



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

RAFAEL JORGE PONTES DIÓGENES

MÉTRICAS CRÍTICAS DO FUNCIONAL VOLUME, VOLUME MÍNIMO
E CURVATURA MÍNIMA EM VARIEDADES DE DIMENSÃO QUATRO

FORTALEZA

2015

RAFAEL JORGE PONTES DIÓGENES

MÉTRICAS CRÍTICAS DO FUNCIONAL VOLUME, VOLUME MÍNIMO E
CURVATURA MÍNIMA EM VARIEDADES DE DIMENSÃO QUATRO

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior

FORTALEZA

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

D622m Diógenes, Rafael Jorge Pontes
Métricas críticas do funcional volume, volume mínimo e curvatura mínima em variedades de
dimensão quatro / Rafael Jorge Pontes Diógenes. – 2015.
82 f. : enc. ; 31 cm

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de
Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2015.
Área de Concentração: Geometria diferencial.
Orientação: Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior.

1. Métrica crítica. 2. Volume mínimo. 3. Curvatura mínima. I. Título.

CDD 516.36

MÉTRICAS CRÍTICAS DO FUNCIONAL VOLUME, VOLUME MÍNIMO E CURVATURA MÍNIMA EM VARIEDADES DE DIMENSÃO QUATRO.


Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Aprovada em: 05 / 05 / 2015.


BANCA EXAMINADORA




Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)




Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Renato de Azevedo Tribuzy
Universidade Federal do Amazonas (UFAM)



Prof. Dr. Rondinelle Marcolino Batista
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

A minha mãe Criseli Diógenes, aos meus irmãos Ricardo e Álvaro Diógenes e ao amor da minha vida Celeste Andreane.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus, principio e fim último da minha vida, motivo maior da minha escolha pela carreira acadêmica, que me proporcionou essa graça de cursar o doutorado e por ter cuidado de todos os detalhes, para que meu curso fosse bem aproveitado.

A minha querida e amada família, minha mãe Criseli Diógenes, que por todos esses anos não mediu esforços para cuidar de mim, meu irmão Ricardo Diógenes, que sempre acreditou no meu potencial e custeou minha preparação para o vestibular tornando-se, assim, um dos grandes responsáveis por esta etapa na minha vida. Meu irmão Álvaro Diógenes, que por ser uma pessoa especial me faz sempre ser mais humano. Ao meu pai Luiz Benone, pelas excelentes conversas.

Agradeço especialmente a minha amada Celeste Andreane, que com paciência suportou todo esse tempo em que tive que ficar mais ausente, por todas as vezes que deixamos de sair, por aguentar meus queixumes e meus estresses. Saiba que sua oferta gera em mim mais admiração por você.

Aos meus irmãos da Comunidade Católica Shalom, que durante esses anos compreenderam meu chamado e me apoiaram nos momentos mais difíceis. Em particular, a Socorro Martins, Márcio, aos meus irmãos da célula Nossa Senhora do Carmo do Shalom da Parangaba e ao Conselho local, na pessoa do Pe. Silvio Scopel, que entenderam o momento particular do doutorado em minha vida. Ao jovens do grupo de oração Qadosh, que ofertaram meu pastoreio. Também não poderia deixar de agradecer ao Moysés Azevedo e a Emmir Nogueira que graças aos seus *Sim's* iniciais fui alcançado pela misericórdia de Deus e hoje posso ofertar minha vida no Carisma Shalom e anunciar aquilo que vi e ouvi: Cristo é a nossa Paz!

Agradeço, de maneira especial, ao professor Ernani Ribeiro Jr., pela orientação desde o mestrado, o incentivo, a paciência, a ajuda e colaboração para este trabalho. Confesso que não compreendia tamanha cobrança, as vezes maiores do que conseguia suportar, mas vejo o excelente resultado. Mais do que um orientador, se tornou um amigo e um parceiro de pesquisa.

Agradeço aos professores Abdênago Barros e Ezio Costa, pela parceria na pesquisa, essencial para este momento. De maneira particular, ao professor Abdênago por, também, aceitar participar da banca. Agradeço também aos professores das Pós-graduação: Diego Moreira, Gleydson Ricarte, Fernanda Camargo, Antonio Caminha, Daniel Cibotaru, que foram meus professores durante o doutorado.

Aos professores G. Pacelli Bessa da Universidade Federal do Ceará, Renato Tribuzy da Universidade Federal do Amazonas e Rondinelle Batista da Universidade Federal do Piauí, por terem aceitado participar da banca. Aos professores Nazareno Gomes e Michel Rebouças da Universidade Federal do Amazonas, pelo acolhimento no período

que passei nesta universidade. Ao professor João Francisco da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, pelo apoio e amizade.

Aos meus amigos da Pós-graduação, que acabam tornando-se uma família pelo tempo que passamos juntos, Alex Santos, Alexandre de Sousa, Antonio Grangeiro, Assis Benjamim, Breno Pinheiro, Cleiton Cunha, Davi Lustosa, Diego Eloi, Edson Sampaio, Edvalter Sena, Elaine Sampaio, Elzimar Rufino, Emanuel Viana, Eraldo Lima, Fabiana Alves, Fabrício Oliveira, Franciane Vieira, Halysom Baltazar, Israel Evangelista, Ivaldo Tributino, João Nunes, João Vitor, Kelson Vieira, Leonardo Tavares, Loester Carneiro, Marcos Ranieri, Oslenne Nogueira e Damião Junio, Renivaldo Senna, Tiarlos Cruz, Valdir Pereira e Wanderley Pereira.

Agradecimentos especiais aos meus amigos, Pe. Alexandre Andrade, Daniele Gomes, Magna Amaro, Dávila Amaro, Gleiciane Paulino, Carol Magalhães e Gilderson Borges, Rafael Rosemberg e Luana Leticia, Lyana Nara, Lina Patrício, Luiza Michel, Kleyane de Paula, Edson Alves, Leandro Hercules, Márcia Xavier, Laura Carolina, Meire Martins, Aline e Daniel Abtibol, Gerlane e Rebeca Paulino, Raísa Barros, João Carlos e Deuzenir, Dandara Cristina, Jonathan Almeida, Alice dos Santos, Leuriane Rocha e Luciano Lucas, Felipe e Raquel Fernandes, Renato e Lucimar Alves, Celeste Alves e José Maria pelo apoio e amizade. De maneira especial, agradeço a Rosana Fernandes e Rui Rodrigues pelo acolhimento e por me tratar como um filho.

Não podia deixar de lembrar os professores da UECE, Alberto Flávio, João Marques, Thelmo de Araújo, João Montenegro, Marina, Maildo e Esmeraldo, pelo ensino e incentivo. A Yalga que sempre me apoiou. Aos meus amigos de graduação: Raquel Vitoriano, Virlane Nogueira, Ticiane Aragão, Tiganá Queiroz, Rubem Dutra, Michel, Marcelo, Heitor Barros e Monique Stefanie.

Agradecimentos também a Andrea Dantas e Jessyca Soares pela competência e agilidade.

A Funcap e Capes pelo apoio financeiro.

“Somos a voz do Cristo que Ressuscitado
está. Que todo mundo ouça o brado: Ele
é a nossa paz!”

(Missionário Shalom)

RESUMO

Este trabalho tem como principal objetivo estudar as métricas críticas do funcional volume, volume mínimo e curvatura mínima em variedades compactas de dimensão quatro. Na primeira parte o objetivo é investigar as métricas críticas do funcional volume sob a condição de tais métricas serem *Bach-flats* em uma variedade compacta com bordo ∂M . Provamos que uma métrica crítica do funcional volume *Bach-flat* em uma variedade simplesmente conexa de dimensão quatro com bordo isométrico a uma esfera padrão é necessariamente isométrico a uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo \mathbb{R}^4 , \mathbb{H}^4 ou \mathbb{S}^4 . Além disso, mostramos que em dimensão três o resultado continua valido substituindo a condição *Bach-flat* pela condição mais fraca de M ter o tensor de Bach harmônico. Na segunda parte estudamos os invariantes geométricos: volume mínimo e curvatura mínima. Em 1982, Gromov introduziu o conceito de *volume mínimo* para uma variedade suave como sendo o ínfimo de todos os volumes sob as métricas de curvatura seccional limitada, em valor absoluto, por 1. Enquanto a *curvatura mínima*, que foi introduzido por Yun, é o menor *pinching* da curvatura seccional dentre as métricas de volume 1. Em ambos os casos damos estimativas inferiores envolvendo alguns invariantes diferenciáveis e topológicos. Dentre elas mostraremos exemplos em que as estimativas são ótimas. Além disso, obtemos uma caracterização para o caso da igualdade em algumas estimativas.

Palavras-chave: Métricas críticas. Funcional volume. Volume mínimo. Curvatura mínima.

ABSTRACT

This aim of this work is to study the critical metrics of the volume functional, minimal volume and minimal curvature on four-dimensional compact manifolds. In the first part, we investigate Bach-flat critical metrics of the volume functional on a compact manifold M with boundary ∂M . Here, we prove that a Bach-flat critical metric of the volume functional on a simply connected 4-dimensional manifold with boundary isometric to a standard sphere must be isometric to a geodesic ball in a simply connected space form \mathbb{R}^4 , \mathbb{H}^4 or \mathbb{S}^4 . Moreover, we show that in dimension three the result even is true replacing the Bach-flat condition by the weaker assumption that M has divergence-free Bach tensor. In the second part we investigate the geometric invariants: minimal volume and minimal curvature. In 1982, Gromov introduced the concept of minimal volume for a smooth manifold as the greatest lower bound of the total volumes of M^n with respect to complete Riemannian metrics whose sectional curvature is bounded above in absolute value by 1. While the minimal curvature, introduced by G. Yun in 1996, is the smallest pinching of the sectional curvature among metrics of volume 1. In both cases we give below estimates to minimal volume and minimal curvature on 4-dimensional compact manifolds involving some differential and topological invariants. Among these ones, we get some sharp estimates. Moreover, we deduce characterizations for the equality case in some estimates.

Keywords: Critical metric. Volume functional. Minimal volume. Minimal curvature.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	PRELIMINARES	17
2.1	Notações básicas e alguns tensores importantes	17
2.2	Métricas críticas do funcional volume	19
2.3	Curvatura biortogonal e o problema de Yamabe modificado	29
2.4	Volume mínimo e curvatura mínima	34
3	MÉTRICAS CRÍTICAS DO FUNCIONAL VOLUME	38
3.1	Definições e resultados existentes	38
3.2	Resultados chaves	40
3.3	Estudo das superfícies de nível da função potencial	43
3.4	Resultados de rigidez	52
4	VOLUME MÍNIMO E CURVATURA MÍNIMA	55
4.1	Estimativas para curvatura mínima	55
4.2	Alguns resultados sobre problema de Yamabe modificado	62
4.3	Estimativas para volume mínimo modificado	65
5	CONCLUSÃO	75
	REFERÊNCIAS	76

1 INTRODUÇÃO

Sejam M uma variedade suave compacta (não necessariamente sem bordo) e \mathcal{M} o conjunto das métricas Riemannianas em M . Um problema clássico em geometria é encontrar a “melhor” métrica $g \in \mathcal{M}$. Uma métrica pode ser considerada ótima quando determina curvatura constante. Nesse sentido, é fundamental entender quais métricas são pontos críticos do funcional volume e curvatura escalar total. Ou ainda, quando ela minimiza algum invariante geométrico, como, por exemplo, o invariante de Yamabe e o volume mínimo. Estas são as principais motivações para este trabalho.

Primeiramente, baseados no artigo *Bach-flat critical metrics of the volume functional on 4-dimensional manifolds with boundary*, do autor em parceria com Barros e Ribeiro Jr., estudaremos as métricas críticas do funcional volume. Tal como o nome já diz, tais métricas são pontos críticos do funcional volume sob uma variedade compacta com uma métrica fixada no bordo. O estudo de tais métricas foi iniciado por Miao e Tam (2009), onde, inspirados por um resultado obtido por Fan, Shi e Tam (2009) bem como pela caracterização dos pontos críticos do funcional curvatura escalar total, eles estudaram o problema variacional do funcional volume restrito às métricas de curvatura escalar constante em uma variedade compacta dada com uma métrica fixada no bordo. Em particular, eles obtiveram a equação de Euler-Lagrange associado aos pontos críticos do funcional volume, a qual passaram a chamar de métrica crítica e neste trabalho, por simplicidade, chamaremos por métrica crítica de Miao-Tam, isto é, uma métrica crítica de Miao-Tam é uma tripla (M^n, g, f) , onde (M^n, g) é uma variedade Riemanniana conexa e compacta com bordo suave ∂M , e f é uma função suave em M tal que $f^{-1}(0) = \partial M$ e satisfaz a seguinte equação:

$$-\Delta f g + \nabla^2 f - f Ric = g, \quad (1)$$

onde ∇^2 denota o Hessiano e f é chamada função potencial.

Ainda em 2009, Miao e Tam mostraram que as bolas geodésicas dos espaços formas têm estrutura de métrica crítica de Miao-Tam. Além disso, eles provaram que uma variedade Riemanniana com uma função potencial f satisfazendo à equação (1) tem curvatura escalar constante. Posteriormente, Miao e Tam (2011) estudaram as métricas críticas sob às hipóteses de Einstein e localmente conformemente *flat*. Eles provaram que uma métrica crítica Einstein é isométrica a uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo \mathbb{R}^n , \mathbb{H}^n ou \mathbb{S}^n . Além disso, baseados nas técnicas de Kobayashi e Obata (1981, 1982), eles substituíram a hipótese de Einstein por localmente conformemente *flat* com bordo isométrico a esfera e obtiveram o mesmo resultado. Mais precisamente, eles provaram o seguinte resultado.

Teorema 1.1 (Miao, Tam, 2011) *Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam simplesmente conexa com bordo isométrico à esfera padrão. Se (M^n, g) é localmente conformemente flat, então (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica em \mathbb{R}^n , \mathbb{H}^n ou \mathbb{S}^n .*

Inspirados nas técnicas desenvolvidas por Cao e Chen (2013, 2014) para o estudo de solitons de Ricci, generalizamos o Teorema 1.1 em dimensões 3 e 4. Como é conhecido, as variedades Riemannianas compactas de dimensão 4 tem um comportamento especial, para maiores detalhes veja (BESSE, 2008; SCORPAN, 2005). Neste trabalho, investigamos as métricas críticas de Miao-Tam que são Bach flats. Mais precisamente mostraremos que a hipótese localmente conformemente flat pode ser substituída pela hipótese da métrica ser Bach flat, a qual é mais fraca do que a considerada no Teorema 1.1. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 1.2 (Barros, Diógenes, Ribeiro Jr, 2014) *Seja (M^4, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam simplesmente conexa e com bordo isométrico à esfera padrão \mathbb{S}^3 . Então (M^4, g) é isométrica a uma bola geodésica em \mathbb{R}^4 , \mathbb{H}^4 ou \mathbb{S}^4 desde que*

$$\int_M f^2 B(\nabla f, \nabla f) dM_g \geq 0,$$

onde B é o tensor de Bach.

Como consequência imediata do Teorema 1.2 deduzimos o seguinte corolário.

Corolário 1.1 (Barros, Diógenes, Ribeiro Jr, 2014) *Seja (M^4, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam simplesmente conexa, Bach flat e com bordo isométrico à esfera padrão \mathbb{S}^3 . Então (M^4, g) é isométrica a uma bola geodésica em \mathbb{R}^4 , \mathbb{H}^4 ou \mathbb{S}^4 .*

Baseados nos resultados acima, é natural perguntar o que acontece em dimensão mais baixa. Para isto, inspirados nas ideias desenvolvidas em (CAO *et al.*, 2014), em dimensão 3, conseguimos melhorar o resultado um pouco mais. De fato, consideramos a hipótese do tensor de Bach ser harmônico, o qual é mais fraco do que Bach flat. Nessa direção, anunciamos nosso próximo resultado.

Teorema 1.3 (Barros, Diógenes, Ribeiro Jr, 2014) *Seja (M^3, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam simplesmente conexa com bordo isométrico à esfera padrão \mathbb{S}^2 . Se $\operatorname{div} B(\nabla f) = 0$ em M , onde B é o tensor de Bach, então (M^3, g) é isométrica a uma bola geodésica em \mathbb{R}^3 , \mathbb{H}^3 , or \mathbb{S}^3 .*

E como consequência, temos o seguinte resultado de rigidez.

Corolário 1.2 (Barros, Diógenes, Ribeiro Jr, 2014) *Seja (M^3, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam simplesmente conexa com bordo isométrico à esfera padrão \mathbb{S}^2 tal que o tensor de Bach é harmônico. Então (M^3, g) é isométrica a uma bola geodésica em \mathbb{R}^3 , \mathbb{H}^3 , or \mathbb{S}^3 .*

Na segunda parte deste trabalho, baseados no artigo *Estimates for Minimal Volume and Minimal Curvature on 4-dimensional compact manifolds*, do autor em parceria com Costa e Ribeiro Jr., estudaremos dois assuntos diretamente relacionados: volume

mínimo e curvatura mínima. No espaço \mathcal{M} consideramos o subconjunto das métricas cuja curvatura seccional satisfaz $|K(g)| \leq 1$. Sob estas notações, Gromov (1982) introduziu o conceito de volume mínimo. Mais precisamente, o *volume mínimo* de M^n é definido por

$$\text{MinVol}(M) = \inf_{|K(g)| \leq 1} \text{Vol}(M, g). \quad (2)$$

Este conceito está diretamente relacionado com outros importantes invariantes. De fato, Kotschick (2012) mostrou que o volume mínimo, *simplicial volume* $\|M\|$, *spherical volume* $T(M)$, *volume entropy* $\lambda(M)$ e *topological entropy* $h(M)$ estão relacionados como segue

$$\frac{n^{\frac{n}{2}}}{n!} \|M\| \leq 2^n n^{\frac{n}{2}} T(M) \leq [\lambda(M)]^n \leq [h(M)]^n \leq (n-1)^n \text{MinVol}(M). \quad (3)$$

Por outro lado, a curvatura mínima foi introduzida por Yun (1996), a qual é o menor *pinching* da curvatura seccional dentre as métricas de volume 1. Isto é, para uma variedade compacta M , a *curvatura mínima* de M é dado por

$$\text{Mincur}(M) = \inf_{g \in \mathcal{M}_1} \mathcal{R}^\infty(g),$$

onde $\mathcal{R}^\infty(g) = |Rm|_\infty$. Em seu trabalho, Yun mostrou uma relação direta entre volume mínimo e curvatura mínima. Na verdade, ele mostrou que o volume mínimo é zero se, e somente se, a curvatura mínima também for zero.

Nosso próximo resultado estabelece estimativas para a curvatura mínima em função da característica de Euler, da assinatura e do invariante de Yamabe de uma variedade.

Teorema 1.4 (Costa, Diógenes, Ribeiro Jr., 2014) *Seja M^4 uma variedade compacta orientada. Então, valem as seguintes estimativas:*

1. $\text{Mincur}(M) \geq 2\pi \sqrt{2|\chi(M)|}$.
2. Se $\mathcal{Y}(M) \geq 0$, então $\text{Mincur}(M) \geq 2\pi \sqrt{3|\tau(M)|}$.
3. Se $\mathcal{Y}(M) \leq 0$, então $\text{Mincur}(M) \geq \sqrt{12\pi^2|\tau(M)| + \frac{|\mathcal{Y}(M)|^2}{24}}$.

Vale ressaltar que a primeira estimativa do Teorema 1.4 é ótima. De fato, ela é atingida para \mathbb{S}^4 , $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$. Além disso, a igualdade no terceiro item ocorre para a variedade hiperbólica complexa $\mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma$.

Desde que as variedades simplesmente conexas tem $\chi(M) \geq 2$, deduzimos o seguinte corolário.

Corolário 1.3 (Costa, Diógenes, Ribeiro Jr., 2014) *Seja M^4 uma variedade compacta e simplesmente conexa. Então:*

$$\text{Mincur}(M) \geq 4\pi.$$

Além disso, se vale a igualdade, então M^4 é homeomorfa a esfera \mathbb{S}^4 .

No caso da igualdade, o resultado segue do Teorema de classificação de Freedman. Em um caso mais geral, tem-se o seguinte corolário.

Corolário 1.4 (Costa, Diógenes, Ribeiro Jr., 2014) *Seja M^4 uma variedade compacta e simplesmente conexa satisfazendo*

$$\text{Mincur}(M) \leq 2\sqrt{6}\pi.$$

Então, M^4 é homeomorfa a \mathbb{S}^4 ou ao $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

Desde que o Toro-*flat* tem volume mínimo zero, segue que sua curvatura mínima é zero. Assim, a igualdade no segundo item acontece. Entretanto, é interessante encontrar uma métrica não *flat* valendo a igualdade na segunda estimativa. Em particular, usando os trabalhos de Hitchin (1974), obtemos o seguinte corolário.

Corolário 1.5 (Costa, Diógenes, Ribeiro Jr., 2014) *Seja (M^4, g) uma variedade de Einstein compacta e orientada satisfazendo $\text{Mincur}(M) = 2\pi\sqrt{3|\tau(M)|}$. Então, M^4 é flat ou seu recobrimento universal é uma superfície $K3$.*

Prosseguindo, vamos assumir que a igualdade na primeira estimativa do Teorema 1.4 para então obtermos a seguinte caracterização.

Teorema 1.5 (Costa, Diógenes, Ribeiro Jr., 2014) *Seja M^4 uma variedade compacta orientada satisfazendo $\text{Mincur}(M) = 2\pi\sqrt{2\chi(M)}$. Se existe uma métrica g que atinge a curvatura mínima, isto é, $\text{Mincur}(M) = \mathcal{R}^\infty(g)$, então (M^4, g) é Einstein e $|W|$ é constante. Além disso, se a curvatura seccional é não-negativa, então M^4 é isométrica a \mathbb{S}^4 , $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ ou $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$.*

Um problema bastante interessante é saber quando uma variedade de dimensão 4 possui métrica de curvatura seccional não negativa. Mesmo sob à condição de Einstein. Ressaltamos que exemplos de tais variedades são raros. De fato, variedades compactas rotacionalmente elípticas são homeomorfas à umas das seguintes variedades: \mathbb{S}^4 , $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \sharp \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ ou $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \sharp \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$. A partir disso, foi conjecturado que somente as duas primeiras podem admitir curvatura positiva. Esta questão está diretamente relacionado à conjectura de Bott, a qual pergunta se uma variedade compacta simplesmente conexa com curvatura seccional não negativa é necessariamente elíptica; para maiores detalhes veja (ZILLER, 2007, 2014). Entretanto, é possível exibir uma métrica de curvatura seccional não negativa na soma conexa $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \sharp \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$, confira Exemplo 45 em (PETERSEN, 2006, p. 212), veja também (CHEEGER, 1973).

Ao mesmo tempo, a conjectura de Hopf pergunta se não existe métrica com curvatura seccional positiva em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$. Diante deste problema, tendo em vista que $\chi(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2) = 4$, usando o Teorema 1.5 deduzimos o seguinte corolário, o qual fornece uma condição para que a conjectura de Hopf seja verdadeira.

Corolário 1.6 (Costa, Diógenes, Ribeiro Jr., 2014) *$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ não possui uma métrica g com curvatura seccional positiva e $\mathcal{R}^\infty(g) \leq 4\pi\sqrt{2}$.*

Além disso, usaremos a noção de curvatura biortogonal para introduzir o Volume mínimo modificado, o qual está relacionado com o invariante de Yamabe modificado. Para isto, relembramos que, para uma variedade Riemanniana (M^4, g) , a curvatura (secional) biortogonal de P é dado por

$$K^\perp(P) = \frac{K(P) + K(P^\perp)}{2}, \quad (4)$$

onde P^\perp é o plano ortogonal ao plano P . Além disso, podemos considerar a seguinte função

$$K_1^\perp(p) = \min\{K^\perp(P); P \subset T_p M\}. \quad (5)$$

Inspirados em (PATERNAIN; PETEAN, 2003, sec. 7), introduzimos a seguinte noção de volume mínimo

$$\text{Vol}_{|K^\perp|}(M) = \inf\{\text{Vol}(M^4, g); |K^\perp| \leq 1\}. \quad (6)$$

Similar a definição (6) usamos (5) para definir

$$\text{Vol}_{|K_1^\perp|}(M) = \inf\{\text{Vol}(M^4, g); |K_1^\perp| \leq 1\}. \quad (7)$$

Claramente, temos que

$$\text{MinVol}(M) \geq \text{Vol}_{|K^\perp|}(M) \geq \text{Vol}_{|K_1^\perp|}(M). \quad (8)$$

Levando em conta as notações acima, apresentamos o nosso próximo resultado.

Teorema 1.6 (Costa, Diógenes, Ribeiro Jr., 2014) *Seja M^4 uma variedade compacta e orientada. Então, valem as seguintes estimativas:*

1. $\text{Vol}_{|K^\perp|}(M) \geq \frac{9}{20}\pi^2|\tau(M)|$.
2. Se $\chi(M) \geq 0$, então $\text{Vol}_{|K^\perp|}(M) \geq \frac{12}{25}\pi^2\chi(M)$.
3. Se $\mathcal{Y}_1^\perp(M) \leq 0$, então $\text{Vol}_{|K^\perp|}(M) \geq \text{Vol}_{|K_1^\perp|}(M) \geq \frac{1}{144}|\mathcal{Y}_1^\perp(M)|^2$.
4. Se $\mathcal{Y}_1^\perp(M) \leq 0$, então $\text{Mincur}(M) \geq \frac{1}{6\sqrt{2}}|\mathcal{Y}_1^\perp(M)|$.

Onde $\mathcal{Y}_1^\perp(M)$ é o invariante de Yamabe modificado dado por

$$\mathcal{Y}_1^\perp(M) = \sup_{g \in \mathcal{M}} \inf_{\bar{g} \in [g]} \frac{12}{\text{Vol}(M, \bar{g})^{\frac{1}{2}}} \int_M \bar{K}_1^\perp dV_{\bar{g}}.$$

Vale a pena ressaltar que Gromov (1982) obteve a seguinte estimativa

$$\text{MinVol}(M) \geq c(n)|\chi(M)|, \quad (9)$$

onde $c(n)$ é uma constante positiva dependendo apenas da dimensão. Ele também obteve uma estimativa semelhante para os números de Pontryagin. O Teorema 1.6 nos diz que, em dimensão 4, podemos obter explicitamente o valor da constante c em (9). Além disso,

desde que a assinatura é um múltiplo do número de Pontryagin, concluímos que o mesmo argumento também se aplica no caso da assinatura.

Por fim, como consequência dos trabalhos de Freedman (1982), obtemos a seguinte caracterização.

Corolário 1.7 (Costa, Diógenes, Ribeiro Jr., 2014) *Seja M^4 variedade compacta simplesmente conexa satisfazendo*

$$\text{Vol}_{|\mathbb{K}^\perp|}(M) \leq \frac{36}{25}\pi^2. \quad (10)$$

Então, M^4 é homeomorfa a \mathbb{S}^4 ou ao $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

Ressaltamos que o volume mínimo pode depender da estrutura diferenciável da variedade. De fato, Bessieres (1998) deu exemplos de variedade que são homeomorfas, mas têm diferentes volume mínimos. Além disso, existem pares de variedades homeomorfas de dimensão 4 que tem volume mínimo zero para uma variedade e positivo para a outra. Entretanto, tais exemplos não podem ser simplesmente conexos; para mais detalhes veja (KOTSHICK, 2012).

2 PRELIMINARES

O objetivo deste capítulo é apresentar o material básico necessário para a boa compreensão dos capítulos que seguem. No que segue (M^n, g) denotará uma variedade Riemanniana n -dimensional com métrica g e conexão de Levi-Civita ∇ . O espaço das funções diferenciáveis (ou de classe \mathcal{C}^∞) sobre M será denotado por $\mathcal{C}^\infty(M)$. O espaço dos campos diferenciáveis sobre M será denotado por $\mathfrak{X}(M)$.

2.1 Notações básicas e alguns tensores importantes

Para fixar as notações, dada uma variedade Riemanniana (M, g) , o **tensor curvatura de Riemann** é o $(1, 3)$ -tensor $\text{Rm} : \mathfrak{X}(M)^3 \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ definido por

$$\begin{aligned} \text{Rm}(X, Y)Z &= \nabla_{X,Y}^2 Z - \nabla_{Y,Z}^2 Z \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \end{aligned}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Usando o tensor métrico, podemos interpretar o tensor Rm como um $(0, 4)$ -tensor, definido por $\text{Rm} : \mathfrak{X}(M)^4 \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$

$$\text{Rm}(X, Y, Z, W) = -g(\text{Rm}(X, Y)Z, W).$$

Relembramos alguns tensores importantes para o nosso trabalho. O tensor de Weyl W é definido, para $n \geq 3$, pela seguinte decomposição:

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= W_{ijkl} + \frac{1}{n-2} (R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il}) \\ &\quad - \frac{R}{(n-1)(n-2)} (g_{jl}g_{ik} - g_{il}g_{jk}), \end{aligned} \quad (11)$$

onde R_{ijkl} denota o tensor de curvatura de Riemann e R_{ij} denota o tensor de Ricci. Outro tensor importante é o tensor de Cotton C , definido como segue:

$$C_{ijk} = \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)} (\nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R g_{ik}). \quad (12)$$

Uma relação importante entre o tensor de Weyl e o tensor de Cotton é dada pela seguinte identidade

$$\nabla_l W_{ijkl} = -\frac{(n-3)}{(n-2)} C_{ijk}. \quad (13)$$

O tensor de Schouten A é definido por

$$A_{ij} = \frac{1}{n-2} \left(R_{ij} - \frac{R}{2(n-1)} g_{ij} \right). \quad (14)$$

De (11) e (14) concluímos que

$$R_{ijkl} = (A \odot g)_{ijkl} + W_{ijkl}, \quad (15)$$

onde \odot representa o produto Kulkarni-Nomizu, o qual é definido por

$$(A \odot B)_{ijkl} = A_{ik}B_{jl} + A_{jl}B_{ik} - A_{il}B_{jk} - A_{jk}B_{il}.$$

Observação 2.1 *Uma importante propriedade do tensor de Cotton é que ele é anti-simétrico nos dois primeiros índices e tem traço nulo em quaisquer índices, isto é,*

$$C_{ijk} = -C_{jik} \text{ e } g^{ij}C_{ijk} = g^{ik}C_{ijk} = 0. \quad (16)$$

Por fim, a definição do tensor de Bach, o qual foi introduzido em 1921, é dado, para $n \geq 4$, por

$$B_{ij} = \frac{1}{n-3} \nabla^k \nabla^l W_{ikjl} + \frac{1}{n-2} R_{kl} W_i{}^k{}_{j}{}^l. \quad (17)$$

Além disso, para $n = 3$, temos

$$B_{ij} = \nabla^k C_{kij}. \quad (18)$$

Dizemos que a métrica é Bach-*flat* se $B_{ij} = 0$. Em dimensão 4, as métricas Bach-*flats* são precisamente pontos críticos do funcional conformemente invariante

$$\mathcal{W}(g) = \int_M |W_g|^2 dM_g,$$

definido no espaço das métricas Riemannianas. Em particular, se uma métrica é localmente conformemente *flat*, então ela é também Bach-*flat*. Além disso, se a métrica é Einstein, então ela é Bach-*flat*.

Relembremos ainda a definição de norma para tensores do tipo curvatura, a qual difere da usual por uma constante. Isso se deve ao fato de estarmos considerando o tensor como um operador. Seja A um tensor do tipo curvatura. Definimos a norma de A como

$$|A|^2 = \frac{1}{4} A_{ijkl} A^{ijkl}. \quad (19)$$

Se olharmos A como operador de curvatura, temos que sua norma é dada por

$$|A|^2 = \sum_{i < j} A(e_{ij})^2, \quad (20)$$

onde $\{e_{ij}; i < j\}$ é uma base para o espaço das 2-formas $\Lambda^2 M$. Dessa maneira, as normas (19) e (20) coincidem, veja (RODRIGUES, 2014).

Com tal definição, podemos deduzir a norma do tensor de Riemann, a qual é dada por

$$|Rm|^2 = |W|^2 + \frac{1}{n-2} |\overset{\circ}{Ric}|^2 + \frac{1}{2n(n-1)} R^2, \quad (21)$$

onde $\overset{\circ}{Ric} = Ric - \frac{R}{n}g$ é o tensor de Ricci sem traço. Essa fórmula será útil para demonstrar alguns dos resultados principais apresentados no Capítulo 4.

2.2 Métricas críticas do funcional volume

O estudo das métricas críticas do funcional volume foi iniciado por Miao e Tam (2009, 2011). Primeiramente eles estudaram o problema variacional do funcional volume e posteriormente a equação de Euler-Lagrange associado ao problema variacional do funcional volume. Aqui, por simplicidade, estas métricas recebem a seguinte definição.

Definição 2.1 *Uma **métrica crítica de Miao-Tam** é uma tripla (M^n, g, f) , onde (M^n, g) é uma variedade Riemanniana compacta e conexa com bordo suave ∂M e f é uma função suave em M tal que $f^{-1}(0) = \partial M$ e satisfaz à seguinte equação:*

$$-\Delta f g + \nabla^2 f - f Ric = g, \quad (22)$$

onde ∇^2 denota o Hessiano.

Tomando o traço em (22) obtemos que as métricas críticas de Miao-Tam satisfazem

$$(n-1)\Delta f + Rf + n = 0. \quad (23)$$

Além disso, se $\overset{\circ}{T} = T - \frac{\text{tr}T}{n}g$ denota o tensor sem traço associado a T , a partir de (23) deduzimos que

$$\begin{aligned} f \overset{\circ}{Ric} &= f Ric - \frac{fR}{n}g \\ &= \nabla^2 f + \frac{fR+1}{n-1}g - \frac{fR}{n}g \\ &= \nabla^2 f + \frac{Rf+n}{n(n-1)}g \\ &= \nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g \\ &= \nabla^{\circ 2} f. \end{aligned} \quad (24)$$

Apresentaremos agora alguns exemplos, construídos por Miao e Tam (2009).

Exemplo 2.1 *Considere $M^n \subset \mathbb{R}^n$ uma bola geodésica centrada na origem de raio R_0 e a função f definida por $f(x) = \frac{R_0^2}{2(n-1)} - \frac{|x|^2}{2(n-1)}$. Consideremos em \mathbb{R}^n a métrica canônica*

g e em M a métrica restrita. Daí $\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{n-1}$, e assim temos

$$\nabla^2 f = -\frac{1}{n-1}g$$

e

$$\Delta f = -\frac{n}{n-1}.$$

Portanto,

$$-\Delta f g + \nabla^2 f - f Ric = \frac{n}{n-1}g - \frac{1}{n-1}g = g,$$

e além disso $f^{-1}(0) = \partial M$. Logo (M^n, g, f) é uma métrica crítica de Miao-Tam.

Exemplo 2.2 Considere $\mathbb{R}^{n,1} = (\mathbb{R}^{n+1}, ds^2)$, onde $ds^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2 - dt^2$. Considere $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_1^2 + \dots + x_n^2 - t^2 = -1, t \geq 1\}$ mergulhado em $\mathbb{R}^{n,1}$ e seja g a métrica induzida. Nessas condições g é uma métrica Riemanniana. Agora fixe $p = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{H}^n$ e considere $M^n \subset \mathbb{H}^n$ uma bola geodésica centrada em p de raio R_0 e a função f definida por $f(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{\cosh r}{\cosh R_0}\right) = \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{t}{\cosh R_0}\right)$, onde r é a distância geodésica de (x_1, \dots, x_n, t) à p . Assim $t = \cosh r$ e t é a função altura. Daí,

$$\nabla^2 f = -\frac{1}{(n-1) \cosh R_0} \nabla^2(t) = -\frac{t}{(n-1) \cosh R_0} g.$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} -\Delta f g + \nabla^2 f - f Ric &= \frac{nt}{(n-1) \cosh R_0} g - \frac{t}{(n-1) \cosh R_0} g \\ &\quad + \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{t}{\cosh R_0}\right) (n-1)g \\ &= \frac{nt - t + (n-1) \cosh R_0 - (n-1)t}{(n-1) \cosh R_0} g \\ &= g, \end{aligned}$$

e $f^{-1}(0) = \partial M$. Assim (M^n, g, f) é uma métrica crítica de Miao-Tam.

Exemplo 2.3 Considere $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $p = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$. Sejam $M^n \subset \mathbb{S}^n$ um bola geodésica centrada em p de raio $R_0 < \frac{\pi}{2}$ e f a função definida por $f(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{1}{n-1} \left(\frac{t}{\cos R_0} - 1\right) = \frac{1}{n-1} \left(\frac{\cos r}{\cos R_0} - 1\right)$, onde r é a distância geodésica de (x_1, \dots, x_n, t) à p . Assim $t = \cos r$ e t é a função altura. Daí, obtemos

$$\nabla^2 f = \frac{1}{(n-1) \cos R_0} \nabla^2(t) = -\frac{t}{(n-1) \cos R_0} g.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
-\Delta f g + \nabla^2 f - f Ric &= \frac{nt}{(n-1) \cos R_0} g - \frac{t}{(n-1) \cos R_0} g \\
&\quad - \frac{1}{n-1} \left(\frac{t}{\cos R_0} - 1 \right) (n-1) g \\
&= \frac{nt - t - (n-1)t + (n-1) \cos R_0}{(n-1) \cosh R_0} g \\
&= g,
\end{aligned}$$

e $f^{-1}(0) = \partial M$. Assim (M^n, g, f) é uma métrica crítica de Miao-Tam.

O fato dos exemplos terem curvatura escalar constante não é uma mera coincidência. De fato as métricas críticas de Miao-Tam têm curvatura escalar constante. Para provar isso utilizaremos o seguinte lema técnico.

Lema 2.1 *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana e f uma função suave, então*

$$\operatorname{div} \nabla^2 f = Ric(\nabla f) + \nabla \Delta f.$$

Demonstração: Calculando diretamente e usando a identidade de Ricci, segue que

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div} \nabla^2 f)_i &= g^{jk} \nabla_j \nabla_k \nabla_i f \\
&= g^{jk} \nabla_j \nabla_i \nabla_k f \\
&= g^{jk} \nabla_i \nabla_j \nabla_k f + g^{jk} R_{jikl} \nabla^l f \\
&= \nabla_i \Delta f + R_{il} \nabla^l f.
\end{aligned}$$

□

Agora, provemos que as métricas críticas de Miao-Tam tem curvatura escalar constante.

Proposição 2.1 (Miao, Tam, 2009) *Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam. Então (M^n, g) tem curvatura escalar constante.*

Demonstração: Tomando o divergente na equação principal (22), usando o Lema 2.1 e a segunda identidade de Bianchi contraída duas vezes, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \operatorname{div} g = \operatorname{div}(-\Delta f g + \nabla^2 f - f Ric) \\
&= -\nabla \Delta f + Ric(\nabla f) + \nabla \Delta f - f \frac{1}{2} \nabla R - Ric(\nabla f) \\
&= -\frac{1}{2} f \nabla R,
\end{aligned}$$

ou seja, $f dR \equiv 0$. Assim, $dR \equiv 0$ em $M \setminus \partial M$. Como ∂M tem medida nula, usamos a continuidade da curvatura escalar R e o fato de M ser conexa, para concluir que R é constante em M , o que finaliza a prova da proposição. □

A motivação para o estudo das métricas críticas de Miao-Tam vem do estudo variacional do funcional volume, restrito às métricas de curvatura escalar constante e com métrica fixada no bordo. Para isto, considere M^n uma variedade suave com bordo suave ∂M e seja γ uma métrica Riemanniana em ∂M fixada. Considere os seguintes espaços:

$$\mathcal{M}_\gamma = \{g \text{ métrica Riemanniana em } M \text{ tal que } g|_{T\partial M} = \gamma\},$$

o qual é uma variedade suave, veja (FREED; GROISSER, 1989; GIL-MEDRANO; MICHOR, 1991); $\mathcal{S}^{k,2} \subset W^{k,2}$ o espaço dos $(0,2)$ -tensores simétricos em M ; $\mathcal{S}_0^{k,2} = \{h \in \mathcal{S}^{k,2}; h|_{T(\partial M)} = 0\}$ e $W^{k-2,2}(M) \subset W^{k-2,2}$ as funções em M . Considere a aplicação $\mathcal{R} : \mathcal{M}_\gamma \rightarrow W^{k-2,2}(M)$ dada por $\mathcal{R}(g) = R(g)$, onde $R(g)$ é a curvatura escalar da métrica g . O fato de \mathcal{R} ser suave é devido a Fischer e Marsden.

Lema 2.2 (Fischer, Marsden, 1975) *A aplicação $\mathcal{R} : \mathcal{M}_\gamma \rightarrow W^{k-2,2}(M)$ é suave.*

Seja $g_0 \in \mathcal{M}_\gamma$ e suponha que a curvatura escalar de g_0 é constante e igual a R . Miao e Tam provaram o seguinte lema.

Lema 2.3 (Miao, Tam, 2009) *Suponha que 0 não é um dos autovalores de Dirichlet do operador $(n-1)\Delta_{g_0} + R$. Então, próximo a g_0 , o conjunto*

$$\mathcal{M}_\gamma^R = \{g \in \mathcal{M}_\gamma; R(g) = R\}$$

é uma subvariedade de \mathcal{M}_γ .

Demonstração: A linearização de R em g_0 é dada por

$$DR_{g_0}(h) = -\Delta_{g_0}(\text{tr}_{g_0} h) + \text{div}_{g_0} \text{div}_{g_0} h - \langle h, Ric_{g_0} \rangle_{g_0},$$

para $h \in \mathcal{S}_0^{k,2} = T_{g_0} \mathcal{M}_\gamma$. Seja $f \in W^{k-2,2}(M)$ e considere o seguinte problema de bordo

$$\begin{cases} -(n-1)\Delta_{g_0} u - Ru = f, & \text{em } M \\ u = 0, & \text{no } \partial M, \end{cases}$$

que tem única solução pela hipótese do autovalor de Dirichlet e a alternativa de Fredholm. Agora, seja $h = ug_0$, então

$$\begin{aligned} DR_{g_0}(h) &= -\Delta_{g_0}(\text{tr}_{g_0} ug_0) + \text{div}_{g_0} \text{div}_{g_0}(ug_0) - \langle ug_0, Ric_{g_0} \rangle_{g_0} \\ &= -n\Delta_{g_0} u + \text{div}(\nabla u) - uR \\ &= -(n-1)\Delta_{g_0} u - Ru \\ &= f. \end{aligned}$$

Logo, DR_{g_0} é sobrejetiva. Dado que $\mathcal{S}_0^{k,2}$ é um espaço de Hilbert, segue que $\text{Ker} DR_{g_0}$ é necessariamente um *split*. O resultado segue então pelo Teorema da função implícita. \square

A importância desse lema se deve ao fato de podermos calcular pontos críticos de funcionais Riemannianos, uma vez que localmente \mathcal{M}_γ^R é uma subvariedade. A próxima proposição é um resultado importante para mostrar que as métricas críticas de Miao-Tam são pontos críticos do funcional volume.

Proposição 2.2 (Miao, Tam, 2009) *Seja $g_0 \in \mathcal{M}_\gamma^R$ tal que o primeiro autovalor de Dirichlet de $(n-1)\Delta_{g_0} + R$ é positivo. Sejam h um $(0,2)$ -tensor simétrico em M tal que $h|_{T(\partial M)} = 0$ e $g(t) = g_0 + th$. Então existem $t_0 > 0$ e $\epsilon > 0$ tais que para todo $|t| < t_0$ o seguinte problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \alpha \Delta_{g(t)} u - R(t)u = -Ru^a, & \text{em } M \\ u = 1, & \text{no } \partial M, \end{cases}$$

tem única solução tal que $1 - \epsilon \leq u \leq 1 + \epsilon$, onde $\alpha = \frac{4(n-1)}{n-2}$, $a = \frac{n+2}{n-2}$ e $R(t)$ é a curvatura escalar de $g(t)$. Além disso, $v = \frac{\partial u}{\partial t}(0)$ existe e $v \in C^\infty(\bar{M})$, a qual é a única solução de

$$\begin{cases} (n-1)\Delta_{g(t)} v + Rv = \frac{n-2}{4}R'(0), & \text{em } M \\ v = 0, & \text{no } \partial M. \end{cases}$$

Relembremos que o funcional volume $V : \mathcal{M}_\gamma \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por

$$V(g) = \int_M dV_g,$$

cuja linearização é dada por

$$DV_g(h) = \frac{1}{2} \int_M \text{tr}_g h dV_g.$$

Para o próximo teorema, assumiremos que g tem curvatura escalar constante igual a R . Esse teorema mostra que as métricas críticas de Miao-Tam são precisamente pontos críticos do funcional volume restrito ao espaço \mathcal{M}_γ^R .

Teorema 2.1 (Miao, Tam, 2009) *Seja $g \in \mathcal{M}_\gamma^R$ tal que o primeiro autovalor de Dirichlet de $(n-1)\Delta_g + R$ é positivo. Então g é ponto crítico do funcional volume $V(\cdot)$ em \mathcal{M}_γ^R se, e somente se, existe uma função f em \bar{M} tal que*

$$\begin{cases} -\Delta_g f g + \nabla_g^2 f - f \text{Ric}_g = g, & \text{em } M \\ f = 0, & \text{no } \partial M. \end{cases} \quad (25)$$

Demonstração: Pelo Lema 2.3, existe uma vizinhança U de g em \mathcal{M}_γ tal que $U \cap \mathcal{M}_\gamma^R$ é uma subvariedade de \mathcal{M}_γ . Tudo que segue será feito nessa subvariedade.

Suponha que g é ponto crítico de $V(\cdot)$ em \mathcal{M}_γ^R . Dado que $(n-1)\Delta_g + R$ tem primeiro autovalor de Dirichlet positivo, pela alternativa de Fredholm existe uma função

f em \overline{M} tal que

$$\begin{cases} (n-1)\Delta_g f + Rf = -n, & \text{em } M \\ f = 0, & \text{no } \partial M. \end{cases} \quad (26)$$

Seja h um $(0, 2)$ -tensor simétrico com suporte compacto em M . Defina $g(t) = g + th$, então para t pequeno, $g(t) \in \mathcal{M}_\gamma$. Para cada t , considere o seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \alpha \Delta_{g(t)} u - R(t)u = -Ru^a, & \text{em } M \\ u = 1, & \text{no } \partial M, \end{cases} \quad (27)$$

onde $\alpha = \frac{4(n-1)}{n-2}$, $a = \frac{n+2}{n-2}$. Pela Proposição 2.2, para t pequeno, (27) tem única solução $u(t)$ positiva (que é suave a menos do bordo).

Observe que $u(t)^{\frac{4}{n-2}}g(t)$ está em \mathcal{M}_γ^R e é uma curva C^1 em \mathcal{M}_γ^R . De fato, para uma métrica conforme $\overline{g} = e^{2v}g$, temos que

$$\overline{R} = e^{-2v}(-2(n-1)\Delta v - (n-1)(n-2)|\nabla v|^2 + R).$$

Como $u(t)$ é positiva então

$$u(t)^{\frac{4}{n-2}} = e^{\ln u(t) \frac{4}{n-2}} = e^{2 \ln u(t) \frac{2}{n-2}}.$$

Faça $v = \ln u(t)^{\frac{2}{n-2}}$. Daí

$$\begin{aligned} \nabla v &= \frac{1}{u(t)^{\frac{2}{n-2}}} \frac{2}{n-2} u(t)^{\frac{2}{n-2}-1} \nabla u(t) = \frac{2}{(n-2)u(t)} \nabla u(t). \\ |\nabla v|^2 &= \frac{4}{(n-2)^2 u(t)^2} |\nabla u(t)|^2. \\ \Delta v &= \frac{2}{n-2} \left(\frac{1}{u(t)} \Delta u(t) - \frac{1}{u(t)^2} |\nabla u(t)|^2 \right). \end{aligned}$$

Portanto, se fizermos $\overline{g} = u(t)^{\frac{4}{n-2}}g(t)$ temos que

$$\begin{aligned} \overline{R} &= u(t)^{-\frac{4}{n-2}} \left[-2(n-1) \frac{2}{n-2} \left(\frac{1}{u(t)} \Delta u(t) - \frac{1}{u(t)^2} |\nabla u(t)|^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - (n-1)(n-2) \frac{4}{(n-2)^2 u(t)^2} |\nabla u(t)|^2 + R(t) \right] \\ &= u(t)^{-\frac{4}{n-2}-2} \left[-\frac{4(n-1)}{n-2} u(t) \Delta u(t) + \frac{4(n-1)}{n-2} |\nabla u(t)|^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{4(n-1)}{n-2} |\nabla u(t)|^2 + R(t)u(t)^2 \right] \\ &= u(t)^{-\frac{4}{n-2}-1} [-\alpha \Delta u(t) + R(t)u(t)], \end{aligned}$$

por (27) temos

$$\begin{aligned}\bar{R} &= u(t)^{-\frac{4}{n-2}-1}(Ru(t)^a) \\ &= Ru(t)^{a-\frac{4}{n-2}-1}.\end{aligned}$$

Note que $a - \frac{4}{n-2} - 1 = 0$, logo $\bar{R} = R$. Além disso,

$$u(t)^{\frac{4}{n-2}}g(t)|_{T(\partial M)} = g(t)|_{T(\partial M)} = g|_{T(\partial M)} = \gamma.$$

Portanto $u(t)^{\frac{4}{n-2}}g(t)$ está em \mathcal{M}_γ^R . Assim, como $u \equiv 1$ quando $t = 0$, segue que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left(u(t)^{\frac{4}{n-2}}g(t) \right) \Big|_{t=0} &= \frac{4}{n-2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t)u(t)^{\frac{4}{n-2}-1}g(t) \right) \Big|_{t=0} + \left(u(t)^{\frac{4}{n-2}}\frac{\partial g}{\partial t}(t) \right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{4}{n-2}u'g + h,\end{aligned}$$

onde $u' = \frac{\partial u}{\partial t}(0)$. Como g é ponto crítico de $V(\cdot)$ em \mathcal{M}_γ^R , então $DV_g(h) = 0$, para qualquer $(0, 2)$ -tensor simétrico h com suporte compacto. Em particular

$$\begin{aligned}0 &= DV_g \left(\frac{4}{n-2}u'g + h \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_M \text{tr}_g \left(\frac{4}{n-2}u'g + h \right) dV_g,\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_M \left(\frac{4n}{n-2}u' + \text{tr}_g h \right) dV_g = 0. \quad (28)$$

Novamente pela Proposição 2.2, temos que u' satisfaz

$$\begin{cases} (n-1)\Delta_g u' + Ru' = \frac{n-2}{4}R'(0), & \text{em } M \\ u' = 0, & \text{no } \partial M. \end{cases} \quad (29)$$

Mas veja que $\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g u' + \frac{4}{n-2}Ru' = R'(0)$, isto é,

$$\begin{aligned}\alpha\Delta_g u' - R'(0) &= -\frac{4}{n-2}Ru' \\ &= aRu' - aRu' - \frac{4}{n-2}Ru' \\ &= -aRu' + \frac{n+2}{n-2}Ru' - \frac{4}{n-2}Ru' \\ &= -aRu' + \frac{n-2}{n-2}Ru' \\ &= -aRu' + Ru'.\end{aligned}$$

Logo, podemos reescrever (29) como:

$$\begin{cases} (\alpha \Delta_g u' - R'(0) - Ru' = -aRu', & \text{em } M \\ u' = 0, & \text{no } \partial M. \end{cases} \quad (30)$$

Assim, usando (26) e o Teorema de Green, temos

$$\begin{aligned} \frac{4n}{n-2} \int_M u' dV_g &= \frac{n\alpha}{n-1} \int_M u' dV_g \\ &= \alpha \int_M \frac{n}{n-1} u' dV_g \\ &= \alpha \int_M \left(-\frac{fR}{n-1} u' - u' \Delta_g f \right) dV_g \\ &= \alpha \int_M \left(-\frac{fR}{n-1} u' - f \Delta_g u' \right) dV_g + \alpha \int_{\partial M} (f_\nu \text{tr}_g h - (\text{tr}_g)_\nu f) dS_g \\ &= \int_M \left(-\frac{fR}{n-1} \alpha u' - \alpha f \Delta_g u' \right) dV_g, \end{aligned}$$

por (30) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{4n}{n-2} \int_M u' dV_g &= \int_M \left[-\frac{fR}{n-1} \alpha u' - f(-aRu' + R'(0) + Ru') \right] dV_g \\ &= \int_M f \left[-R'(0) + \left(a - 1 - \frac{\alpha}{n-1} \right) Ru' \right] dV_g. \end{aligned}$$

Veja que $a - 1 - \frac{\alpha}{n-2} = \frac{n+2}{n-2} - \frac{n-2}{n-2} - \frac{4}{n-2} = 0$ e $R'(0) = DR_g(h)$, portanto

$$\frac{4n}{n-2} \int_M u' dV_g = \int_M f (\Delta_g(\text{tr}_g h) - \text{div}_g \text{div}_g h + \langle h, Ric_g \rangle_g) dV_g. \quad (31)$$

Como f e h se anulam no bordo, temos

$$\begin{aligned} \int_M f \Delta_g(\text{tr}_g h) dV_g &= \int_M \text{tr}_g h \Delta_g f dV_g + \int_{\partial M} (f_\nu \text{tr}_g h - (\text{tr}_g h)_\nu f) dS_g \\ &= \int_M \langle h, \Delta_g f g \rangle_g dV_g, \end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned} \int_M f \text{div}_g \text{div}_g h dV_g &= \int_M f \nabla^i \nabla^j h_{ij} dV_g \\ &= \int_M \nabla^i (f \nabla^j h_{ij}) dV_g - \int_M \nabla^i f \nabla^j h_{ij} dV_g \\ &= \int_{\partial M} f \nabla^j h_{ij} \nu^i dS_g - \int_M \nabla^j (\nabla^i f h_{ij}) dV_g + \int_M \nabla^j \nabla^i f h_{ij} dV_g. \end{aligned}$$

Usando, mais uma vez, o fato de f ser nula no bordo, obtemos

$$\begin{aligned} \int_M f \operatorname{div}_g \operatorname{div}_g h dV_g &= - \int_{\partial M} \nabla^i h_{ij} \nu^i dS_g + \int_M \langle h, \nabla_g^2 f \rangle_g dV_g \\ &= \int_M \langle h, \nabla_g^2 f \rangle_g dV_g. \end{aligned}$$

Substituindo as expressões acima em (31) e comparando com (28), temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M \langle h, \Delta_g f g \rangle_g dV_g - \int_M \langle h, \nabla_g^2 f \rangle_g dV_g + \int_M \langle h, f \operatorname{Ric}_g \rangle_g dV_g + \int_M \langle h, g \rangle_g dV_g \\ &= \int_M \langle h, \Delta_g f g - \nabla_g^2 f + f \operatorname{Ric}_g + g \rangle_g dV_g. \end{aligned}$$

Como h é arbitrário segue que

$$\begin{cases} -\Delta_g f g + \nabla_g^2 f - f \operatorname{Ric}_g = g, & \text{em } M \\ f = 0, & \text{no } \partial M. \end{cases}$$

Reciprocamente, suponha que exista uma função $f \in C^\infty(\overline{M})$ satisfazendo (25). Seja h um $(0, 2)$ -tensor simétrico com suporte compacto, então $h \in \operatorname{Ker} DR_g$, daí pelo que foi visto acima

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M f DR_g(h) dV_g \\ &= \int_M f (-\Delta_g(\operatorname{tr}_g h) + \operatorname{div}_g \operatorname{div}_g h - \langle h, \operatorname{Ric}_g \rangle_g) dV_g \\ &= \int_M \langle h, -\Delta_g f g + \nabla_g^2 f - f \operatorname{Ric}_g \rangle_g dV_g \\ &= \int_M \langle h, g \rangle_g \\ &= \int_M \operatorname{tr}_g h dV_g \\ &= 2DV_g(h). \end{aligned}$$

Portanto, g é ponto crítico de $V(\cdot)$ em \mathcal{M}_γ^R . □

Para finalizar esta seção, apresentamos uma proposição que mostra que a função potencial e a métrica crítica de Miao-Tam são analíticas, nos pontos onde f é não nula, isto é, fora do bordo.

Proposição 2.3 (Corvino, 2000) *Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam. Então em cada ponto p com $f(p) \neq 0$, existe uma vizinhança e um sistema de coordenadas na qual f e g são analíticas.*

Demonstração: Inicialmente, observe que temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \Delta f + \frac{fR+n}{n-1} = 0 \\ fRic - \nabla^2 f - \frac{fR+1}{n-1}g = 0. \end{cases}$$

Escolha $\{x^i\}$ sistema de coordenadas harmônicas, logo ele satisfaz $\Delta x^i = 0$, para $i = 1, \dots, n$. Denotando $\Gamma^k = g^{ij}\Gamma_{ij}^k$, temos que nessas coordenadas, o tensor de Ricci satisfaz

$$R_{ij} - \frac{1}{2}(g_{ri}\partial_j\Gamma^r + g_{rj}\partial_i\Gamma^r) \approx \partial_k\Gamma_{ij}^k - \partial_j\Gamma_{ki}^k - \frac{1}{2}g_{ri}g^{st}\partial_j\Gamma_{st}^r - \frac{1}{2}g_{rj}g^{st}\partial_i\Gamma_{st}^r,$$

onde \approx quer dizer: igual a menos de termos g_{ij} e $\partial_k g_{ij}$. Mas veja que

$$\begin{aligned} \partial_k\Gamma_{ij}^k - \partial_j\Gamma_{ki}^k &= \partial_k\left(\frac{1}{2}g^{km}\{\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{mi} - \partial_m g_{ij}\}\right) \\ &\quad - \partial_j\left(\frac{1}{2}g^{km}\{\partial_k g_{im} + \partial_i g_{mk} - \partial_m g_{ki}\}\right) \\ &\approx \frac{g^{km}}{2}(\partial_k\partial_i g_{jm} + \partial_k\partial_j g_{mi} - \partial_k\partial_m g_{ij} - \partial_j\partial_k g_{im} - \partial_j\partial_i g_{mk} + \partial_j\partial_m g_{ki}) \\ &\approx \frac{g^{km}}{2}(\partial_k\partial_i g_{jm} - \partial_k\partial_m g_{ij} - \partial_j\partial_m g_{ki}). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}g_{ri}g^{st}\partial_j\Gamma_{st}^r + \frac{1}{2}g_{rj}g^{st}\partial_i\Gamma_{st}^r &= \frac{1}{2}g_{ri}g^{st}\partial_j\left(\frac{1}{2}g^{rq}\{\partial_s g_{tq} + \partial_t g_{qs} - \partial_q g_{ts}\}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}g_{rj}g^{st}\partial_i\left(\frac{1}{2}g^{rq}\{\partial_s g_{tq} + \partial_t g_{qs} - \partial_q g_{ts}\}\right) \\ &\approx \frac{1}{4}g^{st}g_{ri}g^{rq}(\partial_j\partial_s g_{tq} + \partial_j\partial_t g_{qs} - \partial_j\partial_q g_{ts}) \\ &\quad + \frac{1}{4}g^{st}g_{rj}g^{rq}(\partial_i\partial_s g_{tq} + \partial_i\partial_t g_{qs} - \partial_i\partial_q g_{ts}) \\ &\approx \frac{1}{4}g^{st}(\partial_j\partial_s g_{ti} + \partial_j\partial_t g_{is} - \partial_j\partial_i g_{ts} + \partial_i\partial_s g_{tj} + \partial_i\partial_t g_{js} - \partial_i\partial_j g_{ts}) \\ &\approx \frac{1}{2}g^{st}(\partial_j\partial_t g_{is} + \partial_i\partial_t g_{js} - \partial_i\partial_j g_{ts}). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} R_{ij} - \frac{1}{2}(g_{ri}\partial_j\Gamma^r + g_{rj}\partial_i\Gamma^r) &\approx \frac{g^{km}}{2}(\partial_k\partial_i g_{jm} - \partial_k\partial_m g_{ij} - \partial_j\partial_m g_{ki}) \\ &\quad - \frac{1}{2}g^{st}(\partial_j\partial_t g_{is} + \partial_i\partial_t g_{js} - \partial_i\partial_j g_{ts}) \\ &\approx -\frac{1}{2}g^{st}\partial_s\partial_t g_{ij}. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}\Delta x^i &= g^{jk} \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial x^k} - \Gamma_{jk}^l \frac{\partial x^i}{\partial x^l} \right) \\ &= -g^{jk} \Gamma_{jk}^l \delta_{li} \\ &= -g^{jk} \Gamma_{jk}^i = -\Gamma^i.\end{aligned}$$

Daí

$$R_{ij} \approx -\frac{1}{2} g^{st} \partial_s \partial_t g_{ij}.$$

Assim, o sistema tem como maior ordem o termo da forma

$$(h, k_{ij}) \rightarrow (g^{kl} \partial_k \partial_l h, -\frac{1}{2} f g^{st} \partial_s \partial_t k_{ij} - \partial_i \partial_j h),$$

o qual é um sistema elíptico, em todos os pontos p onde $f(p) \neq 0$. Assim, aplicando a teoria padrão para sistemas analíticos elípticos, veja (MORREY, 1996), a regularidade segue. Logo, f e g são reais analíticas. \square

2.3 Curvatura biortogonal e o problema de Yamabe modificado

Seja $p \in M^4$ e $P \subset T_p M$ um plano. Se denotarmos por $K(P)$ a curvatura seccional do plano P , então temos a seguinte definição.

Definição 2.2 *A curvatura (seccional) biortogonal de P é dado por*

$$K^\perp(P) = \frac{K(P) + K(P^\perp)}{2}, \quad (32)$$

onde P^\perp é o plano ortogonal ao plano P .

A soma de duas curvaturas de planos ortogonais, o qual foi provavelmente introduzido por Chern (1955), desempenha um papel muito importante em variedades de dimensão 4 e é de fundamental importância para nosso trabalho. Esta curvatura também apareceu nos trabalhos de Singer e Thorpe (1969), Gray (1972), Seaman (1991), Noronha (1995), Costa e Ribeiro Jr. (2004, 2014) e Bettiol (2014). Note que $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ com sua métrica canônica tem curvatura biortogonal positiva, o que mostra que a positividade da curvatura biortogonal não implica na positividade da curvatura de Ricci. De fato, curvatura biortogonal positiva é uma condição intermediária entre curvatura seccional positiva e curvatura escalar positiva. Além disso, como foi observado por Singer e Thorpe (1969), uma variedade Riemanniana (M^4, g) é Einstein se, e somente se, $K^\perp(P) = K(P)$, para qualquer plano $P \subset T_p M$ em qualquer ponto $p \in M^4$. De Seaman (1993) e Costa e Ribeiro Jr. (2014), \mathbb{S}^4 e $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ são as únicas variedades compactas, simplesmente conexa de dimensão 4 com curvatura biortogonal positiva que pode ter curvatura biortogonal

$\frac{1}{4}$ -pinched, ou curvatura isotrópica não negativa, ou satisfazer $K^\perp \geq \frac{R}{24} > 0$. Enquanto Bettiol (2015) mostrou que a positividade da curvatura biortogonal é preservada pela soma conexa.

Considere as seguintes funções

$$K_1^\perp(p) = \min\{K^\perp(P); P \subset T_p M\}, \quad (33)$$

$$K_3^\perp(p) = \max\{K^\perp(P); P \subset T_p M\}, \quad (34)$$

e

$$K_2^\perp(p) = \frac{R(p)}{4} - K_1^\perp(p) - K_3^\perp(p). \quad (35)$$

Estas funções foram definidas primeiramente por Costa e Ribeiro Jr (2004, 2014). Além disso, com suas métricas canônicas, as variedades \mathbb{S}^4 , $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ e $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ tem $K_1^\perp = \frac{R}{12}$, $K_1^\perp = \frac{R}{24}$ e $K_1^\perp = \frac{R}{12}$, respectivamente. Para maiores detalhes veja (COSTA; RIBEIRO JR., 2014).

Seja M^n uma variedade diferenciável de dimensão n e considere

$$\Lambda^k M = \coprod_{p \in M} \Lambda^k(T_p M).$$

Uma seção desse espaço é denominada uma *k-forma diferencial*, ou simplesmente, *k-forma*. As *k*-formas desempenham um papel fundamental na decomposição do tensor de curvatura, principalmente em dimensão 4, como veremos mais adiante. Relembremos que o operador estrela de Hodge é a única aplicação linear $*$: $\Lambda^k M \rightarrow \Lambda^{n-k} M$ que satisfaz

$$\omega \wedge * \eta = \langle \omega, \eta \rangle_g dV_g.$$

Uma das principais propriedades do operador estrela de Hodge é a decomposição do espaço $\Lambda^2 M$, isto é, a estrela de Hodge decompõe $\Lambda^2 M$ da seguinte maneira

$$\Lambda^2 M = \Lambda^+ M \oplus \Lambda^- M, \quad (36)$$

onde $\Lambda^+ M = \{\alpha \in \Lambda^2 M; *\alpha = \alpha\}$ é a parte autodual de $\Lambda^2 M$ e $\Lambda^- M = \{\alpha \in \Lambda^2 M; *\alpha = -\alpha\}$ é a parte antiautodual de $\Lambda^2 M$. Além disso, (36) mostra que o tensor de Weyl pode ser escrito da seguinte forma

$$W = W^+ \oplus W^-,$$

onde W^+ é a parte autodual de W e W^- é a parte antiautodual de W .

Fixado um ponto, podemos diagonalizar W^\pm de modo que $w_i^\pm, 1 \leq i \leq 3$, são seus respectivos autovalores. Em particular, eles satisfazem

$$w_1^\pm \leq w_2^\pm \leq w_3^\pm \quad \text{e} \quad w_1^\pm + w_2^\pm + w_3^\pm = 0. \quad (37)$$

A decomposição (36) ainda nos diz que o operador de curvatura \mathcal{R} pode ser escrito da seguinte maneira

$$\mathcal{R} = \left(\begin{array}{c|c} W^+ + \frac{R}{12}I & \mathring{Ric} \\ \hline \mathring{Ric}^* & W^- + \frac{R}{12}I \end{array} \right), \quad (38)$$

onde $\mathring{Ric} = Ric - \frac{R}{4}g$ é o tensor de Ricci sem traço e \mathring{Ric}^* é a adjunta de \mathring{Ric} .

A próxima proposição relaciona as funções (33), (34) e (35) com a curvatura escalar e os autovalores das partes autoduais e antiautoduais W^\pm do tensor de Weyl.

Proposição 2.4 (Costa, Ribeiro Jr., 2004 e 2014) *Seja (M^4, g) uma variedade Riemanniana compacta e orientada. Então*

$$K_1^\perp = \frac{w_1^+ + w_1^-}{2} + \frac{R}{12}, \quad (39)$$

$$K_3^\perp = \frac{w_3^+ + w_3^-}{2} + \frac{R}{12}, \quad (40)$$

e

$$K_2^\perp = \frac{w_2^+ + w_2^-}{2} + \frac{R}{12}. \quad (41)$$

Demonstração: Seja $p \in M^4$ e $X, Y \in T_pM$ ortonormais. Então, existe uma 2-forma unitária $\alpha = X \wedge Y$, a qual pode ser unicamente decomposta como $\alpha = \alpha^+ + \alpha^-$, onde $\alpha^\pm \in \Lambda^\pm M$ com $|\alpha^\pm| = \frac{1}{2}$. Assim, de (38) temos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\alpha) &= \begin{pmatrix} W^+ + \frac{R}{12}I & \mathring{Ric} \\ \mathring{Ric}^* & W^- + \frac{R}{12}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^+ \\ \alpha^- \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} W^+(\alpha^+) + \frac{R}{12}\alpha^+ + \mathring{Ric}(\alpha^-) \\ \mathring{Ric}^*(\alpha^+) + W^-(\alpha^-) + \frac{R}{12}\alpha^- \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, a curvatura seccional de α é dado por

$$\begin{aligned} K(\alpha) &= \langle \mathcal{R}(\alpha), \alpha \rangle \\ &= \langle W^+(\alpha^+), \alpha^+ \rangle + \frac{R}{12} \langle \alpha^+, \alpha^+ \rangle + \langle \mathring{Ric}(\alpha^-), \alpha^+ \rangle \\ &\quad + \langle \mathring{Ric}^*(\alpha^+), \alpha^- \rangle + \langle W^-(\alpha^-), \alpha^- \rangle + \frac{R}{12} \langle \alpha^-, \alpha^- \rangle \\ &= \frac{R}{12} + \langle W^+(\alpha^+), \alpha^+ \rangle + \langle \alpha^-, W^-(\alpha^-) \rangle + 2 \langle \alpha^+, \mathring{Ric}(\alpha^-) \rangle. \end{aligned}$$

Então, para $\alpha^\perp = \alpha^+ - \alpha^-$, temos

$$K(\alpha^\perp) = \frac{R}{12} + \langle W^+(\alpha^+), \alpha^+ \rangle + \langle \alpha^-, W^-(\alpha^-) \rangle - 2\langle \alpha^+, \mathring{Ric}(\alpha^-) \rangle.$$

Portanto, fazendo a média das equações acima, concluímos que

$$\frac{K(\alpha) + K(\alpha^\perp)}{2} = \frac{R}{12} + \langle W^+(\alpha^+), \alpha^+ \rangle + \langle \alpha^-, W^-(\alpha^-) \rangle. \quad (42)$$

Portanto, usando (33) obtemos

$$K_1^\perp = \frac{R}{12} + \min \left\{ \langle W^+(\alpha^+), \alpha^+ \rangle; |\alpha^+|^2 = \frac{1}{2} \right\} + \min \left\{ \langle \alpha^-, W^-(\alpha^-) \rangle; |\alpha^-|^2 = \frac{1}{2} \right\}.$$

Além disso, usando a Proposição 2.1 de (NORONHA, 1997), podemos concluir que existe uma base ortonormal de $\Lambda^2 M$ dado por

$$\{X_1 \wedge Y_1, X_2 \wedge Y_2, X_3 \wedge Y_3\}$$

onde $X_i, Y_i \in T_p M$ para todo $i = 1, 2, 3$. Daí, pela Proposição 2.5 de (NORONHA, 1997), concluímos que

$$K_1^\perp = \frac{w_1^+ + w_1^-}{2} + \frac{R}{12}.$$

De maneira similar prova-se que

$$K_3^\perp = \frac{w_3^+ + w_3^-}{2} + \frac{R}{12}.$$

Finalmente, de (35) segue que

$$K_2^\perp = \frac{w_2^+ + w_2^-}{2} + \frac{R}{12}.$$

□

A Proposição 2.4 nos diz que M é localmente conformemente *flat* se e somente se $K^\perp = \frac{R}{12}$. Isso foi provado por Kulkarni (1970).

Baseados nos trabalhos de Gursky e LeBrun (1998), Cheng e Zhu (2014), bem como Itoh (2005), estudaram o problema de Yamabe modificado em termos de um funcional dependendo do tensor de Weyl. Mais precisamente, seja $f : \mathcal{M} \rightarrow C^\infty(M)$ tal que para cada métrica $g \in \mathcal{M}$ satisfaz às seguintes condições

$$\begin{cases} f(W_g) \geq 0; \\ f(W_{\bar{g}}) = u^{-2} f(W_g), \text{ quando } \bar{g} = u^2 g. \end{cases} \quad (43)$$

Nessas condições, podemos definir o funcional de Yamabe modificado, o qual é dado por

$$\mathcal{Y}_f(M, g) = \frac{1}{\text{Vol}(M, g)^{\frac{n-2}{n}}} \int_M (R_g - f(W_g)) dV_g, \quad (44)$$

onde, neste caso, $R_g - f(W_g)$ é chamado de **curvatura escalar modificada** de (M, g) . De maneira similar ao caso do problema de Yamabe, podemos definir a constante de Yamabe modificada e o invariante de Yamabe modificado. Se denotarmos por $[g]$ a classe conforme de g , então temos a seguinte definição.

Definição 2.3 *A constante de Yamabe modificada e o invariante de Yamabe modificado são dados, respectivamente, pelas seguintes expressões:*

$$\mathcal{Y}_f(M, [g]) = \inf\{\mathcal{Y}_f(M, \bar{g}); \bar{g} \in [g]\} \quad (45)$$

e

$$\mathcal{Y}_f(M) = \sup\{\mathcal{Y}_f(M, [g]); g \in \mathcal{M}\}. \quad (46)$$

A proposição que segue, nos dar as principais propriedades da curvatura escalar modificada. Para uma prova detalhada, veja (LISTING, 2014, Sec. 2.2).

Proposição 2.5 (Itoh, 2005) *Seja M^n uma variedade suave compacta tal que exista uma função f satisfazendo a condição (43). Então:*

1. *Para cada $g \in \mathcal{M}$ existe $\bar{g} \in [g]$ com curvatura escalar modificada $R_{\bar{g}} - f(W_{\bar{g}})$ constante. Em particular, $R_{\bar{g}} - f(W_{\bar{g}}) = \mathcal{Y}_f(M, [g])$.*
2. *Existe uma métrica $g \in \mathcal{M}$ com curvatura escalar modificada $R_g - f(W_g)$ positiva se, e somente se, $\mathcal{Y}_f(M)$ é positivo.*

Em particular, em dimensão 4, baseados em (COSTA; RIBEIRO JR.; SANTOS, 2015) definimos a função $f_1(W_g) = -6(w_1^+ + w_1^-)$. Note que f_1 satisfaz as condições definidas em (43). Além disso, usando (33) deduzimos que

$$R_g - f_1(W_g) = 12K_1^\perp. \quad (47)$$

Assim, $12K_1^\perp$ é uma curvatura escalar modificada. Em particular, denotando $\mathcal{Y}_{f_1}(M, [g]) = \mathcal{Y}_1^\perp(M, [g])$ e $\mathcal{Y}_{f_1}(M) = \mathcal{Y}_1^\perp(M)$, temos a partir de (45) e (46) os seguintes invariantes

$$\mathcal{Y}_1^\perp(M, [g]) = \inf\left\{\frac{12}{\text{Vol}(M, \bar{g})^{\frac{1}{2}}} \int_M \bar{K}_1^\perp dV_{\bar{g}}; \bar{g} \in [g]\right\} \quad (48)$$

e

$$\mathcal{Y}_1^\perp(M) = \sup\{\mathcal{Y}_1^\perp(M, [g]); g \in \mathcal{M}\}. \quad (49)$$

2.4 Volume mínimo e curvatura mínima

Em 1982, Gromov introduziu o conceito de *volume mínimo* para uma variedade suave como sendo o ínfimo de todos os volumes sob as métricas de curvatura seccional limitada, em valor absoluto, por 1. Mais precisamente, temos a seguinte definição

Definição 2.4 *Seja M^n uma variedade suave. Definimos o **volume mínimo** de M por*

$$\text{MinVol}(M) = \inf\{\text{Vol}(M, g); |K_g| \leq 1\},$$

onde $\text{Vol}(M, g)$ é o volume de M e K_g é a curvatura seccional na métrica g .

Apresentaremos a seguir alguns exemplos e resultados clássicos.

Se M é compacta e admite uma métrica *flat*, então $\text{MinVol}(M) = 0$. De fato, se g é uma métrica *flat* em M , então $g_\lambda = \lambda g$ também é *flat* para qualquer λ real positivo. Como $\text{Vol}(M, g_\lambda) = \lambda^{\frac{n}{2}} \text{Vol}(M, g)$, segue que

$$\text{MinVol}(M) \leq \text{Vol}(M, g_\lambda) = \lambda^{\frac{n}{2}} \text{Vol}(M, g),$$

para qualquer λ real positivo. Portanto, temos que

$$\text{MinVol}(M) = 0.$$

Em particular, $\text{MinVol}(\mathbb{K}) = 0$ e $\text{MinVol}(\mathbb{T}^2) = 0$, onde \mathbb{K} é garrafa de Klein e \mathbb{T}^2 é o toro-*flat*.

Se M é uma superfície compacta e orientada, então

$$\text{MinVol}(M) = 2\pi|\chi(M)|.$$

De fato, pelo Teorema de Gauss-Bonnet

$$\begin{aligned} |\chi(M)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_M K_g dV_g \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_M |K_g| dV_g \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \text{Vol}(M, g), \end{aligned}$$

Com igualdade para K_g constante igual a 1 ou -1 . Em particular, $\text{MinVol}(\mathbb{S}^2) = 4\pi$.

$\text{MinVol}(M) \geq c(n)|\chi(M)|$, onde $c(n)$ é uma constante positiva dependendo apenas da dimensão. De fato, segue do Teorema Allendoerfer (1940) que a característica de Euler pode ser expressa como uma integral de um polinômio que depende apenas da curvatura.

Se M admite uma \mathcal{F} -estrutura polarizada, então $\text{MinVol}(M) = 0$. Para maiores detalhes, veja (CHEEGER; GROMOV, 1986).

Em geral é difícil calcular explicitamente o valor do volume mínimo de uma variedade. Wang e Xu (2009) mostraram que $\text{MinVol}(\mathbb{S}^{2n+1}) = 0$ e $\text{MinVol}(\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}) = 0$, para todo $n \geq 1$. Bavard e Pansu (1986) mostraram que $\text{MinVol}(\mathbb{R}^2) = 2\pi(1 + \sqrt{2})$. Por fim, $\text{MinVol}(\mathbb{R}^n) = 0$, para $n \geq 3$, isso foi provado primeiro por Gromov (1982) e posteriormente por Mei, Wang e Xu (2008).

Ainda em 1982, Gromov apresentou uma conjectura sobre o volume mínimo. Para tanto, relembramos que uma variedade Riemanniana (M^n, g) é dita ser hiperbólica se seu recobrimento universal for isométrico à (\mathbb{H}^n, g_0) , onde g_0 é métrica canônica de \mathbb{H}^n . Assim, temos a seguinte conjectura.

Conjectura 2.1 (Gromov, 1982) *Seja (M^n, g_0) uma variedade hiperbólica completa de volume finito. Então*

$$\text{MinVol}(M) = \text{Vol}(M, g_0).$$

Besson, Courtois e Gallot (1994) deram uma resposta parcial para a Conjectura de Gromov. Mais precisamente, eles provaram que a conjectura é verdade para variedades compactas. Posteriormente, Boland, Connell e Souto (2005) obtiveram estimativas inferiores do volume mínimo de variedades de volume finito possuindo uma aplicação própria para uma variedade de volume finito de curvatura negativamente pinçada, e mostraram que a isometria assintótica vale quando o volume mínimo é atingido. Assim, eles deram uma resposta positiva para a Conjectura 2.1.

Apresentamos agora uma definição equivalente para o volume mínimo. Por um argumento de densidade temos

$$\text{MinVol}(M) = \inf\{\text{Vol}(M, g); \|K_g\|_\infty = 1\}. \quad (50)$$

Como $\text{Vol}(M, \lambda g) = \lambda^{\frac{n}{2}} \text{Vol}(M, g)$ e $K_{\lambda g} = \frac{1}{\lambda} K_g$, temos que (50) é equivalente à

$$\text{MinVol}(M) = \inf\{\|K_g\|_\infty^{\frac{n}{2}}; \text{Vol}(M, g) = 1\}. \quad (51)$$

Para maiores detalhes, veja (BESSIERES, 2000; BERGER, 2003, p. 535).

Um outro invariante que será investigado neste trabalho é a *curvatura mínima*, que foi introduzido por Yun (1996), o qual é o menor *pinching* da curvatura seccional dentre as métricas de volume 1. Mais precisamente, dada uma variedade compacta M , considere o funcional Riemanniano dado por

$$\mathcal{R}^\infty(g) = |Rm|_\infty,$$

onde Rm denota o $(0, 4)$ -tensor de Riemann e $|\cdot|_\infty$ denota a norma do sup. Aqui estamos considerando $|Rm|^2 = \frac{1}{4} \sum R_{ijkl}^2$, ou seja, um quarto da norma usual dos tensores, isso se deve ao fato de ao considerarmos Rm como operador de curvatura, as normas coincidam. Assim, podemos definir a curvatura mínima.

Definição 2.5 *Para uma variedade compacta M , a **curvatura mínima** de M é dado por*

$$\text{Mincur}(M) = \inf\{ \mathcal{R}^\infty(g); g \in \mathcal{M}_1 \}.$$

A primeira observação importante sobre a curvatura mínima é que ela está diretamente relacionada com o volume mínimo, como nos mostra a próxima proposição.

Proposição 2.6 (Yun, 1996) *Seja M^n uma variedade suave compacta. Então*

$$\text{MinVol}(M) = 0 \text{ se, e somente se, } \text{Mincur}(M) = 0.$$

Demonstração: Suponha inicialmente que $\text{MinVol}(M) = 0$, então existe uma sequência de métricas $\{g_i\}$ tais que $|K_{g_i}| \leq 1$ e $v_i := \text{Vol}(M, g_i) \rightarrow 0$, quando $i \rightarrow \infty$. Considere a sequência de métricas $\{h_i\}$ definida por

$$h_i := v_i^{-\frac{2}{n}} g_i.$$

Assim, $\text{Vol}(M, h_i) = v_i^{-1} \text{Vol}(M, g_i) = 1$, logo $h_i \in \mathcal{M}_1$, para todo i . Além disso,

$$|K_{h_i}| = v_i^{\frac{n}{2}} |K_{g_i}| \leq v_i^{\frac{n}{2}} \rightarrow 0 \text{ quando } i \rightarrow \infty.$$

Portanto, segue que $\mathcal{R}^\infty(h_i) \rightarrow 0$, quando $i \rightarrow \infty$, isto é, $\text{Mincur}(M) = 0$.

Reciprocamente, suponha que $\text{Mincur}(M) = 0$, então existe uma sequência de métricas $\{g_i\}$, tais que $\text{Vol}(M, g_i) = 1$ e $\mathcal{R}^\infty(g_i) \rightarrow 0$, quando $i \rightarrow \infty$.

Afirmção: $|K_{g_i}|_\infty \rightarrow 0$, quando $i \rightarrow \infty$.

De fato, pela norma do operador de curvatura, tem-se

$$|Rm|^2 = \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l} R_{ijkl}^2 = \sum_{i < j, k < l} R_{ijkl}^2,$$

tem-se que $|Rm|^2 \geq K_{ij}^2$, qualquer que seja i e j . Em particular $\mathcal{R}(g) \geq |K_{ij}(g)|_\infty$. Escolha uma base ortonormal $\{e_i\}$ de modo que $|K(g)|_\infty = |K_{ij}(g)|_\infty$, para algum par i e j , o que sempre é possível. Assim, para qualquer métrica g , tem-se $\mathcal{R}(g) \geq |K(g)|_\infty$. Portanto, se $\mathcal{R}(g_i) \rightarrow 0$, quando $i \rightarrow \infty$, então $|K_{g_i}|_\infty \rightarrow 0$, quando $i \rightarrow \infty$, o que prova a afirmação.

Prosseguindo, se $|K_{g_i}| = 0$, para alguma métrica g_i , então g_i é *flat* e portanto $\text{MinVol}(M) = 0$. Suponha então que $|K_i| := |K_{g_i}| > 0$, para todo i . Considere também a

sequência de métricas $\{h_i\}$ definida por

$$h_i := |K_i|_\infty g_i.$$

Então temos que $|K_{h_i}| = \frac{1}{|K_i|_\infty} |K_i| \leq 1$ e

$$\text{Vol}(M, h_i) = |K_i|_\infty^{\frac{n}{2}} \text{Vol}(M, g_i) = |K_i|_\infty^{\frac{n}{2}} \rightarrow 0, \text{ quando } i \rightarrow \infty.$$

Portanto, $\text{MinVol}(M) = 0$, como queríamos demonstrar. □

3 MÉTRICAS CRÍTICAS DO FUNCIONAL VOLUME

Este capítulo é baseado no artigo *Bach-flat critical metrics of the volume functional on 4-dimensional manifolds with boundary* escrito pelo autor em parceria com A. Barros e E. Ribeiro Jr.. O seu principal objetivo é generalizar o resultado de Miao e Tam (2011) em dimensões 3 e 4. De fato, Miao e Tam (2009) estudaram propriedades variacionais do funcional volume restrito ao espaço da métricas de curvatura escalar constante em uma variedade compacta com métrica prescrita no bordo, obtendo uma caracterização para que uma métrica neste espaço seja ponto crítico do funcional volume. A qual, posteriormente eles definiram como métricas críticas. Em particular, eles mostraram que as bolas geodésicas dos espaços formas \mathbb{R}^n , \mathbb{H}^n e \mathbb{S}^n satisfazem tais condições. Em 2011, Miao e Tam estudaram as métricas críticas do funcional volume, não mais como um problema variacional, mas pela estrutura geométrica que é determinado pela equação de Euler-Lagrange associado à variação do funcional volume. Eles estudaram tais variedades sob as hipóteses da métrica ser Einstein e localmente conformemente *flat*. Mais precisamente, eles provaram que uma métrica crítica Einstein é isométrica a uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo \mathbb{R}^n , \mathbb{H}^n ou \mathbb{S}^n . Além disso, eles substituíram a hipótese de Einstein por localmente conformemente *flat* com bordo isométrico a esfera e obtiveram o mesmo resultado para as variedades simplesmente conexas.

Neste capítulo apresentaremos uma generalização deste último resultado, em dimensões 3 e 4. Mais especificamente, provaremos que o resultado obtido por Miao e Tam continua valendo sob a condição da métrica ser Bach *flat*, em dimensão 4, e o tensor de Bach harmônico, em dimensão 3. Como será visto, estas condições são bem mais fracas do que localmente conformemente *flat*. Para isto, utilizaremos as técnicas desenvolvidas por H-D. Cao e Q. Chen (2013, 2014) e Barros e Ribeiro Jr. (2014).

3.1 Definições e resultados existentes

Na Seção 2.2 apresentamos as noções básicas de métricas críticas do funcional volume. Relembremos, então, a definição.

Definição 3.1 *Uma métrica crítica de Miao-Tam é uma tripla (M^n, g, f) , onde (M^n, g) é uma variedade Riemanniana compacta com bordo suave ∂M e f é uma função suave em M tal que $f^{-1}(0) = \partial M$ e satisfaz a seguinte equação:*

$$-\Delta f g + \nabla^2 f - f Ric = g, \quad (52)$$

onde ∇^2 denota o Hessiano. f é chamada função potencial.

Ainda da Seção 2.2, relembremos os seguintes espaços

$$\mathcal{M}_\gamma = \{g \text{ métrica Riemanniana em } M \text{ tal que } g|_{\partial M} = \gamma\}$$

e

$$\mathcal{M}_\gamma^R = \{g \in \mathcal{M}_\gamma; R(g) = R\}.$$

Motivados pela caracterização do Teorema 2.1, Miao e Tam provaram a seguinte caracterização variacional das métricas críticas nos espaços formas.

Teorema 3.1 (Miao, Tam, 2009) *Se M é um domínio limitado com bordo suave em \mathbb{R}^n , \mathbb{H}^n ou \mathbb{S}^n (se $M^n \subset \mathbb{S}^n$, suponha ainda que $V(M) < \frac{1}{2}V(\mathbb{S}^n)$). Então a correspondente métrica nesse espaço é um ponto crítico do funcional volume $V(\cdot)$ em \mathcal{M}_γ^R se, e somente se, M é uma bola geodésica.*

Em 2011, Miao-Tam estudaram as métricas críticas sob as hipóteses de Einstein e localmente conformemente flat. Eles estudaram tais métricas a partir da equação fundamental (22) e obtiveram o seguinte resultado.

Teorema 3.2 (Miao, Tam, 2011) *Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam Einstein e bordo ∂M suave. Então (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica em \mathbb{R}^n , \mathbb{H}^n ou \mathbb{S}^n .*

Baseados nas técnicas de Kobayashi e Obata (1981), Miao e Tam substituíram a hipótese de Einstein por localmente conformemente flat com bordo isométrico à esfera. Mais precisamente, eles provaram o seguinte teorema.

Teorema 3.3 (Miao, Tam, 2011) *Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam simplesmente conexa e com bordo isométrico à esfera padrão. Se (M^n, g) é localmente conformemente flat, então (M^n, g) é isométrica a uma bola geodésica em \mathbb{R}^n , \mathbb{H}^n ou \mathbb{S}^n .*

Deve-se ressaltar que a hipótese do bordo de M^n ser isométrico a uma esfera padrão \mathbb{S}^{n-1} considerada por Miao e Tam não é artificial. Para esclarecer isso, consideremos que o bordo de M^n é totalmente geodésico e é isométrico a uma esfera padrão \mathbb{S}^{n-1} . Nessas condições, motivado pelo Teorema da Massa Positiva, Min-Oo conjecturou que, se M^n tem curvatura escalar maior ou igual à $n(n-1)$, então M^n deve ser isométrica ao hemisfério \mathbb{S}_+^n com métrica padrão, veja (MIN-OO, 1998). No entanto, Brendle, Marques e Neves mostraram contra-exemplos da conjectura de Min-Oo em dimensões $n \geq 3$. Para mais detalhes, veja (BRENDLE; MARQUES; NEVES, 2011). Além disso, pelo que foi visto no Exemplo 2.3, \mathbb{S}_+^n tem estrutura de métrica crítica.

É importante destacar que Miao e Tam (2011) construíram exemplos de métricas críticas de Miao-Tam, não-Einstein com bordo isométrico à esfera. Eles consideraram (M, g) uma variedade espacial de Schwarzschild e Ads-Schwarzschild com massa positiva, restrito a certos domínios que contêm os seus horizontes e delimitadas por duas esferas simétricas e mostraram que existe uma função que satisfaz (22) e se anula no bordo, veja Corolários 3.1 e 3.2 de (MIAO; TAM, 2011).

3.2 Resultados chaves

Utilizando a equação (23) podemos reescrever a equação fundamental da métrica crítica de Miao-Tam em notação tensorial como segue:

$$\nabla_i \nabla_j f - f R_{ij} = -\frac{fR+1}{(n-1)} g_{ij}. \quad (53)$$

Usando a notação acima e tendo em vista que as métricas críticas tem curvatura escalar constante, veja Proposição 2.1, obtemos o seguinte lema.

Lema 3.1 *Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam. Então:*

$$f(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}) = R_{ijks} \nabla^s f + \frac{R}{n-1} (\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}) - (\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}).$$

Demonstração: Como (M, g) tem curvatura escalar constante e a métrica g é paralela, usamos a equação (53) para obter

$$\begin{aligned} f \nabla_i R_{jk} &= \nabla_i (f R_{jk}) - R_{jk} \nabla_i f \\ &= \nabla_i (\nabla_j \nabla_k f + \frac{fR+1}{n-1} g_{jk}) - R_{jk} \nabla_i f \\ &= \nabla_i \nabla_j \nabla_k f + \frac{R}{n-1} \nabla_i f g_{jk} - R_{jk} \nabla_i f. \end{aligned}$$

Trocando i por j acima e aplicando a identidade de Ricci, obtemos

$$\begin{aligned} f(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}) &= \nabla_i \nabla_j \nabla_k f + \frac{R}{n-1} \nabla_i f g_{jk} - R_{jk} \nabla_i f \\ &\quad - \nabla_j \nabla_i \nabla_k f - \frac{R}{n-1} \nabla_j f g_{ik} + R_{ik} \nabla_j f \\ &= R_{ijks} \nabla^s f + \frac{R}{n-1} (\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}) - (\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}). \end{aligned}$$

O que conclui a prova do lema. □

Para uma métrica crítica de Miao-Tam, definimos o $(1,3)$ -tensor T como segue

$$\begin{aligned} T_{ijk} &= \frac{n-1}{n-2} (R_{ik} \nabla_j f - R_{jk} \nabla_i f) - \frac{R}{n-2} (g_{ik} \nabla_j f - g_{jk} \nabla_i f) \\ &\quad + \frac{1}{n-2} (g_{ik} R_{js} \nabla^s f - g_{jk} R_{is} \nabla^s f). \end{aligned} \quad (54)$$

O tensor T_{ijk} foi definido similarmente como o tensor D_{ijk} em (CAO; CHEN, 2013). Similar ao resultado de Cao e Chen, obtemos aqui uma relação deste tensor T com os tensores de Weyl e Cotton.

Lema 3.2 *Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam. Então o tensor T , o tensor*

de Cotton C e o tensor de Weyl W satisfazem a seguinte identidade:

$$fC_{ijk} = T_{ijk} + W_{ijks}\nabla^s f$$

Demonstração: Usando mais uma vez que a curvatura escalar de (M, g) é constante, da definição do tensor de Cotton (12) e do Lema 3.1 concluímos que

$$fC_{ijk} = R_{ijks}\nabla^s f + \frac{R}{n-1}(\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}) - (\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}).$$

Pela decomposição do tensor de curvatura (11) e pela definição do tensor T , temos que

$$\begin{aligned} fC_{ijk} &= W_{ijks}\nabla^s f + \frac{1}{n-2}(R_{ik}g_{js} + R_{js}g_{ik} - R_{is}g_{jk} - R_{jk}g_{is})\nabla^s f \\ &\quad - \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{js}g_{ik} - g_{is}g_{jk})\nabla^s f + \frac{R}{n-1}(\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}) \\ &\quad - (\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}) \\ &= W_{ijks}\nabla^s f + \frac{1}{n-2}(R_{ik}\nabla_j f - R_{jk}\nabla_i f) + \frac{1}{n-2}(R_{js}\nabla^s f g_{ik} - R_{is}\nabla^s f g_{jk}) \\ &\quad - \frac{R}{(n-1)(n-2)}(\nabla_j f g_{ik} - \nabla_i f g_{jk}) + \frac{R}{n-1}(\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}) \\ &\quad - (\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}) \\ &= W_{ijks}\nabla^s f + \frac{(n-1)}{(n-2)}(R_{ik}\nabla_j f - R_{jk}\nabla_i f) - \frac{R}{(n-2)}(g_{ik}\nabla_j f - g_{jk}\nabla_i f) \\ &\quad + \frac{1}{n-2}(g_{ik}R_{js}\nabla^s f - g_{jk}R_{is}\nabla^s f) \\ &= T_{ijk} + W_{ijks}\nabla^s f, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. \square

Observação 3.1 Pelo Lema 3.2 podemos concluir que o tensor T tem as mesmas propriedades do tensor de Cotton, isto é,

$$T_{ijk} = -T_{jik} \quad \text{e} \quad g^{ij}T_{ijk} = g^{ik}T_{ijk} = 0. \quad (55)$$

Agora, estamos interessados em entender a relação entre o tensor de Bach e o tensor T . A próxima proposição nos mostrará essa relação, que será de fundamental importância para os nossos resultados.

Proposição 3.1 *Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam. Então o tensor de Bach e o T -tensor satisfazem a seguinte identidade*

$$\int_M f^2 B(\nabla f, \nabla f) dM = -\frac{1}{2(n-1)} \int_M f^2 |T|^2 dM.$$

Demonstração: A partir da definição de tensor de Bach e de (13) podemos escrever o

tensor de Bach da seguinte forma

$$B_{ij} = \frac{1}{n-2} (\nabla_k C_{kij} + R_{kl} W_{ikjl}). \quad (56)$$

Estamos assumindo uma soma nos índices repetidos. Com estas notações temos

$$\begin{aligned} (n-2)f^2 B_{ij} &= f^2 \nabla_k C_{kij} + f^2 R_{kl} W_{ikjl} \\ &= \nabla_k (f^2 C_{kij}) - 2f C_{kij} \nabla_k f + f^2 R_{kl} W_{ikjl}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.2 juntamente com (13) obtemos

$$\begin{aligned} (n-2)f^2 B_{ij} &= \nabla_k [f(W_{kijl} \nabla_l f + T_{kij})] - 2f C_{kij} \nabla_k f + f^2 R_{kl} W_{ikjl} \\ &= \nabla_k (f T_{kij}) + f \nabla_k W_{kijl} \nabla_l f + f W_{kijl} \nabla_k \nabla_l f \\ &\quad + W_{kijl} \nabla_k f \nabla_l f - 2f C_{kij} \nabla_k f + f^2 R_{kl} W_{ikjl} \\ &= \nabla_k (f T_{kij}) + \frac{n-3}{n-2} f C_{jki} \nabla_k f + f (\nabla_k \nabla_l f - f R_{kl}) W_{kijl} \\ &\quad + W_{kijl} \nabla_k f \nabla_l f + 2f C_{ikj} \nabla_k f. \end{aligned}$$

Usando (53) temos

$$(n-2)f^2 B_{ij} = \nabla_k (f T_{kij}) + \frac{n-3}{n-2} f C_{jki} \nabla_k f + 2f C_{ikj} \nabla_k f + W_{kijl} \nabla_k f \nabla_l f.$$

Então

$$\begin{aligned} (n-2)f^2 B(\nabla f, \nabla f) &= \nabla_k (f T_{kij}) \nabla_i f \nabla_j f \\ &= \nabla_k (f T_{kij} \nabla_i f \nabla_j f) - f T_{kij} \nabla_k \nabla_i f \nabla_j f - f T_{kij} \nabla_i f \nabla_k \nabla_j f. \end{aligned}$$

Usando (53) e o fato do tensor T ter traço nulo, chegamos a

$$(n-2)f^2 B(\nabla f, \nabla f) = \nabla_k (f T_{kij} \nabla_i f \nabla_j f) - f^2 T_{kij} R_{ki} \nabla_j f - f^2 T_{kij} R_{kj} \nabla_i f.$$

Trocando k por i acima e usando a propriedade anti-simétrica de T , obtemos

$$\begin{aligned} (n-2)f^2 B(\nabla f, \nabla f) &= \nabla_k (f T_{kij} \nabla_i f \nabla_j f) - \frac{1}{2} f^2 (T_{kij} R_{ki} \nabla_j f + T_{kij} R_{kj} \nabla_i f \\ &\quad + T_{ikj} R_{ik} \nabla_j f + T_{ikj} R_{ij} \nabla_k f) \\ &= \nabla_k (f T_{kij} \nabla_i f \nabla_j f) - \frac{1}{2} f^2 T_{kij} (R_{kj} \nabla_i f - R_{ij} \nabla_k f). \end{aligned}$$

Usando a definição de T e mais uma vez o fato de T ter traço nulo, concluímos que

$$(n-2)f^2 B(\nabla f, \nabla f) = \nabla_k (f T_{kij} \nabla_i f \nabla_j f) - \frac{n-2}{2(n-1)} f^2 |T|^2.$$

Integrando sobre M , usando o Teorema de Stokes e o fato de f ser nula no bordo de M , obtemos

$$\begin{aligned} \int_M f^2 B(\nabla f, \nabla f) dM &= \frac{1}{n-2} \int_M \nabla_k (f T_{kij} \nabla_i f \nabla_j f) dM - \frac{1}{2(n-1)} \int_M f^2 |T|^2 dM \\ &= \frac{1}{n-2} \int_{\partial M} f T_{kij} \nabla_i f \nabla_j f \nu_k dS - \frac{1}{2(n-1)} \int_M f^2 |T|^2 dM \\ &= -\frac{1}{2(n-1)} \int_M f^2 |T|^2 dM. \end{aligned}$$

O que finaliza a prova da proposição. \square

3.3 Estudo das superfícies de nível da função potencial

A Proposição 3.1 nos diz que se a métrica crítica de Miao-Tam for Bach-flat então o tensor T é identicamente nulo. Assim, nada mais natural do que estudar este tensor. Para isto, precisamos estudar as superfícies de nível da função potencial f . Consideremos então a seguinte função

$$\rho := |\nabla f|^2 + \frac{2}{n-1} f + \frac{R}{n-1} f^2. \quad (57)$$

Logo, se derivarmos ρ obtemos

$$\begin{aligned} \nabla \rho &= 2\nabla_{\nabla f} \nabla f + \frac{2}{n-1} \nabla f + \frac{2R}{n-1} f \nabla f \\ &= 2 \left(\nabla_{\nabla f} \nabla f + \frac{Rf+1}{n-1} \nabla f \right) \end{aligned}$$

e utilizando a Equação (53), deduzimos a seguinte identidade

$$f Ric(\nabla f) = \frac{1}{2} \nabla \rho. \quad (58)$$

Além disso, o campo de vetores $\nu = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ é normal à superfície $\Sigma_c = \{p \in M; f(p) = c\}$. Em particular a segunda forma fundamental de Σ_c é dada por

$$h_{ij} = -\langle \nabla_{e_i} \nu, e_j \rangle, \quad (59)$$

onde $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ é um referencial ortonormal em Σ_c . Portanto, a curvatura média é dada por

$$H = -\frac{1}{|\nabla f|} \sum_{i=1}^{n-1} \nabla^2 f(e_i, e_i). \quad (60)$$

Com as notações acima, obtemos um resultado similar ao obtido por Cao e Chen (2013). Esta proposição é essencial para o estudo das superfícies de nível de f .

Proposição 3.2 *Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam. Sejam $p \in M$ um ponto regular de f e $\Sigma = \{f = f(p)\}$ o conjunto de nível de f . Se g_{ab} denota a métrica induzida em Σ , então*

$$|fT|^2 = \frac{2(n-1)^2|\nabla f|^4}{(n-2)^2} \sum_{a,b=2}^n |h_{ab} - \frac{H}{n-1}g_{ab}|^2 + \frac{n-1}{2(n-2)}|\nabla^\Sigma \rho|^2,$$

onde h_{ab} e H são a segunda forma fundamental e a curvatura média, respectivamente, ∇^Σ é a conexão Riemanniana de Σ em relação a métrica induzida e ρ é dado por (57).

Demonstração: Seja $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal, com $e_1 = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ e e_2, \dots, e_n tangentes à Σ . Calculando a norma de T temos

$$\begin{aligned} |T|^2 &= \sum_{i,j,k=1}^n T_{ijk}^2 \\ &= \left(\frac{n-1}{n-2}\right)^2 (2|Ric|^2|\nabla f|^2 - 2|Ric(\nabla f)|^2) + \left(\frac{R}{n-2}\right)^2 (2(n-1)|\nabla f|^2) \\ &\quad + \left(\frac{1}{n-2}\right)^2 (2(n-1)|Ric(\nabla f)|^2) - \frac{2(n-1)R}{(n-2)^2} (2R|\nabla f|^2 - 2Ric(\nabla f, \nabla f)) \\ &\quad + \frac{2(n-1)}{(n-2)^2} (2RRic(\nabla f, \nabla f) - 2|Ric(\nabla f)|^2) - \frac{2R}{(n-2)^2} 2(n-1)Ric(\nabla f, \nabla f) \\ &= \frac{2(n-1)^2}{(n-2)^2} (|Ric|^2|\nabla f|^2 - |Ric(\nabla f)|^2) + \frac{2(n-1)R^2}{(n-2)^2} |\nabla f|^2 \\ &\quad + \frac{2(n-1)}{(n-2)^2} |Ric(\nabla f)|^2 - \frac{4(n-1)R}{(n-2)^2} (R|\nabla f|^2 - Ric(\nabla f, \nabla f)) \\ &\quad + \frac{4(n-1)}{(n-2)^2} (RRic(\nabla f, \nabla f) - |Ric(\nabla f)|^2) - \frac{4(n-1)R}{(n-2)^2} Ric(\nabla f, \nabla f). \end{aligned}$$

Assim, multiplicando por f^2 a expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} |fT|^2 &= \frac{2(n-1)^2}{(n-2)^2} (f^2|Ric|^2|\nabla f|^2 - |fRic(\nabla f)|^2) + \frac{2(n-1)R^2}{(n-2)^2} f^2|\nabla f|^2 \\ &\quad + \frac{2(n-1)}{(n-2)^2} |fRic(\nabla f)|^2 - \frac{4(n-1)R}{(n-2)^2} f(fR|\nabla f|^2 - fRic(\nabla f, \nabla f)) \\ &\quad + \frac{4(n-1)}{(n-2)^2} (f^2RRic(\nabla f, \nabla f) - |fRic(\nabla f)|^2) - \frac{4(n-1)R}{(n-2)^2} f^2Ric(\nabla f, \nabla f). \end{aligned}$$

Pela equação (58) temos que

$$\begin{aligned}
|fT|^2 &= \frac{2(n-1)^2}{(n-2)^2} \left(f^2 |Ric|^2 |\nabla f|^2 - \frac{1}{4} |\nabla \rho|^2 \right) + \frac{2(n-1)R^2}{(n-2)^2} f^2 |\nabla f|^2 \\
&\quad + \frac{n-1}{2(n-2)^2} |\nabla \rho|^2 - \frac{4(n-1)R}{(n-2)^2} f \left(fR |\nabla f|^2 - \frac{1}{2} \langle \nabla \rho, \nabla f \rangle \right) \\
&\quad + \frac{4(n-1)}{(n-2)^2} \left(\frac{fR}{2} \langle \nabla \rho, \nabla f \rangle - \frac{1}{4} |\nabla \rho|^2 \right) - \frac{2(n-1)R}{(n-2)^2} f \langle \nabla \rho, \nabla f \rangle \\
&= \frac{2(n-1)^2}{(n-2)^2} f^2 |\nabla f|^2 |Ric|^2 - \frac{(n-1)^2}{2(n-2)^2} |\nabla \rho|^2 + \frac{2(n-1)R^2}{(n-2)^2} f^2 |\nabla f|^2 \\
&\quad + \frac{n-1}{2(n-2)^2} |\nabla \rho|^2 - \frac{4(n-1)R^2}{(n-2)^2} f^2 |\nabla f|^2 + \frac{2(n-1)R}{(n-2)^2} f \langle \nabla \rho, \nabla f \rangle \\
&\quad + \frac{2(n-1)R}{(n-2)^2} f \langle \nabla \rho, \nabla f \rangle - \frac{n-1}{(n-2)^2} |\nabla \rho|^2 - \frac{2(n-1)R}{(n-2)^2} f \langle \nabla \rho, \nabla f \rangle.
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
|fT|^2 &= \frac{2(n-1)^2}{(n-2)^2} f^2 |\nabla f|^2 |Ric|^2 - \frac{n(n-1)}{2(n-2)^2} |\nabla \rho|^2 \\
&\quad - \frac{2(n-1)R^2}{(n-2)^2} f^2 |\nabla f|^2 + \frac{2(n-1)R}{(n-2)^2} f \langle \nabla \rho, \nabla f \rangle. \tag{61}
\end{aligned}$$

Por outro lado, a segunda forma fundamental h_{ab} e a curvatura média H de Σ são dados por

$$\begin{aligned}
h_{ab} &= -\langle \nabla_{e_a} \left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right), e_b \rangle = -\frac{1}{|\nabla f|} \nabla_a \nabla_b f = -\frac{1}{|\nabla f|} (fR_{ab} - \frac{fR+1}{n-1} g_{ab}) \\
H &= -\frac{1}{|\nabla f|} (fR - fR_{11} - fR - 1) = \frac{1}{|\nabla f|} (fR_{11} + 1).
\end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned}
|h|^2 &= \sum_{a,b=2}^n h_{ab}^2 = \frac{1}{|\nabla f|^2} \sum_{a,b=2}^n \left| fR_{ab} - \frac{fR+1}{n-1} g_{ab} \right|^2 \\
&= \frac{1}{|\nabla f|^2} \left(f^2 \sum_{a,b=2}^n R_{ab}^2 - 2f(R - R_{11}) \frac{fR+1}{n-1} + \frac{(fR+1)^2}{n-1} \right) \\
&= \frac{1}{|\nabla f|^2} \left(f^2 |Ric|^2 - 2f^2 \sum_{a=2}^n R_{1a}^2 - f^2 R_{11}^2 - 2f(R - R_{11}) \frac{fR+1}{n-1} + \frac{(fR+1)^2}{n-1} \right). \\
H^2 &= \frac{1}{|\nabla f|^2} (f^2 R_{11}^2 + 2fR_{11} + 1).
\end{aligned}$$

Combinando os resultados acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{a,b=2}^n \left| h_{ab} - \frac{H}{n-1} g_{ab} \right|^2 &= |h|^2 - \frac{H^2}{n-1} \\
&= \frac{1}{|\nabla f|^2} \left(f^2 |Ric|^2 - 2f^2 \sum_{a=2}^n R_{1a}^2 - f^2 R_{11}^2 - 2f(R - R_{11}) \frac{fR+1}{n-1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(fR+1)^2}{n-1} \right) - \frac{1}{(n-1)|\nabla f|^2} (f^2 R_{11}^2 + 2fR_{11} + 1) \\
&= \frac{1}{|\nabla f|^2} \left(f^2 |Ric|^2 - 2f^2 \sum_{a=2}^n R_{1a}^2 - f^2 R_{11}^2 - \frac{2f^2 R^2}{n-1} + \frac{2f^2 R R_{11}}{n-1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2fR}{n-1} + \frac{2fR_{11}}{n-1} + \frac{f^2 R^2}{n-1} + \frac{2fR}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{f^2 R_{11}^2}{n-1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2fR_{11}}{n-1} - \frac{1}{n-1} \right) \\
&= \frac{1}{|\nabla f|^2} \left(f^2 |Ric|^2 - 2f^2 \sum_{a=2}^n R_{1a}^2 - \frac{nR_{11}^2 f^2}{n-1} - \frac{f^2 R^2}{n-1} + \frac{2f^2 R R_{11}}{n-1} \right).
\end{aligned}$$

Entretanto, de (58) tem-se

$$\begin{aligned}
fR_{11} &= \frac{1}{|\nabla f|^2} f Ric(\nabla f, \nabla f) = \frac{1}{2|\nabla f|^2} \langle \nabla \rho, \nabla f \rangle. \\
fR_{1a} &= \frac{1}{|\nabla f|} f Ric(\nabla f, e_a) = \frac{1}{2|\nabla f|} \langle \nabla \rho, e_a \rangle = \frac{1}{2|\nabla f|} \nabla_a \rho.
\end{aligned}$$

Daí, concluímos que

$$\begin{aligned}
\sum_{a,b=2}^n \left| h_{ab} - \frac{H}{n-1} g_{ab} \right|^2 &= \frac{1}{|\nabla f|^2} \left(f^2 |Ric|^2 - \frac{1}{2|\nabla f|^2} |\nabla^\Sigma \rho|^2 - \frac{n}{4(n-1)|\nabla f|^4} \langle \nabla \rho, \nabla f \rangle^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{R^2}{n-1} f^2 + \frac{R}{(n-1)|\nabla f|^2} f \langle \nabla \rho, \nabla f \rangle \right).
\end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned}
f^2 |Ric|^2 &= |\nabla f|^2 \sum_{a,b=2}^n \left| h_{ab} - \frac{H}{n-1} g_{ab} \right|^2 + \frac{1}{2|\nabla f|^2} |\nabla^\Sigma \rho|^2 + \frac{n}{4(n-1)|\nabla f|^4} \langle \nabla \rho, \nabla f \rangle^2 \\
&\quad + \frac{R^2}{n-1} f^2 - \frac{R}{(n-1)|\nabla f|^2} f \langle \nabla \rho, \nabla f \rangle.
\end{aligned}$$

Substituindo a expressão acima em (61) concluímos que

$$\begin{aligned}
|fT|^2 &= \frac{2(n-1)^2|\nabla f|^4}{(n-2)^2} \sum_{a,b=2}^n \left| h_{ab} - \frac{H}{n-1}g_{ab} \right|^2 + \frac{(n-1)^2}{(n-2)^2} |\nabla^\Sigma \rho|^2 \\
&\quad + \frac{n(n-1)}{2(n-2)^2|\nabla f|^2} \langle \nabla \rho, \nabla f \rangle^2 + \frac{2(n-1)R^2}{(n-2)^2} f^2 |\nabla f|^2 - \frac{2(n-1)R}{(n-2)^2} f \langle \nabla \rho, \nabla f \rangle \\
&\quad - \frac{n(n-1)}{2(n-2)^2} |\nabla^\Sigma \rho|^2 - \frac{n(n-1)}{2(n-2)^2|\nabla f|^2} \langle \nabla \rho, \nabla f \rangle^2 \\
&\quad - \frac{2(n-1)R^2}{(n-2)^2} f^2 |\nabla f|^2 + \frac{2(n-1)R}{(n-2)^2} f \langle \nabla \rho, \nabla f \rangle \\
&= \frac{2(n-1)^2|\nabla f|^4}{(n-2)^2} \sum_{a,b=2}^n \left| h_{ab} - \frac{H}{n-1}g_{ab} \right|^2 + \frac{n-1}{2(n-2)} |\nabla^\Sigma \rho|^2,
\end{aligned}$$

finalizando a demonstração da proposição. \square

Como consequência da Proposição 3.2 deduzimos as seguintes propriedades dos conjuntos de nível de f .

Proposição 3.3 *Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam com $T \equiv 0$. Seja c um valor regular de f e $\Sigma = \{p \in M; f(p) = c\}$ um conjunto de nível de f . Considere $e_1 = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ e escolha um referencial ortonormal $\{e_2, \dots, e_n\}$ tangente à Σ . Sob essas condições as seguintes afirmações ocorrem:*

- (1) *A segunda forma fundamental h_{ab} de Σ é dada por $h_{ab} = \frac{H}{n-1}g_{ab}$.*
- (2) *$|\nabla f|$ é constante em Σ .*
- (3) *$R_{1a} = 0$, para qualquer $a \geq 2$ e e_1 é um autovetor do Ric.*
- (4) *A curvatura média H de Σ é constante.*
- (5) *Em Σ , o tensor de Ricci ou tem único autovalor ou dois autovalores distintos com multiplicidade 1 e $n-1$. Além disso, o autovalor com multiplicidade 1 é na direção de ∇f .*
- (6) *$R_{1abc} = 0$, para $a, b, c \in \{2, \dots, n\}$.*

Demonstração: Os dois primeiros itens seguem diretamente da Proposição 3.2 juntamente com (57). Para o terceiro item, dado que $T \equiv 0$, então da definição de T (54) deduzimos

$$\begin{aligned}
0 &= T(e_i, \nabla f, \nabla f) \\
&= \frac{n-1}{n-2} (Ric(e_i, \nabla f)|\nabla f|^2 - Ric(\nabla f, \nabla f)\nabla_i f) - \frac{R}{n-2} (\nabla_i f|\nabla f|^2 - |\nabla f|^2\nabla_i f) \\
&\quad + \frac{1}{n-2} (\nabla_i f Ric(\nabla f, \nabla f) - |\nabla f|^2 Ric(e_i, \nabla f)) \\
&= Ric(e_i, \nabla f)|\nabla f|^2 - Ric(\nabla f, \nabla f)\nabla_i f,
\end{aligned}$$

em outras palavras

$$Ric(e_i, \nabla f)|\nabla f|^2 = Ric(\nabla f, \nabla f)\langle \nabla f, e_i \rangle.$$

Então para $i = a \geq 2$, obtemos que $R_{1a} = 0$. Além disso, $Ric(e_1) = g^{ij}R_{1j}e_i = R_{11}e_1$. Portanto e_1 é um autovetor do Ricci. Para o quarto item, considere a equação de Codazzi

$$R_{1abc} = \nabla_b^\Sigma h_{ca} - \nabla_c^\Sigma h_{ba}, \quad a, b, c = 2, \dots, n. \quad (62)$$

Tomando o traço nos índices a e c , e usando o primeiro item, obtemos

$$R_{1b} = \nabla_b^\Sigma H - g^{ac}\nabla_c^\Sigma h_{ba} = \frac{n-2}{n-1}\nabla_b^\Sigma H.$$

Como $R_{1b} = 0$, concluímos que H é constante em Σ . Prosseguindo, como $e_1 = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ é um autovetor do Ricci, escolha o referencial ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ tal que $Ric(e_k) = \lambda_k e_k$. Usando mais uma vez o fato de $T \equiv 0$, para $a, b \geq 2$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= T_{a1b} \\ &= \frac{n-1}{n-2}(R_{ab}\nabla_1 f - R_{b1}\nabla_a f) - \frac{R}{n-2}(g_{ab}\nabla_1 f - g_{1b}\nabla_a f) \\ &\quad + \frac{1}{n-2}(g_{ab}R_{1s}\nabla^s f - g_{1b}R_{as}\nabla^s f) \\ &= \frac{n-1}{n-2}R_{ab}|\nabla f| - \frac{R}{n-2}g_{ab}|\nabla f| + \frac{1}{n-2}g_{ab}\lambda_1|\nabla f|. \end{aligned}$$

Portanto, $R_{ab} = \frac{R-\lambda_1}{n-1}g_{ab}$ e então $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{R-\lambda_1}{n-1}$, o que prova o quinto item. Finalmente, o sexto item segue diretamente de (62) combinado com o quarto item. \square

Prosseguindo o estudo das métricas críticas de Miao-Tam com o tensor T nulo, obtemos o seguinte resultado.

Lema 3.3 *Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam com $T \equiv 0$. Então $C \equiv 0$, isto é, (M^n, g) tem tensor de Weyl harmônico.*

Demonstração: Como $T \equiv 0$, pelo Lema 3.2 deduzimos que $fC_{ijk} = W_{ijkl}\nabla^l f$. Portanto

$$fC_{ijk}\nabla^k f = 0. \quad (63)$$

Considere um ponto regular $p \in M$, com o conjunto de nível associado Σ . Escolha coordenadas $(\theta^2, \dots, \theta^n)$ em Σ qualquer e escreva a métrica em coordenadas locais $(f, \theta^1, \dots, \theta^n)$ como

$$g = \frac{1}{|\nabla f|^2}df^2 + g_{ab}d\theta^a d\theta^b.$$

Denotando $\partial_f = \partial_1 = \frac{\nabla f}{|\nabla f|^2}$, temos

$$\nabla_1 f = 1 \quad \text{e} \quad \nabla_a f = 0, \quad \text{para} \quad a \geq 2.$$

De (63) temos $fC_{ij1} = 0$ para $i, j = 1, \dots, n$. Além disso, para $a, b, c \geq 2$, da equação de

Codazzi juntamente com o primeiro e quarto itens da Proposição 3.3 tem-se

$$R_{1abc} = \nabla_b^\Sigma h_{ac} - \nabla_c^\Sigma h_{ab} = 0.$$

Em particular, usando o fato de $R_{1a} = 0$ em (11) obtemos

$$W_{1abc} = R_{1abc} = 0.$$

Assim, para $a, b \geq 2$.

$$fC_{abc} = W_{abcs} \nabla^s f = W_{abc1} \nabla^1 f = 0.$$

Afirmação: $fC_{1ab} = 0$, para $a, b \geq 2$.

De fato, primeiro note que

$$\begin{aligned} fC_{1ab} &= W_{1abs} \nabla^s f = W_{1abi} g^{is} \langle \nabla f, e_s \rangle = W_{1ab1} |\nabla f|^2 \\ &= -\frac{1}{|\nabla f|^2} W(\nabla f, \partial_a, \nabla f, \partial_b). \end{aligned}$$

Por outro lado, de (11) temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\nabla f|^2} W(\nabla f, \partial_a, \nabla f, \partial_b) &= \frac{1}{|\nabla f|^2} R(\nabla f, \partial_a, \nabla f, \partial_b) + \frac{R}{(n-1)(n-2)} g_{ab} \\ &\quad - \frac{1}{n-2} \left(\frac{1}{|\nabla f|^2} Ric(\nabla f, \nabla f) g_{ab} + R_{ab} \right). \end{aligned} \quad (64)$$

Agora, vamos analisar a segunda forma fundamental nas coordenadas locais $(f, \theta^2, \dots, \theta^n)$.

Assim, temos

$$h_{ab} = \frac{1}{|\nabla f|^2} \langle \nabla f, \nabla_a \partial_b \rangle = \frac{1}{|\nabla f|} \langle \nabla f, \Gamma_{ab}^1 \partial_f \rangle = \frac{\Gamma_{ab}^1}{|\nabla f|},$$

porém

$$\begin{aligned} \Gamma_{ab}^1 &= \frac{1}{2} g^{1j} \{ \partial_a g_{bj} + \partial_b g_{ja} - \partial_j g_{ab} \} \\ &= \frac{1}{2} g^{11} \{ \partial_a g_{b1} + \partial_b g_{1a} - \partial_f g_{ab} \} \\ &= \frac{1}{2} |\nabla f|^2 (-\langle \nabla g_{ab}, \partial_f \rangle) = -\frac{1}{2} \nabla f(g_{ab}). \end{aligned}$$

Portanto, segue que

$$h_{ab} = -\frac{\nabla f}{2|\nabla f|} (g_{ab}). \quad (65)$$

Novamente pela Proposição 3.3, temos que $|\nabla f|$ é constante em Σ , o que implica

$$\left[\partial_a, \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right] = 0. \quad (66)$$

Usando (66) temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\nabla f|^2} R(\nabla f, \partial_a, \nabla f, \partial_b) &= \frac{1}{|\nabla f|} \langle \nabla_{\frac{\nabla f}{|\nabla f|}} \nabla_a \partial_b - \nabla_a \nabla_{\frac{\nabla f}{|\nabla f|}} \partial_b, \nabla f \rangle \\
&= \frac{1}{|\nabla f|^2} \langle \nabla_{\nabla f} (\nabla_a^\Sigma \partial_b + \nabla_a^\perp \partial_b), \nabla f \rangle - \frac{1}{|\nabla f|} \langle \nabla_a \nabla_{\frac{\nabla f}{|\nabla f|}} \partial_b, \nabla f \rangle \\
&= \frac{1}{|\nabla f|^2} \langle \nabla_{\nabla f} \nabla_a^\Sigma \partial_b, \nabla f \rangle + \frac{1}{|\nabla f|^2} \langle \nabla_{\nabla f} \nabla_a^\perp \partial_b, \nabla f \rangle \\
&\quad - \frac{1}{|\nabla f|} \partial_a \langle \nabla_{\frac{\nabla f}{|\nabla f|}} \partial_b, \nabla f \rangle + \frac{1}{|\nabla f|} \langle \nabla_{\nabla f} \partial_b, \nabla_a \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \rangle
\end{aligned}$$

Como $\langle \frac{\nabla f}{|\nabla f|}, \partial_a \rangle = 0$, temos que $\nabla_{\frac{\nabla f}{|\nabla f|}} \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = 0$. Além disso, obtemos

$$\langle \nabla_{\frac{\nabla f}{|\nabla f|}} \partial_b, \nabla f \rangle = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \langle \partial_b, \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \rangle - \langle \partial_b, \nabla_{\frac{\nabla f}{|\nabla f|}} \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \rangle = 0.$$

Usando (65) e (66), inferimos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\nabla f|^2} R(\nabla f, \partial_a, \nabla f, \partial_b) &= \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \left(\langle \nabla_a^\Sigma \partial_b, \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \rangle \right) - \langle \nabla_a^\Sigma \partial_b, \nabla_{\frac{\nabla f}{|\nabla f|}} \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \rangle \\
&\quad + \langle \nabla_{\frac{\nabla f}{|\nabla f|}} (h_{ab} \frac{\nabla f}{|\nabla f|}), \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \rangle + \langle \nabla_b \frac{\nabla f}{|\nabla f|}, \nabla_a \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \rangle \\
&= h_{ab} \langle \nabla_{\frac{\nabla f}{|\nabla f|}} \frac{\nabla f}{|\nabla f|}, \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \rangle + \langle \frac{\nabla f}{|\nabla f|} (h_{ab}) \frac{\nabla f}{|\nabla f|}, \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \rangle \\
&\quad + \langle \nabla_b \frac{\nabla f}{|\nabla f|}, \nabla_a \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \rangle \\
&= \frac{\nabla f}{|\nabla f|} (h_{ab}) + h_{ac} h_b^c.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{1}{|\nabla f|^2} R(\nabla f, \partial_a, \nabla f, \partial_b) = \frac{1}{(n-1)|\nabla f|} \nabla f (H) g_{ab} - \frac{H^2}{(n-1)^2} g_{ab}. \quad (67)$$

Em particular, tomando o traço em (67) com respeito a a e b obtemos

$$\frac{1}{|\nabla f|^2} Ric(\nabla f, \nabla f) = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} (H) - \frac{H^2}{n-1},$$

logo (67) pode ser reescrito como

$$R(\nabla f, \partial_a, \nabla f, \partial_b) = \frac{Ric(\nabla f, \nabla f)}{n-1} g_{ab}. \quad (68)$$

Mais uma vez, pela Proposição 3.3, temos

$$\frac{1}{|\nabla f|^2} Ric(\nabla f, \nabla f) = \lambda$$

e

$$Ric(\partial_a, \partial_b) = \mu g_{ab},$$

para $a, b \geq 2$. Substituindo (68) em (64) e usando o fato acima, concluímos

$$\begin{aligned} fC_{1ab} &= -\frac{1}{|\nabla f|^2} W(\nabla f, \partial_a, \nabla f, \partial_b) \\ &= -\frac{1}{|\nabla f|^2} \frac{Ric(\nabla f, \nabla f)}{n-1} g_{ab} + \frac{1}{|\nabla f|^2} \frac{Ric(\nabla f, \nabla f)}{n-2} g_{ab} + \frac{R_{ab}}{n-2} - \frac{R}{(n-1)(n-2)} g_{ab} \\ &= -\frac{\lambda}{n-1} g_{ab} + \frac{\lambda}{n-2} g_{ab} + \frac{\mu}{n-2} g_{ab} - \frac{\lambda + (n-1)\mu}{(n-1)(n-2)} g_{ab} \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que prova a afirmação.

Portanto, concluímos que $fC_{ijk} = 0$ nos pontos p onde $\nabla f(p) \neq 0$. Pelo Lema 3.2, concluímos que $fC_{ijk} \equiv 0$ em M . Disto, segue que $C_{ijk} \equiv 0$ em $M \setminus \partial M$ e pela continuidade de C concluímos o lema. \square

Para finalizar esta seção, apresentamos um resultado de caracterização. De certa forma, esse teorema nos dar um resumo desta seção. Para tal fim, utilizaremos o seguinte lema, cuja prova pode ser encontrada em (CAO; CHEN, 2013).

Lema 3.4 *Seja (M^n, g) variedade Riemanniana, com $n \geq 4$. Então*

$$(\operatorname{div} B)_i = \frac{(n-4)}{(n-2)^2} C_{ijk} R_{jk},$$

onde estamos assumindo soma nos índices repetidos.

Teorema 3.4 *Seja (M^n, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam. Então, para $n \geq 5$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1) $T_{ijk} = 0$;
- (2) $C_{ijk} = 0$ e $W(e_i, e_j, e_k, \nabla f) = 0$;
- (3) $\operatorname{div} B(\nabla f) = 0$ e $W(\nabla f, e_i, \nabla f, e_j) = 0$.

Demonstração: Para o caso (1) implica (2) segue do Lema 3.3 e Lema 3.2. Agora vamos provar que (2) implica (3). Primeiro, utilize o Lema 3.4, para obter

$$(\operatorname{div} B)_i = \frac{n-4}{(n-2)^2} C_{ijk} R^{jk},$$

e (3) segue imediatamente. Agora suponha que vale (3), pela fórmula acima e o Lema 3.2

inferimos

$$\begin{aligned}
f \operatorname{div} B(\nabla f) &= \frac{n-4}{(n-2)^2} f C_{ijk} R^{jk} \nabla^i f \\
&= \frac{n-4}{(n-2)^2} T_{ijk} R^{jk} \nabla^i f + \frac{n-4}{(n-2)^2} W_{ijkl} \nabla^l f R^{jk} \nabla^i f \\
&= \frac{n-4}{2(n-2)^2} T_{ijk} (R^{jk} \nabla^i f - R^{ik} \nabla^j f) - \frac{n-4}{(n-2)^2} W(\nabla f, e_j, \nabla f, e_k) R^{jk} \\
&= -\frac{n-4}{2(n-1)(n-2)} |T|^2 - \frac{n-4}{(n-2)^2} W(\nabla f, e_j, \nabla f, e_k) R^{jk},
\end{aligned}$$

onde na última igualdade foi usado a definição do tensor T e o fato dele ter traço nulo. Dado que vale (3) concluímos que $T \equiv 0$, o que finaliza a demonstração. \square

3.4 Resultados de rigidez

Nesta seção apresentaremos os principais resultados deste capítulo, os quais foram obtidos em (BARROS; DIÓGENES; RIBEIRO JR., 2014). Iniciaremos com um teorema que generaliza o Teorema 3.3, em dimensão 4. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.5 *Seja (M^4, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam simplesmente conexa e bordo isométrico a esfera padrão S^3 . Então (M^4, g) é isométrica a uma bola geodésica em \mathbb{R}^4 , \mathbb{H}^4 ou S^4 desde que*

$$\int_M f^2 B(\nabla f, \nabla f) dM_g \geq 0,$$

onde B é o tensor de Bach.

Demonstração: Como

$$\int_M f^2 B(\nabla f, \nabla f) dM_g \geq 0,$$

pela Proposição 3.1, segue que $T \equiv 0$. Aplicando o Lema 3.3, temos que $C \equiv 0$. Assim, pelo Lema 3.2, obtemos

$$W_{ijkl} \nabla^l f = 0.$$

Seja $p \in M^4$ tal que $\nabla f(p) \neq 0$. Escolhendo um referencial ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ com $e_1 = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$, concluímos que

$$W_{ijk1} = 0. \tag{69}$$

Afirmação: $W_{ijkl} = 0$ sempre que $\nabla f(p) \neq 0$.

De fato, como o tensor de Weyl tem traço nulo em qualquer par de índices, temos

$$W_{2121} + W_{2222} + W_{2323} + W_{2424} = 0.$$

Usando (69) obtemos

$$W_{2323} = -W_{2424}.$$

De maneira similar, temos

$$W_{2424} = -W_{3434} = W_{2323}.$$

Do que segue que $W_{2323} = 0$. Além disso, também temos

$$W_{1314} + W_{2324} + W_{3334} + W_{4344} = 0.$$

Portanto, $W_{2324} = 0$. Isto prova que $W_{abcd} = 0$ a menos que a, b, c, d sejam todos distintos. Mas, de (69) temos apenas três escolhas para os índices. O que prova o afirmado.

Assim, usando a Proposição 2.3 temos que $W_{ijkl} = 0$ em M , uma vez que a métrica é analítica. Logo (M^4, g) é localmente conformemente *flat*. Pelo Teorema 3.3 concluímos o resultado. \square

Como uma consequência imediata, temos o seguinte corolário.

Corolário 3.1 *Seja (M^4, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam Bach-flat simplesmente conexa e bordo isométrico a esfera padrão \mathbb{S}^3 . Então (M^4, g) é isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{R}^4, \mathbb{H}^4$ ou \mathbb{S}^4 .*

Como foi visto no Teorema 3.4, para $n \geq 5$, ter o tensor T nulo, não implica necessariamente que o tensor de Weyl seja nulo. Assim, diante dos resultados acima, surge uma pergunta natural: O que acontece em dimensão mais baixa? Diante desta pergunta e inspirados nos trabalhos de Cao *et al.* (2014) temos o seguinte resultado de rigidez para métricas críticas de dimensão 3.

Teorema 3.6 *Seja (M^3, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam simplesmente conexa e bordo isométrico a esfera padrão \mathbb{S}^2 . Se $\text{div}B(\nabla f) = 0$ em M , onde B é o tensor de Bach, então (M^3, g) é isométrica a uma bola geodésica em $\mathbb{R}^3, \mathbb{H}^3$, ou \mathbb{S}^3 .*

Demonstração: A primeira parte da demonstração segue como em (CAO *et al.*, 2014). Como podemos escrever o tensor de Cotton como $C_{ijk} = \nabla_i A_{jk} - \nabla_j A_{ik}$, então temos

$$\begin{aligned} \nabla_i B_{ij} &= \nabla_i \nabla_k C_{kij} \\ &= \nabla_i \nabla_k (\nabla_k A_{ij} - \nabla_i A_{kj}) \\ &= \nabla_i \nabla_k \nabla_k A_{ij} - \nabla_i \nabla_k \nabla_i A_{kj} \\ &= \nabla_i \nabla_k \nabla_k A_{ij} - \nabla_i \nabla_i \nabla_k A_{kj}. \end{aligned}$$

Pela identidade de Ricci segue que

$$\begin{aligned} \nabla_i B_{ij} &= -R_{il} \nabla_l A_{ij} + R_{kl} \nabla_k A_{lj} + R_{ikjl} \nabla_k A_{il} \\ &= R_{ikjl} \nabla_k A_{il}, \end{aligned}$$

mas, em dimensão 3, $W \equiv 0$ assim por (11) obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla_i B_{ij} &= A_{ik} g_{jl} \nabla_k A_{il} + A_{jl} g_{ik} \nabla_K A_{il} \\
&\quad - A_{il} g_{jk} \nabla_K A_{il} - A_{jk} g_{il} \nabla_K A_{il} \\
&\quad A_{ik} \nabla_k A_{ij} + A_{jl} \nabla_i A_{il} - A_{il} \nabla_j A_{il} - A_{jk} g_{il} \nabla_K A_{il} \\
&= A_{ik} C_{kji} + A_{ik} \nabla_j A_{ki} + A_{jl} \nabla_i A_{il} \\
&\quad - A_{il} \nabla_j A_{il} - A_{jk} g_{il} C_{kil} - A_{jk} g_{il} \nabla_i A_{kl} \\
&= R_{ik} C_{kji} + A_{jl} \nabla_i A_{il} - A_{jk} \nabla_l A_{kl} \\
&= -R_{ik} C_{jki}.
\end{aligned}$$

Portanto, aplicando ∇f acima, concluimos

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div} B)(\nabla f) &= \nabla_i B_{ij} \nabla_j f \\
&= -C_{jki} R_{ik} \nabla_j f \\
&= -\frac{1}{2} (C_{jki} R_{ik} \nabla_j f + C_{kji} R_{ij} \nabla_k f) \\
&= \frac{1}{2} C_{kji} (R_{ik} \nabla_j f - R_{ij} \nabla_k f).
\end{aligned}$$

Dado que o tensor de Cotton tem traço nulo e pela definição do tensor T temos que $(\operatorname{div} B)(\nabla f) = \frac{1}{4} C_{kji} T_{kji}$. Mais uma vez, dado que $W \equiv 0$ em dimensão 3 e pelo Lema 3.2 conclui-se que

$$(\operatorname{div} B)(\nabla f) = \frac{f}{4} |C|^2.$$

Assim, usando a hipótese de que $\operatorname{div} B(\nabla f) = 0$ obtemos que $C \equiv 0$ em $M \setminus \partial M$ e da continuidade do tensor de Cotton temos $C \equiv 0$ em M . Portanto (M, g) é localmente conformemente *flat*. Usando o Teorema 3.3 concluimos que (M^3, g) é isométrico a uma bola geodésica em \mathbb{R}^3 , \mathbb{H}^3 , ou \mathbb{S}^3 . \square

Como consequência imediata, temos o seguinte corolário com a hipótese do tensor de Bach ser harmônico, o qual é mais fraca do que a hipótese Bach *flat* considerada no Corolário 3.1.

Corolário 3.2 *Seja (M^3, g, f) uma métrica crítica de Miao-Tam simplesmente conexa com bordo isométrico a esfera padrão \mathbb{S}^2 tal que o tensor de Bach é harmônico. Então (M^3, g) é isométrica a uma bola geodésica em \mathbb{R}^3 , \mathbb{H}^3 , or \mathbb{S}^3 .*

4 VOLUME MÍNIMO E CURVATURA MÍNIMA

Este capítulo é baseado no artigo *Estimates for Minimal Volume and Minimal Curvature on 4-dimensional compact manifolds*, escrito pelo autor em parceria com E. Costa e E. Ribeiro Jr., e seu principal objetivo é obter estimativas para o volume mínimo e a curvatura mínima de variedades compactas de dimensão 4.

O conceito de volume mínimo foi introduzido por Gromov (1982), onde ele obteve estimativas inferiores para o volume mínimo em termos da característica de Euler, números de Pontryagin e volume simplicial. Muitos pesquisadores se voltaram então para este assunto, o qual deu início ao estudo de muitos outros invariantes, tais como *simplicial volume*, *spherical volume*, *volume entropy*, *topological entropy*, *minimal eigenvalue* e *isoperimetric constant*. Para um breve resumo destes invariantes e como eles estão relacionados veja (KOTSHICK, 2012), veja também (BESSIERES, 1998; BESSON *et al.*, 1991, 1994, 1995; LAFONT; SCHMIDT, 2006; MANNING, 1979; PATERNAIN; PETEAN, 2003).

Já o conceito de curvatura mínima foi introduzido por Yun (1996), onde ele mostra uma relação direta entre a curvatura mínima e o volume mínimo. Além disso, prova uma estimativa inferior da curvatura mínima em termos do invariante de Yamabe.

Aqui obtemos estimativas para o volume mínimo e curvatura mínima. Além disso, exibiremos exemplos de variedades que satisfazem a igualdade, mostrando assim que as algumas estimativas são ótimas. Apresentaremos também alguns resultados de caracterização, sendo um em volume mínimo e dois em curvatura mínima.

4.1 Estimativas para curvatura mínima

Na Seção 2.4 apresentamos as noções básicas de curvatura mínima, que foi introduzida por Yun (1996). Relembremos a definição.

Definição 4.1 *Para uma variedade compacta M , a **curvatura mínima** de M é dada por*

$$\text{Mincur}(M) = \inf\{ \mathcal{R}^\infty(g); g \in \mathcal{M}_1 \},$$

onde $\mathcal{R}^\infty(g) = |Rm|_\infty$.

Como foi visto na Seção 2.4 a curvatura mínima está diretamente relacionada ao volume mínimo. Isso nos mostra a grande importância de estudarmos a curvatura mínima.

Em seu trabalho, Yun (1996) mostrou uma estimativa para a curvatura mínima em função do invariante de Yamabe. Mais precisamente, ele obteve a seguinte proposição.

Proposição 4.1 (Yun, 1996) *Existe uma constante $C_n > 0$ dependendo somente da*

dimensão n , tal que para cada variedade compacta M com $\mathcal{Y}(M) \leq 0$ vale

$$\text{Mincur}(M) \geq C_n |\mathcal{Y}(M)|.$$

O próximo teorema nos dar um resultado semelhante ao do Yun. De fato, ele estabelece estimativas para a curvatura mínima em função da característica de Euler, da assinatura e do invariante de Yamabe de uma variedade, exibindo explicitamente o valor da constante c da Proposição 4.1.

Teorema 4.1 *Seja M^4 uma variedade compacta orientada. Então vale as seguintes estimativas:*

1. $\text{Mincur}(M) \geq 2\pi \sqrt{2|\chi(M)|}$.
2. Se $\mathcal{Y}(M) \geq 0$, então $\text{Mincur}(M) \geq 2\pi \sqrt{3|\tau(M)|}$.
3. Se $\mathcal{Y}(M) \leq 0$, então $\text{Mincur}(M) \geq \sqrt{12\pi^2|\tau(M)| + \frac{|\mathcal{Y}(M)|^2}{24}}$.

Demonstração: Para a prova do primeiro item, relembramos a fórmula de Gauss-Bonnet-Chern, que diz que a característica de Euler satisfaz

$$\chi(M) = \frac{1}{8\pi^2} \int_M \left(\frac{R^2}{24} + |W|^2 - \frac{1}{2}|Ric|^2 \right) dV_g. \quad (70)$$

De (21), concluímos

$$\begin{aligned} 8\pi^2 |\chi(M)| &\leq \int_M \left(\frac{R^2}{24} + |W|^2 + \frac{1}{2}|Ric|^2 \right) dV_g \\ &= \int_M |Rm|^2 dV_g \\ &\leq [\mathcal{R}^\infty(g)]^2 \text{Vol}(M, g). \end{aligned}$$

Portanto, é suficiente tomar o ínfimo em \mathcal{M}_1 para concluir que

$$\text{Mincur}(M) \geq 2\pi \sqrt{2|\chi(M)|},$$

o que prova o primeiro item.

Prosseguindo, para o segundo item, o teorema da assinatura de Hirzebruch nos diz que

$$\tau(M) = \frac{1}{12\pi^2} \int_M (|W^+|^2 - |W^-|^2) dV_g. \quad (71)$$

Usando mais uma vez (21), segue que

$$\begin{aligned} 12\pi^2 |\tau(M)| &\leq \int_M (|W^+|^2 + |W^-|^2) dV_g \\ &\leq [\mathcal{R}^\infty(g)]^2 \text{Vol}(M, g). \end{aligned}$$

Disto, $\text{Mincur}(M) \geq 2\pi \sqrt{3|\tau(M)|}$.

Prosseguindo, para o terceiro, basta observar que, da decomposição do tensor de curvatura, tem-se

$$\begin{aligned} [\mathcal{R}^\infty(g)]^2 &\geq |Rm|^2 \\ &= \frac{R^2}{24} + |W|^2 + \frac{1}{2}|Ric|^\circ{}^2 \\ &\geq \frac{R^2}{24} + |W|^2. \end{aligned}$$

Integrando sobre M a desigualdade acima e usando o fato de $Vol(M, g) = 1$, deduzimos

$$\begin{aligned} [\mathcal{R}^\infty(g)]^2 &\geq \int_M \frac{R^2}{24} dV_g + \int_M |W|^2 dV_g \\ &\geq \inf_{g \in \mathcal{M}} \int_M \frac{R^2}{24} dV_g + 12\pi^2 |\tau(M)|, \end{aligned}$$

onde na última desigualdade foi usado (71). Assim, usando a Proposição 1 de (LEBRUN, 1999b) concluímos que

$$[\mathcal{R}^\infty(g)]^2 \geq 12\pi^2 |\tau(M)| + \frac{|\mathcal{Y}(M)|^2}{24}.$$

Tomando o ínfimo sobre \mathcal{M}_1 concluímos o resultado. Consequentemente, finalizamos a prova do teorema. \square

No caso do Teorema 4.1 temos que todas as estimativas são ótimas, como veremos logo a seguir. Além disso, conseguimos uma classificação para o caso da igualdade para os dois primeiros itens. Para começar, mostremos que a estimativa do primeiro item é ótima para \mathbb{S}^4 , $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$.

Exemplo 4.1 *Considere $M = \mathbb{S}^4$ a esfera munida da sua métrica canônica g_0 e considere $c > 0$ com $c^2 = Vol(\mathbb{S}^4, g_0) = \frac{8\pi^2}{3}$. Agora defina $\bar{g} = c^{-1}g_0$. Assim, temos que*

$$Vol(\mathbb{S}^4, \bar{g}) = c^{-2} Vol(\mathbb{S}^4, g_0) = c^{-2} \cdot c^2 = 1.$$

Além disso, (\mathbb{S}^4, \bar{g}) é Einstein e localmente conformemente flat, e portanto $|\overline{Rm}|^2 = \frac{\bar{R}^2}{24}$. Logo, temos

$$|\overline{Rm}|^2 = \frac{c^2 R_0^2}{24} = \frac{144c^2}{24} = 6c^2 = 16\pi^2.$$

Assim, concluímos que $|\overline{Rm}| = 4\pi$, e consequentemente $\mathcal{R}^\infty(\bar{g}) = 4\pi$. Daí pelo Teorema 4.1 e de $\chi(\mathbb{S}^4) = 2$ concluímos que

$$4\pi \leq \text{Mincur}(\mathbb{S}^4) \leq \mathcal{R}^\infty(\bar{g}) = 4\pi.$$

Portanto

$$\text{Mincur}(\mathbb{S}^4) = 4\pi.$$

Exemplo 4.2 Considere $M = \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ o espaço projetivo complexo munido com a métrica de Fubini-Study g_0 e considere $c > 0$ com $c^2 = \text{Vol}(\mathbb{C}\mathbb{P}^2, g_0) = \frac{\pi^2}{2}$. Defina uma nova métrica por $\bar{g} = c^{-1}g_0$. Logo, temos que

$$\text{Vol}(\mathbb{C}\mathbb{P}^2, \bar{g}) = c^{-2}\text{Vol}(\mathbb{C}\mathbb{P}^2, g_0) = 1.$$

Desde que $(\mathbb{C}\mathbb{P}^2, g_0)$ é Kähler-Einstein e half-conformemente flat segue que $(\mathbb{C}\mathbb{P}^2, \bar{g})$ também o é. Assim $|\overline{W}^+|^2 = \frac{\overline{R}^2}{24}$. Dado que $R_0 = 24$, obtemos

$$\begin{aligned} |\overline{Rm}|^2 &= \frac{\overline{R}^2}{24} + |\overline{W}^+|^2 \\ &= \frac{\overline{R}^2}{12} \\ &= \frac{c^2 R_0^2}{12} \\ &= 48c^2 \\ &= 24\pi^2. \end{aligned}$$

Assim, concluímos $|\overline{Rm}| = 2\pi\sqrt{6}$, e conseqüentemente $\mathcal{R}^\infty(\bar{g}) = 2\pi\sqrt{6}$. Do Teorema 4.1 e de $\chi(\mathbb{C}\mathbb{P}^2) = 3$ segue que

$$2\pi\sqrt{6} \leq \text{Mincur}(\mathbb{C}\mathbb{P}^2) \leq \mathcal{R}^\infty(\bar{g}) = 2\pi\sqrt{6}.$$

Portanto

$$\text{Mincur}(\mathbb{C}\mathbb{P}^2) = 2\pi\sqrt{6}.$$

Exemplo 4.3 Considere $M = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$. Seja $g_0 = g_1 + g_2$ a métrica produto canônica. Com essa métrica sabemos que tal variedade produto é Einstein e que sua curvatura escalar é a soma das curvaturas escalar de cada variedade, isto é, $R_0 = 4$. Além disso, Kobayashi (1985) mostrou que para a métrica produto tem-se $|W_0|^2 = \frac{4}{3}$ (vale lembrar que a norma que estamos considerando é um quarto da norma do Kobayashi). Agora, considere a métrica $\bar{g} = c^{-1}g_0$, onde $c > 0$ é tal que $c^2 = \text{Vol}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2, g_0) = 16\pi^2$. Assim $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2, \bar{g})$ é Einstein e

$$\text{Vol}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2, \bar{g}) = c^{-2}\text{Vol}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2, g_0) = c^{-2} \cdot c^2 = 1.$$

Além disso, $\overline{R} = cR_0 = 4c$ e $|\overline{W}|_{\overline{g}}^2 = c^2|W_0|_{g_0}^2 = \frac{4c^2}{3}$. Daí

$$\begin{aligned} |\overline{Rm}|^2 &= \frac{\overline{R}}{24} + |\overline{W}|_{\overline{g}}^2 \\ &= \frac{16c^2}{24} + \frac{4c^2}{3} \\ &= 2c^2 \\ &= 32\pi^2. \end{aligned}$$

Portanto, $|\overline{Rm}| = 4\pi\sqrt{2}$, o que nos diz $\mathcal{R}^\infty(\overline{g}) = 4\pi\sqrt{2}$. Assim pelo Teorema 4.1 e pelo fato de $\chi(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2) = 4$, temos

$$4\pi\sqrt{2} \leq \text{Mincur}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2) \leq \mathcal{R}^\infty(\overline{g}) = 4\pi\sqrt{2}.$$

Portanto

$$\text{Mincur}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2) = 4\pi\sqrt{2}.$$

Agora, vamos mostrar que a estimativa do terceiro item é ótima.

Exemplo 4.4 Considere $M = \mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma$. Seja g_0 a métrica Kahler-Einstein em $\mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma$, assim $\chi(\mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma) = 3\tau(\mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma)$. Além disso, pelo Teoremas 3.6 e 3.9 de (LEBRUN, 1999a), tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(\mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma) &= -4\pi\sqrt{2(2\chi(\mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma) + 3\tau(\mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma))} \\ &= -4\pi\sqrt{2(6\tau(\mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma) + 3\tau(\mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma))} \\ &= -12\pi\sqrt{2\tau(\mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma)}. \end{aligned}$$

Logo, pelo item (3) do Teorema 4.1 obtemos

$$\begin{aligned} \text{Mincur}(\mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma) &\geq \sqrt{12\pi^2\tau(\mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma) + \frac{|\mathcal{Y}(\mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma)|^2}{24}} \\ &= \sqrt{12\pi^2\tau(\mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma) + 12\pi^2\tau(\mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma)} \\ &= 2\pi\sqrt{6\tau(\mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma)}. \end{aligned} \tag{72}$$

Por outro lado, considere $c > 0$ tal que $c^2 = \text{Vol}(\mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma, g_0)$ e defina $\overline{g} = c^{-1}g_0$. Desde que g_0 é uma métrica Kahler-Einstein, \overline{g} também o é. Em particular, $|\overline{W}^+|^2 = \frac{\overline{R}^2}{24}$ e

$\bar{R} = cR_0$. Daí,

$$\begin{aligned} |\overline{Rm}|^2 &= \frac{\bar{R}^2}{24} + |\overline{W^+}|^2 \\ &= \frac{\bar{R}^2}{12} \\ &= \frac{c^2 R_0^2}{12}. \end{aligned} \tag{73}$$

Mas observe que na métrica g_0 , tem-se

$$\begin{aligned} 4\pi^2(2\chi(\mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma) + 3\tau(\mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma)) &= \int_{\mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma} \left(\frac{R_0^2}{24} + 2|W^+|^2\right) dV_{g_0} \\ &= \frac{R_0^2}{8} \text{Vol}(\mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma, g_0). \end{aligned}$$

Em particular,

$$288\pi^2\tau(\mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma) = c^2 R_0^2. \tag{74}$$

Comparando (74) com (73) concluímos que $|\overline{Rm}|^2 = 24\pi^2\tau(\mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma)$. Portanto, $\mathcal{R}^\infty(\bar{g}) = 2\pi\sqrt{6\tau(\mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma)}$. Assim, utilizando (72), concluímos

$$2\pi\sqrt{6\tau(\mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma)} \leq \text{Mincur}(\mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma) \leq \mathcal{R}^\infty(\bar{g}) = 2\pi\sqrt{6\tau(\mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma)}.$$

Portanto,

$$\text{Mincur}(\mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma) = 2\pi\sqrt{6\tau(\mathbb{C}\mathcal{H}^2/\Gamma)}.$$

Como uma consequência imediata da primeira estimativa do Teorema 4.1, tendo em vista que para uma variedade simplesmente conexa a característica de Euler é maior ou igual a 2, deduzimos o seguinte resultado.

Corolário 4.1 *Seja M^4 uma variedade compacta e simplesmente conexa. Então:*

$$\text{Mincur}(M) \geq \text{Mincur}(\mathbb{S}^4) = 4\pi.$$

Além disso, se vale a igualdade, então M^4 é homeomorfa a esfera \mathbb{S}^4 .

É importante ressaltar que no caso da igualdade, o resultado segue pelo teorema de classificação de Freedman (1982). De fato, caso a igualdade ocorra, segue que $\chi(M) = 2$. Como uma extensão do resultado acima, temos o seguinte corolário.

Corolário 4.2 *Seja M^4 uma variedade compacta e simplesmente conexa satisfazendo*

$$\text{Mincur}(M) \leq 2\sqrt{6}\pi.$$

Então, M^4 é homeomorfa a \mathbb{S}^4 ou ao $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

Como já é conhecido, o Toro *flat* tem volume mínimo igual a zero. Assim, pela Proposição 2.6 temos que sua curvatura mínima também é zero. Logo, a igualdade na segunda estimativa do Teorema 4.1 acontece para o toro *flat*. No entanto, é interessante encontrarmos exemplos de variedades não *flats* que a igualdade da referida estimativa aconteça. Diante disto e dos trabalhos de Hitchin (1974), acreditamos que as superfícies *K3* satisfazem a igualdade. É o que nos indica o próximo corolário.

Corolário 4.3 *Seja (M^4, g) uma variedade de Einstein compacta e orientada satisfazendo $\text{Mincur}(M) = 2\pi\sqrt{3|\tau(\overline{M})|}$. Então M^4 é flat ou seu recobrimento universal é uma superfície *K3*.*

Demonstração: Desde que $\text{Mincur}(M) = 2\pi\sqrt{3|\tau(\overline{M})|}$, segue do Teorema 4.1 que

$$8\pi^2|\chi(M)| \leq \text{Mincur}(M)^2 = 12\pi^2|\tau(M)|. \quad (75)$$

Por outro lado, como (M, g) é Einstein tem-se $\chi(M) \geq 0$. Portanto de (75) concluímos que $8\pi^2\chi(M) \leq 12\pi^2|\tau(M)|$, ou ainda

$$\chi(M) \leq \frac{3}{2}|\tau(M)|.$$

Mas, como (M, g) é Einstein, ela satisfaz a desigualdade de Hitchin-Thorpe $\chi(M) \geq \frac{3}{2}|\tau(M)|$. Portanto,

$$\chi(M) = \frac{3}{2}|\tau(M)|.$$

Logo pelo Teorema de Hitchin (1974) segue o resultado. \square

Agora, vamos tratar o caso da igualdade na primeira estimativa do Teorema 4.1. Neste caso, sob uma hipótese adicional, conseguimos o seguinte resultado.

Teorema 4.2 *Seja M^4 uma variedade compacta orientada satisfazendo $\text{Mincur}(M) = 2\pi\sqrt{2\chi(\overline{M})}$. Se existe uma métrica g que atinge a curvatura mínima, isto é, $\text{Mincur}(M) = \mathcal{R}^\infty(g)$, então (M^4, g) é Einstein e $|W|$ é constante. Além disso, se a curvatura seccional é não-negativa, então M^4 é isométrica a \mathbb{S}^4 , $\mathbb{C}P^2$ ou $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$.*

Demonstração: De (70) e da nossa hipótese obtemos

$$\begin{aligned} \int_M \frac{R^2}{24} dV_g + \int_M |W|^2 dV_g - \frac{1}{2} \int_M |\mathring{Ric}|^2 dV_g &= 8\pi^2\chi(M) \\ &= [\text{Mincur}(M)]^2. \end{aligned}$$

Daí, usando o fato de existir uma métrica g em M^4 satisfazendo $\text{Mincur}(M) = \mathcal{R}^\infty(g)$ inferimos

$$\begin{aligned} \int_M \frac{R^2}{24} dV_g + \int_M |W|^2 dV_g - \frac{1}{2} \int_M |\mathring{Ric}|^2 dV_g &= [\mathcal{R}^\infty(g)]^2 \\ &\geq \frac{R^2}{24} + |W|^2 + \frac{1}{2}|\mathring{Ric}|^2. \end{aligned} \quad (76)$$

Assim, integrando (76) sobre M^4 e usando o fato de $Vol(M^4, g) = 1$ obtemos

$$\int_M |\mathring{Ric}|^2 dV_g \leq 0.$$

O que força (M^4, g) ser Einstein. Em particular, M^4 tem curvatura escalar constante. Usando essas informações em (76) temos

$$\int_M |W|^2 dV_g \geq |W|^2.$$

Defina então, a função $F := \int_M |W|^2 dV_g - |W|^2 \geq 0$ e assim

$$0 \leq \int_M F dV_g = \int_M |W|^2 dV_g - \int_M |W|^2 dV_g = 0,$$

onde foi usado o fato de $Vol(M^4, g) = 1$. Portanto $F = 0$ e assim $|W|^2 = \int_M |W|^2 dV_g$ é constante, o que finaliza a primeira parte do teorema.

Por fim, se M^4 tem curvatura seccional não negativa o resultado segue do Corolário 1.1 de (COSTA, 2004), e assim finalizamos a prova do teorema. \square

Um problema interessante é saber quando uma variedade de dimensão 4 possui métrica de curvatura seccional não negativa. Mesmo sob a condição de Einstein. Ressaltamos que exemplos de tais variedades são raros. Variedades compactas rotacionalmente elípticas são homeomorfas à umas das variedades: \mathbb{S}^4 , $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ ou $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$. A partir disso, foi conjecturado que somente as duas primeiras podem admitir curvatura positiva. Esta questão está diretamente relacionado à conjectura de Bott, a qual pergunta se uma variedade compacta simplesmente conexa com curvatura seccional não negativa é necessariamente elíptica; para maiores detalhes veja (ZILLER, 2007, 2014). Entretanto, é possível exibir uma métrica de curvatura seccional não negativa na soma conexa $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$, confira Exemplo 45 em (PETERSEN, 2006, p. 212), veja também (CHEEGER, 1973).

Ao mesmo tempo, a conjectura de Hopf pergunta se não existe métrica com curvatura seccional positiva em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$. Diante deste problema, tendo em vista que $\chi(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2) = 4$, usando o Teorema 4.2 deduzimos o seguinte corolário, o qual nos dá uma condição para que a conjectura de Hopf seja verdadeira.

Corolário 4.4 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ não possui uma métrica g com curvatura seccional positiva e $\mathcal{R}^\infty(g) \leq 4\pi\sqrt{2}$.

4.2 Alguns resultados sobre problema de Yamabe modificado

Iniciaremos esta seção com um resultado fundamental para o desenvolvimento da teoria. Um resultado similar foi provado por Besson, Courtois e Gallot para o caso da curvatura escalar, veja (BESSON; COURTOIS; GALLOT, 1991, Prop. 2.1).

Proposição 4.2 *Seja M^4 uma variedade compacta com uma métrica g tal que K_1^\perp é constante não positiva. Se \bar{g} é uma métrica conforme à g , então*

$$\int_M |K_1^\perp|^2 dV_g \leq \int_M |\bar{K}_1^\perp|^2 dV_{\bar{g}},$$

e a igualdade ocorre se e somente se existe uma constante $c > 0$ tal que $\bar{g} = cg$.

Demonstração: Considere $\bar{g} = e^{2\phi}g \in [g]$, para alguma função ϕ de M^4 . Disto, temos

$$\bar{R} - f_1(\bar{W}) = 12\bar{K}_1^\perp$$

e

$$\bar{R} = e^{-2\phi}(-6\Delta\phi - 6|\nabla\phi|^2 + R).$$

Desde que $f_1(\bar{W}) = e^{-2\phi}f_1(W)$, concluímos

$$12e^{2\phi}\bar{K}_1^\perp = 12K_1^\perp - 6\Delta\phi - 6|\nabla\phi|^2. \quad (77)$$

Integrando a Equação (77) com relação a métrica g e usando o fato de K_1^\perp ser uma constante não positiva juntamente com o Teorema de Stokes, deduzimos

$$\begin{aligned} 12 \int_M |K_1^\perp| dV_g &= -12 \int_M \bar{K}_1^\perp e^{2\phi} dV_g - 6 \int_M |\nabla\phi|^2 dV_g \\ &\leq 12 \int_M e^{2\phi} |\bar{K}_1^\perp| dV_g. \end{aligned} \quad (78)$$

Em particular, vale a igualdade em (78) se, e somente se, ϕ for uma função constante.

Por outro lado, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\left(\int_M e^{2\phi} |\bar{K}_1^\perp| dV_g \right)^2 \leq \left(\int_M e^{4\phi} |\bar{K}_1^\perp|^2 dV_g \right) Vol(M, g), \quad (79)$$

e, sendo $dV_{\bar{g}} = e^{4\phi}dV_g$, concluímos

$$\frac{1}{Vol(M, g)} \left(\int_M e^{2\phi} |\bar{K}_1^\perp| dV_g \right)^2 \leq \int_M |\bar{K}_1^\perp|^2 dV_{\bar{g}}. \quad (80)$$

Assim, como K_1^\perp é constante, podemos usar (78) e (80) para concluir que

$$\begin{aligned} \int_M |K_1^\perp|^2 dV_g &= \frac{1}{Vol(M, g)} \left(\int_M |K_1^\perp| dV_g \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{Vol(M, g)} \left(\int_M e^{2\phi} |\bar{K}_1^\perp| dV_{\bar{g}} \right)^2 \\ &\leq \int_M |\bar{K}_1^\perp|^2 dV_{\bar{g}}, \end{aligned}$$

o que finaliza a demonstração da proposição. \square

Nosso objetivo agora é estudar o comportamento do invariante $\mathcal{Y}_1^\perp(M)$. Para isto, seguiremos as ideias desenvolvidas por Itoh (2005) e LeBrun (1999b).

Lema 4.1 *Seja M^4 uma variedade compacta. Então*

$$\inf_{\bar{g} \in [g]} \int_M |\bar{K}_1^\perp|^2 dV_{\bar{g}} = \frac{|\mathcal{Y}_1^\perp(M, [g])|^2}{144}$$

para qualquer classe conforme $[g]$.

Demonstração: Inicialmente, vamos supor que $\mathcal{Y}_1^\perp(M, [g]) \geq 0$. Assim, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, para cada métrica, obtemos

$$\frac{12}{\text{Vol}(M, g)^{\frac{1}{2}}} \int_M K_1^\perp dV_g \leq \left(144 \int_M |K_1^\perp|^2 dV_g \right)^{\frac{1}{2}},$$

com igualdade se, e somente se, K_1^\perp é uma constante não negativa. Tomando o ínfimo sobre as classes conformes de g e usando (48) obtemos

$$\mathcal{Y}_1^\perp(M, [g]) \leq \inf_{\bar{g} \in [g]} \left(144 \int_M |\bar{K}_1^\perp|^2 dV_{\bar{g}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por outro lado, pela Proposição 2.5, existe uma métrica $\bar{g} \in [g] \cap \mathcal{M}_1$ de curvatura escalar modificada constante. Em tal métrica $12\bar{K}_1^\perp = \mathcal{Y}_1^\perp(M, [g]) \geq 0$. Logo, deduzimos que

$$\inf_{\bar{g} \in [g]} \int_M |\bar{K}_1^\perp|^2 dV_{\bar{g}} = \frac{\mathcal{Y}_1^\perp(M, [g])^2}{144},$$

o que prova a primeira parte do lema.

Agora, vamos assumir que $\mathcal{Y}_1^\perp(M, [g]) \leq 0$. Consideremos também $\bar{g} \in [g] \cap \mathcal{M}_1$ tal que $12\bar{K}_1^\perp = \mathcal{Y}_1^\perp(M, [g]) \leq 0$ é constante. Pela Proposição 4.2 concluímos

$$\frac{|\mathcal{Y}_1^\perp(M, [g])|^2}{144} = \int_M |\bar{K}_1^\perp|^2 dV_{\bar{g}} \leq \int_M |K_1^\perp|^2 dV_g.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $\bar{g} = cg$, para alguma constante $c > 0$, finalizando, assim, a demonstração do lema. \square

Baseado no Lema 4.1 deduzimos a seguinte proposição, a qual nos dar uma interpretação interessante do invariante de Yamabe modificado $\mathcal{Y}_1^\perp(M)$. LeBrun (1999b) provou um resultado similar para a curvatura escalar e o invariante de Yamabe.

Proposição 4.3 *Seja M^4 uma variedade compacta. Então*

$$\inf_{g \in \mathcal{M}} \int_M |K_1^\perp|^2 dV_g = \begin{cases} 0, & \text{se } \mathcal{Y}_1^\perp(M) > 0; \\ \frac{|\mathcal{Y}_1^\perp(M)|^2}{144}, & \text{se } \mathcal{Y}_1^\perp(M) \leq 0. \end{cases}$$

Demonstração:

Primeiro, assumamos que $\mathcal{Y}_1^\perp(M) \leq 0$, então $\mathcal{Y}_1^\perp(M, [g]) \leq 0$, para toda classe conforme $[g]$. Em particular, podemos escrever

$$\begin{aligned} \inf_{[g]} |\mathcal{Y}_1^\perp(M, [g])|^2 &= \inf_{[g]} (-\mathcal{Y}_1^\perp(M, [g]))^2 \\ &= \left(-\sup_{[g]} \mathcal{Y}_1^\perp(M, [g]) \right)^2 \\ &= (-\mathcal{Y}_1^\perp(M))^2 \\ &= |\mathcal{Y}_1^\perp(M)|^2. \end{aligned}$$

Combinando a informação acima com o Lema 4.1 obtemos o resultado desejado.

Por outro lado, sabemos que toda variedade de dimensão maior ou igual a 3 admite métrica de curvatura escalar negativa, digamos g , veja por exemplo (BESSE, 2008). Portanto, como $R_g - f_1(W_g) = 12K_1^\perp$ e $f_1(W_g) \geq 0$ segue que $K_1^\perp < 0$. Assim, assumindo que $\mathcal{Y}_1^\perp(M) > 0$ e como \mathcal{M} é conexo, existe uma classe conforme $[g]$ em M com $\mathcal{Y}_1^\perp(M, [g]) = 0$. Portanto

$$\inf_{[g]} |\mathcal{Y}_1^\perp(M, [g])| = 0.$$

Novamente, o resultado segue pelo Lema 4.1 e assim finalizamos a prova da proposição. \square

4.3 Estimativas para volume mínimo modificado

Nosso objetivo nesta seção é obter estimativas de volume mínimo para variedades de dimensão 4, usando a noção de curvatura biortogonal. De fato, inspirados em (PATERNAIN; PETEAN, 2003, sec. 7), introduzimos os seguintes volumes mínimos modificados.

$$\text{Vol}_{|K^\perp|}(M) = \inf\{\text{Vol}(M^4, g); |K^\perp| \leq 1\}. \quad (81)$$

Similar a definição (81) usamos (33) para definir

$$\text{Vol}_{|K_1^\perp|}(M) = \inf\{\text{Vol}(M^4, g); |K_1^\perp| \leq 1\}. \quad (82)$$

Claramente, de (32) temos

$$\text{MinVol}(M) \geq \text{Vol}_{|K^\perp|}(M) \geq \text{Vol}_{|K_1^\perp|}(M). \quad (83)$$

Nossa primeira proposição é uma equivalência entre o invariante de Yamabe

modificado (49) e o volume mínimo modificado (82). Esse resultado é baseado no trabalho de LeBrun (1999b) que mostra que o espaço das curvaturas escalares limitadas por uma constante universal, colapsando a zero, é diretamente relevante para o cálculo do invariante de Yamabe.

Proposição 4.4 *Seja M^4 uma variedade compacta. Então os seguintes itens são equivalentes:*

1. $\text{Vol}_{|K_1^\perp|}(M) = 0$;
2. $\inf_{g \in \mathcal{M}} \int_M |K_1^\perp|^2 dV_g = 0$;
3. $\mathcal{Y}_1^\perp(M) \geq 0$.

Demonstração: Primeiro, assumimos que $\text{Vol}_{|K_1^\perp|}(M) = 0$. Então existe uma sequência de métricas $\{g_i\}_{i \geq 1}$ em $\mathcal{M}_{|K_1^\perp|} = \{g \in \mathcal{M}; |K_1^\perp| \leq 1\}$ tal que $\text{Vol}(M, g_i)$ converge para 0 quando i vai para o infinito. Disto, temos que

$$\int_M |(K_1^\perp)_i|^2 dV_{g_i} \leq \text{Vol}(M, g_i),$$

e, portanto deduzimos

$$\inf_{g \in \mathcal{M}_{|K_1^\perp|}} \int_M |K_1^\perp|^2 dV_g = 0.$$

Por outro lado, como $\mathcal{M}_{|K_1^\perp|} \subset \mathcal{M}$ concluímos

$$0 \leq \inf_{g \in \mathcal{M}} \int_M |K_1^\perp|^2 dV_g \leq \inf_{g \in \mathcal{M}_{|K_1^\perp|}} \int_M |K_1^\perp|^2 dV_g = 0$$

o que prova o segundo item.

Para concluir que o segundo item implica no terceiro item é suficiente usar a Proposição 4.3.

Por fim, assumamos que $\mathcal{Y}_1^\perp(M) \geq 0$. Como qualquer variedade suave de dimensão maior ou igual a 3 admite métricas de curvatura escalar negativa (BESSE, 2008) e $12K_1^\perp = R_g - f_1(W_g)$, com $f_1(W_g) \geq 0$, segue que M^4 admite métrica tal que K_1^\perp é negativa. Portanto, existe uma sequência de métricas $\{g_i\}$ tal que $\text{Vol}(M, g_i) = 1$ e $(K_1^\perp)_i$ converge para 0 quando i vai para o infinito, com $(K_1^\perp)_i < 0$ para todo i . Definindo $\bar{g}_i = \|(K_1^\perp)_i\|_\infty g_i$ obtemos $R_{\bar{g}_i} = \frac{1}{\|(K_1^\perp)_i\|_\infty} R_{g_i}$. Assim

$$\begin{aligned} 12(\bar{K}_1^\perp)_i &= R_{\bar{g}_i} - f_1(\bar{W}_i) \\ &= \frac{1}{\|(K_1^\perp)_i\|_\infty} R_{g_i} - \frac{1}{\|(K_1^\perp)_i\|_\infty} f_1(W_i) \\ &= \frac{12(K_1^\perp)_i}{\|(K_1^\perp)_i\|_\infty}. \end{aligned}$$

Portanto, $|(\overline{K_1^\perp})_i| \leq 1$ e

$$\begin{aligned} Vol(M, \overline{g}_i) &= |(K_1^\perp)_i|^2 Vol(M, g_i) \\ &= |(K_1^\perp)_i|^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Então, concluímos que $Vol_{|K_1^\perp|}(M) = 0$, finalizando a demonstração da proposição. \square

Vale ressaltar que na esfera padrão \mathbb{S}^4 temos $\mathcal{Y}_1^\perp(\mathbb{S}^4) = \mathcal{Y}(\mathbb{S}^4) = 8\pi\sqrt{6}$, onde $\mathcal{Y}(M)$ denota o invariante de Yamabe. Usando a Proposição 4.4 percebe-se que $Vol_{|K_1^\perp|}(\mathbb{S}^4) = 0$. Por outro lado, como veremos no Teorema 4.3, $Vol_{|K_1^\perp|}(\mathbb{S}^4) > 0$. Logo, podemos concluir que a desigualdade (83) pode ser estrita.

Desde que $Vol(e^{2f}g) = e^{4f}Vol(g)$ segue, para uma variedade compacta de dimensão 4, que o funcional

$$\mathcal{W}(g) = \int_M |W_g|^2 dV_g \quad (84)$$

é conformemente invariante, isto é, $\mathcal{W}(e^{2f}g) = \mathcal{W}(g)$. Como foi provado por Kobayashi (1987), o invariante

$$\mathcal{W}(M) = \inf\{\mathcal{W}(g); g \in \mathcal{M}\} \quad (85)$$

reflete certas propriedades globais da variedade M . Além disso, claramente $\mathcal{W}(M) = 0$ se M admite uma métrica g localmente conformemente flat.

Costa, Ribeiro Jr. e Santos (2015) definiram o funcional $\mathcal{E}_1^\perp : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ como segue

$$\mathcal{E}_1^\perp(g) = \int_M (R_g - 12K_1^\perp)^2 dV_g, \quad (86)$$

o qual também é um invariante conforme, veja (COSTA; RIBEIRO JR.; SANTOS, 2015, Proposição 2). Além disso, eles introduziram o invariante

$$\mathcal{E}_1^\perp(M) = \inf_{g \in \mathcal{M}} \mathcal{E}_1^\perp(g). \quad (87)$$

Nosso próximo lema mostra uma relação entre (84) e (86).

Lema 4.2 *Seja M^4 uma variedade compacta e orientada de dimensão 4. Então*

$$\mathcal{W}(g) \leq \frac{1}{6} \mathcal{E}_1^\perp(g).$$

Demonstração: De (37) deduzimos que $w_1^\pm \leq 0$ e $w_3^\pm \geq 0$. Além disso, temos

$$(w_2^\pm)^2 + (w_3^\pm)^2 = (w_1^\pm)^2 - 2w_2^\pm w_3^\pm.$$

Ainda desta última informação, temos

$$\begin{aligned} |W^+|^2 &= (w_1^+)^2 + (w_2^+)^2 + (w_3^+)^2 \\ &= 2(w_1^+)^2 - 2w_2^+w_3^+. \end{aligned}$$

Assim, desde que $w_1^+w_3^+ \leq w_2^+w_3^+$ e $(w_1^+)^2 = -w_1^+w_3^+ - w_1^+w_2^+$ inferimos que

$$|W^+|^2 \leq 6(w_1^+)^2. \quad (88)$$

Similarmente, deduzimos $|W^-|^2 \leq 6(w_1^-)^2$. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(g) &= \int_M |W|^2 dV_g \\ &\leq 6 \int_M (w_1^+ + w_1^-)^2 dV_g, \end{aligned}$$

onde foi usado o fato de $w_1^+w_1^- \geq 0$. Por fim, de (33) deduzimos

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(g) &\leq \frac{1}{6} \int_M (R_g - 12K_1^\perp)^2 dV_g \\ &= \frac{1}{6} \mathcal{E}_1^\perp(g), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Em particular, o Lema 4.2 nos leva a deduzir que

$$\mathcal{W}(M) \leq \frac{1}{6} \mathcal{E}_1^\perp(M). \quad (89)$$

Nossa próxima proposição nos mostra uma relação entre $\mathcal{E}_1^\perp(M)$ e $\text{Vol}_{|\mathbb{K}^\perp|}(M)$. Mais precisamente, temos a seguinte proposição.

Proposição 4.5 *Seja M^4 uma variedade compacta e orientada de dimensão 4. Então*

$$\mathcal{E}_1^\perp(M) \leq 576 \text{Vol}_{|\mathbb{K}^\perp|}(M).$$

Demonstração: Seja g uma métrica em M^4 tal que $|K^\perp(g)| \leq 1$. Considere um referencial ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Assim, deduzimos que a curvatura escalar de g satisfaz

$$\begin{aligned} R_g &= 2 \sum_{i < j} K(e_i, e_j) \\ &= 2(K(e_1, e_2) + K(e_1, e_3) + K(e_1, e_4) + K(e_2, e_3) + K(e_2, e_4) + K(e_3, e_4)) \\ &= 4(K^\perp(e_1, e_2) + K^\perp(e_1, e_3) + K^\perp(e_1, e_4)). \end{aligned}$$

Daí, segue que $|R_g| \leq 12$.

Por outro lado, pela desigualdade de Cauchy, inferimos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6}\mathcal{E}_1^\perp(g) &= \frac{1}{6} \int_M (R_g - 12K_1^\perp)^2 dV_g \\
&\leq \frac{1}{3} \int_M (R_g^2 + 144(K_1^\perp)^2) dV_g \\
&\leq \frac{1}{3} \int_M (144 + 144) dV_g \\
&\leq 96 \text{Vol}(M, g),
\end{aligned} \tag{90}$$

onde usamos o fato de $|K^\perp(g)| \leq 1$ implicar que $|K_1^\perp| \leq 1$. Disto, segue que

$$\frac{1}{6}\mathcal{E}_1^\perp(M) \leq 96 \text{Vol}_{|K^\perp|}(M),$$

o que conclui a prova da proposição. \square

Nosso próximo resultado estima o volume mínimo modificado em termos de alguns invariantes geométricos.

Teorema 4.3 *Seja M^4 uma variedade compacta e orientada. Então valem as seguintes afirmações:*

1. $\text{Vol}_{|K^\perp|}(M) \geq \frac{9}{20}\pi^2|\tau(M)|$.
2. Se $\chi(M) \geq 0$, então $\text{Vol}_{|K^\perp|}(M) \geq \frac{12}{25}\pi^2\chi(M)$.
3. Se $\mathcal{Y}_1^\perp(M) \leq 0$, então $\text{Vol}_{|K^\perp|}(M) \geq \text{Vol}_{|K_1^\perp|}(M) \geq \frac{1}{144}|\mathcal{Y}_1^\perp(M)|^2$.
4. Se $\mathcal{Y}_1^\perp(M) \leq 0$, então $\text{Mincur}(M) \geq \frac{1}{6\sqrt{2}}|\mathcal{Y}_1^\perp(M)|$.

Demonstração: Para o primeiro item, usamos o Teorema 3.2 de (GRAY, 1972), o qual diz que em um referencial ortonormal orientado $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a assinatura τ de M^4 é dado por

$$\begin{aligned}
\tau(M^4) &= \frac{1}{6\pi^2} \int_M \{ (K_{12} + K_{34})R_{1234} + (K_{13} + K_{24})R_{1324} + (K_{14} + K_{23})R_{1423} \\
&\quad + (R_{1323} - R_{1424})(R_{1314} - R_{2324}) - (R_{1232} - R_{1434})(R_{1214} - R_{2343}) \\
&\quad + (R_{1242} - R_{1343})(R_{1213} - R_{4243}) \} dV_g,
\end{aligned} \tag{91}$$

onde K_{ij} é a curvatura seccional do plano gerado por e_i e e_j .

Por outro lado o Corolário 4.1 de (BISHOP; GOLDBERG, 1964) nos diz que existe um referencial ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ tal que as componentes do tensor de curvatura R_{1213} , R_{1214} , R_{1223} , R_{1224} , R_{1314} e R_{1323} são todas nulas. Esta informação combinada com (91) e (32) nos fornece

$$\begin{aligned}
6\pi^2\tau(M^4) &= \int_M \{ 2K_{12}^\perp R_{1234} + 2K_{13}^\perp R_{1324} + 2K_{14}^\perp R_{1423} \\
&\quad + R_{1424}R_{2324} - R_{1434}R_{2343} + R_{1343}R_{4243} \} dV_g.
\end{aligned} \tag{92}$$

Por outro lado, Seaman (1991) provou que

$$|R_{ijkl}| \leq \frac{2}{3}(K_3^\perp - K_1^\perp). \quad (93)$$

Assim, aplicando esta estimativa de Seaman na equação (92) e usando o fato de $|K^\perp| \leq 1$ inferimos

$$6\pi^2|\tau(M^4)| \leq \int_M \left\{ 4(K_3^\perp - K_1^\perp) + \frac{4}{3}(K_3^\perp - K_1^\perp)^2 \right\} dV_g.$$

Usando novamente o fato de $|K^\perp| \leq 1$, concluímos

$$6\pi^2|\tau(M^4)| \leq \frac{40}{3}Vol(M, g),$$

o que prova o primeiro item.

Para o segundo, usaremos um resultado obtido por Bishop e Goldberg (1964), o qual nos diz que para um referencial ortonormal adequado, a característica de Euler de M^4 pode ser escrita como

$$4\pi^2\chi(M) = \int_M (K_{12}K_{34} + K_{13}K_{24} + K_{14}K_{23} + (R_{1234})^2 + (R_{1324})^2 + (R_{1423})^2) dV_g. \quad (94)$$

Assim, como $\chi(M) \geq 0$ e $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ para todos $a, b \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} 4\pi^2\chi(M) &\leq \int_M \left(\left(\frac{K_{12} + K_{34}}{2}\right)^2 + \left(\frac{K_{13} + K_{24}}{2}\right)^2 + \left(\frac{K_{14} + K_{23}}{2}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + (R_{1234})^2 + (R_{1324})^2 + (R_{1423})^2 \right) dV_g \\ &= \int_M \left((K_{12}^\perp)^2 + (K_{13}^\perp)^2 + (K_{14}^\perp)^2 + (R_{1234})^2 + (R_{1324})^2 + (R_{1423})^2 \right) dV_g \end{aligned} \quad (95)$$

Agora, comparando (93) com (95) obtemos

$$4\pi^2\chi(M) \leq \int_M \left((K_{12}^\perp)^2 + (K_{13}^\perp)^2 + (K_{14}^\perp)^2 + \frac{4}{3}(K_3^\perp - K_1^\perp)^2 \right) dV_g.$$

Logo, como $|K^\perp| \leq 1$, temos

$$4\pi^2\chi(M) \leq \frac{25}{3}Vol(M, g).$$

Isto nos diz que

$$Vol_{|K^\perp|}(M) \geq \frac{12\pi^2}{25}\chi(M)$$

e isto prova o segundo item.

Para o terceiro item, de (83) é suficiente provar que

$$\text{Vol}_{|K_1^\perp|}(M) \geq \frac{1}{144} |\mathcal{Y}_1^\perp(M)|^2.$$

Seja g uma métrica tal que $|K_1^\perp| \leq 1$ e assumamos que $\mathcal{Y}_1^\perp(M) \leq 0$. Pela Proposição 2.5 existe uma métrica $\bar{g} \in [g] \cap \mathcal{M}_1$ de curvatura escalar modificada $12\bar{K}_1^\perp = \mathcal{Y}_1^\perp(M, [\bar{g}]) \leq \mathcal{Y}_1^\perp(M) \leq 0$. Dado que \bar{K}_1^\perp é constante não positiva, usamos a Proposição 4.2 para obter

$$\int_M |\bar{K}_1^\perp|^2 dV_{\bar{g}} \leq \int_M |K_1^\perp|^2 dV_g.$$

Logo, usando a Proposição 4.3 inferimos que

$$\begin{aligned} |\mathcal{Y}_1^\perp(M)|^2 &\leq 144 \int_M |\bar{K}_1^\perp|^2 dV_{\bar{g}} \\ &\leq 144 \int_M |K_1^\perp|^2 dV_g \\ &\leq 144 \text{Vol}(M, g), \end{aligned}$$

o que finaliza a prova do terceiro item.

Por fim, para o quarto item, considere g uma métrica em M^4 de volume 1. Da decomposição do tensor de curvatura de Riemann (21), temos

$$|Rm|^2 \geq \frac{R^2}{24} + |W|^2. \quad (96)$$

Além disso, dado que $R = 12K_1^\perp + f_1(W)$ temos

$$R^2 \geq \frac{144(K_1^\perp)^2}{1 + \alpha} - \frac{(f_1(W))^2}{\alpha},$$

para todo $\alpha > 0$. Esta informação combinada com (96) nos diz que

$$|Rm|^2 \geq \frac{6(K_1^\perp)^2}{1 + \alpha} - \frac{(f_1(W))^2}{24\alpha} + |W|^2, \quad (97)$$

para todo $\alpha > 0$.

Por outro lado, temos que

$$|w_1^\pm|^2 \leq \frac{2}{3} |W^\pm|^2. \quad (98)$$

Além disso, a igualdade vale em (98) se, e somente se, $w_3^\pm = w_2^\pm$. De fato, dado que $w_1^+ + w_2^+ + w_3^+ = 0$ inferimos

$$(w_1^+)^2 = (w_2^+)^2 + (w_3^+)^2 + 2w_2^+ w_3^+. \quad (99)$$

Ademais, temos

$$0 \leq (w_3^+ - w_2^+)^2 = (w_3^+)^2 - 2w_2^+w_3^+ + (w_2^+)^2. \quad (100)$$

Assim, comparando (99) com (100) deduzimos que

$$2[(w_2^+)^2 + (w_3^+)^2] \geq (w_1^+)^2.$$

Ao qual segue que $(w_1^+)^2 \leq \frac{2}{3}|W^+|^2$. Similarmente, temos $(w_1^-)^2 \leq \frac{2}{3}|W^-|^2$ o que prova (98).

Logo, combinando (98) com o fato de $f_1(W_g) = -6(w_1^+ + w_1^-)$ deduzimos

$$\begin{aligned} (f_1(W))^2 &= 36(w_1^+ + w_1^-)^2 \\ &\leq 72[(w_1^+)^2 + (w_1^-)^2] \\ &\leq 48|W|^2, \end{aligned}$$

e, isto implica que

$$|W|^2 - \frac{(f_1(W))^2}{24\alpha} \geq \frac{\alpha - 2}{\alpha}|W|^2. \quad (101)$$

Assim, comparando (101) com (97) deduzimos que, para $\alpha \geq 2$,

$$|Rm|^2 \geq \frac{6(K_1^\perp)^2}{1 + \alpha} + \frac{\alpha - 2}{\alpha}|W|^2. \quad (102)$$

Escolhendo $\alpha = 2$ em (102) obtemos $|Rm|^2 \geq 2|K_1^\perp|^2$. Em particular, temos

$$[\mathcal{R}^\infty(g)]^2 \geq 2|K_1^\perp|^2. \quad (103)$$

Integrando a inequação (103) sobre M^4 e tomando o ínfimo sobre \mathcal{M}_1 concluímos

$$\begin{aligned} [\text{Mincur}(M)]^2 &= \inf_{g \in \mathcal{M}_1} [\mathcal{R}^\infty(g)]^2 \\ &\geq 2 \inf_{g \in \mathcal{M}_1} \int_M |K_1^\perp|^2 dV_g \\ &\geq 2 \inf_{g \in \mathcal{M}} \int_M |K_1^\perp|^2 dV_g. \end{aligned}$$

Finalmente, basta aplicarmos a Proposição 4.3 para obter

$$[\text{Mincur}(M)]^2 \geq \frac{|\mathcal{Y}_1^\perp(M)|^2}{72}$$

e assim finalizar a prova do último item e consequentemente a prova do teorema. \square

Vale a pena ressaltar que Gromov (1982) obteve a seguinte estimativa

$$\text{MinVol}(M) \geq c(n)|\chi(M)|, \quad (104)$$

onde $c(n)$ é uma constante positiva dependendo apenas da dimensão. Ele também obteve uma estimativa semelhante para números de Pontryagin. O Teorema 4.3 nos diz que, em dimensão 4, podemos obter explicitamente o valor da constante c em (104). Além disso, desde que a assinatura é um múltiplo do número de Pontryagin, concluímos que o mesmo argumento também se aplica ao caso da assinatura.

Como consequência do trabalho de Freedman (1982), obtemos a seguinte caracterização.

Corolário 4.5 *Seja M^4 variedade compacta simplesmente conexa satisfazendo*

$$\text{Vol}_{|\mathbb{K}^\perp|}(M) \leq \frac{36}{25}\pi^2. \quad (105)$$

Então M^4 é homeomorfa a \mathbb{S}^4 ou ao $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

Demonstração: Por definição e da dualidade de Poincaré, a característica de Euler de M^4 é dada por

$$\chi(M) = 2 - 2b_1 + b_2, \quad (106)$$

onde b_i é o i -ésimo número de Betti de M^4 . Como M^4 é simplesmente conexa, concluímos que $b_1 = 0$ e assim obtemos que $\chi(M) \geq 2$. Pelo segundo item do Teorema 4.3 inferimos

$$\text{Vol}_{|\mathbb{K}^\perp|}(M) \geq \frac{12}{25}\pi^2\chi(M). \quad (107)$$

Usando a hipótese (105) em (107) deduzimos que $\chi(M) \leq 3$. Assim, de (106) concluímos que $2 \leq 2 + b_2 \leq 3$, e portanto deduzimos que ou $b_2 = 0$ ou $b_2 = 1$. Agora usando os resultados de classificação de Freedman (1982), veja também (DONALSON, 1983), concluímos que ou M^4 é homeomorfa a esfera \mathbb{S}^4 ou ao espaço projetivo complexo $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, como queríamos demonstrar. \square

Vale ressaltar que o volume mínimo não é necessariamente preservado pelo homeomorfismo. De fato, Bessieres (1998) considerou M uma variedade que admite uma métrica hiperbólica g_0 . Ele mostrou que $\text{MinVol}(M\sharp M) > 2\text{MinVol}(M) = 2\text{Vol}(M, g_0)$, sendo assim, os exemplos são homeomorfos, mas têm volumes mínimos diferentes e ambos positivos. Além disso, Kotschick (2012) considerou as variedades

$$X_k = k(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)\sharp(1+k)(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3)$$

e

$$Y_k = Z_k\sharp(1+k)(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3),$$

para k ímpar e suficientemente grande, onde Z_k é uma variedade simplética homeomorfa (mas não difeomorfa) à $k(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$. Assim, X_k e Y_k são homeomorfas, mas Kotschick mostrou que $\text{MinVol}(X_k) = 0$ enquanto $\text{MinVol}(Y_k) > 0$.

5 CONCLUSÃO

Na busca por métricas ótimas, as métricas críticas são fundamentais. Na primeira parte do trabalho vimos que a hipótese localmente conformemente *flat* considerada por Miao e Tam (2011) pode ser enfraquecida, em dimensão 4, para Bach *flat*. Mais precisamente, uma métrica crítica simplesmente conexa Bach *flat* com bordo isométrico a esfera é isométrica a uma bola geodésica em um espaço simplesmente conexo \mathbb{R}^4 , \mathbb{H}^4 ou \mathbb{S}^4 . Em dimensão 3 esse resultado pode ser melhorado ainda mais. De fato, mostramos que o mesmo resultado vale para a hipótese de o tensor de Bach harmônico. Na segunda parte vimos estimativas para a curvatura mínima e para o volume mínimo. Na estimativa da curvatura mínima, mostramos que as estimativas são ótimas. Como consequência imediata apresentamos uma resposta parcial para a conjectura de Hopf. Além disso, obtemos caracterizações para o caso da igualdade nas estimativas.

REFERÊNCIAS

- ALLENDOERFER, C. B. The Euler Number of a Riemann Manifold. **American Journal of Mathematics**, v. 62, n. 1, p. 243–248, 1940.
- BACH, R. Zur Weylschen Relativitätstheorie und der Weylschen Erweiterung des Krümmungstensorbegriffs. **Mathematische Zeitschrift**, v. 9, p. 110–135, 1921.
- BARROS, A.; DIÓGENES, R.; RIBEIRO JR., E. Bach-flat critical metrics of the volume functional on 4-dimensional manifolds with boundary. **The Journal of Geometric Analysis**, v. online, p. 1–18, 2014.
- BARROS, A.; RIBEIRO JR., E. Critical point equation on four-dimensional compact manifolds. **Mathematische Nachrichten**, v. 287, n. 14-15, p. 1618–1623, 2014.
- BAVARD, C.; PANSU, P. Sur le volume minimal de \mathbb{R}^2 . **Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure**, v. 19, n. 4, p. 479–490, 1986.
- BERGER, M. **A panoramic view of Riemannian geometry**. Springer-Verlag, 2003.
- BESSE, A. **Einstein manifolds**. New York: Springer-Verlag, 2008.
- BESSIERES, L. Un théorème de rigidité différentielle. **Commentarii Mathematici Helvetici**, v. 73, n. 3, p. 443–479, 1998.
- BESSIERES, L. **Minimal volume**, 2000. Disponível em: http://math.univ-lyon1.fr/~remy/smf_sec_18_07.pdf. Acesso em: 14 nov. 2014.
- BESSON, G.; COURTOIS, G.; GALLOT, S. Volume et entropie minimale des espaces localement symétriques. **Inventiones mathematicae**, v. 103, n. 1, p. 417–445, 1991.
- BESSON, G.; COURTOIS, G.; GALLOT, S. Les variétés hyperbliques sont des minima locaux de l'entropie topologique. **Inventiones mathematicae**, v. 117, n. 1, p. 403–445, 1994.
- BESSON, G.; COURTOIS, G.; GALLOT, S. Entropies et Rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative. **Geometric & Functional Analysis**, v. 5, n. 5, p. 731–799, 1995.
- BETTIOL, R. Positive biorthogonal curvature on $S^2 \times S^2$. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 142, n. 12, p. 4341–4353, 2014.
- BETTIOL, R. **Four-dimensional manifolds with positive biorthogonal curvature**. arXiv: 1502.02270v1 [Math. DG], 2015. Disponível em:

<<http://arxiv.org/pdf/1502.02270v1.pdf>>. Acesso em: 05 abr. 2015.

BISHOP, R.; GOLDBERG, S. Some implications of the generalized Gauss-Bonnet theorem. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 112, n. 3, p. 508–535, 1964.

BOLAND, J.; CONNELL, C.; SOUTO, J. Volume Rigidity for Finite Volume Manifolds. **American Journal of Mathematics**, v. 127, n. 3, p. 535–550, 2005.

BRENDLE, S.; MARQUES, F.; NEVES, A. Deformations of the hemisphere that increase scalar curvature. **Inventiones mathematicae**, v. 185, n. 1, p. 175–197, 2011.

CAO, H.-D.; CATINO, G.; CHEN, Q.; MANTEGAZZA, C.; MAZZIERI, L. Bach-flat gradient steady Ricci solitons. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, v. 49, n. 1-2, p. 125–138, 2014.

CAO, H.-D.; CHEN, Q. On Bach-flat gradient shrinking Ricci solitons. **Duke Mathematical Journal**, v. 162, n. 6, p. 1149–1169, 2013.

CHEEGER, J. Some examples of manifolds of nonnegative curvature. **Journal of Differential Geometry**, v. 8, n. 4, p. 623–628, 1973.

CHEEGER, J.; GROMOV, M. Collapsing Riemannian manifolds while keeping their curvature bounded I. **Journal of Differential Geometry**, v. 23, n. 3, p. 309–346, 1986.

CHEN, B.-L.; ZHU, X.-P. A conformally invariant classification theorem in four dimension. **Communications in Analysis and Geometry**, v. 22, n. 5, p. 811–831, 2014.

CHERN, S. S. On Curvature and Characteristic Classes of a Riemann Manifold. **Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg**, v. 20, n. 1-2, p. 117–126, 1955.

CORVINO, J. Scalar Curvature Deformation and a Gluing Construction for the Einstein Constraint Equations. **Communications in Mathematical Physics**, v. 214, n. 1, p. 137–189, 2000.

COSTA, E. On Einstein four-manifolds. **Journal of Geometry and Physics**, v. 51, n. 2, p. 244–255, 2004.

COSTA, E.; DIÓGENES, R.; RIBEIRO JR., E. **Estimates for Minimal Volume and Minimal Curvature on 4-dimensional compact manifolds.** arXiv:1407.8137v3 [math.DG], 2014. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/1407.8137v3.pdf>>. Acesso em: 10 mar. 2015.

COSTA, E.; RIBEIRO JR., E. Four-dimensional compact manifolds with nonnegative biorthogonal curvature. **Michigan Mathematical Journal**, v. 63, n. 4, p. 747–761, 2014.

COSTA, E.; RIBEIRO JR., E.; SANTOS, A. **Modified Yamabe problem on 4-dimensional compact manifolds**, 2015. Artigo aceito para publicação em **Houston J. of Math.**

DONALSON, K. An application of gauge theory to four-dimensional topology. **Journal of Differential Geometry**, v. 18, n. 2, p. 279–315, 1983.

FAN, X.-Q.; SHI, Y.-G.; TAM, L.-F. Large-sphere and small-sphere limits of the Brown-York mass. **Communications in Analysis and Geometry**, v. 17, n. 1, p. 37–72, 2009.

FISCHER, A.; MARSDEN, J. Deformations of the scalar curvature. **Duke Mathematical Journal**, v. 42, n. 3, p. 519–547, 1975.

FREED, D.; GROISSER, D. The basic geometry of the manifold of Riemannian metrics and of its quotient by the diffeomorphism group. **Michigan Mathematical Journal**, v. 36, n. 3, p. 323–344, 1989.

FREEDMAN, M. The topology of four-dimensional manifolds. **Journal of Differential Geometry**, v. 17, n. 3, p. 357–453, 1982.

GIL-MEDRANO, O.; MICHOR, P. The Riemannian manifold of all Riemannian metrics. **Quarterly Journal of Mathematics Oxford**, v. 42, n. 2, p. 183–202, 1991.

GRAY, A. Invariants of curvature operators of four-dimensional Riemannian manifolds. **Proc. of the 13th Biennial Seminar Canadian Math. Congress**, v. 2, p. 42–65, 1972.

GROMOV, M. Volume and bounded cohomology. **Publications Mathématiques de l'I.H.É.S.**, v. 56, p. 5–99, 1982.

GURSKY, M.; LEBRUN, C. Yamabe problem and $spin^c$ structures. **Geometric & Functional Analysis**, v. 8, n. 6, p. 965–977, 1998.

HITCHIN, J. Compact four-dimensional Einstein manifolds. **Journal of Differential Geometry**, v. 9, n. 3, p. 435–441, 1974.

ITOH, M. The modified Yamabe invariant problem and the geometry of modified scalar curvatures. **The Journal of Geometric Analysis**, v. 15, n. 1, p. 63–81, 2005.

KOBAYASHI, O. A differential equation arising from scalar curvature function.

Journal of the Mathematical Society of Japan, v. 34, n. 4, p. 665–675, 1982.

KOBAYASHI, O. On a conformally functional of the space of Riemannian metrics. **Journal of the Mathematical Society of Japan**, v. 37, n. 3, p. 373–389, 1985.

KOBAYASHI, O. Scalar curvature of a metric with unit volume. **Mathematische Annalen**, v. 279, n. 2, p. 253–265, 1987.

KOBAYASHI, O.; OBATA, M. Conformally-flatness and static space-time. *In*: HANO, J. and MORIMOTO, A. and MURAKAMI, S. and OKAMOTO, K. and OZEKI, H. (Org.). **Manifolds and Lie Groups**. Boston, MA: Birkhäuser, 1981. p. 197-206.

KOTSHICK, D. Entropies, volumes, and Einstein metrics. *In*: BÄR, C. and LOHKAMP, J. and SCHAWARZ, M. (Org.). **Global Differential Geometry**. Berlin Heidelberg: Springer, 2012. p. 39-54.

KULKARNI, R. Curvature structures and conformal transformations. **Journal of Differential Geometry**, v. 4, n. 4, p. 425–451, 1970.

LAFONT, J.-F.; SCHMIDT, B. Simplicial volume of closed locally symmetric spaces of non-compact type. **Acta Mathematica**, v. 197, n. 1, p. 129–143, 2006.

LEBRUN, C. Einstein metrics and the Yamabe problem. **AMS IP studies in advanced Mathematics**, v. 13, p. 353–376, 1999a.

LEBRUN, C. Kodaira Dimension and the Yamabe Problem. **Communications in Analysis and Geometry**, v. 7, n. 1, p. 133–156, 1999b.

LISTING, M. **Scalar curvature and vector bundles**. arXiv: 1202.4325v1 [Math. DG], 2014. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/1202.4325v1.pdf>>. Acesso em: 27 ago. 2014.

MANNING, A. Topological entropy for geodesic flows. **Annals of Mathematics**, v. 110, n. 3, p. 567–573, 1979.

MEI, J.; WANG, H.; Xu, H. An elementary proof of $\text{MinVol}(\mathbb{R}^n) = 0$, for $n \geq 3$. **Anais da Academia Brasileira de Ciências**, v. 80, n. 4, p. 597–616, 2008.

MIAO, P.; TAM, L.-F. On the volume functional of compact manifolds with boundary with constant scalar curvature. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, v. 36, n. 2, p. 141–171, 2009.

MIAO, P.; TAM, L.-F. Einstein and conformally flat critical metrics of the volume functional. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 363, n. 6, p. 2907–2937, 2011.

MIN-OO, M. Scalar curvature rigidity of certain symmetric spaces. *In*: LALONE, F. (Org.). **Geometry, Topology, and Dynamics**. Providence, RI: American Mathematical Society, 1998. p. 127-137.

MORREY, C. B. **Multiple Integrals in the Calculus of Variations**. Berlin: Springer-Verlag, 1996.

NORONHA, M. Some results on nonnegatively curved four manifolds. **Matemática Contemporânea**, v. 9, n. 1, p. 153–175, 1995.

NORONHA, M. Positively curved 4-manifolds and the nonnegativity of isotropic curvatures. **Michigan Mathematical Journal**, v. 44, n. 2, p. 221–229, 1997.

PATERNAIN, G.; PETEAN, J. Minimal entropy and collapsing with curvature bounded from below. **Inventiones mathematicae**, v. 151, n. 2, p. 415–450, 2003.

PETERSEN, P. **Riemannian Geometry**. 2nd edition. GTM 171. New York: Springer-Verlag, 2006.

RODRIGUES, D. **Desigualdades de Hitchin-Thorpe e Miyaoka-Yau**. 2014. 56 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014.

SCORPAN, I. **The wild world of 4-manifolds**. Providence: American Mathematical Society, 2005.

SEAMAN, W. Orthogonally pinched curvature tensors and applications. **Mathematica Scandinavica**, v. 69, p. 5–14, 1991.

SEAMAN, W. On manifolds with nonnegative curvature on totally isotropic 2-planes. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 338, n. 2, p. 843–855, 1993.

SINGER, I.; THORPE, J. The curvature of 4-dimensional Einstein spaces. *In*: SPENCER, C. and IYANAGA, S. (Org.). **Papers in Honor of K. Kodaira**. Princeton: Princeton University Press, 1969. P. 355-365.

WANG, H.; XU, H. Minimal volume of the connected sum of Euclidean spaces. **Differential Geometry - Dynamical Systems**, v. 11, p. 185–194, 2009.

YUN, G. Scalar curvature, Sigma constant and their relation with minimal volume. **Journal of the Korean Mathematical Society**, v. 33, n. 4, p. 1101–1114, 1996.

ZILLER, W. Examples of Riemannian manifolds with non-negative sectional curvature. *In*: CHEEGER, J. and GROVE, K. (Org.). **Surveys in Differential Geometry**.

Metric and comparison geometry. Boston:International Press, 2007. p. 63-102.

ZILLER, W. **Riemannian manifolds with positive sectional curvature.**To appear Lecture Notes in Mathematics, Vol. 2110., 2014. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/1202.4325v1.pdf>>. Acesso em: 15 nov. 2014.