_\mu v_\nu)\hat{f}^\nu = (\partial_\mu v_\nu - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} v_\lambda)\hat{f}^\nu \end{aligned} \tag{1.16}$$

Os simbolos $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ são objetos não tensoriais que podem ser escritos em função da métrica como

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) \tag{1.17}$$

e são chamados de *símbolos de Christoffel*, e claramente são simétricos nos índices covariantes. Eles surgem diretamente do fato de que em coordenadas gerais, um campo tensorial pode variar de ponto a ponto. Com $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ dado por (1.17), podemos facilmente verificar que $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$.

Diferentemente da diferenciação parcial, a diferenciação covariante em geral não comuta. Mas pode ser mostrado que o comutador de duas derivadas covariantes atuando em algum campo tensorial, sempre pode ser escrito em termos do próprio campo tensorial, por meio de

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]A^\alpha = (\partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\lambda\mu}\Gamma^\lambda_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\nu}\Gamma^\lambda_{\beta\mu})A^\beta$$

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]A^\alpha \equiv R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}A^\beta \tag{1.18}$$

onde definimos o tensor de *curvatura*, ou de Riemann, $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$. Ele está diretamente relacionado à curvatura do espaço (daí seu nome). Uma condição necessária e suficiente para uma variedade ser *flat*, ou plana, é que o tensor de curvatura deve ser identicamente nulo [3].

O tensor de curvatura ($R_{\alpha\beta\mu\nu}$, com todos os índices covariantes) possui algumas simetrias:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\beta\alpha\nu\mu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} \tag{1.19}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} + R_{\alpha\nu\beta\mu} = 0$$

Essas simetrias reduzem o número de componentes independentes de n^4 para $[n^2(n^2 - 1)]/12$, que em quatro dimensões são 20. Uma outra importantíssima característica do tensor de curvatura é que ele obedece às *identidades de Bianchi*

$$\nabla_\alpha R_{\mu\nu\beta\gamma} + \nabla_\beta R_{\mu\nu\gamma\alpha} + \nabla_\gamma R_{\mu\nu\alpha\beta} = 0 \tag{1.20}$$

que é por onde, por meio de contrações com a métrica, que chegamos ao tensor $G_{\mu\nu}$ que descreve o campo gravitacional e obedece à $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$. Outros tensores igualmente importantes são o *tensor de Ricci*

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} \tag{1.21}$$

e o *tensor de Einstein*,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{1.22}$$

definido em termos do tensor de Ricci e do *escalar de Ricci* $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$.

A *derivada de Lie* de um campo vetorial contravariante está diretamente relacionada com a variação $\delta v^\mu(x)$ desse campo, e é definida como

$$\pounds_u v^\mu \equiv u^\nu \partial_\nu v^\mu - v^\mu \partial_\nu u^\nu = u^\nu \nabla_\nu v^\mu - v^\mu \nabla_\nu u^\nu \tag{1.23}$$

A segunda igualdade segue do fato de que os símbolos de Christoffel se cancelarão. A derivada de Lie nos será útil na discussão sobre a invariância por difeomorfismo, necessário para esclarecer alguns aspectos da variação da ação gravitacional.

A forma padrão de se chegar nas equações de campo é por meio de um método variacional. Definimos a *ação* como sendo

$$S = \int d^4x \; L \tag{1.24}$$

onde $L = L(\phi, \partial_\nu \phi; x^\mu)$ é uma densidade Lagrangeana (ou seja, Lagrangeana por unidade de 4-volume) para um único campo e a variáveis independentes são os x^μ. Ao variarmos essa ação estaremos interessados nos "pontos" onde ela será estacionária, logo

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta\phi + \int d^4x \; \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right) = 0$$

e exigiremos que o campo se anule na fronteira. Isso nos permite eliminar o último termo e ficamos com as equações de movimento para o campo ϕ como sendo

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial_\mu \Pi^\mu = 0 \tag{1.25}$$

onde $\Pi^\mu = \dfrac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)}$, é momento canônico associado ao campo ϕ. Mais tarde mostraremos que também é possível impor, não que o campo, mas que o momento se anule na fronteira.

Para transformações de coordenadas gerais o elemento de volume não é um invariante, pois $d^4x' = J\ d^4x$, onde J é o determinante do Jacobiano da transformação, $J = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|$. Porém, se lembrarmos da transformação do tensor métrico,

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}g_{\alpha\beta}$$

tomando o determinante concluimos que $g' = J^{-2}g$, ou $\sqrt{-g'} = J^{-1}\sqrt{-g}$, onde g é o determinante da métrica e é negativo, pois tem por assinatura $(-,+,+,+)$. Com isso, claramente o produto $\sqrt{-g}\ d^4x$ é invariante por transformações gerais de coordenadas.

Outro ponto importante é derivada do determinante da métrica, que é dado por

$$\partial_\mu g = g g^{\alpha\beta}\partial_\mu g_{\alpha\beta} = -g g_{\alpha\beta}\partial_\mu g^{\alpha\beta} \tag{1.26}$$

que vem diretamente da definição de determinante e matriz adjunta, e a última igualdade vem da definição (1.14).

2 EQUAÇÕES DE CAMPO

Iremos apresentar a exposição padrão, na literatura, das equações de campo gravitacional. Mostramos que é possível separar a ação gravitacional em um termo de bulk, ou quadrático, e em um termo de superfície. O que se faz é desprezar o termo de superfície, pois é uma derivada total e não contribuirá na ação quando a superfície for ao infinito, onde tanto os campos como suas derivadas se anulam , e obter as equações de campo por meio da ação do bulk. Por fim, mostramos que existe uma interessante relação entre a Lagrangeana do bulk e da superfície, permitindo escrever a ação gravitacional em termos apenas da lagrangeana do bulk e impondo que o momento canônico associado à $g_{\mu\nu}$ se anule na fronteira, diferentemente do usual.

2.1 A Lagrangeana gravitacional

Podemos, de forma rápida e simples, chegar nas equações de campo aplicando diretamente o princípio variacional e desprezando o termo de superfície, provido da condição de contorno $\delta g^{\mu\nu} = 0|_{\partial U}$ e $\delta \partial_\alpha g^{\mu\nu} = 0|_{\partial U}$. Porém, iremos primeiro mostrar como a Lagrangeana gravitacional,

$$16\pi G\ L_g = R \tag{2.1}$$

pode ser dividida em dois termos, o termo de *bulk* e o termo de superfície (4-divergência).

O escalar de Ricci é obtido por meio de uma dupla contração da métrica com o tensor de curvatura, $R = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu}$, então teremos por objetivo procurar uma forma de escrever o escalar de Ricci como uma combinação do tensor de curvatura

$$R \equiv Q^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} \tag{2.2}$$

onde o tensor $Q^{\alpha\beta\mu\nu}$ deve ser formado apenas pela métrica e ter as mesmas simetrias de $R_{\alpha\beta\mu\nu}$. Escrevemos

$$2Q^{\alpha\beta\mu\nu} = Ag^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + Bg^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + Cg^{\alpha\nu} g^{\beta\mu}$$

e, pelas simetrias impostas, temos que $A = 0$ e $B = -C = 1$. Com isso, $2Q^{\alpha\beta\mu\nu} = g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu}$, ou

$$Q^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\nu}_{\alpha}\delta^{\mu}_{\beta}) \tag{2.3}$$

Devemos notar duas características neste tensor, como ele é formado pela métrica sua derivada covariante é nula, $\nabla_\lambda Q^{\alpha\beta\mu\nu} = 0$, em particular a divergência, ou seja, quando λ for igual à qualquer um dos índices de Q, e por ser escrito em termos do tensor alternante $\left(Q^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta}\right)$, podemos tratá-lo como um tensor de componentes constatntes ($\partial_\lambda Q^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = 0$).

Afim de alcançar nosso objetivo, queremos expressar $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ em termos dos símbolos de Christoffel. Para isso, consideremos o objeto

$$\mathbb{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \equiv \partial_\mu \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}_{\beta\nu}$$

onde claramente sua parte antissimétrica é o tensor de curvatura. O reescreveremos como soma de suas componentes simétricas e antissimétricas. Com isso chegamos a

$$\mathbb{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \mathbb{R}^{\alpha}{}_{\beta(\mu\nu)} + \mathbb{R}^{\alpha}{}_{\beta[\mu\nu]} = \mathbb{R}^{\alpha}{}_{\beta(\mu\nu)} + \frac{1}{2}R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$$

Agora seja

$$\mathfrak{R} = 2Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}\mathbb{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = 2Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}\left(\mathbb{R}^{\alpha}{}_{\beta(\mu\nu)} + \frac{1}{2}R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\right) \tag{2.4}$$

Como $Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}$ é antissimétrico no par $\mu\nu$, somos levados a concluir que $\mathfrak{R} = R$. Isso nos permite escrever $R = 2Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}\mathbb{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$.

Verifiquemos como a expressão para $\sqrt{-g}R$ ficará.

$$\sqrt{-g}R = R = 2Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}\mathbb{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = 2\sqrt{-g}Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}(\partial_\mu\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}_{\beta\nu}) \tag{2.5}$$

$$= 2\sqrt{-g}Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}_{\beta\nu} + 2\partial_\mu(\sqrt{-g}Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}) - 2\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}\partial_\mu(\sqrt{-g}Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu})$$

$$\begin{aligned} &= 2\sqrt{-g}Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}_{\beta\nu} + 2\partial_\mu(\sqrt{-g}Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}) \\ &-2\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}(\sqrt{-g}\partial_\mu Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu} + Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}\partial_\mu\sqrt{-g}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2\sqrt{-g}Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}_{\beta\nu} + 2\partial_\mu(\sqrt{-g}Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}) \\ &-2\sqrt{-g}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}\partial_\mu Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu} - 2\sqrt{-g}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}\left(\frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\partial_\mu g_{\lambda\sigma}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}R &= 2\sqrt{-g}Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}_{\beta\nu} + 2\partial_\mu(\sqrt{-g}Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}) \\ &\quad -2\sqrt{-g}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}\partial_\mu Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu} - 2\sqrt{-g}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Agora faremos uso do fato já discutido acima de que a divergente covariante de $Q_{\alpha}{}^{\beta\mu\nu}$ é nulo, ou seja

$$\nabla_\mu Q_\alpha{}^{\beta\mu\nu} = \partial_\mu Q_\alpha{}^{\beta\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\alpha\mu} Q_\lambda{}^{\beta\mu\nu} + \Gamma^\beta_{\lambda\mu} Q_\alpha{}^{\lambda\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\lambda\mu} Q_\alpha{}^{\beta\lambda\nu} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} Q_\alpha{}^{\beta\mu\lambda} = 0 \tag{2.7}$$

Usando (2.7) em (2.6), chegamos a

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}R &= 2\sqrt{-g}\ \Gamma^\alpha_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\lambda\mu} Q_\alpha{}^{\lambda\mu\nu} + 2\partial_\mu(\sqrt{-g}\ Q_\alpha{}^{\lambda\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\beta\nu}) \\ &= 2\sqrt{-g}\ \Gamma^\alpha_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\lambda\mu} Q_\alpha{}^{\lambda\mu\nu} + \partial_\mu\left(2\sqrt{-g} g^{\beta\epsilon} Q^{\mu\nu}_{\alpha\epsilon}\Gamma^\alpha_{\beta\nu}\right) \\ &= \sqrt{-g} L_{quad} + L_S \end{aligned} \tag{2.8}$$

respectivamente. Chegamos à uma expressão com um termo que claramente é quadrática em $\partial_\mu g_{\alpha\beta}$ e outro termo com uma divergência total, que leva a um termo de superfície. Explicitamente, L_{quad} fica

$$L_{quad} = 2\Gamma^\alpha_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\lambda\mu} Q_\alpha{}^{\lambda\mu\nu} = 2\Gamma^\alpha_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\lambda\mu}\ \frac{1}{2}(\delta^\mu_\alpha g^{\lambda\nu} - \delta^\nu_\alpha g^{\lambda\mu})$$

$$L_{quad} = g^{\mu\nu}(\Gamma^\alpha_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\mu} - \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\Gamma^\beta_{\mu\nu}) \tag{2.9}$$

Para termos uma visão mais clara sobre (2.9), podemos reescrever os símbolos de Christoffel (1.17) como

$$\Gamma^\alpha_{\beta\mu} = \frac{1}{2}(g^{\alpha\kappa}\delta^\rho_\mu\delta^\sigma_\beta + g^{\alpha\kappa}\delta^\rho_\beta\delta^\sigma_\mu + g^{\alpha\rho}\delta^\sigma_\beta\delta^\kappa_\mu)\partial_\rho g_{\sigma\kappa} \tag{2.10}$$

e por substituição em (2.9), temos

$$\begin{aligned} L_{quad} = &\frac{1}{4} g^{\mu\nu}\partial_\rho g_{\sigma\kappa}\partial_\varrho g_{\varsigma\tau}\left(g^{\alpha\kappa}g^{\beta\tau}\delta^\rho_\nu\delta^\sigma_\beta\delta^\varrho_\alpha\delta^\varsigma_\mu + g^{\alpha\kappa}g^{\beta\tau}\delta^\rho_\nu\delta^\sigma_\beta\delta^\varrho_\mu\delta^\varsigma_\alpha - g^{\alpha\kappa}g^{\beta\varrho}\delta^\rho_\nu\delta^\sigma_\beta\delta^\varsigma_\mu\delta^\tau_\alpha + \right. \\ &+ g^{\alpha\kappa}g^{\beta\tau}\delta^\rho_\beta\delta^\sigma_\nu\delta^\varrho_\alpha\delta^\varsigma_\mu + g^{\alpha\kappa}g^{\beta\tau}\delta^\rho_\beta\delta^\sigma_\nu\delta^\varrho_\mu\delta^\varsigma_\alpha - g^{\alpha\kappa}g^{\beta\varrho}\delta^\rho_\beta\delta^\sigma_\nu\delta^\varsigma_\mu\delta^\tau_\alpha - g^{\alpha\rho}g^{\beta\tau}\delta^\sigma_\beta\delta^\kappa_\nu\delta^\varrho_\alpha\delta^\varsigma_\mu + \\ &\left. - g^{\alpha\rho}g^{\beta\tau}\delta^\sigma_\beta\delta^\kappa_\nu\delta^\varrho_\mu\delta^\varsigma_\alpha + g^{\alpha\rho}g^{\beta\varrho}\delta^\sigma_\beta\delta^\kappa_\mu\delta^\varsigma_\nu\delta^\tau_\alpha\right) - \frac{1}{4} g^{\mu\nu}\partial_\rho g_{\sigma\kappa}\partial_\varrho g_{\varsigma\tau}\left(g^{\alpha\kappa}g^{\beta\tau}\delta^\rho_\alpha\delta^\sigma_\beta\delta^\varrho_\nu\delta^\varsigma_\mu + \right. \\ &+ g^{\alpha\kappa}g^{\beta\tau}\delta^\rho_\alpha\delta^\sigma_\beta\delta^\varrho_\mu\delta^\varsigma_\nu + g^{\alpha\kappa}g^{\beta\varrho}\delta^\rho_\alpha\delta^\sigma_\beta\delta^\varsigma_\mu\delta^\tau_\nu + g^{\alpha\kappa}g^{\beta\tau}\delta^\rho_\beta\delta^\sigma_\alpha\delta^\varrho_\nu\delta^\varsigma_\mu + g^{\alpha\kappa}g^{\beta\tau}\delta^\rho_\beta\delta^\sigma_\alpha\delta^\varrho_\mu\delta^\varsigma_\nu + \\ &\left. - g^{\alpha\kappa}g^{\beta\varrho}\delta^\rho_\beta\delta^\sigma_\alpha\delta^\varsigma_\mu\delta^\tau_\nu - g^{\alpha\rho}g^{\beta\tau}\delta^\sigma_\beta\delta^\kappa_\alpha\delta^\varrho_\nu\delta^\varsigma_\mu - g^{\alpha\rho}g^{\beta\tau}\delta^\sigma_\beta\delta^\kappa_\alpha\delta^\varrho_\mu\delta^\varsigma_\nu + g^{\alpha\rho}g^{\beta\varrho}\delta^\sigma_\beta\delta^\kappa_\alpha\delta^\varsigma_\mu\delta^\tau_\nu\right) \end{aligned}$$

Que, após simplificação, se torna

$$\begin{aligned} L_{quad} &= \frac{1}{4}\partial_\rho g_{\sigma\kappa}\partial_\varrho g_{\varsigma\tau}\left[(g^{\varrho\sigma}g^{\varsigma\kappa}g^{\rho\tau} - g^{\varsigma\rho}g^{\tau\kappa}g^{\sigma\varrho}) + (g^{\varrho\sigma}g^{\varsigma\kappa}g^{\rho\tau} + g^{\varsigma\sigma}g^{\varrho\kappa}g^{\rho\tau}) + \right. \\ &\left. - g^{\varsigma\sigma}g^{\tau\kappa}g^{\rho\tau}\right] - \frac{1}{4}\partial_\rho g_{\sigma\kappa}\partial_\varrho g_{\varsigma\tau}\left[2g^{\varsigma\varrho}g^{\sigma\kappa}g^{\rho\tau} - g^{\varsigma\tau}g^{\sigma\kappa}g^{\rho\varrho}\right] \\ &= \frac{1}{4}\partial_\rho g_{\sigma\kappa}\partial_\varrho g_{\varsigma\tau}\left(2g^{\varrho\sigma}g^{\varsigma\kappa}g^{\rho\tau} - g^{\varsigma\sigma}g^{\tau\kappa}g^{\rho\varrho} - 2g^{\varsigma\varrho}g^{\sigma\kappa}g^{\rho\tau} + g^{\varsigma\tau}g^{\sigma\kappa}g^{\rho\varrho}\right) \end{aligned}$$

Com isso, chegamos a

$$L_{quad} = \frac{1}{4} M^{\alpha\beta\gamma\mu\nu\lambda}\partial_\alpha g_{\beta\gamma}\partial_\mu g_{\nu\lambda} \tag{2.11}$$

onde

$$M^{\alpha\beta\gamma\mu\nu\lambda} = 2g^{\mu\beta}g^{\nu\gamma}g^{\alpha\lambda} - g^{\nu\beta}g^{\lambda\gamma}g^{\alpha\mu} - 2g^{\nu\mu}g^{\beta\gamma}g^{\alpha\lambda} + g^{\nu\lambda}g^{\beta\gamma}g^{\alpha\mu} \tag{2.12}$$

Com isso temos explicitamente L_{quad}, mostrando que é realmente quadrático nas derivadas da métrica.

Analisemos agora o termo de superfície,

$$\begin{aligned} L_S &= \partial_\mu\left(2\sqrt{-g}g^{\beta\epsilon}Q^{\mu\nu}_{\alpha\epsilon}\Gamma^\alpha_{\beta\nu}\right) = \partial_\mu\left[\sqrt{-g}g^{\beta\epsilon}\left(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\epsilon - \delta^\nu_\alpha\delta^\mu_\epsilon\right)\Gamma^\alpha_{\beta\nu}\right] \\ &= \partial_\mu\left[\sqrt{-g}\left(g^{\beta\nu}\Gamma^\mu_{\beta\nu} - g^{\beta\mu}\Gamma^\nu_{\beta\nu}\right)\right] \\ &= \partial_\mu\left[\sqrt{-g}V^\mu\right] \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde definimos o objeto não-tensorial

$$V^\mu = g^{\beta\nu}\Gamma^\mu_{\beta\nu} - g^{\beta\mu}\Gamma^\nu_{\beta\nu} \tag{2.14}$$

Invocando (2.10) obtemos

$$\begin{aligned} L_S &= \partial_\mu\left[\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}g^{\beta\nu}\partial_\rho g_{\sigma\kappa}\left(g^{\mu\kappa}\delta^\rho_\nu\delta^\sigma_\beta + g^{\mu\kappa}\delta^\rho_\beta\delta^\sigma_\nu - g^{\mu\rho}\delta^\sigma_\beta\delta^\kappa_\nu\right) + \right.\right. \\ &\left.\left. - \frac{1}{2}g^{\beta\mu}\partial_\rho g_{\sigma\kappa}\left(g^{\nu\kappa}\delta^\rho_\nu\delta^\sigma_\beta + g^{\nu\kappa}\delta^\rho_\beta\delta^\sigma_\nu - g^{\nu\rho}\delta^\sigma_\beta\delta^\kappa_\nu\right)\right)\right] \\ &= \partial_\mu\left[\sqrt{-g}\left(g^{\rho\sigma}g^{\kappa\mu}\partial_\rho g_{\sigma\kappa} - g^{\mu\rho}g^{\sigma\kappa}\partial_\rho g_{\sigma\kappa}\right)\right] \\ &= \partial_\mu\left[\sqrt{-g}\left(-\delta^\rho_\kappa\partial_\rho g^{\kappa\mu} - g^{\mu\rho}\frac{\partial_\rho g}{g}\right)\right] \end{aligned}$$

e finalmente

$$L_S = -\partial_\mu\left[\sqrt{-g}\left(\frac{1}{g}\partial_\rho(gg^{\rho\mu})\right)\right] \tag{2.15}$$

Com objetivos futuros, iremos destacar s seguinte forma para o termo de superfície

$$L_S = \partial_\mu\left[\sqrt{-g}\ \partial_\rho g_{\sigma\kappa}\left(g^{\rho\sigma}g^{\kappa\mu} - g^{\mu\rho}g^{\sigma\kappa}\right)\right] \tag{2.16}$$

As equações (2.11) e (2.15) nos mostram explicitamente que a Lagrangeana gravitacional (2.1) pode ser decomposta em um termo de bulk e um termo de superfície.

A maneira padrão de prosseguir é desprezar o termo de superfície, pois é uma derivada total e seus termos remanescentes se anulam na fronteira (condições de contorno), e usar somente o termo de bulk para chegarmos as equações de campo. Então, a ação total fica

$$S_{tot} = S_{quad} + S_m = \frac{1}{2C}\int_U \sqrt{-g}d^4xL_{quad}(g,\partial g) + \int_U \sqrt{-g}d^4xL_m(\phi,\nabla\phi;g) \tag{2.17}$$

onde $C = 8\pi G$, L_m é a Lagrangeana de matéria e ϕ descrevem as variáveis referentes a matéria.

2.2 Variação da ação gravitacional

Já temos uma forma explícita para L_{quad}, equação (2.11), e poderíamos optar por fazer sua variação diretamente, porém não conseguiríamos chegar à uma forma tensorial simples, dificultando o tratamento. O que faremos é trabalhar com L_{quad} de forma indireta, ou seja, reescrevendo (2.1) como $\sqrt{-g}L_{quad} = \sqrt{-g}R - L_S$ e fazendo a variação

$$\delta\left(\sqrt{-g}L_{quad}\right) = \delta\left(\sqrt{-g}R\right) - \delta L_S \tag{2.18}$$

Olhemos primeiramente para $\delta\left(\sqrt{-g}R\right)$,

$$\begin{aligned}
\delta\left(\sqrt{-g}R\right) &= R\ \delta(\sqrt{-g}) + \sqrt{-g}\ \delta R = R\ \delta(\sqrt{-g}) + \sqrt{-g}\ \delta(g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}) \\
&= R\left(\frac{-\delta g}{2\sqrt{-g}}\right) + \sqrt{-g}\left(R_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}Rg_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \sqrt{-g}\left(R_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}\right) \\
&= \sqrt{-g}G_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

$$\delta\left(\sqrt{-g}R\right) = \sqrt{-g}G_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \delta L_{sur} \tag{2.19}$$

onde definimos $\delta L_{sur} = \sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}$. Para facilitar o cálculo de δL_{sur} iremos trabalhar no referencial inercial local, ou seja, onde $\partial_\mu g_{\alpha\beta} = 0$ e $g_{\alpha\beta} \to \eta_{\alpha\beta}$, por definição. Com isso

$$\begin{aligned}
g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} &= g^{\alpha\beta}\delta\left(\delta^\nu_\mu R^\mu{}_{\alpha\nu\beta}\right) = g^{\alpha\beta}\delta\left[\delta^\nu_\mu\left(\partial_\nu\Gamma^\mu_{\alpha\beta} - \partial_\beta\Gamma^\mu_{\alpha\nu}\right)\right] = g^{\alpha\beta}\partial_\mu\delta\Gamma^\mu_{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta}\partial_\beta\delta\Gamma^\mu_{\alpha\mu} \\
&= \partial_\mu\left(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\right) - \partial_\mu\left(g^{\alpha\mu}\delta\Gamma^\beta_{\alpha\beta}\right)
\end{aligned}$$

$$g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} = \partial_\mu\left(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\mu_{\alpha\beta} - g^{\alpha\mu}\delta\Gamma^\beta_{\alpha\beta}\right) \equiv \partial_\mu w^\mu \tag{2.20}$$

com

$$w^\mu = g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\mu_{\alpha\beta} - g^{\alpha\mu}\delta\Gamma^\beta_{\alpha\beta} \tag{2.21}$$

Para nossos propósitos devemos mostrar que w^μ é um genuíno tensor. Embora $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ não seja um tensor, $\delta\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ o é. Olhemos para a variação da derivada covariante avaliada em um mesmo ponto,

$$\delta\left(\nabla_\mu A^\nu\right) = \partial_\mu\delta A^\nu + \delta\left(\Gamma^\nu_{\lambda\mu}A^\lambda\right) = \nabla_\mu\left(\delta A^\nu\right) + \delta\Gamma^\nu_{\lambda\mu}A^\lambda$$

$$\delta\left(\nabla_\mu A^\nu\right) - \nabla_\mu\left(\delta A^\nu\right) = \delta\Gamma^\nu_{\lambda\mu}A^\lambda$$

Como a diferença $\delta\left(\nabla_\mu A^\nu\right) - \nabla_\mu\left(\delta A^\nu\right)$ é um tensor, avaliado em um mesmo ponto, segue que $\delta\Gamma^\nu_{\lambda\mu}A^\lambda$ também é um tensor, logo $\delta\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ é um tensor.

Agora podemos reescrever (2.20) em qualquer sistema de coordenadas, usando o princípio da covariância geral, simplesmente fazendo $\partial_\mu w^\mu \to \nabla_\mu w^\mu$, o que nos fornece

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\mu w^\mu = \partial_\mu w^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\mu} w^\nu = \partial_\mu w^\mu + \frac{\partial_\mu g}{2g} w^\mu = \partial_\mu w^\mu + \frac{\partial_\mu \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} w^\mu$$

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu \left(\sqrt{-g} w^\mu\right)$$

O que, finalmente, nos dá

$$\delta L_{sur} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \partial_\mu \left(\sqrt{-g} w^\mu\right) = \partial_\mu \left[\sqrt{-g}\left(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\mu_{\alpha\beta} - g^{\alpha\mu}\delta\Gamma^\beta_{\alpha\beta}\right)\right]$$

Olhando para (2.3), podemos reescrever a expressão acima como

$$\delta L_{sur} = \partial_\mu \left(\sqrt{-g} g^{\beta\gamma} Q^{\mu\nu}_{\alpha\gamma}\delta\Gamma^\alpha_{\beta\nu}\right) \tag{2.22}$$

E, finalmente chegamos à expressão final para (2.19),

$$\delta\left(\sqrt{-g}R\right) = \sqrt{-g}\ G_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \partial_\mu \left(\sqrt{-g} g^{\beta\gamma} Q^{\mu\nu}_{\alpha\gamma}\delta\Gamma^\alpha_{\beta\nu}\right) \tag{2.23}$$

Agora olhemos para o termo restante em (2.18), δL_S, olhando para a definição dada (2.8). Temos

$$\delta L_S = \partial_\mu \delta\left(2\sqrt{-g} g^{\beta\gamma} Q^{\mu\nu}_{\alpha\gamma}\Gamma^\alpha_{\beta\nu}\right) = \partial_\mu \left[2\sqrt{-g} g^{\beta\gamma} Q^{\mu\nu}_{\alpha\gamma}\delta\Gamma^\alpha_{\beta\nu} + 2Q^{\mu\nu}_{\alpha\gamma}\Gamma^\alpha_{\beta\nu}\ \delta\left(\sqrt{-g} g^{\beta\gamma}\right)\right]$$

Notamos que o primeiro termo na última igualdade acima é exatamente a variação do termo de superfície, δL_{sur}, que surgiu quando avaliamos $\delta\left(\sqrt{-g}R\right)$. Então iremos nos preocupar somente em obter uma expressão para o segundo termo acima.

$$\begin{aligned}
2Q^{\mu\nu}_{\alpha\gamma}\Gamma^\alpha_{\beta\nu}\ \delta\left(\sqrt{-g} g^{\beta\gamma}\right) &= 2Q^{\mu\nu}_{\alpha\gamma}\Gamma^\alpha_{\beta\nu}\left(\frac{g g_{\rho\sigma}\delta g^{\rho\sigma}}{2\sqrt{-g}} g^{\beta\gamma} + \sqrt{-g}\delta g^{\beta\gamma}\right) \\
&= 2\sqrt{-g} Q^{\mu\nu}_{\alpha\gamma}\Gamma^\alpha_{\beta\nu}\left(-\frac{1}{2} g^{\beta\gamma} g_{\rho\sigma}\delta g^{\rho\sigma} + \delta g^{\beta\gamma}\right) \\
&= 2\sqrt{-g} Q^{\mu\nu}_{\alpha\gamma}\Gamma^\alpha_{\beta\nu}\delta g^{\rho\sigma}\left(-\frac{1}{2} g^{\beta\gamma} g_{\rho\sigma} + \delta^\beta_\rho \delta^\gamma_\sigma\right) \\
&= 2\sqrt{-g} Q^{\mu\nu}_{\alpha\gamma}\Gamma^\alpha_{\beta\nu}\delta g^{\rho\sigma} B^{\beta\gamma}_{\rho\sigma}
\end{aligned}$$

Na expressão acima definimos um tensor $B^{\beta\gamma}_{\rho\sigma} = -\frac{1}{2} g^{\beta\gamma} g_{\rho\sigma} + \delta^\beta_\rho \delta^\gamma_\sigma$. Definimos também o objeto não-tensorial $M^{\mu}{}_{\rho\sigma} = 2Q^{\mu\nu}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}B^{\beta\gamma}_{\rho\sigma}$. Olhemos explicitamente para $M^{\mu}{}_{\rho\sigma}$,

$$\begin{aligned} M^{\mu}{}_{\rho\sigma} &= 2Q^{\mu\nu}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}B^{\beta\gamma}_{\rho\sigma} = \left(\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\gamma} - \delta^{\nu}_{\alpha}\delta^{\mu}_{\gamma}\right)\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}B^{\beta\gamma}_{\rho\sigma} = \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}B^{\beta\gamma}_{\rho\sigma} - \Gamma^{\nu}_{\beta\nu}B^{\beta\mu}_{\rho\sigma} \\ &= \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}\left(\delta^{\beta}_{\rho}\delta^{\gamma}_{\sigma} - \frac{1}{2}g^{\beta\gamma}g_{\rho\sigma}\right) - \Gamma^{\nu}_{\beta\nu}\left(\delta^{\beta}_{\rho}\delta^{\mu}_{\sigma} - \frac{1}{2}g^{\beta\mu}g_{\rho\sigma}\right) \end{aligned}$$

ou seja,

$$M^{\mu}{}_{\rho\sigma} = \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} - \delta^{\mu}_{\sigma}\Gamma^{\nu}_{\rho\nu} - \frac{1}{2}g_{\rho\sigma}V^{\mu} \tag{2.24}$$

onde fizemos uso de (2.14). Com nossas definições e identificações acima, chegamos a conclusão que

$$\delta L_S = \delta L_{sur} + \partial_{\mu}\left(\sqrt{-g}M^{\mu}{}_{\rho\sigma}\delta g^{\rho\sigma}\right) \tag{2.25}$$

Com isso, usando nossos resultados de (2.23) e (2.25) em (2.18), chegamos que

$$\begin{aligned} \delta\left(\sqrt{-g}L_{quad}\right) &= \sqrt{-g}\ G_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \delta L_{sur} - \delta L_{sur} - \partial_{\mu}\left(\sqrt{-g}M^{\mu}{}_{\rho\sigma}\delta g^{\rho\sigma}\right) \\ &= \sqrt{-g}\ G_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} - \partial_{\mu}\left(\sqrt{-g}M^{\mu}{}_{\rho\sigma}\delta g^{\rho\sigma}\right) \end{aligned} \tag{2.26}$$

A variação da ação então fica

$$\delta S_{quad} = \frac{1}{2C}\int_U d^4x\delta\left(\sqrt{-g}L_{quad}\right)$$

$$\delta S_{quad} = \frac{1}{2C}\int_U d^4x\left(\sqrt{-g}\ G_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} - \partial_{\mu}\left(\sqrt{-g}M^{\mu}{}_{\rho\sigma}\delta g^{\rho\sigma}\right)\right)$$

$$\delta S_{quad} = \frac{1}{2C}\int_U d^4x\sqrt{-g}\ G_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} - \frac{1}{2C}\int_{\partial U} d^3x\sqrt{h}M^{\mu}{}_{\rho\sigma}n_{\mu}\delta g^{\rho\sigma} \tag{2.27}$$

onde integramos o termo de divergência usando o teorema de Gauss. A normal à superfície é n_{μ} e h é o determinante da métrica induzida $h_{\alpha\beta} = g_{ij}e^{i}_{\alpha}e_{\beta}$ em ∂U, onde $e^{i}_{\mu} = \frac{\partial x^i}{\partial x_{\mu}}$. Então, considerando as variações da métrica tal que $\delta g^{\alpha\beta} = 0$ na fronteira ∂U mas não no bulk, o termo de superfície se anula e ficamos com

$$\delta S_{quad} = \frac{1}{2C}\int_U d^4x\sqrt{-g}\ G_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} \tag{2.28}$$

Consideremos uma transformação infinitesimal de coordenadas $x^{\mu} \to x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}$, de tal modo que ξ e suas derivadas se anulem em ∂U. Pela transformação da métrica, temos

$$g'^{\alpha\beta}(x') = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}}g^{\mu\nu}(x) \simeq \left(\delta^{\alpha}_{\mu} + \partial_{\mu}\xi^{\alpha}\right)\left(\delta^{\beta}_{\nu} + \partial_{\nu}\xi^{\beta}\right)g^{\mu\nu}(x)$$

$$g'^{\alpha\beta}(x+\xi) \simeq \left(\delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu} + \delta^{\alpha}_{\mu}\partial_{\nu}\xi^{\beta} + \delta^{\beta}_{\nu}\partial_{\mu}\xi^{\alpha}\right)g^{\mu\nu}(x) \simeq g'^{\alpha\beta}(x) + \xi^{\mu}\partial_{\mu}g^{\alpha\beta}$$

$$g'^{\alpha\beta}(x) + \xi^\mu \partial_\mu g^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}(x) + \partial_\mu \xi^\beta g^{\alpha\mu}(x) + \partial_\mu \xi^\alpha g^{\beta\mu}(x)$$

$$\delta g^{\alpha\beta}(x) \equiv g'^{\alpha\beta}(x) - g^{\alpha\beta}(x) = \partial_\mu \xi^\beta g^{\alpha\mu}(x) + \partial_\mu \xi^\alpha g^{\beta\mu}(x) - \xi^\mu \partial_\mu g^{\alpha\beta}(x) \tag{2.29}$$

A equação (2.29) já nos diz que $\delta g^{\alpha\beta} = 0$ em ∂U. Porém, queremos escrevê-la em uma forma mais conhecida. Examinemos a seguinte equação

$$\nabla^\alpha \xi^\beta + \nabla^\beta \xi^\alpha = g^{\alpha\mu} \left(\partial_\mu \xi^\beta + \Gamma^\beta_{\mu\nu} \xi^\nu \right) + g^{\beta\mu} \left(\partial_\mu \xi^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \xi^\nu \right)$$

$$= \partial^\alpha \xi^\beta + \partial^\beta \xi^\alpha + \xi^\nu \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\mu} g^{\beta\lambda} \left(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{2} g^{\beta\mu} g^{\alpha\lambda} \left(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu} \right) \right]$$

$$= \partial^\alpha \xi^\beta + \partial_\beta \xi^\alpha + \xi^\nu g^{\alpha\mu} g^{\beta\lambda} \partial_\nu g^{\mu\lambda} = \partial^\alpha \xi^\beta + \partial_\beta \xi^\alpha - \xi^\nu g^{\alpha\mu} g_{\mu\lambda} \partial_\nu g^{\beta\lambda}$$

$$\nabla^\alpha \xi^\beta + \nabla^\beta \xi^\alpha = \partial^\alpha \xi^\beta + \partial_\beta \xi^\alpha - \xi^\nu \partial_\nu g^{\alpha\beta} \tag{2.30}$$

Comparando (2.29) e (2.30), podemos concluir que

$$\delta g^{\alpha\beta} = \nabla^\alpha \xi^\beta + \nabla^\beta \xi^\alpha \tag{2.31}$$

Então, (2.28) fica, com $G_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} \left(\nabla^\alpha \xi^\beta + \nabla^\beta \xi^\alpha \right) = 2 G_{\alpha\beta} \nabla^\alpha \xi^\beta$

$$\delta S_{quad} = \frac{1}{C} \int_U d^4x \sqrt{-g} G_{\alpha\beta} \nabla^\alpha \xi^\beta = \frac{1}{C} \int_U d^4x \sqrt{-g} \left[\nabla^\alpha \left(G_{\alpha\beta} \xi^\beta \right) - \left(\nabla^\alpha G_{\alpha\beta} \right) \xi^\beta \right]$$

como $\nabla^\alpha G_{\alpha\beta} = 0$, temos que

$$\delta S_{quad} = \frac{1}{C} \int_U d^4x \sqrt{-g} \nabla^\alpha \left(G_{\alpha\beta} \xi^\beta \right)$$

$$\delta S_{quad} = \frac{1}{C} \int_{\partial U} d^3x \sqrt{h}\, G_{\alpha\beta} \xi^\beta n^\alpha \tag{2.32}$$

que deverá se anular pois $\xi^\mu = 0$ em ∂U. Com isso temos que $\delta S_{quad} = 0$ para transformações infinitesimais, ou seja, permanece invariante para as mesmas.

2.3 Variação da ação de matéria

A forma explícita para a variação da matéria só é possível se for dada a ação, embora sempre podemos definir o tensor momento-energia de modo que

$$\delta S_m \equiv -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \tag{2.33}$$

que é de segunda ordem, simétrico e é a fonte do campo gravitacional.

O tensor energia-momento definido dessa forma tem a propriedade de que $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, independente da particular forma do Lagrangeano de matéria. Para provar isso consideremos a mesma transformação infinitesimal de coordenadas mencionada anteriomente, $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$. (2.31). Sob essa transformação um escalar, $Q(x)$, não sofre transformação, ou seja,

$$Q'(x') = Q'(x+\xi) \simeq Q'(x) + \xi^\mu \partial_\mu Q(x) = Q(x)$$

$$\delta Q(x) = Q'(x) - Q(x) = -\xi^\mu \partial_\mu Q(x) = -\xi^\mu \nabla_\mu Q(x) \tag{2.34}$$

Analisemos a seguinte variação

$$\begin{aligned}
\delta\left(Q\sqrt{-g}\right) &= \sqrt{-g}\delta Q + Q\delta\left(\sqrt{-g}\right) = -\sqrt{-g}\xi^\mu \nabla_\mu Q - \frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} Q \\
&= -\sqrt{-g}\left[\xi^\mu \nabla_\mu Q + \frac{1}{2} Q g_{\alpha\beta}\left(\nabla^\alpha \xi^\beta + \nabla^\beta \xi^\alpha\right)\right] \\
&= -\sqrt{-g}\left[\xi^\mu \nabla_\mu Q + \frac{1}{2} Q \left(\nabla_\alpha \xi^\alpha + \nabla_\beta \xi^\beta\right)\right] \\
&= -\sqrt{-g}\left[\xi^\mu \nabla_\mu Q + Q \nabla_\alpha \xi^\alpha\right]
\end{aligned}$$

$$\delta\left(Q\sqrt{-g}\right) = -\sqrt{-g}\nabla_\mu\left(Q\xi^\mu\right) \tag{2.35}$$

De volta para a Lagrangeana de matéria, sua variação total é

$$\delta S_m = \left(\frac{\delta S_m}{\delta \phi}\right)_g \delta\phi + \left(\frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}\right)_\phi \delta g^{\mu\nu} \tag{2.36}$$

Se as equações para as variáveis de matéria são satisfeitas, sabemos que $\left(\frac{\delta S_m}{\delta \phi}\right)_g = 0$. Sabemos também que a Lagrangeana de matéria L_m é um escalar, e por (2.35) temos

$$\delta S_m = \int d^4x \delta\left(\sqrt{-g} L_m\right) = -\int d^4x \sqrt{-g}\nabla_\mu\left(L_m \xi^\mu\right) \tag{2.37}$$

Novamente, impondo que ξ^α se anule na fronteira, teremos que $\delta S_m = 0$. Com isso, segue que

$$\delta S_m = 0 = -\frac{1}{2}\int_U d^4x\sqrt{-g} T_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\int_U d^4x\sqrt{-g} T_{\alpha\beta}\left(\nabla^\alpha\xi^\beta + \nabla^\beta\xi^\alpha\right)$$

$$0 = \int_U d^4x\sqrt{-g} T_{\alpha\beta}\nabla^\alpha\xi^\beta = \int_U d^4x\sqrt{-g}\nabla^\alpha\left(T_{\alpha\beta}\xi^\beta\right) - \int_U d^4x\sqrt{-g}\nabla^\alpha\left(T_{\alpha\beta}\right)\xi^\beta$$

$$0 = \int_{\partial U} d^3x\sqrt{h} T_{\alpha\beta}\xi^\beta n^\alpha - \int_U d^4x\sqrt{-g}\nabla^\alpha\left(T_{\alpha\beta}\right)\xi^\beta \tag{2.38}$$

como ξ^α se anula em ∂U, somos levados a concluir que $\nabla^\alpha T_{\alpha\beta} = 0$, que é característica de qualquer tensor energia-momento aceitável.

Juntando nossas informações, chegamos a

$$\delta S_{tot} = \delta S_{quad} + \delta S_m = \frac{1}{2C}\int d^4x\sqrt{-g}G_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}T_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} = 0 \tag{2.39}$$

Como $\delta g^{\alpha\beta}$ é arbitrário no bulk, concluímos que

$$G_{\alpha\beta} - CT_{\alpha\beta} = 0 \tag{2.40}$$

que são as equações de campo da relatividade geral.

2.4 Forma alternativa da ação gravitacional

Iremos rapidamente mostrar uma interessante relação entre L_{quad} e L_S. Primeiramente, consideremos o seguinte exemplo de Mecânica Clássica. Dado um Lagrangeano $L_q(q,\dot{q})$, podemos obter as equações do movimento variando q na ação e tomando $\delta q = 0$ na fronteira. Agora consideremos um Lagrangeano diferente, definido por

$$L_A(q,\dot{q},\ddot{q}) = L_q(q,\dot{q}) - \frac{d}{dt}f(q,\dot{q}) \tag{2.41}$$

onde adicionamos uma derivada total, sabendo que isso não altera as equações do movimento. Esse Lagrangeano, diferentemente de L_q, apresenta termos com $\ddot{q}$. Iremos mostrar que é possível obter as mesmas equações do movimento para L_A variando q, porém mantendo $A = A(q,\dot{q})$ fixo na fronteira, ao invés de q, e obteremos a forma de $f(q,\dot{q})$ para que isso seja possível.

Fazendo a variação de (2.41) obtemos

$$\delta L_A = \left(\frac{\partial L_q}{\partial q} - \frac{d}{dt}p\right)\delta q + \frac{d}{dt}\left(p\delta q - \delta f\right), \qquad \frac{\partial L_q}{\partial \dot{q}} = p$$

Invertendo a relação $A(q,\dot{q}) \rightarrow \dot{q} = \dot{q}(q,A)$, e consequentemente $f = f(q,A)$, obtemos

$$\delta L_A = \left(\frac{\partial L_q}{\partial q} - \frac{d}{dt}p\right)\delta q + \frac{d}{dt}\left(p\delta q - \frac{\partial f}{\partial q}\delta q - \frac{\partial f}{\partial A}\delta A\right)$$

$$\delta S_A = \int dt\left(\frac{\partial L_q}{\partial q} - \frac{d}{dt}p\right)\delta q + \int dt\left(p\delta q - \frac{\partial f}{\partial q}\delta q - \frac{\partial f}{\partial A}\delta A\right)$$

$$\delta S_A = \int dt\left(\frac{\partial L_q}{\partial q} - \frac{d}{dt}p\right)\delta q + \int dt\left(p\delta q - \frac{\partial f}{\partial q}\delta q\right) - \frac{\partial f}{\partial A}\delta A\bigg|_{t_1}^{t_2} \tag{2.42}$$

Como dito anteriormente, queremos zerar a função $A = A(q,\dot{q})$ na fronteira, com isso o último termo de (2.42) se anula, e na a expressão restante

$$\delta S_A = \int dt \left(\frac{\partial L_q}{\partial q} - \frac{d}{dt} p \right) \delta q + \int dt \left(p \delta q - \frac{\partial f}{\partial q} \delta q \right)$$

obtemos as equações do movimento se o último termo se anular, ou seja

$$p - \frac{\partial f}{\partial q} = 0$$

$$f(q, A) = \int dq \; p(q, A) + g(A) \tag{2.43}$$

Com isso, vemos que as equações do movimento para L_p e L_q são as mesmas, embora L_p contenha termos de derivada segunda em q. Um exemplo de tal Lagrangeano seria

$$L_A(q, \dot{q}, \ddot{q}) = L_q(q, \dot{q}) - \frac{d}{dt} \left(q \frac{\partial L_q}{\partial \dot{q}} \right) \tag{2.44}$$

A generalização para campos é direta. Seja $\phi_I(x)$ um campo com índices tensoriais I (denotados coletivamente) em um espaço, de coordenadas x^μ. Supondo que o Lagrangeano $L_q(q_I, \partial q_I)$ dê as equações de campo quando q_I é mantido fixo na fronteira ∂U. Introduziremos uma divergência $\partial_\mu v^\mu$ à esse Lagrangeano de modo que obtenhamos as mesmas equações quando fizermos a variação da ação mantendo alguma função $F_I^\mu = F_I^\mu(q_I, \partial q_I) n_\mu$ fixa na fonteira, onde n_μ é um unitário normal a ∂U.

$$L_F(q_I, \partial q_I, \partial^2 q_I) = L_q(q_I, \partial q_I) - \partial_\mu V^\mu(q_I, \partial q_I) \tag{2.45}$$

$$\delta L_F = \left(\frac{\partial L_q}{\partial q_I} - \partial_\mu \frac{\partial L_q}{\partial(\partial_\mu q_I)} \right) \delta q_I + \partial_\mu \left(\frac{\partial L_q}{\partial(\partial_\mu q_I)} \delta q_I - \delta V^\mu \right)$$

Procedemos com a inversão, $F_I^\mu(q_I, \partial q_I) \to \partial_\mu q_I = \partial_\mu q_I(q_I, F_I^\mu)$ e $V^\mu = V^\mu(q_I, F_I^\mu)$, logo

$$\delta L_F = \left(\frac{\partial L_q}{\partial q_I} - \partial_\mu \pi_I^\mu \right) \delta q_I + \partial_\mu \left(\pi_I^\mu \delta q_I - \frac{\partial V^\mu}{\partial q_I} \delta q_I - \frac{\partial V^\mu}{\partial F_I^\nu} \delta F_I^\nu \right)$$

Então a variação da ação fica

$$\delta S_F = \int_U d^4x \left(\frac{\partial L_q}{\partial q_I} - \partial_\mu \pi_I^\mu \right) \delta q_I + \int_U d^4x \partial_\mu \left(\pi_I^\mu - \frac{\partial V^\mu}{\partial q_I} \right) \delta q_I - \int_{\partial U} d^3x \; n_\mu \frac{\partial V^\mu}{\partial F_I^\nu} \delta F_I^\nu$$

Como impomos que F_I^μ se anule na fronteira, a condição para que as equações sejam as mesmas implica que

$$\pi_I^\mu - \frac{\partial V^\mu}{\partial q_I} = 0$$

$$V^\mu(q_I, F_I^\nu) = \int dq^I \pi_I^\mu(q_I, F_I^\nu) + B^\mu(F_I^\nu) \tag{2.46}$$

A ação gravitacional apresenta a mesma estrutura os exemplos apresentados acima. Analisemos a seguinte expressão

$$\frac{\partial L_{quad}}{\partial(\partial_\lambda g_{\mu\nu})} = \frac{1}{4}M^{\alpha\beta\gamma\rho\sigma\kappa}\frac{\partial}{\partial(\partial_\lambda g_{\mu\nu})}(\partial_\alpha g_{\beta\gamma}\partial_\rho g_{\sigma\kappa}) \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_{quad}}{\partial(\partial_\lambda g_{\mu\nu})} &= \frac{1}{4}M^{\alpha\beta\gamma\rho\sigma\kappa}\partial_\rho g_{\sigma\kappa}\delta^\lambda_\alpha(\delta^\mu_\beta\delta^\nu_\gamma + \delta^\nu_\beta\delta^\mu_\gamma) + \frac{1}{4}M^{\alpha\beta\gamma\rho\sigma\kappa}\partial_\alpha g_{\beta\gamma}\delta^\lambda_\rho(\delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\kappa + \delta^\nu_\sigma\delta^\mu_\kappa)\\ &= \frac{1}{4}\left(M^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\kappa} + M^{\lambda\nu\mu\rho\sigma\kappa}\right)\partial_\rho g_{\sigma\kappa} + \frac{1}{4}\left(M^{\alpha\beta\gamma\lambda\mu\nu} + M^{\alpha\beta\gamma\lambda\nu\mu}\right)\partial_\alpha g_{\beta\gamma}\end{aligned}$$

Façamos a contração de $g_{\mu\nu}$ com a expressão acima

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu}\frac{\partial L_{quad}}{\partial(\partial_\lambda g_{\mu\nu})} &= \frac{1}{4}\left(g_{\mu\nu}M^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\kappa} + g_{\mu\nu}M^{\lambda\nu\mu\rho\sigma\kappa}\right)\partial_\rho g_{\sigma\kappa} + \frac{1}{4}\left(g_{\mu\nu}M^{\alpha\beta\gamma\lambda\mu\nu} +\right.\\ &\left. +g_{\mu\nu}M^{\alpha\beta\gamma\lambda\nu\mu}\right)\partial_\alpha g_{\beta\gamma}\end{aligned}$$

$$g_{\mu\nu}\frac{\partial L_{quad}}{\partial(\partial_\lambda g_{\mu\nu})} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}M^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\kappa}\partial_\rho g_{\sigma\kappa} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}M^{\alpha\beta\gamma\lambda\mu\nu}\partial_\alpha g_{\beta\gamma} \tag{2.48}$$

que, após simplificação, se torna

$$g_{\mu\nu}\frac{\partial L_{quad}}{\partial(\partial_\lambda g_{\mu\nu})} = 2\partial_\alpha g_{\beta\gamma}\left(g^{\alpha\lambda}g^{\beta\gamma} - g^{\alpha\beta}g^{\lambda\gamma}\right) \tag{2.49}$$

Devemos fazer um comentário sobre a equação (2.49). As equações do movimento são obtidas por variação da ação em relação às variáveis independentes, que no caso gravitacional são as componentes da métrica. Porém, a métrica é simetrica, ou seja, a variação com respeito a $g_{\mu\nu}$, $\mu \neq \nu$, é a mesma obtida para $g_{\nu\mu}$. Da mesma forma, em (2.49), fizemos derivação em relação a $g_{\mu\nu}$ e contraímos com o próprio, ou seja, estaremos contando duas vezes alguns termos. Uma forma mais correta de se fazer seria separar em duas partes, uma contendo só os termos diagonais, e outra contendo só os termos não-diagonais (que são simétricos) e mantendo em mente o explicado acima.

Ora, $\sqrt{-g}$ não depende de $\partial_\lambda g_{\mu\nu}$, logo podemos reescrever (2.49) como

$$\partial_\lambda\left[g_{\mu\nu}\frac{\partial\sqrt{-g}L_{quad}}{\partial(\partial_\lambda g_{\mu\nu})}\right] = 2\partial_\lambda\left[\sqrt{-g}\partial_\alpha g_{\beta\gamma}\left(g^{\alpha\lambda}g^{\beta\gamma} - g^{\alpha\beta}g^{\lambda\gamma}\right)\right] \tag{2.50}$$

que é exatamente (2.16) a menos de um sinal (lembremos que há termos contados duas vezes). Ou seja, a ação gravitacional é escrita como

$$\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}L_{quad} + L_S = \sqrt{-g}L_{quad} - \partial_\lambda\left[g_{\mu\nu}\frac{\partial\sqrt{-g}L_{quad}}{\partial(\partial_\lambda g_{\mu\nu})}\right] \tag{2.51}$$

que tem a mesma estrutura de (2.44) e (2.45).

Se ainda existem dúvidas na veracidade da explicação acima, vamos tratar o problema de maneira diferente. Seja o Lagrangeano $L(q_I, \partial_\mu q_I)$, onde q_I são as variáveis dinâmicas e I denotam um conjunto de índices (no caso da gravidade $q_I \to g_{\mu\nu}$). Definimos a função Euler-Lagrange como

$$F^I \equiv \frac{\partial L}{\partial q_I} - \partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu q_I)} \right] \tag{2.52}$$

Assumimos que L é função homogênea de ordem i em q_I e homogênea de ordem j em $\partial_\mu q_I$.

Antes de prosseguirmos notemos que se uma função $f = f(x)$ é homogênea de ordem m, então, por definição $f(\lambda x) = \lambda^m f(x)$. Derivação em relação à λ nos dá

$$\frac{d}{d\lambda} f(\lambda x) = x^i \frac{\partial}{\partial x^i} f(\lambda x) = \frac{d}{d\lambda} \lambda^m f(x) = m\lambda^{m-1} f(x)$$

Fazendo $\lambda = 1$ obtemos

$$x^i \frac{\partial}{\partial x^i} f(x) = m f(x) \tag{2.53}$$

Voltando à (2.52) e contraindo com q_I, temos

$$q_I F^I = q_I \frac{\partial L}{\partial q_I} - q_I \partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu q_I)} \right] = q_I \frac{\partial L}{\partial q_I} + \partial_\mu q_I \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu q_I)} - \partial_\mu \left[q_I \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu q_I)} \right]$$

Fazendo o uso de (2.53), concluimos que

$$q_I F^I = (i + j)L - \partial_\mu \left[q_I \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu q_I)} \right] \tag{2.54}$$

No caso da gravidade, se reescalarmos $g_{\mu\nu} \to f g_{\mu\nu}$ ($g^{\mu\nu} \to f^{-1} g^{\mu\nu}$), o determinante g, como é o produto de 4 métricas, muda com f^4, consequentemente $\sqrt{-g} \to f^2 \sqrt{-g}$. Se as derivadas da métrica forem mantidas fixas, $\sqrt{-g} L_{quad}$ mudará por um fator $f^2 f^{-3} = f^{-1}$, pois em (2.11), $M^{\alpha\beta\gamma\mu\nu\lambda}$ é produto de três $g^{\mu\nu}$, ou seja, $\sqrt{-g} L_{quad}$ é de ordem $i = -1$ em $g_{\mu\nu}$. Mantendo agora a métrica fixa e reescalando suas derivadas pelo mesmo fator f, novamente por (2.11), $\sqrt{-g} L_{quad}$ mudará por um fator f^2, ou seja, $\sqrt{-g} L_{quad}$ é homogênea de ordem $j = 2$. Para a gravidade $F^I = -\sqrt{-g} G^{\mu\nu}$, e logo

$$q_I F^I = -\sqrt{-g} g_{\mu\nu} G^{\mu\nu} = -\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = \sqrt{-g} \left(R - 2R \right) = \sqrt{-g} R$$

Com $\sqrt{-g} L_{quad} = L$, homogênea de grau -1 em $g_{\mu\nu}$ e grau $+2$ em $\partial_\lambda g_{\mu\nu}$, temos que (2.54) se torna exatamente (2.51).

Prosseguindo, vamos reescrever a variação do termo L_{quad} em termos da variação $\delta g_{\mu\nu}$ das componentes covariantes da métrica, usando $g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda} = \delta^{\mu}_{\lambda}$.

$$\begin{aligned}\delta\left(\sqrt{-g}L_{quad}\right) &= \sqrt{-g}G_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} - \partial_{\mu}\left[\sqrt{-g}M^{\mu}{}_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}\right] \\ &= -\sqrt{-g}G_{\alpha\beta}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\delta g_{\mu\nu} + \partial_{\lambda}\left[\sqrt{-g}M^{\lambda}{}_{\alpha\beta}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\delta g_{\mu\nu}\right]\end{aligned}$$

Olhando a definição (2.24), obtemos a expressão

$$\begin{aligned}M^{\lambda}{}_{\alpha\beta}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} &= g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} - g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\delta^{\lambda}_{\beta}\Gamma^{\rho}_{\alpha\rho} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}V^{\lambda} \\ &= g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} - g^{\alpha\mu}g^{\nu\lambda}\Gamma^{\rho}_{\alpha\rho} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}V^{\lambda} \equiv M^{\lambda\alpha\beta}\end{aligned} \tag{2.55}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\delta\left(\sqrt{-g}L_{quad}\right) &= -\sqrt{-g}G^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} + \partial_{\mu}\left[\sqrt{-g}M^{\mu\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}\right] \\ &= -\sqrt{-g}G^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} + \delta\partial_{\mu}\left[\sqrt{-g}M^{\mu\alpha\beta}g_{\alpha\beta}\right] - \partial_{\mu}\left[\delta\left(\sqrt{-g}M^{\mu\alpha\beta}\right)g_{\alpha\beta}\right]\end{aligned} \tag{2.56}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}M^{\mu}{}_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} &= g^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} - g^{\alpha\mu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}V^{\mu} \\ &= V^{\mu} - 2V^{\mu} = -V^{\mu}\end{aligned}$$

onde usamos o que $M^{\mu}{}_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = M^{\mu\alpha\beta}g_{\alpha\beta}$. Então (2.56) fica

$$\delta\left(\sqrt{-g}L_{quad}\right) = -\sqrt{-g}G^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} - \delta\partial_{\mu}\left[\sqrt{-g}V^{\mu}\right] - \partial_{\mu}\left[\delta\left(\sqrt{-g}M^{\mu\alpha\beta}\right)g_{\alpha\beta}\right]$$

$$\begin{aligned}\delta\left(\sqrt{-g}L_{quad}\right) + \delta\partial_{\mu}\left[\sqrt{-g}V^{\mu}\right] &= -\sqrt{-g}G^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} - \partial_{\mu}\left[\delta\left(\sqrt{-g}M^{\mu\alpha\beta}\right)g_{\alpha\beta}\right] \\ &= \delta\left(\sqrt{-g}R\right)\end{aligned} \tag{2.57}$$

onde usamos (2.13).

Agora se torna óbvio que podemos desenvolver um princípio variacional para a gravidade, mantendo $\sqrt{-g}M^{\mu\alpha\beta}$, que está diretamente relacionado com o momento canônico associado a $g_{\mu\nu}$ [2], fixo na fronteira do espaço. Isso leva à

$$\delta\int_U d^4x\left(\sqrt{-g}R\right) = -\int_U d^4x G^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} - \int_U d^4x g_{\alpha\beta}\delta\left(\sqrt{-g}M^{\mu\alpha\beta}\right)$$

$$\delta\int_U d^4x\left(\sqrt{-g}R\right) = -\int_U d^4x G^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} - \int_{t=cte} d^3\vec{x} g_{\alpha\beta}\delta\left(\sqrt{-g}M^{0\alpha\beta}\right)$$

onde escolhemos a fronteira ∂U como sendo duas superfícies tipo-espaço em $t = t_1$ e $t = t_2$, uma superfície tipo-tempo no infinito espacial e consideramos que o campo não contribui no infinito.

3 EQUAÇÕES DE CAMPO POR TERMO DE SUPERFÍCIE

Apresentaremos a exposição holográfica para a ação gravitacional publicada por [4], que trata essencialmente em substituir toda a contribuição do campo gravitacional no bulk para a fronteira, obviamente supondo que se possa fazer isso. Aqui veremos que as equações de campo podem ser obtidas a partir do termo de superfície, antes desprezado, e com isso dando à gravidade uma perspectiva holográfica, ou seja, podemos considerar todos os efeitos gravitacionais como provenientes da fronteira. Por fim [5] mostra que tal visão holográfica é inconsistente e que as equações de campo só podem ser obtidas para gravitação pura.

3.1 A nova perspectiva

Nosso objetivo agora é mostrar uma nova perspectiva para a gravidade e a dinâmica do espaço(-tempo). Intencionamos mostrar que as equações de campo gravitacional surgem da imposição de que $S'_{tot} = S_{sur} + S_m$ sejam invariantes sob deslocamentos virtuais normais à fronteira.

Consideremos, novamente, nossa transformação de coordenadas $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$, onde agora consideramos $\xi^\mu(x) \neq 0$ somente na fronteira (diferente de anteriormente) e além disso, o vetor ξ^μ é nulo (explicação dada na próxima seção). Essa transformação induz um deslocamento na direção normal à fronteira.

A métrica muda de acordo com (2.31) e a ação de matéria como

$$\delta S_m = -\frac{1}{2}\int_U d^4x\sqrt{-g}T_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} = -\int_U d^4x\sqrt{-g}\nabla^\alpha\left(T_{\alpha\beta}\xi^\beta\right) \tag{3.1}$$

que vem de (2.38), onde usamos que $\nabla^\alpha T_{\alpha\beta} = 0$. Devemos agora encontrar uma expressão para δS_{sur}, sob tais transformações. Para isso, faremos uso da expressão (2.35), previamente demonstrada.

$$\delta\left[\sqrt{-g}R\right]=-\sqrt{-g}\nabla_{\mu}\left(R\xi^{\mu}\right)=\sqrt{-g}\left(G_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}+g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}\right) \tag{3.2}$$

onde usamos (2.19). Novamente fazendo uso de (2.31), (3.2) se torna

$$\begin{aligned}
-\sqrt{-g}\nabla_{\mu}\left(R\xi^{\mu}\right) &= \sqrt{-g}\left(G_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}+g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}\right)=\sqrt{-g}\left(2G_{\alpha\beta}\nabla^{\alpha}\xi^{\beta}+g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}\right)\\
&= 2\sqrt{-g}\nabla^{\alpha}\left(G_{\alpha\beta}\xi^{\beta}\right)+\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}\\
&= 2\sqrt{-g}\nabla^{\alpha}\left[\left(R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R\right)\xi^{\beta}\right]+\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}\\
&= 2\sqrt{-g}\nabla^{\alpha}\left(R_{\alpha\beta}\xi^{\beta}\right)-\sqrt{-g}\nabla_{\alpha}\left(R\xi^{\alpha}\right)+\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}=2\sqrt{-g}\nabla^{\alpha}\left(R_{\alpha\beta}\xi^{\beta}\right) \tag{3.3}$$

Com isso podemos escrever a variação δS_{sur} como

$$\delta S_{sur}=\frac{1}{2C}\int_{U}d^{4}x\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}=\frac{1}{C}\int_{U}d^{4}x\sqrt{-g}\nabla^{\alpha}\left(R_{\alpha\beta}\xi^{\beta}\right) \tag{3.4}$$

Procedemos como anteriormente. Usamos a lei de Gauss para transformar as integrais (3.1) e (3.4), de U para ∂U, já que ξ^{μ} só é diferente de zero na fronteira.

$$\delta S'_{tot}=\delta S_{sur}+\delta S_{m}=\frac{1}{C}\int_{U}d^{4}x\sqrt{-g}\nabla^{\alpha}\left(R_{\alpha\beta}\xi^{\beta}\right)-\int_{U}d^{4}x\sqrt{-g}\nabla^{\alpha}\left(T_{\alpha\beta}\xi^{\beta}\right) \tag{3.5}$$

$$\delta S'_{tot}=\int_{\partial U}d^{3}x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{C}R_{\alpha\beta}-T_{\alpha\beta}\right)\xi^{\beta}n^{\alpha}=0 \tag{3.6}$$

Como ξ^{β} é um vetor nulo, suas componentes espaciais formam um vetor unitário, de modo que $\left(R_{\alpha\beta}-CT_{\alpha\beta}\right)\xi^{\alpha}\xi^{\beta}=0$. Como ξ^{μ} é arbitrário, temos que $R_{\alpha\beta}-CT_{\alpha\beta}=F(g)g_{\alpha\beta}$, onde F é uma função da métrica. Usando por último a lei de conservação para o tensor energia-momento $\nabla^{\alpha}T_{\alpha\beta}=0$, temos que

$$\nabla^{\alpha}R_{\alpha\beta}-g_{\alpha\beta}\nabla^{\alpha}F=0\Rightarrow F=\frac{1}{2}R+\Lambda$$

onde R é o escalar de curvatura e Λ uma constante indeterminada.

A equação resultante é

$$R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R+\Lambda g_{\alpha\beta}=CT_{\alpha\beta} \tag{3.7}$$

que nada mais é do que a equação de campo para a gravidade, que foi obtida sem nenhuma menção ao termo de bulk (L_{quad}). Esta é (ou seria) uma perspectiva totalmente nova sobre as equações de campo gravitacionais.

3.2 A correção sobre a "nova perspectiva"

Para um melhor esclarecimento da exposição, vamos considerar novamente a Lagrangeana $\delta L_{quad} = \delta L_g - \delta L_S = \sqrt{-g} G_{\alpha\beta} \delta^{\alpha\beta}$ e trabalhar com as transformações acima citadas. Para não repetirmos mais uma vez todo o procedimento ,iremos pular diretamente para a seguinte equação

$$\delta S_{quad} = \int_U d^4x \sqrt{-g} \nabla^\alpha G_{\alpha\beta} \xi^\beta - \int_{\partial U} d^3x \sqrt{h} G_{\alpha\beta} \xi^\alpha n^\beta = 0 \tag{3.8}$$

As duas integrais devem se anular separadamente. A anulação da primeira não é nada mais do que a afirmação da identidade de Bianchi contraída, $\nabla^\alpha G_{\alpha\beta} = 0$. O anulamento do segundo é não-trivial, e surge do fato de, ao invés de considerarmos a transformação como definida acima, usaremos uma outra classe dessa transformação.

Um ponto importante sobre as transformações acima citadas é que elas mapeiam U nele mesmo, ou seja, são difeomorfismos. Durante essa variação não podemos cruzar a fronteira e os campos devem ficar inalterados lá. Por isso, a maneira padrão de escolha de ξ^μ é de tal modo que ele se anule na fronteira ($\xi^\mu|_{\partial U} = 0$). Porém, existe uma classe de difeomorfismos no qual a fronteira não é cruzada e ξ^μ não se anula. São as transformações nas quais ξ^μ é paralelo à superfície, ou seja, perpendicular à normal n^μ. Ainda temos que a equação (2.31) é válida em ∂U, o que implica que ξ^μ deve satisfazer a equação de Killing na fronteira, para que os campos permaneçam inalterados lá.

Impondo que essa condição permaneça válida para um fronteira arbitrária, significa que a métrica admite um vetor de Killing, e consequentemente uma simetria. A equação (2.31) é uma condição sobre a fronteira e requer uma simetria local. Tal condição é satisfeita por um horizonte de Killing (No caso do espaço flat da Relatividade Especial, vetores de Killing se anulam sobre todo o espaço e não podem formar uma superfície, portanto nunca teremos um horizonte de Killing nessa situação. Se considermos o horizonte de um buraco negro de Schwarzchild a condição de horizonte de Killing é trivialmente satisfeita!). Então se considerarmos uma região U com fronteira ∂U que é um horizonte de Killing, então (3.8) deve nos dar

$$\int_{\partial U} d^3x \sqrt{h} G_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta = 0 \tag{3.9}$$

onde ξ^α é um vetor normal e ao mesmo tempo tangencial, que é uma característica de vetores nulos, à fronteira, que agora é implicitamente um horizonte de Killing. Em geral, não podemos definir um horizonte de Killing globalmente, porém ainda podemos considerar uma pequena região do espaço ao redor de algum ponto P como sendo flat e tratar esse horizonte definido apenas localmente, sendo zero no resto da fronteira. Com isso a integral (3.9), que cobre toda a fronteira, pode ser transformada em uma integral sobre um horizonte de Killing. Essa é a explicação dada por [5] para a passagem de $\xi^\alpha n^\beta$ para $\xi^\alpha \xi^\beta$ pouco explicada em [4].

Com isso em mente, podemos extender a validade do descrito acima para todos os pontos do espaço. Se considerarmos ξ^α como sendo arbitrário então (3.9) nos dá

$$G_{\alpha\beta} - \Lambda g_{\alpha\beta} = 0 \tag{3.10}$$

onde a constante indeterminada vem do fato de que sempre podemos adicionar um escalar dependente da métrica vezes a métrica ao integrando de (3.9) sem alterá-lo, pois ξ^α é um vetor nulo.

Para obtermos as equações do movimento a partir do termo de superfície, definimos a ação

$$S_S \equiv -\frac{1}{2C}\int_U d^4x\sqrt{-g}L_S \tag{3.11}$$

e $S_g \equiv S_{quad} - S_S$. Veja que apesar do sinal trocado em relação à dedução no capítulo anterior, nós também trocamos o sinal de L_S por consistência. Novamente fazendo uso de (2.35), podemos reescrever (3.2)

$$\delta S_g = -\frac{1}{2C}\int_U d^4x\sqrt{-g}\nabla_\mu\left(\xi^\mu R\right) = \frac{1}{2C}\int_{\partial U} d^3x\sqrt{h}R\xi^\mu n_\mu = 0 \tag{3.12}$$

Como discutido anteriormente, ξ^μ pode tanto se anular na fronteira como ser paralela à ela, $\xi^\mu n_\mu = 0$. Com isso deduzimos que $\delta S_{quad} = \delta S_S$, ou seja, a imposição de que a ação do bulk L_{quad} seja invariante sob essa classe especial de difeomorfismo, leva à mesma invariância para a ação da fronteira L_S.

Até agora vimos que foi possível obter as equações de campo para o caso gravitacional puro. Vamos incluir a matéria no nosso tratamento e tentar achar uma ação, $S_g = S_{quad} + S_m$ ou $S_g = S_S + S_m$, que nos forneça as equações de campo com matéria. Devemos lembrar que a ação é construída de um escalar e, para qualquer difeomorfismo que preserve a fronteira ($\xi^\mu n_\mu = 0$), temos

$$\delta S_m = -\int_{\partial U} d^3x\sqrt{h}L_m\xi^\mu n_\mu = 0 \tag{3.13}$$

Contudo, escrevemos no início a equação (3.1), que está em clara contradição com (3.13).

A maneira de chegar à equação (3.1) é, como já explicado anteriormente, por meio de (2.36) e usando o fato de que os campos de matéria satisfazem suas equações de movimento para que o termo $\left(\frac{\delta L_m}{\delta \phi}\right)_g$ se anule identicamente. Contudo, a Lagrangeana de matéria, em geral, contém termos da ordem de $(\nabla\phi)^2$, ou maiores, que levam à termos de suferfície. Tais termos, normalmente, se anulam devida ao fato que $\delta\phi = 0$ na fronteria na variação padrão. Porém, não estamos impondo nenhuma condição sobre ϕ ou suas derivadas, então tais termos não vão necessariamente se anular. Essa é aorigem da diferença entre (3.1) e (3.13). A (correta) validade de (3.13) claramente indica que (3.1) está errado.

Para esclarecer, consideremos a seguinte ação de matéria para um único campo simples

$$S_m^\phi = \int_U d^4x \sqrt{-g} L_m(\phi, \partial\phi; g^{\mu\nu}) \tag{3.14}$$

que, sobre nosso difeomorfismo, nos dá

$$\delta S_m^\phi = \int_U d^4x \frac{\sqrt{-g}\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \int_U \sqrt{-g}\left[\frac{\partial L_m}{\partial \phi} - \nabla^\mu \left(\frac{\partial L_m}{\partial(\nabla^\mu \phi)}\right)\right]\delta\phi + \int_{\partial U} d^3x \sqrt{h} \frac{\partial L_m}{\partial(\nabla^\mu\phi)} n^\mu \delta\phi$$

e a relação de difeomorfismo para o campo ϕ é $\delta\phi = -\xi^\mu \partial_\mu \phi$. Como usual o tensor energia-momento é definido por $T_{\mu\nu}^\phi = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\sqrt{-g}\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}}$. Usando as equações de movimento para as variáveis de matéria $\frac{\partial L_m}{\partial\phi} - \nabla^\mu \frac{\partial L_m}{\partial(\nabla^\mu\phi)} = 0$, ficamos com

$$\delta S_m^\phi = -\frac{1}{2}\int_U d^4x T_{\mu\nu}^\phi \delta g^{\mu\nu} + \int_{\partial U} d^3x \sqrt{h} \frac{\partial L_m}{\partial(\nabla^\mu\phi)} n^\mu \delta\phi \tag{3.15}$$

que, sobre nosso difeomorfismo fica

$$\delta S_m^\phi = -\int_U d^4x T_{\mu\nu}^\phi \nabla^\mu \xi^\nu - \int_{\partial U} d^3x \sqrt{h} \frac{\partial L_m}{\partial(\nabla^\mu\phi)} n^\nu \xi^\mu \nabla_\mu \phi \tag{3.16}$$

que após integração por partes se torna

$$\delta S_m^\phi = \int_U d^4x \nabla^\mu T_{\mu\nu}^\phi \xi^\nu - \int_{\partial U} d^3x \sqrt{h}\left(\frac{\partial L_m}{\partial(\nabla^\mu\phi)} \nabla_\mu\phi + T_{\mu\nu}^\phi\right) n^\nu \xi^\mu \tag{3.17}$$

que claramente não concorda com (3.1).

Relembremos o tensor canônico

$$T_{\mu\nu}^{can} = \frac{\partial L_m}{\partial \partial^\mu \phi} \partial_\nu \phi - L_m g_{\mu\nu} = \frac{\partial L_m}{\partial \nabla^\mu \phi} \nabla_\nu \phi - L_m g_{\mu\nu} \tag{3.18}$$

Com (3.18) podemos reescrever o termo de superfície de (3.17) como

$$\left(T_{\mu\nu}^{can} + L_m g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^\phi\right) \xi^\mu n^\nu = \left(T_{\mu\nu}^{can} + T_{\mu\nu}^\phi\right) \xi^\mu n^\nu$$

pois $g_{\mu\nu}\xi^{\mu}n^{\nu} = 0$. Contudo, para qualquer campo escalar $T^{can}_{\mu\nu} = -T^{\phi}_{\mu\nu}$, o que nos leva ao anulamento do termo de fronteira, nos deixando apenas com

$$\delta S^{\phi}_{m} = \int_{U} d^4x \nabla^{\mu} T^{\phi}_{\mu\nu} \xi^{\nu} \tag{3.19}$$

que é obviamente zero, pois temos a conservação do tensor energia-momento $\nabla^{\mu} T^{\phi}_{\mu\nu} = 0$. No final conseguimos que a ação de matéria é invariante por difeomorfismos que preservem a fronteira, sempre que as equações de campo para a matéria e a conservação do tensor energia- momento possam valer.

A validade da equação (3.13) é inquestionável e e mostramos que (3.1) não é valida. O tratamento feito em [4] não leva tal fato em conta o que causa sua discrepância e, consequentemente, a invalidade da nova perspectiva, pois toda a discussão é baseada na fronteira.

4 CONCLUSÃO

Vimos que, apesar de parecer tentador uma nova visão para as equações de campo como emergendo inteiramente da superfície, essa visão é falha devido pois o termo de superfície não gera nenhuma novo informação sob invariância por difeomorfismo. Porém ainda podemos descrever a gravidade pura como um fenômeno emergente. Mostramos também que podemos obter as equações de campo impondo que o momento canônico de anule na fronteira, e também mostramos a relação entre a lagrangeana do bulk e a Lagrangean da superfície. Como continuação da pesquisa queremos adentrar na correspondência entre as equações de campo gravitacional e a segunda lei da Termodinâmica, pois é sabido que espaços com horizontes mostram uma semelhança com istemas termodinâmicos e é possível associar noções de temperatura e entropia à ele (horizonte). Tais aspectos termodinâmicos dos horizontes podem ser obtidos de princípios gerais e permanecem válidos independentemente da descrição microscópica (estatística) do sistema.

REFERÊNCIAS

[1] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press Inc., New York (2008)

[2] T. Padmanabhan, *Gravitation: Foundations and Frontiers*, Cambridge University Press Inc., New York (2010)

[3] R. D'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press Inc., New York (1992)

[4] T. Padmanabhan, Int. J. Mod. Phys. D **14**, 2263 (2005) [gr-qc/0510015].

[5] T. P. Sotiriou and S. Liberati, Phys. Rev. D **74**, 044016 (2006) [gr-qc/0603096].

[6] T. Padmanabhan, AIP Conf. Proc. **861**, 179 (2006) [astro-ph/0603114].

[7] S. Gao and H. b. Zhang, Phys. Rev. D **75**, 068501 (2007) [gr-qc/0703064 [GR-QC]].

[8] T. Padmanabhan, Int. J. Mod. Phys. D **15**, 1659 (2006) [gr-qc/0606061].

[9] T. Jacobson, Phys. Rev. Lett. **75**, 1260 (1995) [gr-qc/9504004].

[10] T. Padmanabhan, Astrophys. Space Sci. **285**, 407 (2003) [gr-qc/0209088].

[11] T. Padmanabhan and D. Kothawala, Phys. Rept. **531**, 115 (2013) [arXiv:1302.2151 [gr-qc]].

[12] T. Padmanabhan, AIP Conf. Proc. **1458**, 238 (2011).

[13] R. T. Wald *General Relativity* The University of Chicago Press, Chicago (1984)