Hudson Pacheco Pinheiro

Oscilador de Dirac: cenário para um estudo de um sistema de dois níveis

Fortaleza

16 de Janeiro de 2009

Hudson Pacheco Pinheiro

Oscilador de Dirac: cenário para um estudo de um sistema de dois níveis

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física

Orientador:
Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Fortaleza

16 de Janeiro de 2009

Hudson Pacheco Pinheiro

Oscilador de Dirac: cenário para um estudo de um sistema de dois níveis

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física

Aprovada em 16 de Janeiro de 2009

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida
(Orientador)
Universidade Federal do Ceará - UFC

Prof. Dr. Ricardo Renan Landim Carvalho
Universidade Federal do Ceará - UFC

Prof. Dr. Mário Henrique Gomes Pacheco
Universidade Federal da Bahia - UFBA

A Alana,
cujas virtudes são
tão inumeráveis
quanto os grãos de
areia de um deserto.

Agradecimentos

Muito, mas muito obrigado...

A Deus, por não tirar a mão.

A Alana, minha flor... por tudo. Sem você em minha vida, esse trabalho seria apenas um devaneio de uma mente sem propósito.

A meu pai, Valfredo, meus irmãos, Ronald, Robson e Graziela, minha mãe, Jucinéa, e meus parentes, por serem meus exemplos, por alimentarem meus sonhos e por me apoiarem incondicionalmente.

Ao professor Carlos Alberto, pela orientação sadia, pela amizade e pelos inestimáveis ensinamentos.

Ao professor Renan, pela atenção especial dedicada ao grupo e pelo apoio oferecido a realização deste trabalho.

Ao professor Mário Henrique, pelo companheirismo nos tempos do LASSCO e por avaliar meu trabalho.

Aos professores Cleuton, Diehl, Euclimar, Jayro, Jeanlex, Josué, Murilo, Nilson, Raimundo e Ramos, por contribuirem com minha formação.

Aos companheiros do LASSCO, Alex, Arthur, Diego, Gonzaga, Ivan, Kleiton, Luciana, Makarius, Roberto, Victor, Wagner e Wilami, obrigado pelo companheirismo e pela convivência harmoniosa e saudável.

Aos meus amigos, Abraão, Alexandre, Andrey, Antony, Apiano, Eduardo, Erneson, George, Janduy, José Junior, Lavôr, Luciana Magalhães, Marcelo, Pablo, Paschoal, Roner, Sara, Saulo, Sérgio, Tayroni, Tereza, Viviane, etc. Obrigado pelas mais sinceras demonstrações de amizade.

Aos funcionários e servidores do Departamento de Física da UFC, pelos serviços prestados a todos.

Ao curso de Pós-Graduação em Física da UFC, na pessoa do professor Paulo de Tarso Cavalcante Freire, pela oportunidade oferecida.

A CAPES, pelo suporte financeiro.

E, finalmente, a William Shatner, Leonard Nimoy e Paul Zaloon, por darem vida a personagens que despertaram, não só em mim, o gosto pela ciência.

Sou-lhes mais grato do que podem imaginar!

We shall not cease from exploration
And the end of all our exploring
Will be to arrive where we started
And know the place for the first time.

T. S. Eliot

Resumo

Nesta dissertação, estudamos como se comporta o modelo do oscilador de Dirac, inserido em um sistema de dois níveis, ao interagir com o campo eletromagnético externo, desconsiderando a quantização do campo (teoria semiclássica). Para tal, obtemos as funções de inversão de população de energia e de spin em três situações gerais: sem termos que violam a simetria de Lorentz; com a introdução de um termo CPT-ímpar que quebra a simetria vetorial de Lorentz, $v_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$; com a introdução de um termo CPT-ímpar que quebra a simetria de Lorentz por meio de um acoplamento axial, $b_\mu \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \psi$. Em seguida, analisamos o caso especial da ressonância entre o sistema e o campo incidente. Nesse caso, toda a influência do oscilador de Dirac foi perdida e as funções de inversão de população de energia e de spin reduziram-se aos resultados encontrados na literatura científica.

Abstract

In this dissertation, we studied how the Dirac oscillator model behaves when interacting with external electromagnetic field inside of a two-level system and without considering the field quantization (semiclassical theory). In order to do it, we obtained the population inversion function of energy and spin in three situations: without Lorentz-breaking symetry terms; with the introduction of CPT-odd terms which broke the Lorentz vetorial symmetry, $v_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$; with the introduction of CPT-odd terms which broke the Lorentz symmetry by the axial coupling, $b_\mu \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \psi$. Then, we analised the special case of ressonance between the system and the field of incidence. In this case, all influence from the Dirac oscillator was lost and the population inversion function of the energy and spin became the same as the one found in scientific literature.

Sumário

INTRODUÇÃO

Nas últimas duas décadas, a Física foi agraciada com o surgimento de duas ferramentas teóricas: o Modelo Padrão Estendido, que, através da violação das simetrias de Lorentz, procura incluir a força gravitacional ao Modelo Padrão, e o oscilador de Dirac.

O conceito do oscilador de Dirac foi introduzido por Moshinsky e Szczepaniak[1]. Esse conceito foi edificado a partir da inserção, na equação de Dirac, de um acoplamento não-mínimo: $\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p} - im\omega\beta\boldsymbol{r}$, onde ω é a frequência do oscilador, m é a massa da partícula e $\boldsymbol{r}$ é o vetor posição. O oscilador de Dirac surgiu da procura por um potencial que possibilitasse a criação de um modelo, no qual, o momento e as coordenadas espaciais fossem lineares e que reproduzisse o hamiltoniano do oscilador harmônico, no limite não-relativístico. O oscilador de Dirac é exatamente solúvel e, nos últimos anos, tem sido bastante estudado[2–7].

O Modelo Padrão Estendido surge da necessidade de descrever a Física de uma forma mais completa. Uma vez que o Modelo Padrão das partículas elementares não é capaz de descrever todas as forças conhecidas, ou seja, ele descreve a força eletromagnética, a força fraca, responsável pela radioatividade, e a força forte, responsável pela estabilidade do próton, entretanto não é capaz de descrever a quarta força, a gravitacional.

Para satisfazer tal necessidade, Kostelecký e Samuel[8], influenciados pelos trabalhos de Teoria de Cordas[9] e de Gravitação Quântica com Loops[10, 11], propõem a incorporação da quebra espontânea de simetria de Lorentz através da inclusão, na densidade Lagrangiana do Modelo Padrão, de termos com campos fundamentais fixos. Esses termos são responsáveis pela quebra de simetria no referencial das partículas. O referencial do observador permanece intacto[12].

O sistema de dois níveis é extremamente usado na Física como um modelo para estudar o comportamento dos sistemas. Nele, supõe-se que o espectro de energia do sistema seja definido por dois níveis de energia. Claro que essa suposição só é válida para sistemas de baixas energias, uma vez que em sistemas de altas energias não podem ser descritos em apenas dois níveis de energia. Tal modelo é pertencente à Mecânica Quântica e não é compatível com a visão clássica.

Da união desses três arcabouços teóricos da Física, surgem as bases de nosso inédito trabalho que consiste em estudar o comportamento da interação entre o campo eletromagnético externo e o oscilador de Dirac, sem considerar a quantização do campo (teoria semiclássica), em um sistema de dois níveis. Estudamos, também, tal comportamento submetido a termos que violam a simetria de Lorentz através de acoplamentos vetorial, $v_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, e axial, $b_\mu\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi$.

Este trabalho é organizado da seguinte forma:

No capítulo 1, fizemos uma breve introdução sobre a equação de Dirac e o conceito do oscilador de Dirac, onde discutimos suas principais propriedades. Como referência da equação de Dirac, podemos citar os livros de Schweber[13], Gross[14] e Thaller[15].

O capítulo 2 é dedicado à violação da simetria de Lorentz em um regime não-relativístico. Tomamos como ponto de partida a Lagrangiana de Dirac acrescida dos termos CPT-ímpares e terminamos obtendo o Hamiltoniano da violação de Lorentz.

No capítulo 3, iniciamos o nosso trabalho propriamente dito. Fizemos um sistema descrito pelo Hamiltoniano não-relativístico do oscilador de Dirac interagir com um campo eletromagnético externo. Em seguida, descrevemos essa interação, de forma semi-clássica, ou seja, sem tratar o campo como quantizado, em um sistema de dois níveis. Como resultado, encontramos as funções de inversão de população, que descrevem o comportamento da inversão do sistema entre os estados que o compõem.

No capítulo 4, estudamos as implicações decorrentes da introdução de termos que violam a simetria vetorial de Lorentz em um sistema, no cenário do oscilador de Dirac, interagindo com um campo eletromagnético. A partir dos termos $\frac{e\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}}{m}$ e $\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}}{m}$, obtemos as funções de inversão de população de spin e de energia, para cada caso.

No capítulo 5, inserimos no Hamiltoniano de interação oscilador de Dirac-campo eletromagnético externo um termo, $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{b}$, que viola a simetria axial de Lorentz. Devido às dificuldades para resolver as equações diferenciais acopladas, tivemos que fazer algumas considerações. Deste modo, obtemos as funções de inversão de população de spin e de energia para três casos especiais: no primeiro, supondo a ausência do background; no segundo, supondo que o background possui apenas uma componente na direção z; no terceiro, considerando o campo elétrico nulo.

No apêndice, descrevemos a técnica que utilizamos para resolver equações diferenciais acopladas que surgiram ao longo deste trabalho. Essa técnica é conhecida como equação característica.

1 O OSCILADOR DE DIRAC

Este capítulo consiste na apresentação do modelo do oscilador de Dirac. Tal modelo surgiu no final dos anos oitenta, inserido na literatura científica por Moshinsky e Szczepaniak[1], e vem sendo bastante utilizado desde então, em problemas envolvendo confinamento de quarks na Cromodinâmica Quântica[2–4], propriedades termodinâmicas[5], propriedades da transformação de Foldy-Wouthuysen[6], Ótica Quântica[7], dentre outros.

1.1 A equação de Dirac

Em 1928, o físico britânico Paul Dirac propôs uma equação relativística, de primeira ordem, capaz de contornar as dificuldades com a densidade de probabilidade negativa da equação de Klein-Gordon[16]. Esta equação, que foi chamada de equação de Dirac, tem uma importância especial por descrever, perfeitamente, as partículas que obedecem à estatística de Fermi, ou seja, aquelas que possuem spin $\frac{1}{2}$, como o elétron e o próton. Além disso, a equação de Dirac introduz o conceito de antipartícula, comprovado, experimentalmente, em 1932, com a descoberta do pósitron, a antipartícula do elétron, pelo físico americano Carl Anderson[17].

A equação que descreve o movimento de partículas livres de spin $\frac{1}{2}$ é

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{x},t) = H_{free}\psi(\boldsymbol{x},t) = \left(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta mc^2\right)\psi(\boldsymbol{x},t) \,, \tag{1.1}$$

onde H_{free} é o Hamiltoniano de Dirac para a partícula livre, o operador momento é representado por $\boldsymbol{p} = -i\hbar\bigtriangledown$ e as matrizes hermitianas 4×4 $\boldsymbol{\alpha}$ e β foram definidas na representação de Dirac por

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \,, \tag{1.2}$$

onde $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ são as matrizes de Pauli 2×2. H_{free} atua na função de onda

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = \left\{ \begin{array}{c} \psi_1(\boldsymbol{r},t) \\ \vdots \\ \psi_4(\boldsymbol{r},t) \end{array} \right\} \in \mathbb{C}^4 \ . \tag{1.3}$$

Se $m = 0$, isto é, caso estivéssemos lidando com neutrinos, então o termo de massa de (1.1) desapareceria. Assim, teríamos a equação de Weil

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p} \psi(t) \ . \tag{1.4}$$

A forma covariante da equação de Dirac pode ser obtida através das matrizes γ,

$$(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc)\, \psi = 0 \ , \tag{1.5}$$

onde $\gamma^0 = \beta$ e $\gamma^i = \beta \alpha^i$.

Pode-se criar uma interação entre a partícula livre de Dirac e o campo eletromagnético pela introdução, na equação (1.1) ou (1.5), do acoplamento mínimo: $\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}$, $H \rightarrow H - e\phi$, que na forma covariante é definida por $p^\mu \rightarrow p^\mu - \frac{e}{c}A^\mu$, onde $\boldsymbol{A}$ é o potencial vetor eletromagnético, ϕ é o potencial escalar eletromagnético e $A^\mu = (\phi, \boldsymbol{A})$. Tomando como base essa determinação, podemos tratar várias questões interessantes da Mecânica Quântica Relativística. No terceiro capítulo, aprofundaremos nosso estudo em uma dessas questões.

1.2 O oscilador de Dirac

O modelo do oscilador harmônico não-relativístico é uma das ferramentas mais poderosas da Física. O seu Hamiltoniano é uma função quadrática no momento, $\boldsymbol{p}$, e na coordenada espacial, $\boldsymbol{r}$. Com isso, o oscilador harmônico possui diversas simetrias fundamentais que garantem a conservação do momento angular, da paridade e da energia.

Partindo do fato de que a equação de Dirac é linear no momento, Moshinsky e Szczepaniak[1] procuraram um potencial que possibilitasse a criação de um modelo análogo ao oscilador harmônico na Mecânica Quântica Relativística. Um potencial, no qual, o momento e as coordenadas espaciais fossem lineares e que reproduzisse o Hamiltoniano do oscilador harmônico, no limite não-relativístico. Dessa procura surgiu o oscilador de Dirac.

Dado o Hamiltoniano de Dirac para uma partícula livre,

$$H_{free} = c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta mc^2 \ , \tag{1.6}$$

podemos introduzir um acoplamento não-mínimo:

$$\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{p} - im\omega\beta\boldsymbol{r} \ , \tag{1.7}$$

onde ω é a frequência do oscilador e m é a massa da partícula. Dessa forma, obtemos

$$H_{od} = c\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{p} - im\omega\beta\boldsymbol{r}) + \beta mc^2 \ , \tag{1.8}$$

que é o Hamiltoniano do oscilador de Dirac. Embora o acoplamento não-mínimo, equação (1.7), não seja hermitiano, o Hamiltoniano do oscilador de Dirac é, pois a matriz $\boldsymbol{\alpha}$ permite tal fato. A matriz β garante a covariância de Lorentz do acoplamento não-mínimo, (1.7)[18].

Nosso objetivo é obter o Hamiltoniano não-relativístico do oscilador de Dirac. Como primeiro passo, devemos substituir a equação (1.8) na equação de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi = E\psi \ . \tag{1.9}$$

Contudo, nossa função de onda é definida como

$$\psi(t,\boldsymbol{r}) = e^{-iEt/\hbar}\psi(\boldsymbol{r}) \ , \tag{1.10}$$

onde $\psi(\boldsymbol{r})$ é um quadrispinor, e podemos defini-lo como

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \begin{Bmatrix} \varphi \\ \chi \end{Bmatrix} ; , \tag{1.11}$$

onde φ e χ são spinores de duas componentes. Então, finalmente substituindo, obtemos

$$c\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p} + im\omega\beta\boldsymbol{r})\chi = \left(E - mc^2\right)\varphi \ ; \tag{1.12}$$

$$c\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p} - im\omega\beta\boldsymbol{r})\varphi = \left(E + mc^2\right)\chi \ . \tag{1.13}$$

onde α e β foram são definidos na equação (1.2).

Mas, manipulando a equação (1.13), obtemos que

$$\chi = \frac{c\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p} - im\omega\beta\boldsymbol{r})\varphi}{E + mc^2} \ . \tag{1.14}$$

Substituindo a equação (1.14) na equação (1.12), obtemos

$$c^2\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}+im\omega\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}-im\omega\boldsymbol{r})\,\varphi=\left(E^2-m^2c^4\right)\varphi\,. \tag{1.15}$$

Usando a relação

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A})\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\,, \tag{1.16}$$

podemos dizer que

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}+im\omega\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}-im\omega\boldsymbol{r})=p^2-3m\omega\hbar+m^2\omega^2r^2-2m\omega\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{L}\,. \tag{1.17}$$

Logo,

$$c^2\left(p^2-3m\omega\hbar+m^2\omega^2r^2-2m\omega\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{L}\right)\varphi=\left(E^2-m^2c^4\right)\varphi\,. \tag{1.18}$$

O limite não-relativístico é alcançado considerando que é na energia de repouso, mc^2, que está concentrada a maior parte da energia da partícula, de modo que podemos utilizar a aproximação: $E\approx\mathcal{E}+mc^2$. Assim, $E^2-m^2c^4\approx 2\mathcal{E}mc^2$, se $\mathcal{E}\ll mc^2$. Portanto,

$$\mathcal{E}\varphi=\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2r^2}{2}-\frac{3}{2}\omega\hbar-\omega\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{L}\right)\varphi=H_{nrod}\varphi\,. \tag{1.19}$$

Usando $\boldsymbol{S}=\hbar\boldsymbol{\sigma}/2$, obtemos o Hamiltoniano não-relativístico do oscilador de Dirac,

$$H_{nrod}=\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2r^2}{2}-\frac{3}{2}\omega\hbar-\omega\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{L}\,. \tag{1.20}$$

Os dois primeiros termos do Hamiltoniano não-relativístico do oscilador de Dirac representam o oscilador harmônico 3-D, sendo o comportamento desses termos o responsável pela de denominação “oscilador de Dirac”. O terceiro termo é uma constante de deslocamento dos níveis de energia. O quarto termo representa o acoplamento spin-órbita.

1.3 As autossoluções do oscilador de Dirac

Nessa seção, calcularemos as autossoluções do oscilador de Dirac.

A partir da simetria esférica do problema,

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S}\,, \tag{1.21}$$

onde $\boldsymbol{J}$ é o momento angular total, $\boldsymbol{L}$ é o momento angular orbital e $\boldsymbol{S}$ é o spin total, pode-se mostrar que o momento angular total $\boldsymbol{J}$ comuta com o Hamiltoniano H. Dessa forma, o momento angular é conservado. Os autoestados desses operadores podem ser escritos como

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} \varphi^{k}_{jm_j} \\ \chi^{-k}_{jm_j} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} g(r)\mathcal{Y}^{k}_{jm_j}(\theta,\phi) \\ if(r)\mathcal{Y}^{-k}_{jm_j}(\theta,\phi) \end{pmatrix} \tag{1.22}$$

onde $\mathcal{Y}^{k}_{jm_j}$ são espinores esféricos. Na literatura científica[19], é possível encontrá-los na forma $\mathcal{Y}^{k}_{jm_j} = |j,m\rangle$. Tais espinores obedecem a várias relações[19, 20], incluindo

$$\boldsymbol{J}^2\mathcal{Y}^{k}_{jm_j} = j(j+1)\hbar^2\mathcal{Y}^{k}_{jm_j}\ , \quad j = \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \cdots \tag{1.23}$$

$$J_z\mathcal{Y}^{k}_{jm_j} = m_j\hbar\mathcal{Y}^{k}_{jm_j}\ , \quad |m_j| \leq j \tag{1.24}$$

$$\hat{k}\mathcal{Y}^{\pm k}_{jm_j} = \mp k\hbar\mathcal{Y}^{\pm k}_{jm_j}\ , \quad |k| = j + \tfrac{1}{2} \tag{1.25}$$

onde definimos o operador $\hat{K}$ como: $\hat{K} = \text{diagonal}(\hat{k}, -\hat{k})$, com $\hat{k} = (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{L} + \hbar)$. De forma que $\hat{K}$ comuta com H e $\boldsymbol{J}$.

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\mathcal{Y}^{k}_{jm_j} = -\mathcal{Y}^{-k}_{jm_j}\ , \tag{1.26}$$

onde $\hat{\boldsymbol{r}}$ é o vetor radial unitário.

Podemos substituir $\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{p} \pm im\omega\boldsymbol{r}$ na identidade,

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} = i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\left(-\hbar\partial_r + \frac{\hat{k}-\hbar}{r}\right)\ , \tag{1.27}$$

de forma que obtenhamos

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{p} \pm im\omega\boldsymbol{r}) = i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\left(-\hbar\partial_r + \frac{\hat{k}-\hbar}{r} \pm m\omega\boldsymbol{r}\right)\ . \tag{1.28}$$

Substituindo a equação (1.28) na equação de Dirac, em forma de sistema de equações acopladas (1.12) e (1.13), obtemos

$$\left(-\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} + \frac{m\omega r}{\hbar}\right)f(r) = \left(\frac{E - mc^2}{\hbar c}\right)g(r)\ , \tag{1.29}$$

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} + \frac{m\omega r}{\hbar}\right)g(r) = \left(\frac{E + mc^2}{\hbar c}\right)f(r)\ . \tag{1.30}$$

Da equação (1.30), temos que

$$f(r) = \left(\frac{\hbar c}{E + mc^2}\right)\left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} + \frac{m\omega r}{\hbar}\right)g(r)\ . \tag{1.31}$$

Então, substituindo-a na equação (1.29), desacoplaremos o sistema de forma que

$$\frac{d^2g(r)}{dr^2}-\left(\frac{k(k+1)}{r^2}+\frac{m^2\omega^2r^2}{\hbar^2}\right)g(r)-\left((2k-1)\frac{m\omega}{\hbar}-\frac{(E^2-m^2c^4)}{\hbar^2c^2}\right)g(r)=0\,. \quad (1.32)$$

De modo semelhante, obtemos

$$\frac{d^2f(r)}{dr^2}-\left(\frac{k(k-1)}{r^2}+\frac{m^2\omega^2r^2}{\hbar^2}\right)f(r)-\left((2k+1)\frac{m\omega}{\hbar}-\frac{(E^2-m^2c^4)}{\hbar^2c^2}\right)f(r)=0\,. \quad (1.33)$$

Essas equações podem ser resolvidas através da técnica das equações hipergeométricas confluentes. Caso o leitor queira conhecer os detalhes da técnica, sugerimos uma consulta ao livro de Abramowitz e Stegun[21]. Assim, obtemos

$$g(r)=A_{nl}e^{-m\omega r^2/2\hbar}\left(\frac{m\omega r^2}{\hbar}\right)^{(l+1)/2}M\left(-n,l+\frac{3}{2},\frac{m\omega r^2}{\hbar}\right)\,, \quad (1.34)$$

$$f(r)=B_{n'l'}e^{-m\omega r^2/2\hbar}\left(\frac{m\omega r^2}{\hbar}\right)^{l'+1}M\left(-n',l'+\frac{3}{2},\frac{m\omega r^2}{\hbar}\right)\,, \quad (1.35)$$

onde A e B são constantes de normalização.

Inserindo as equações (1.34) e (1.35) nas equações (1.29) e (1.30) e utilizando a condição de normalização, obtemos que as constantes A e B são definidas como

$$A_{nl}=\frac{m\omega}{\hbar}\epsilon^n\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{mc^2}{E}\right)\right]^{1/2}\left[\frac{2^{l-n+2}(2n+2l+1)!!}{\sqrt{\pi}n!\left[(2l+1)!!\right]^2}\right]^{1/2}\,, \quad (1.36)$$

$$B_{n'l'}=\frac{m\omega}{\hbar}\epsilon^{n'}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{mc^2}{E}\right)\right]^{1/2}\left[\frac{2^{l'-n+2}(2n'+2l'+1)!!}{\sqrt{\pi}n'!\left[(2l'+1)!!\right]^2}\right]^{1/2}\,, \quad (1.37)$$

onde $\epsilon=l-l'$ e $n'=n-\frac{1}{2}+\frac{l-l'}{2}$, com $n,n'\geq 0$.

Definindo o número quântico principal como $N=2n+l$, com $N=0,1,2,\ldots$, temos

$$E^2=\begin{cases} m^2c^4+(2N-2j+1)\,\hbar\omega mc^2 & \text{para } j=l+\frac{1}{2} \\ m^2c^4+(2N+2j+3)\,\hbar\omega mc^2 & \text{para } j=l-\frac{1}{2}\end{cases}\,. \quad (1.38)$$

No limite não-relativístico, ou seja, considerando $E\to\mathcal{E}+mc^2$, obtemos

$$\mathcal{E}=\begin{cases}\left(N-j+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega=2n\hbar\omega & \text{para } j=l+\frac{1}{2} \\ \left(N+j+\frac{3}{2}\right)\hbar\omega=(2n+2l+1) & \text{para } j=l-\frac{1}{2}\end{cases}\,. \quad (1.39)$$

Essas autossoluções serão muito importantes para o desenvolvimento dos capítulos posteriores.

2 VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ

A Física foi reinventada com o surgimento de dois dos seus maiores pilares: a Teoria da Relatividade Especial, criada a partir da idéia da relatividade do movimento, da invariância de Lorentz e da geometrização do espaço-tempo, e a Teoria da Mecânica Quântica, criada a partir da idéia da dualidade onda-partícula, da superposição e da probabilidade. Da união desses pilares, surgiu, no final da década de 1920, a Teoria Quântica de Campos. Tal teoria foi criada para descrever campos de forma quantizada.

Nesse cenário, o Modelo Padrão das interações foi desenvolvido. Baseado nas simetrias de gauge do grupo $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$, o modelo é capaz de descrever três das quatro forças conhecidas, ou seja, a força eletromagnética, a força fraca, responsável pela radioatividade, e a força forte, responsável pela estabilidade do próton. Entretanto, não é capaz de descrever a quarta força, a gravitacional.

Com o intuito de incluir a força da gravidade no Modelo Padrão, surgiu a idéia da quebra espontânea da simetria de Lorentz. Em altas energias, é possível que tenhamos uma teoria unificada que descreva a natureza de forma simétrica. Teoricamente, o Modelo Padrão com gravidade seria capaz de descrever uma Física com energias da ordem de 10^{19} GeV.

Dentre as propostas de violação da simetria de Lorentz, a quebra causada por um campo de fundo ganhou destaque, uma vez que, em um processo de transição de fase, é normal que surja, quando o sistema físico atinge o estado de mínima energia, um campo escalar de fundo não-nulo resultante. Este processo de transição de fase, no cenário do modelo padrão, explica a aquisição de massa por parte das partículas fundamentais[22]. Tal quebra reside, também, na Teoria de Cordas.

Em 1989, surgiu a idéia do Modelo Padrão Estendido[8], baseada na ocorrência da quebra espontânea de simetria na Teoria das Cordas[9]. Nessa extensão, a quebra se dá através do acoplamento de termos de campos de fundo fixos na densidade Lagrangiana do Modelo Padrão. Esses campos de fundo fixos quebram a simetria de Lorentz apenas no referencial das partículas. O referencial do observador permanece intacto[12].

No Modelo Padrão Estendido, a Lagrangiana que descreve os férmions pode ser dividida em duas partes, resultando em termos CPT-pares,

$$\mathcal{L}_{eletron}^{CPT-par} = -\frac{1}{2}H_{\mu\nu}\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi + \frac{i}{2}c_{\mu\nu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\overleftrightarrow{D}^{\nu}\psi + \frac{i}{2}d_{\mu\nu}\bar{\psi}\gamma_5\gamma^{\mu}\overleftrightarrow{\partial}_{\nu}\psi \; , \tag{2.1}$$

e termos CPT-ímpares[23],

$$\mathcal{L}_{eletron}^{CPT-impar} = -v_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi - b_{\mu}\bar{\psi}\gamma_5\gamma^{\mu}\psi \; , \tag{2.2}$$

onde os coeficientes violadores de Lorentz, $c_{\mu\nu}$ e $d_{\mu\nu}$, não possuem dimensão, mas possuem componentes simétricas e antissimétricas. Os coeficientes v_{μ} e b_{μ} possuem também, componentes simétricas e antissimétricas, entretanto, possuem dimensão canônica de massa. O coeficiente $H_{\mu\nu}$, por sua vez, é antissimétrico e possui dimensão canônica de massa.

Nesse trabalho, focaremos nossa atenção nos termos CPT-ímpares, cujos coeficientes violadores de Lorentz, v_{μ} e b_{μ}, estam acoplados de modo vetorial, $v_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$, e axial, $b_{\mu}\bar{\psi}\gamma_5\gamma^{\mu}\psi$, respectivamente.

2.1 Violação da simetria de Lorentz por acoplamento vetorial

Dada a Lagrangiana de Dirac,

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \frac{1}{2}i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\overleftrightarrow{\partial_{\mu}}\psi - m\bar{\psi}\psi \; , \tag{2.3}$$

podemos obter a Lagrangiana de Dirac com quebra de simetria vetorial de Lorentz, inserindo-lhe um termo CPT-ímpar do tipo vetorial, $v_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$. Dessa forma,

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}_{Dirac} - v_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi \; . \tag{2.4}$$

Aplicando a equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} - \partial_{\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}'} = 0 \; , \tag{2.5}$$

na equação (2.4), obtemos a equação de Dirac modificada:

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-v_{\mu}\gamma^{\mu}-m)\,\psi=0\,. \tag{2.6}$$

Tal equação pode ser reescrita no espaço dos momenta:

$$(\gamma^{\mu}p_{\mu}-v_{\mu}\gamma^{\mu}-m)\,\psi=0\,, \tag{2.7}$$

onde $p^{\mu}=(E,\boldsymbol{p})$.

Como o foco desse trabalho é o modelo do oscilador de Dirac interagindo com um campo eletromagnético externo, podemos introduzir o acoplamento não-mínimo (1.7) e, por meio da derivada covariante, $D_{\mu}=\partial_{\mu}+ieA_{\mu}$, também o campo externo, A_{μ}. Dessa forma, a equação de Dirac para o sistema é

$$\Big(i\gamma^{0}\partial_{t}-\boldsymbol{\gamma}\cdot\Big(\boldsymbol{p}-im\omega\gamma^{0}\boldsymbol{r}\Big)-e\gamma^{0}A_{0}+e\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{A}-v_{0}\gamma^{0}+\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{v}-m\Big)\,\psi=0\,. \tag{2.8}$$

onde as matrizes de Dirac γ^{μ} em sua forma matricial são

$$\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ -\boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix}\quad,\quad\gamma^{0}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\quad. \tag{2.9}$$

O quadrispinor ψ pode ser escrito em termos de dois spinores, φ e χ. Assim, surgem duas equações acopladas

$$(E-m-v_{0}-eA_{0})\,\varphi=\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}+im\omega\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}-e\boldsymbol{A})\,\chi\,, \tag{2.10}$$

$$(E+m-v_{0}-eA_{0})\,\chi=\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}-im\omega\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}-e\boldsymbol{A})\,\varphi\,. \tag{2.11}$$

O limite não-relativístico é obtido quando a aproximação, $E+m-v_{0}-eA_{0}\approx 2m$, é considerada. Para tal, devemos assumir que a massa da partícula é muito maior que o termo de quebra, $m\gg v_{0}$, e que o termo do campo eletromagnético externo, $m\gg eA_{0}$. Com isso, podemos escrever,

$$\chi=\frac{1}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}-im\omega\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}-e\boldsymbol{A})\,\varphi\,. \tag{2.12}$$

E as equações podem ser desacopladas, substituindo χ na equação (2.10). Assim,

$$(E-m-v_{0}-eA_{0})\,\varphi=\frac{1}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}+im\omega\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}-e\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}-im\omega\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}-e\boldsymbol{A})\,\varphi\,. \tag{2.13}$$

Podemos alcançar o Hamiltoniano não-relativístico do sistema através da identidade:

$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{M})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{N}) = \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{N} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{N})$ e, considerando, $E = m + H$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} H &= \left[\frac{(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2}{2m} + eA_0 + \frac{m\omega^2 r^2}{2} - \frac{3}{2}\omega - 2\omega\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L}\right] - \\ &\quad - \frac{(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})}{m}\cdot\boldsymbol{v} - \omega\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}) + v_0 + \frac{v^2}{2m}\ . \end{aligned} \tag{2.14}$$

O primeiro termo representa o Hamiltoniano não-relativístico do oscilador de Dirac acrescido dos termos do campo eletromagnético externo, ou seja, o Hamiltoniano de interação oscilador de Dirac-campo externo. Os outros termos pertencem ao Hamiltoniano de violação de simetria vetorial de Lorentz. Sendo que os dois últimos termos, v_0 e $\frac{v^2}{2m}$, não interferem na física do sistema por serem constantes que provocam um afastamento do espectro de energia.

2.2 Violação da simetria de Lorentz por acoplamento axial

De maneira similar àquela vista no caso vetorial, podemos obter a Lagrangiana de Dirac com quebra da simetria axial de Lorentz através da inserção de um termo CPT-ímpar do tipo axial, $b_\mu\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi$. Dessa forma,

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}_{Dirac} - b_\mu\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi\ , \tag{2.15}$$

onde $\mathcal{L}_{Dirac}$ é a Lagrangiana de Dirac dada pela equação (2.3).

Aplicando a equação de Euler-Lagrange, (2.5), na equação (2.15), obtemos a equação de Dirac modificada:

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - b_\mu\gamma^5\gamma^\mu - m\right)\psi = 0\ . \tag{2.16}$$

Tal equação pode ser reescrita no espaço dos momenta:

$$\left(\gamma^\mu p_\mu - b_\mu\gamma^5\gamma^\mu - m\right)\psi = 0\ , \tag{2.17}$$

onde $p^\mu = (E, \boldsymbol{p})$.

Novamente, o objetivo desse trabalho é o modelo do oscilador de Dirac interagindo com um campo eletromagnético externo. Dessa forma, podemos introduzir o acoplamento não-mínimo (1.7) e, por meio da derivada covariante, $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$, também o campo externo, A_μ. Então, a equação de Dirac para o sistema é

$$\Big(i\gamma^0\partial_t - \boldsymbol{\gamma}\cdot\Big(\boldsymbol{p} - im\omega\gamma^0\boldsymbol{r}\Big) - e\gamma^0 A_0 + e\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{A} - b_0\gamma^5\gamma^0 + \gamma^5\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\gamma} - m\Big)\psi = 0\,. \tag{2.18}$$

Entretanto, a matriz de quiralidade, γ^5, na representação de Dirac, é definida por

$$\gamma^5 = \gamma_5 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,. \tag{2.19}$$

Como antes, o quadrispinor ψ pode ser escrito em termos de spinores φ e χ. Com isso, duas equações acopladas surgem

$$(E - m - eA_0 - \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\varphi = [\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p} + im\omega\boldsymbol{r} - e\boldsymbol{A}) + b_0]\,\chi\,, \tag{2.20}$$

$$(E + m - eA_0 - \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\chi = [\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p} - im\omega\boldsymbol{r} - e\boldsymbol{A}) + b_0]\,\varphi\,. \tag{2.21}$$

Para que se possa atingir o limite não-relativístico, devemos considerar a aproximação: $E + m - eA_0 - \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\sigma} \approx 2m$. Nesse caso, estamos assumindo que a massa da partícula é muito maior do que o termo de quebra, $m \gg |\boldsymbol{b}|$, e do que o termo do campo eletromagnético externo, $m \gg eA_0$. Nessa condições, podemos escrever

$$(E - m - eA_0 - \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\varphi = \frac{1}{2m}\,[\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p} + im\omega\boldsymbol{r} - e\boldsymbol{A}) + b_0]\,[\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p} - im\omega\boldsymbol{r} - e\boldsymbol{A}) + b_0]\,\varphi\,. \tag{2.22}$$

Essa equação pode ser resolvida através da identidade: $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{M})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{N}) = \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{N} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{N})$. E usando, novamente, $E = m + H$, obtemos

$$\begin{aligned} H \;=\; & \left[\frac{(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2}{2m} + eA_0 + \frac{m\omega^2 r^2}{2} - \frac{3}{2}\omega - 2\omega\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L}\right] + \\ & + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{b} + \frac{b_0}{m}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}) + \frac{b_0^2}{2m}\,. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Mais uma vez, o primeiro termo representa o Hamiltoniano não-relativístico do oscilador de Dirac acrescido dos termos do campo eletromagnético externo, ou seja, o Hamiltoniano de interação oscilador de Dirac-campo externo. Os outros termos pertencem ao Hamiltoniano de violação de simetria axial de Lorentz. Sendo que o último termo, $\frac{b_0^2}{2m}$, não interfere na física do sistema por ser uma constante que provoca o deslocamento do espectro de energia.

3 O OSCILADOR DE DIRAC EM UM SISTEMA DE DOIS NÍVEIS

No presente capítulo, faremos um sistema físico de dois níveis, no cenário do oscilador de Dirac, interagir com um campo eletromagnético externo. A partir dessa interação, estudaremos a forma como esse sistema transita entre os estados. Para isso, utilizaremos as funções de inversão de população de spin e as de energia. Por fim, consideraremos o caso especial da ressonância e o compararemos com os resultados existentes na literatura científica.

3.1 Hamiltoniano de interação oscilador de Dirac-Campo

Consideremos um sistema físico descrito pelo Hamiltoniano não-relativístico do Oscilador de Dirac:

$$H_{nrod} = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} - \frac{3}{2}\omega\hbar - \frac{2\omega}{\hbar}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L}\,. \tag{3.1}$$

Fazendo com que esse sistema interaja com um campo eletromagnético externo através do acoplamento mínimo, $\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$, o que obtemos é o Hamiltoniano de acoplamento mínino,

$$H = \frac{[\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)]^2}{2m} + e\phi(\boldsymbol{r},t) + \frac{m\omega^2 r^2}{2} - \frac{3}{2}\omega\hbar - \frac{2\omega}{\hbar}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L}\,, \tag{3.2}$$

onde $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ é o potencial vetor do campo externo e $\phi(\boldsymbol{r},t)$ é o potencial escalar do campo externo.

Substituindo o Hamiltoniano de acoplamento mínino (3.2) na equação de Schrödinger,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi\,,$$

e lembrando que $\boldsymbol{p} = -i\hbar\nabla$, temos

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left\{\frac{-\hbar^2}{2m}\left[\nabla - \frac{ie}{\hbar}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\right]^2 + e\phi(\boldsymbol{r},t) + \frac{m\omega^2 r^2}{2} - \frac{3}{2}\omega\hbar - \frac{2\omega}{\hbar}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L}\right\}\psi\,. \tag{3.3}$$

Para simplificar, vamos assumir que o campo elétrico esteja linearmente polarizado na direção x, e que a origem das coordenadas seja tomado em algum ponto fixo no sistema. Isto pode ser justificado pelo fato dos comprimentos de onda serem muito maiores do que as dimensões do átomo [24]. Assim, supondo que todo o sistema esteja imerso em uma onda plana eletromagnética, descrita pelo potencial vetor $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}, t)$, podemos usar a aproximação dipolar, $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} \ll 1$, e escrever este potencial vetor como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r},t) &= \boldsymbol{A}(t)\exp\left[i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r})\right] \\ &= \boldsymbol{A}(t)\exp\left[i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_0\right](1+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\ldots) \\ &\simeq \boldsymbol{A}(t)\exp\left[i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_0\right]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Dessa forma, podemos reescrever (3.3) como

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left\{\frac{-\hbar^2}{2m}\left[\nabla - \frac{ie}{\hbar}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_0,t)\right]^2 + e\phi(\boldsymbol{r},t) + \frac{m\omega^2 r^2}{2} - \frac{3}{2}\omega\hbar - \frac{2\omega}{\hbar}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L}\right\}\psi\,. \tag{3.5}$$

Usando o gauge de radiação, impomos que

$$\phi(\boldsymbol{r},t) = 0\,, \tag{3.6}$$

e obtemos

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left\{\frac{-\hbar^2}{2m}\left[\nabla - \frac{ie}{\hbar}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_0,t)\right]^2 + \frac{m\omega^2 r^2}{2} - \frac{3}{2}\omega\hbar - \frac{2\omega}{\hbar}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L}\right\}\psi\,. \tag{3.7}$$

Podemos definir uma nova função de onda $\phi(\boldsymbol{r},t)$ como

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = \exp\left[i\frac{e}{\hbar}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_0,t)\cdot\boldsymbol{r}\right]\phi(\boldsymbol{r},t)\,. \tag{3.8}$$

Inserindo (3.8) em (3.7) e chamando $\boldsymbol{P} = i\hbar\left[\nabla - i\frac{e}{\hbar}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_0,t)\right]$, obtemos

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left\{\exp\left[i\frac{e}{\hbar}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_0,t)\cdot\boldsymbol{r}\right]\phi(\boldsymbol{r},t)\right\} &= \left[\frac{\boldsymbol{P}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} - \frac{3}{2}\omega\hbar - \frac{2\omega}{\hbar}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L}\right]\times \\ &\quad \times\exp\left[i\frac{e}{\hbar}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_0,t)\cdot\boldsymbol{r}\right]\phi(\boldsymbol{r},t)\,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Porém,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left\{\exp\left[i\frac{e}{\hbar}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_0,t)\cdot\boldsymbol{r}\right]\phi(\boldsymbol{r},t)\right\}=i\hbar\left(i\frac{e}{\hbar}\exp\left[i\frac{e}{\hbar}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}\right]\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r})\right)\phi+i\hbar\exp\left[i\frac{e}{\hbar}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}\right]\frac{\partial}{\partial t}\phi$$
$$=-e\exp\left[i\frac{e}{\hbar}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}\right]\dot{\boldsymbol{A}}\cdot\boldsymbol{r}\phi(\boldsymbol{r},t)+i\hbar\exp\left[i\frac{e}{\hbar}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}\right]\dot{\phi}(\boldsymbol{r},t)\,.$$

Então, após a eliminação do fator exponencial e a execução de um rearranjo nos termos, obtemos

$$i\hbar\dot{\phi}(\boldsymbol{r},t)=\left\{\frac{\boldsymbol{P}^2}{2m}+\frac{m\omega^2r^2}{2}-\frac{3}{2}\omega\hbar-\frac{2\omega}{\hbar}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L}+e\dot{\boldsymbol{A}}\cdot\boldsymbol{r}\right\}\phi(\boldsymbol{r},t)\,. \tag{3.10}$$

Chamando $H_0=\frac{\boldsymbol{P}^2}{2m}+\frac{m\omega^2r^2}{2}-\frac{3}{2}\omega\hbar-\frac{2\omega}{\hbar}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L}$, temos

$$i\hbar\dot{\phi}(\boldsymbol{r},t)=\left\{H_0+e\dot{\boldsymbol{A}}\cdot\boldsymbol{r}\right\}\phi(\boldsymbol{r},t)\,, \tag{3.11}$$

onde H_0 é o Hamiltoniano que agrega todos os termos do oscilador de Dirac.

Fazendo a substituição $\dot{\boldsymbol{A}}=-\boldsymbol{E}$, obtemos

$$i\hbar\dot{\phi}(\boldsymbol{r},t)=\{H_0-e\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0,t)\}\,\phi(\boldsymbol{r},t)\,, \tag{3.12}$$

onde o Hamiltoniano de interação do sistema com o campo eletromagnético $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0,t)$, é dado por

$$H_{int}=-e\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0,t)\,. \tag{3.13}$$

Em seguida, usaremos o Hamiltoniano obtido para estudar a função de inversão de população entre dois níveis.

3.2 A função de amplitude de probabilidade entre os dois níveis

Dado o Hamiltoniano que descreve um oscilador de Dirac não-relativístico interagindo com um campo eletromagnético externo,

$$H=H_0+H_{int}=\frac{\boldsymbol{P}^2}{2m}+\frac{m\omega^2r^2}{2}-\frac{3}{2}\omega\hbar-\frac{2\omega}{\hbar}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L}-e\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0,t)\,, \tag{3.14}$$

faremos sua representação em um sistema de dois níveis. Devido o termo de interação spin-órbita, presente no Hamiltoniano, torna-se imprescindível a utilização de uma base de quatro estados: $\{|1+\rangle,|1-\rangle,|2+\rangle,|2-\rangle\}$, onde os elementos foram obtidos através de produtos tensoriais entre os autoestados de energia, $\{|1\rangle, |2\rangle\}$, e os autoestados de spin, $\{|+\rangle, |-\rangle\}$.

A função de onda que define o estado do sistema será,

$$|\psi(t)\rangle = A_+(t)|1+\rangle + A_-(t)|1-\rangle + B_+(t)|2+\rangle + B_-(t)|2-\rangle\ , \tag{3.15}$$

onde A_+, A_-, B_+ e B_- são as amplitudes de probabilidades de encontrar o sistema nos estados $|1+\rangle$, $|1-\rangle$, $|2+\rangle$ e $|2-\rangle$, respectivamente. É importante lembrar que a soma das probabilidades é

$$|A_+(t)|^2 + |A_-(t)|^2 + |B_+(t)|^2 + |B_-(t)|^2 = 1\ . \tag{3.16}$$

O sistema evolui de acordo com

$$i\hbar\left|\dot{\psi}(t)\right\rangle = H|\psi(t)\rangle\ , \tag{3.17}$$

que é a equação de Schrödinger. Porém, para estudarmos a evolução do sistema, devemos escrever o Hamiltoniano na base $\{|1+\rangle, |1-\rangle, |2+\rangle, |2-\rangle\}$. Para tal, utilizaremos a relação de completeza $|1+\rangle\langle 1+| + |1-\rangle\langle 1-| + |2+\rangle\langle 2+| + |2-\rangle\langle 2-| = 1$.

A partir dos autovalores de H_0,

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \left(N - j + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega = 2n\hbar\omega & \text{para } j = l + \frac{1}{2} \\ \left(N + j + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega = (2n + 2l + 1)\,\hbar\omega & \text{para } j = l - \frac{1}{2} \end{cases}\ , \tag{3.18}$$

onde $H_0|1+\rangle = 2n_1\hbar\omega_1|1+\rangle = k_{1_+}\hbar\omega_1|1+\rangle$, $H_0|1-\rangle = (2n_1 + 2l_1 + 1)\,\hbar\omega_1|1-\rangle = k_{1_-}\hbar\omega_1|1-\rangle$, $H_0|2+\rangle = 2n_2\hbar\omega_2|2+\rangle = k_{2_+}\hbar\omega_2|2+\rangle$ e $H_0|2-\rangle = (2n_2 + 2l_2 + 1)\,\hbar\omega_2|2-\rangle = k_{2_-}\hbar\omega_2|2-\rangle$[1], podemos escrever H_0 na base $\{|1+\rangle, |1-\rangle, |2+\rangle, |2-\rangle\}$. Assim, após "sanduichar" H_0 com a relação de completeza,

$$H_0 = (\text{Relação de Completeza})\, H_0\, (\text{Relação de Completeza})\ , \tag{3.19}$$

obtemos,

$$\begin{aligned} H_0 \;=\; & k_{1_+}\hbar\omega_1|1+\rangle\langle 1+| + k_{1_-}\hbar\omega_1|1-\rangle\langle 1-| + \\ & + k_{2_+}\hbar\omega_2|2+\rangle\langle 2+| + k_{2_-}\hbar\omega_2|2-\rangle\langle 2-|\ . \end{aligned} \tag{3.20}$$

[1]Adotaremos o uso dos termos $k_{i_\pm}$, em vez de $2n_i$ e $2n_i + 2l_i + 1$, com o intuito de resumir as equações, e com isso, facilitar a compreensão do leitor.

De forma similar, podemos escrever H_{int} na base $\{|1+\rangle, |1-\rangle, |2+\rangle, |2-\rangle\}$:

$$H_{int} = (\text{Relação de Completeza})\, H_{int}\, (\text{Relação de Completeza}) \ . \tag{3.21}$$

Vale reforçar que o campo elétrico está linearmente polarizado na direção x, ou seja, $H_{int} = -exE(t)$. Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} H_{int} &= -e[|1+\rangle\langle 1+|x|2+\rangle\langle 2+| + |1-\rangle\langle 1-|x|2-\rangle\langle 2-| + \\ &\quad +|2+\rangle\langle 2+|x|1+\rangle\langle 1+| + |2-\rangle\langle 2-|x|1-\rangle\langle 1-|]E(t) \ , \end{aligned} \tag{3.22}$$

onde usamos $\langle 1\pm|x|2\mp\rangle = \langle 2\pm|x|1\mp\rangle = \langle 1\star|x|1\star\rangle = \langle 2\star|x|2\star\rangle = 0$,[2] pois o operador $\boldsymbol{x}$ não atua nos estados de spin simultaneamente ortogonais. Assim,

$$\begin{aligned} H_{int} &= -P_{12_{++}}|1+\rangle\langle 2+|E(t) - P^*_{12_{++}}|2+\rangle\langle 1+|E(t) - \\ &\quad -P_{12_{--}}|1-\rangle\langle 2-|E(t) - P^*_{12_{--}}|2-\rangle\langle 1-|E(t) \ . \end{aligned} \tag{3.23}$$

onde $P_{12_{\pm\pm}} = e\langle 1\pm|x|2\pm\rangle$ é o elemento de matriz do dipolo elétrico.

Portanto, o Hamiltoniano total na base $\{|1+\rangle, |1-\rangle, |2+\rangle, |2-\rangle\}$ é,

$$\begin{aligned} H &= k_{1_+}\hbar\omega_1|1+\rangle\langle 1+| + k_{1_-}\hbar\omega_1|1-\rangle\langle 1-| + k_{2_+}\hbar\omega_2|2+\rangle\langle 2+| + \\ &\quad +k_{2_-}\hbar\omega_2|2-\rangle\langle 2-| - P_{12_{++}}|1+\rangle\langle 2+|E(t) - P^*_{12_{++}}|2+\rangle\langle 1+|E(t) - \\ &\quad -P_{12_{--}}|1-\rangle\langle 2-|E(t) - P^*_{12_{--}}|2-\rangle\langle 1-|E(t) \ . \end{aligned} \tag{3.24}$$

Substituindo (3.15) e (3.24) na (3.17), aparecem quatro equações diferenciais acopladas de primeira ordem,

$$\dot{A}_+(t) = -\frac{i}{\hbar}k_{1_+}\hbar\omega_1 A_+(t) + \frac{i}{\hbar}P_{12_{++}}E(t)B_+(t) \ ; \tag{3.25}$$

$$\dot{A}_-(t) = -\frac{i}{\hbar}k_{1_-}\hbar\omega_1 A_-(t) + \frac{i}{\hbar}P_{12_{--}}E(t)B_-(t) \ ; \tag{3.26}$$

$$\dot{B}_+(t) = -\frac{i}{\hbar}k_{2_+}\hbar\omega_2 B_+(t) + \frac{i}{\hbar}P^*_{12_{++}}E(t)A_+(t) \ ; \tag{3.27}$$

$$\dot{B}_-(t) = -\frac{i}{\hbar}k_{2_-}\hbar\omega_2 B_-(t) + \frac{i}{\hbar}P^*_{12_{--}}E(t)A_-(t) \ . \tag{3.28}$$

Na aproximação de dipolo, o campo pode ser expresso como

$$E(t) = E_0 \cos\nu t \ , \tag{3.29}$$

onde E_0 é a amplitude e ν é a frequência do campo.

[2]Onde $|\star\rangle$ simboliza qualquer estado de spin, ou seja, $|+\rangle$ ou $|-\rangle$.

Através de uma redefinição dos coeficientes, onde

$$\begin{aligned} a_+(t) &= A_+ e^{ik_{1_+}\omega_1}\,; \qquad b_+(t) = B_+ e^{ik_{2_+}\omega_2}\,; \\ a_-(t) &= A_+ e^{ik_{1_-}\omega_1}\,; \qquad b_-(t) = B_- e^{ik_{2_-}\omega_2}\,, \end{aligned} \tag{3.30}$$

podemos escrever,

$$\dot{a}_+(t) = \tfrac{i}{2\hbar} P_{12_{++}} E_0 b_+(t) \left[e^{i\left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 + \nu\right)t} + e^{i\left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)t} \right]; \tag{3.31}$$

$$\dot{a}_-(t) = \tfrac{i}{2\hbar} P_{12_{--}} E_0 b_-(t) \left[e^{i\left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2 + \nu\right)t} + e^{i\left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2 - \nu\right)t} \right]; \tag{3.32}$$

$$\dot{b}_+(t) = \tfrac{i}{2\hbar} P^*_{12_{++}} E_0 a_+(t) \left[e^{-i\left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 + \nu\right)t} + e^{-i\left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)t} \right]; \tag{3.33}$$

$$\dot{b}_-(t) = \tfrac{i}{2\hbar} P^*_{12_{--}} E_0 a_-(t) \left[e^{-i\left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2 + \nu\right)t} + e^{-i\left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2 - \nu\right)t} \right]. \tag{3.34}$$

Através de uma técnica conhecida como aproximação de onda girante (rotating wave approximation - RWA), podemos negligenciar os termos antirressonantes, $e^{\pm i\left(k_{1_\pm}\omega_1 - k_{2_\pm}\omega_2 + \nu\right)t}$. Isso é justificado pelo fato de esses termos antirressonantes oscilarem rapidamente e, consequentemente, possuírem uma média temporal aproximadamente nula, tendo assim, seus efeitos negligenciados. Desse modo, obtemos

$$\dot{a}_+(t) = \tfrac{i}{2\hbar} P_{12_{++}} E_0 b_+(t) e^{i\left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)t}\,; \tag{3.35}$$

$$\dot{a}_-(t) = \tfrac{i}{2\hbar} P_{12_{--}} E_0 b_-(t) e^{i\left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2 - \nu\right)t}\,; \tag{3.36}$$

$$\dot{b}_+(t) = \tfrac{i}{2\hbar} P^*_{12_{++}} E_0 a_+(t) e^{-i\left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)t}\,; \tag{3.37}$$

$$\dot{b}_-(t) = \tfrac{i}{2\hbar} P^*_{12_{--}} E_0 a_-(t) e^{-i\left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2 - \nu\right)t}\,. \tag{3.38}$$

Para essas equações diferenciais acopladas de primeira ordem podem ser encontradas soluções exatas através das técnicas descritas no apêndice desse trabalho.

Tomando como condições iniciais $a_\pm(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $b_\pm(0) = 0$, estamos supondo que, inicialmente, o sistema esteja nos estados $|1\pm\rangle$. Dessa forma, obtemos como solução

$$\begin{aligned} a_+(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\!\left(\sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)^2}\, \frac{t}{2} \right) \times \\ \times \exp\!\left[i\left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right) \frac{t}{2} \right] - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{i\left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)}{\sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)^2}} \times \\ \times \sin\!\left(\sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)^2}\, \frac{t}{2} \right) \exp\left[i\left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right) \frac{t}{2} \right]; \end{aligned} \tag{3.39}$$

$$a_-(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1\_}\omega_1 - k_{2\_}\omega_2 - \nu\right)^2}\,\frac{t}{2}\right) \times$$
$$\times \exp\left[i\left(k_{1\_}\omega_1 - k_{2\_}\omega_2 - \nu\right)\frac{t}{2}\right] - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{i\left(k_{1\_}\omega_1 - k_{2\_}\omega_2 - \nu\right)}{\sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1\_}\omega_1 - k_{2\_}\omega_2 - \nu\right)^2}} \times$$
$$\times \sin\left(\sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1\_}\omega_1 - k_{2\_}\omega_2 - \nu\right)^2}\,\frac{t}{2}\right)\exp\left[i\left(k_{1\_}\omega_1 - k_{2\_}\omega_2 - \nu\right)\frac{t}{2}\right]; \tag{3.40}$$

$$b_+(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{iP_{12}E_0}{\sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)^2}} \times$$
$$\times \sin\left(\sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)^2}\,\frac{t}{2}\right)\exp\left[-i\left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)\frac{t}{2}\right]; \tag{3.41}$$

$$b_-(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{iP_{12}E_0}{\sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1\_}\omega_1 - k_{2\_}\omega_2 - \nu\right)^2}} \times$$
$$\times \sin\left(\sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1\_}\omega_1 - k_{2\_}\omega_2 - \nu\right)^2}\,\frac{t}{2}\right)\exp\left[-i\left(k_{1\_}\omega_1 - k_{2\_}\omega_2 - \nu\right)\frac{t}{2}\right]; \tag{3.42}$$

onde supomos que os elementos de matrizes do dipolo são reais, então

$$P_{12} = P_{12_{++}} = P^*_{12_{++}} = P_{12_{--}} = P^*_{12_{--}}\ . \tag{3.43}$$

Para estudar a forma como o sistema muda entre os estados, definimos duas funções de inversão de população: a função de inversão de população de spin, W_S e a função de inversão de população de energia, W_E

$$W_S = |a_+(t)|^2 + |b_+(t)|^2 - |a_-(t)|^2 - |b_-(t)|^2\ , \tag{3.44}$$
$$W_E = |a_+(t)|^2 + |a_-(t)|^2 - |b_+(t)|^2 - |b_-(t)|^2\ . \tag{3.45}$$

A função de inversão de população de spin é

$$W_S = 0\ , \tag{3.46}$$

ou seja, não há inversão de população de spin. Isso ocorre pois o campo elétrico não atua nos estados de spin.

A função de inversão de população de energia é

$$\begin{aligned} W_E \;=\; & \frac{1}{2}\cos^2\left(\sqrt{(P_{12}E_0)^2+\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)^2}\,\frac{t}{2}\right)+ \\ & +\frac{1}{2}\frac{\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)^2-(P_{12}E_0)^2}{(P_{12}E_0)^2+\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)^2}\times \\ & \times\sin^2\left(\sqrt{(P_{12}E_0)^2+\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)^2}\,\frac{t}{2}\right)+ \\ & +\frac{1}{2}\cos^2\left(\sqrt{(P_{12}E_0)^2+\left(k_{1_-}\omega_1-k_{2_-}\omega_2-\nu\right)^2}\,\frac{t}{2}\right)+ \\ & +\frac{1}{2}\frac{\left(k_{1_-}\omega_1-k_{2_-}\omega_2-\nu\right)^2-(P_{12}E_0)^2}{(P_{12}E_0)^2+\left(k_{1_-}\omega_1-k_{2_-}\omega_2-\nu\right)^2}\times \\ & \times\sin^2\left(\sqrt{(P_{12}E_0)^2+\left(k_{1_-}\omega_1-k_{2_-}\omega_2-\nu\right)^2}\,\frac{t}{2}\right)\,, \end{aligned} \tag{3.47}$$

onde os termos $k_{1_\pm}$, $k_{2_\pm}$, ω_1 e ω_2 são contribuições do oscilador de Dirac.

Em um caso especial, quando o sistema está em ressonância com o campo incidente, $k_{1_\pm}\omega_1 - k_{2_\pm}\omega_2 = \nu$, toda a influência do oscilador de Dirac é perdida. Dessa forma, obtemos um resultado conhecido na literatura científica: a função de inversão de população de energia sem o cenário do oscilador de Dirac [25]

$$W_S = 0 \quad \text{e} \quad W_E = cos\left(P_{12}E_0 t\right)\,, \tag{3.48}$$

onde o termo $P_{12}E_0$ é conhecido como a frequência de Rabi.

4 IMPLICAÇÕES DECORRENTES DA VIOLAÇÃO DE LORENTZ POR ACOPLAMENTO VETORIAL

Neste capítulo, estudaremos as implicações decorrentes da introdução de termos que quebram a simetria vetorial de Lorentz, através do acoplamento: $v_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, em um Hamiltoniano que descreve a interação de um oscilador de Dirac com um campo eletromagnético externo.

4.1 Implicações decorrentes do termo $\frac{e\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}}{m}$

Podemos inserir, em um Hamiltoniano que descreve um oscilador de Dirac interagindo com um campo eletromagnético externo, um termo de quebra do tipo vetorial

$$H = H_0 + H_{int} + H_{vl1} \tag{4.1}$$

onde o termo de quebra é

$$H_{vl1} = e\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}}{m} \, . \tag{4.2}$$

Assim, escrevemos o Hamiltoniano total, H, como

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} - \frac{3}{2}\omega\hbar - \frac{2\omega}{\hbar}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L} - e\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0,t) + e\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}}{m} \, . \tag{4.3}$$

Analogamente ao caso em que o termo de quebra está ausente, estamos supondo que o campo elétrico esteja polarizado na direção x. Dessa forma, temos que

$$H_{vl1} = -\frac{eA_0 v_x}{m}\sin(\nu t) \, , \tag{4.4}$$

onde $\boldsymbol{A}(t) = -A_0 \sin(\nu t)\hat{\imath}$ e $A_0 = \frac{E_0}{\nu}$.

Podemos escrever H_{vl1} na base $\{|1+\rangle, |1-\rangle, |2+\rangle, |2-\rangle\}$,

$$H_{vl1} = -\frac{eA_0 v_x}{m} \left(|1+\rangle\langle 1+| + |1-\rangle\langle 1-| + |2+\rangle\langle 2+| + |2-\rangle\langle 2-|\right) \sin(\nu t) \;, \tag{4.5}$$

onde utilizamos a relação de completeza, $|1+\rangle\langle 1+| + |1-\rangle\langle 1-| + |2+\rangle\langle 2+| + |2-\rangle\langle 2-| = 1$. Dizendo que $\eta(t) = -\eta_0 \sin \nu t$ e $\eta_0 = \frac{eA_0 v_x}{m}$, o Hamiltoniano do termo de quebra torna-se

$$H_{vl1} = \eta(t) \left(|1+\rangle\langle 1+| + |1-\rangle\langle 1-| + |2+\rangle\langle 2+| + |2-\rangle\langle 2-|\right) \;. \tag{4.6}$$

O Hamiltoniano total na base $\{|1+\rangle, |1-\rangle, |2+\rangle, |2-\rangle\}$ é

$$\begin{aligned} H \;=\; & \Big(k_{1_+}\hbar\omega_1 + \eta(t)\Big)|1+\rangle\langle 1+| + \Big(k_{1_-}\hbar\omega_1 + \eta(t)\Big)|1-\rangle\langle 1-| + \\ & + \Big(k_{2_+}\hbar\omega_2 + \eta(t)\Big)|2+\rangle\langle 2+| + \Big(k_{2_-}\hbar\omega_2 + \eta(t)\Big)|2-\rangle\langle 2-| - \\ & - P_{12_{++}}|1+\rangle\langle 2+|E(t) - P^*_{12_{++}}|2+\rangle\langle 1+|E(t) - \\ & - P_{12_{--}}|1-\rangle\langle 2-|E(t) - P^*_{12_{--}}|2-\rangle\langle 1-|E(t) \;. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Substituindo a equação (4.7) na equação de Schrödinger,

$$i\hbar\Big|\dot{\psi}(t)\Big\rangle = H|\psi(t)\rangle \;, \tag{4.8}$$

onde a função de onda é dada por

$$|\psi(t)\rangle = A_+(t)|1+\rangle + A_-(t)|1-\rangle + B_+(t)|2+\rangle + B_-(t)|2-\rangle \;, \tag{4.9}$$

surgem quatro equações diferenciais acopladas de primeira ordem

$$\dot{A}_+(t) = -\frac{i}{\hbar}\Big(k_{1_+}\hbar\omega_1 + \eta(t)\Big)A_+(t) + \frac{i}{\hbar}P_{12_{++}}E(t)B_+(t) \;; \tag{4.10}$$

$$\dot{A}_-(t) = -\frac{i}{\hbar}\Big(k_{1_-}\hbar\omega_1 + \eta(t)\Big)A_-(t) + \frac{i}{\hbar}P_{12_{--}}E(t)B_-(t) \;; \tag{4.11}$$

$$\dot{B}_+(t) = -\frac{i}{\hbar}\Big(k_{2_+}\hbar\omega_2 + \eta(t)\Big)B_+(t) + \frac{i}{\hbar}P^*_{12_{++}}E(t)A_+(t) \;; \tag{4.12}$$

$$\dot{B}_-(t) = -\frac{i}{\hbar}\Big(k_{2_-}\hbar\omega_2 + \eta(t)\Big)B_-(t) + \frac{i}{\hbar}P^*_{12_{--}}E(t)A_-(t) \;. \tag{4.13}$$

Fazendo uso de uma redefinição dos coeficientes, tal que

$$\begin{aligned} a_+(t) = A_+ e^{ik_{1_+}\omega_1} \;; \qquad b_+(t) = B_+ e^{ik_{2_+}\omega_2} \;; \\ a_-(t) = A_+ e^{ik_{1_-}\omega_1} \;; \qquad b_-(t) = B_- e^{ik_{2_-}\omega_2} \;, \end{aligned} \tag{4.14}$$

podemos escrever

$$\dot{a}_+(t) = -i\eta(t)a_+ + \tfrac{i}{2}P_{12_{++}}E_0b_+(t)\left[e^{i\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2+\nu\right)t}+e^{i\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)t}\right];\quad(4.15)$$

$$\dot{a}_-(t) = -i\eta(t)a_- + \tfrac{i}{2}P_{12_{--}}E_0b_-(t)\left[e^{i\left(k_{1_-}\omega_1-k_{2_-}\omega_2+\nu\right)t}+e^{i\left(k_{1_-}\omega_1-k_{2_-}\omega_2-\nu\right)t}\right];\quad(4.16)$$

$$\dot{b}_+(t)= -i\eta(t)b_+ + \tfrac{i}{2}P^*_{12_{++}}E_0a_+(t)\left[e^{-i\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2+\nu\right)t}+e^{-i\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)t}\right];\quad(4.17)$$

$$\dot{b}_-(t)= -i\eta(t)b_- + \tfrac{i}{2}P^*_{12_{--}}E_0a_-(t)\left[e^{-i\left(k_{1_-}\omega_1-k_{2_-}\omega_2+\nu\right)t}+e^{-i\left(k_{1_-}\omega_1-k_{2_-}\omega_2-\nu\right)t}\right].\quad(4.18)$$

Entretanto, através da aproximação de onda girante (rotating wave approximation - RWA), podemos desconsiderar os termos antirressonantes, $e^{\pm i\left(k_{1_\pm}\omega_1-k_{2_\pm}\omega_2+\nu\right)t}$. Dessa forma, obtemos

$$\dot{a}_+(t) = -i\eta(t)a_+ + \tfrac{i}{2}P_{12_{++}}E_0b_+(t)e^{i\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)t};\quad(4.19)$$

$$\dot{a}_-(t) = -i\eta(t)a_- + \tfrac{i}{2}P_{12_{--}}E_0b_-(t)e^{i\left(k_{1_-}\omega_1-k_{2_-}\omega_2-\nu\right)t};\quad(4.20)$$

$$\dot{b}_+(t) = -i\eta(t)b_+ + \tfrac{i}{2}P^*_{12_{++}}E_0a_+(t)e^{-i\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)t};\quad(4.21)$$

$$\dot{b}_-(t) = -i\eta(t)b_- + \tfrac{i}{2}P^*_{12_{--}}E_0a_-(t)e^{-i\left(k_{1_-}\omega_1-k_{2_-}\omega_2-\nu\right)t}.\quad(4.22)$$

Essas equações podem ser resolvidas exatamente, tomando como condições iniciais $a_\pm(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $b_\pm(0)=0$. Assim, estamos supondo que, inicialmente, o sistema esteja nos estados $|1\pm\rangle$. Então,

$$\begin{aligned}
a_+(t) = {} & \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{2\eta_0}{\nu}sin^2\frac{\nu t}{2}}}{4\sqrt{(P_{12}E_0)^2+\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)^2}}\times\\
& \times\left[\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)+\sqrt{(P_{12}E_0)^2+\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)^2}\right]\times\\
& \times e^{\frac{i}{2}\left[\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)-\sqrt{(P_{12}E_0)^2+\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)^2}\right]t}-\\
& -\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{2\eta_0}{\nu}sin^2\frac{\nu t}{2}}}{4\sqrt{(P_{12}E_0)^2+\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)^2}}\times\\
& \times\left[\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)-\sqrt{(P_{12}E_0)^2+\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)^2}\right]\times\\
& \times e^{\frac{i}{2}\left[\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)+\sqrt{(P_{12}E_0)^2+\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)^2}\right]t};
\end{aligned}\quad(4.23)$$

$$
\begin{aligned}
a_-(t) \;=\; & \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{2\eta_0}{\nu}sin^2\frac{\nu t}{2}}}{4\sqrt{(P_{12}E_0)^2+\left(k_{1\_}\omega_1-k_{2\_}\omega_2-\nu\right)^2}}\times \\
& \times\left[\left(k_{1\_}\omega_1-k_{2\_}\omega_2-\nu\right)+\sqrt{(P_{12}E_0)^2+\left(k_{1\_}\omega_1-k_{2\_}\omega_2-\nu\right)^2}\right]\times \\
& \times e^{\frac{i}{2}\left[\left(k_{1\_}\omega_1-k_{2\_}\omega_2-\nu\right)-\sqrt{(P_{12}E_0)^2+\left(k_{1\_}\omega_1-k_{2\_}\omega_2-\nu\right)^2}\right]t}- \\
& -\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{2\eta_0}{\nu}sin^2\frac{\nu t}{2}}}{4\sqrt{(P_{12}E_0)^2+\left(k_{1\_}\omega_1-k_{2\_}\omega_2-\nu\right)^2}}\times \\
& \times\left[\left(k_{1\_}\omega_1-k_{2\_}\omega_2-\nu\right)-\sqrt{(P_{12}E_0)^2+\left(k_{1\_}\omega_1-k_{2\_}\omega_2-\nu\right)^2}\right]\times \\
& \times e^{\frac{i}{2}\left[\left(k_{1\_}\omega_1-k_{2\_}\omega_2-\nu\right)+\sqrt{(P_{12}E_0)^2+\left(k_{1\_}\omega_1-k_{2\_}\omega_2-\nu\right)^2}\right]t};
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

$$
\begin{aligned}
b_+(t) \;=\; & \frac{-P_{12}E_0\sqrt{2}e^{i\frac{2\eta_0}{\nu}sin^2\frac{\nu t}{2}}}{4\sqrt{(P_{12}E_0)^2+\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)^2}}\times \\
& \times e^{\frac{-i}{2}\left[\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)+\sqrt{(P_{12}E_0)^2+\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)^2}\right]t}+ \\
& +\frac{P_{12}E_0\sqrt{2}e^{i\frac{2\eta_0}{\nu}sin^2\frac{\nu t}{2}}}{4\sqrt{(P_{12}E_0)^2+\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)^2}}\times \\
& \times e^{\frac{-i}{2}\left[\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)-\sqrt{(P_{12}E_0)^2+\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)^2}\right]t};
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

$$
\begin{aligned}
b_-(t) \;=\; & \frac{-P_{12}E_0\sqrt{2}e^{i\frac{2\eta_0}{\nu}sin^2\frac{\nu t}{2}}}{4\sqrt{(P_{12}E_0)^2+\left(k_{1\_}\omega_1-k_{2\_}\omega_2-\nu\right)^2}}\times \\
& \times e^{\frac{-i}{2}\left[\left(k_{1\_}\omega_1-k_{2\_}\omega_2-\nu\right)+\sqrt{(P_{12}E_0)^2+\left(k_{1\_}\omega_1-k_{2\_}\omega_2-\nu\right)^2}\right]t}+ \\
& +\frac{P_{12}E_0\sqrt{2}e^{i\frac{2\eta_0}{\nu}sin^2\frac{\nu t}{2}}}{4\sqrt{(P_{12}E_0)^2+\left(k_{1\_}\omega_1-k_{2\_}\omega_2-\nu\right)^2}}\times \\
& \times e^{\frac{-i}{2}\left[\left(k_{1\_}\omega_1-k_{2\_}\omega_2-\nu\right)-\sqrt{(P_{12}E_0)^2+\left(k_{1\_}\omega_1-k_{2\_}\omega_2-\nu\right)^2}\right]t},
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

onde tratamos os elementos de matrizes do dipolo como reais, ou seja,

$$
P_{12}=P_{12_{++}}=P^*_{12_{++}}=P_{12_{--}}=P^*_{12_{--}}\,. \tag{4.27}
$$

A função de inversão de população de spin,

$$W_S = |a_+(t)|^2 + |b_+(t)|^2 - |a_-(t)|^2 - |b_-(t)|^2 \ , \tag{4.28}$$

é dada por

$$\begin{aligned} W_S &= \frac{1}{2}\cos^2\left(\sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)^2}\,\frac{t}{2}\right) + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{(P_{12}E_0)^2\sin^2\left(\sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)^2}\,\frac{t}{2}\right)}{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)^2} - \\ &- \frac{1}{2}\cos^2\left(\sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2 - \nu\right)^2}\,\frac{t}{2}\right) - \\ &- \frac{1}{2}\frac{(P_{12}E_0)^2\sin^2\left(\sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2 - \nu\right)^2}\,\frac{t}{2}\right)}{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2 - \nu\right)^2} \ . \end{aligned} \tag{4.29}$$

Note que, embora não haja relação entre o termo de quebra do tipo vetorial e os estados de spin que justifique a existência dessas oscilações, no presente caso, essas oscilações são possíveis, pois, no Hamiltoniano não-relativístico do oscilador de Dirac, há a presença de um termo de interação spin-órbita que é capaz de modificar o estado de spin.

A função de inversão de população de energia,

$$W_E = |a_+(t)|^2 + |a_-(t)|^2 - |b_+(t)|^2 - |b_-(t)|^2 \ , \tag{4.30}$$

é dada por

$$\begin{aligned} W_E &= \frac{1}{2}\cos^2\left(\sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)^2}\,\frac{t}{2}\right) + \\ &+ \frac{1}{2}\cos^2\left(\sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2 - \nu\right)^2}\,\frac{t}{2}\right) - \\ &- \frac{1}{2}\frac{(P_{12}E_0)^2\sin^2\left(\sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)^2}\,\frac{t}{2}\right)}{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)^2} - \\ &- \frac{1}{2}\frac{(P_{12}E_0)^2\sin^2\left(\sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2 - \nu\right)^2}\,\frac{t}{2}\right)}{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2 - \nu\right)^2} \ . \end{aligned} \tag{4.31}$$

Esses resultados demonstram que a introdução do termo de quebra de simetria vetorial de Lorentz, $e\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}}{m}$, em um modelo, no qual, o oscilador de Dirac sofre as limitações de um sistema de dois níveis, produz modificações nas oscilações de estado, tanto de energia quanto de spin.

Considerando o caso especial da ressonância entre o sistema e o campo eletromagnético externo, $k_{1\pm}\omega_1 - k_{2\pm}\omega_2 = \nu$, a influência do oscilador de Dirac é perdida. Dessa forma, as funções de inversão de população tornam-se análogas às obtidas em caso semelhante, porém sem o modelo do oscilador de Dirac [26]

$$W_S = 0 \quad \text{e} \quad W_E = cos\left(P_{12}E_0 t\right) \; . \tag{4.32}$$

O surpreendente dessa situação é que, sem o modelo do oscilador de Dirac, o termo de quebra, $e\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}}{m}$, não produz qualquer modificação nas oscilações de estado. Logo, podemos concluir que a presença do oscilador de Dirac, nesse caso, é vital para que haja a quebra de simetria.

4.2 Implicações decorrentes do termo $\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{m}}$

Novamente, introduziremos um termo de quebra de simetria do tipo vetorial, H_{vl2}, em um Hamiltoniano de interação oscilador de Dirac-Campo eletromagnético externo. Assim,

$$H = H_0 + H_{int} + H_{vl2} \; , \tag{4.33}$$

onde o termo de quebra é dado por

$$H_{vl2} = -\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}}{m} \; . \tag{4.34}$$

Dessa forma, o Hamiltoniano total pode ser escrito como,

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} - \frac{3}{2}\omega\hbar - \frac{2\omega}{\hbar}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L} - e\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0,t) - \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}}{m} \; . \tag{4.35}$$

O Hamiltoniano proveniente do termo de quebra de simetria vetorial, H_{vl2}, pode ser escrito na base $\{|1+\rangle, |1-\rangle, |2+\rangle, |2-\rangle\}$. Para tal, utilizaremos a relação de completeza: $|1+\rangle\langle 1+| + |1-\rangle\langle 1-| + |2+\rangle\langle 2+| + |2-\rangle\langle 2-| = 1$.

$$H_{vl2} = (\text{Relação de Completeza})\, H_{vl2}\, (\text{Relação de Completeza}) \; . \tag{4.36}$$

Contudo, estamos supondo que o campo elétrico esteja polarizado na direção x. Então, o termo de quebra torna-se

$$H_{vl2} = iv_x[x, H_0] \; , \tag{4.37}$$

onde usamos a relação $\dot{x} = -i[x, H_0]$. Assim,

$$\begin{aligned} H_{vl2} &= -iv_x\left(k_{1_+}\hbar\omega_1 - k_{2_+}\hbar\omega_2\right)p_{12_{++}}|1+\rangle\langle 2+| + \\ &+iv_x\left(k_{1_+}\hbar\omega_1 - k_{2_+}\hbar\omega_2\right)p^*_{12_{++}}|2+\rangle\langle 1+| - \\ &-iv_x\left(k_{1_-}\hbar\omega_1 - k_{2_-}\hbar\omega_2\right)p_{12_{--}}|1-\rangle\langle 2-| + \\ &+iv_x\left(k_{1_-}\hbar\omega_1 - k_{2_-}\hbar\omega_2\right)p^*_{12_{--}}|2-\rangle\langle 1-| \,, \end{aligned} \tag{4.38}$$

onde $p_{12_{\pm\pm}} = \langle 1\pm|x|2\pm\rangle$.

Por sua vez, o Hamiltoniano total, H, na base $\{|1+\rangle, |1-\rangle, |2+\rangle, |2-\rangle\}$ é,

$$\begin{aligned} H &= k_{1_+}\hbar\omega_1|1+\rangle\langle 1+| + k_{1_-}\hbar\omega_1|1-\rangle\langle 1-| + \\ &+k_{2_+}\hbar\omega_2|2+\rangle\langle 2+| + k_{2_-}\hbar\omega_2|2-\rangle\langle 2-| - \\ &-P_{12_{++}}|1+\rangle\langle 2+|E(t) - P^*_{12_{++}}|2+\rangle\langle 1+|E(t) - \\ &-P_{12_{--}}|1-\rangle\langle 2-|E(t) - P^*_{12_{--}}|2-\rangle\langle 1-|E(t) - \\ &-i\left(k_{1_+}\hbar\omega_1 - k_{2_+}\hbar\omega_2\right)\tau|1+\rangle\langle 2+| + i\left(k_{1_+}\hbar\omega_1 - k_{2_+}\hbar\omega_2\right)\tau|2+\rangle\langle 1+| - \\ &-i\left(k_{1_-}\hbar\omega_1 - k_{2_-}\hbar\omega_2\right)\tau|1-\rangle\langle 2-| + i\left(k_{1_-}\hbar\omega_1 - k_{2_-}\hbar\omega_2\right)\tau|2-\rangle\langle 1-| \end{aligned} \tag{4.39}$$

onde $\tau = v_x p_{12_{\pm\pm}}$.

Substituindo a equação (4.39) na equação de Schrödinger,

$$i\hbar\left|\dot{\psi}(t)\right\rangle = H|\psi(t)\rangle \,, \tag{4.40}$$

onde a função de onda, $|\psi(t)\rangle$, é dada por

$$|\psi(t)\rangle = A_+(t)|1+\rangle + A_-(t)|1-\rangle + B_+(t)|2+\rangle + B_-(t)|2-\rangle \,, \tag{4.41}$$

aparecem quatro equações diferenciais acopladas de primeira ordem,

$$\dot{A}_+(t) = -\frac{i}{\hbar}\left[k_{1_+}\hbar\omega_1 A_+(t) - P_{12_{++}}E(t)B_+(t) - i\left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2\right)\tau B_+(t)\right] \,; \tag{4.42}$$

$$\dot{A}_-(t) = -\frac{i}{\hbar}\left[k_{1_-}\hbar\omega_1 A_-(t) - P_{12_{--}}E(t)B_-(t) - i\left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2\right)\tau B_-(t)\right] \,; \tag{4.43}$$

$$\dot{B}_+(t) = -\frac{i}{\hbar}\left[k_{2_+}\hbar\omega_2 B_+(t) - \frac{i}{\hbar}P^*_{12_{++}}E(t)A_+(t) + i\left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2\right)\tau A_+(t)\right] \,; \tag{4.44}$$

$$\dot{B}_-(t) = -\frac{i}{\hbar}\left[k_{2_-}\hbar\omega_2 B_-(t) - \frac{i}{\hbar}P^*_{12_{--}}E(t)A_-(t) + i\left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2\right)\tau A_-(t)\right] \,. \tag{4.45}$$

Através de uma redefinição dos coeficientes, onde

$$\begin{aligned} a_+(t) = A_+ e^{ik_{1_+}\omega_1} \,; \qquad b_+(t) = B_+ e^{ik_{2_+}\omega_2} \,; \\ a_-(t) = A_+ e^{ik_{1_-}\omega_1} \,; \qquad b_-(t) = B_- e^{ik_{2_-}\omega_2} \,, \end{aligned} \tag{4.46}$$

obtemos novas equações diferenciais acopladas de primeira ordem

$$\dot{a}_+(t) = \frac{i}{2} P_{12_{++}} E_0 b_+ e^{i\left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)t} - \left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2\right)\tau b_+ e^{i\left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2\right)t} \,; \tag{4.47}$$

$$\dot{a}_-(t) = \frac{i}{2} P_{12_{--}} E_0 b_- e^{i\left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2 - \nu\right)t} - \left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2\right)\tau b_- e^{i\left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2\right)t} \,; \tag{4.48}$$

$$\dot{b}_+(t) = \frac{i}{2} P_{12_{++}} E_0 a_+ e^{i\left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)t} + \left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2\right)\tau a_+ e^{i\left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2\right)t} \,; \tag{4.49}$$

$$\dot{b}_-(t) = \frac{i}{2} P_{12_{--}} E_0 a_- e^{i\left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2 - \nu\right)t} + \left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2\right)\tau a_- e^{i\left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2\right)t} \,, \tag{4.50}$$

onde utilizamos a técnica conhecida como aproximação de onda girante (rotating wave approximation - RWA) para eliminarmos os termos antirressonantes, $e^{\pm i\left(k_{1_\pm}\omega_1 - k_{2_\pm}\omega_2 + \nu\right)t}$.

Infelizmente, essas equações diferenciais não possuem soluções analíticas. Ainda podemos, contudo, analisar o seu comportamento, supondo uma situação na qual o campo elétrico seja nulo. Dessa forma, tomando como condições iniciais: $a_\pm(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $b_\pm(0) = 0$, temos, inicialmente, o sistema nos estados $|1\pm\rangle$. Assim, obtemos como solução

$$\begin{aligned} a_+(t) = {} & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1+3\sqrt{1+4\tau^2}}{2\sqrt{1+4\tau^2}}\right) e^{\frac{i}{2}\left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2\right)\left(1+\sqrt{1+4\tau^2}\right)t} - \\ & -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1+\sqrt{1+4\tau^2}}{2\sqrt{1+4\tau^2}}\right) e^{\frac{i}{2}\left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2\right)\left(1-\sqrt{1+4\tau^2}\right)t} \,; \end{aligned} \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned} a_-(t) = {} & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1+3\sqrt{1+4\tau^2}}{2\sqrt{1+4\tau^2}}\right) e^{\frac{i}{2}\left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2\right)\left(1+\sqrt{1+4\tau^2}\right)t} - \\ & -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1+\sqrt{1+4\tau^2}}{2\sqrt{1+4\tau^2}}\right) e^{\frac{i}{2}\left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2\right)\left(1-\sqrt{1+4\tau^2}\right)t} \,; \end{aligned} \tag{4.52}$$

$$\begin{aligned} b_+(t) = {} & \frac{-i(1+\sqrt{1+4\tau^2})(1+3\sqrt{1+4\tau^2})}{4\sqrt{2}\tau\sqrt{1+4\tau^2}} e^{\frac{-i}{2}\left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2\right)\left(1-\sqrt{1+4\tau^2}\right)t} - \\ & -\frac{i\tau}{\sqrt{2}\sqrt{1+4\tau^2}} e^{\frac{-i}{2}\left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2\right)\left(1+\sqrt{1+4\tau^2}\right)t} \,; \end{aligned} \tag{4.53}$$

$$b_-(t) = \frac{-i(1+\sqrt{1+4\tau^2})(1+3\sqrt{1+4\tau^2})}{4\sqrt{2}\tau\sqrt{1+4\tau^2}} e^{\frac{-i}{2}\left(k_{1\_}\omega_1 - k_{2\_}\omega_2\right)\left(1-\sqrt{1+4\tau^2}\right)t} - \\ - \frac{i\tau}{\sqrt{2}\sqrt{1+4\tau^2}} e^{\frac{-i}{2}\left(k_{1\_}\omega_1 - k_{2\_}\omega_2\right)\left(1+\sqrt{1+4\tau^2}\right)t} , \quad (4.54)$$

onde consideramos que os elementos de matrizes do dipolo eram reais, ou seja, $P_{12} = P_{12_{++}} = P^*_{12_{++}} = P_{12_{--}} = P^*_{12_{--}}$.

A função de inversão de população de spin é

$$W_S = 0 \, , \quad (4.55)$$

A função de inversão de população de energia, W_E, é escrita como

$$W_E = \frac{\left(1+3\sqrt{1+4\tau^2}\right)^2 + \left(1+\sqrt{1+4\tau^2}\right)^2}{4\left(1+4\tau^2\right)} - \frac{\left(1+3\sqrt{1+4\tau^2}\right)^2\left(1+\sqrt{1+4\tau^2}\right)^2}{16\tau^2\left(1+4\tau^2\right)} - \\ - \frac{\tau^2}{1+4\tau^2} - \frac{3\left(1+3\sqrt{1+4\tau^2}\right)\left(1+\sqrt{1+4\tau^2}\right)}{4\left(1+4\tau^2\right)} \times \\ \times \left[\cos\left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2\right)\left(1+4\tau^2\right)t + \cos\left(k_{1\_}\omega_1 - k_{2\_}\omega_2\right)\left(1+4\tau^2\right)t\right] . \quad (4.56)$$

Esses resultados demonstram como a introdução do termo de quebra de simetria vetorial de Lorentz, $\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}}{m}$, em um Hamiltoniano de interação oscilador de Dirac-Campo eletromagnético externo, em um sistema de dois níveis, provoca alterações nas oscilações dos estados de energia do sistema. Os estados de spin, por sua vez, não sofrem alterações em suas oscilações.

5 IMPLICAÇÕES DECORRENTES DA VIOLAÇÃO DE LORENTZ POR ACOPLAMENTO AXIAL

Neste capítulo, estudaremos as implicações decorrentes da introdução de um termo que quebra a simetria axial de Lorentz, através do acoplamento: $b_\mu\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi$, em um Hamiltoniano que descreve a interação de um oscilador de Dirac com um campo eletromagnético externo.

5.1 Implicações decorrentes do termo $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{b}$

Em um Hamiltoniano que descreve um oscilador de Dirac interagindo com um campo eletromagnético externo, podemos introduzir um termo que viole a simetria de Lorentz, através de um acoplamento axial. Dessa forma, o Hamiltoniano total, H, pode ser definido como

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} - \frac{3}{2}\omega\hbar - \frac{2\omega}{\hbar}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L} - e\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0,t) + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{b}\,, \tag{5.1}$$

onde $H_{vl3} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{b}$ é o termo de interação do background com o sistema.

Podemos escrever o Hamiltoniano na base $\{|1+\rangle, |1-\rangle, |2+\rangle, |2-\rangle\}$, através da relação de completeza: $|1+\rangle\langle 1+| + |1-\rangle\langle 1-| + |2+\rangle\langle 2+| + |2-\rangle\langle 2-| = 1$. Assim, H_{vl3} nessa base é

$$H_{vl3} = (\text{Relação de Completeza})\,H_{vl3}\,(\text{Relação de Completeza})\;, \tag{5.2}$$

mas $H_{vl3} = b_x\sigma_x + b_y\sigma_y + b_z\sigma_z$ e

$$\begin{aligned}
\sigma_x|\pm\rangle &= |\mp\rangle\,, && (5.3)\\
\sigma_y|\pm\rangle &= \mp i|\mp\rangle\,, && (5.4)\\
\sigma_z|\pm\rangle &= \pm|\pm\rangle\,, && (5.5)
\end{aligned}$$

então,

$$
\begin{aligned}
H_{vl3} = \quad & b_x \left(|1-\rangle\langle 1+| + |1+\rangle\langle 1-| + |2-\rangle\langle 2+| + |2+\rangle\langle 2-| \right) + \\
& + i b_y \left(-|1-\rangle\langle 1+| + |1+\rangle\langle 1-| - |2-\rangle\langle 2+| + |2+\rangle\langle 2-| \right) + \\
& + b_z \left(|1+\rangle\langle 1+| - |1-\rangle\langle 1-| + |2+\rangle\langle 2+| - |2-\rangle\langle 2-| \right) .
\end{aligned} \tag{5.6}
$$

Dessa forma, o Hamiltoniano total, H, nessa base com quatro estados torna-se

$$
\begin{aligned}
H \quad = \quad & \left(k_{1_+} \hbar\omega_1 + b_z \right) |1+\rangle\langle 1+| + \left(k_{1_-} \hbar\omega_1 - b_z \right) |1-\rangle\langle 1-| + \\
& + \left(k_{2_+} \hbar\omega_2 + b_z \right) |2+\rangle\langle 2+| + \left(k_{2_-} \hbar\omega_2 - b_z \right) |2-\rangle\langle 2-| + \\
& + \left(b_x - i b_y \right) |1-\rangle\langle 1+| + \left(b_x + i b_y \right) |1+\rangle\langle 1-| + \left(b_x - i b_y \right) |2-\rangle\langle 2+| + \\
& + \left(b_x + i b_y \right) |2+\rangle\langle 2-| - P_{12_{++}} |1+\rangle\langle 2+| E(t) - P^*_{12_{++}} |2+\rangle\langle 1+| E(t) - \\
& - P_{12_{--}} |1-\rangle\langle 2-| E(t) - P^*_{12_{--}} |2-\rangle\langle 1-| E(t) .
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

Substituindo a equação (5.7) na equação de Schrödinger,

$$
i\hbar \left| \dot{\psi}(t) \right\rangle = H |\psi(t)\rangle , \tag{5.8}
$$

onde a função de onda é definida por

$$
|\psi(t)\rangle = A_+(t)|1+\rangle + A_-(t)|1-\rangle + B_+(t)|2+\rangle + B_-(t)|2-\rangle , \tag{5.9}
$$

obtemos, a exemplo dos caso já estudados, quatro equações diferenciais acopladas de primeira ordem

$$
\dot{A}_+(t) \quad = \tfrac{-i}{\hbar} \left[\left(k_{1_+} \hbar\omega_1 + b_z \right) A_+ + \left(b_x + i b_y \right) A_- - P_{12_{++}} E(t) B_+ \right] ; \tag{5.10}
$$

$$
\dot{A}_-(t) \quad = \tfrac{-i}{\hbar} \left[\left(k_{1_-} \hbar\omega_1 - b_z \right) A_- + \left(b_x - i b_y \right) A_+ - P_{12_{--}} E(t) B_- \right] ; \tag{5.11}
$$

$$
\dot{B}_+(t) \quad = \tfrac{-i}{\hbar} \left[\left(k_{2_+} \hbar\omega_2 + b_z \right) B_+ + \left(b_x + i b_y \right) B_- - P^*_{12_{++}} E(t) A_+ \right] ; \tag{5.12}
$$

$$
\dot{B}_-(t) \quad = \tfrac{-i}{\hbar} \left[\left(k_{2_-} \hbar\omega_2 - b_z \right) B_- + \left(b_x - i b_y \right) B_+ - P_{12_{--}} E(t) A_- \right] . \tag{5.13}
$$

Podemos redefinir os coeficientes, chamando

$$
\begin{aligned}
a_+(t) = A_+ e^{i k_{1_+} \omega_1} ; \qquad & b_+(t) = B_+ e^{i k_{2_+} \omega_2} ; \\
a_-(t) = A_+ e^{i k_{1_-} \omega_1} ; \qquad & b_-(t) = B_- e^{i k_{2_-} \omega_2} .
\end{aligned} \tag{5.14}
$$

Assim, com $\hbar = 1$, obtemos as novas equações acopladas

$$\begin{aligned}
\dot{a}_+(t) &= -ib_z a_+(t) - i\left(b_x + ib_y\right) a_-(t) e^{i\left(k_{1_+} - k_{1_-}\right)\omega_1 t} + \\
&\quad + \frac{i}{2} P_{12_{++}} E_0 b_+(t) e^{i\left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)t}\,; \qquad (5.15)\\
\dot{a}_-(t) &= ib_z a_-(t) - i\left(b_x - ib_y\right) a_+(t) e^{-i\left(k_{1_+} - k_{1_-}\right)\omega_1 t} + \\
&\quad + \frac{i}{2} P_{12_{--}} E_0 b_-(t) e^{i\left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2 - \nu\right)t}\,; \qquad (5.16)\\
\dot{b}_+(t) &= -ib_z b_+(t) - i\left(b_x + ib_y\right) b_-(t) e^{i\left(k_{2_+} - k_{2_-}\right)\omega_2 t} + \\
&\quad + \frac{i}{2} P^*_{12_{++}} E_0 a_+(t) e^{-i\left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)t}\,; \qquad (5.17)\\
\dot{b}_-(t) &= ib_z b_-(t) - i\left(b_x - ib_y\right) b_+(t) e^{-i\left(k_{2_+} - k_{2_-}\right)\omega_2 t} + \\
&\quad + \frac{i}{2} P^*_{12_{--}} E_0 a_-(t) e^{-i\left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2 - \nu\right)t}\,, \qquad (5.18)
\end{aligned}$$

onde utilizamos a aproximação de onda girante (rotating wave approximation - RWA) que elimina os exponenciais, $e^{\pm\left(k_{1_\pm}\omega_1 - k_{2_\pm}\omega_2 + \nu\right)t}$, por serem termos antirressonantes.

As equações diferenciais acopladas de primeira ordem, acima, não possuem solução analítica. Podemos, entretanto, através de algumas considerações, obter alguns resultados passíveis de análise[1].

1º Caso: $b_x = b_y = b_z = 0$

Supondo que o background seja nulo, eliminamos qualquer influência do termo de quebra axial, $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{b}$. Dessa forma, o resultado obtido é igual ao estudado no terceiro capítulo, onde não havia termos que caracterizavam a quebra de simetria. Assim, as soluções são

$$\begin{aligned}
a_+(t) = {} & \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\sqrt{\left(P_{12}E_0\right)^2 + \left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)^2}\,\frac{t}{2}\right) \times \\
& \times \exp\left[i\left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)\frac{t}{2}\right] - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{i\left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)}{\sqrt{\left(P_{12}E_0\right)^2 + \left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)^2}} \times \\
& \times \sin\left(\sqrt{\left(P_{12}E_0\right)^2 + \left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)^2}\,\frac{t}{2}\right) \exp\left[i\left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)\frac{t}{2}\right]; \quad (5.19)
\end{aligned}$$

[1]Em todos os casos apresentados nesse capítulo, utilizamos as seguintes condições iniciais: $a_\pm(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $b_\pm(0) = 0$.

$$a_{-}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\sqrt{\left(P_{12}E_0\right)^2+\left(k_{1_-}\omega_1-k_{2_-}\omega_2-\nu\right)^2}\,\frac{t}{2}\right)\times$$
$$\times\exp\left[i\left(k_{1_-}\omega_1-k_{2_-}\omega_2-\nu\right)\frac{t}{2}\right]-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{i\left(k_{1_-}\omega_1-k_{2_-}\omega_2-\nu\right)}{\sqrt{\left(P_{12}E_0\right)^2+\left(k_{1_-}\omega_1-k_{2_-}\omega_2-\nu\right)^2}}\times$$
$$\times\sin\left(\sqrt{\left(P_{12}E_0\right)^2+\left(k_{1_-}\omega_1-k_{2_-}\omega_2-\nu\right)^2}\,\frac{t}{2}\right)\exp\left[i\left(k_{1_-}\omega_1-k_{2_-}\omega_2-\nu\right)\frac{t}{2}\right];\quad(5.20)$$

$$b_{+}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{iP_{12}E_0}{\sqrt{\left(P_{12}E_0\right)^2+\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)^2}}\times$$
$$\times\sin\left(\sqrt{\left(P_{12}E_0\right)^2+\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)^2}\,\frac{t}{2}\right)\exp\left[-i\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)\frac{t}{2}\right];\quad(5.21)$$

$$b_{-}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{iP_{12}E_0}{\sqrt{\left(P_{12}E_0\right)^2+\left(k_{1_-}\omega_1-k_{2_-}\omega_2-\nu\right)^2}}\times$$
$$\times\sin\left(\sqrt{\left(P_{12}E_0\right)^2+\left(k_{1_-}\omega_1-k_{2_-}\omega_2-\nu\right)^2}\,\frac{t}{2}\right)\exp\left[-i\left(k_{1_-}\omega_1-k_{2_-}\omega_2-\nu\right)\frac{t}{2}\right];\quad(5.22)$$

onde tratamos os elementos de matrizes do dipolo como reais, ou seja, $P_{12}=P_{12_{++}}=P^*_{12_{++}}=P_{12_{--}}=P^*_{12_{--}}$.

Desse modo, a função de inversão de população de spin é

$$W_S=0\,,\tag{5.23}$$

e a função de inversão de população de energia é definida por

$$\begin{aligned}W_E \;=\;& \frac{1}{2}\cos^2\left(\sqrt{\left(P_{12}E_0\right)^2+\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)^2}\,\frac{t}{2}\right)+\\ &+\frac{1}{2}\frac{\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)^2-\left(P_{12}E_0\right)^2}{\left(P_{12}E_0\right)^2+\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)^2}\times\\ &\times\sin^2\left(\sqrt{\left(P_{12}E_0\right)^2+\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)^2}\,\frac{t}{2}\right)+\\ &+\frac{1}{2}\cos^2\left(\sqrt{\left(P_{12}E_0\right)^2+\left(k_{1_-}\omega_1-k_{2_-}\omega_2-\nu\right)^2}\,\frac{t}{2}\right)+\\ &+\frac{1}{2}\frac{\left(k_{1_-}\omega_1-k_{2_-}\omega_2-\nu\right)^2-\left(P_{12}E_0\right)^2}{\left(P_{12}E_0\right)^2+\left(k_{1_-}\omega_1-k_{2_-}\omega_2-\nu\right)^2}\times\\ &\times\sin^2\left(\sqrt{\left(P_{12}E_0\right)^2+\left(k_{1_-}\omega_1-k_{2_-}\omega_2-\nu\right)^2}\,\frac{t}{2}\right)\,.\end{aligned}\tag{5.24}$$

2º Caso: $b_x = b_y = 0$

Supondo que a única componente do background que não é nula é a b_z, obtemos como soluções das equações diferenciais acopladas:

$$\begin{aligned} a_+(t) &= \frac{\left[-\left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right) + \sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)^2}\right]}{2\sqrt{2}\sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)^2}} \times \\ &\quad \times e^{\frac{i}{2}\left(-2b_z + \left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right) + \sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)^2}\right)t} + \\ &\quad + \frac{\left[\left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right) + \sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)^2}\right]}{2\sqrt{2}\sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)^2}} \times \\ &\quad \times e^{\frac{i}{2}\left(-2b_z + \left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right) - \sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)^2}\right)t}; \end{aligned} \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned} a_-(t) &= \frac{\left[-\left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2 - \nu\right) + \sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2 - \nu\right)^2}\right]}{2\sqrt{2}\sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2 - \nu\right)^2}} \times \\ &\quad \times e^{\frac{i}{2}\left(2b_z + \left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2 - \nu\right) + \sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2 - \nu\right)^2}\right)t} + \\ &\quad + \frac{\left[\left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2 - \nu\right) + \sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2 - \nu\right)^2}\right]}{2\sqrt{2}\sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2 - \nu\right)^2}} \times \\ &\quad \times e^{\frac{i}{2}\left(2b_z + \left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2 - \nu\right) - \sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_-}\omega_1 - k_{2_-}\omega_2 - \nu\right)^2}\right)t}; \end{aligned} \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned} b_+(t) &= \frac{(P_{12}E_0)}{2\sqrt{2}\sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)^2}} \times \\ &\quad \times e^{\frac{-i}{2}\left(2b_z + \left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right) - \sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)^2}\right)t} - \\ &\quad - \frac{(P_{12}E_0)}{2\sqrt{2}\sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)^2}} \times \\ &\quad \times e^{\frac{-i}{2}\left(2b_z + \left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right) + \sqrt{(P_{12}E_0)^2 + \left(k_{1_+}\omega_1 - k_{2_+}\omega_2 - \nu\right)^2}\right)t}; \end{aligned} \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned}
b_-(t) \;=\; & \frac{-\left(P_{12}E_0\right)}{2\sqrt{2}\sqrt{\left(P_{12}E_0\right)^2+\left(k_{1_}\omega_1-k_{2_}\omega_2-\nu\right)^2}}\times \\
& \times e^{\frac{i}{2}\left(2b_z-\left(k_{1_}\omega_1-k_{2_}\omega_2-\nu\right)-\sqrt{\left(P_{12}E_0\right)^2+\left(k_{1_}\omega_1-k_{2_}\omega_2-\nu\right)^2}\right)t}+ \\
& +\frac{\left(P_{12}E_0\right)}{2\sqrt{2}\sqrt{\left(P_{12}E_0\right)^2+\left(k_{1_}\omega_1-k_{2_}\omega_2-\nu\right)^2}}\times \\
& \times e^{\frac{i}{2}\left(2b_z-\left(k_{1_}\omega_1-k_{2_}\omega_2-\nu\right)+\sqrt{\left(P_{12}E_0\right)^2+\left(k_{1_}\omega_1-k_{2_}\omega_2-\nu\right)^2}\right)t}, \qquad (5.28)
\end{aligned}$$

onde consideramos os elementos de matrizes do dipolo como reais, ou seja, $P_{12}=P_{12_{++}}=P^*_{12_{++}}=P_{12_{--}}=P^*_{12_{--}}$.

Assim, a função de inversão de população de spin é

$$W_S=0\,. \qquad (5.29)$$

Pois, o operador σ_z não inverte o estado de spin.

Por sua vez, a função de inversão de população de energia é

$$\begin{aligned}
W_E \;=\; & \frac{4\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)^2}{8\left[\left(P_{12}E_0\right)^2+\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)^2\right]}+ \\
+\; & \frac{4\left(k_{1_}\omega_1-k_{2_}\omega_2-\nu\right)^2}{8\left[\left(P_{12}E_0\right)^2+\left(k_{1_}\omega_1-k_{2_}\omega_2-\nu\right)^2\right]}+ \\
+\; & \frac{4\left(P_{12}E_0\right)^2}{8\left[\left(P_{12}E_0\right)^2+\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)^2\right]}\times \\
\times\; & \cos\sqrt{\left(P_{12}E_0\right)^2+\left(k_{1_+}\omega_1-k_{2_+}\omega_2-\nu\right)^2}+ \\
+\; & \frac{4\left(P_{12}E_0\right)^2}{8\left[\left(P_{12}E_0\right)^2+\left(k_{1_}\omega_1-k_{2_}\omega_2-\nu\right)^2\right]}\times \\
\times\; & \cos\sqrt{\left(P_{12}E_0\right)^2+\left(k_{1_}\omega_1-k_{2_}\omega_2-\nu\right)^2}\,. \qquad (5.30)
\end{aligned}$$

3º Caso: $E_0=0$

Supondo a nulidade do campo elétrico, $E_0=0$, obtemos como soluções das equações diferenciais acopladas:

$$
\begin{aligned}
a_+(t) \;=\; & \left[\frac{-\left(2b_x+2ib_y+2b_z+K_1\omega_1\right)+\sqrt{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}}{2\sqrt{2}\sqrt{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}}\right] e^{i\left(K_1\omega_1+\sqrt{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}\right)\frac{t}{2}} + \\
& + \left[\frac{\left(2b_x+2ib_y+2b_z+K_1\omega_1\right)+\sqrt{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}}{2\sqrt{2}\sqrt{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}}\right] e^{i\left(K_1\omega_1-\sqrt{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}\right)\frac{t}{2}} ;
\end{aligned}
\tag{5.31}
$$

$$
\begin{aligned}
a_-(t) \;=\; & \left[\frac{2\left(b_x+ib_y\right)\left(2b_z+K_1\omega_1+\sqrt{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}\right)+4b_z^2+4b_zK_1\omega_1-4\Gamma}{\left(b_x+ib_y\right)4\sqrt{2}\sqrt{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}}\right] \times \\
& \times \left[e^{-i\left(K_1\omega_1-\sqrt{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}\right)\frac{t}{2}} - e^{-i\left(K_1\omega_1+\sqrt{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}\right)\frac{t}{2}}\right] ;
\end{aligned}
\tag{5.32}
$$

$$b_+(t) = 0 ; \tag{5.33}$$

$$b_-(t) = 0 , \tag{5.34}$$

onde chamamos: $K_1 = \left(k_{1_+} - k_{1_-}\right)$ e $\Gamma = K_1\omega_1 b_z + b_x^2 + b_y^2 + b_z^2$.

Dessa forma, a função de inversão de população de spin fica definida por

$$
\begin{aligned}
W_S \;=\; & \left[\frac{8\Gamma+4K_1\omega_1b_x+8b_xb_z+2(K_1\omega_1)^2}{4\left(4\Gamma+(K_1\omega_1)^2\right)}\right] - \left[\frac{8b_xb_z-4K_1\omega_1b_x}{4\left(4\Gamma+(K_1\omega_1)^2\right)}\right] \times \\
& \times \cos\left(\sqrt{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}\,t\right) - \left[\frac{4b_y\sqrt{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}}{4\left(4\Gamma+(K_1\omega_1)^2\right)}\right] \sin\left(\sqrt{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}\,t\right) - \\
& - \left[\frac{2b_z^4+b_z^2\left(2b_xb_y-4\Gamma+2(K_1\omega_1)^2\right)}{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}\right] \sin^2\left(\sqrt{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}\,\frac{t}{2}\right) - \\
& - \left[\frac{b_zK_1\omega_1\left(4b_z^2+3b_xb_y-4\Gamma\right)}{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}\right] \sin^2\left(\sqrt{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}\,\frac{t}{2}\right) - \\
& - \left[\frac{+b_xb_yb_z\left(-2\Gamma+\sqrt{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}\right)}{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}\right] \sin^2\left(\sqrt{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}\,\frac{t}{2}\right) - \\
& - \left[\frac{+b_xb_y\left(K_1\omega_1+\sqrt{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}\right)\left(K_1\omega_1-\Gamma\right)+2\Gamma^2}{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}\right] \times \\
& \times \sin^2\left(\sqrt{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}\,\frac{t}{2}\right) ,
\end{aligned}
\tag{5.35}
$$

e a função de inversão de população de energia, por

$$
\begin{aligned}
W_E &= \left[\frac{8\Gamma+4K_1\omega_1 b_x+8b_xb_z+2(K_1\omega_1)^2}{4\left(4\Gamma+(K_1\omega_1)^2\right)}\right]-\left[\frac{8b_xb_z-4K_1\omega_1 b_x}{4\left(4\Gamma+(K_1\omega_1)^2\right)}\right]\times\\
&\times\cos\left(\sqrt{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}t\right)-\left[\frac{4b_y\sqrt{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}}{4\left(4\Gamma+(K_1\omega_1)^2\right)}\right]\sin\left(\sqrt{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}t\right)+\\
&+\left[\frac{2b_z^4+b_z^2\left(2b_xb_y-4\Gamma+2(K_1\omega_1)^2\right)}{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}\right]\sin^2\left(\sqrt{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}\frac{t}{2}\right)+\\
&+\left[\frac{b_zK_1\omega_1\left(4b_z^2+3b_xB_y-4\Gamma\right)}{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}\right]\sin^2\left(\sqrt{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}\frac{t}{2}\right)+\\
&+\left[\frac{+b_xb_yb_z\left(-2\Gamma+\sqrt{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}\right)}{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}\right]\sin^2\left(\sqrt{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}\frac{t}{2}\right)+\\
&+\left[\frac{+b_xb_y\left(K_1\omega_1+\sqrt{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}\right)(K_1\omega_1-\Gamma)+2\Gamma^2}{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}\right]\times\\
&\times\sin^2\left(\sqrt{4\Gamma+(K_1\omega_1)^2}\frac{t}{2}\right).
\end{aligned}
\tag{5.36}
$$

Esses resultados demonstram a clara influência que o background exerce sobre as funções de inversão de população, tanto de energia quanto de spin.

CONCLUSÃO

O percurso investigativo do presente estudo teve como objetivo entender como se comporta o modelo do oscilador de Dirac, inserido em um sistema de dois níveis, sem considerar a quantização do campo (teoria semiclássica). Para tal, buscamos obter as funções de inversão de população em três situações gerais: sem termos que violem a simetria de Lorentz; com a introdução de um termo que quebre a simetria vetorial de Lorentz; com a introdução de um termo que quebre a simetria de Lorentz por meio de um acoplamento axial.

Na primeira situação, sem termos que violem a simetria de Lorentz, fizemos com que um sistema regido pelo Hamiltoniano não-relativístico do oscilador de Dirac interagisse com um campo eletromagnético externo. Descrevemos essa interação em um sistema de dois níveis, $\{|1\rangle, |2\rangle\}$. Entretanto, devido ao termo de acoplamento spin-órbita, $\frac{2\omega}{\hbar}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L}$, presente no Hamiltoniano não-relativístico do oscilador de Dirac, consideramos que cada nível de energia era composto por dois estados de spin: $|+\rangle$ e $|-\rangle$. Dessa forma, foi preciso analisar, além de uma função de inversão de população de energia, uma função de inversão de spin. Como o campo elétrico não atua no estado de spin, não ocorreu inversão de população de spin. Entretanto, foi observado que ocorre a inversão de população de energia. Quando foi considerado o caso especial da ressonância entre o sistema e o campo incidente, $k_{1_\pm}\omega_1 - k_{2_\pm}\omega_2 = \nu$, toda a influência do oscilador de Dirac foi perdida. Dessa forma, as funções de inversão de população tornaram-se compatíveis com os resultados encontrados na literatura científica[25].

Na segunda situação, com a introdução de termos que quebram a simetria vetorial de Lorentz, analisamos dois casos. No primeiro caso, com a introdução do termo $\frac{e\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}}{m}$, foi observado que a função de inversão de população de spin sofre modificações. Embora o termo de quebra introduzido não tenha relação direta com os estados de spin, a presença do termo de interação spin-órbita, no Hamiltoniano não-relativístico do oscilador de Dirac, torna possível tais oscilações. Também foi observado modificações na função de inversão de população de energia. Na literatura científica, uma situação semelhante, porém sem o cenário do oscilador de Dirac, foi estudada[26]. Entretanto, diferentemente do resultado obtido em nosso trabalho, não foram constatadas modificações na função de inversão de população de energia. No segundo caso, com a introdução do termo $\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}}{m}$, surgiram complicações decorrentes da inexistência de soluções analíticas nas equações diferenciais acopladas de primeira ordem obtidas no problema. Para contornar tal obstáculo, consideramos que o campo elétrico era nulo. Dessa forma, foram constatadas modificações na função de inversão de população de energia, mas não na de spin.

Na terceira situação, com a introdução de um termo que quebra a simetria de Lorentz por meio de um acoplamento axial, analisamos os efeitos provenientes do termo $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{b}$, que foi inserido no Hamiltoniano do sistema. Devido à inexistência de soluções analíticas nas equações diferenciais de primeira ordem, obtidas na análise da situação, tivemos que considerar três casos especiais. No primeiro caso, consideramos o background nulo. Com isso, obtivemos a situação na qual não havia termos que violassem a simetria de Lorentz. No segundo caso, consideramos apenas a componente b_z do background. Assim, não encontramos modificações na função de inversão de população de spin, pois o operador σ_z não altera o estado de spin. Ocorreram, porém, oscilações na função de inversão de população de energia. No terceiro caso, consideramos o campo elétrico nulo. As modificações surgidas nas funções de inversão de população, tanto de spin quanto de energia, demonstraram forte influência do background.

Como continuação natural desse trabalho, podemos sugerir uma análise do modelo do oscilador de Dirac em um sistema de dois níveis, levando em consideração a quantização do campo. Em tal trabalho, seria possível a análise de fenômenos como: o colapso e o ressurgimento da função de inversão de população.

APÊNDICE A – Equações diferenciais acopladas de primeira ordem

Este apêndice é dedicado a demonstração da técnica utilizada para resolver as equações diferenciais acopladas de primeira ordem, presentes nesse trabalho. Tomaremos como e-xemplo duas das equações diferenciais acopladas que surgem no terceiro capítulo. Para um aprofundamento no assunto, sugerimos a leitura de livros mais direcionados a equações diferenciais[27–29].

A.1 Como desacoplar equações diferenciais acopladas

Para iniciarmos nossa demonstração, tomaremos como exemplos as equações (3.35) e (3.37). Com o intuito de facilitar a compreensão do leitor, modificamos os índices dessas equações. Com isso, obtemos

$$\dot{a}(t) = \tfrac{i}{2}\Omega b(t)e^{i\rho t}\,; \tag{A.1}$$

$$\dot{b}(t) = \tfrac{i}{2}\Omega a(t)e^{-i\rho t}\,, \tag{A.2}$$

onde $\Omega = P_{12}E_0$ e $\rho = k_a\omega_a - k_b\omega_b - \nu$. Note que na equação (A.1) há uma dependência direta de $b(t)$. Da mesma forma, a equação (A.2) depende diretamente de $a(t)$. Para contornarmos esse problema, primeiro, devemos derivar as equações. Assim,

$$\ddot{a}(t) = \frac{i}{2}\Omega\dot{b}(t)e^{i\rho t} + \frac{i}{2}\Omega b(t)\,(i\rho)\,e^{i\rho t}\,; \tag{A.3}$$

$$\ddot{b}(t) = \frac{i}{2}\Omega\dot{a}(t)e^{-i\rho t} + \frac{i}{2}\Omega a(t)\,(-i\rho)\,e^{-i\rho t}\,. \tag{A.4}$$

Em seguida, devemos substituir as variáveis, pois o nosso objetivo é obter uma equação dependente, apenas, de $a(t)$ e outra dependente, apenas, de $b(t)$. Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} \ddot{a}(t) - i\rho\dot{a}(t) + \frac{\Omega^2}{4}a(t) &= 0\,; & \text{(A.5)} \\ \ddot{b}(t) + i\rho\dot{b}(t) + \frac{\Omega^2}{4}b(t) &= 0\,, & \text{(A.6)} \end{aligned}$$

que são equações diferenciais homogêneas de segunda ordem. Uma das formas de resolvê-las é através da equação característica da equação diferencial.

A.2 A equação característica

Como os coeficientes da equação (A.5) são constantes, podemos transformá-la, através da substituição $a(t) = e^{\lambda t}$, em outra equação. Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} \lambda^2 e^{\lambda t} - i\rho\lambda e^{\lambda t} + \frac{\Omega^2}{4}e^{\lambda t} = 0 \\ \lambda^2 - i\rho\lambda + \frac{\Omega^2}{4} = 0\,, \end{aligned} \tag{A.7}$$

que é a equação característica nesse caso. Suas raízes são

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{i}{2}\left(\rho + \sqrt{\Omega^2 + \rho^2}\right)\,; & \text{(A.8)} \\ \lambda_2 &= \frac{i}{2}\left(\rho - \sqrt{\Omega^2 + \rho^2}\right)\,. & \text{(A.9)} \end{aligned}$$

Como solução geral, temos

$$a(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}\,, \tag{A.10}$$

onde podemos expressar a solução na forma de senos e cossenos, usando $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$. Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} a(t) = {} & c_1\left(\cos\frac{\left(\rho + \sqrt{\Omega^2 + \rho^2}\right)t}{2} + i\sin\frac{\left(\rho + \sqrt{\Omega^2 + \rho^2}\right)t}{2}\right) + \\ & + c_2\left(\cos\frac{\left(\rho - \sqrt{\Omega^2 + \rho^2}\right)t}{2} + i\sin\frac{\left(\rho - \sqrt{\Omega^2 + \rho^2}\right)t}{2}\right)\,. \end{aligned} \tag{A.11}$$

Tomando como condições iniciais[1]: $a(0) = 1$ e $b(0) = 0$, temos que

$$c_1 = 1 - c_2\,. \tag{A.12}$$

Então, $a(t)$ é

$$a(t) = \left(\cos\sqrt{\Omega^2+\rho^2}\frac{t}{2} + (2c_2-1)\sin\sqrt{\Omega^2+\rho^2}\frac{t}{2}\right)e^{i\rho\frac{t}{2}}\,. \tag{A.13}$$

Podemos obter $b(t)$ através da equação (A.1). Assim,

$$\begin{aligned} b(t) &= \left(\frac{i}{\Omega}\sqrt{\Omega^2+\rho^2}\sin\sqrt{\Omega^2+\rho^2}\frac{t}{2} + \frac{\rho}{\Omega}\cos\sqrt{\Omega^2+\rho^2}\frac{t}{2}\right)e^{-i\rho\frac{t}{2}} + \\ &+ (2c_2-1)\left(\frac{-i\sqrt{\Omega^2+\rho^2}}{\Omega}\cos\sqrt{\Omega^2+\rho^2}\frac{t}{2} + \frac{\rho}{\Omega}\sin\sqrt{\Omega^2+\rho^2}\frac{t}{2}\right)e^{-i\rho\frac{t}{2}}\,. \end{aligned} \tag{A.14}$$

Usando a condição inicial: $b(0) = 0$, temos que

$$c_2 = \frac{-i\rho + \sqrt{\Omega^2+\rho^2}}{2\sqrt{\Omega^2+\rho^2}}\,. \tag{A.15}$$

Então, substituindo a equação (A.15) nas equações (A.13) e (A.14), finalmente obtemos

$$a(t) = \left(\cos\sqrt{\Omega^2+\rho^2}\frac{t}{2} - \frac{i\rho}{\sqrt{\Omega^2+\rho^2}}\sin\sqrt{\Omega^2+\rho^2}\frac{t}{2}\right)e^{i\rho t/2}\,; \tag{A.16}$$

$$b(t) = \frac{i\Omega}{\sqrt{\Omega^2+\rho^2}}\sin\sqrt{\Omega^2+\rho^2}\frac{t}{2}e^{-i\rho t/2}\,. \tag{A.17}$$

A técnica da equação característica é apenas uma forma de resolver esse problema. Existem outros métodos, como o fator de integração ou o Wronskiano.

[1]No trabalho, utilizamos outras condições iniciais.

APÊNDICE B – Aproximação de onda girante

A aproximação de onda girante consiste em negligenciar os termos antirressonantes, $e^{\pm i\left(k_{1\pm}\omega_1 - k_{2\pm}\omega_2 + \nu\right)t}$, preservando, assim, os termos ressonantes, $e^{\pm i\left(k_{1\pm}\omega_1 - k_{2\pm}\omega_2 - \nu\right)t}$.

Próximo à condição de ressonância, os termos antirressonantes oscilam mais rápido do que os termos ressonantes. Assim, devido aos fenômenos que ocorrem aos sistemas próximos à condição de ressonância, os termos ressonantes têm uma contribuição acumulativa no tempo.

Os termos antirressonantes, como o próprio nome diz, oscilam fora da frequência de ressonância. Dessa forma, tais termos não contribuem de forma significativa na troca de energia entre o sistema e o campo. Portanto, podemos desprezá-los.

Considerando o caso no qual um átomo de hidrogênio é posto em interação com um campo eletromagnético externo e tratando o problema como em um sistema de dois níveis, temos que

$$\psi_a(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{64\pi a_0^3}}\frac{1}{a_0}(x - iy)\exp(-r/2a_0)\ , \tag{B.1}$$

$$\psi_b(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}\exp(-r/a_0)\ , \tag{B.2}$$

onde a_0 é o raio de Bohr.

Usando a aproximação de dipolo e pondo o átomo na origem tal que $\boldsymbol{R} = 0$, temos o Hamiltoniano de interação

$$H_{int} = -e\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{E}(t)\ , \tag{B.3}$$

onde

$$\boldsymbol{r}(t) = e^{i\mathcal{H}_0 t}\boldsymbol{r}e^{-i\mathcal{H}_0 t}\ , \tag{B.4}$$

e portanto

$$H_{ab}(t) = -e\boldsymbol{r}_{ab}(t)\cdot\boldsymbol{E}(t) = -e\boldsymbol{r}_{ab}\cdot\boldsymbol{E}(t)e^{i\omega t}\ , \tag{B.5}$$

$$H_{ba}(t) = -e\boldsymbol{r}_{ba}(t)\cdot\boldsymbol{E}(t) = -e\boldsymbol{r}_{ba}\cdot\boldsymbol{E}(t)e^{-i\omega t}\ , \tag{B.6}$$

onde ω é a frequência atômica.

Para simplificar, vamos assumir que o campo elétrico esteja linearmente polarizado na direção x, assim,

$$\boldsymbol{E}(t) = \hat{x}E_0\cos\nu t\ , \tag{B.7}$$

Substituindo as equações, obtemos

$$\begin{aligned} H_{ab}(t) &= -ex_{ab}E_0\cos\nu t e^{i\omega t} \\ H_{ab}(t) &= -ex_{ab}\frac{E_0}{2}\left[e^{i(\nu+\omega)t}+e^{-i(\nu-\omega)t}\right] \\ H_{ab}(t) &\simeq -ex_{ab}\frac{E_0}{2}e^{-i(\nu-\omega)t}\ , \end{aligned} \tag{B.8}$$

e de maneira similar

$$\begin{aligned} H_{ba}(t) &= -ex_{ba}E_0\cos\nu t e^{-i\omega t} \\ H_{ba}(t) &= -ex_{ba}\frac{E_0}{2}\left[e^{i(\nu-\omega)t}+e^{-i(\nu+\omega)t}\right] \\ H_{ba}(t) &\simeq -ex_{ba}\frac{E_0}{2}e^{i(\nu-\omega)t}\ . \end{aligned} \tag{B.9}$$

Dessa forma, utilizamos a aproximação de onda girante para negligenciar os termos antirressonantes $\exp[\pm i(\omega+\nu)t]$.

Considerando, agora, o caso da polarização circular esquerda (LCP), que conecta $\psi_a(\boldsymbol{r})$ a $\psi_b(\boldsymbol{r})$, como os dados por (B.1) e (B.2), o campo elétrico é dado por

$$\boldsymbol{E}(t) = \hat{x}E_0\cos\nu t - \hat{y}E_0\sin\nu t\ . \tag{B.10}$$

Agora, as equações (B.8) e (B.9) são escritas na forma

$$H_{ab}(t) = -eE_0\left(x_{ab}\cos\nu t + y_{ab}\sin\nu t\right)e^{i\omega t} \tag{B.11}$$

$$H_{ba}(t) = -eE_0\left(x_{ba}\cos\nu t + y_{ba}\sin\nu t\right)e^{-i\omega t} \tag{B.12}$$

onde, em vista das equações (B.1) e (B.2), podemos escrever

$$ex_{ab} = \int \psi_a^*(\boldsymbol{r})x\psi_b(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} = \wp\ , \tag{B.13}$$

$$ey_{ab} = \int \psi_a^*(\boldsymbol{r})y\psi_b(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} = -i\wp\ , \tag{B.14}$$

e, similarmente, $ex_{ba} = \wp$ e $ey_{ba} = i\wp$. Portanto, as equações (B.11) e (B.12) tornam-se

$$H_{ab}(t) = -\wp E_0 \left(\cos \nu t - i \sin \nu t\right) e^{i\omega t} = -\wp E_0 e^{-i(\nu-\omega)t} \tag{B.15}$$

$$H_{ba}(t) = -\wp E_0 \left(\cos \nu t + i \sin \nu t\right) e^{-i\omega t} = -\wp E_0 e^{i(\nu-\omega)t}\,, \tag{B.16}$$

e os termos antirressonantes nunca aparecem.

Referências Bibliográficas

1 MOSHINSKY, M.; SZCZEPANIAC, A. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 22, p. L817, 1989.

2 LANGE, O. L. D. *J. Math. Phys.*, v. 32, p. 1296–1300, 1991.

3 Martínez y Romero, R. P.; Salas-Brito, A. L. *J. Math. Phys.*, v. 33, p. 1831–1836, 1991.

4 Martínez y Romero, R. P.; MORENO, M.; ZENTELLA, A. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 5, p. 949–954, 1990.

5 PACHECO, M. H.; LANDIM, R. R.; ALMEIDA, C. A. S. *Phys. Lett. A*, v. 311, p. 93–96, 2003.

6 MORENO, M.; ZENTELLA, A. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 22, p. L821, 1989.

7 ROZMEJ, P.; ARVIEU, R. *J. Phys. A*, v. 32, p. 5367, 1999.

8 KOSTELECKý, V. A.; SAMUEL, S. *Phys. Rev. D*, v. 39, p. 683, 1989.

9 KOSTELECKý, V. A.; POTTING, R. *Phys. Rev. D*, v. 51, p. 3923, 1995.

10 GAMBINI, R.; PULLIN, J.

11 ALFARO, J.; Morales-Técotl, H. A.; URRUTIA, L. F. *Phys. Rev. Lett.*, v. 84, p. 2318, 2000.

12 BELICH, H. et al. *Revista Brasileira do Ensino de Física*, v. 29, p. 57, 2007.

13 SCHWEBER, S. S. *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory.* [S.l.]: Dover, 2005.

14 GROSS, F. *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory.* [S.l.]: John Wiley and son, 1993.

15 THALLER, B. *The Dirac Equation.* [S.l.]: Springer, 1992.

16 DIRAC, P. A. M. *Proc. Roy. Soc.*, A117, p. 610, 1928.

17 ANDERSON, C. *Phys. Rev.*, v. 43, p. 491, 1933.

18 Martínez y Romero, R. P.; Núñez-Yépez, H. N.; Salas-Brito, A. L. *Jour. Phys.*, v. 16, p. 135–141, 1995.

19 SAKURAI, J. J. *Modern Quantum Mechanics.* [S.l.]: Addison-Wesley, 1994.

20 GREINER, W. *Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations.* [S.l.]: Springer, 1997.

21 ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. [S.l.]: Dove, 1965.

22 KANE, G. *Scientific America Brazil*, v. 39, p. 100, 2005.

23 COLLADAY, D.; KOSTELECKý, V. A. *Phys. Rev. D*, v. 58, p. 116002, 1998.

24 NUSSENZVEIG, H. M. *Introduction to Quantum Optics*. [S.l.]: Gordon and Breach, 1973.

25 SCULLY, M. O.; ZUBAIRY, M. S. *Quantum Optics*. [S.l.]: Cambridge, 1999.

26 Ferreira Jr, M. M.; GOMES, A. R.; LOPES, R. C. *Phys. Rev. D*, v. 76, p. 105031, 2007.

27 BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. 7ª. ed. [S.l.]: John Wiley and son, 2001.

28 ROSS, S. *Differential Equations*. [S.l.]: John Wiley and son, 1984.

29 MACHADO, K. D. *Equações Diferenciais Aplicadas à Física*. [S.l.]: UEPG, 2004.