

Tese de Doutorado

Aspectos Clássicos de Gravitação Topológica e Dimensões Extras

Makarius Oliveira Tahim

Tese submetida ao Departamento de Física
como requisito para obtenção do grau
de Doutor em Física.

Orientador
Carlos Alberto Santos de Almeida

*Dedico especialmente
este pequeno trabalho
à três pessoas muito
importantes em
minha vida: minha
esposa Lyonelle,
minha primeira filha
Lia e por final, à
"Bolinha", nosso
segundo rebento.
Além da Física e do
Surf, são as únicas
ligações que tenho
com este mundo.*

Agradecimentos

Como de praxe, eu não poderia de maneira alguma deixar de fazer agradecimentos às pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão desta fase de trabalho. Sendo assim, presto aqui minhas homenagens. São os homenageados os seguintes:

O Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida, meu orientador durante praticamente os meus 10 anos de trabalho na UFC;

O Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho que, apesar das dificuldades que passou, sempre esteve presente;

O Prof. Dr. Antônio Fernandes Siqueira, meu professor dos tempos da graduação;

Meus pais e irmãos, que tiveram muita paciência em esperar por este momento;

O Prof. Dr. Nathan Jacob Berkovits, do IFT - UNESP, por todo seu apoio aos meus estudos iniciais na área de Teoria de Cordas;

Meus amigos e colegas da graduação e pós-graduação da UFC (todos são elementos que pertencem a este "grupo discreto");

Os demais professores do departamento de Física da UFC que efetivamente me ensinaram como devo atuar e também como não devo;

Todos os funcionários do departamento de Física da UFC;

À coordenação do curso de Pós-Graduação da UFC;

À FUNCAP e ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta tese abordamos alguns aspectos relacionados com teorias de Gravidade. Essencialmente existem duas partes principais neste trabalho: 1) mecanismos de localização de campos em membranas e 2) nova interpretação para a teoria de gravitação.

No que concerne aos mecanismos de localização de campos em membranas dois assuntos são colocados: a construção de modelos de gravidade topológica no contexto de teorias contendo membranas e localização de campos de gauge tensoriais em membranas finas (o denominado campo de Kalb-Ramond. No primeiro destes assuntos, a questão importante é a tentativa de se obter resultados semelhantes aqueles provindos do modelo de Randall-Sundrum, isto é, a solução do problema de hierarquia e localização do campo gravitacional na membrana. No entanto, o caminho escolhido está associado com modelos de gravitação topológica, modelos estes onde a métrica do espaço-tempo não é a quantidade fundamental da teoria. Existe na literatura uma corrente de pensamento baseada em um formalismo de quantização de gravidade que necessita do ponto de vista onde a mesma pode ser tratada por meio de uma teoria topológica de campos vinculada. Portanto, perguntar da validade dos resultados de Randall-Sundrum no contexto de gravidade topológica pode servir de teste para se construir resultados estritamente quânticos. Neste sentido, fazemos uma análise primeiramente clássica de modelos possíveis, discutindo diversos aspectos (quebras de simetrias, simetrias de gauge, etc.). Primeiramente mostramos que pode-se obter de fato, no contexto acima citado, equações semelhantes àquelas obtidas nos modelos de Randall-Sundrum para explicar a existência da hierarquia entre as massas dos bósons de Higgs. No entanto, não se faz uma análise detalhada de como deve ser descrita gravidade em $D = 5$. Nesta linha de raciocínio, construímos vários modelos com forma matemática semelhante a modelos de gravidade topológica (modelos equivalentes), tentando fazer a "localização" sobre as membranas de modo a linkar estes resultados ao primeiro citado logo acima. Por último, construímos

efetivamente gravidade topológica em membranas nos moldes de modelos de gravidade topológica, fazendo a análise dos vínculos no espaço-tempo ortogonal à membrana.

No segundo assunto, estudamos modelos de campos escalares que suportam defeitos tipo kink embutidos em espaço-tempo $D = 5$. Tais modelos podem ser utilizados para se simular membranas finas. Neste caso analisamos a localização de campos de gauge tensoriais, principalmente o campo de Kalb-Ramond, no background de várias geometrias que não apresentam singularidades, como no caso do modelo de Randall-Sundrum. O resultado é que o modo-zero do campo de Kalb-Ramond pode ser localizado somente em background gravitacional onde o dilaton tem papel importante.

A segunda parte da tese é um pouco mais especulativa. Trata de uma nova abordagem de interpretação da gravitação. A idéia, em suma, é comparar o próprio espaço-tempo a um sólido deformável. Neste sentido, busca-se identificar quem são os componentes microscópicos do sólido do espaço-tempo, em analogia com os sólidos cristalinos reais, os quais são compostos por uma rede contendo uma miríade de átomos e moléculas. Para tal empresa, a equação de Landau-Raychaudhuri tem papel importante. No total, discute-se três sinais apontando para esta idéia: *a)* as deformações do volume do espaço-tempo, *b)* a origem elástica da ação de Einstein-Hilbert e *c)* a relação entre a Lei de Hooke da Elasticidade e a equação de Einstein da gravitação. A idéia principal é que as equações de Einstein parecem "emergir", sendo bastante naturais neste contexto.

Abstract

In this thesis we study some aspects related with Gravity Theories. Essentially there are two main pieces in this work: (1) mechanisms of field localization on membranes and (2) a new interpretation for the gravity theory.

Related to the field localization mechanisms two subjects are discussed: the construction of topological gravity models in the context of membranes and localization of tensorial gauge fields in thin membranes (the so called Kalb-Ramond field). In the first of these subjects, the important question is try to obtain results compared to those coming from the Randall-Sundrum models, i.e., the solution to the hierarchy problem and the localization of the gravitational field in the membrane. Nevertheless, the way chosen is related to topological gravity, such models where the space-time metric is not the fundamental entity. There is in the academy a way of thinking which basis is a quantization formalism for gravity. Such searches need the viewpoint in which gravity can be described by constrained topological field theories. Therefore, to ask about the results of the Randall-Sundrum model in the context of topological gravity may be useful as a test for strictly quantum theory results. In this sense, we make firstly a classical analysis of the possible models, discussing several aspects (symmetry breaking, gauge symmetries, etc.). Firstly we show that in fact we can obtain, in the lines cited above, equations very similar to the Randall-Sundrum results to explain the hierarchy between the masses of the Higgs bosons. Nevertheless, an detailed analysis of how to describe gravity in $D = 5$ is not made. In this line of reasoning, we construct several models with the same mathematical form of the models of topological gravity (equivalent models), trying to do "localization" over the membranes in order to link this result to the first cited above. Lastly, we construct effectively topological gravity on a membrane, regarding the constraints in the space-time orthogonal to the membrane.

In the second subject, we study scalar field models that support kink-like defects em-

bedded in a $D = 5$ space-time. Such models can be utilized to simulate thin membranes. In this case we analyze the localization of tensor gauge fields, mainly the Kalb-Ramond field, in the background of several non-singular geometries, unlike those presented in the original Randall-Sundrum model. The result is that the zero-mode for the Kalb-Ramond field can be localized only in the special background where the dilaton plays an important role.

The second part of this thesis is a little bit speculative. It is about a different interpretation of gravitation. The idea is to compare the own space-time to a physical deformable solid. In this sense, we look for the microscopic components of this solid, just like the real crystalline solids which are made of a network containing a myriad of atoms and molecules. For such, we make use of the Landau-Raychaudhuri equation, which is crucial in this discussion. It is discussed a set of tree signs pointing to this idea: (1) the deformation of the space-time volume, (2) the elastic origin of the Einstein-Hilbert action and (3) the relation between Hooke's law and the Einstein's equation for gravitation. An important idea is that the Einstein's equation seems to "emerge" quite naturally in this context.

Conteúdo

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iv
Conteúdo	1
Introdução	1
1 Física de Dimensões Extras	7
1.1 Introdução	7
1.2 O Formalismo de Kaluza-Klein	10
2 O Modelo de Randall-Sundrum	15
2.1 A Hierarquia de Gauge	15
2.2 O Cenário de Arkani-Hamed-Dimopoulos-Dvali (ADD)	17
2.3 O Cenário de Randall-Sundrum (RS)	19
3 Gravidade Topológica	22
3.1 A Gravidade de Einstein	22
3.2 O Formalismo de Palatini	24
3.3 O Formalismo de Plebanski	26
4 Hierarquia de Gauge de um ponto de vista topológico	29

4.1	Introdução	29
4.2	O Modelo	30
4.3	Conclusões e Perspectivas	37
5	Modelos Equivalentes em Membranas	38
5.1	Introdução	38
5.2	Teorias Topológicas em Membranas Solitônicas (caso abeliano)	39
5.3	Teorias Topológicas em Membranas Solitônicas (caso não-abeliano)	43
5.4	Teorias Equivalentes em Membranas Solitônicas	45
5.5	Discussões e Perspectivas	48
6	Gravidade Topológica em Membranas	50
6.1	Introdução	50
6.2	O Modelo	51
6.3	Análise dos Vínculos	52
6.4	Teoria BF na Membrana	54
6.5	Conclusões e Perspectivas	57
7	Mecanismos de Localização em Membranas	59
7.1	Introdução	59
7.2	Campos tensoriais antissimétricos em membranas	64
7.2.1	Introdução	64
7.2.2	O Kink como Membrana	66
7.2.3	O Campo de Kalb-Ramond	67
7.2.4	O dÍlaton	69
7.2.5	Revisando o campo de Kalb-Ramond	72
7.2.6	Membrana com estruturas internas	76

7.2.7	Localização do campo de Kalb-Ramond em membranas com estruturas internas	76
7.3	Conclusões	78
8	O Espaço-tempo como um Sólido Deformável	79
8.1	Introdução	79
8.2	A Equação de Landau-Raychaudhuri	82
8.3	Primeiro sinal: as deformações do espaço-tempo	84
8.4	Segundo sinal: A origem elástica da ação de Einstein-Hilbert	86
8.5	Terceiro sinal: A lei de Newton e a lei de Hooke	87
8.6	Conclusões e Perspectivas	89
	Conclusões e Perspectivas	90
8.7	Conclusões Gerais	90
8.8	Perspectivas Gerais	94
	Apêndice	96
A	As relações de Pluecker	96
B	A equação de Landau-Raychaudhuri	99
	Bibliografia	102

Introdução

De que maneira aprendemos a respeito da validade de uma teoria física? A lição que temos, às custas de muitos erros, é que dada uma boa teoria, estabelecida segundo os critérios do método científico, devemos expô-la ao máximo número de novos testes possíveis. Este fato irá nos garantir saber exatamente quais são os limites de aplicação desta teoria. No caso desta falhar, recorreremos aos mais variados tipos de "remendos", buscando sempre manter intacta a linguagem construída pela teoria em questão. No entanto, também há um limite no número de "remendos" a serem feitos. Não se pode forçar um tipo de linguagem se esta realmente foge ao entendimento puro de determinado fenômeno: a coisa toda pode ficar deselegante, mesmo inaplicável. É como se tentássemos tapar um grande buraco usando um alfinete: sempre nos parece que falta algo! Essa sensação de "faltar algo" é também guia para se compreender os limites de uma teoria. Tal é o caso do Modelo Padrão de Partículas. Ele tem seus enormes sucessos. Exemplo claro é a previsão das massas dos bósons W e Z , responsáveis pela intermediação da força fraca. Não tardou muito para surgirem novas observações e novos testes para o modelo. Muitos "remendos" foram feitos. Apesar destas correções, existem problemas ainda sem respostas plausíveis, impossíveis até de serem pejorativamente "remendados". Este é o ponto onde se deve discutir realmente a criação de uma nova linguagem, novas teorias físicas. Este trabalho fala um pouco sobre as novas linguagens.

O Modelo Padrão de Partículas Elementares é um modelo descrito em um espaço-tempo plano quadri-dimensional. Contém basicamente dois tipos de partículas (e muitos

exemplares delas): bósons e férmions. Além do mais, uma peça fundamental em sua estrutura é o denominado mecanismo de quebra espontânea de simetria, sendo um "ator" importante neste mecanismo o famoso bóson de Higgs. Tal partícula é incluída no modelo com o único propósito de gerar massa para algumas partículas elementares. Suas previsões concordam bastante bem com as experiências, nos limites por ela propostos. Entretanto, existem novas experiências e novos enfoques que trazem consigo novos testes. E por nem todos o Modelo Padrão é aprovado. Vejamos alguns exemplos: oscilações de neutrinos, o problema de hierarquia de massas de quarks e léptons, hierarquia de gauge, grande unificação, confinamento de quarks, renormalização, o bóson de Higgs, etc. Pode-se ainda perguntar a respeito da teoria de gravidade. Tal teoria não está no esquema geral do Modelo Padrão. Possui características bastantes diferentes das teorias de gauge usuais. Não é renormalizável... resumindo, existe uma série de questões sem respostas satisfatórias. Se simplesmente assumimos que o Universo possui mais dimensões além das quatro descritas pela teoria da relatividade, temos uma surpresa. Tal quadro possui um poder de simplificação muito grande e permite responder rapidamente muitas das questões acima citadas. O fato de assumirmos esta nova idéia nos traz também novos problemas. Se vivemos em um Universo n -dimensional, como podemos observar somente quatro destas dimensões? Daí surgem os mecanismos de redução dimensional. Novos efeitos físicos em $D = 4$ são calculados com base nestes mecanismos.

A idéia de dimensões extras não é nova. Já em meados da década de 20 (no Séc. 20) T. Kaluza e O. Klein haviam proposto que poderíamos unificar Gravidade e Eletromagnetismo simplesmente adicionando uma dimensão a mais no Universo. Tal dimensão seria invisível aos nossos olhos por ser muitíssimo pequena e enrolada sobre si mesma. Rapidamente tal teoria caiu em descrédito, apesar de ser revolucionária, por também prever a existência de uma partícula escalar que na época não foi observada (o dilaton). Após alguns anos de calmaria uma tempestade abalou a Física. Surgiram teorias que

somente faziam sentido se o espaço-tempo possuísse 10 dimensões: Supergravidade e teorias de Cordas. Mais tarde (1995) o número aumentou para 11 com a idéia da "Teoria M"(sem falar da "Teoria F"que vive em um espaço-tempo $D = 10 + 2$). O formalismo de dimensões compactas voltou à tona como peça fundamental nestes tipos de teorias. No que diz respeito à teoria de cordas pode-se mostrar que existem objetos extensos denominados "D-branas"em seu espectro. Tais objetos forneceram novas alternativas de se pensar em dimensões extras. Se antes apenas pensávamos em dimensões finitas, agora podemos incluir o caso onde as dimensões extras são infinitas: basta imaginarmos que nosso Universo esta contido em uma hipersuperfície quadridimensional embutida em um Universo de dimensão maior que $D = 4$. Muitas são as consequências deste tipo de interpretação. Uma delas, que está tornando-se famosa, é a interpretação do Big-Bang como uma colisão de Membranas (o Universo Equipirótico). De fato, este é um novo tipo de linguagem que está sendo contruída na atualidade.

No que diz respeito à teoria da Gravitação, também observa-se o mesmo tipo de problema de linguagem discutido no primeiro parágrafo. Na atualidade existem três enfoques em forte discussão. O primeiro é o mais aceito: a teoria de Gravidade no formalismo proposto por Einstein rediscutida nos moldes de teorias de dimensões extras. Em particular, os grandes problemas de não-renormalização, união da Física Quântica com a Relatividade Geral, Unificação das forças, etc., são todos aceitos como praticamente resolvidos no contexto de teorias de Supercordas. O segundo enfoque é completamente ortogonal às idéias associadas com dimensões extras (na verdade, pode-se dizer que os partidários desta linha são mais "conservadores"). Para seus defensores não há sentido em se pensar em um número de dimensões maior que 4 para o Universo. A razão desta "crença", dizem seus partidários, está baseada no simples fato de existirem outras alternativas para se tratar os problemas que assolam a teoria da Relatividade Geral. Estas alternativas são teorias de gravidade topológica (este tipo de formalismo é base para "Loop Quan-

tum Gravity" e "Spin Foam Models"). Em princípio, pode-se construir o procedimento de quantização para estes tipos de teorias em $D = 4$ sem a necessidade de extensões para modelos de dimensões extras. No entanto, o formalismo apenas trata de gravidade, não citando nada a respeito de outros problemas do Modelo Padrão. Neste sentido, a ambição de modelos tipo gravidade topológica é menor que o caso de teorias de Supercordas. O terceiro e último enfoque é "mais ortogonal ainda". Seus partidários defendem que talvez não seja nem mesmo correto quantizar Gravidade da forma como feita nos últimos anos: esta seria a razão fundamental para os muitos problemas que surgem com a teoria da Gravidade. A idéia é que a métrica do espaço-tempo não é a quantidade mais fundamental na teoria e sim uma quantidade secundária, emergente (aqui parece surgir um link entre teorias topológicas e este formalismo). Uma das realizações desta idéia mostra que se apenas quantizamos uma teoria de matéria, obtemos como subresultado uma teoria de gravidade [1]. A questão toda está associada com a pergunta "o que é realmente o espaço-tempo?". Existe, por exemplo, uma linha de pesquisa que relaciona as características do espaço-tempo com as características de meios contínuos especiais, ou seja, meios onde se pode estudar fenômenos análogos àqueles previstos pela teoria da Relatividade Geral. Com base nisso pode-se contruir modelos chamados "análogos" à Gravidade [2]. Tais tipos de idéias permeiam também os círculos de discussões em teorias de Supercordas, teorias onde o espaço-tempo por si ainda não é bem compreendido.

Em suma esta tese trata de vários aspectos relacionados com a teoria de Gravidade. Passaremos a discutir desde assuntos relacionados com física de dimensões extras e temas relacionados, onde em modelos usuais a teoria da Gravidade de Einstein tem papel importante, até modelos onde adicionamos novos formalismos de Gravidade. Concatenamos aqui de maneira simples estas formas de se trabalhar com Gravitação.

Os três primeiros capítulos desta tese são capítulos de revisão. O restante dos capítulos descreve todos os resultados obtidos durante os anos do doutoramento. O primeiro

capítulo desta tese trata de uma introdução mais detalhada ao formalismo de Kaluza-Klein. Mostra-se como obter sinais da existência de dimensões extras em teorias efetivas em $D = 4$. Discute-se também a "unificação" entre Gravidade e Eletromagnetismo nos moldes de uma teoria de Gravidade em $D = 5$.

O segundo capítulo trata de um formalismo alternativo ao de Kaluza-Klein: modelos de Membranas. Neste discute-se o modelo de Randall-Sundrum e suas implicações para a física em $D = 4$, inclusive localização de campos em membranas.

O terceiro capítulo trata dos formalismos de Gravitacão. Discute-se o formalismo de Einstein, onde a métrica é a quantidade fundamental, formalismo de Palatini, onde entram as tetradas e a conexão de spin, e, por último, o formalismo de gravidade topológica de Plebanski.

O quarto capítulo é primeiro que discute resultados. Analisa-se o problema de hierarquia de gauge no contexto de gravidade topológica. No modelo de Randall-Sundrum utiliza-se uma métrica do espaço-tempo bastante especial para se tratar este problema. Pode um modelo independente de métrica produzir uma solução análoga para o problema de hierarquia? É esta a questão discutida nesta parte.

O quinto capítulo trata de colocar em termos mais rigorosos a idéia de gravidade topológica em membranas. No quarto capítulo analisa-se apenas gravidade topológica supostamente localizada na membrana do modelo. Neste, introduzimos a idéia de se primeiramente entender gravidade em $D = 5$. Para tal estudamos modelos equivalentes em membranas. Tais modelos em muito se parecem com o modelo de Plebanski. A idéia geral é tentar produzir termos topológicos em membranas.

O sexto capítulo descreve efetivamente como produzir gravidade topológica em membranas. A questão importante é analisar os vínculos da teoria de maneira correta: eles devem ser impostos em $D = 4$ ou em $D = 5$? A resposta é que se os impomos em $D = 5$ obtemos o resultado a que se quer chegar. No entanto, a conclusão maior é o formalismo

não mais ser independente da métrica.

Obs.: Os capítulos que se seguem são associados com outras linhas de pesquisa abordadas no decorrer da construção desta tese.

O sétimo capítulo tem um objetivo diferente. Trata de localização do campo de Kalb-Ramond em membranas. Neste caso discute-se o formalismo onde a dimensão extra é infinita. Incluímos a discussão para vários tipos de membranas e modelos de gravidade com a presença do dilaton.

O oitavo e último capítulo trata de um modelo do espaço-tempo como um sólido deformável. Após uma breve discussão sobre o significado de modelos deste tipo, mostra-se um total de três sinais que apontam para a possibilidade de realização daquela idéia. Neste caso a equação de Landau-Raychaudhuri tem papel extremamente importante.

Por último fazemos uma discussão geral de conclusões e perspectivas.

Capítulo 1

Física de Dimensões Extras

Iniciaremos agora a discussão fazendo uma breve introdução aos métodos da física de dimensões extras. Neste capítulo serão abordados o modelo de Kaluza-Klein, o problema de hierarquia de gauge no Modelo Padrão de partículas elementares e a proposta do modelo de Randall-Sundrum para se resolver este problema específico. Esta discussão inicial é extremamente importante porque serve de guia para construção de um modelo de gravidade topológica no contexto de física de dimensões extras.

1.1 Introdução

A linguagem matemática é peça fundamental no jogo da Física. Já em assuntos de física básica a noção de "vetor" surge como elemento importante no método matemático. Em Mecânica temos vários exemplos de grandezas classificadas como vetoriais: a força, velocidade, aceleração, etc. No Eletromagnetismo os campos elétricos e magnéticos também são grandezas vetoriais. A característica importante a ser notada aqui é que a construção matemática do objeto "vetor" toca diretamente na idéia que fazemos do espaço: o número de componentes de um vetor nos fornece a dimensão do espaço em que os fenômenos físicos ocorrem. Isto significa que idéias estritamente geométricas estão na base das teorias

físicas mais conhecidas. Esta é uma facilidade que o método vetorial nos traz: se quisermos estender uma teoria para dimensões maiores, é suficiente aumentar o número de componentes das quantidades vetoriais utilizadas para se construir uma lei física. Este procedimento não é nada mais que a formulação de uma hipótese a respeito do Universo: o fato de que este pode possuir mais dimensões além das quatro então discutidas pela teoria da relatividade. A pergunta importante a ser feita é: se o Universo possui mais dimensões além de quatro, como esperamos enxergá-las? Existem pelo menos duas respostas possíveis a esta pergunta. A primeira é que pode-se "apostar" na validade das leis físicas conhecidas em $D = 4$ para dimensões maiores. Verifica-se, então, as correções produzidas por esta "aposta" em dimensões mais baixas (correções para massas e constantes de acoplamento, etc.), ou seja, faz-se um procedimento de redução dimensional. A segunda opção é admitir que as leis físicas em Universos de dimensões maiores são completamente diferentes das leis que conhecemos. Neste caso, não teríamos senso de direção de pensamento e seria extremamente difícil se chegar em alguma conclusão útil. A primeira resposta, então, é mais aceita pela comunidade, embora não seja garantia de exclusão da segunda resposta (a qual causaria grande espanto!).

As leis físicas são tensoriais, uma característica que lhes garante grande grau de simetria. Além do mais, da mesma maneira que vetores, pode-se estender tais tipos de leis para espaços de dimensões maiores que quatro, sem se perder as simetrias mais importantes. Como exemplo, pode-se citar o caso da equação de Einstein para a gravitação:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu}. \quad (1.1)$$

Nesta equação, $R_{\mu\nu}$ é o tensor de curvatura de Ricci, construído com o tensor métrico $g_{\mu\nu}$, R é o escalar de curvatura de Ricci, $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento e k é uma constante de proporcionalidade que depende da constante gravitacional de Newton. Em $D = 4$, os índices μ e ν adquirem valores entre 0 e 3. No entanto, vê-se claramente

que nada nos impede de aumentar os valores admissíveis para tais índices, incorrendo apenas no aumento do número de componentes dos tensores que compõe a equação acima. A simetria por detrás da equação de Einstein é a de transformações gerais de coordenadas, a qual não é alterada quando se aumenta o número de dimensões (é claro que a transformação geral de coordenadas muda com a dimensão, mas o que se fala aqui é que o "tipo" de simetria não muda). As componentes adicionais produzidas pelo aumento da dimensão do espaço serão a fonte das correções em dimensões mais baixas como mostraremos em alguns casos. Além do mais, o fato de se aumentar o número de dimensões do espaço-tempo tem características de teorias de unificação.

Existe mais um ingrediente a ser discutido relacionado com características geométricas e topológicas dos espaços em questão. A verdade é que o espaço-tempo n -dimensional mais geral é descrito em termos de uma variedade diferenciável com curvatura não nula. Esta variedade pode ainda possuir várias características de topologias as mais variadas: pode ser compacta ou não, pode ou não possuir fronteira, etc. Considera-se então duas alternativas de se tratar as dimensões extras: 1) elas podem ser muito pequenas e enroladas sobre si mesmas (variedades compactas sem fronteiras) e 2) podem possuir tamanho infinito (caso de variedades não compactas). No primeiro caso não observamos as dimensões extras pelo simples fato de estas possuírem um tamanho extremamente inacessível aos nossos olhos, embora possamos "caminhar" ao longo das mesmas. No segundo caso não observamos as dimensões extras porque estamos presos em uma hipersuperfície 4-dimensional embutida em um espaço-tempo de dimensionalidade maior. Estas duas situações, do ponto de vista da física, produzem efeitos bastante distintos. O primeiro caso é usualmente considerado em modelos de compactificação de Kaluza-Klein, enquanto que o segundo caso, mais moderno, é considerado em modelos inspirados em teorias de cordas (o modelo de Randall-Sundrum, por exemplo). Estes serão, em suma, os assuntos desta discussão.

1.2 O Formalismo de Kaluza-Klein

Nesta seção discutiremos o formalismo de redução dimensional chamado de formalismo de Kaluza-Klein [3]. Discutiremos como os parâmetros físicos (massas, constantes de acoplamento, etc.) importantes em uma teoria efetiva em baixas dimensões dependem da geometria das dimensões extras. Considera-se o primeiro caso discutido logo acima, ou seja, o caso de variedades compactas sem fronteiras. Começaremos por descrever os resultados provindos da física de dimensões extras discutindo um caso bastante simples: um campo escalar real e não massivo em $D = 5$ livre de interações. Considera-se que a dimensão extra é compacta e representada pelo círculo S_1 de raio R e as quatro dimensões restantes são extensas e constituem o espaço-tempo de Minkowski. A métrica deste espaço-tempo é dada por $g_{MN} = \text{diag}(\eta_{\mu\nu}, -R^2)$ com inversa $g^{MN} = \text{diag}(\eta^{\mu\nu}, \frac{-1}{R^2})$, $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$. As coordenadas serão representadas por $x^M = (x^\mu, x^4 = \frac{y}{R})$ e, usando a métrica dada acima, $x^M = (x_\mu, x_4 = -yR)$. As coordenadas x^μ serão representadas por x . O campo escalar $\phi(x, y)$ é periódico na variável y com período $L = 2\pi R$, ou seja,

$$\phi(x, y + L) = \phi(x, y) \quad (1.2)$$

e pode ser, por conta disto, expresso em termos de uma expansão de Fourier naquela variável:

$$\phi(x, y) = \frac{1}{(L)^{\frac{1}{2}}} \sum_n \phi_n(x) \exp(2\pi i n \frac{y}{L}). \quad (1.3)$$

A ação que descreve a dinâmica para este campo escalar é dada por

$$S = \frac{1}{2} \int d^5x \sqrt{g^{(5)}} (\partial_M \phi) \partial^M \phi \quad (1.4)$$

onde $g^{(5)} = R^2$ é o determinante da métrica do espaço-tempo 5-dimensional. O termo cinético pode ser decomposto de tal maneira que $(\partial_M \phi) \partial^M \phi = (\partial_\mu \phi) \partial^\mu \phi - (\partial_y \phi)^2$.

Substituindo-se a expansão de Fourier para o campo ϕ e fazendo-se a integração na ação da variável y obtém-se a teoria efetiva de campos escalares em $D = 4$

$$S_{ef.} = \frac{1}{2} \sum \int d^4x [(\partial_\mu \phi_n^*) \partial^\mu \phi_n - (\frac{M_n c}{\hbar})^2 \phi_n^* \phi_n], \quad (1.5)$$

onde $M_n = \frac{2\pi\hbar}{Lc}n$ é a massa dos campos remanescentes do procedimento de redução dimensional. O resultado do procedimento é que obtém-se uma teoria contendo um número infinito de campos escalares complexos, massivos e livres de interação. Nota-se claramente que no limite de L muito pequeno, a massa destes campos é muito grande (estes são os denominados modos massivos de Kaluza-Klein). Se L é da ordem do comprimento de Planck 10^{-33}cm , as massas serão da ordem de 10^{19}GeV (a massa de Planck), uma escala tão enorme que impossibilita a observação destes tipos de partículas em escalas de energias comuns ao modelo padrão de partículas. Portanto, no limite de baixas energias, simplesmente ignora-se os modos de Kaluza-Klein, restando apenas um modo não-massivo e real (o modo-zero de Kaluza-Klein) na ação efetiva em $D = 4$. O resultado importante aqui é que as massas dos modos de Kaluza-Klein dependem explicitamente do volume da dimensão extra, característica tal que nos permite fazer o limite para baixas energias. Vejamos agora o que acontece com uma teoria contendo interação. Considera-se ainda campos escalares. A interação usual é de um potencial quártico nos campos escalares, ou seja,

$$S_{inter.} = \int d^4x \int_0^L dy \lambda^{(5)} \phi^4 \quad (1.6)$$

onde $\lambda^{(5)}$ é a constante de acoplamento para esta auto-interação em $D = 5$. Se substituirmos a decomposição de Fourier para o campo ϕ (considerando apenas o modo zero) na ação acima obtemos

$$S_{inter.} = \int d^4x(L) \frac{\lambda^{(5)}}{L^2} \phi_0^4(x). \quad (1.7)$$

A conclusão é que a constante de acoplamento efetiva em $D = 4$ também depende da dimensão extra, sendo a relação dada por $\lambda^{(4)} = \frac{\lambda^{(5)}}{L}$. O esquema geral considera que as constantes fundamentais na verdade estão na teoria contendo dimensões extras. As constantes em $D = 4$ são efetivas e dependem do volume da dimensão extra. Outro efeito bastante interessante da interação é a produção de pares de modos de Kaluza-Klein na teoria efetiva. Este efeito pode ser visto analisando-se os termos da decomposição em modos de Fourier do potencial quártico na equação (1.6) acima. A decomposição é feita como acima:

$$\begin{aligned} \phi^4(x, y) = \frac{1}{L^{\frac{1}{2}}} \left[\phi_0 + \sum_{n \neq 0} \phi_n \exp 2\pi i n \frac{y}{L} \right]^4 = \frac{1}{L^2} \left[\phi_0^4 + 4\phi_0^3 \sum_{n \neq 0} \phi_n \exp 2\pi i n \frac{y}{L} \right. \\ \left. + 6\phi_0^2 \sum_{n, n' \neq 0} \phi_n \phi_{n'} \exp 2\pi i (n + n') \frac{y}{L} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (1.8)$$

O primeiro termo quando integrado na variável y fornecerá a interação efetiva em $D = 4$ para o modo-zero. Os termos seguintes fornecerão interações entre o modo-zero e os modos de Kaluza-Klein. Em particular, somente o terceiro termo da equação (1.8) será importante na ação efetiva após a integração da variável y . A parte da ação efetiva que mostra a produção de pares de modos de Kaluza-klein é dada por

$$S_{inter.} \sim \int d^4x \lambda^{(4)} \sum_{n \neq 0} \phi_0^2 \phi_n \phi_{-n}. \quad (1.9)$$

Estes em suma são os efeitos esperados em uma teoria efetiva em $D = 4$ devido à existência de uma dimensão extra apenas. Além do mais este é um resultado para uma teoria somente de campos escalares. É natural esperar uma riqueza maior de informações quando se estuda uma teoria envolvendo campos tensoriais de "rank" maior.

O fato mais importante de teorias de dimensões extras é que naturalmente elas englobam, de maneira bastante simples, a idéia de unificação em física. Pode-se ilustrar este resultado utilizando-se a teoria de Gravitação de Einstein. A teoria gravitacional é

estritamente geométrica. Toda a informação a respeito de física está contida no chamado tensor métrico g_{MN} . É este objeto que nos diz como se deve medir distâncias no espaço-tempo, informando se este é ou não um espaço curvo. Vamos supor que estamos tratando gravidade em um espaço-tempo $D = 5$, onde a dimensão extra é compacta como já discutido. Neste caso o índices M, N tomam valores variando de 1 a 5. É fácil ver que a métrica pode ser decomposta da seguinte maneira:

$$ds^2 = g_{MN}(x, y)dx^M dx^N = g_{\mu\nu}(x, y)dx^\mu dx^\nu + A_\mu(x, y)dx^\mu dy + \varphi(x, y)dy^2. \quad (1.10)$$

Vê-se claramente que um campo tensorial de dois índices em $D = 5$ é decomposto em um campo tensorial de dois índices, um vetor e um escalar em $D = 4$. Porém a dependência de cada um deles ainda contém a variável y . Se quisermos construir uma teoria efetiva em $D = 4$, devemos escrever cada um destes campos em termos de uma expansão de Fourier específica, substituir na ação para o campo gravitacional em $D = 5$ e fazer a integração desta variável. O passo seguinte, como foi mostrado para o campo escalar, é desprezar os modos de Kaluza-Klein que, neste novo caso, terão novos representantes tensoriais, vetoriais e escalares. Após todo este processo (efetivamente, a compactificação) obtém-se como resultado uma teoria somente com modos-zeros. Resumindo em termos de equações, tem-se que:

$$S_{Grav.} = K^{(5)} \int d^5x \sqrt{-g^{(5)}} R^{(5)} \Rightarrow S_{efet.} = K^{(4)} \int d^4x \sqrt{-g^{(4)}} [R^{(4)} - \frac{1}{4} e^{-\sqrt{3}\varphi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi] \quad (1.11)$$

Na equação acima, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é um tensor intensidade de campo para o campo vetorial A_μ , $K^{(5)}$ é a constante de acoplamento para o campo gravitacional em $D = 5$. Como que por um milagre a ação efetiva (1.11) possui uma simetria de gauge para o campo vetorial A_μ , ou seja, a transformação $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$ não muda a forma

da ação referida. Este resultado é suficiente para declarar que o segundo termo da ação acima citada representa o termo cinético para o campo eletromagnético. O milagre é que obtem-se uma unificação do campo gravitacional com o campo eletromagnético em $D = 5$. Simetrias do espaço-tempo em $D = 5$ (neste caso, transformações gerais de coordenadas) geram simetrias internas de gauge em $D = 4$. Entretanto, esta discussão é apenas clássica. A discussão quântica é a continuação natural desta história e não será abordada aqui. Também obtem-se um campo escalar φ como grau de liberdade remanescente do procedimento de compactificação. Tal campo é intitulado "dilatón" e, em discussões mais técnicas, é responsável por processos de estabilização do tamanho da dimensão extra.

Para finalizar, deve-se citar aqui um mecanismo de compactificação denominado "compactificação espontânea". O mecanismo de Kaluza-Klein, da forma como foi explicado, não é um mecanismo natural. Precisamos forçar os cálculos nas teorias da maneira como foram expostos. O mecanismo de compactificação espontânea não necessita desta característica pois as equações do modelo naturalmente guiam o processo de redução dimensional. Passemos agora para o estudo de um novo formalismo de redução dimensional.

Capítulo 2

O Modelo de Randall-Sundrum

Começaremos agora a discutir modelos que contêm membranas embutidas em espaços de dimensionalidade maior que 4. Tais modelos são alternativos aos de Kaluza-Klein no que diz respeito a mecanismos de redução dimensional. Antes de efetivamente entrarmos em detalhes, discutiremos uma motivação física para se considerar modelos de dimensões extras: o problema de hierarquia de gauge.

2.1 A Hierarquia de Gauge

O Modelo Padrão de partículas descreve bastante bem as interações conhecidas. No entanto, este possui um número grande de parâmetros livres, números colocados a mão no modelo de modo a ajustar a teoria à experiência. Um exemplo bastante simples é o conjunto de massas dos quarks. Não se sabe porque as massas destas partículas possuem os valores que tem, isto é, não existe teoria que explique a "hierarquia" de massas apresentadas por estas partículas. Tudo o que se tem é um modelo de previsão físico onde usamos valores de massas medidos em uma experiência. Este é apenas um exemplo de problema de hierarquia (existem mais!). O problema em que estamos interessados refere-se às massas dos bósons de Higgs em modelos de grande unificação. Sabe-se que para

se construir o cenário decrito pelo Modelo Padrão são necessários mecanismos de quebra espontânea de simetria. Em tais modelos se faz necessário postular a existência de uma partícula, denominada "bóson de Higgs", que tem o simples objetivo de gerar massa para algumas partículas do Modelo Padrão. No entanto, o próprio bóson de Higgs deve possuir massa para se adequar o modelo à experiência (a massa da partícula de Higgs é um parâmetro livre). Em particular, em modelos de grande unificação, são necessárias duas transições de fase (duas quebras de simetrias) e, portanto, dois bósons de Higgs com suas respectivas massas. É justamente neste ponto que o problema começa a surgir. Um dos bósons deve possuir massa da ordem de $M_{ew} \sim 1$ TeV enquanto que o outro deve possuir massa da ordem de $M_{pl} \sim 10^{16}$ TeV. As razões para esta disparidade de massas são imposições experimentais, isto é, a hierarquia $\frac{M_{pl}}{M_{ew}} \sim 10^{16}$ deve existir desta maneira para se reproduzir efeitos físicos observáveis em baixas energias: assimetria de número bariônico, tempo de vida do próton, constante de acoplamento da interação forte, etc. Esta é uma forma de se apresentar o problema de hierarquia de gauge. A questão a ser respondida é "como gerar esta hierarquia de massas?". Existem pelo menos três modelos onde se apresenta uma solução. O primeiro é chamado de cenário "technicolor", um cenário de física de partículas onde não existem campos escalares como partículas fundamentais (se não existem escalares, não existem partículas de Higgs e, portanto, o problema não existe!). No entanto, este tipo de cenário foi desconsiderado devido a observações experimentais no LEP. Atualmente estes tipos de modelos voltaram à tona com possíveis resultados a serem discutidos com o LHC (sigla para "Large Hadron Collider"). O segundo cenário envolve teorias contendo "supersimetria". Nestes modelos, pode-se resolver o problema de hierarquia às custas de se acrescentar mais partículas no modelo teórico (tais tentativas ainda esperam por comprovações experimentais). Por último, existem modelos baseados em física de dimensões extras. Em particular, discutiremos dois modelos que tratam nosso Universo em $D = 4$ como membranas (hipersuperfícies) embutidas em espaços de

dimensões maiores. O primeiro é o denominado cenário de Arkani-Hamed-Dimopoulos-Dvali (ADD)[4]. O segundo, chamado de cenário de Randall-Sundrum (RS)[5]. Modelos de dimensões extras também carecem de comprovações experimentais no estágio atual de pesquisas. Vejamos cada um deles com certo detalhe.

2.2 O Cenário de Arkani-Hamed-Dimopoulos-Dvali (ADD)

A primeira observação importante no cenário ADD é o fato de se considerar M_{ew} como a escala fundamental do modelo. A escala de Planck M_{pl} deve ser gerada a partir de M_{ew} . A razão para tal é que o eletromagnetismo foi testado com sucesso até escalas energéticas desta ordem de grandeza. Entretanto, a teoria gravitacional (onde a massa de Planck possui estrita relação com a constante gravitacional) não possui tal grau de certeza. A lei do "inverso do quadrado das distâncias" somente foi testada até distâncias da ordem de 1 cm. A segunda observação é que este cenário contém apenas uma membrana que simula o Universo $D = 4$. Neste caso admite-se a existência de d dimensões extras pequenas e compactas. A pergunta importante é "como calcular a dependência de M_{pl} em $D = 4$ em termos da geometria das dimensões extras?".

O primeiro passo é considerar que a geometria do espaço é fatorizável da seguinte maneira:

$$ds_d^2 = ds_4^2 - ds_{d-4}^2. \quad (2.1)$$

Pode-se ver claramente que separamos a métrica do espaço-tempo d -dimensional em duas partes, sendo uma a métrica do Universo $D = 4$ e a outra parte a métrica do espaço que constitui as dimensões extras, um espaço $(d - 4)$ -dimensional. O passo seguinte é considerar a ação de Einstein-Hilbert para a gravidade em d dimensões:

$$S = \frac{c^3}{16\pi G_d} \int dx^d \sqrt{-g_{(d)}} R_{(d)} \quad (2.2)$$

Nesta ação acima, $G_{(d)}$ é a constante gravitacional em d dimensões e c é a velocidade da luz. Como as dimensões extras são compactas pode-se integrá-las na equação (2.2) para se obter

$$S = \frac{c^3}{16\pi G_4} \int dx^4 \sqrt{-g_{(4)}} R_{(4)} \quad (2.3)$$

onde $G_{(4)} = \frac{G_{(d)}}{V_{(d-4)}}$ é a constante gravitacional em $D = 4$, $V_{(d-4)}$ é o volume do espaço $(d - 4)$ -dimensional. Considera-se agora que $V_{(d-4)} = L^{(d-4)}$, onde L é o comprimento fundamental da dimensão extra. Usando a relação entre a constante gravitacional e a constante de Planck em $D = 4$ pode-se encontrar a seguinte relação:

$$M_{pl(d)}^{d-2} = \left(\frac{\hbar}{cL}\right)^{d-2} M_{pl(4)}^2. \quad (2.4)$$

Se fizermos $M_{pl(d)} \sim 1$ TeV, $M_{pl(4)} \sim 10^{16}$ TeV substituir os valores da constante de Planck e da velocidade da luz, pode-se ter uma idéia do tamanho da dimensão extra se fizermos a escolha certa para o número de dimensões extras. Por exemplo, se $d = 6$, obtemos $L \sim 100\mu\text{m}$, o que é razoável. Se $d = 10$, $L \sim 1$ Fermi um valor ainda razoável do ponto de vista fenomenológico. Entretanto, se $d = 5$, teremos $L \gg 1$ mm, ou seja, uma distância que poderia ser observada facilmente e, portanto, refutada por simples observações. A conclusão é que pode-se gerar a hierarquia entre M_{pl} e M_{ew} usando a geometria do espaço-tempo. O próximo passo é garantir que os campos do Modelo Padrão fiquem presos (localizados) na membrana que simula nosso Universo. A razão por trás disso está no simples fato de que a "espessura" da membrana garante que os campos no máximo terão massas da ordem da "espessura". De outra forma, deve-se garantir que "espessura" $\sim M_{ew}$. Tal característica pode ser obtida quando se simula a

membrana por meio de defeitos topológicos. Todos os outros efeitos devido a dimensões extras (associados a modos massivos de Kaluza-Klein) surgem ainda em um modelo que considera membranas.

O resultado desta discussão é que o problema de hierarquia entre massas parece desaparecer. No entanto, uma análise mais cuidadosa revela que apenas o problema foi substituído. Se agora não existe uma hierarquia entre massas, existe entre uma massa e o tamanho L da dimensão extra. Como evitar isto? A resposta está em outro cenário de dimensões extras: o cenário de Randall-Sundrum.

2.3 O Cenário de Randall-Sundrum (RS)

O cenário de Randall-Sundrum é comumente apresentando em duas partes na literatura. Na primeira parte, chamada cenário de Randall-Sundrum tipo-I (RS-I) apresenta-se a solução do problema de hierarquia de gauge. A segunda parte, denominada cenário de Randall-Sundrum tipo-II (RS-II), demonstra-se como se pode localizar gravitação em uma das membranas do modelo. Nesta seção discutiremos o cenário RS-I. Neste cenário, considera-se que o espaço-tempo tem dimensão $D = 5$. A escala fundamental agora é a escala de Planck M_{pl} . Existem duas membranas (hipersuperfícies quadri-dimensionais) no modelo que são fontes de gravidade em $D = 5$. A dimensão extra é descrita em termos do "orbifold" S_1/Z_2 e as membranas estão localizadas sobre os pontos fixos deste "orbifold". Cada membrana possui seu Universo específico com características distintas (constante cosmológica, por exemplo). Pode-se resolver as equações de Einstein neste background de forma a se obter a geometria do espaço-tempo. O requisito importante é garantir as simetrias normais do Universo em $D = 4$ (simetria de Lorentz, por exemplo) sobre as membranas. A solução das equações de Einstein nestas condições é dada em

termos de uma métrica agora não-fatorizável

$$ds^2 = e^{-2k|z|}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dz^2, \quad (2.5)$$

onde $k^2 = \frac{|\Lambda|}{6}$, sendo Λ a constante cosmológica em uma das membranas. Agora analisa-se a ação efetiva de Einstein-Hilbert em $D = 4$ (mudamos os nomes das constantes fundamentais aqui envolvidas)

$$S = -\frac{M_*^3}{16\pi} \int dx^5 \sqrt{|g_{(5)}|} R_{(5)}, \quad (2.6)$$

onde M_* é a escala de massa fundamental da teoria em $D = 5$. Pode-se agora fazer a integração da dimensão extra da seguinte maneira

$$S = -\frac{M_*^3}{16\pi} \int dx^4 \sqrt{|g_{(4)}|} \int_{-r_c\pi}^{r_c\pi} dz e^{-2k|z|} (R_{(4)} + \dots) = \quad (2.7)$$

$$= -\frac{M_{pl}^2}{16\pi} \int dx^4 \sqrt{|g_{(4)}|} (R_{(4)} + \dots), \quad (2.8)$$

onde encontra-se a relação entre as constantes fundamentais do modelo:

$$M_{pl}^2 = \sqrt{\frac{6}{|\Lambda|}} [1 - e^{-2kr_c\pi}] M_*^3. \quad (2.9)$$

Vê-se então que o fator exponencial entra apenas como uma constante multiplicativa nesta fórmula. Se colocarmos $M_* \sim \sqrt{|\Lambda|}$ em $D = 5$, obteremos que $M_{pl} \sim M_* \sim \sqrt{|\Lambda|}$, mesmo para o caso de r_c muito grande ou possuindo um valor relativamente pequeno. E o que acontece com M_{ew} ? De que maneira ela surge neste contexto? A resposta está associada com a teoria efetiva de campos na membrana. Vamos supor que a teoria que

descreve campos de Higgs massivos é dada pela seguinte ação sobre uma das membranas:

$$S_{higgs} = \int_{-r_c\pi}^{r_c\pi} dz \delta(z - r_c\pi) \int d^4x \sqrt{|g_{(5)}|} \left[\frac{1}{2} g^{MN} D_M H(x, z) D_N H(x, z) - \frac{1}{2} M_{pl}^2 H^2(x, z) \right] \quad (2.10)$$

A massa do campo H é da ordem da massa de Planck M_{pl} (a escala fundamental do modelo, como já dito). Quando substitui-se a métrica dada pela equação (2.5), obtém-se a ação efetiva sobre a membrana, ou seja,

$$S \sim \int d^4x \sqrt{|g_{(4)}|} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} D_\mu H D_\nu H - \frac{1}{2} M_{ew}^2 H^2 \right], \quad (2.11)$$

de onde obtem-se a relação $\frac{M_{ew}}{M_{pl}} = e^{-r_c k \pi} \sim 10^{16}$. Voltando com este resultado na equação (2.9) vê-se que seu efeito é praticamente desprezível. Desta relação obtemos também que $\frac{1}{r_c} \sim \frac{M_{pl}}{30}$. A conclusão é que pode-se resolver o problema de hierarquia definitivamente, sem deixar novas substituições como no caso do cenário ADD. Da mesma forma que o cenário ADD, deve-se construir os campos do modelo padrão de forma que estes fiquem presos à membrana, mas agora apenas por requisitos fenomenológicos.

O passo seguinte deste trabalho é analisar outros formalismos de gravidade, de forma a se testar se em todos os casos podemos chegar às mesmas conclusões.

Capítulo 3

Gravidade Topológica

Neste capítulo faremos uma discussão a respeito de várias interpretações da teoria da Relatividade Geral, a teoria que descreve a "interação" gravitacional em termos de espaços curvos. Para tal, se faz necessário discutir a estrutura básica da teoria em termos do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, isto é, discutir primeiramente a interpretação mais comum (a do próprio Einstein). Após esta fase, passa-se à discussão do denominado formalismo de Palatini, um formalismo onde a métrica do espaço-tempo não é mais fundamental, mas uma quantidade derivada de outros campos. Por último, discute-se o formalismo de teorias de campos topológicas aplicadas à gravitação.

3.1 A Gravidade de Einstein

O modelo de espaço-tempo na formulação métrica é bastante simples. O espaço-tempo é considerado como uma variedade riemanniana, munida de uma conexão compatível com a métrica, isto é, livre de torção.

A quantidade fundamental da teoria é a métrica do espaço-tempo $g_{\mu\nu}$. Se impomos a relação de compatibilidade

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = 0, \tag{3.1}$$

onde ∇ denota derivação covariante, pode-se definir a quantidade fundamental necessária para se fazer deslocamentos paralelos nesta variedade: a conexão afim (o símbolo de Christoffel) $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$. O deslocamento paralelo é o meio pelo qual se testa se determinada variedade é ou não curva. Com base na conexão afim pode-se construir um tensor de quatro índices, o tensor de curvatura $R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}$, que diz efetivamente a respeito da curvatura de uma variedade. Este tensor é dado por

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = \partial_{\mu}\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\nu}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\mu}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha}. \quad (3.2)$$

Este tensor dá origem a novos objetos relacionados com a a curvatura: o tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha}$ e o escalar de Ricci $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$. É justamente o escalar de Ricci que entra na formulação lagrangeana da teoria gravitacional, como já foi mostrado em seções anteriores. A dinâmica do campo gravitacional puro pode, então, ser obtida partir da ação de Einstein-Hilbert. Se quisermos acrescentar matéria na teoria, é suficiente adicionar à lagrangeana de Einstein-Hilbert uma nova lagrangeana contendo a parte devido à novos campos, por exemplo. Este novo termo dará origem ao tensor energia-momento na equação de Einstein.

A simetria por trás da teoria de Einstein é representada pelo grupo de transformações gerais de coordenadas. Esta simetria é estritamente uma simetria do espaço-tempo. A teoria também possui auto-interação (a teoria é altamente não-linear). Neste aspecto, ela lembra teorias de gauge tipo Yang-Mills, embora neste caso não existam simetrias internas.

Em suma, estas são as informações básicas associadas ao formalismo métrico. A questão importante agora é tentar descobrir se podemos adicionar mais informações associadas ao espaço-tempo, informações "escondidas" na estrutura da variedade riemanaiana em questão.

3.2 O Formalismo de Palatini

Quando escrevemos uma lagrangeana de uma teoria de campos qualquer no espaço curvo (e mesmo no espaço plano), devemos garantir que a mesma seja uma função escalar. Desta maneira sabemos que a ela será invariante sob transformações gerais de coordenadas. O problema é que existem campos bosônicos, descritos por lagrangeanas onde o termo cinético possui um número par de derivadas (apenas duas, na verdade), e campos fermiônicos, com lagrangeanas apresentando termos cinéticos contendo uma derivada. O fato é que no caso de campos bosônicos, sempre podemos contrair a métrica (um objeto de dois índices espaço-tempo) com as derivadas contidas no termo cinético. O mesmo não acontece em uma teoria contendo férmions. Por conta disto precisa-se construir um novo objeto para se garantir a invariância por transformações gerais de coordenadas da teoria. Tal objeto é denominado "tetrada" em $D = 4$. A tetrada aparece como um novo campo e pode ser usado para se compor a métrica do espaço-tempo,

$$g^{\mu\nu} = \eta^{mn} e_m^\mu e_n^\nu. \quad (3.3)$$

Nesta equação e_m^μ representa a tetrada, o índice μ é um índice de espaço curvo e o índice m é de espaço plano. A idéia contida nesta subdivisão de índices está relacionada com a álgebra de Clifford das matrizes de Dirac. Sabe-se que, no espaço plano, as matrizes de Dirac obedecem à álgebra de Clifford, uma regra que dita quais tipos de matrizes devem ser utilizadas na construção de uma teoria contendo férmions. A pergunta é "Como devemos transportar a álgebra de Clifford para o espaço curvo?". Isto deve estar em pleno acordo com o princípio de equivalência: devemos obter a álgebra usual com suas representações usuais quando fazermos a passagem do espaço curvo ao espaço plano. Em suma, a tetrada nos oferece justamente um meio de se "trocar" índices de espaço curvo com índices de espaço plano e vice-versa. Em outras palavras, é o próprio

princípio de equivalência que nos diz que podemos fazer isto, ou seja, quando trabalhamos no espaço curvo temos a liberdade de fazer transformações gerais de coordenadas e, quando no espaço plano, temos a liberdade de fazer simples transformações de Lorentz (eis o papel dos índices de espaço plano). As transformações de Lorentz são, em certo sentido, transformações locais do espaço-tempo (no sentido de serem "internas", como as transformações de gauge).

O passo importante agora é descrever deslocamento paralelo neste contexto. Temos agora duas maneiras diferentes de se fazer deslocamento paralelo. Uma delas é representada pelo deslocamento usual de objetos entre pontos do espaço-tempo curvo e descrito em termos da conexão de Christoffel. A outra forma de deslocamento agora inclui mudanças locais, associadas às transformações de Lorentz, e deve ser descrita em termos de uma nova conexão, esta sendo denominada "conexão de spin". Em suma, define-se uma derivada covariante que seja invariante sob transformações locais de Lorentz, da mesma maneira que o caso da derivada covariante de gauge. O resultado é dado por

$$D_p = e_p^\mu \left[\partial_\mu - \frac{1}{2} \omega_\mu^{mn} X_{mn} \right], \quad (3.4)$$

onde ω_μ^{mn} é a conexão de spin (análogo dos campos de Yang-Mills) e X_{mn} são os geradores do grupo de Lorentz em $D = 4$.

Com base na derivada covariante podemos construir o tensor de curvatura associado à conexão dada por ω_μ^{mn} . Neste caso, tem-se que o tensor de "Riemann" será dado por

$$R_{mn}^{pq} = e_{[m}^\mu e_{n]}^\rho F_{\mu\rho}^{pq}, \quad (3.5)$$

onde $F_{\mu\rho}^{pq} = \partial_\mu \omega_\rho^{pq} - \omega_\mu^{rp} \omega_{\rho r}^q$. A formulação lagrangeana segue facilmente quando se constrói o escalar de Ricci associado. A ação associada a este formalismo é denominada ação de

Palatini[6]:

$$S = k \int d^4x e e_{[m}^{\mu} e_{n]}^{\rho} F_{\mu\rho}^{mn}. \quad (3.6)$$

Agora a característica mais importante. Na ação acima existem dois campos: a tetrada e a conexão de spin. Quando calculamos as equações de movimento, devemos tomar os dois campos como independentes. O fato é que a conexão de spin depende da tetrada por meio das equações do movimento. O resultado é que a equação de movimento para a tetrada é equivalente à equação de Einstein, quando levamos em consideração a equação de movimento para a conexão de spin. Por conta disto, este formalismo é dito de primeira ordem pois termos de derivadas de primeira ordem aparecem somente na parte da ação (3.6) contendo conexões de spin. Esta característica pode ser importante na análise de vínculos deste modelo. Este comportamento não é observado no formalismo de Einstein.

A conclusão é que a teoria de gravidade ganha agora "ares" de uma teoria de gauge. Este fato pode ser importante por vários motivos: as outras interações da natureza são descritas por teorias de gauge; este fato pode mudar a interpretação dos vínculos no formalismo hamiltoniano; etc. Embora a métrica do espaço-tempo pareça não ser a quantidade fundamental, todo o formalismo de Einstein pode ser reobtido. O que escreveu-se aqui foi a respeito de uma simples "troca de roupas", pois que a essência da teoria é a mesma nos dois casos. As duas teorias são equivalentes classicamente e, quanticamente, apresentam os mesmo tipos de problemas. Passemos agora ao estudo de um link ainda mais estranho entre dois tipos de teorias: Relatividade Geral e Teorias de Campos Topológicas.

3.3 O Formalismo de Plebanski

Nesta seção mostraremos, de maneira bastante sucinta, como construir uma relação entre teorias de campos topológicas e vinculadas e a teoria gravitacional. Tal formalismo é con-

hecido como formalismo de gravidade topológica. Sua utilidade maior está relacionada com formalismos alternativos de quantização de gravidade. Vamos direto ao assunto. Aqui seguiremos as convenções dadas na referência [7]. O formalismo leva em consideração as características de teorias de gauge apresentadas pelo formalismo de Palatini na seção anterior. De fato, pode-se mostrar que as transformações gerais de coordenadas no formalismo de métrica são transformações de gauge no formalismo de Palatini. Vamos postular a seguinte ação em D dimensões:

$$S[A, B, \Phi] = \int d^D x [\tilde{B}_{ij}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^{ij} + \frac{1}{2} \Phi_{[m]\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{[m]ijkl} \tilde{B}_{ij}^{\mu\nu} \tilde{B}_{kl}^{\rho\sigma}]. \quad (3.7)$$

Esta ação, denominada ação de Plebanski, é um funcional de campos de gauge A_μ^{ij} (a serem identificados com as conexões de spin), campos $\tilde{B}_{ij}^{\mu\nu}$ (que serão relacionados às tetradas em dimensões maiores) e campos multiplicadores de lagrange $\Phi_{[m]\mu\nu\rho\sigma}$ (um vínculo imposto na teoria). O grupo de gauge da teoria é o $SO(D)$ (trabalha-se no espaço euclidiano). A ação acima possui invariância por transformações gerais de coordenadas. Para se ver isto basta notar que o campo B é uma densidade tensorial de peso 1, enquanto que o campo multiplicador de Lagrange Φ possui peso -1 (representado por um til sobre o campo). De maneira a se estabelecer uma relação com gravidade, o campo multiplicador de Lagrange deve satisfazer a seguinte propriedade:

$$\Phi_{[m][\mu\nu\rho\sigma]} = 0. \quad (3.8)$$

Vejamos como esta ligação acontece. A variação da ação (3.7) com relação ao campo multiplicador de Lagrange leva à equação de vínculos abaixo, isto é,

$$\varepsilon^{[m]ijkl} \tilde{B}_{ij}^{\mu\nu} \tilde{B}_{kl}^{\rho\sigma} = \tilde{\varepsilon}^{[\alpha]\mu\nu\rho\sigma} \tilde{c}_{[\alpha]}^{[m]}, \quad (3.9)$$

para alguns coeficientes $\tilde{c}_{[\alpha]}^{[m]}$. Aqui, $[m], [\alpha]$ são índices cumulativos de tamanho $D - 4$, respectivamente, índices de grupo e de espaço-tempo. O significado destes vínculos sobre os campos B acima é traduzido no seguinte teorema: Um campo não-degenerado B satisfaz os vínculos (3.9) se e somente se existe e_i^μ tal que $\tilde{B}_{ij}^{\mu\nu} = \pm |e| e_i^{[\mu} e_j^{\nu]}$. Se substituirmos este resultado de volta na ação de Plebanski (3.7) obtemos a ação de Palatini (3.6) para a gravidade. Por conta deste resultado, pode-se definitivamente dizer que a métrica não é mais a quantidade fundamental neste tipo de modelo para gravitação. Se deformarmos a variedade do espaço-tempo de alguma maneira, mudando a métrica, não observaremos efeitos neste tipo de teoria por esta ser de natureza puramente topológica. Esta é a grande vantagem deste modelo. A formulação hamiltoniana muda com esta interpretação e propicia uma maneira de quantizar este tipo de teoria. Porém, discutiremos apenas aspectos clássicos desta equivalência.

Agora, as questões a serem discutidas neste trabalho tem a ver com a união das idéias de teorias de dimensões extras contendo membranas com esta interpretação de gravidade topológica. As conclusões do modelo de Randall-Sundrum são as mesmas quando utilizamos o formalismo de Gravidade Topológica? Esta é a pergunta chave deste trabalho.

Capítulo 4

Hierarquia de Gauge de um ponto de vista topológico

4.1 Introdução

Neste capítulo exploramos uma alternativa ao ponto central do modelo de Randall-Sundrum, ou seja, a métrica particularmente não-fatorizável. Usando uma teoria parcialmente topológica mostra-se que o fator exponencial, crucial no modelo de Randall-Sundrum, aparece somente devido à existência da membrana, independente de se trabalhar com uma métrica em especial. As discussões contidas neste capítulo são resultados do trabalho "Gauge Hierarchy from a topological viewpoint?", publicado na revista *Physics Letters B*-600(2004) 151 – 156.

Algumas pesquisas têm sido feitas no sentido de se implementar membranas em termos de defeitos topológicos de maneira a se resolver o problema de Hierarquia [8]. Aqui a membrana é simulada por um hiperplano de domínio 3-dimensional embutido em espaço-tempo 5-dimensional. Paredes de domínio (parentes em $D = 3$ dos hiperplanos de domínio) são simples solítions, objetos que possuem grande estabilidade devido à topologia não-trivial do espaço de parâmetros de uma teoria específica [9]. Elas apenas surgem

em modelos onde há transições de fase, ainda quando simetrias discretas são quebradas.

Para se estudar o problema de hierarquia escolhemos trabalhar com gravidade topológica. Motivando-se em recentes pesquisas no contexto de gravidade quântica [10, 11], estudamos gravidade do tipo $B \wedge F$ [12, 13]. Então pode-se afirmar que nosso modelo possui característica basicamente topológica porque 1) a membrana existe devido à topologia do espaço de parâmetros deste modelo e 2) Gravidade é independente de métrica. Veremos que tais características fornecerão interessantes resultados quando comparados àqueles originários do modelo de Randall-Sundrum.

4.2 O Modelo

O modelo é baseado na seguinte ação:

$$S = \int d^5x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta + k \varepsilon_{\mu\nu\alpha\rho\lambda} \theta H_{\mu\nu\alpha}^a F_{\rho\lambda}^a - V(\theta) \right]. \quad (4.1)$$

Nesta ação o campo θ é um campo real e pseudo-escalar que está relacionado com o hiperplano de domínio. Neste contexto, a presença do termo cinético para o campo θ (juntamente com o potencial de quebra de simetria), é requerido para se construir o defeito topológico (hiperplano de domínio). Nós fazemos a observação aqui de que o campo θ atua como campo de background de maneira a gerar a membrana onde construiremos uma teoria efetiva do tipo BF. Os campos $H_{\mu\nu\alpha}^a$ e $F_{\rho\lambda}^a$ são tensores de tensões associados a campos de gauge não-abelianos e serão relacionados a graus de liberdade gravitacionais. Eles são definidos como, em teorias de gauge puras, $H_{\mu\nu\alpha}^a = \partial_\mu B_{\nu\alpha}^a + \partial_\nu B_{\alpha\mu}^a + \partial_\alpha B_{\mu\nu}^a + g f^{abc} A_\mu^b B_{\nu\alpha}^c$ e $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g' f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$. O segundo termo desta ação é um termo topológico que generaliza para $D = 5$ o termo θ da QCD. Para se ver este fato, é suficiente fazer uma simples redução dimensional, isto é, define-se $B_{\mu 5}^a = -B_{5\mu}^a = V_a^\mu$, $A_5^a = \varphi$, $\varepsilon_{5\nu\alpha\rho\lambda} \equiv \varepsilon_{\nu\alpha\rho\lambda}$ e $\partial_5 G(x^\mu) = 0$, onde G é qualquer campo deste modelo. Então, o termo θ surge como re-

sultado do procedimento de redução dimensional (compactificação) definido acima como

$$\int d^5x k \varepsilon_{\mu\nu\alpha\rho\lambda} \theta H_{\mu\nu\alpha}^a F_{\rho\lambda}^a \rightarrow \int d^4x k' \varepsilon_{\nu\alpha\rho\lambda} \theta V_{\nu\alpha}^a F_{\rho\lambda}^a, \quad (4.2)$$

onde $V_{\nu\alpha}^a = \partial_\nu V_\alpha^a - \partial_\alpha V_\nu^a + g f^{abc} V_\nu^b V_\alpha^c$. Identificando V_α^a com A_α^a obtem-se o termo discutido. Por conta deste fato, o campo θ pode ainda ser pensado como representando o áxion. O áxion surgiu como uma proposta para resolver o problema de violação CP em interações fortes [14]. A presença de instântons na teoria resulta em novo termo efetivo na ação da QCD, ou seja, $\sim \int d^4x \varepsilon^{\nu\alpha\rho\lambda} \theta F_{\nu\alpha}^a F_{\rho\lambda}^a$, termo o qual viola a simetria CP. O problema é resolvido quando adiciona-se na teoria o campo axiônico com a imposição de uma nova simetria, a simetria de Peccei-Quinn, que é $\theta \rightarrow \theta + a$ (a é uma constante que contem os termos que violam a simetria CP na QCD). A ação (4.2) é invariante sob uma transformação de simetria de Peccei-Quinn

$$\theta \rightarrow \theta + 2\pi n. \quad (4.3)$$

O potencial axiônico é dado por

$$V(\theta) = \lambda(1 - \cos \theta), \quad (4.4)$$

o qual preserva a simetria de Peccei-Quinn. Entretanto, esta simetria é espontâneamente quebrada em escalas de energia da ordem de $M_{PQ} \sim 10^{10} - 10^{12} \text{GeV}$. Este valor é obtido a partir de vínculos cosmológicos e experimentais [15]. O potencial (4.4) não é interessante para nossos propósitos. O fato é que paredes de domínio surgiram pela primeira vez no universo na era da transição de fase da QCD, isto é, quando $T_{QCD} \sim 100 \text{MeV}$ [16], uma escala relativamete próxima da escala da teoria eletrofraca $M_{ew} \sim 10^3 \text{GeV}$. Nesta situação, a simetria de Peccei-Quinn é quebrada explicitamente por efeitos de instântons ($(U_{PQ}(1) \rightarrow Z(N))$). É possível simular esta quebra explícita por meio de um simples

modelo teórico. Para tal, escrevemos $V(\theta)$ como um potencial em termos de potências de θ , o que é equivalente a tomar termos somente até segunda ordem na expansão da Eq. (4.4). Propomos o seguinte potencial

$$V(\theta) = \frac{\lambda}{4}(\theta^2 - v^2)^2, \quad (4.5)$$

o qual quebra explicitamente a simetria $U_{PQ}(1)$ de Peccei-Quinn, de maneira a gerar a membrana em uma energia próxima da escala da teoria eletrofraca. Entretanto, este mecanismo leva a uma grande disparidade de escalas, isto é, existe uma disparidade entre a massa de Planck $M_{PL} \sim 10^{18} GeV$ e a escala de quebra explícita de $U_{PQ}(1)$: assumimos esta disparidade como a nossa versão do problema de hierarquia.

A equação de movimento para o campo θ considerando o potencial (4.5) é dada por:

$$\theta + \lambda\theta^3 - \lambda v^2\theta = k\varepsilon_{\mu\nu\alpha\rho\lambda}H_{\mu\nu\alpha}^a F_{\rho\lambda}^a. \quad (4.6)$$

Esta equação é facilmente resolvida. Supondo uma configuração estática e que $\theta \equiv \theta(x_4)$, a solução é:

$$\theta(x_4) = v \tanh\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}vx_4\right). \quad (4.7)$$

Esta solução define uma 3-brane embutida em um espaço-tempo $(4+1)$ -dimensional. A escala de massa deste modelo é $m = \sqrt{\lambda}v$ e a espessura da membrana é dada por m^{-1} . Com estas informações podemos agora discutir a teoria efetiva na membrana. Uma integração por partes do termo topológico na ação (4.1) resultará em

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\rho\lambda}\theta(x_4)H_{\mu\nu\alpha}^a F_{\rho\lambda}^a = -3\varepsilon_{\mu\nu\alpha\rho\lambda}\partial_\mu\theta B_{\nu\alpha}^a F_{\rho\lambda}^a + \dots, \quad (4.8)$$

onde não consideramos interações mais complicadas e termos lineares em θ (a função

(4.7) é ímpar). Pelo fato de $\theta \equiv \theta(x_4)$ a soma no índice μ resultará somente em um termo de derivada com relação à coordenada x_4 . Então, o tensor de Levi-Civita $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\rho\lambda}$ será um autêntico tensor quadridimensional: $\varepsilon_{4\nu\alpha\rho\lambda} \equiv \varepsilon_{\nu\alpha\rho\lambda}$. Assumimos aqui que os tensores $B_{\mu\nu}^a$ e $A_{\rho a}$ são fracamente dependentes da coordenada x_4 . Então, o segundo termo da ação (4.1) é reescrito como

$$S \sim \int d^4x \varepsilon_{\nu\alpha\rho\lambda} B_{\nu\alpha}^a F_{\rho\lambda}^a \left[\lim_{r_c \rightarrow +\infty} k' \int_0^{r_c} dx_4 \partial_4 \theta(x_4) \right], \quad (4.9)$$

onde r_c representa a extensão máxima da dimensão extra. Este último resultado mostra a contribuição do hiperplano de domínio para a teoria efetiva em quatro dimensões. Pode-se ver que, efetivamente no hiperplano a teoria é descrita por um termo topológico não abeliano do tipo $B \wedge F$. A importância deste resultado reside no fato de existirem vários tratamentos de gravidade topológica que se utilizam de modelos tipo $B \wedge F$ em $D = 4$ e modelos de Chern-Simons em $D = 3$. Na referência [12], os autores constroem gravidade BF em termos de uma teoria de gauge $SU(2)$, $D = 4$ de maneira independente de base. O ponto fundamental que consideramos nesta referência é que o campo tensorial B é uma 1-forma de gauge. Reforçamos aqui que a estrutura do termo BF em nosso trabalho é a mesma que a discutida na referência [12], ou seja, nossa gravidade BF na membrana é do tipo $SU(2)$, $D = 4$.

Nota-se que esta discussão abre a possibilidade de se tratar gravidade topológica "localizada" na membrana. Nestes tipo de modelos, os campos fundamentais são conhecidos. Por exemplo, as tetradas em $D = 4$ geram a métrica do espaço-tempo, sendo esta agora um objeto secundário. As simetrias de gauge desta teorias são, na realidade, as simetrias da Relatividade Geral [13]. Pode-se mostrar que, usando campos de tetradas, uma ação do tipo $B \wedge F$ nos fornece

$$\int d^4x k \varepsilon^{\nu\alpha\rho\lambda} B_{\nu\alpha}^a F_{\rho\lambda}^a \rightarrow k \int d^4x \sqrt{g} R, \quad (4.10)$$

a qual é a ação de Einstein-Hilbert para o campo gravitacional, onde R é o escalar de curvatura e g é a métrica do espaço-tempo [12]. Não se sabe ao certo se a Eq. (4.9) pode realmente descrever a dinâmica do campo gravitacional [17]. Em um modelo deste tipo, a constante k tem uma relação direta com a massa de Planck. Das Eqs. (4.9) e (4.10) pode-se ver a relação entre a massa de Planck k_4 em $D = 4$ e a dimensão extra:

$$k_4 = \lim_{r_c \rightarrow +\infty} k' \int_0^{r_c} dx_4 \partial_4 \theta(x_4). \quad (4.11)$$

O limite $r_c \rightarrow +\infty$ garante a estabilidade topológica do hiperplano de domínio. Substituindo a Eq. (4.7) na Eq. (4.11), considerando um valor finito para r_c (o que significa que o hiperplano de domínio é um objeto finito), pode-se mostrar que

$$k_4 = k' v (1 - e^{-2y})(1 + e^{-2y})^{-1}, \quad (4.12)$$

onde $y = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} v r_c$ é a dimensão extra multiplicada por um fator de escala. Este resultado é bastante interessante: como o modelo é topológico, o fator exponencial não deve surgir de uma métrica em especial. Aqui o fator exponencial surge apenas devido à existência da membrana. Como no modelo de Randall-Sundrum, mesmo para o limite $r_c \rightarrow +\infty$, a constante de Planck 4-dimensional tem valor específico. Esta é a razão pela qual acreditamos que este modelo pode ser usado para tratar o problema de hierarquia.

Pode-se fazer uma estimativa da ordem de grandeza da dimensão extra considerando que a espessura do hiperplano de domínio é da ordem de $M_{ew} \sim 10^3 GeV$. Isto significa que os campos confinados ao hiperplano não percebem a existência da dimensão extra, a menos que sofram interações que envolvam energias maiores que M_{ew} . Neste caso, podem escapar para fora da membrana, vivendo agora no espaço-tempo de dimensões maiores [18]. Pelo cálculo da energia por unidade de volume σ do hiperplano de domínio pode-se encontrar uma simples equação polinomial de grau três na variável $z = \theta(r_c)$ contendo

todas as informações a respeito da transição de fase:

$$m^{-1}\sigma = \sqrt{2}vz - \sqrt{2}m^{-1}z^3. \quad (4.13)$$

Para o caso do modelo de Randall-Sundrum, o tamanho da dimensão extra é calculada por meio do campo denominado radion [19], ou seja, existe um mecanismo de estabilização da dimensão extra por meio de quebra de simetrias envolvendo campos que vivem especificamente nas dimensões extras [20].

Discutiremos agora a respeito de matéria confinada na membrana. É fato bastante conhecido que paredes de domínio possuem estados ligados de campos [18]. Para o caso de campos escalares, foi mostrado usando aproximação WKB que um particular modo-zero vivendo na membrana é descrito pelo seguinte campo:

$$\varphi'(x^0, \mathbf{x}, x^4) = \frac{d\varphi(x^4)}{dx^4} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + iEx^0); \quad E^2 = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^2. \quad (4.14)$$

Na última equação, $\frac{d\varphi(x^4)}{dx^4} = Ce^{-2Ax^4}(1+e^{-Ax^4})^{-2}$, C e A são parâmetros constantes. Em particular, resultado similar é válido para férmions. Então os modos-zero, bosônicos ou fermiônicos, aparecem multiplicados por um fator de escala exponencial, característica que lembra o resultado do modelo de Randall-Sundrum. Apesar do fato dos campos escalares serem não-massivos, existem mecanismos envolvendo vários campos escalares em interação [21] que geram quebra espontânea de simetria no núcleo de um defeito topológico. Desta maneira, os campos confinados podem adquirir massas diferentes de zero. Para se mostrar este resultado para campos escalares, usamos um modelo de dois campos escalares reais: $\phi(x^0, \mathbf{x}, x^4)$ and $\eta(x^0, \mathbf{x})$. Consideramos o primeiro campo como um campo confinado 4-dimensional, isto é, $\phi(x^0, \mathbf{x}, x^4) = f(x^4)\varphi(x^0, \mathbf{x})$, onde $f(x^4)$ o fator exponencial que surge devido à presença da dimensão extra. O segundo campo é não-

massivo e puramente quadridimensional. Constroi-se a seguinte densidade lagrangeana

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - g\phi^2\eta^2 - V(\phi), \quad (4.15)$$

onde $V(\phi) = -m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4$ é um potencial que quebra espontaneamente a simetria $\phi \rightarrow -\phi$ apresentada por este modelo em particular. Neste caso, se a dimensão extra é finita e constante, então, durante a transição de fase, somente o campo φ irá oscilar, isto é, $\phi = f(x^4)\varphi \rightarrow f(x^4)[v + \chi]$, onde v é o valor esperado de vácuo para o campo ϕ e χ é a flutuação em torno do vácuo. Trabalhando esta idéia na lagrangeana acima pode-se mostrar que, depois da transição de fase, o campo η adquire uma massa da ordem de $f(x^4)v \sim e^{-2Ax_4}(1 + e^{-Ax_4})^{-1}v$. Esta expressão é bastante semelhante ao resultado do modelo de Randall-Sundrum [5], o qual produz uma massa física para os campos do modelo padrão corrigidas pelo fator exponencial devido à métrica do espaço-tempo. A conclusão é que este mecanismo pode gerar escalas de massas a partir de campos confinados na membrana, sem o requerimento de uma métrica particular.

Existe uma observação final que deve ser feita a respeito de gravidade no contexto discutido aqui neste trabalho: os modos-zero de campos de matéria vivem efetivamente em $D = 4$ e, portanto, devem contribuir para o tensor energia-momento efetivo em $D = 4$. Estes campos são, de fato, fontes de curvatura no espaço-tempo do hiperplano de domínio. Consequentemente pode-se construir um termo de propagação para o campo gravitacional em $D = 4$ (na membrana). Entretanto, como pode ser visto a partir da Eq. (4.10) é possível construir um termo de propagação para gravidade a partir de um termo topológico. Portanto é interessante discutir se é possível usar a Eq.(4.9) como um termo de propagação autêntico para tais graus de liberdade gravitacionais. Tais observações serão discutidas nos próximos capítulos [22].

4.3 Conclusões e Perspectivas

Em resumo, mostrou-se que um simples modelo topológico de teoria de campos tem características bastante interessantes para se resolver o problema de hierarquia de gauge de maneira bastante similar ao resultado produzido por L. Randall e R. Sundrum. Com este modelo construímos uma 3-brana estável (um hiperplano de domínio) que simula nosso universo quadri-dimensional e argumentamos a respeito da possibilidade de localização de gravidade topológica. Por conta destes fatos, o fator exponencial aparece somente devido à existência da membrana e não de uma métrica especial. Então, calculamos a massa de Planck efetiva em $D = 4$, apontando a semelhança entre este resultado e aquele do modelo de Randall-Sundrum. Calculou-se uma equação polinomial para o tamanho da dimensão extra usando somente características de modelos contendo paredes de domínio. Finalmente, fez-se um comentário a respeito de modos-zero ligados à membrana, observando o fato de que tais modos são multiplicados por um fator de escala exponencial. Esta característica torna possível a emergência da escala da teoria eletrofraca.

Não foi feito comentário algum a respeito de constante cosmológica neste modelo. De fato, no modelo de Randall-Sundrum a constante cosmológica é bastante importante por ser responsável pela forma final da métrica dada por Eq. (4.1). Outro fato interessante é que modelos de membranas podem responder à seguinte questão: *Por que a constante cosmológica é tão pequena?* Estes são alguns problemas interessantes a serem estudados nesta abordagem topológica.

A análise de modelos contendo várias paredes de domínio é também interessante. Neste caso, o potencial que implementa a transição de fase possui muitos vácuos estáveis. Paredes de domínio interpolando estes pontos de vácuo irão surgir em posições bastante definidas: a distância entre duas paredes é constante devido à estabilidade topológica do modelo. Pode-se ver este fato como alternativa de se resolver o problema de *estabilização de "moduli"*?

Capítulo 5

Modelos Equivalentes em Membranas

5.1 Introdução

Neste capítulo discutimos como se obter teorias parcialmente topológicas em membranas. Os modelos são ditos parcialmente topológicos pelo simples fato de que somente alguns termos da ação são invariantes topológicos, ou seja, não mudam sua forma matemática depois de uma deformação do espaço-tempo. Faz-se uso de modelos equivalentes (BF -Maxwell, $B\phi$ -Maxwell, etc.) bastante conhecidos na literatura. O objetivo principal é fazer a análise de teorias tipo BF no contexto de membranas de maneira a se aplicar os resultados posteriormente em modelos de Gravidade Topológica. As discussões contidas neste capítulo são resultados do trabalho "Topological and equivalent models on brane-worlds" publicado na revista Modern Physics Letters A22:1503-1511, 2007.

5.2 Teorias Topológicas em Membranas Solitônicas (caso abeliano)

Implementamos a teoria através da seguinte ação em $D = 5 + 1$:

$$S = \int d^6x \left(-\frac{1}{2(3!)} H_{MNP} H^{MNP} + g \varepsilon^{MNPQRS} \phi(z) H_{MNP} H_{QRS} + \frac{1}{2} \partial_M \phi \partial^M \phi + V(\phi) \right) \quad (5.1)$$

Nesta ação, $H_{MNP} = \partial_M B_{NP} + \partial_N B_{PM} + \partial_P B_{MN}$ ($M, N, P = 0, \dots, 5$) é o tensor intensidade de campo para o campo de Kalb-Ramond B_{MN} . O campo B_{MN} tem uma importante função em teoria de cordas: ele acopla-se de maneira matematicamente correta à folha-mundo da corda de maneira bastante similar ao acoplamento entre o campo vetorial de gauge A_M e a linha de universo de uma partícula pontual. O campo ϕ é real e pseudoescalar, e $V(\phi)$ é o termo de energia potencial que fornece um mecanismo de transição de fase:

$$V(\phi) = \lambda(1 - \cos \phi) \quad (5.2)$$

De fato, a solução para o campo ϕ para o potencial especificado acima é

$$\phi(z) = \pi + 2 \arcsin(\tanh \sqrt{\lambda} z) \quad (5.3)$$

para $\phi \in (0, 2\pi)$ quando $z \rightarrow \pm\infty$. Esta solução corresponde ao setor topológico que possui apenas um soliton [23, 24]. O segundo termo na ação (5.1) é um termo que generaliza o acoplamento que surge da anomalia da simetria de Peccei-Quinn [25] em $D = 3 + 1$, isto é, $\phi \rightarrow \phi + a$. Esta simetria é quebrada pelo termo de potencial escrito em termos do campo ϕ . Em uma transição de fase, apenas este último campo adquire valor esperado de vácuo (VEV) diferente de zero. Para o caso da ação (5.1) a transição de fase favorece o surgimento de domínios contendo diferentes fases do campo ϕ : de fato,

o vácuo da teoria contém vários mínimos desconectados, isto é, o potencial é minimizado quando $\phi_{vacuum} = 2\pi n$, onde n é um número inteiro. Os domínios criados são separados por hipersuperfícies solitônicas dinâmicas topologicamente estáveis. Neste sentido, estes objetos podem deprever o comportamento de membranas [26]. Para que isto aconteça corretamente, a dimensão do espaço-tempo é $D = 5 + 1$ e a hipersuperfície descreve um mundo de dimensão $D = 4 + 1$. Agora pode-se entender mais o segundo termo em (5.1) (considerando que ϕ apenas depende da coordenada z [23]) de maneira a obter novos termos via integração por partes. O primeiro termo obtido é um termo de derivada total e pode ser desconsiderado. O termo seguinte é identicamente nulo por causa da antissimetria do símbolo de Levi-Civita. Pode-se escolher um sistema de coordenadas adequado de maneira a obter $\phi = \phi(z)$. Esta é uma simplificação padrão em estudos de modelos contendo paredes de domínios [27]. Como o campo ϕ depende apenas da coordenada z . O termo topológico pode ser reescrito como segue:

$$S_{top.} = 3\alpha \int d^5x dz (\varepsilon^{3NPQRS} \partial_3 \phi(z) B_{NP} H_{QRS}) \quad (5.4)$$

Considera-se agora que o campo B_{MN} depende fracamente da coordenada z . A discussão a respeito da fraca dependência dos campos deste modelo na coordenada z está relacionada com método de separação de variáveis e finitude das integrais envolvidas. De maneira a entender melhor este aspecto pode -se analisar um exemplo. Toma-se a seguinte ação

$$S \sim \int dz \int d^5x \varepsilon^{MNPQR3} \partial_z \phi(z) B_{MN} \partial_P B_{QR}$$

e faz-se a separação usual de variáveis $B_{MN} \equiv b_{MN}(x) \alpha(z)$ para obter

$$S \sim \int dz \alpha^2(z) \partial_z \phi(z) \int d^5x \varepsilon^{MNPQR3} b_{MN}(x) \partial_P b_{MN}(x).$$

De maneira a obter uma ação efetiva em dimensionalidades menores para o campo

$b_{MN}(x)$ deve-se garantir que a integral acima na variável z seja finita. Isto dependerá da forma de $\alpha(z)$. Então, o significado da dependência fraca na coordenada z é que no limite de parede fina $\alpha(z) \rightarrow 1$ pois sabe-se que $\int dz \partial_z \phi(z) \rightarrow \int dz \delta(z)$ é finita. Se não é feito tal requerimento tem-se que $\int dz \alpha^2(z) \partial_z \phi(z) \sim \int dz \alpha^2(z) \delta(z) \sim \alpha^2(0)$ deve ser finita.

Portanto, considerando que B_{MN} depende fracamente da coordenada z , eq. (5.4) pode ser reescrita como:

$$S_{top.} = \int d^5x (k \varepsilon^{3NPQRS} B_{NP} H_{QRS}) \quad (5.5)$$

Esta última equação mostra que sobre a hipersuperfície surge um termo topológico efetivo com uma constante de acoplamento \mathbf{k} que possui dimensão canônica de massa. Esta constante de acoplamento é quantizada de várias maneiras [23, 28]. A teoria efetiva sobre a hipersuperfície é completamente 5-dimensional. Este termo é bastante similar ao termo de Chern-Simons [28], que é escrito em $D = 2 + 1$ com o campo vetorial de gauge A_μ :

$$S_{cs} = g \int d^3x \varepsilon^{abc} A_a F_{bc} \quad (5.6)$$

Entretanto, o termo em (5.5) é escrito somente com o campo tensorial antissimétrico B_{MN} . Tal tipo de termo foi usado para se estudar algumas peculiaridades da Radiação Cósmica de Fundo (CMBR) [29] no contexto do cenário de Randall-Sundrum [5]. É interessante agora estudar as propriedades da ação (5.1) em espaços-tempos de dimensão menor usando métodos de redução dimensional. O método de redução dimensional usado neste artigo concorda com o método usual de redução de Kaluza-Klein se restringimos o estudo somente aos modos-zero quando o raio da dimensão extra é muito pequeno. Nesta situação obtemos teorias efetivas contendo apenas campos não-massivos. Então, supondo que os campos da ação (5.1) são independentes da coordenada $x_M \equiv x_5$ a qual

não é a coordenada argumento do campo $\phi(z)$ e definindo

$$B_{P6} = V_P$$

$$B_{6P} = -V_P$$

$$V_{MN} = \partial_M V_N - \partial_N V_M$$

$$\varepsilon^{3NPQRS} \equiv \varepsilon^{NPQRS} \quad (5.7)$$

a ação (5.1) torna-se:

$$S = \int d^5x \left(-\frac{1}{4} V_{MN} V^{MN} - \frac{1}{2(3!)} H_{MNP} H^{MNP} + g \varepsilon^{MNPQR} \phi(z) V_{MN} H_{PQR} + \frac{1}{2} \partial_M \phi \partial^M \phi + V(\phi) \right)$$

Esta ação em $D = 4 + 1$ possui agora um campo vetorial de gauge V_M proveniente da redução, e contém ainda o campo real e pseudoescalar ϕ , que novamente pode gerar novas membranas solitônicas em dimensões menores. Neste caso, a dimensão do espaço-tempo é $D = 4 + 1$ e a hipersuperfície é um universo $D = 3 + 1$. Se observamos a teoria efetiva sobre a hipersuperfície obtemos que, reescrevendo o termo topológico da ação (5.8) como em (5.4) e (5.5),

$$S_{top.} = \int d^4x (k \varepsilon^{4\nu\alpha\rho\sigma} V_{\nu\alpha} B_{\rho\sigma}) \quad (5.8)$$

Pode-se notar que a teoria sobre a hipersuperfície é estritamente quadri-dimensional. Se o campo V_μ é identificado com o quadri-vetor potencial A_μ então obtemos a ação para o modelo $B \wedge F$ sobre a membrana [30]. Esta ação, sob certas condições pode fornecer um mecanismo de geração de massa topológica para o campo A_μ ou para o campo $B_{\mu\nu}$.

Partindo de (5.8), a discussão para dimensões mais baixas ($D = 3 + 1$ and $D = 2 + 1$),

usando os mesmos passos, levará à seguinte ação topológica:

$$S_{top.} = \int d^4x k [\varepsilon^{\mu\nu\alpha\rho} \phi(z) \partial_\mu \varphi \partial_\nu B_{\alpha\rho} + \varepsilon^{\mu\nu\alpha\rho} \phi(z) F_{\mu\nu} W_{\alpha\rho}] \quad (5.9)$$

Os campos φ and $W_{\alpha\rho} = \partial_\alpha W_\rho - \partial_\rho W_\alpha$ surgem como graus de liberdade provenientes da redução dimensional. Estes campos são definidos da mesma forma que em (5.7). Se trabalhamos com o primeiro termo de (5.9) na membrana, encontra-se uma teoria topológica diferente [31]:

$$S = \int d^3x (g \varepsilon^{abc} \partial_a \varphi B_{bc}) \quad (5.10)$$

Identificando novamente em (5.9), no segundo termo, o vetor W_μ com o campo vetorial de gauge A_μ , obtem-se a interação anômala entre o campo pseudoescalar ϕ e o campo de gauge A_μ . Este termo, rearranjado na membrana, se reduz ao termo de Chern-Simons escrito na equação (5.6), com uma constante de acoplamento quantizada [23].

5.3 Teorias Topológicas em Membranas Solitônicas (caso não-abeliano)

Teorias não-abelianas fornecem mecanismos alternativos de tratamento e quantização de Gravidade [28]. Recentemente, o estudo de teorias de gravitação independentes da métrica do espaço-tempo ganhou força [32]. Como aplicações dos resultados discutidos acima, mostraremos como obter termos topológicos não-abelianos induzidos sobre hipersuperfícies solitônicas. Estes tipos de estudos podem ser importantes no contexto de gravidade topológica em membranas. Neste caso, a membrana emerge a partir do mesmo mecanismo de transição de fase já discutido. Nesta descrição, considera-se a

seguinte ação:

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + V(\phi) + k \varepsilon^{\mu\nu\alpha\rho} \phi(z) F_{\mu\nu}^i F_{\alpha\rho}^i \right) \quad (5.11)$$

Nesta ação, $F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g f^{ijk} A_\mu^j A_\nu^k$, onde $i, j, k = 1, \dots, n$ e ϕ é uma campo pseudoescalar real. Como discutido antes, escrevendo o terceiro termo de 5.11) sobre a hipersuperfície, obtem-se a seguinte ação efetiva:

$$S = k \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\alpha} (\partial_\mu A_\nu^a A_\alpha^a + g f^{abc} A_\mu^a A_\nu^b A_\alpha^c) \quad (5.12)$$

Este termo é bastante similar ao termo de Chern-Simons não-abeliano. Como discutido por Deser e Jackiw [28], o termo de Chern-Simons não-abeliano não é invariante sob "large gauge transformations". Entretanto, este comportamento pode ser evitado se considera-se a quantização da constante de acoplamento desta teoria. O termo encontrado em (5.12) pode ser usado para se descrever gravidade em $D = 3$ da mesma maneira que nas referências [32, 28].

Outro modelo pode ser obtido partindo da seguinte ação em $D = 5$:

$$S = \int d^5x \left(\frac{1}{2} \partial_M \phi \partial^M \phi + V(\phi) + k \varepsilon^{MNPQR} \phi(z) H_{MNPQ}^i F_{QR}^i \right) \quad (5.13)$$

onde $H_{MNP}^a \equiv \partial_M B_{NP}^i + \partial_N B_{PM}^i + \partial_P B_{MN}^i + g' f^{ijk} A_M^j B_{NP}^k$ ($M, N, \dots = 0, \dots, 5$). Neste último caso, depois de simples cálculos obtem-se uma ação que possui um termo topológico não-abeliano efetivo do tipo $B \wedge F$:

$$S = k \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\rho} B_{\mu\nu}^a F_{\alpha\rho}^a \quad (5.14)$$

esta ação é considerada a base para tratamento de gravidade independente de métrica em $D = 4$ como teorias de campos topológicas e vinculadas.

5.4 Teorias Equivalentes em Membranas Solitônicas

Nesta seção discute-se um procedimento de construção de teorias equivalentes em membranas. Parte-se da seguinte ação em $D = 5$:

$$S = \int d^5x \left[\frac{1}{2} \partial_M \phi \partial^M \phi - V(\phi) - \frac{k}{2} \varepsilon^{MNPQR} \phi \partial_M B_{NP} F_{QR} - \frac{k'}{2} B^{MN} B_{MN} \partial_P V^P \right] \quad (5.15)$$

O campo ϕ ainda é responsável pelo surgimento da membrana solitônica, neste caso, uma 3-brane. O campo F_{MN} é o tensor intensidade para o campo vetorial de gauge A_M , ou seja, $F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M$ (estamos tratando o caso abeliano) e B_{MN} é um campo tensorial antissimétrico, o campo de Kalb-Ramond. O objeto vetorial V^M no quarto termo representa um parâmetro adicional no modelo, isto é, representa mais liberdades de gauge na teoria. Esta liberdade pode ser fixada escolhendo uma direção preferencial para a qual V^M aponta. Com uma escolha deste tipo pode-se quebrar a simetria $SO(1, 4)$ de Lorentz do modelo. Procedimentos similares foram feitos no contexto de gravidade topológica [33]. Outras linhas interessantes deste procedimento foram feitas em cenários com quebra de simetria de Lorentz [34].

No background da membrana solitônica tem-se que $\phi \equiv \phi(x_4)$, e escolhe-se $V^\mu = (0, 0, 0, 0, \phi)$ de tal maneira que os últimos termos da ação (5.15) podem ser rearranjados:

$$S \sim \int d^5x \left[\frac{k}{2} \varepsilon^{4NPQR} \partial_4 \phi(x_4) B_{NP} F_{QR} + \frac{k'}{2} \partial_4 \phi(x_4) B^{MN} B_{MN} \right] \quad (5.16)$$

Nota-se que esta última equação ainda é invariante sob $\phi \rightarrow \phi + a$. Fazendo a aproximação de parede fina, ou seja, $\partial_4 \phi(x_4) = \delta(x_4)$ e definido $g^2 = \frac{k'}{k}$ obtém-se

$$S \sim k \int dx_4 \delta(x_4) \int d^4x \left[\frac{1}{2} \varepsilon^{\nu\alpha\beta\lambda} B_{\nu\alpha} F_{\beta\lambda} + \frac{1}{2} g^2 B^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} \right], \quad (5.17)$$

onde foi feita a identificação $\varepsilon^{4\nu\alpha\beta\lambda} \equiv \varepsilon^{\nu\alpha\beta\lambda}$. A conclusão é que obtém-se o modelo

$B \wedge F$ -Maxwell em $D = 4$

$$S \sim \int d^4x \left[\frac{1}{2} \varepsilon^{\nu\alpha\beta\lambda} B_{\nu\alpha} F_{\beta\lambda} + \frac{1}{2} g^2 B^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} \right]. \quad (5.18)$$

Este modelo, como sabe-se, é equivalente a uma teoria de campo vetorial de gauge livre e não-massivo [35]. Em suma, chega-se neste resultado por uma quebra explícita da simetria de Lorentz $SO(1, 4)$ para a simetria menor $SO(1, 3)$ por meio da escolha de V^μ apontando para uma direção preferencial e a suposição de que $\phi \equiv \phi(x_4)$.

O procedimento explicado acima pode ser aplicado a outros tipos de teorias. Em particular, pode-se obter resultados similares para teorias em baixa dimensionalidade. A título de exemplo, considera-se os seguintes modelos em $D = 4$:

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) - k \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \phi \partial_\mu W_\nu F_{\alpha\beta} + k' W^\mu W_\mu \partial_\lambda V^\lambda \right] \quad (5.19)$$

$$S' = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) - k \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \phi \partial_\mu B_{\nu\alpha} \partial_\beta \varphi - \frac{k'}{2} B^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} \partial_\lambda V^\lambda \right] \quad (5.20)$$

nestes casos existem mais campos: W^μ é um campo de gauge abeliano no primeiro modelo e φ é um campo escalar real no segundo modelo. Estas duas teorias tem simetria de Lorentz $SO(1, 3)$. Novamente, escolhendo $V^\mu = (0, 0, 0, \phi)$ e $\phi \equiv \phi(x_3)$ quebra-se a simetria $SO(1, 3)$ para $SO(1, 2)$. No limite de parede fina obtém-se as seguintes teorias:

$$S \sim \int d^3x \left[\varepsilon^{abc} W_a F_{bc} - g^2 W^a W_a \right] \quad (5.21)$$

$$S' \sim \int d^3x \left[\varepsilon^{abc} B_{ab} \partial_c \varphi + \frac{1}{2} g^2 B^{ab} B_{ab} \right] \quad (5.22)$$

O primeiro modelo é chamado $B \wedge F$ -Maxwell em $D = 3$ o qual é equivalente a uma teoria de Maxwell livre e não-massiva. O último modelo é denominado $B\varphi$ -Klein-Gordon [31] o qual é equivalente a uma teoria de Maxwell livre e não-massiva ou ainda equivalente a

uma teoria de Klein-Gordon livre e não-massiva.

É interessante agora estudar as simetrias de gauge apresentadas por estes tipos de modelo. É bastante claro, por exemplo, que a ação (5.15) não é invariante sob as transformações de gauge usuais (considerando V_M como um campo de gauge):

$$\delta\phi = 0, \quad \delta A_M = \partial_M \alpha, \quad \delta V_M = \partial_M \bar{\alpha}, \quad \delta B_{MN} = \partial_{[M} \Lambda_{N]}. \quad (5.23)$$

De maneira a recobrar a simetria de gauge pode-se fazer uso do formalismo de Stuckelberg [36] simplesmente redefinindo os campos do modelo:

$$A^M \rightarrow A^M + \frac{1}{g} \partial^M \theta, \quad V^M \rightarrow V^M + \frac{1}{g'} \partial^M \bar{\theta}, \quad B_{MN} \rightarrow B_{MN} + \partial_{[M} \Gamma_{N]}. \quad (5.24)$$

Definindo novas transformações de gauge

$$\begin{aligned} \delta\phi = 0, \quad \delta A_M = \partial_M \alpha, \quad \delta\theta = -g\alpha, \quad \delta V_M = \partial_M \bar{\alpha}, \\ \delta\bar{\theta} = -g'\bar{\alpha}, \quad \delta B_{MN} = \partial_{[M} \Lambda_{N]}, \quad \delta\Gamma_N = -\Lambda_N, \end{aligned} \quad (5.25)$$

recobra-se a simetria de gauge do modelo. Uma característica importante do modelo é que a ação (5.15) contem dois campos de gauge, A_M e V_M e, portanto, a simetria de gauge para este modelo é do tipo $U(1) \times U(1)$. Simetrias deste tipo foram discutidas no contexto de modelos de supercondutores [37]. O ponto importante aqui é que quando se faz a escolha da direção para o campo V^M quebra-se também a simetria $U(1) \times U(1)$ para somente $U(1)$, ou seja, o formalismo de Stuckelberg pode ser aplicado na membrana para restaurar a simetria de gauge $U(1)$ residual. Os mesmos argumentos são válidos para outros tipos de teorias.

5.5 Discussões e Perspectivas

Nesta seção foi discutido como construir teorias topológicas e teorias equivalentes em membranas em várias dimensões do espaço-tempo. Na primeira parte, discutiu-se o surgimento de vários termos topológicos tipo Chern-Simons, no caso abeliano e não-abeliano, por meio de procedimentos de redução dimensional. Viu-se que a membrana quebra a simetria de Lorentz destes tipos de modelos. De maneira a produzir este resultado, a membrana solitônica do modelo foi simulada por um soliton tipo kink embutido em espaços-tempos de várias dimensões. Tais tipos de solitons aparecem no modelo devido uma quebra espontânea de uma simetria discreta específica, neste caso em questão, uma simetria do tipo Peccei-Quinn. Algumas outras características relacionados a estes tipos de modelos foram discutidas: quantização de constante de acoplamento, geração topológica de massa, gravidade topológica e relações com modelos $B \wedge F$, etc.

Na segunda parte deste trabalho, foi desenvolvido um procedimento de construção de modelos equivalentes em membranas. Foi construído, a partir de uma teoria em $D = 5$, o modelo $B \wedge F$ -Maxwell em $D = 4$ e, a partir de uma teoria em $D = 4$, os modelos $B \wedge F$ -Maxwell e $B\varphi$ -Klein-Gordon ambos em $D = 3$. O procedimento adotado consiste em quebrar explicitamente a simetria de Lorentz do modelo por meio de uma escolha de uma direção preferencial no espaço-tempo para o vetor V^λ presente no modelo. É interessante notar que no caso do modelo $B \wedge F$ -Maxwell, pode-se implementar através do formalismo de Stuckelberg uma simetria de gauge do tipo $U(1) \times U(1)$ que é quebrada para $U(1)$ na membrana devido a escolha da direção preferencial. Outra característica importante é que sempre se obtém na membrana teorias que são duais a modelos de campos livres e não massivos. De fato, este resultado é compatível com a idéia de localização de campos em membranas, onde os modos-zero (descritos por teorias não-massivas) descrevem os campos do Modelo Padrão de Partículas. Uma análise completa desta idéia deve ser interessante. Considera-se também importante a generalização destes resultados para o

caso de teorias não-abelianas. Neste caso, aplicações a estudos de gravidade e sistemas de quarks seriam possíveis.

Capítulo 6

Gravidade Topológica em Membranas

6.1 Introdução

Neste capítulo, mostra-se como construir Gravidade Topológica em um cenário contendo uma dimensão extra infinita e uma membrana fina do tipo função- δ . No formalismo de Plebanski, a conexão entre Teorias de Campos Topológicas e Relatividade Geral é feita por meio de vínculos expressos em termos de campos multiplicadores de Lagrange Φ . O detalhe importante aqui é que os vínculos são válidos para um espaço-tempo sem qualquer tipo de fronteira. No caso em questão neste trabalho, tem-se duas regiões distintas do espaço-tempo: a região $D = 5$ ("bulk") e o hiperplano $D = 4$ (3-brane) embutido em $D = 5$. Em qual região devem ser implementados os vínculos citados acima? A resposta é que se impomos o vínculos em $D = 5$ então pode-se obter a ação de Palatini nesta porção do espaço-tempo e também na membrana $D = 4$. O plano desta seção se resume em, primeiramente, introduzir uma modificação na ação de Plebanski de forma a adaptá-la ao contexto de membranas e discutir suas simetrias. Então revemos alguns aspectos da formulação de Plebanski de Gravidade Topológica e fazemos uma análise dos vínculos de nosso modelo. Finalmente, obtem-se a ação de Palatini para gravidade $D = 5$ juntamente com um novo termo. Este novo termo pode ser interpretado como a ação de Palatini

para Gravidade em $D = 4$ na membrana tipo função-*delta*. As discussões contidas neste capítulo são resultados do trabalho "Topological gravity localization on a delta-function like Brane" publicado na revista Modern Physics Letters A22: 2939-2946, 2007.

6.2 O Modelo

Gravidade topológica pode ser estudada por meio de teorias de campos topológicas e vinculadas. Aqui seguimos convenções introduzidas por Freidel *et al.* [7]. Portanto, considera-se caracteres gregos como índices de espaço-tempo, caracteres latinos representam índices internos de grupos, e "til" sobre ou sob os campos representa o fato destes serem densidades tensoriais. O modelo é baseado na seguinte ação em $D = 5$ dimensões:

$$S = \int d^5x \left[\tilde{B}_{ij}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^{ij} + \frac{1}{2} \Phi_{m\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{mijkl} \tilde{B}_{ij}^{\mu\nu} \tilde{B}_{kl}^{\rho\sigma} + L_{brane} + k (\partial_\alpha \varphi)^2 \tilde{B}_{ij}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^{ij} \right], \quad (6.1)$$

onde $L_{brane} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi)$. Esta ação é um funcional que depende de campos de gauge A_μ^{ij} com grupo de gauge $SO(4, 1)$, campos bivetorias $\tilde{B}_{ij}^{\mu\nu}$, campos multiplicadores de Lagrange $\Phi_{m\mu\nu\rho\sigma}$ e um campo real escalar φ . Os dois primeiros termos definem a ação de Plebanski em $D = 5$. O segundo e o terceiro termos representam a parte da ação que gera a membrana do modelo (3-brane). De fato, esta 3-brane é uma parede de domínio embutida em um espaço-tempo $D = 5$. Para isto, nós supomos $\varphi = \varphi(x_4)$ e usamos $V(\varphi) = \lambda(1 - \cos \varphi)$. O último termo na equação Eq.(6.1) é um termo topológico que fornecerá uma ação do tipo BF efetiva sobre a 3-brane em $D = 4$. É justamente este termo o responsável por gravidade topológica na membrana.

Feitas as primeiras apresentações é importante agora discutir as simetrias deste modelo. A primeira simetria tem característica discreta: a ação é invariante sob a transformação $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi$ (esta simetria é do tipo Peccei-Quinn). Esta simetria é importante porque, se quebrada espontaneamente, produzirá defeitos tipo kink. O defeito corre-

spondente ao setor topológico contendo somente um sóliton será a 3-brane do modelo (o modelo de campos escalares tratado aqui é o modelo de Sine-Gordon e, como se sabe, possui várias soluções solitônicas). O segundo tipo de simetria é relacionada com transformações gerais de coordenadas. Neste caso, esta simetria faz o papel da simetria $SO(4, 1)$ de gauge. A menos dos termos responsáveis pela membrana, a ação acima descrita é invariante por transformações gerais de coordenadas: os campos $\tilde{B}_{ij}^{\mu\nu}$ se transformam como densidades tensoriais de peso 1, enquanto que os campos multiplicadores de Lagrange se transformam como densidades de peso -1 (representado pelo "til" sobre o símbolo ' Φ '). O papel feito pela membrana é quebrar a simetria $SO(4, 1)$ em $D = 5$ de forma a induzir a simetria $SO(3, 1)$ em $D = 4$. Este fato não é surpresa se lembrarmos que em teorias de cordas tais características são naturais em modelos contendo D-branes.

6.3 Análise dos Vínculos

Antes de estudar a idéia principal deste trabalho, vamos rever rapidamente alguns aspectos da formulação de Plebanski de Gravidade Topológica. Detalhes mais rigorosos podem ser encontrados na referência [7]. Os campos $\tilde{B}_{ij}^{\mu\nu}$ são definidos da seguinte maneira:

$$\tilde{B}_{ij}^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \tilde{\epsilon}^{\mu\nu\alpha\beta\lambda} B_{\alpha\beta\lambda ij} \quad (6.2)$$

De maneira a escrever uma ação para Gravidade deve-se computar a variação da ação (6.1) com relação ao campo multiplicador de Lagrange Φ . Para tal, postula-se também a seguinte propriedade a ser obedecida pelo multiplicador de Lagrange:

$$\epsilon^{m\mu\nu\rho\sigma} \Phi_{m\mu\nu\rho\sigma} = 0. \quad (6.3)$$

Portanto, a variação da ação (6.1) fornece

$$\frac{\delta\Phi_{m\mu\nu\rho\sigma}}{\delta\Phi_{n\alpha\beta\gamma\lambda}}\epsilon^{mijkl}\tilde{B}_{ij}^{\mu\nu}\tilde{B}_{kl}^{\rho\sigma}=0. \quad (6.4)$$

Comparando a variação da Eq. (6.3) com a Eq. (6.4) obtém-se, para alguns coeficientes c_α^m , que

$$\epsilon^{mijkl}\tilde{B}_{ij}^{\mu\nu}\tilde{B}_{kl}^{\rho\sigma}=c_\alpha^m\epsilon^{\alpha\mu\nu\rho\sigma}. \quad (6.5)$$

Os coeficientes c_α^m então satisfazem:

$$c_\alpha^m=\frac{1}{5!}\epsilon_{\alpha\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{mijkl}\tilde{B}_{ij}^{\mu\nu}\tilde{B}_{kl}^{\rho\sigma}. \quad (6.6)$$

A maior importância da Eq. (6.6) pode ser vista em termos de um teorema introduzido por Freidel *et. al.* [7]: *Theorem: Em $D > 4$, um campo B geral satisfaz os vínculos escritos na Eq. (6.6) se e somente se ele for contruído em termos de tetradas. Em outras palavras, se B é não-degenerado e satisfaz a Eq. (6.6), então existem tetradas e_i^μ tais que

$$\tilde{B}_{ij}^{\mu\nu}=\pm|e|e_i^{[\mu}e_j^{\nu]}. \quad (6.7)$$

Na última equação, $|e|$ é o determinante da tetrada e_i^μ . Agora, é importante notar que os vínculos na Eq. (6.6) fornecem campos e_i^μ 5-dimensionais, ou seja, estamos impondo os vínculos no espaço-tempo em $D = 5$. Veremos agora as consequências para a física na membrana. Deve-se considerar que nas proximidades da membrana a métrica do espaço-tempo pode ser escrita em termos das coordenadas ξ^a e w (w é a distância medida partir do hiperplano) da seguinte maneira:

$$ds^2=\gamma_{ab}d\xi^ad\xi^b-dw^2. \quad (6.8)$$

Na última equação $\gamma_{ab} = g_{\mu\nu}x^{\mu}_{,a}x^{\nu}_{,b}$ é a métrica induzida na hipersuperfície $D = 4$ (esta métrica é construída com as tetradas discutidos no teorema acima). A equação do movimento para o campo φ , considerado estático e possuindo somente dependência na coordenada $x^5 \equiv w$ ($\varphi = \varphi(w)$), é dada por:

$$-\frac{d^2\varphi}{dw^2} + \frac{d}{d\varphi} \left[V(\varphi) - k (\partial_\alpha\varphi)^2 \tilde{B}_{ij}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^{ij} \right] = 0. \quad (6.9)$$

Substituindo $V(\varphi) = \lambda(1 - \cos\varphi)$ e desconsiderando flutuações devido aos campos $\tilde{B}_{ij}^{\mu\nu}$ e $F_{\mu\nu}^{ij}$ conclui-se que

$$-\frac{d^2\varphi}{dw^2} + \lambda \sin\varphi = 0, \quad (6.10)$$

cuja solução é a membrana solitônica do modelo (neste passo, a simetria $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi$ é espontaneamente quebrada, favorecendo o surgimento de hiperplanos de domínio, ou seja:

$$\varphi(w) = 4tg^{-1}exp\left(\sqrt{\lambda}w\right) \quad (6.11)$$

6.4 Teoria BF na Membrana

Vamos retornar para a discussão sobre a ação (6.1) e observar o seu último termo, isto é,

$$S_{brane} \sim k \int d^5x \left[\left(\frac{d\varphi(w)}{dw} \right)^2 \tilde{B}_{ij}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^{ij} \right]. \quad (6.12)$$

No limite de membrana fina temos $\frac{d\varphi(w)}{dw} \sim \delta(w)$. Então, a partir da Eq. (6.12) obtem-se uma ação do tipo BF efetivamente 4-dimensional:

$$S_{4d} \mapsto k' \int d^4x \left[\tilde{B}_{ij}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^{ij} \right]. \quad (6.13)$$

A interpretação é que, dentro das condições discutidas, uma teoria do tipo BF deve descrever a física no mundo 4-dimensional. É conveniente notar que a quebra espontânea da simetria discreta discutida aqui induz uma quebra explícita da simetria de gauge $SO(4, 1)$ para a simetria $SO(3, 1)$ na membrana. Os índices gregos e latinos são enumerados de 0 a 4 em $D = 5$. Pelo teorema declarado na Eq. (6.7) pode-se substituir na ação (6.1) o campo B pela decomposição em termos de tetradas reescrevendo-a efetivamente como

$$S_{eff.} = \pm \int d^5x \left[|e^{(5)}| e_I^{[M} e_J^{N]} F_{MN}^{IJ} + k' \delta(w) |e^{(4)}| e_i^{[\mu} e_j^{\nu]} F_{\mu\nu}^{ij} \right]. \quad (6.14)$$

Aqui escrevemos índices latinos maiúsculos de maneira a distinguir entre índices do espaço-tempo em $D = 5$ e índices do espaço-tempo em $D = 4$ (a mesma convenção é seguida para índices internos de grupo). O resultado é justamente a ação de Palatini para Gravidade $D = 5$ juntamente com um novo termo. Este novo termo é a ação de Palatini para Gravidade na 3-brane (uma membrana tipo função *delta*). A constante k' na ação acima carrega consigo informações respeito da dimensão extra, uma característica possivelmente útil para se entender neste contexto o problema de hierarquia de gauge. A semelhança entre o resultado (6.14) e aquele obtido por Dvali *et. al.* [38] deve ser notada. De fato, nosso resultado é uma interpretação topológica do trabalho de Dvali [38]. Naquele trabalho a ação (6.14) pode ser obtida por correções radiativas devido à matéria pre-existente localizada na membrana ou por específicos acoplamentos entre Gravidade e campos escalares. Esta última é a linha abordada aqui.

Existe outra maneira de obter o resultado (6.14). Considera-se a seguinte ação

$$S = \int dx^5 \left[\tilde{B}_{ij}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^{ij} + \frac{1}{2} \Phi_{m\nu\rho\sigma} \epsilon^{mijkl} \tilde{B}_{ij}^{\mu\nu} \tilde{B}_{kl}^{\rho\sigma} + L_{brane} + k \partial_\alpha \varphi \tilde{C}_{ij}^{\mu\nu\alpha} F_{\mu\nu}^{ij} \right], \quad (6.15)$$

onde o campo $\tilde{C}_{ij}^{\mu\nu\alpha}$ é definido como

$$\tilde{C}_{ij}^{\mu\nu\alpha} = \frac{1}{12} \tilde{\epsilon}^{\mu\nu\alpha\beta\lambda} C_{\beta\lambda ij}. \quad (6.16)$$

As simetrias desta última ação são as mesmas que as já discutidas no primeiro modelo. A membrana irá aparecer devido ao mesmo mecanismo também já discutido. Pode-se analisar o último termo da ação (6.15), ou seja,

$$S_{brane} \sim k \int d^5x \frac{d\varphi(w)}{dw} \tilde{C}_{ij}^{\mu\nu 4} F_{\mu\nu}^{ij}. \quad (6.17)$$

Considerando novamente o limite de membrana fina obtém-se novo termo tipo BF

$$S_{4d} \mapsto k' \int d^4x \left[\tilde{C}_{ij}^{\mu\nu 4} F_{\mu\nu}^{ij} \right]. \quad (6.18)$$

Agora, o detalhe mais importante. Se identificamos os graus de liberdade de $\tilde{C}_{ij}^{\mu\nu 4}$ com aqueles provindos da Eq. (6.7), ou seja, se

$$\tilde{C}_{ij}^{\mu\nu 4}|_{D=4} \equiv \tilde{B}_{ij}^{\mu\nu} = \pm |e^{(5)}| e_i^{[\mu} e_j^{\nu]}|_{D=5}, \quad (6.19)$$

pode-se reobter a ação (6.14). O procedimento de identificação estabelecido logo acima depende exclusivamente de $|e^{(5)}|$. Felizmente, um determinante 4-dimensional pode ser construído a partir deste. Aqui deve-se considerar que a nova constante k' na Eq. (6.14) depende da dimensão extra e novamente, esta característica pode ser de grande importância para se entender novos efeitos físicos em $D = 4$ no contexto de gravidade topológica.

6.5 Conclusões e Perspectivas

A conclusão mais importante deste trabalho é que pode-se construir um cenário de membranas no contexto de gravidade topológica por meio de teorias de campos topológicas e vinculadas. Por outro lado, usamos um mecanismo de quebra espontânea de simetria para gerar a 3-brane do modelo. O procedimento introduzido aqui depende exclusivamente de vínculos impostos no espaço-tempo $D = 5$. Então, obtem-se gravidade em $D = 4$ partindo da ação (6.1). em discussões a respeito da *realidade física* do formalismo de gravidade topológica, a natureza não-dinâmica dos graus de liberdade neste tipo de teoria é sempre citada. Ainda nestes termos, o modelo descrito aqui assemelha-se a outros modelos de localização de gravidade. Nestes outros modelos, alguns graus de liberdade *físicos* são efetivamente aprisionados na 3-brane. Entretanto, no contexto de gravidade topológica, é difícil afirmar se o mesmo mecanismo pode acontecer ou não. O único sinal que garante a existência de uma teoria 4-dimensional na membrana é matemático: simetria de gauge $SO(3,1) \Rightarrow$ teoria em $D = 4$.

Uma questão interessante é a constante cosmológica. Uma generalização da ação de Plebanski resulta na ação de Palatini para Relatividade Geral juntamente com um termo que representa constante cosmológica [39]. Um termo de constante cosmológica pode ser adicionado em $D = 5$. Entretanto, tal termo não é gerado na membrana por meio dos cálculos desenvolvidos aqui, o que não é razão suficiente para se concluir que o mundo em $D = 4$ não apresenta este tipo de interação. Do ponto de vista da teoria clássica tal resultado pode ser correto mas é bastante possível que correções quânticas façam surgir a constante cosmológica na membrana. Tal fato somente pode ser corretamente estudado por meio de tratamento quântico adequado. Nas linhas discutidas aqui, a geração, se possível, de constante cosmológica na membrana deve ser investigada. No contexto de gravidade topológica outro assunto interessante é o denominado "parâmetro de Immirzi"[40] e conseqüências relacionadas dentro do formalismo de membranas.

Um passo natural a ser seguido (motivação física) seria a tentativa de se construir uma versão topológica para o modelo de Randall-Sundrum [5]. As motivações por trás deste passo são várias: a possibilidade de quantização do cenário; alternativas para se resolver problemas do modelo padrão tais como o problema de hierarquia, etc;. A importância destes resultados está no fato de que é perfeitamente possível quantizar completamente modelos de gravidade topológica (embora novos problemas apareçam!). Até onde se sabe, consequências físicas relacionadas com existência de dimensões extras tem sido formuladas no contexto teorias de gravidade semi-clássica, não no contexto de modelos puramente quânticos. As consequências quânticas são bem-vindas e devem ser estudadas pelo menos por duas boas razões: i) resultados importantes e modernos podem ser reforçados (como os provindos do modelo de Randall-Sundrum) e ii) pode-se decidir a favor ou não dos formalismos de gravitação topológica. Acreditamos que estes que nossos resultados podem ser úteis em investigações futuras a respeito de gravidade quântica no background de membranas.

Capítulo 7

Mecanismos de Localização em Membranas

7.1 Introdução

Outro assunto extremamente importante em modelos de membranas está relacionado com mecanismos de localização de campos. Se o Universo vive em uma membrana embutida em um espaço-tempo onde $D > 4$ devemos ser capazes de construir todo o Modelo Padrão de partículas a partir de uma teoria de dimensões extras. Deste modo, o formalismo de membranas é completamente alternativo ao de Kaluza-Klein, inclusive até mais natural. Natural no sentido de se poder fornecer toda uma interpretação física ao processo de redução dimensional, coisa que não acontece no formalismo de Kaluza-Klein. Nesta parte faremos uma breve introdução ao processo de localização. Discutiremos essencialmente como se construir campos escalares e férmions quirais localizados na membrana. O modelo aqui apresentado trata apenas uma membrana, diferentemente do modelo de Randall-Sundrum. Além do mais, consideraremos que a membrana é um defeito topológico tipo kink embutido em um espaço-tempo onde $D = 5$. Tal tipo de discussão torna o modelo de membranas mais realístico, como foi dito acima, além de produzir um espaço-tempo

sem singularidades, como no caso do modelo de Randall-Sundrum [41].

A membrana é introduzida partindo da seguinte ação, onde se procura uma solução das equações de Einstein neste background:

$$S = \int d^5x \sqrt{-G} [2M^3 R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - V(\phi)]. \quad (7.1)$$

Na ação acima M é a constante de Planck em $D = 5$ e o campo ϕ gera a membrana do modelo. A equação do movimento para o campo ϕ suporta uma solução tipo kink mesmo em um background gravitacional. Para este caso, o ansatz para a métrica do espaço-tempo é:

$$ds^2 = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (7.2)$$

A menos do fator exponencial, a métrica acima preserva a invariância de Lorentz em $D = 4$. De maneira a simplificar este modelo supõe-se que o campo ϕ e a função A como dependentes apenas da dimensão extra y .

Para uma situação sem o background gravitacional é fácil mostrar que, para a função potencial $V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2$, o kink que modela a membrana é dado por $\phi(y) = v \tanh(ay)$ onde $a^2 = \frac{\lambda v^2}{2}$. Esta é uma solução para a equação do movimento para o campo escalar. As equações de Einstein para a métrica (7.2) são dadas por:

$$\frac{1}{2}(\phi')^2 - V(\phi) = 24M^3(A')^2, \quad (7.3)$$

e

$$\frac{1}{2}(\phi')^2 + V(\phi) = -12M^3 A'' - 24M^3(A')^2. \quad (7.4)$$

Somando as duas últimas equações e integrando duas vezes pode-se obter a função $A(y)$

considerando a solução de kink escolhida. O resultado é

$$A(y) = -\beta \ln \cosh(ay)^2 - \frac{\beta}{2} \tanh(ay)^2, \quad (7.5)$$

onde $\beta \equiv \frac{v^2}{36M^3}$. Pode-se mostrar que o fator exponencial construído com esta função é localizado em torno da membrana e para grandes valores de y se aproxima da solução de Randall-Sundrum [5].

A idéia agora é analisar a ação efetiva de vários tipos de campos no background dado pela métrica (7.2). Começaremos por um campo escalar real sem massa em $D = 5$. A questão é "O que acontece quando integramos a dimensão extra y ?". Em outras palavras, estamos interessados em fazer uma redução dimensional neste tipo de modelo. A ação para o campo escalar é dada por

$$S = \int d^5x \sqrt{-G} G^{MN} \partial_M \Phi \partial_N \Phi \quad (7.6)$$

onde $\Phi = \Phi(x, y)$ depende da dimensão extra como também das quatro dimensões tangentes à membrana. Para a métrica (7.2) a ação acima pode ser escrita da seguinte maneira:

$$S = \int dy d^4x e^{4A(y)} [e^{-2A(y)} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + \dots]. \quad (7.7)$$

Faz-se agora uma separação de variáveis no campo Φ , ou seja, $\Phi(x, y) = \varphi(x)\alpha(y)$. A ação efetiva agora torna-se

$$S = \int dy e^{2A(y)} \alpha(y)^2 \int d^4x \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi. \quad (7.8)$$

Nota-se claramente que existe uma parte da ação que apenas depende das dimensões tangentes à membrana. Somente pode-se interpretar esta parte como descrevendo a física em $D = 4$ de um campo escalar localizado na membrana (o fator exponencial é

localizado em torno da membrana) se a parte da integral acima dependente da dimensão extra for finita. Para tal devemos saber o comportamento da função $\alpha(y)$. Isto pode ser feito por meio da equação do movimento para o campo Φ que é dada por

$$\partial_M(\sqrt{-G}G^{MN}\partial_N\Phi) = 0. \quad (7.9)$$

Neste caso faz-se novamente a separação de variáveis no campo Φ considerando a métrica (7.2). Também considera-se que o campo $\varphi(x)$ oriundo da separação de variáveis satisfaça à $\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\varphi(x) = -m^2\varphi(x)$, a equação de Klein-Gordon em $D = 4$. Deste modo mostra-se que a função $\alpha(y)$ satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2\alpha}{dy^2} + 4A'\frac{d\alpha}{dy} = e^{-2A}m^2\alpha. \quad (7.10)$$

As soluções desta equação para qualquer m^2 serão interpretadas como os modos massivos de Kaluza-Klein se tornarem a ação efetiva (7.8) finita. Em particular, para $m^2 = 0$ (o modo-zero), a equação (7.10) possui $\alpha(y) = cte$ como uma solução. Neste caso a ação efetiva (7.8) é finita e diz-se que existe um modo não-massivo de um campo escalar localizado ("preso") na membrana.

Para o caso de férmions, deve-se analisar a equação de Dirac

$$\Gamma^M\nabla_M\Psi + f\phi\Psi = 0, \quad (7.11)$$

onde $\nabla_M = \partial_M + \frac{1}{4}\omega_{ABM}\Gamma^{AB}$ é a derivada covariante espinorial para o background (7.2) e ϕ representa a solução de kink (a membrana) descrita acima. O parâmetro f representa o peso do acoplamento tipo Yukawa entre Ψ (um espinor de Dirac em $D = 5$) e ϕ . As únicas componentes da conexão de spin ω_{ABM} são

$$\omega_{5\mu\nu} = -e^AA'\eta_{\mu\nu}. \quad (7.12)$$

Escrevendo $\Psi(x, y) = \eta(y)\psi(x)$ e considerando modos não-massivos encontra-se a equação de Dirac $\Gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0$ em $D = 4$. Neste caso η satisfaz

$$\eta' + 2A'\eta + f\phi\eta = 0, \quad (7.13)$$

para $\Gamma^5\psi = +\psi$ e

$$\eta' + 2A'\eta - f\phi\eta = 0, \quad (7.14)$$

para $\Gamma^5\psi = -\psi$. As soluções das equações acima são

$$\eta = (\cosh(ay))^{4\beta - fv/a} e^{\beta \tanh^2(ay)}, \quad (7.15)$$

para $\Gamma^5\psi = +\psi$ e

$$\eta = (\cosh(ay))^{4\beta + fv/a} e^{\beta \tanh^2(ay)}, \quad (7.16)$$

para $\Gamma^5\psi = -\psi$. Portanto, o modo de quiralidade negativa não pode ser localizado na membrana. Já o modo de quiralidade positiva, na condição de $f > 4a\beta/v$, pode ser localizado (a função η é localizada em torno da membrana). Esta é a maior importância deste tipo de mecanismo: a produção natural de férmions quirais no processo de redução dimensional. No caso do mecanismo de Kaluza-Klein, tal fato não ocorre, sendo o problema de quiralidade resolvido quando a dimensão extra é considerada como um "Orbifold".

O processo de localização para outros tipos de campos segue as mesmas regras aqui discutidas. O campo gravitacional é também localizável neste tipo de cenário [5]. No entanto, campos de gauge em geral não são passíveis de localização, sendo necessário dispor de mecanismos mais apropriados para tal.

7.2 Campos tensoriais antissimétricos em membranas

7.2.1 Introdução

Em cenários contendo dimensões extras no background de membranas um assunto bastante importante está relacionado com mecanismos de localização de vários campos com os mais variados spins. Tal importância é devida a uma simples motivação: baseando-se nesta idéia todas as características de um modelo efetivo em baixa dimensionalidade devem ser obtidas. Características tais como constantes de acoplamento e massas das partículas fundamentais dependem do tamanho da dimensão extra e este fato pode gerar novos insights para se entender alguns problemas apresentados pelo Modelo Padrão.

Existem pelo menos dois cenários diferentes de dimensões extras. O primeiro considera dimensões extras muito pequenas e compactas cujos efeitos em baixas energias não são observáveis. O segundo cenário considera dimensões extras com tamanho infinito que não são observáveis simplesmente pelo fato de não termos "permissão" (uma permissão energética) para caminhar ao longo das mesmas. a idéia é que nosso Universo $D = 4$ vive em uma hipersuperfície embutida em um espaço-tempo de dimensionalidade maior que 4. É interessante comparar estes dois cenários no que diz respeito a modelos de localização de campos. Por exemplo, relacionado aos campos vetoriais de gauge do Modelo padrão sabe-se que a localização deste tipo de campos em um cenário onde a dimensão extra é compacta não é favorecida devido a vínculos fenomenológicos impostos pelo Modelo Padrão [42]. No caso onde a dimensão extra é infinita não há localização de a menos que o campo de gauge acople-se com o dilaton [41].

O objetivo deste trabalho está relacionado com o campo Kalb-Ramond. Este campo aparece em teorias efetivas de modelos de supercordas em baixas energias e pode descrever tanto física de axions quanto torção em uma variedade Riemanniana. Sabe-se que este campo quando estudado no background de Randall-Sundrum possui um modo-zero

localizado extremamente suprimido pelo tamanho da dimensão extra [43]. Tal resultado levou aqueles autores a especular sobre torção do espaço-tempo em nosso Universo, mesmo com efeitos bastantes diminuídos. Relacionado com campos tensoriais de rank maior, sabe-se que são objetos bastante comuns em teorias contendo dimensões extras. Em procedimentos de redução dimensional tais campos devem surgir nas teorias efetivas em baixa dimensionalidade.

Por outro lado, em teorias de cordas o tratamento de axions utilizando campos tensoriais antissimétricos é bastante natural [44]. O axion é um bóson neutro de spin nulo bastante leve cuja comprovação de existência recebeu forte impulso depois de recentes resultados da colaboração PVLS [45] (ver entretanto Ref. [46]). Por conta disto tudo é importante estudar mecanismos de localização de campos tensoriais antissimétricos de gauge.

O objetivo deste trabalho é analisar mecanismos de localização de um campo de gauge tensorial em um cenário onde a dimensão extra tem tamanho infinito. De maneira a se impor tal condição se faz necessário implementar a membrana do modelo de uma maneira realística. Para tal, usamos defeitos tipo kink embutidos em um espaço-tempo de dimensão maior que 4. Utilizamos modelos contendo vários campos reais escalares cujas soluções descrevem membranas finas e membranas com estruturas internas [47].

A organização deste trabalho é a seguinte: na segunda seção soluções descrevendo membranas no background gravitacional são estudadas; na seção seguinte o campo de Kalb-Ramond é incluído no cenário; a quarta seção introduz a dinâmica do dilaton no modelo e, na quinta seção, o acoplamento entre o dilaton e o campo de Kalb-Ramond é estudado; então voltamos a tratar mecanismos de localização em membranas com estruturas internas na sexta seção e generalizamos os resultados para campos tensoriais de rank qualquer na sétima seção. No final discutimos resultados e perspectivas.

7.2.2 O Kink como Membrana

Nesta seção estudamos as soluções das equações de Einstein no background de uma membrana fina. A membrana é um kink embutido no espaço-tempo $D = 4 + 1$. Procuramos por soluções de espaço-tempo que preservam a simetria de Lorentz em $D = 4$. Estas soluções em geral descrevem espaços tipo AdS. A ação para o modelo é [41]:

$$S = \int d^5x \sqrt{-G} [2M^3 R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - V(\phi)]. \quad (7.17)$$

Na ação acima M é a constante de Planck em $D = 5$ e o campo ϕ gera a membrana do modelo. A equação do movimento para o campo ϕ suporta uma solução tipo kink mesmo em um background gravitacional como veremos. Para este caso o ansatz para a métrica do espaço-tempo é:

$$ds^2 = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (7.18)$$

Mesmo com a presença do fator exponencial, a métrica acima preserva a simetria de Lorentz em $D = 4$. Como o usual, índices representados por letras maiúsculas latinas tomam os valores 0, 1, 2, 3, 4 enquanto que índices gregos tomam os valores 0, 1, 2, 3. Para se simplificar o modelo assumimos que o campo ϕ e a função A dependem apenas da dimensão extra y .

Para uma situação sem a presença do campo gravitacional é fácil mostrar que, para a função potencial $V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2$, o kink que modela a membrana é dado por $\phi(y) = v \tanh(ay)$ onde $a^2 = \frac{\lambda v^2}{2}$. Esta é a solução para a equação do movimento do campo escalar. As equações do movimento para um espaço-tempo tipo AdS descrito acima são dadas por:

$$\frac{1}{2}(\phi')^2 - V(\phi) = 24M^3(A')^2, \quad (7.19)$$

e

$$\frac{1}{2}(\phi')^2 + V(\phi) = -12M^3 A'' - 24M^3 (A')^2. \quad (7.20)$$

Note-se que a linha significa derivação com relação à dimensão extra. É fácil ver que para a solução de kink obtida a função $A(y)$ deve ser

$$A(y) = -\beta \ln \cosh(ay)^2 - \frac{\beta}{2} \tanh(ay)^2, \quad (7.21)$$

onde $\beta \equiv \frac{v^2}{36M^3}$. Nota-se que o fator exponencial construído com esta função é localizado em torno da membrana para grandes valores de y , aproximando-se da solução de Randall-Sundrum [5]. Uma característica importante desta solução é que para pequenas perturbações da métrica descrita aqui é possível mostrar que existe um modo gravitacional não-massivo que vive na membrana [41].

7.2.3 O Campo de Kalb-Ramond

Nesta seção estudamos o comportamento do campo de Kalb-Ramond no background gravitacional descrito na última seção. O principal objetivo é tentar detectar modos-zeros não-massivos do campo de Kalb-Ramond localizados na membrana descrita neste modelo. É importante notar que a dimensão extra tem tamanho infinito, um detalhe importante para se chegar à conclusão deste trabalho. A ação para o modelo é dada por

$$S = \int d^5x \sqrt{-G} [2M^3 R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - V(\phi) - H_{MNL}H^{MNL}] \quad (7.22)$$

onde $H_{MNL} = \partial_{[M}B_{NL]}$ é o tensor intensidade para o campo de Kalb-Ramond. A equação do movimento para o campo B_{MN} é facilmente obtida. Primeiramente obtemos a seguinte equação:

$$\partial_Q(\sqrt{g}H_{MNL}g^{MQ}g^{NR}g^{LS}) = 0. \quad (7.23)$$

Agora considera-se a escolha de gauge $B_{\alpha 5} = \partial_\mu B^{\mu\nu} = 0$. Explicitando a parte dependente da dimensão extra pode-se reescrever a equação acima como

$$e^{-2A} \partial_\mu H^{\mu\gamma\theta} - \partial_y H^{y\gamma\theta} = 0. \quad (7.24)$$

Aqui pode-se separa as variáveis por meio do seguinte ansatz:

$$B^{\mu\nu}(x^\alpha, y) = b^{\mu\nu}(x^\alpha)U(y) = b^{\mu\nu}(0)e^{ip_\alpha x^\alpha}U(y), \quad (7.25)$$

onde $p^2 = -m^2$. Portanto pode-se reescrever H^{MNL} como $h^{\mu\nu\lambda}U(y)$, e a equação do movimento torna-se

$$\partial_\mu h^{\mu\nu\lambda}U(y) - e^{2A} \frac{d^2 U(y)}{dy^2} b^{\nu\lambda} e^{ip_\alpha x^\alpha} = 0. \quad (7.26)$$

A função $U(y)$ carrega todas as informações relacionadas à dimensão extra e obedece a seguinte equação:

$$\frac{d^2 U(y)}{dy^2} = -m^2 e^{-2A(y)} U(y). \quad (7.27)$$

Para o caso onde $m^2 = 0$ sua solução é bastante simples: $U(y) = cy + d$, onde c e d são constantes. Outra possível solução é $U(y) \equiv cte$. Agora é importante analisar a ação efetiva em $D = 4$ para o campo de Kalb-Ramond. O caminho escolhido é baseado em um procedimento simples de redução dimensional. Focamos nossa atenção ao modo não-massivo apenas. Para a métrica descrita na seção acima temos o seguinte:

$$S \sim \int d^5 x (H_{MNL} H^{MNL}) = \int dy U(y)^2 e^{-2A(y)} \int d^4 x (h_{\mu\nu\alpha} h^{\mu\nu\alpha}). \quad (7.28)$$

Dada uma solução para o fator, $A(y)$ (7.21), pode-se ver que para ambos os tipos de soluções para $U(y)$ obtidas acima, a integral na variável y na ação efetiva para o modo-zero de Kalb-Ramond não é finita. Isto pode ser facilmente visto se analisamos os seguintes gráficos: para a solução $U(y) = cy + d$ temos a Fig.(7-1) e para a solução

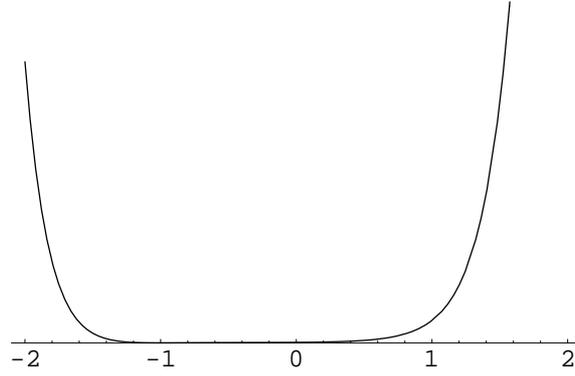


Figura 7-1: Plot de $U(y)^2 e^{2A(y)}$ com $A(y)$ dadas pela eq.(7.21) e $U(y) = cy + d$.

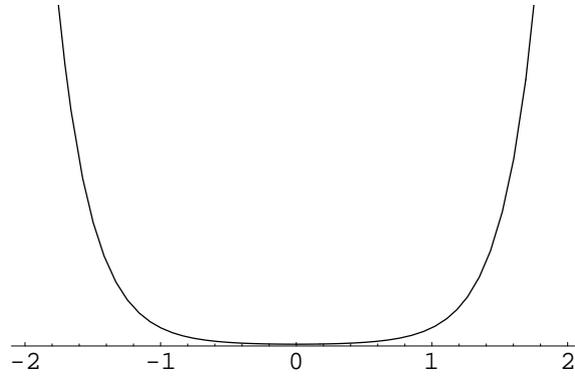


Figura 7-2: Plot de $U(y)^2 e^{2A(y)}$ com $A(y)$ dada pela eq.(7.21) e $U(y) \equiv cte$.

$U(y) \equiv cte$ temos a Fig.(7-2). Em ambos os casos a integral em y não é convergente.

Portanto, não há localização do campo de Kalb-Ramond na membrana nas condições citadas aqui.

7.2.4 O dÍlatoN

Devido ao resultado da última seção é natural perguntar se existe algum tipo de acoplamento entre o campo de Kalb-Ramond e algum outro tipo de campo de maneira a se obter localização de um modo-zero tensorial. Em analogia com trabalho de Kehagias e Tamvakis [41], onde mostra-se que o acoplamento do dilaton e o campo vetorial de gauge

produze localização deste, introduzimos aqui o acoplamento entre o dilaton e o campo de Kalb-Ramond. O acoplamento é motivado em teorias de supercordas em baixas energias [48]. No entanto, antes de se analisar a contribuição deste acoplamento deve-se obter uma solução das equações do movimento para o campo gravitacional no background do dilaton e da membrana. para tal, introduzimos a seguinte ação [41]:

$$S = \int d^5x \sqrt{-G} [2M^3 R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial\pi)^2 - V(\phi, \pi)]. \quad (7.29)$$

Note-se aqui que estamos trabalhando em um modelo com dois campos escalares reais. O campo ϕ novamente faz o papel de gerar a membrana enquanto que o campo π representa o dilaton. A função potencial agora depende de dois campos escalares. Assume-se um novo ansatz para a métrica do espaço-tempo:

$$ds^2 = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{2B(y)} dy^2. \quad (7.30)$$

As equações do movimento são dadas por

$$\frac{1}{2}(\phi')^2 + \frac{1}{2}(\pi')^2 - e^{2B(y)} V(\phi, \pi) = 24M^3 (A')^2, \quad (7.31)$$

$$\frac{1}{2}(\phi')^2 + \frac{1}{2}(\pi')^2 + e^{2B(y)} V(\phi, \pi) = -12M^3 A'' - 24M^3 (A')^2 + 12M^3 A' B', \quad (7.32)$$

$$\phi'' + (4A' - B')\phi' = \partial_\phi V, \quad (7.33)$$

e

$$\pi'' + (4A' - B')\pi' = \partial_\pi V. \quad (7.34)$$

De maneira resolver este sistema, usamos o denominado método do superpotencial $W(\phi)$ onde define-se $\phi' = \frac{\partial W}{\partial \phi}$, seguindo o caminho de Kehagias e Tamvakis [41]. A solução particular considerada segue partindo da escolha do potencial $V(\phi, \pi)$ e o superpotencial

$W(\phi)$ como

$$V = e^{\frac{\pi}{\sqrt{12M^3}}} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 - \frac{5}{32M^2} W(\phi)^2 \right\}, \quad (7.35)$$

e

$$W(\phi) = va\phi \left(1 - \frac{\phi^2}{3v^2} \right). \quad (7.36)$$

Desta maneira é fácil obter as equações diferenciais de primeira ordem cujas soluções são soluções das equações do movimento acima citadas:

$$\pi = -\sqrt{3M^3} A, \quad (7.37)$$

$$B = \frac{A}{4} = -\frac{\pi}{4\sqrt{3M^3}}, \quad (7.38)$$

$$A' = -\frac{W}{12M^3}. \quad (7.39)$$

As soluções para este novo conjunto de equações são dadas por:

$$\phi(y) = v \tanh(ay), \quad (7.40)$$

$$A(y) = -\beta \ln \cosh(ay)^2 - \frac{\beta}{2} \tanh(ay)^2, \quad (7.41)$$

$$\pi(y) = \frac{\beta}{\sqrt{3m^3}} (\ln \cosh(ay)^2 + \frac{1}{2} \tanh(ay)^2). \quad (7.42)$$

Da mesma forma como argumentado na Ref. [41], é possível mostrar que a linearização da geometria descrita nesta seção pode suportar modo-zero não massivo do campo gravitacional localizado ao longo da membrana, ainda no background do dilaton.

7.2.5 Revisando o campo de Kalb-Ramond

O principal objetivo desta seção é verificar se o acoplamento entre o dilaton e o campo de Kalb-Ramond é capaz de produzir localização deste tipo de campo de gauge. O acoplamento com o dilaton introduz a seguinte modificação na ação para o campo tensorial de gauge [49, 50]:

$$S \sim \int d^5x (e^{-\lambda\pi} H_{MNL} H^{MNL}). \quad (7.43)$$

Portanto, devemos analisar as equações do movimento do campo tensorial no background do dilaton. As novas equações do movimento são:

$$\partial_M (\sqrt{-g} g^{MP} g^{NQ} g^{LR} e^{-\lambda\pi} H_{PQR}) = 0. \quad (7.44)$$

Com a escolha de gauge $B_{\alpha 5} = \partial_\mu B^{\mu\nu} = 0$ e com a separação de variáveis $B^{\mu\nu}(x^\alpha, y) = b^{\mu\nu}(x^\alpha)U(y) = b^{\mu\nu}(0)e^{ip_\alpha x^\alpha}U(y)$ where $p^2 = -m^2$, obtemos equações diferenciais que nos fornecem as características associadas com a dimensão extra:

$$\frac{d^2U(y)}{dy^2} - (\lambda\pi'(y) + B'(y))\frac{dU(y)}{dy} = -m^2 e^{2(B(y)-A(y))}U(y). \quad (7.45)$$

Para o modo-zero, $m = 0$, uma solução particular da equação acima é simplesmente $U(y) \equiv cte$. Este resultado é suficiente para a discussão seguinte. A ação efetiva para o modo-zero em $D = 5$ é

$$S \sim \int d^5x (e^{-\lambda\pi} H_{MNL} H^{MNL}) = \int dy U(y)^2 e^{(-2A(y)+B(y)-\lambda\pi(y))} \int d^4x (h_{\mu\nu\alpha} h^{\mu\nu\alpha}). \quad (7.46)$$

Para $U(y)$ constante e dadas as soluções para $A(y)$, $B(y)$ e $\pi(y)$ como descritas na última seção, é possível mostrar claramente que a integral na variável y é finita se $\lambda > \frac{7}{4\sqrt{3}M^3}$, resultado que fornece a possibilidade de localização do modo-zero associado ao campo de Kalb-Ramond no background do dilaton.

É interessante analisar casos mais gerais. De fato, podemos tratar localização do campo de Kalb-Ramond introduzindo outra solução mais geral para $U(y)$. Partindo da eq. (7.45) com $m = 0$, temos a seguinte equação:

$$\frac{d^2U(y)}{dy^2} - (\lambda\pi' + B')\frac{dU(y)}{dy} = 0. \quad (7.47)$$

Se fazemos a seguinte mudança de variáveis na equação acima

$$\frac{dU(y)}{dy} = g(y), \quad (7.48)$$

podemos escrever uma solução para a nova função $g(y)$ na forma

$$g(y) = ke^{\lambda\pi(y)+B(y)}$$

onde

$$k = g(0)e^{-\lambda\pi(0)-B(0)}.$$

Então temos a seguinte solução para $U(y)$:

$$U(y) = k \int_{y_0}^y e^{\lambda\pi(y')+B(y')} dy'. \quad (7.49)$$

Usando as soluções para $\pi(y)$ (Eq. 7.40), $A(y)$ (Eq. 7.41) e $B(y)$ (Eq. 7.42), chegamos em

$$U(y) = k \int_{y_0}^y \cosh^{2\alpha}(ay') e^{\frac{\alpha}{2}\tanh^2(ay')} dy', \quad (7.50)$$

com

$$\alpha = (\lambda\sqrt{3M^3} - \frac{1}{4})\beta. \quad (7.51)$$

Podemos observar as características de $U(y)$ estudando o gráfico para $\cosh^{2\alpha}(ay') e^{\frac{\alpha}{2}\tanh^2(ay')}$

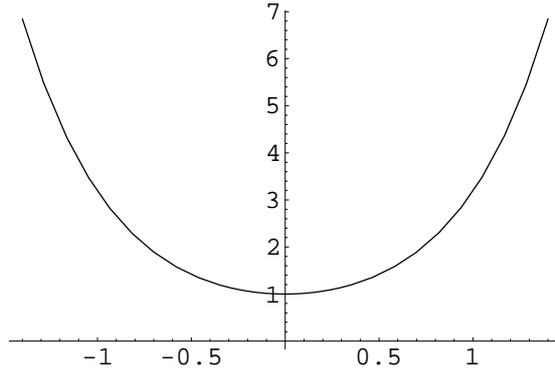


Figura 7-3: Plot de $\cosh^2(y)e^{\frac{1}{2}\tanh^2(y)}$

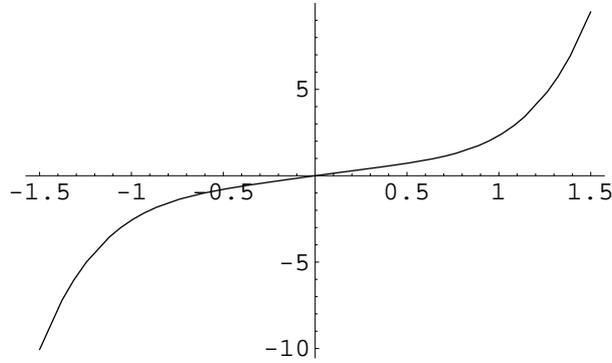


Figura 7-4: Plot de $\int_0^y \cosh^2(y')e^{\frac{1}{2}\tanh^2(y')} dy'$.

apresentado na Fig.(7-3),

onde analisamos somente a dependência na variável y adotando valores unitários para as constantes k , α e a . Para a ação efetiva devemos estudar o comportamento de $U(y)^2$. Na Fig. (7-4) mostramos o comportamento de $U(y)$. Na Fig. (7-5) temos o gráfico de $U(y)^2$.

A ação efetiva para o modo-zero tensorial em $D = 4$ é dada por

$$\int d^5x (e^{-\lambda\pi} H_{MNL} H^{MNL}) = \int dy U(y)^2 e^{-2A(y)+B(y)-\lambda\pi(y)} \int d^4x h_{\mu\nu\lambda} h^{\mu\nu\lambda}. \quad (7.52)$$

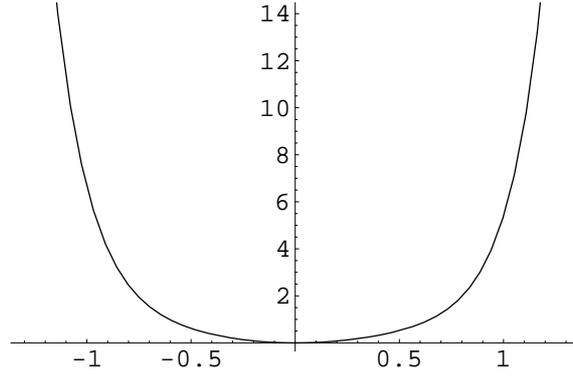


Figura 7-5: Plot de $U(y)^2$.

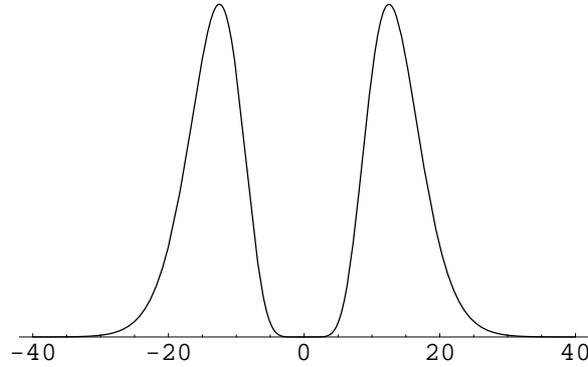


Figura 7-6: Mostrando a convergência da parte da ação efetiva dependente de y .

Devido às relações guardadas entre $B(y)$, $\pi(y)$ e $A(y)$, a ação efetiva é reescrita como

$$\int dy U(y)^2 e^{A(\lambda\sqrt{3M^3} - \frac{7}{4})} \int d^4x h_{\mu\nu\lambda} h^{\mu\nu\lambda}. \quad (7.53)$$

A integral na variável y é convergente se e somente se a constante λ assume valores tais que $\lambda > \frac{7}{4\sqrt{3M^3}}$.

Combinando esta função exponencial com $U(y)^2$ na ação efetiva pode-se construir a Fig. (7-6). Deste dado pode-se inferir sobre a convergência da ação efetiva (7.53). Dentro destas condições podemos garantir a localização de um modo-zero tensorial associado ao campo tensorial de gauge de Kalb-Ramond.

7.2.6 Membrana com estruturas internas

Membranas com estruturas internas podem ser descritas por meio de modelos de dois campos escalares reais. De fato, na ref. [51], Bazeia *et. al.* introduziu um modelo que suporta paredes de Bloch, objetos que são presentes em sistemas ferromagnéticos [52], e que já possuem estruturas internas. Seguindo idéias onde paredes de domínio são utilizadas para simular membranas em cenários onde o campo escalar acopla-se com o campo gravitacional, Bazeia e Gomes propuseram a membrana de Bloch [47]. Este modelo de membrana pode ser uma alternativa ao modelo de membrana infinitamente fina que, como comentando em [53], é uma construção bastante artificial.

Pelo que sabemos, não existe estudo prévio sobre localização de campos neste tipo de membrana. Mas podemos citar, entretanto, recente trabalho de autoria de Gomes [54], o qual estuda localização de **gravidade** na membrana de Bloch.

7.2.7 Localização do campo de Kalb-Ramond em membranas com estruturas internas

Nesta seção deixamos de lado a discussão associada ao dilaton e voltamos a atenção ao estudo de um modelo de dois campo escalares no espaço-tempo $ds^2 = e^{2A(y)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2$. A questão é a mesma: este modelo aprisiona modos não massivos do campo de Kalb-Ramond? A diferença aqui é que a membrana possui estruturas internas com explicado na Ref. [47]. Pode-se ver na Fig. (7-7) as formas das soluções para um modelo contendo dois campos escalares. Obtem-se uma membrana que contém estruturas internas devido ao campo escalar χ . Esta estrutura pode gerar novos tipos de defeitos no interior da membrana gerada pelo campo ϕ [51]. O modelo é basicamente descrito pela seguinte ação:

$$S = \int d^4x dy \sqrt{-g} \left[\frac{1}{4}R + \frac{1}{2}\partial_a\phi\partial^a\phi + \frac{1}{2}\partial_a\chi\partial^a\chi - V(\phi, \chi) \right], \quad (7.54)$$

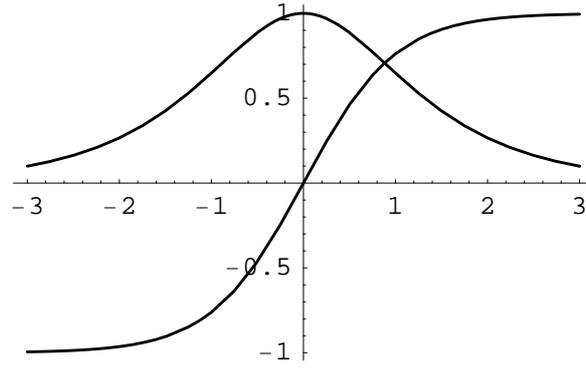


Figura 7-7: Mostrando a convergência da parte da ação efetiva dependente de y .

onde a métrica é

$$ds^2 = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (7.55)$$

As soluções das quais necessitamos para se simular a membrana são dadas por:

$$\phi(x) = \tanh(2rx) \quad (7.56)$$

$$\chi(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{r} - 2 \operatorname{sech}(2rx)} \quad (7.57)$$

Seguindo os mesmos passos já discutidos nas seções anteriores podemos encontrar o fator exponencial como dado por (r é um parâmetro do modelo)

$$\exp[2A(y)] = \cosh^{-4}(2ry) \exp\left[\frac{2}{9r}(1 - 3r) \tanh^2(2ry)\right]. \quad (7.58)$$

Para a ação efetiva em $D = 4$ do campo de Kalb-Ramond devemos tomar a inversa deste fator. Para a função $U(y)$ constante já discutida obtemos o resultado de não-localização do modo tensorial não-massivo.

7.3 Conclusões

Neste trabalho fizemos um estudo de localização de modos-zeros de campos de gauge tensoriais em vários tipos de membranas. Iniciamos o estudo analisando o campo de Kalb-Ramond. Em um primeiro caso, observamos a contribuição da geometria do espaço-tempo no comportamento de um possível modo-zero. Escolhemos uma geometria tipo AdS (no limite onde $|y| \rightarrow \infty$) gerada por um modelo de campos escalares reais em $D = 5$. Mostramos que as soluções obtidas para este modelo não garantem a existência de modos-zero presos na membrana. A razão por trás deste fato está relacionada ao tamanho infinito da dimensão extra, característica que faz com que a ação efetiva para o campo de Kalb-Ramond não seja convergente em $D = 4$.

No passo seguinte, adicionamos o campo do dilaton através de um acoplamento com o campo de Kalb-Ramond de maneira a avaliar se este novo ingrediente produz modos-zero normalizáveis. A resposta que encontramos é positiva dentro de certas imposições feitas sobre a constante de acoplamento λ .

Depois desta parte, fizemos um estudo rápido de localização do campo de Kalb-Ramond em membranas de Bloch, objetos que possuem estrutura interna naturalmente. Encontramos novamente resposta negativa na tentativa de se localizar modos não-massivos tensoriais.

Na presença do background do dilaton temos localização de modos-zeros. De certa maneira, os resultados para o campo de Kalb-Ramond sem a contribuição do dilaton são corroborados por estudos análogos no cenário de Randall-Sundrum onde a dimensão extra é compacta [43]. Neste caso existe localização de modos tensoriais não-massivos, mas extremamente suprimidos pelo tamanho da dimensão extra. Efetivamente, no cenário de Randall-Sundrum não há dinâmica para o campo de Kalb-Ramond em $D = 4$.

Capítulo 8

O Espaço-tempo como um Sólido Deformável

8.1 Introdução

A idéia descrevendo algumas semelhanças entre o espaço-tempo e a dinâmica dos corpos deformados não é nova. Existem autores que discutiram estas observações algumas décadas atrás. a idéia geralmente discutida está relacionada com o real significado do espaço-tempo: pode este ser quantizado em termos dos mesmos moldes em que se trabalha nestes dias modernos (o método canônico e outros métodos)? Se o espaço-tempo pode ser pensado como um tipo de fluido, como podemos identificar seus constituintes fundamentais (um cristal real, de um ponto de vista macroscópico, parece-se com um continuum, mas de um ponto de vista microscópico é constituído de pequenas partes mais fundamentais: átomos e moléculas)? Se estas idéias de algum modo fazem sentido então talvez não seja correto quantizar o espaço-tempo usando os procedimentos padrões. Neste sentido, o espaço-tempo tal como observamos e tentamos decrever seria uma entidade secundária, originário de uma coletividade de objetos mais fundamentais. A primeira tentativa de realização destas idéias surgiu com o trabalho de Sakharov [1] relacionado com o que

se conhece atualmente como "Gravidade Emergente". Seguindo esta linha, a teoria de Einstein surge após uma quantização direta de uma teoria que contém apenas campos de matéria. A dinâmica do campo gravitacional é gerada (um efeito já considerado secundário) por meio de correções radiativas na expansão perturbativa da teoria. Várias linhas de pesquisa foram iniciadas através dos anos derivadas do trabalho de Sakharov (um exemplo é o formalismo denominado "Gravidade Estocástica"[55]). Por outro lado, mais recentemente, Ted Jacobson fez uma contribuição no sentido de se entender as equações de Einstein de um ponto de vista termodinâmico [56]: as equações de Einstein são equações de estado para o espaço-tempo. Esta conclusão sugere fortemente que o espaço-tempo pode ser realmente comparado a um tipo especial de corpo deformável. É justamente com base nestas linhas de pensamento que propomos neste trabalho analisar três sinais apontando nesta direção, ou seja, que o espaço-tempo é um tipo de sólido deformável. O primeiro sinal está relacionado com as deformações do espaço-tempo. O segundo uma possível origem "elástica" para a ação de Einstein-Hilbert, e o terceiro sinal mostra uma relação a Lei de Newton da Gravitação e a Lei de Hooke da Elasticidade. De maneira de discutir estes sinais modelamos o espaço-tempo por meio de uma congruência de curvas bastante específica em cada caso discutido: por cada ponto do espaço-tempo passa uma curva que compõe a congruência. As características destas curvas podem ser estudadas por meio da Equação de Landau-Raychaudhuri [57, 58, 59] o que pode revelar se o espaço-tempo, como modelado acima, é ou não é uma variedade que possui curvatura. É importante notar que é bastante comum em Física o estudo de sistemas contínuos por meio de métodos de discretização. No processo de quantização canônica de uma teoria de campos, por exemplo, tratamos o campo como uma coleção de osciladores harmônicos em constante interação e postulamos algumas regras para se construir o espectro físico da teoria. Como realizar o mesmo procedimento para o espaço-tempo? O procedimento usual é baseado na métrica do espaço-tempo $g_{\mu\nu}$ que é um campo tensorial.

Novamente tenta-se justamente o mesmo procedimento de discretização para este campo. O resultado é bastante conhecido pela comunidade: gravidade é não-renormalizável. Entretanto, nota-se que $g_{\mu\nu}$ não representa o espaço-tempo por ele mesmo. A métrica é um campo que depende das *coordenadas* do espaço-tempo. Um exemplo pode ajudar. Considere um sólido com uma rede cristalina bem definida. Sabe-se que existem algumas excitações deste sólido denominadas "fónons". Estas excitações podem ser estudadas por meio de uma teoria de campos escalares no limite do contínuo. Neste caso o que é o "espaço-tempo"? Podemos escolher um simples átomo da rede cristalina para servir de sistema de referência para se medir distâncias e tempos. O campo escalar como excitação coletiva irá depender do espaço-tempo de acordo com a escolha de referencial feita. Por conta disso, declaramos que o espaço-tempo é a própria rede cristalina e do ponto de vista microscópico é discretizado porque a rede é constituída de "átomos". A conclusão a que se quer chegar é que modelar o espaço-tempo por meio de uma congruência de curvas requer associar a cada curva uma "partícula fundamental". As linhas-mundo de tais partículas irão compor a congruência que preenche a variedade do espaço-tempo. Vamos continuar a discussão ainda usando o exemplo de um sólido real e sua rede cristalina associada. Por causa do fato da rede cristalina ser composta de vários átomos sabemos como computar distâncias, ou seja, temos uma métrica definida em todos os pontos no limite do contínuo. Agora, qual campo é mais fundamental neste limite? O campo escalar descrevendo as excitações da rede ou a métrica do espaço-tempo? Declaramos que o campo mais fundamental é o campo escalar porque ele está relacionado diretamente com os átomos componentes da rede cristalina. Estes átomos são verdadeiros sistemas de referência no sentido de que são sistemas de referência associados à matéria: a noção física de distância vem depois da noção física de matéria, sendo a métrica do espaço-tempo um objeto secundário, portanto. Na discussão que se segue iremos considerar o espaço-tempo como um tipo de sólido para o qual pode-se definir uma rede de "partículas". Em teorias

de campos já fazemos isto. Nós consideramos campos de gauge, a métrica e campos espinoriais como campos fundamentais definidos em todos os pontos do espaço-tempo. O método que seguiremos aqui considera qualquer tipo de campo com fundamental, exceto a métrica do espaço-tempo. Estes campos fundamentais nos fornecerão a noção física de "espaço-tempo" (a noção de métrica) no sentido discutido acima. A consequência desta é que se queremos estudar como se dão as deformações do espaço-tempo acabamos por fazer emergir as equações de Einstein. A organização deste trabalho é a seguinte: na primeira seção fazemos uma revisão da equação de Landau-Raychaudhuri. A segunda parte trata dos sinais mostrando que o espaço-tempo se comporta como um corpo que possui "elasticidade". Finalmente, discutimos os significados destes sinais e perspectivas.

8.2 A Equação de Landau-Raychaudhuri

A equação de Landau-Raychaudhuri é uma equação que descreve o comportamento de uma congruência de curvas. Ela é usualmente utilizada para se estudar e estabelecer singularidades no espaço-tempo. Considere uma congruência de curvas preenchendo a variedade do espaço-tempo. Se existe expansão, distorção e rotação relativa entre as curvas da congruência então a variedade descrita pela congruência possui curvatura. Para os propósitos deste trabalho usaremos a equação de Landau-Raychaudhuri para estudar curvas tipo tempo ou tipo luz, dependendo do sinal discutido neste texto. Então, temos respectivamente

$$\frac{d\Theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\Theta^2 - (\sigma^{ab})^2 + (\varpi^{ab})^2 - R_{cd}\xi^c\xi^d \quad (8.1)$$

e

$$\frac{d\Theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\Theta^2 - (\hat{\sigma}^{ab})^2 + (\hat{\varpi}^{ab})^2 - R_{cd}\kappa^c\kappa^d, \quad (8.2)$$

onde τ , λ são os parâmetros usados para descrever as curvas que compõem a congruência. ξ^c e κ^c são os vetores tangentes às curvas (geradores da congruência) e são, naquela ordem, vetores tipo tempo e tipo luz. Θ é um escalar e descreve a expansão do volume gerado pela congruência, $\sigma^{ab}/\widehat{\sigma}^{ab}$ mede a distorção do volume e $\varpi^{ab}/\widehat{\varpi}^{ab}$ mede a rotação relativa entre as curvas. No caso deste trabalho, estaremos interessados em pequenas distorções de volume de tal maneira que os termos quadráticos na equação de Landau-Raychaudhuri podem ser desconsiderados (são como correções de segunda ordem). Nestas condições, a equação de Landau-Raychaudhuri pode ser facilmente integrada fornecendo o escalar de expansão em função do tensor de Ricci:

$$\Theta = -\tau R_{cd}\xi^c\xi^d \equiv -\lambda R_{cd}\kappa^c\kappa^d. \quad (8.3)$$

Os objetos que aparecem na equação de Landau-Raychaudhuri podem ser obtidos a partir de uma decomposição cinemática de tensores gerais. Um tensor geral pode ser decomposto em uma parte simétrica mais uma parte antissimétrica:

$$B_{ab} = B_{(ab)} + B_{[ab]}. \quad (8.4)$$

A parte antissimétrica é associada com a medida da rotação da congruência. A parte simétrica pode ainda ser decomposta em um traço (o escalar de expansão) e uma parte simétrica sem traço associada com a medida da distorção do volume. A parte simétrica inteira será identificada com o tensor de deformação do espaço-tempo, em analogia com o método da Mecânica dos Corpos Deformáveis.

8.3 Primeiro sinal: as deformações do espaço-tempo

Considere uma pequena região do espaço-tempo contendo o ponto P . Esta região define o elemento de volume dV . A questão aqui é como estudar as deformações deste volume causadas por algum agente externo. Uma maneira de se fazer isto é por meio da derivada de Lie. De fato, se tomamos o volume V e o propagamos usando uma congruência de curvas integrais obteremos o volume modificado V' . A diferença entre estas duas configurações nos fornece uma maneira de se medir a deformação total. Com isto em mente postulamos a seguinte ação para pontos do espaço-tempo:

$$S = k \int dV. \quad (8.5)$$

O volume descrito acima é justamente a forma de volume Riemanniana, invariante sob transformações gerais de coordenadas. A constante k tem a dimensão necessária para fornecer a dimensão correta para a ação descrita acima, que é "energia \times tempo". Esta ação é bastante diferente das ações usuais estudadas em teoria de campos porque nenhuma densidade lagrangeana foi assumida "a priori". As ações usuais carregam informações de energia associada aos campos distribuídos ao longo de todo o espaço-tempo e parece que isto não acontece com nossa ação proposta acima. Este fato não é problema se nos lembramos da discussão feita na introdução acima: o volume na realidade encobre parte da rede associada com algum campo específico. Isto significa que o volume deste espaço-tempo carrega energia associada com a rede. Agora minimizamos a ação proposta da seguinte maneira: tomamos sua derivada de Lie e requeremos que o resultado seja estacionário, como no procedimento usual. Logo, a equação do movimento para o espaço-tempo associado com a região especificada é

$$\delta_{Lie} S = k \int \Theta dV = 0, \quad (8.6)$$

onde Θ é o escalar de expansão associado ao volume dV . Usando a equação de Landau-Raychaudhuri nas condições citadas na primeira seção, ou seja, em uma situação onde $\sigma^{ab} = \varpi^{ab} = 0$, então temos $\Theta = -\lambda R_{ab} \kappa^a \kappa^b$. Substituindo este resultado de volta na equação de movimento acima obtemos

$$-k \int \lambda R_{ab} \kappa^a \kappa^b dV = 0. \quad (8.7)$$

Podemos estabelecer a igualdade acima para todo e qualquer vetor nulo κ^a (estamos assumindo aqui que a congruência é composta de curvas tipo luz, ou seja, as partículas fundamentais da rede não possuem massa), isto é,

$$R_{ab} = f(g)g_{ab}, \quad (8.8)$$

onde $f(g)$ é uma função que apenas depende da métrica do espaço-tempo. Esta função pode ser facilmente encontrada requerendo o anulamento da divergência covariante da última equação (uma espécie de conservação da deformação) o que leva ao resultado

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} \pm \Lambda g_{ab} = 0, \quad (8.9)$$

o qual é justamente o lado da equação de Einstein correspondente à geometria. Conclusão: quando deformamos o volume do espaço-tempo, *a equação de Einstein nos fornece um meio para entender tais deformações.*

8.4 Segundo sinal: A origem elástica da ação de Einstein-Hilbert

Considere agora o seguinte funcional o qual será identificado com uma ação:

$$S = k \int d^4x \sqrt{g} \Theta. \quad (8.10)$$

Pode-se ver claramente que este funcional obedece ao requerimento de ser invariante sob transformações gerais de coordenadas pelo fato do volume especificado ser o volume Riemanniano e a quantidade Θ é um escalar, neste caso, o escalar de expansão de volume. O significado deste funcional é o seguinte: ele tem a mesma forma matemática da deformação linear do volume de um determinado "sólido". Agora, o escalar de expansão é dado por $\Theta = -\tau R_{ab} \xi^a \xi^b$ nas condições já citadas (agora para uma congruência de curvas tipo tempo, ou seja, para o caso onde as partículas fundamentais da rede são massivas). A métrica do espaço-tempo pode ser decomposta como $g_{ab} = h_{ab} + \xi_a \xi_b$. Então, o escalar de expansão pode ser reescrito como $\Theta \sim -\tau R_{ab} g^{ab} \equiv -\tau R$. Substituindo este resultado no funcional definido acima chega-se a

$$S \sim -k \int d^4x \tau \sqrt{g} R, \quad (8.11)$$

que é justamente a ação de Einstein-Hilbert multiplicada pelo fator τ (parâmetro das curvas). Entretanto, no procedimento de minimização padrão faz-se uma variação funcional da ação para se chegar às equações do movimento. O parâmetro τ não possui variação funcional e, portanto, as equações do movimento não são alteradas. A conclusão desta seção é que a minimização da ação de Einstein-Hilbert está relacionada com a minimização das deformações de volume de um sólido específico, ou seja, o "sólido" do espaço-tempo.

8.5 Terceiro sinal: A lei de Newton e a lei de Hooke

Considerando as conclusões das seções acima é natural perguntar se o espaço-tempo obedece a alguma relação matemática similar às equações que descreve fenômenos relacionados com corpos deformáveis. A resposta é positiva como veremos. Considere que o espaço-tempo é um tipo especial de corpo deformável. Postularemos que para deformações lineares (para pequenos deslocamentos dos "constituintes" deste corpo) podemos escrever uma lei de Hooke que conecta o tensor de deformação ε^{ab} às tensões τ^{ab} aplicadas sobre o corpo em discussão (o espaço-tempo). Os tensores ε^{ab} e τ^{ab} são simétricos, em analogia com as definições destes objetos em Mecânica dos corpos deformáveis. Então a lei de Hooke é:

$$\tau^{ab} = -k\varepsilon^{ab}. \quad (8.12)$$

O tensor de deformação ε^{ab} é definido, neste caso, em termos da parte simétrica da decomposição cinemática do tensor $B^{ab} = \nabla^a \kappa^b$, importante na construção da equação de Landau-Raychaudhuri. Desta maneira, seu traço obedecerá à seguinte regra:

$$Tr\varepsilon^{ab} = \varepsilon_a^a \equiv \Theta = -\lambda R_{ab} \kappa^a \kappa^b. \quad (8.13)$$

Note-se aqui o tipo de relação entre o tensor de deformação ε^{ab} e o tensor de Ricci R^{ab} : é o traço do tensor de deformação que está relacionado com o tensor de Ricci. Este fato, em certo sentido, denota que o tensor de deformação é um objeto "maior" que o tensor de Ricci. Tomando o traço na expressão para a lei de Hooke obtemos

$$\tau_a^a = k\lambda R_{ab} \kappa^a \kappa^b, \quad (8.14)$$

onde usamos a relação para o traço do tensor de deformação. Nota-se agora que o lado das deformações na Lei de Hooke é relacionado com a geometria do espaço-tempo. O

lado das tensões deve ser, portanto, relacionado o conteúdo material atuando sobre o espaço-tempo. Esta afirmação é razoável no sentido de que se queremos equacionar da mesma maneira os dois lados da lei de Hooke devemos requerer que o traço do tensor de tensões obedeça a $\tau_a^a = \lambda T_{ab} \kappa^a \kappa^b$. Este fato não é difícil de aceitar se nos lembramos da relação entre o tensor de deformação e o tensor de Ricci discutida anteriormente. De outra maneira, pode chegar nesta conclusão pela substituição de $\kappa^a \kappa^b$ pela métrica do espaço-tempo juntamente com as quantidades que definem projeções no espaço-tempo. Isto resultará em um traço, como queremos. O parâmetro λ entra na expressão por razões dimensionais. Por conta disto, vê-se que o tensor de tensão é, da mesma maneira que o tensor de deformações, um objeto "maior" que T^{ab} . Equacionando desta maneira deformações e tensões chegamos em

$$(R_{ab} - k^{-1}T_{ab}) \kappa^a \kappa^b = 0, \quad (8.15)$$

que é válida para todo vetor nulo κ^a , ou seja,

$$R_{ab} - k^{-1}T_{ab} = f(g)g_{ab}. \quad (8.16)$$

A função $f(g)$ novamente depende somente da métrica g_{ab} do espaço-tempo e pode ser determinada pelo requerimento de se fazer nula a divergência covariante da parte geométrica. No entanto, isto somente acontece se requeremos em adição a validade de $\nabla^a T_{ab} = 0$, ou seja, a quantidade T_{ab} deve satisfazer uma equação de conservação. Note-se que assumimos uma congruência formadas por curvas tipo luz na discussão deste sinal. Concluindo, obtemos a equação

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} \pm \Lambda g_{ab} = k^{-1}T_{ab}, \quad (8.17)$$

a qual é justamente a equação de Einstein se identificamos T_{ab} com o tensor energia-momento. A identificação é correta porque T_{ab} é um objeto simétrico devido a simetria de R_{ab} e obedece a uma lei de conservação. Se tomamos seriamente esta analogias somos forçados a declarar que a lei de Hooke para o espaço-tempo é, neste ponto de vista, mais fundamental que a equação de Einstein. Em outras palavras, *a lei de Newton da gravitação surge da lei de Hooke que descreve as deformações do espaço-tempo.*

8.6 Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho discutimos as relações entre a idéia de curvatura do espaço-tempo e deformações de sólidos. Sinais interessantes podem ser construídos mostrando analogias com física de corpos materiais. O primeiro sinal mostra que se deformamos o volume do espaço-tempo usando propagação de Lie através de curvas integrais obtemos a parte geométrica da equação de Einstein. No segundo sinal provamos uma relação entre ação de Einstein-Hilbert e deformação de volume de um sólido. No terceiro sinal postulamos a validade de uma lei de Hooke para o espaço-tempo e mostramos que a lei de Newton da gravidade surge através da equação de Einstein. Em todos estes sinais a equação de Landau-Raychaudhuri tem importante papel na descrição do espaço-tempo como preenchido por uma congruência de curvas. Além do mais, fizemos uso de uma congruência tipo tempo em apenas um dos sinais enquanto que nos outros usamos congruências tipo luz. Isto significa que é importante decidir se as partículas fundamentais da rede são massivas ou não massivas de maneira a se estabelecer a caracterização total deste modelo. Por enquanto não há razão fundamental para se escolher um tipo de congruência em detrimento de outra. Consideramos todos estes sinais como passos importantes para se compor a idéia deste trabalho.

Conclusões e Perspectivas Gerais

8.7 Conclusões Gerais

Aqui apresentamos as conclusões gerais desta tese. Estas são divididas em termos dos assuntos discutidos, na mesma ordem em que foram apresentados.

Gravidade Topológica em Membranas

1.1 Mostrou-se que um simples modelo topológico de teoria de campos tem características bastante interessantes para se resolver o problema de hierarquia de gauge de maneira bastante similar ao resultado produzido por L. Randall e R. Sundrum. Com este modelo construímos uma 3-brane estável (um hiperplano de domínio) que simula nosso universo quadri-dimensional e argumentamos a respeito da possibilidade de localização de gravidade topológica. Por conta destes fatos, o fator exponencial aparece somente devido à existência da membrana e não de uma métrica especial. Então, calculamos a massa de Planck efetiva em $D = 4$, apontando a semelhança entre este resultado e aquele do modelo de Randall-Sundrum. Calculou-se uma equação polinomial para o tamanho da dimensão extra usando somente características de modelos contendo paredes de domínio. Finalmente, fez-se um comentário a respeito de modos-zero ligados à membrana, observando o fato de que tais modos são multiplicados por um fator de escala exponencial. Esta característica torna possível a emergência da escala da teoria eletrofraca.

1.2 Foi discutido como construir teorias topológicas e teorias equivalentes em membranas em várias dimensões do espaço-tempo. Na primeira parte, discutiu-se o surgimento de vários termos topológicos tipo Chern-simons, no caso-abeliano e não-abeliano, por meio de procedimentos de redução dimensional. Viu-se que a membrana quebra a simetria de Lorentz destes tipos de modelos. De maneira a produzir este resultado, a membrana solitônica do modelo foi simulada por um soliton tipo kink embutido em espaços-tempos de várias dimensões. Tais tipos de solitons aparecem no modelo devido uma quebra espontânea de uma simetria discreta específica, neste caso em questão, uma simetria do tipo Peccei-Quinn. Algumas outras características relacionados a estes tipos de modelos forma discutidas: quantização de constante de acoplamento, geração topológica de massa, gravidade topológica e relações com modelos $B \wedge F$, etc.

1.3 Foi desenvolvido um procedimento de construção de modelos equivalentes em membranas. Foi construído, a partir de uma teoria em $D = 5$, o modelo $B \wedge F$ -Maxwell em $D = 4$ e, a partir de uma teoria em $D = 4$, os modelos $B \wedge F$ -Maxwell e $B\varphi$ -Klein-Gordon ambos em $D = 3$. O procedimento adotado consiste em quebrar explicitamente a simetria de Lorentz do modelo por meio de uma escolha de uma direção preferencial no espaço-tempo para o vetor V^λ presente no modelo. No caso do modelo $B \wedge F$ -Maxwell, pode-se implementar através do formalismo de Stuckelberg uma simetria de gauge do tipo $U(1) \times U(1)$ que é quebrada para $U(1)$ na membrana devido à escolha da direção preferencial. Outra característica importante é que sempre obtém-se na membrana teorias que são duais modelos de campos livres e não massivos. De fato, este resultado é compatível com a idéia de localização de campos em membranas, onde os modos-zero (descritos por teorias não-massivas) descrevem os campos do Modelo Padrão de Partículas.

1.4 Construímos um cenário de membranas no contexto de gravidade topológica por

meio de teorias de campos topológicas e vinculadas. Por outro lado, usamos um mecanismo de quebra espontânea de simetria para gerar a 3-brane do modelo. O procedimento introduzido aqui depende exclusivamente de vínculos impostos no espaço-tempo $D = 5$. Então, obtém-se gravidade em $D = 4$ partindo da ação (6.1). Em discussões a respeito da *realidade física* do formalismo de gravidade topológica, a natureza não-dinâmica dos graus de liberdade neste tipo de teoria é sempre citada. Ainda nestes termos, o modelo descrito aqui assemelha-se a outros modelos de localização de gravidade. Nestes outros modelos, alguns graus de liberdade *físicos* são efetivamente aprisionados na 3-brane. Entretanto, no contexto de gravidade topológica, é difícil afirmar se o mesmo mecanismo pode acontecer ou não. O único sinal que garante a existência de uma teoria 4-dimensional na membrana é matemático: simetria de gauge $SO(3, 1) \Rightarrow$ teoria em $D = 4$.

Mecanismos de Localização

2.1 Foi feito um estudo de localização de modos-zeros de campos de gauge tensoriais em vários tipos de membranas. Iniciamos o estudo analisando o campo de Kalb-Ramond. Em um primeiro caso, observamos a contribuição da geometria do espaço-tempo no comportamento de um possível modo-zero. Escolhemos uma geometria tipo AdS gerada por um modelo de campos escalares reais em $D = 5$. Mostramos que as soluções obtidas para este modelo não garantem a existência de modos-zeros presos na membrana. A razão por trás deste fato está relacionada ao tamanho infinito da dimensão extra, característica que faz com que a ação efetiva para o campo de Kalb-Ramond não seja convergente em $D = 4$.

2.2 Adicionamos o campo do dilaton através de um acoplamento com o campo de Kalb-Ramond de maneira se avaliar se este novo ingrediente produz modos-zeros normalizáveis. A resposta que encontramos é positiva dentro de certas imposições feitas sobre a constante de acoplamento λ .

2.3 Fizemos um estudo rápido de localização do campo de Kalb-Ramond em membranas de Bloch, objetos que possuem estrutura interna naturalmente. Encontramos novamente resposta negativa na tentativa de se localizar modos não-massivos tensoriais.

2.4 Na presença do background do dilaton mostramos que temos localização de modos-zeros. De certa maneira, os resultados para o campo de Kalb-Ramond sem a contribuição do dilaton são corroborados por estudos análogos no cenário de Randall-Sundrum onde a dimensão extra é compacta [43]. Neste caso existe localização de modos tensoriais não-massivos, mas extremamente suprimidos pelo tamanho da dimensão extra. Efetivamente, no cenário de Randall-Sundrum não há dinâmica para o campo de Kalb-Ramond em $D = 4$.

Espaço-Tempo como Sólido Deformável

3.1 Discutimos as relações entre a idéia de curvatura do espaço-tempo e deformações de sólidos. Sinais interessantes podem ser construídos mostrando analogias com física de corpos materiais. O primeiro sinal mostra que se deformamos o volume do espaço-tempo usando propagação de Lie através de curvas integrais obtemos a parte geométrica da equação de Einstein. No segundo sinal provamos uma relação entre ação de Einstein-Hilbert e deformação de volume de um sólido. No terceiro sinal postulamos a validade de uma lei de Hooke para o espaço-tempo e mostramos que a equação de Einstein para o espaço-tempo surge. Em todos estes sinais a equação de Landau-Raychaudhuri tem importante papel na descrição do espaço-tempo como preenchido por uma congruência de curvas. Além do mais, fizemos uso de uma congruência tipo tempo em apenas um dos sinais enquanto que nos outros usamos congruências tipo luz.

8.8 Perspectivas Gerais

Seguem agora as perspectivas gerais associadas a cada um dos temas discutidos nesta tese. Também separamos por assunto segundo a ordem seguida no decorrer deste texto.

Gravidade Topológica em Membranas

- 1.1 O passo seguinte é justamente tentar a quantização do modelo. Para tal se faz necessária a análise da estrutura hamiltoniana da teoria. Com estes resultados em mãos pode-se partir para a construção de vários modelos de espaço-tempo quântico, sendo um destes o modelo de "Espuma Quântica" (Spin Foam). Então pode-se testar e comparar resultados relativos ao modelo de Randall-Sundrum.
- 1.2 Um caso importante a ser estudado está relacionado com a inclusão de modelos contendo a constante cosmológica. Além do mais, modelos supersimétricos também podem ser, pelo menos em princípio, implementados.

Mecanismos de Localização

- 2.1 Uma continuação natural deste tipo de trabalho é fazer a análise da localização de modos massivos de Kaluza-Klein para as várias geometrias discutidas. Também a mudança do tipo de membrana pode ser interessante. A geometria produzida por um defeito de codimensão 2 ("cosmic string") produz uma membrana embutida em um espaço-tempo $D = 6$, uma hipótese bastante considerada na literatura. Generalizações para mais dimensões também são possibilidades bastante interessantes, embora o trabalho associado seja mais numérico.

Espaço-Tempo como Sólido Deformável

- 3.1 Uma idéia bastante interessante é tentar reproduzir as equações de Supergravidade utilizando as deformações de um supervolume. No entanto, uma primeira inicia-

tiva seria generalizar para modelos contendo supersimetria a equação de Landau-Raychaudhuri. Para tal empresa é importante um aprendizado de como se define derivadas de Lie para entidades espinórias definidas em uma determinada variedade.

3.2 Somente existe um tipo de modelo teórico baseado em ações proporcionais a volumes em geral: teorias de cordas e membranas. Portanto, uma questão é bastante natural aqui: existe alguma ligação entre as deformações de volume do espaço-tempo e modelos deste tipo? A equação de Landau-Raychaudhuri pode ser generalizada para descrever congruências de hipersuperfícies definidas em uma variedade. Qual o significado deste tipo de resultado, o de generalizar o sólido do espaço-tempo descrito em termos de uma rede de partículas fundamentais, para uma rede de cordas abertas? Na literatura existem modelos que descrevem redes de cordas abertas. No entanto, nenhum modelo faz menção de como gerar as equações de Einstein: pode uma rede de cordas suportar abertas vibrações gravitacionais?

Apêndice A

As relações de Pluecker

Neste apêndice mostraremos pelo menos o primeiro passo para se transformar uma teoria topológica de campos vinculada em uma teoria de gravidade. Uma discussão mais detalhada pode ser encontrada na referência [7]. O link está associado com os vínculos impostos sobre o campo $B_{ij}^{\mu\nu}$ na ação de Plebanski. Os vínculos citados são escritos em termos da seguinte equação:

$$\epsilon^{[m]ijkl} B_{ij}^{\mu\nu} B_{kl}^{\rho\sigma} = \epsilon^{[\alpha]\mu\nu\rho\sigma} c_{[\alpha]}^{[m]}. \quad (\text{A.1})$$

Nesta equação, $[m]$ e $[\alpha]$ são índices cumulativos antissimétricos de tamanho $(D - 4)$ (o resultado aqui discutido é válido para D -dimensões) respectivamente de grupo e de espaço-tempo. O objetivo é interpretar o campo $B_{ij}^{\mu\nu}$ em termos de tetradas em D -dimensões com a ajuda dos vínculos acima. Os vínculos podem ser subdivididos nas seguintes categorias: 1) *Simplicidade*, que significa a validade de $B_{[ij}^{\mu\nu} B_{kl]}^{\mu\nu} = 0$ para μ, ν distintos; 2) *Interseção*, ou seja, $B_{[ij}^{\mu\nu} B_{kl]}^{\nu\rho} = 0$ para μ, ν, ρ distintos; 3) *Normalização*, isto é, $B_{[ij}^{\mu\nu} B_{kl]}^{\rho\sigma} = B_{[ij}^{\mu\rho} B_{kl]}^{\sigma\nu}$ para μ, ν, ρ, σ distintos.

A primeira proposição declara que a imposição da condição de simplicidade em uma 2-forma B_{ij} não-nula é equivalente a demandar que a mesma pode ser fatorada em um

produto externo de 1-formas:

$$B_{[ij}B_{kl]} = 0 \Leftrightarrow B_{ij} = u_{[i}v_{j]}. \quad (\text{A.2})$$

A segunda proposição declara que a condição de interseção aplicada sobre um par de 2-formas simples força que estas possuem em comum uma 1-forma fatorando ambas:

$$B_{[ij}B'_{kl]} = 0 \Leftrightarrow B_{ij} = u_{[i}v_{j]} \quad (\text{A.3})$$

e

$$B'_{ij} = v_{[i}w_{j]}. \quad (\text{A.4})$$

A condição de normalização quando imposta sobre dois pares de 2-formas simples, cada par destes construído com diferentes produtos externos de 4 1-formas, fixa a normalização relativa de duas 2-formas. Em outras palavras, dadas duas 2-formas simples

$$B_{ij} = Nu_{[i}v_{j]} \quad (\text{A.5})$$

$$B'_{ij} = N'w_{[i}z_{j]} \quad (\text{A.6})$$

$$B''_{ij} = N''u_{[i}w_{j]} \quad (\text{A.7})$$

$$B'''_{ij} = N'''z_{[i}v_{j]}, \quad (\text{A.8})$$

as condições

$$B_{[ij}B'_{kl]} = B''_{[ij}B'''_{kl]} \quad (\text{A.9})$$

implicam em $NN' = N''N'''$ na situação dos vetores acima citados serem linearmente independentes.

Discutiremos agora a prova da condição de simplicidade. A discussão das demais

condições pode ser encontrada na referência [7]. Considere uma 2-forma B_{ij} . A condição necessária e suficiente para esta forma ser fatorizada em um produto antisimetrizado de 1-formas é a seguinte:

$$B_{[ij}B_{kl]} = 0. \quad (\text{A.10})$$

Nota-se que a condição acima é equivalente à condição mais fraca

$$\frac{1}{2}B_{i[j}B_{kl]} = B_{ij}B_{kl} + B_{ik}B_{lj} + B_{il}B_{jk} = 0. \quad (\text{A.11})$$

Agora se B_{ij} não é identicamente nula pode-se encontrar vetores a^i e b^j tais que $B_{ij}a^ib^j = 1$. Vamos definir agora 1-formas u_i e v_j como $u_i = B_{ija^j}$ e $v_i = B_{ij}b^j$. Portanto, usando o resultado acima, obtemos

$$u_iv_j - v_iu_j = (B_{ik}B_{jl} - B_{il}B_{jk})a^kb^l = B_{ij}B_{kl}a^kb^l = B_{ij}, \quad (\text{A.12})$$

que é o resultado ao qual queríamos chegar. Relações deste tipo são conhecidas como relações de Pluecker.

Apêndice B

A equação de Landau-Raychaudhuri

Neste apêndice mostraremos como obter a equação de Landau-Raychaudhuri, equação de fundamental importância para o entendimento do comportamento de uma congruência de curvas definidas em uma dada variedade. Seguiremos aqui as mesmas convenções adotadas na referência [59]. Discutiremos apenas o caso onde a congruência é constituída de curvas tipo-tempo. O caso de congruências tipo-luz é discutido também na referência acima citada.

Consideremos uma congruência suave de geodésicas tipo-tempo. Pode-se assumir a parametrização deste conjunto de curvas como sendo dada pelo tempo próprio τ , de modo que o campo vetorial ξ^a (vetores tangentes às geodésicas compondo a congruência) é normalizado de tal maneira que obedeça a $\xi^a \xi_a = -1$. Desta maneira, o campo tensorial B_{ab} definido por

$$B_{ab} = \nabla_b \xi_a \tag{B.1}$$

é puramente espacial, ou seja,

$$B_{ab} \xi^a = B_{ab} \xi^b = 0. \tag{B.2}$$

A interpretação física de B_{ab} pode ser vista da maneira que se segue: considere uma subfamília suave de geodésicas $\gamma_s(\tau)$ pertencentes à congruência definida acima, e seja

η^a o vetor de desvio ortogonal de γ_0 a essa subfamília. Então η^a representa um deslocamento espacial bastante pequeno a partir de γ_0 à uma dada geodésica pertencente àquela subfamília. Temos então que a derivada de Lie deste vetor desaparece, ou seja,

$$L_\xi \eta^a = 0, \quad (\text{B.3})$$

e portanto obtemos

$$\xi^b \nabla_b \eta^a = \eta^b \nabla_b \xi^a = B_b^a \eta^b. \quad (\text{B.4})$$

Portanto, B_b^a mede a falha com a qual η^a é transportado paralelamente. Um observador ao longo da geodésica γ_0 vê as geodésicas à sua volta distorcidas e rotacionadas pelo mapeamento B_b^a .

Definamos agora a métrica $h_{ab} = g_{ab} + \xi_a \xi_b$. Pode-se mostrar que a quantidade $h_b^a = g^{ac} h_{cb}$ é um operador de projeção sobre o subespaço do espaço tangente perpendicular ao vetor ξ^a . Define-se a *expansão* θ , a *distorção* σ_{ab} e a *rotação* ω_{ab} da congruência por

$$\theta = B^{ab} h_{ab}, \quad (\text{B.5})$$

$$\sigma_{ab} = B_{(ab)} - \frac{1}{3} \theta h_{ab}, \quad (\text{B.6})$$

$$\omega_{ab} = B_{[ab]}. \quad (\text{B.7})$$

Deste modo, B_{ab} pode ser decomposto da seguinte maneira:

$$B_{ab} = \frac{1}{3} \theta h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab}. \quad (\text{B.8})$$

É importante notar que da eq.(B.2) pode-se mostrar que σ_{ab} e ω_{ab} são puramente espaciais, ou seja, $\sigma_{ab} \xi^b = \omega_{ab} \xi^b = 0$. Segue da eq.(B.4) que ao longo de qualquer geodésica da congruência, θ de fato mede a expansão média infinitesimal de geodésicas vizinhas; ω_{ab} ,

sendo antissimétrico, mede a rotação relativa entre geodésicas vizinhas; e σ_{ab} mede sua distorção, isto é, uma esfera pode ser deformada num elipsóide quando transportada ao longo da congruência.

É importante agora obter a taxa de variação de θ ao longo da congruência. Tem-se que:

$$\begin{aligned}\xi^c \nabla_c B_{ab} &= \xi^c \nabla_c \nabla_b \xi_a = \xi^c \nabla_b \nabla_c \xi_a + R_{cba}^d \xi^c \xi_d \\ &= -B_b^c B_{ac} + R_{cba}^d \xi^c \xi_d.\end{aligned}\tag{B.9}$$

Tomando o traço desta última equação obtemos

$$\xi^c \nabla_c \theta = \frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} + \omega_{ab}\omega^{ab} - R_{cd}\xi^c \xi^d\tag{B.10}$$

que é a equação de Landau-Raychaudhuri, objetivo desta pequena discussão.

Bibliografia

- [1] A. D. Sakharov, "Vacuum quantum fluctuations in curved space and the theory of gravitation", Soviet Physics Doklady, **12** (1968) 1040.
- [2] C. Barcelo, S. Liberati, M. Visser, *Liv. Rev.Rel.* **8**: 12, (2005).
- [3] J. Polchinski, *String Theory*, vol. 1 and vol. 2, Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998).
- [4] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, *Phys. Lett.* **B429**, 263 (1998);
I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, *Phys. Lett.* **B436**,
257 (1998).
- [5] L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3370 (1999); L. Randall and R.
Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4690 (1999).
- [6] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, Addyson-Wesley, 1995.
- [7] L. Freidel, K. Krasnov, R. Puzio, *Adv. Theor. Math. Phys.* **3**, 1289 (1999).
- [8] O. DeWolfe, D. Freedman, S. S. Gubser, and A. Karch, *Phys. Rev.* **D62**, 046008
(2000).
- [9] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons*, (North-Holland, Amsterdam, 1982); A.
Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*,
Cambridge University Press (1994).

- [10] L. Smolin, *J. Math. Phys.* **36**, 6417 (1995).
- [11] A. Ashtekar, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2224 (1986); C. Rovelli, *Phys. Rev.* **D52**, 5743 (1995).
- [12] D. Diakonov and V. Petrov, *Grav. Cosmol.* **8**, 33 (2002).
- [13] D. Birmingham, M. Blau, M. Rakowski and G. Thompson, *Topological Field Theory*, *Phys. Rep.* **209**, (1991).
- [14] R. D. Peccei and H. R. Quinn, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 1440 (1977); S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **40**, 223 (1978).
- [15] M. C. Huang and P. Sikivie, *Phys. Rev.* **D32**, 1560 (1985).
- [16] M. N. Forbes and A. Zhitnitsky, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5268 (2000); P. Sikivie, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1156 (1982).
- [17] K. Lee, *Phys. Rev.* **D35**, 2286 (1987).
- [18] V. A. Rubakov and N. E. Shaposhnikov, *Phys. Lett.* **B125**, 136 (1982).
- [19] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, *Phys. Rev.* **D63**, 064020 (2001).
- [20] W. D. Goldberger and M. B. Wise, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4922 (1999).
- [21] D. Bazeia and R. F. Ribeiro, *Phys. Rev.* **D54**, 1852 (1996).
- [22] C. A. S. Almeida and M. O. Tahim, *in preparation*.
- [23] K. Lee, *Phys. Rev.* **D35** (1987) 3286;
- [24] P. Sikivie, *Phys. Lett.* **B137** (1984) 353.
- [25] D. Peccei and H. R. Quinn, *Phys. Rev. Lett.* **38** (1977) 1440; *Phys. Rev.* **D16** (1971) 1791.

- [26] A. Lukas, B. A. Ovrut, K. S. Etelle, D. Waldram, *Phys. Rev.* **D59** (1999) 086001; H. Kawai, T. Kuroki, *Phys. Lett.* **B518** (2001) 294.
- [27] A. Kehagias and K. Tamvakis, *Phys. Lett.* **B504** (2001) 38.
- [28] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, *Ann. Phys.* **140** (1982) 372.
- [29] B. Mukhopadhyaya, Sidharta Sen, Somasri Sen, S. Sengupta, *Phys. Rev.* **D70** (2006) 066009.
- [30] T. Allen, M. Bowick, and A. Lahiri, *Phys. Lett.* **B237** (1990) 47; A. S. Cattaneo, P. Cotta-Ramusino, A. Gamba, and M. Martellini, *Phys. Lett.* **B355** (1995) 245.
- [31] D. Medeiros, R. R. Landim, C. A. S. Almeida, *Europhys. Lett.* **48** (1999) 610.
- [32] R. Capovilla, T. Jacobson, and J. Dell, *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989) 2325.
- [33] L. Smolin, A. Starodubtsev, *General Relativity with a Topological Phase: An Action Principle*, hep-th/0311163.
- [34] S. M. Carrol, G. B. Field and R. Jackiw, *Phys. Rev.* **D41**, 1231 (1990); H. Belich, Jr., M. M. Ferreira, Jr., J. A. Helayel-Neto, M. T. D. Orlando, *Phys. Rev.* **D67** (2003) 125011.
- [35] F. Fucito, M. Martinelli, and M. Zeni, *Nucl.Phys.* **B496** (1997) 259.
- [36] E. C. G. Stueckelberg, *Helv. Phys. Acta* **11** (1938) 225.
- [37] J. S. Rozowsky, R. R. Volkas, K. C. Wali, *Phys. Lett.* **B580** (2004) 249.
- [38] G. Dvali, G. Gabadadze, M. Porrati, *Phys. Lett* **B485**, 208 (2000).
- [39] R. De Pietri, L. Freidel, *Class. Quant. Grav.* **16**, 2187 (1999).

- [40] R. Capovilla, M. Montesinos, V. A. Prieto, E. Rojas, *Class. Quant. Grav.* **18**, L49 (2001); C. Rovelli, T. Thiemann, *Phys. Rev.* **D57**, 1009 (1998). r
- [41] A. Kehagias, K. Tamvakis, *Localized gravitons, gauge bosons and chiral fermions in smooth spaces generated by a bounce*, *Phys. Lett.* B504, 38 (2001).
- [42] H. Davoudias, J.L. Hewett, T.G. Rizzo, *Phys. Lett.* B473, 43 (2000).
- [43] B. Mukhopadhyaya, S. Sen, S. SenGupta, *Phys. Rev. Lett.* 89, 121101 (2002).
- [44] E. Witten, *Some Properties Of O(32) Superstrings*, *Phys. Lett. B* 149, 351 (1984).
- [45] E. Zavattini et al. [PVLAS collaboration], *Phys. Rev. Lett.* 96, 110406 (2006).
- [46] E. Zavattini et al. [PVLAS collaboration], *New PVLAS results and limits on magnetically induced optical rotation and ellipticity in vacuum*, arXiv:0706.3419 [hep-ex]
- [47] D. Bazeia, A. R. Gomes, *JHEP* 0405, 012 (2004).
- [48] P. Mayr and S. Stieberger, *Nucl. Phys.* B412, 502 (1994).
- [49] K. Sfetsos and A. A. Tseytlin, *Phys. Rev.* **D49**, 2933 (1994).
- [50] B. Kleihaus, J. Kunz, K. Myklevoll, *Phys. Lett.* B605, 151 (2005).
- [51] D. Bazeia, R. F. Ribeiro, M. M. Santos, *Phys. Rev.* D54, 1852 (1996).
- [52] D. Walgraef, *Spatio-temporal pattern formation*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [53] F. Bonjour, C. Charmousis, and R. Gregory, *Class. Quantum Grav.* 16, 2427 (1999).
- [54] A. R. Gomes, *Gravity on the Bloch Brane*, arxiv:0611291 [hep-th].
- [55] B.L. Hu, E. Verdaguer, "Stochastic gravity: Theory and applications", *Living Rev. Relativity*, **7** (2004) 3.

- [56] T. Jacobson, "Thermodynamics of spacetime: The Einstein equation of state",
Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 1260.
- [57] L. Landau and E. M. Lifshitz, Classical theory of fields, Pergamom Press, Oxford,
UK, 1975.
- [58] A. Raychaudhuri, Phys. Rev. **98** (1955) 1123.
- [59] R. M. Wald, General Relativity, Chicago, USA: Univ. Press (1984)