UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

PAULO RAFAEL DE LIMA E SOUZA

PRODUTO INTERNO E ESPAÇOS VETORIAIS

FORTALEZA
2015

PAULO RAFAEL DE LIMA E SOUZA

PRODUTO INTERNO E ESPAÇOS VETORIAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo

FORTALEZA

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

S717p Souza, Paulo Rafael de Lima e
Produto interno e ortogonalidade / Paulo Rafael de Lima e Souza. – 2015.
45 f. : il., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2015.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Álgebra linear. 2. Produto interno. 3. Espaços vetoriais. I. Título.

CDD 512.5

PAULO RAFAEL DE LIMA E SOUZA

PRODUTO INTERNO E ORTOGONALIDADE

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 13 / 08 / 2013.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Tiago Caúla Ribeiro

Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Dedico este trabalho à minha mãe Carmen Lúcia de Lima e Souza

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à minha mãe Carmen Lúcia de Lima e Souza pelo amor, apoio e por ser o homem que sou.

Agradeço aos meus irmãos Pedro Gabriel de Lima e Souza e Sarah Rebeca de Lima e Souza por estarem sempre ao meu lado.

Agradeço ao meu professor e orientador Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo, pelo apoio e pela orientação durante o desenvolvimento do trabalho.

Enfim, agradeço a todos que de maneira direta ou indireta ajudaram a concretizar esse sonho.

"Fui atrás do que quis, sabia só assim, podia ser feliz, quem não quer ser feliz, me diz?"

Charlie Brown Jr.

RESUMO

Neste trabalho, consideramos o produto interno de vetores de um espaço vetorial com especiais aplicações no Ensino Médio através de conceitos como Matrizes, Sistemas Lineares e Operações com Vetores no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Verificamos, também, características de operadores lineares definidos por projeções ortogonais. Também estabelecemos relações entre vetores e matrizes formadas por bases do $\mathbb{R}^2$ com o intuito de melhorar e fortalecer os conhecimentos dos professores do ensino básico, proporcionando-lhes mais segurança e clareza ao ministrar suas aulas, como também procuramos incentivar os professores a se atualizarem e fazer com que os seus alunos se motivem para o ensino superior, em áreas que a Matemática, em particular, a Álgebra Linear, está presente. Conhecendo a definição de produtos internos e espaços vetoriais, acreditamos que o professor poderá compreender melhor as técnicas e operações algébricas dos conteúdos por ele ensinados. Acreditamos que o não conhecimento desta estrutura de álgebra, faz com que o professor exponha de forma limitada e sem motivação futura, em termos de outros estudos por parte dos seus alunos no ensino médio, e é claro, que está visão ou esta abordagem não é interessante; é preciso melhorar esta visão em sala de aula, é preciso que o professor tenha uma visão panorâmica daquilo que ensina. Assim, pretendemos com este trabalho apresentar os conceitos de produto interno e de espaços vetoriais expondo-os de forma didática, mostrando que de algum modo está associado aos conceitos estudados no ensino básico através de exercícios aplicados.

Palavras-chave: Álgebra Linear. Produto Interno. Espaços Vetoriais.

ABSTRACT

In this paper, we consider the vector inner product of a vector space with special applications in high school through concepts such as matrices, Linear Systems and Vector Operations in $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$. We also verified linear operators characteristics defined by orthogonal projections. We have also established relationships between vectors and matrices formed by $\mathbb{R}^2$ bases in order to improve and strengthen the knowledge of primary school teachers, providing them with more certainty and clarity to teach their classes, but also seek to encourage teachers to update and make with their students be motivated for higher education in areas that mathematics, in particular, Linear Algebra is present. Knowing the definition of domestic products and vector spaces, we believe that the teacher can better understand the techniques and algebraic operations the content taught by him. We believe that not aware of this algebra structure, makes the teacher expose a limited way and without further motivation, in terms of other studies by students in high school, and of course, that this view or this approach is not interesting; is necessary to improve the vision in the classroom, it is necessary that the teacher has a panoramic view of what he teaches. Thus, we intend to work with this present domestic product concepts and vector spaces exposing them in a didactic way, showing that somehow is associated with the concepts studied in basic education through applied exercises.
Keywords: Linear Algebra. Domestic product. Vector Spaces. Linear Operators.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Os objetos de que trata a Álgebra Linear são vetores e matrizes, que aparecem, por exemplo, quando procuramos as soluções para um sistema de equações lineares. Assim, são generalizações dos conceitos de número. Na literatura, segundo Carvalho (2013), deveria existir um trabalho que reunisse os conteúdos do ensino básico e introduzisse sobre eles a ideia de álgebra linear, em específico, o conhecimento de espaços vetoriais, tema inicial de quem estuda álgebra linear. Nas escolas da educação básica, os alunos se deparam com os conteúdos diversos como Funções, Matrizes e Geometria Analítica, por exemplo. Estes objetos são munidos de estruturas algébricas que nos livros didáticos não é se quer mencionados que estas estruturas, para aqueles alunos que seguirão estudos acadêmicos em áreas de exata, estarão presentes na disciplina de álgebra linear. Além disso, o professor deve ter um conhecimento daquilo que se ensina de forma panorâmica e neste sentido este material deve fornecer, também, a este professor, a condição de saber mais do que aquilo que se está.

Com objetivo de facilitar a leitura deste material, daremos uma visão geral do que será feito em cada capítulo. No Capítulo 1, se baseando em Pulino (2012) e dos Santos (1998), estudaremos os produtos internos com o objetivo de estender os conceitos para os espaços vetoriais sobre um corpo *IF*. Assim, faremos a generalização através do estudo de certos tipos de aplicações que são definidas sobre pares de elementos de um espaço vetorial e tomando valores no corpo. No capítulo 2, sob à luz de Leite (2007), Lima (2000) e Boldrini et. al (1984), trataremos da parte da Álgebra Linear que trata das propriedades comuns a sistemas algébricos constituídos por um conjunto mais uma noção razoável de uma combinação linear de elementos do conjunto. Assim, estudaremos os espaços vetoriais que é a abstração útil deste tipo de sistema algébrico. Desta forma, este presente trabalho apresenta um texto gradativo, concatenado, escrito em linguagem objetiva com algumas conexões e aplicações a outras do conhecimento, respeitando, porém, o rigor necessário para servir de referência aos educadores e estudantes que se preparam para exercer o magistério.

Em relação às aplicações da teoria, incluímos exercícios resolvidos para serem aplicados no Ensino Superior e no Ensino Médio no final de cada capítulo com o intuito de facilitar a aprendizagem e mostrar como ensinar estes conteúdos nestes níveis de ensino.

1. PRODUTO INTERNO

Na geometria Euclidiana as propriedades que nos possibilitam expressar o comprimento de vetor e o ângulo entre dois vetores são denominadas de propriedades métricas. No estudo do $\mathbb{R}^n$, em geometria analítica, definimos comprimento de vetores e ângulo entre vetores através do produto escalar

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \text{para} \qquad x,\ y \in I\!R^n .$$

Nosso objetivo é de estender esses conceitos para os espaços vetoriais sobre um corpo *IF*. O conceito de produto interno em um espaço vetorial real (complexo) é uma generalização do conceito de produto escalar definido em $I\!R^n$. Faremos essa generalização através do estudo de certos tipos de aplicações que são definidas sobre pares de elementos de um espaço vetorial e tomando valores no corpo.

Denotamos o produto interno entre dois elementos u e v de um espaço vetorial da seguinte forma: $\langle u, v \rangle$. Neste capítulo apresentamos um estudamos das propriedades geométricas que são atribuídas a um espaço vetorial por meio de algum produto interno definido sobre ele. Mais especificamente, estabelecemos as propriedades básicas, e suas aplicações, dos conceitos de comprimento, ângulo e ortogonalidade determinadas ao espaço vetorial pelo produto interno.

1.1 Definição de Produto Interno

Definição 1.1.1 Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$. Uma aplicação

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow I\!R$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

1. **Simetria**: $\langle u , v \rangle = \langle v , u \rangle \quad ; \quad \forall\ u,\ v \in V$

2. **Positividade**: $\langle u , u \rangle \geq 0 \quad ; \quad \forall\ u \in V, \quad com \quad \langle u , u \rangle = 0 \iff u = 0_V$

3. **Distributividade**: $\langle u + w , v \rangle = \langle u , v \rangle + \langle w , v \rangle \quad ; \quad \forall\ u,\ v,\ w \in V$

4. **Homogeneidade**: $\langle \lambda u , v \rangle = \lambda \langle u , v \rangle \quad ; \quad \forall \; u, v \in V \;\; e \; \lambda \in I\!R$

define um produto interno no espaço vetorial real V .

Utilizando as propriedades de simetria, distributividade e homogeneidade têm–se:

- $\langle u , v + w \rangle = \langle u , v \rangle + \langle u , w \rangle$ para todos $u, v, w \in V$.
- $\langle u , \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \langle u , v \rangle$ para todos $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

Assim, dizemos que o produto interno, em um espaço vetorial real, é uma aplicação bilinear, isto é, é uma aplicação linear nas duas variáveis.

Definição 1.1.2. Seja *V* um espaço vetorial sobre o corpo ℂ. Uma aplicação

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

1. **Simetria Hermitiana:** $\langle u , v \rangle = \overline{\langle v , u \rangle} \quad ; \quad \forall \; u, v \in V$
2. **Positividade:** $\langle u , u \rangle \geq 0 \quad ; \quad \forall \; u \in V, \quad com \quad \langle u , u \rangle = 0 \iff u = 0_V$
3. **Distributividade:** $\langle u + w , v \rangle = \langle u , v \rangle + \langle w , v \rangle \quad ; \quad \forall \; u, v, w \in V$
4. **Homogeneidade:** $\langle \lambda u , v \rangle = \lambda \langle u , v \rangle \quad ; \quad \forall \; u, v \in V \;\; e \; \lambda \in \mathbb{C}$

Define um produto interno no espaço vetorial complexo V.

Podemos verificar que com as propriedades de simetria Hermitiana, distributividade e homogeneidade temo que:

- $\langle u , v + w \rangle = \langle u , v \rangle + \langle u , w \rangle$ para todos $u, v, w \in V$.
- $\langle u , \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \langle u , v \rangle$ para todos $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

É importante observar que em um espaço vetorial complexo o produto interno possui a propriedade de simetria Hermitiana, que é necessária para garantir a propriedade de positividade. De fato, considere um elemento u ∈ V não–nulo, como V é um espaço vetorial complexo, tem–se que o elemento iu ∈ V. Logo, obtemos

$$\langle iu\,,\,iu\rangle \;=\; i\,i\,\langle u\,,\,u\rangle \;=\; -1\,\langle u\,,\,u\rangle \;<\; 0$$

que é uma contradição, proveniente da não utilização da simetria Hermitiana.

Considerando agora a propriedade de simetria Hermitiana, tem–se que

$$\langle iu,\,iu\rangle \;=\; i\,\bar{i}\,\langle u,\,u\rangle \;=\; \langle u\,,\,u\rangle \;>\; 0,$$

o que mostra a necessidade da propriedade de simetria Hermitiana. $(V, \langle\cdot\,,\,\cdot\rangle)$ $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$

Definição 1.1.3. Um espaço vetorial $(V, \langle\cdot\,,\ \cdot\rangle)$ com produto interno, que denotamos por é um espaço vetorial V sobre o corpo F com produto interno $\langle\cdot\ ,\ \cdot\rangle$. Um espaço vetorial real com produto interno é denominado espaço Euclidiano. Um espaço vetorial complexo com produto interno é denominado espaço unitário.

Exemplo: Seja $\beta = \{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^n$. Todo elemento $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é escrito de modo único da seguinte forma:

$$x \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i\,e_i\,.$$

Em muitas situações, por simplicidade de notação, associamos o elemento $x \in \mathbb{R}^n$ a matriz coluna $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, tendo em vista que os espaços vetoriais são isomorfos,

$$X \;=\; \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Desse modo, o produto interno usual do $\mathbb{R}^n$ que vamos denotar por $\langle\cdot\,,\ \cdot\rangle$, denominado produto interno Euclidiano, pode ser escrito como:

$$\langle x\,,\,y\rangle \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i \;=\; Y^t X \;=\; Y^t I_n X \qquad \textit{para todos} \qquad x,\ y \;\in\; \mathbb{R}^n,$$

onde $I_n \in M_n(\mathbb{R})$ é a matriz identidade de ordem n.

De modo análogo, no espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^n$ o produto interno usual, denominado produto interno Hermitiano, é escrito da seguinte forma:

$$\langle x\,,\,y\rangle \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i\,\overline{y}_i \;=\; Y^* X \;=\; Y^* I_n X \qquad \textit{para todos} \qquad x,\ y \;\in\; \mathbb{C}^n.$$

onde Y^* é a transposta Hermitiana da matriz coluna Y.

Exemplo: Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ munido com o produto interno usual e com a $\langle \cdot , \cdot \rangle$ base ordenada $\Gamma = \{v_1, v_2, v_3\}$ dada por:

$$v_1 = (1, 0, -1) \quad , \quad v_2 = (1, 2, 1) \quad e \quad v_3 = (0, -3, 2) .$$

Podemos verificar facilmente que a matriz A = [a_{ij}] dada por:

$$a_{ij} = \langle v_j , v_i \rangle = \langle v_i , v_j \rangle = a_{ji} \quad \Longrightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & -4 \\ -2 & -4 & 13 \end{bmatrix}$$

é a matriz do produto interno usual com relação à base ordenada Γ.

1.2 Desigualdade de Cauchy–Schwarz

Teorema 1.2.1. Seja V um espaço vetorial real munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Então, para todo $u, v \in V$ temos que

$$\langle u , v \rangle^2 \leq \langle u , u \rangle \langle v , v \rangle .$$

Além disso, a igualdade é válida se, e somente se, os elementos *u* e *v* são linearmente dependentes.

Demonstração – No caso em que os elementos *u* e *v* são linearmente dependentes, a igualdade é obtida trivialmente. Vamos considerar *u* e *v* linearmente independentes, isto é, $u + \lambda v \neq 0v$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Desse modo, temos que

$$\begin{aligned} \langle u + \lambda v , u + \lambda v \rangle &= \langle u , u \rangle + \langle u , \lambda v \rangle + \langle \lambda v , u \rangle + \lambda^2 \langle v , v \rangle \\ &= \langle u , u \rangle + 2\lambda \langle u , v \rangle + \lambda^2 \langle v , v \rangle > 0 \end{aligned}$$

é uma inequação de segundo grau na variável λ. Note que a equação do segundo grau

$$\langle u , u \rangle + 2\lambda \langle u , v \rangle + \lambda^2 \langle v , v \rangle = 0$$

não possui raízes reais. Assim, devemos ter

$$4 \langle u , v \rangle^2 - 4 \langle u , u \rangle \langle v , v \rangle < 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle u , v \rangle^2 < \langle u , u \rangle \langle v , v \rangle$$

o que completa da demonstração.

1.3 Definição de Norma. Norma Euclidiana

Definição 1.3.1. (Norma) Seja *V* um espaço vetorial sobre o corpo *IF*. Uma norma, ou comprimento, em V é uma aplicação ||·|| que para cada elemento u ∈ V associa um número real $\|u\|$, que possui as seguintes propriedades:

1. **Positividade:** $\| u \| > 0 \quad para \quad u \neq 0_V \quad , \quad com \quad \| u \| = 0 \iff u = 0_V .$

2. **Homogeneidade**: $\| \lambda u \| = |\lambda| \, \| u \| \quad para\ todo \quad u \in V \, , \, \lambda \in I\!F .$

3. **Desigualdade Triangular:** $\| u + v \| \leq \| u \| + \| v \| \quad para\ todos \quad u \, , \, v \in V .$

Um espaço vetorial *V* munido de uma norma ||·|| é denominado espaço normado, que denotamos por (V, ||·||).

Exemplo: No espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$ temos as seguintes normas

(a) Norma do Máximo: $\| x \|_\infty = \max \{ \, |x_i| \quad ; \quad 1 \leq i \leq n \, \}$

(b) Norma–1 ou Norma do Táxi: $\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

Podemos verificar facilmente que as aplicações $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_1$ satisfazem as propriedades de norma utilizando as propriedades de módulo de um número real.

Teorema 1.3.1. Seja V um espaço vetorial sobre o corpo F munido do produto interno. Então, a aplicação *q(·)*: *V* →ℝ definida da seguinte forma:

$$q(u) = \sqrt{\langle u \, , \, u \rangle} \qquad ; \qquad \forall \, u \in V \, ,$$

satisfaz as propriedades de norma:

1. Positividade: $q(u) > 0 \quad para \quad u \neq 0_V \quad , \quad com \quad q(u) = 0 \iff u = 0_V$

2. Homogeneidade: $q(\lambda u) = |\lambda| \, q(u) \quad para\ todo \quad u \in V \, , \, \lambda \in I\!F$

3. Desigualdade Triangular: $q(u + v) \leq q(u) + q(v) \quad para\ todos \quad u \, , \, v \in V$

Demonstração - Vamos provar que a aplicação q(·) define uma norma em V com relação ao produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$, que denotamos por $\|\cdot\|_2$, denominada $\|\cdot\|$. As propriedades (a) e (b) seguem das propriedades de produto interno.

Para mostrar que a aplicação $\|\cdot\|_2$ satisfaz a propriedade da desigualdade triangular, utilizamos a desigualdade de Cauchy–Schwarz escrita da forma:

$$|\langle u , v \rangle| \leq \|u\|_2 \|v\|_2 \quad \text{para todos} \quad u , v \in V .$$

Temos que

$$\|u+v\|_2^2 = \langle u+v , u+v \rangle = \langle u , u \rangle + \langle u , v \rangle + \langle v , u \rangle + \langle v , v \rangle$$

Inicialmente considerando um espaço vetorial real, tem–se que

$$\|u+v\|_2^2 = \langle u , u \rangle + 2\langle u , v \rangle + \langle v , v \rangle \leq \langle u , u \rangle + 2\,|\langle u , v \rangle| + \langle v , v \rangle$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy–Schwarz, obtemos

$$\|u+v\|_2^2 \leq \langle u , u \rangle + 2\|u\|_2\|v\|_2 + \langle v , v \rangle = \|u\|_2^2 + 2\|u\|_2\|v\|_2 + \|v\|_2^2$$

$$\|u+v\|_2^2 \leq (\|u\|_2 + \|v\|_2)^2 \quad \Longrightarrow \quad \|u+v\|_2 \leq \|u\|_2 + \|v\|_2$$

o que completa a prova para o caso de um espaço vetorial real.

Finalmente, para um espaço vetorial complexo, temos que

$$\begin{aligned} \|u+v\|_2^2 &= \langle u , u \rangle + \langle u , v \rangle + \overline{\langle u , v \rangle} + \langle v , v \rangle \\ &= \langle u , u \rangle + 2\,Re(\langle u , v \rangle) + \langle v , v \rangle \\ &\leq \langle u , u \rangle + 2\,|Re(\langle u , v \rangle)| + \langle v , v \rangle \\ &\leq \langle u , u \rangle + 2\,|\langle u , v \rangle| + \langle v , v \rangle \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy–Schwarz, obtemos

$$\|u+v\|_2^2 \leq \langle u , u \rangle + 2\|u\|_2\|v\|_2 + \langle v , v \rangle = \|u\|_2^2 + 2\|u\|_2\|v\|_2 + \|v\|_2^2$$

Portanto, temos que

$$\|u+v\|_2^2 \leq (\|u\|_2 + \|v\|_2)^2 \quad \Longrightarrow \quad \|u+v\|_2 \leq \|u\|_2 + \|v\|_2$$

o que completa a demonstração.

Definição 1.3.2. Seja V um espaço vetorial sobre o corpo F. Uma aplicação

$$\begin{aligned} d(\cdot,\cdot): \ V \times V &\longrightarrow \ \mathbb{R} \\ (u,v) &\longrightarrow d(u,v) \end{aligned}$$

com as propriedades:

(a) ***Positividade:*** $d(u,v) \geq 0$, *com* $d(u,v) = 0 \iff u = v$

(b) ***Simetria:*** $d(u,v) = d(v,u) \quad ; \quad \forall \ u, v \in V$

(c) ***Desigualdade Triangular:*** $d(u,v) \leq d(u,w) + d(v,w) \quad ; \quad \forall \ u, v, w \in V$

define uma métrica, ou distância, no espaço vetorial *V*.

Um espaço vetorial V munido de uma métrica d(·, ·) é denominado espaço métrico, que denotamos por (V, d(·, ·)).

1.4 Definição de Ângulo. Ortogonalidade

Seja V um espaço vetorial real munido do produto interno ⟨· ,·⟩. Observe que utilizando a desigualdade de Cauchy–Schwarz mostramos que para quaisquer elementos não–nulos *u, v* ∈ *V* o quociente

$$\frac{\langle u, v \rangle}{\| u \|_2 \, \| v \|_2}$$

está no intervalo [−1, 1]. Desse modo, existe um número real $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que

$$\frac{\langle u, v \rangle}{\| u \|_2 \, \| v \|_2} = \cos(\theta) \ .$$

Além disso, existe um único valor $\theta \in [0, \pi]$ satisfazendo a igualdade. Assim, podemos ter a noção de ângulo entre dois elementos de um espaço vetorial munido com um produto interno, que será compatível com a definição de ortogonalidade que apresentamos a seguir.

Definição 1.4.1. (Ângulo) Seja V um espaço vetorial real munido do produto interno ⟨· ,·⟩. O Ângulo entre dois elementos não–nulos u, v ∈ V é definido como sendo o valor θ ∈ [0, π] que satisfaz a equação

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{\| u \|_2 \, \| v \|_2} .$$

Definição 1.4.2. (Ortogonalidade) Seja V um espaço vetorial sobre o corpo *IF* com o produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Dizemos que os elementos $u, v \in V$ são ortogonais se, e somente se, $\langle u, v \rangle = 0$, e denotamos por $u \perp v$.

Podemos observar facilmente que

$$\langle u, v \rangle = 0 \iff \cos(\theta) = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{para} \quad 0 \leq \theta \leq \pi ,$$

mostrando a compatibilidade entre os conceitos de ângulo e ortogonalidade.

Definição 1.4.3. Considere V um espaço vetorial sobre o corpo *IF* munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Seja $S = \{v_1, \cdots, v_n\}$ um conjunto de elementos de *V* com $\langle vi, vj \rangle = 0$ para $i \neq j$. Então, dizemos que S é um conjunto ortogonal em V com relação ao produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Além disso, se $\|v_j\|_2 = 1$ para $j = 1 , \cdots , n$, dizemos que S é um conjunto ortonormal em V.

1.5 Base Ortogonal. Coeficientes de Fourier

Definição 1.5.1. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo *IF* com o produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Dizemos que uma base $\beta = \{q_1, \cdots, q_n\}$ de *V* é uma base ortogonal se β é um conjunto ortogonal em *V*. No caso em que o conjunto β é ortonormal, dizemos que β é uma base ortonormal de *V*.

Teorema 1.5.1. Sejam *V* um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo *IF* com o produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ e $\beta = \{q_1, \cdots , q_n\}$ uma base ortogonal de *V*. Então, todo elemento $u \in V$ é escrito de modo único da seguinte forma:

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, q_i \qquad com \qquad \alpha_i = \frac{\langle u, q_i \rangle}{\langle q_i, q_i \rangle} .$$

Neste caso, as coordenadas de u com relação à base ortogonal β são denominadas coeficientes de Fourier de *u* com relação à base ortogonal β.

Demonstração – Dado um elemento $u \in V$, como $\beta = \{q_1, \cdots, q_n\}$ é uma base para *V*, existem escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tais que o elemento u é escrito de modo único como:

$$u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, q_j .$$

Fazendo o produto interno entre o elemento u e um elemento q_i da base ortogonal β, obtemos

$$\langle u , q_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle q_j , q_i \rangle = \alpha_i \langle q_i , q_i \rangle \quad \text{para} \quad i = 1, \cdots , n .$$

Assim, temos que as coordenadas, coeficientes de Fourier, do elemento u em relação à base ortogonal β são dadas por:

$$\alpha_i = \frac{\langle u , q_i \rangle}{\langle q_i , q_i \rangle} \quad \text{para} \quad i = 1, \cdots , n .$$

No caso em que β é uma base ortonormal, temos que os coeficientes de Fourier do elemento u são dados por:

$$\alpha_i = \langle u , q_i \rangle \quad \text{para} \quad i = 1, \cdots , n ,$$

o que completa a demonstração.

Definição 1.5.2. Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo *IF* munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ e $\beta = \{q_1, \dots, q_j\}$ um conjunto ortogonal em V com elementos $q_j \neq 0v$ para $j = 1, \dots, n$. Os coeficientes de Fourier do elemento $u \in V$ relativos ao conjunto ortogonal β são definidos como:

$$\alpha_i = \frac{\langle u , q_i \rangle}{\langle q_i , q_i \rangle} \quad \textit{para} \quad i = 1, \cdots , n ,$$

em homenagem ao matemático francês Jean Baptiste Fourier.

(a) O elemento q_k é ortogonal a todo elemento do subespaço $[q_1 , \cdots , q_{k-1}]$.

(b) O subespaço $S_k = [v_1 , \cdots , v_k]$ é igual ao subespaço $W_k = [q_1 , \cdots , q_k]$.

(c) A seqüência $q_1 , q_2 , \cdots , q_n , \cdots$ é única, a menos de uma constante multiplicativa, isto é, se existir uma outra seqüência $q'_1 , q'_2 , \cdots , q'_n , \cdots$, de elementos de V satisfazendo as propriedades (a) e (b), então existem escalares $c_k \in \mathbb{F}$ tais que $q'_k = c_k q_k$ para $k = 1, 2, \cdots , n, \cdots$.

1.6 Complemento Ortogonal

Definição 1.6.1. Seja *V* um espaço vetorial munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e *S* um conjunto não vazio de elementos de *V*. O conjunto $S^{\perp}$ definido por:

$$S^{\perp} = \{ u \in V \ / \ \langle u , v \rangle = 0 \quad para\ todo \quad v \in S \} ,$$

é denominado “*S* perpendicular”. No caso em que S é um subespaço vetorial de *V*, o conjunto $S^{\perp}$ é denominado complemento ortogonal de *S* em *V*.

Teorema 1.6.1. O conjunto $S^{\perp}$ é um subespaço de *V*, mesmo que *S* não o seja. Além disso, tem–se que $S \cap S^{\perp} = \{0_V\}$ no caso em que *S* é um subespaço de *V*.

Demonstração – Temos que $S^{\perp} \neq \emptyset$, pois $\langle 0_v, v\rangle = 0$ para todo $v \in S$. Desse modo, temos que $O_V \in S^{\perp}$. Sejam $w_1, w_2 \in S^{\perp}$ e $v \in S$. Então, tem–se que

$$\langle w_1 , v \rangle = 0 \qquad e \qquad \langle w_2 , v \rangle = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \langle w_1 + w_2 , v \rangle = 0 .$$

Logo, $w_1 + w_2 \in S^{\perp}$. De modo análogo, temos que $\lambda_{w1} \in S^{\perp}$ para todo $\lambda \in IF$.

Considerando agora *S* um subespaço de *V*, vamos mostrar que $S \cap S^{\perp} = \{0_V\}$. Tomando $w \in S^{\perp} \cap S$, isto é, $w \in S^{\perp}$ *e* $w \in S$. Como $w \in S^{\perp}$, temos que $\langle w, v\rangle = 0$ para todo $v \in S$. Em particular para $v = w$, pois $w \in S$, obtemos $\langle w, w\rangle = 0$. Logo, $w = 0_V$, o que completa a demonstração.

Teorema 1.6.2. Sejam *V* um espaço vetorial de dimensão finita munido do produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, *U* e *W* subespaços vetoriais de *V*. Então, $(U + W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$.

Demonstração – Inicialmente, tomamos $v \in (U + W)^{\perp}$, isto é, v é ortogonal a todo elemento $u + w$ pertencente ao subespaço $U + W$. Como $U \subset U + W$ e $W \subset U + W$, temos que *v* é ortogonal a todo elemento de *U* e a todo elemento de *W*, isto é, $v \in U^{\perp}$ e $v \in W^{\perp}$. Logo, $v \in U^{\perp} \cap W^{\perp}$. Assim, mostramos que $(U + W)^{\perp} \subset U^{\perp} \cap W^{\perp}$.

Finalmente, seja $v \in U^{\perp} \cap W^{\perp}$, isto é, *v* é ortogonal a todo elemento de *U* e a todo elemento de *W*. Desse modo, dado um elemento $u + w \in U + W$, temos que

$$\langle v , u + w \rangle = \langle v , u \rangle + \langle v , w \rangle = 0 .$$

Logo, $v \in (U + W)^{\perp}$. Assim, mostramos que $U^{\perp} \cap W^{\perp} \subset (U + W)^{\perp}$. Portanto, provamos que $(U + W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$.

Proposição 1.6.3. Sejam V um espaço vetorial munido do produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, *W* um subespaço de *V* e $\beta = \{ w_1, \cdots , w_n\}$ uma base para W . Então, $v \in W^{\perp}$ se, e somente se, $\langle w_i, v\rangle = 0$ para todo i = 1, · · · , n.

Demonstração - (⇒) Se $v \in W^{\perp}$, isto é, $\langle w, v\rangle = 0$ para todo $w \in W$. Em particular, temos que $\langle w_i, v\rangle = 0$ para todo i = 1, · · · , n.

(⇐) Seja $w \in W$, isto e, w e escrito de modo único como:

$$w = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n .$$

Considerando $\langle w_i, v_i\rangle = 0$, para $1 \leq i \leq n$, temos que $\langle w, v_i\rangle = 0$. Logo, $v \in W^{\perp}$, o que completa a demonstração.

Exemplo: Considere o espaço vetorial IR^2 munido do produto interno usual $\langle\cdot, \cdot\rangle$. Determine $U^{\perp}$ do seguinte subespaço.

$$U = \{ (x, y) \in I\!R^2 \ / \ y - 2x = 0 \} .$$

Note que U é uma reta no plano passando pelo origem e que tem por vetor diretor u = (1, 2). Assim, todo elemento $v = (x, y) \in U^{\perp}$ satisfaz

$$\langle v , u\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad x + 2y = 0 .$$

Portanto, todo elemento $(x, y) \in U^{\perp}$ satisfaz a equação da reta $y = -x/2$.

1.7 Operadores Simétricos

Definição 1.12.1. Sejam V um espaço vetorial real munido do produto interno $\langle\cdot, \cdot\rangle$, W um subespaço de V e $T : W \rightarrow V$ um operador linear. Dizemos que T é um operador simétrico em W se

$$\langle T(u) , v \rangle = \langle u , T(v) \rangle$$

para todos $u, v \in W$.

Teorema 1.7.1. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo IF com o produto interno $\langle\cdot, \cdot\rangle$, $\beta = \{q_1, \cdots, q_n\}$ uma base ortonormal para V e T um operador linear sobre V . Então, a matriz A = $[T]_{\beta}^{\beta}$ do operador linear T com relação à base ortonormal β é dada por $a_{ij} = \langle Tq_j, q_i\rangle$.

Demonstração – Como $\beta = \{q_1, \cdots , q_n\}$ é uma base ortonormal para V, temos que todo elemento $u \in V$ é escrito de modo único como

$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u , q_i \rangle q_i$$

Desse modo, temos que o elemento $T(q_j) \in V$ é escrito de modo único como:

$$T(q_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(q_j) , q_i \rangle q_i \qquad \text{para} \qquad j = 1, \cdots , n .$$

Portanto, os elemento da matriz $A = [aij]$, que é a matriz do operador linear T com relação à base ortonormal β, são dados como:

$$a_{ij} = \langle T(q_j) , q_i \rangle \qquad \text{para} \qquad i, j = 1, \cdots , n ,$$

o que completa a demonstração.

Teorema 1.7.2. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\beta = \{q_1, \cdots, qn\}$ uma base ortonormal para V , T um operador linear sobre V e $A = [T]_{\beta}^{\beta}$ a matriz do operador T com relação à base ortonormal β . Então, T é um operador simétrico se, e somente se, A é uma matriz simétrica.

Demonstração – ($\Rightarrow$) Vamos denotar por $A = [aij]$ a matriz do operador T com relação à base ortonormal β., temos que

$$a_{ij} = \langle T(q_j) , q_i \rangle = \langle q_j , T(q_i) \rangle = a_{ji} .$$

Logo, T é um operador simétrico.

Definição 1.7.3. Sejam V um espaço vetorial real munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, W um subespaço de V e $T : W \to V$ um operador linear. Dizemos que T é um operador anti–simétrico em W se

$$\langle T(u) , v \rangle = -\langle u , T(v) \rangle$$

para todos $u, v \in W$.

1.8 Operadores Hermitianos

Definição 1.8.1. Sejam V um espaço vetorial complexo munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, W um subespaço de V e $T : W \to V$ um operador linear. Dizemos que T é um operador Hermitiano em W se

$$\langle T(u)\,,\, v\rangle \;=\; \langle u\,,\, T(v)\rangle$$

para todos *u*, $v \in W$. Nesta seção é importante recordar o conceito de transposta Hermitiana de uma matriz $A = [a_{ij}] \in IM_n(C)$, que denotamos por A^*, que é definida da forma $A^* = [a_{ji}]$. Assim, dizemos que $A \in IM_n(C)$ é uma matriz Hermitiana se $A^* = A$.

Teorema 1.8.1. Sejam *V* um espaço vetorial real de dimensão finita com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\beta = \{q_1, \cdots, qn\}$ uma base ortonormal para *V* , *T* um operador linear sobre *V* e A = $[T]_\beta^\beta$ a matriz do operador *T* com relação à base ortonormal β. Então, *T* é um operador Hermitiano se, e somente se, *A* é uma matriz Hermitiana.

Demonstração - (⇒) Vamos denotar por A = [aij] a matriz do operador *T* com relação à base ortonormal β, temos que

$$a_{ij} \;=\; \langle T(q_j)\,,\, q_i\rangle \;=\; \langle q_j\,,\, T(q_i)\rangle \;=\; \overline{\langle T(q_i)\,,\, q_j\rangle} \;=\; \overline{a}_{ji}\,.$$

Logo, A = $[T]_\beta^\beta$ é uma matriz Hermitiana.

(⇐) Utilizando o resultado do Teorema 1.12.1 e a hipótese que A = $[T]_\beta^\beta$ é uma atriz Hermitiana, temos que

$$a_{ij} \;=\; \langle T(q_j)\,,\, q_i\rangle \;=\; \overline{a}_{ji} \;=\; \overline{\langle T(q_i)\,,\, q_j\rangle} \;=\; \langle q_j\,,\, T(q_i)\rangle\,.$$

Logo, *T* é um operador Hermitiano.

Teorema 1.8.2. Considere *V* um espaço vetorial complexo munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e *T* um operador linear sobre *V*. Então, *T* é Hermitiano se, e somente se, $\langle T(u), u\rangle \in IR$ para todo $u \in V$.

Demonstração – Tomando a hipótese que *T* é um operador Hermitiano. Para todo $u \in V$, temos que

$$\overline{\langle u\,,\, T(u)\rangle} \;=\; \langle T(u)\,,\, u\rangle \;=\; \langle u\,,\, T(u)\rangle \quad\Longrightarrow\quad \langle T(u)\,,\, u\rangle \;\in\; I\!R\,.$$

Considerando a hipótese de que $\langle T(u),\ ui\rangle \in IR$, temos que

$$\langle T(u)\,,\, u\rangle \;=\; \overline{\langle u\,,\, T(u)\rangle} \;=\; \langle u\,,\, T(u)\rangle \qquad \text{para todo} \qquad u \;\in\; V\,.$$

Portanto, temos que *T* é um operador Hermitiano, o que completa a demonstração.

Definição 1.8.3. Sejam V um espaço vetorial complexo munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, *W* um subespaço de *V e* $T : W \rightarrow V$ um operador linear. Dizemos que *T* é um operador anti–Hermitiano em W se

$$\langle T(u), v \rangle = -\langle u, T(v) \rangle$$

para todos $u, v \in W$.

1.9. Operadores Ortogonais

Definição 1.9.1. Sejam V um espaço vetorial complexo munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, *W* um subespaço de *V e* $T : W \rightarrow V$ um operador linear. Dizemos que *T* é um operador ortogonal em *W* se

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

para todos $u, v \in W$.

Podemos verificar facilmente que se *T* é um operador ortogonal em *V*, então *T* preserva a norma Euclidiana, isto é, $\|T(u)\|_2 = \|u\|_2$ para todo $u \in V$. Assim, dizemos que *T* é uma isometria sobre *V*.

Proposição 1.9.1. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e *T* um operador ortogonal sobre *V*. Então, T é um automorfismo.

Demonstração – Basta provar que *T* é um operador injetor, isto é, $Ker(T) = \{0_V\}$, e pelo Teorema do núcleo e da imagem, temos que $Im(T) = V$.

Tomando um elemento $u \in Ker(T)$, temos que

$$T(u) = 0_V \implies \| T(u) \|_2 = 0 \implies \| u \|_2 = 0 \implies u = 0_V .$$

Portanto, $Ker(T) = \{0_V\}$, o que completa a demonstração.

Proposição 1.9.2. Seja *V* um espaço vetorial real com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e *T* uma isometria sobre V . Então, T^{-1} é uma isometria sobre *V*.

Demonstração – Sabemos que *T* é um isomorfismo sobre *V*, pois *T* é uma isometria sobre *V*. Logo, T^{-1} existe. Desse modo,

$$\langle T^{-1}(u), T^{-1}(v) \rangle = \langle T(T^{-1}(u)), T(T^{-1}(v)) \rangle = \langle u, v \rangle .$$

Portanto, mostramos que T^{-1} é uma isometria sobre *V*.

Proposição 1.9.3. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita com o produto interno $\langle \cdot, \ \cdot \rangle$ e *T* um operador ortogonal sobre *V*. Então, *T* é uma isometria sobre *V* se, e somente se, *T* é um operador ortogonal em *V*.

Demonstração

($\Rightarrow$) Tomando a hipótese que T é uma isometria sobre V, obtemos

$$\langle T(u-v), T(u-v) \rangle = \langle u-v, u-v \rangle = \langle u, u \rangle - 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle.$$

para todos u, v $\in$ V . Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \langle T(u-v), T(u-v) \rangle &= \langle T(u), T(u) \rangle - 2\langle T(u), T(v) \rangle + \langle T(v), T(v) \rangle \\ &= \langle u, u \rangle - 2\langle T(u), T(v) \rangle + \langle v, v \rangle \end{aligned}$$

Portanto, comparando as duas expressões, obtemos

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

para todos *u, v* $\in$ *V*. Logo, mostramos que *T* é um operador ortogonal em *V*.

($\Leftarrow$) Tomando a hipótese que *T* é um operador ortogonal em *V*, isto é,

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle \qquad \text{para todos} \quad u, v \in V,$$

obtemos $\langle T(v), T(v)i \rangle = \langle v, v \rangle$ para todo $v \in V$. Logo, $\|T_{(2)}\|_2 = \|v\|_2$ para todo $v \in V$. Portanto, provamos que *T* é uma isometria sobre *V*.

Proposição 1.9.4 Seja *V* um espaço vetorial real com o produto interno $\langle \cdot, \ \cdot \rangle$, *T* e *P* isometrias sobre *V*. Então, $T \circ P$ é uma isometria sobre *V*.

Demonstração – Tomando a hipótese que *T* e *P* são isometrias sobre V, isto é,

$$\| T(v) \|_2 = \| v \|_2 \qquad \text{e} \qquad \| P(v) \|_2 = \| v \|_2$$

para todo $v \in V$, obtemos

$$\| (T \circ P)(v) \|_2 = \| (T(P(v)) \|_2 = \| P(v) \|_2 = \| v \|_2$$

para todo $v \in V$. Portanto, temos que $T \circ P$ é uma isometria sobre *V*.

1.10. Exercícios

As questões abaixo estão divididas em questões aplicáveis ao Ensino Superior (1, 3 e 5) e questões aplicáveis ao Ensino Médio (2, 4 e 6). Mostrando formas de como explicar este conteúdo com complexidades diferentes.

1. Fixado o vetor unitário $u = (a_1, \dots, a_n)$, seja $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o operador linear definido por $P.v = pr_u(v)$ projeção ortogonal de v sobre o eixo de u. Mostre que $P^2 = P$, determine o Núcleo de P, as matrizes de P, de I – P, e da reflexão ortogonal H = I – 2P em torno do núcleo de P.

Solução:Inicialmente temos por definição que

$P.v = p\,r_u(v) = \frac{<u,v>}{<u,u>}.u = <u,v>.u$ $\qquad$ *($<u,u> = 1$ pois, u é unitário)*

Portanto temos que: $P^2.v = P(P.v) = P(<u,v>.u) = <u,<u,v>.u> = <u,v><u,u>.u = <u,v>.u = P.v \quad \forall\, v \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$

Logo, $P^2 = P$

Para o cálculo do núcleo, note que $<u,v>.u = 0 \Leftrightarrow <u.v> = 0$

Logo,

$$N(P) = \{v \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} / P.v = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} / <u,v>.u = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} / <u,v> = 0\} = u^{\perp}$$

Ou seja, o núcleo de P é o conjunto dos vetores perpendiculares a u.

Para calcular a Matriz de P, observe que a i-ésima coluna dessa matriz é dada por

$P(e_i) = <u,e_i> u = a_i.u = (a_1a_i, \dots, a_na_i)$

Logo, a matriz de P é dada por $a_{ij} = a_i.a_j$.

Daí é fácil ver que a matriz de I – P é dada por $b_{ij} = \delta_{ij} - a_i.a_j$, *onde* $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$, *e a Matriz H = I – 2P é dada por* $c_{ij} = \delta_{ij} - 2a_i.a_j$.

Explicitamente temos:

$[P] = \begin{pmatrix} a_1a_1 & \cdots & a_1a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & \cdots & a_na_n \end{pmatrix}$

$[I - P] = \begin{pmatrix} 1 - a_1a_1 & \cdots & a_1a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & \cdots & 1 - a_na_n \end{pmatrix}$

$[I - 2P] = \begin{pmatrix} 1 - 2a_1a_1 & \cdots & 2a_1a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 2a_na_1 & \cdots & 1 - 2a_na_n \end{pmatrix}$

2. Seja o vetor u = $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in \mathbb{R}$, seja P: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $P_{(x,y)} = \langle u, v\rangle . u$, a projeção ortogonal em torno do eixo de u.

a) Determine $P_{(x,y)}$

b) Verifique que $P^2 = P$

c) Seja a matriz de P em relação à base canônica $\alpha = \{(1,0) \mid (0,1)\}$. Verifique que $A^2 = A$.

d) Seja β a matriz de P em relação à base $\beta = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$. Verifique que $\beta^2 = \beta$.

Solução:

a) $P_{(x,y)} = \langle u, v\rangle . u$

$P_{(x,y)} = \langle (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (x, y)\rangle \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$P_{(x,y)} = \left(\frac{x\sqrt{2}}{2} + \frac{x\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (\frac{x}{2} + \frac{y}{2}, \frac{x}{2} + \frac{y}{2}) = (\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}).$

b) $P^2_{(x,y)} = P(P_{(x,y)}) = P(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}) = \left(\frac{\frac{x+y+x+y}{2}}{2}, \frac{\frac{x+y+x+y}{2}}{2}\right) = (\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}) = P_{(x,y)}$

c) $P_{(1,0)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ $\quad P_{(0,1)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$A = [P]^{\propto}_{\propto} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = A$

d) $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (\frac{\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}, \frac{\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}, \frac{\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right) = \left(\frac{0}{2} \middle| \frac{0}{2}\right) = (0,0)$

3. Seja a um vetor não nulo no espaço vetorial E, de dimensão n, munido de produto interno. Para todo $b \in \mathbb{R}^n$, prove que o conjunto $V = \{v \in E; < v, a >= b\}$é uma variedade afim de dimensão $n - 1$. Dado $v_0 \in V$, mostre que $v \epsilon V$ se, e somente se $v - v_0$ é ortogonal a a.

***Solução**:*

Dados x, y e V e t $\in \mathbb{R}$ *, como* $< x, a > = < y, a > = b$ *temos diretamente que*

$< (1-t)x + ty\ , a > = (1-t) < x, a > +t < y, a \geq (1-t)b + b = b.$

Implicando $(1-t)x + ty \in V.$

Logo, V é uma variedade afim.

Agora, seja $A : E \to \mathbb{R}$ *dada por* $A.v =< v, a >$. *É claro que A é uma Transformação Linear, e ainda temos que a dimensão de* $Im(A)$ é 0 *ou* 1, *visto que a* $Im(A) \subset \mathbb{R}$. *Mas como A é não nulo, então A não é identicamente nulo, impossibilitando* $dim(Im(A)) = 0$. *Logo,* $dim(Im(A)) = 1$.

Pelo teorema do núcleo e da imagem, temos então:

$dim(E) = dim\big(N(A)\big) + dim\big(Im(A)\big) \Rightarrow n = dim\big(N(A)\big) + 1 \ \Rightarrow dim\big(N(A)\big) = n - 1$

Tomando então qualquer v_0 *tal que A* v_0 *= b (podemos tomar assim pois A é Sobrejetiva) temos que* $v_0 \epsilon V$ *e além disso*

$v \epsilon V \ \Leftrightarrow < v, a >= b \Leftrightarrow Av = A\,v_0 \Leftrightarrow A(v - v_0) = 0 \Leftrightarrow v - v_0 \in N(A) \Leftrightarrow v \in v_0 + N(A)$

isto implica que

$V = v_0 + N(A)$, *o que nos dá* $dimV = dim(N(A)) = n - 1$.

Além disso, $v \in V \Leftrightarrow v - v_0 \in N(A) \Leftrightarrow < v - v_0, a \geq 0.$

4. Seja o vetor a = (1, 2, 3) e b = 6. Determine o conjunto v = $\{v \in \mathbb{R}^3 / \langle v, a\rangle = b\}$. Verifique que v_o = (1, 1, 1) ∈ V e que ∀v ∈ V, v-v_o é ortogonal a a.

***Solução**:*

V = (x,y,z) $\langle v, a\rangle = b$

$\langle (x, y, z) | (1,2,3) \rangle$ *= 6, x + 2y + 3z = 6 é um plano do* $\mathbb{R}^3$.

Observe que v_o *é solução 1+ 2.1 + 3.1 = 6. Logo* $v_o \epsilon V$.

Dado v ϵ *V, v = (x, y, z)= v = (6-2y-3z, y, z)*

Seja v - v_o = (5 – 2y – 3z, y -1, z-1)

$\langle v - vo, a\rangle = \langle(5 - 2y - 3z, y - 1, z - 1).(1,2,3)\rangle$ = *5 – 2y – 3z + 2y – 2 + 3z -3 = 0.*

Portanto $v - vo$ é ortogonal a a.

5. Seja $r = \{(1-t)u + tv; t \in R\}$ a reta que liga u a V em E, com $u \neq v$. Dado que $w \in E$, prove que, tomando:

$$t = \frac{< w-u, v-u >}{|v-u|^2}$$

Obtém-se o ponto o ponto $x = (1-t)u + tv$ de r mais próximo possível de w, ou seja, tem-se:

$$|x - w| < |y - w|$$

Para qualquer outro ponto $y \in r$.

Solução:

Seja $x : \mathbb{R} \to E$ dada por $x(t) = (1-t)u + tv$.Considere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada $f(t) = |x(t) - w|^2$,

temos então

$f(t) = |(1-t)u + tv - w|^2 = |u - w + t(v-u)|^2 =$

$= |u - w|^2 + 2 < u - w, v - u > t + |v - u|^2 t^2$, *ou seja, como $u \neq v$, temos que f é uma função quadrática. A concavidade de f é para cima, pois:*

$|v - u|^2 > 0$,

além do mais o valor de t que minimiza $f(t)$ também minimiza $|x(t) - u|$.

O valor mínimo de f é atingido quando $t_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2<u-w,v-u>}{2|v-u|^2} = \frac{<w-u,v-u>}{|v-u|^2}$

Observando que $Im(x) = r$, temos que $x(t_0) = (1 - t_0)u + t_0 v$ é o ponto da reta r mais próximo de w.

6. Seja r = {(1 –t)u + t_v / t $\in\mathbb{R}$} a reta que liga u a r em $\mathbb{R}^2$ e tomando u = (-1,2), v = (2,3) e w = (5, 2), determine:

a) As equações paramétricas de r.

r = (x(t), y(t) = (1-t)u + t.v =(1-t)(-1,2) + t(2,3) = (t-1, 2-2t) + (2t, 3t) = (3t -1, t-2).

$$\begin{cases} x(t) = 3t - 1 \\ y(t) = t + 2 \end{cases}$$

b) A equação reduzida da reta r.

$x(t) = 3t - 1 \rightarrow 3t = x + 1 \rightarrow t = \frac{x+1}{3}$

$y(t) = t + 2 \rightarrow t = y - 2$

$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} \rightarrow 3y - 6 = x + 1 \rightarrow 3y = x + 7 \rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

2. ESPAÇOS VETORIAIS

Definição: Seja um conjunto V, não vazio, sobre o qual estão definidas as operações adição e multiplicação por um escalar, ou seja,

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall u, v \in V, u + v \in V \\ \forall \alpha \in R, \forall u \in V, \alpha u \in V. \end{array}}$$

O conjunto V com essas duas operações é chamado espaço vetorial real (ou espaço vetorial sobre R) se as seguintes propriedades forem satisfeitas:

A) Em relação à adição: $\forall$ u, v, w $\in$ V

A1) Comutatividade: (u + v) + w = u + (v + w)

A2) Associatividade: u + v = v + u

A3) Elemento Neutro: $\exists$ 0 $\in$ V tal que u + 0 = u

A4) Elemento Simétrico: $\exists$ –u $\in$V tal que u + (–u) = 0

M) Em relação à multiplicação por escalar: $\forall$ u, v $\in$ V e $\forall$ α, β $\in \mathbb{R}$

M1) Associatividade: $(\alpha.\beta).u = \alpha.(\beta.u)$

M2) Distributividade para a Adição de Elementos: $(\alpha + \beta).u = \alpha.u + \beta.u$

M3) Distributividade para a Multiplicação por Escalar: $\alpha.(u + v) = \alpha.u + \alpha.v$

M4) Elemento Identidade: 1.u = u

Exemplo$_1$: $V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar:

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$\alpha.(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$

Exemplo$_2$: Os conjuntos $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$, ..., $\mathbb{R}^n$ são espaços vetoriais com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar.

Exemplo$_3$: V = M(m,n), o conjunto das matrizes reais m x n coma soma e o produto por escalar usuais. Em particular:

a) V = $M(n,n)$ o conjunto das matrizes quadradas de ordem n;

b) V = $M(1,n)$ = {[a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}]; a_{ij} ∈R}, também identificado com V = $\mathbb{R}^n$ são espaços vetoriais relativamente às mesmas operações.

Exemplo$_4$: O conjunto P_n = {a_0 + a_1x+ a_2x^2 + ... + a_nx^n; a_i ∈R} dos polinômios com coeficientes reais de grau ≤ n, em relação às operações usuais de adição de polinômios e multiplicação por escalar. Em particular, o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a 2, P_2 = {a_0 + a_1x+ a_2x^2; a_i ∈ R} é um espaço vetorial relativamente às mesmas operações.

2.1. Propriedades dos espaços vetoriais

Da definição de espaço vetorial V decorrem as seguintes propriedades:

i. Existe um único vetor nulo em V (elemento neutro da adição).

ii. Cada vetor u ∈ V admite apenas um simétrico (–u) ∈V.

iii. Para quaisquer u, v, w ∈ V, se u + v = u + w, então v = w.

iv. Qualquer que seja v ∈ V, tem-se –(–v) = v.

v. Quaisquer que sejam u, v ∈ V, existe um e somente um w ∈ V tal que u + w = v. Esse vetor w será representado por w = v – u.

vi. Qualquer que seja v ∈V, tem-se 0v = 0.

vii. Qualquer que seja λ ∈R, tem-se λ0 = 0.

viii. Se λv = 0, então λ= 0 ou v = 0.

ix. Qualquer que seja v ∈V, tem-se (–1)v = –v.

x. Quaisquer que sejam u, v ∈ V e λ ∈ ℝ, tem-se (–λ)v = λ(–v) = – (λv).

2.2. Subespaços vetoriais

Definição: Dado um espaço vetorial V, um subconjunto W, não vazio, é um subespaço vetorial de V se:

i. Para quaisquer u, v ∈ W tem-se u + v ∈ W.

ii. Para qualquer α ∈ ℝ, u ∈ W, tem-se α.u ∈ W.

Obs$_1$: As condições da definição garantem que ao operarmos em W não obteremos um vetor fora de W. De modo que W é ele próprio um espaço vetorial.

Obs$_2$: Qualquer subespaço W de V precisa necessariamente conter o vetor nulo (condição (ii) para $0 = \alpha$).

Obs$_3$: Todo espaço vetorial admite pelo menos dois subespaços (chamados subespaços triviais), o conjunto formado somente pelo vetor nulo e o próprio espaço vetorial.

Exemplo$_1$: Sejam $V = R^2$ e $W = \{(x, 2x); x \in \mathbb{R}\}$.

Evidentemente, $W \neq \emptyset$, pois $(0,0) \in W$.

Verifiquemos as condições (i) e (ii).

Para $u = (x_1, 2x_1)$ e $v = (x_2, 2x_2) \in W$, tem-se:

i. $u + v = (x_1, 2x_1) + (x_2, 2x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2) = (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2)) \in W$, pois a segunda componente de u + v é igual ao dobro da primeira.

ii. $\alpha.u = \alpha(x_1, 2x_1) = (\alpha x_1, 2(\alpha x_1)) \in W$, pois a segunda componente de α.u é igual ao dobro da primeira. Portanto, W é um subespaço vetorial de R^2 que representa geometricamente uma reta que passa pela origem.

Observemos que ao tomarmos dois vetores u e v da reta que passa pela origem, o vetor soma ainda é uma reta que passa pela origem. E se multiplicarmos um vetor u da reta por um número real α, o vetor α.u ainda estará nesta reta. O mesmo não ocorre quando a reta não passa pela origem. Por exemplo, a reta

$$W = \{(x, 4 - 2x); x \in R\}$$

não é um subespaço vetorial do R^2.

Se escolhermos os vetores $u = (1, 2)$ e $v = (2, 0)$ de W, temos $u + v = (3, 2) \notin W$.

Ainda $\alpha.u \notin W$, para $\alpha \neq 1$.

Os exemplos destas duas retas sugerem, para qualquer subconjunto W de um espaço vetorial V, que: sempre que $0 \notin W$, W não é subespaço de V. No entanto, se $0 \in W$ não nos enganemos pensando de imediato que W seja subespaço de V, pois será necessário verificar as propriedades (i) e (ii).

Para V = R², os subespaços triviais são {(0,0)} e o próprio R², enquanto que os outros subespaços (subespaços próprios) são as retas que passam pela origem.

Exemplo$_2$: Sejam $V = R^4$ e W = {(x,y,z,0); x,y,z ∈R}. (0,0,0,0) ∈W

Para $u = (x_1, y_1, z_1, 0)$ e $v = (x_2, y_2, z_2, 0) \in W$:

i. $u + v = (x_1, y_1, z_1, 0) + (x_2, y_2, z_2, 0) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, 0) \in W$, pois a quarta componente é nula.

ii. $\alpha u = \alpha(x_1, y_1, z_1, 0) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1, 0) \in W$, pois a quarta componente é nula. Logo, W é subespaço vetorial de R^4.

Exemplo$_3$: Sejam V = M(3,1) e W o conjunto-solução de um sistema linear homogêneo a três variáveis. Consideremos o sistema homogêneo.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases}$$

Fazendo:

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, o sistema, em notação matricial, será dado

por AX = 0, sendo X elemento do conjunto-solução W.

Se $\mathbf{u} = X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ e $v = X_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ são soluções do sistema, então: $AX_1 = 0$ e $AX_2 = 0$.

i. Somando essas igualdades, vem: $AX_1 + AX_2 = 0$ ou $A(X_1 + X_2) = 0 \Rightarrow X_1 + X_2 \in W$, isto é, a soma de duas soluções é ainda uma solução do sistema.

ii. Multiplicando por $\alpha \in \mathbb{R}$ a primeira igualdade, vem: $\alpha(AX_1) = 0$ ou $A(\alpha X_1) = 0 \Rightarrow \alpha X_1 \in W$, isto é, o produto de uma constante por uma solução é ainda uma solução do sistema. Logo, o conjunto-solução W do sistema linear homogêneo é um subespaço vetorial de M(3,1).

2.3. Combinação linear

Definição 2.5.1. Sejam os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ o espaço vetorial V e os escalares $a_1, a_2, \dots, a_n$. Qualquer vetor $v \in V$ da forma $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$ é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Exemplo: Em P_2, o polinômio $p = 5t^2 - 5t + 7$ uma combinação linear dos polinômios

$p_1 = t^2 - 2t + 1$, $p_2 = t + 2$ e $p_3 = 2t^2 - t$, pois $p = 3p_1 + 2p_2 + p_3$.

2.4. Subespaços gerados

Definição 2.3.1. Seja V um espaço vetorial $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V,\ A \neq \Phi$.

O conjunto W de todos os vetores de V que são combinação linear dos vetores de A é um subespaço vetorial de V.

$W = \{v \in V; v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n;\ a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$ é dito subespaço gerado pelo conjunto A.

Notação: $W = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ ou $W = G(A)$.

i. $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são ditos vetores geradores do subespaço W.

ii. Por definição: $A = \Phi \Leftrightarrow [\Phi] = \{0\}$.

iii. $A \subset G(A)$, ou s$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset [v_1, v_2, \ldots, v_n]$.

iv. Todo subconjunto A de V gera um subespaço vetorial de V, podendo ocorrer G(A) = V. Nesse caso, A é o conjunto gerador de V.

v. Seja $W = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$. Ao acrescentarmos vetores de W ao conjunto dos geradores, os novos conjuntos continuarão gerando o mesmo subespaço W.

vi. A observação 5 nos permite concluir que um espaço vetorial pode ser gerado por uma infinidade de vetores, mas existe um número mínimo de vetores para gerá-lo.

2.5. Dependência e independência linear

Definição 2.5.1. Sejam V um espaço vetorial,

$$A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V \text{ e } a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0.$$

O conjunto A diz-se linearmente independente (L.I.) ou os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$, são ditos L.I., caso a equação acima admita apenas a solução trivial $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, ..., $a_n = 0$. Se existirem soluções $a_i \neq 0$ para algum i = 1, 2, ..., n, diz-se que o conjunto é linearmente dependente(L.D.).

2.5.2 Propriedades da dependência e da independência linear

Seja V um espaço vetorial $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

1. Se A = {v} ⊂ V e v ≠0, então A é L.I.

2. Considera-se por definição que o conjunto vazio Φ é L.I.

3. Se um conjunto A ⊂ V contém o vetor nulo, então A é L.D.

4. Se uma parte de um conjunto A ⊂V é L.D., então A é também L.D.

5. Se um conjunto A ⊂V é L.I., então qualquer parte de A é também L.I.

Observemos que a recíproca desta afirmação não é verdadeira.

De fato, voltando ao exemplo (d), A = {(1,0), (0,1), (3,-2)} temos que qualquer subconjunto próprio de A é L.I.

A1 = {(1,0)}, A2= {(0,1)}, A3={(3,-2)}, A4= {(1,0), (0,1)}, A5= {(1,0), (3,-2)}, A6 = {(3,-2), (0,1)}.

Porém verificamos que o conjunto A é LD.

6. Se $A=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ é L.I e $B=\{v_1,v_2,\ldots,v_n,w\}$ é L.D., então w é combinação linear dos vetores $v_1,v_2,\ldots,v_n$.

2.6. Base de um espaço vetorial

Passamos agora à tarefa de atribuir uma dimensão a certos espaços vetoriais. Apesar de associarmos usualmente dimensão a algo geométrico, precisamos encontrar uma definição algébrica adequada da dimensão de um espaço vetorial. Isto será feito através do conceito de uma base para o espaço vetorial.

Definição 2.6.1 Seja V um espaço vetorial sobre o corpo *R*. Uma base de V é um conjunto linearmente independente de elementos de V que gera V.

Um conjunto B = $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ⊂ V é uma base do espaço vetorial V se:

i) B é LI;

ii) B gera V.

Exemplo$_1$: B = {(1, 1), (-1, 0)} é base do R^2.

OBS: quaisquer dois vetores não colineares do R^2, portanto L.I. formam uma base desse espaço.

B = {(1, 0), (0, 1)} é base do R^2, denominada base canônica.

Teorema 2.6.2. Seja V um espaço vetorial sobre o corpo IF finitamente gerado pelos elementos do conjunto $S = \{v_1, \cdots, v_n\}$. Então, podemos extrair do conjunto S uma base para V.

Demonstração - Se $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \in$ V são linearmente independentes, então eles cumprem as condições de base, e não temos nada a fazer. Se $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \in$ V são linearmente dependentes, então existe uma combinação linear nula.

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0_V$$

com os coeficientes c_i não todos nulos. Digamos que $c_n \neq 0$. Desse modo, temos que

$$v_n = -\frac{c_1}{c_n} v_1 - \cdots - \frac{c_{n-1}}{c_n} v_{n-1}$$

Assim, os elementos $v_1, \cdots, v_{n-1}$ ainda geram V. Se $\{v_1, \cdots, v_{n-1}\}$ for linearmente dependente, repetimos o processo anterior e extraímos o elemento, digamos v_{n-1}, que é uma combinação linear dos outros. Repetindo esse processo um número finito de vezes, obtemos um subconjunto de $\{v_1, \cdots, v_n\}$ formado com m elementos linearmente independentes $\{v_1, \cdots, v_m\}$ que ainda geram V, com m < n . Assim, obtemos uma base para o espaço vetorial V.

Teorema 2.6.3. Seja V um espaço vetorial gerado por um conjunto finito de elementos $v_1, \cdots, v_n \in V$. Então, todo conjunto linearmente independente de V é finito e contém no máximo n elementos.

Demonstração – Para provar o teorema, basta mostrar que todo subconjunto W de V que contém mais de n elementos é linearmente dependente. Seja W um tal conjunto.

Em W existem elementos distintos $w_1, \cdots, w_m$, com m > n. Como os elementos $v_1, \cdots, v_n$ geram V, existem escalares c_{ij} tais que

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} v_i \quad ; \quad j = 1, \cdots, m$$

Consideramos agora uma combinação linear dos elementos de W, isto é,

$$\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_m w_m = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} c_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} c_{ij} \alpha_j \right) v_i$$

Como m > n, podemos encontrar escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$, não todos nulos, solução do sistema linear homogêneo

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\,\alpha_j \;=\; 0 \qquad ; \qquad i = 1, \cdots, n.$$

Logo, $\alpha 1\ w_1 + \cdot\cdot\cdot + \alpha_m\ w_m = 0_V$ com algum $\alpha i \neq 0$. Portanto, mostramos que W é um conjunto linearmente dependente em V.

Definição 2.6.4. Dimensão de um espaço vetorial é o número de vetores da base de um espaço vetorial. Seja V um espaço vetorial sobre o corpo *IF*. Dizemos que *V* é um espaço vetorial de dimensão finita se *V* possui uma base finita.

Exemplo:

i. dim $\mathbb{R}^2 = 2$

ii. dim $\mathbb{R}^n = n$

iii. dim $M_{2x2}(\mathbb{R}) = 4$

iv. dim $M_{m \times n} = m \cdot n$

v. Seja P_n o polinômio de grau n, dim $P_n = n + 1$

vi. dim {0} = 0, pois {0} é gerado pelo conjunto vazio e portanto não possui base.

Observações:

i. dim V = n e W é subespaço de V ⇒ dim W ≤ n

No caso de dim W = n, então temos que W = V.

Caso Particular: Seja V = R^3, então dim V = 3. A dimensão de qualquer subespaço W do R^3 só poderá ser 0, 1, 2 ou 3. Portanto temos:

a. dim W = 0, então W = {(0,0,0)} é a origem.

b. dim W = 1, então W é uma reta que passa pela origem.

c. dim W = 2, então W é um plano que passa pela origem.

d. dim W = 3, então W = R^3.

ii. Se dim V = n, então qualquer subconjunto de V com mais de n vetores é LD.

iii. Se soubermos que a dim V = n, para obtermos uma base de V basta que apenas uma das condições de base esteja satisfeita, pois a outra ocorrerá como consequência. Ou seja:

a. Se dim V = n, qualquer subconjunto de V com n vetores LI é uma base de V.

b. Se dim V = n, qualquer subconjunto de V com n vetores geradores de V é uma base de V.

Corolário 2.6.5 Seja *V* um espaço vetorial de dimensão finita. Então, quaisquer duas bases de V têm o mesmo número (finito) de elementos.

Demonstração – Vamos supor que

$$\beta = \{ v_1, \cdots, v_n \} \qquad e \qquad \gamma = \{ w_1, \cdots, w_m \}$$

sejam duas bases finitas para *V*.

Como $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ gera *V* e $\gamma = \{w_1, \cdots, w_m\}$ é linearmente independente em *V*, pelo Teorema 2.10.2 temos que $m \leq n$.

Por outro lado, como $\gamma = \{w_1, \cdots, w_m\}$ gera V e $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ é linearmente independente em V , pelo Teorema 2.10.2 temos que $n \leq m$. Portanto, mostramos que m = n, o que completa a demonstração.

2.7. Exercícios

As questões abaixo estão divididas em questões aplicáveis ao Ensino Superior (1, 3, 5 e 6) e questões aplicáveis ao Ensino Médio (2, 4 e 7). Mostrando formas de como explicar este conteúdo com complexidades diferentes.

1. Seja $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função tal que $f(0) = 0$ e $|f(u) - f(v)| = |u - v|$ para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}$. Prove:

a) Para todo $v \in \mathbb{R}^n$, tem $-$ se que $|f(v)| = |v|$

b) Para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^n$ tem $-$ se que $< f(u), f(v) > = < u, v >$

c) Os vetroes $u_1 = f(e_1), \ldots, u_n = f(e_n)$ formam uma base ortonormal

d) Para todo $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in \mathbb{R}^n$, tem-se $< f(v), u_i > = x_i$, logo

$f(v) = x_1u_1 + \cdots + x_nu_n$

e) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um operador linear, logo é ortogonal

Uma função $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ chama-se uma isometria quando $|g(u) - g(v)| = |u - v|$para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^n$. Conclua que todo isometria tem a forma $g(v) = A.v + b$, onde $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um operador linear ortogonal e $b \in \mathbb{R}^n$ é um vetor constante (independente de v)

***Solução**:*

a) *Ora para todo $v \in \mathbb{R}^n$temos que $|f(v)| = |f(v) + 0| = |f(v) + f(0)| = |v + 0| = |v|$*

b) *Observe que:*

$$|u - v|^2 =< u - v, u - v > = < u, u > -2 < u, v > + < v, v > =$$
$$= |u|^2 - 2 < u, v > +|v|^2 \Rightarrow < u, v > = \frac{1}{2}(|u|^2 + |v|^2 - |u - v|^2).$$

Assim, $< u, v > = \frac{1}{2}(|u|^2 + |v|^2 - |u - v|^2) = \frac{1}{2}(|f(u)|^2 + |f(v)|^2 - |f(u) - f(v)|^2) =$
$= < f(u), f(v) >.$

c) *Pelo item a)* $|u_i| = |f(e_i)| = |e_i| = 1$ *e pelo item b)* $< u_i, u_j >= < f(e_i), f(e_j) > =$
$= < e_i, e_j > = \delta_{ij}$. *Logo* $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *é uma base ortogonal.*

d) *Para* $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ *temos* $< f(v), u_i > = < f(v), f(e_i) > =< v, e_i > = x_i$ *sendo assim, considerando o vetor* $x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$ *, temos que*

$$< f(v) - (x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n), u_i > = < f(v), u_i > - < x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n , u_i > =$$

$= x_i - x_i = 0$ *para cada i. Portanto* $f(v) - (x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(v) = (x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n)$

e) *Dados* $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ *e* $w = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$ *temos*

$v + \lambda w = (x_1 + \lambda y_1)e_1 + \cdots + (x_n + \lambda y_n)e_n$ *e assim pelo item anterior:*

$$f(v + \lambda w) = (x_1 + \lambda y_1)u_1 + \cdots + (x_n + \lambda y_n)u_n =$$
$$= (x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n) + \lambda(y_1 u_1 + \cdots + y_n u_n) = f(v) + \lambda f(w).$$

Logo, f é operador linear. Como f preserva distâncias, temos que f é ortogonal.

Por fim, se $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *satisfaz* $|g(u) - g(v)| = |u - v|$, *tomando* $b = g(0)$, *a função dada por* $A(v) = g(v) - b$ *satisfaz* $A(0) = 0$ *e* $|A(u) - A(v)| = |g(u) - g(v)| = |u - v|$. *Logo, A é operador ortogonal. Daí temos* $g(v) = A.v + b$.

2. Seja T_θ: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a rotação de ângulo θ, no sentido anti-horário dada por:

T_θ(x,y) = $(x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta \,|x \operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)$

Verifique que:

a) $T_\theta(0,0) = (0,0)$

b) $|T_\theta(\mathrm{u}) - T_\theta(\mathrm{v})| = |u - v|$

c) $|T_\theta(\mathrm{u})| = |u|$

d) $\langle T_\theta(\mathrm{u}), T_\theta(\mathrm{v}) \rangle = \langle u, v\rangle$

***Solução**:*

a) $T_\theta(0,0) = (0,0)$

$T_\theta(0,0) = (0.\cos\theta - 0.\operatorname{sen}\theta, 0.\operatorname{sen}\theta + 0.\cos\theta) = (0,0)$

b) $|T_\theta(u) - T_\theta(v)| = |u - v|$

$u = (a,b)$ $\quad$ $v = (c,d)$

$T_\theta(v) = (a.\cos\theta - b.\operatorname{sen}\theta, a.\operatorname{sen}\theta + b.\cos\theta)$

$T_\theta(v) = (c.\cos\theta - d.\operatorname{sen}\theta, c.\operatorname{sen}\theta + d.\cos\theta)$

$|T_\theta(u) - T_\theta(v)| = |(a+c)cos\,\theta - (b+d)sen\,\theta, (a+c)sen\,\theta + (b+d)cos\,\theta)|$

$[(a+c)sen\,\theta + (b+d)cos\,\theta]$

$\sqrt{[(a+c)sen\,\theta + (b+d)cos\,\theta]^2 + [(a+c)sen\,\theta + (b+d)cos\,\theta]^2}$

$\sqrt{(a+c)^2(sen^2\theta + cos^2) + (b+d)^2(sen^2\theta + cos^2\theta}$

$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} = |(a+c, b+d| = |(a,b) + (c,d)| = |u - v|$

c) $|T_\theta(u)| = |u|$ $\quad$ *$u = (x,y)$*

$|T_\theta(x,y)| = |(xcos\theta - ysen\theta, xsen\theta + ycos\theta|$

$\sqrt{(xcos\theta - ysen\theta)^2 + (xsen\theta - ycos\theta)^2}$

$\sqrt{x^2(sen^2\theta + cos^2\theta + y^2(sen^2\theta} + cos^2\theta) = \sqrt{x^2 + y^2} = |(x,y)| = |v|$

d) $\langle T_\theta(u), T_\theta(v)\rangle = \langle (acos\theta - bsen\theta, csen\theta + bcos\theta), (ccos\theta - dsen\theta, csen\theta + dcos\theta)\rangle$

$= (acos\theta - bsen\theta)(ccos\theta - dsen\theta) + (dsen\theta + bcos\theta)(csen\theta + dcos\theta)$

$ac + bd$ $= \langle (a,b),(c,d)\rangle = \langle u.v\rangle$

3. Dado o vetor unitário $\mathrm{u} \in \mathbb{R}^n$ prove que o operador $\mathrm{H_u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido por $\mathrm{H_u.v} = \mathrm{v} - 2 < v, u >. u$, é ortogonal (reflexão em torno de $\{\mathrm{u}\}^\perp$). Dados os vetores $\mathrm{v} \neq \mathrm{w}$ em $\mathbb{R}^n$, $|\mathrm{v}| = |\mathrm{w}|$, mostre que, tomando $\mathrm{u} = (\mathrm{v} - \mathrm{w})/\,|\mathrm{v} - \mathrm{w}|$, tem-se $\mathrm{H_u.v} = \mathrm{w}$. Determine a matriz de $\mathrm{H_u}$ em função das coordenadas de u.

***Solução**:*

Para mostrar que H_u é ortogonal, mostraremos que H_u preserva produto interno: dado $v, w \in \mathbb{R}^n$, temos que:

$< H_u(v), H_u(w) > = < v - 2 < v, u > u, w - 2 < w, u > u > =$

$=< v, w > -2 < w, u >< v, u > -2 < v, u >< u, w > +4 < v, u >< w, u >< u, u > =$

$=< v, w > -4 < w, u >< v, u > +4 < v, u >< w, u > = < v, w >.$

Agora, seja $u = (v - w)/ |v - w|$. *Tomando* $\alpha = |v - w|$*temos* $v = w + \alpha u.$

Daí, $H_u.v = v - 2 < v, u >.u = w + \alpha u - 2 < w + \alpha u, u >.u =$

$= w + \alpha u - 2 < w, u >.u - 2\alpha < u, u >.u = w + \alpha u - 2 < w, u >.u - 2\alpha u =$

$= w - (\alpha - 2 < w, u >)u$

Mas note que $|w|^2 = |v|^2 =< w + \alpha u, w + \alpha u > = |w|^2 + 2\alpha < w, u > +\alpha^2|u|^2 =$

$= |w|^2 + 2\alpha < w, u > +\alpha^2$

Isto implica que $2\alpha < w, u > +\alpha^2 = 0 \Rightarrow 2 < w, u > +\alpha$

Portanto $H_u.v = w$

Por fim, no exercício 1 do capítulo anterior a matriz de H, *em função das coordenadas de u. Se* $u = (a_1, \dots, a_n)$, *teremos*

[I - 2P] = $\begin{pmatrix} 1 - 2a_1a_1 & \cdots & 2a_1a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 2a_na_1 & \cdots & 1 - 2a_na_n \end{pmatrix} = I - 2uu^T$

4. Fixado o vetor unitário u = (0,1), seja $H_u : \mathbb{R}^2 : \mathbb{R}^2$ o operador definido por H_u = v-2< v,u >.u. mostre que:

a) $H_u(x,y) = (x - y)$
b) Se A é a matriz de H_u em relação a base canônica, α = {(1,0), (0,1)}, então $A^2 = I_2$
c) Se B é a matriz de Hu em relação a base β = {(1,2), (3,4)}, então $\beta^2 = I_2$
d) Em geral H_u^2=I

***Solução**:*

a) $H_u(x,y) = (x,y) - 2 < (x,y), (0,1) > . (0,1) = (x,y) - 2(x.0 + y.1) . (0,1) = (x,y) - 2y(0,1) = (x,y) - (0, -2y) = (x, -y)$

b) $\alpha = \{(1,0), (0,1)\}$

c) $H_{u(1,0)} = (1,0)$

d) $H_{u(0,1)} = (0, -1)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

c) $\beta = \{(1,2), (3,4)\}$,

$H_u(1,2) = (1, -2) = a(1,2) + b(3,4)$

$H_u(3,4) = (3, -4) = c(1,2) + d(3,4)$

$\begin{cases} a + 3b = 1 \\ 2a + 4b = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} c + 3d = 3 \\ 2c + 4d = -4 \end{cases}$

$a = -5$ $c = -12$

$b = 2$ $d = 5$

$\beta = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -12 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

$\beta = \begin{pmatrix} -5 & -12 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -5 & -12 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25-24 & 60-60 \\ -10+10 & -24+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

d) $H_u^2(x,y) = H_u(H_u(x,y) = H_u(x,-y) = (x,y) = I(x,y)$

5. Seja E um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno. Em uma função $S : E \to E$ chama-se semelhança quando existe um número $r > 0$ (chamado de razão de semelhança) tal que $|S(u) - S(v)| = r|u - v|$ para quaisquer $u, v \in E$. Se S é uma semelhança de razão r, prove que existe um operador ortogonal $A: E \to E$ e um vetor $b \in E$ tais que $S(v) = r . Av + b$ para todo $v \in E$.

Solução*:*

Considerando $T = \frac{1}{r}.S$, *temos que* $|T(u) - T(v)| = \left|\frac{1}{r}.S(u) - \frac{1}{r}.S(v)\right| = \frac{1}{r}.r|u - v| = |u - v|$. *Logo T é uma isometria, e como foi visto no exercício 14.4, existem* $A: E \to E$, $b' \in E$, *com A operador ortogonal tais que:*

$T(v) = Av + b' \Rightarrow \frac{1}{r}.S(v) = Av + b' \Rightarrow S(v) = r.Av + r.b' \Rightarrow S(v) = r.Av + b$

Observe o caso particular:

S_θ=2 T_θ é a semelhança de razão 2.

$\left|S_{\theta\,(u)} - S_{\theta\,(v)} = 2\left|T_{\theta\,(u)} - T_{\theta\,(v)}\right| = 2|u - v|\right.$

Obs.: Geometricamente a distância entre os vetores u e v dobra.

6. Seja A uma matriz ortogonal n x n.

a) Prove que $\mathrm{A} : \mathrm{M}_{(\mathrm{n\,x\,n})} \rightarrow \mathrm{M}_{(\mathrm{n\,x\,n})}$ defina por $\mathrm{Ax} = \mathrm{ax}^{\mathrm{T}} + \mathrm{xa}^{\mathrm{T}}$ é transformação linear cuja imagem é conjunto das matrizes simétricas.

b) Prove que, dada uma matriz se $\mathrm{M}_{(\mathrm{n\,x\,n})}$ o conjunto das matrizes x tais que $\mathrm{ax}^{\mathrm{T}} + \mathrm{xa}^{\mathrm{T}} = \mathrm{s}$ é uma variedade afim de dimensão $\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)/2$ no espaço vetorial $\mathrm{M}_{(\mathrm{n\,x\,n})}$.

Solução (a):

Dados $x, y \in M_{(n\,x\,n)}$e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos:

$A(x + \lambda y) = a(x + \lambda y)^T + (x + \lambda y)a^T = a(x^T + \lambda y^T) + (x + \lambda y)a^T =$

$= ax^T + xa^T + \lambda(ay^T + ya^T) = Ax + \lambda Ay\,.$

Logo, A é transformação linear. Agora dado $z \in Im(A)$ temos $z = ax^T + xa^T$ para algum $x \in M_{(n\,x\,n)}$ e assim $z^T = (ax^T)^T + (xa^T)^T = xa^T + ax^T = z.$ Temos que z é simétrica. Sendo agora Z uma matriz simétrica tomando $x = \frac{za}{2}$ temos:

$Ax = ax^T + xa^T = a(\frac{za}{2})^T + \left(\frac{za}{2}\right)a^T = a.a^T.\frac{z}{2} + a.a^T\frac{z}{2} = \frac{z}{2} + \frac{z}{2} = z$

A penúltima igualdade se deve ao fato de termos $a.a^T = I$ pois é a ortogonal.

Solução (b):

Seja agora $V = \{x \in M_{(n\,x\,n)} / \ Ax = s\}$. Primeiro observe que se $x, y \in V$ e $t \in \mathbb{R}$, então:

$A[(1-t)x + ty] = (1-t)Ax + tAy = (1-t)s + ts = s.$

Logo, $(1-t)x + ty \in V$ o que implica que V é variedade. Agora, dado $x_0 \in V$ vamos mostrar que $V = x_0 + N(A)$. De fato, dado $y \in V$, temos que:

$A(y - x_0) = A(y) - A(x_0) = s - s = 0.$

Logo, $y - x_0 \in N(A) \Rightarrow y \in N(A)$*. Por outro lado, dado* $y \in x_0 + N(A)$*, temos* $y = x_0 + r$*,* $r \in N(A)$ *e daí:*

$$Ay = Ax_0 + A.r = Ax_0 = s.$$

Logo, $y \in V$*. Concluindo a igualdade. Assim temos* $dim\,V = dim\,N(A)$ *e por fim, sabendo pelo item (a) que* $Im(A) = S$ *(conjunto das matrizes Simétricas), e que* $dim\,S = \frac{n(n+1)}{2}$*, temos pelo teorema do núcleo e da imagem, que:*

$$dim(M_{(n\,x\,n)}) = dim(N(A)) + dim(Im(A)) \Rightarrow n^2 = dim\big(N(A)\big) + \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dim\big(N(A)\big) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow dim\big(N(A)\big) = \frac{n(n-1)}{2}$$

logo, $dim(V) = dim\big(N(A)\big) = \frac{n(n-1)}{2}$

7. Sejam a = $A_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ortogonal e s = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Determine, uma matriz x tal que

$$ax^t + xa^t = s$$

Solução*:*

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & p \\ n & q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -n & -q \\ m & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -n & m \\ -q & p \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2n & m-q \\ m-q & 2p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

N = - $\frac{1}{2}$ *m . q =2* *x* = $\begin{pmatrix} q+2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & q \end{pmatrix}$

p = $\frac{1}{2}$ *m = 2 + q*

3. CONCLUSÃO

Pela observação dos aspectos analisados conclui-se que existe uma grande aplicação do conteúdo de Álgebra Linear no Ensino Médio tendo como base os Capítulos apresentados e como aplicação, a resolução de alguns exercícios interessantes e facilmente trabalháveis nos anos derradeiros da educação básica, fazendo assim uma conexão da Matemática vista no Ensino Superior e a Matemática vista no ensino médio, que parecem duas matérias distintas, tendo em vista a falta de ligação entre algumas as disciplinas apresentadas e o nível apresentado e cobrado durante o curso. Em virtude do que foi mencionado percebe-se que os professores podem fazer uma relação entre os conteúdos incentivando os alunos a compreender aspectos das estruturas de Conjuntos, avaliar as distintas formas de argumentação, as várias maneiras de correlação do raciocínio, provocar a curiosidade, tendo em vista o aumento de um entendimento da matéria apresentada e para que tais fatos ocorram as disciplinas devem estar conectadas e as analogias de teoria e prática devem ser manifestas na essência das disciplinas.

REFERÊNCIAS

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S.I.R.; FIGUEIREDO, V.L.; WETZLER, H.G. **Álgebra Linear**. 3ª Ed. Harper-Row, São Paulo. 1984.

LIMA, Elon Lages. **Álgebra Linear**. 4ª Ed. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2000.

SANTOS, Taílson. J.F. **Álgebra Linear**. Sociedade Mantenedora de Educação da Bahia. 1998.

SILVA, J.C. **A Álgebra Linear no Ensino Básico**. Dissertação apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido-UFERSA, Campus Mossoró, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

PULINO, Petronio. **Álgebra Linear e suas Aplicações: Notas de Aula**. In: http://www.ime.unicamp.br/~pulino/ALESA/. Acessado em 06/08/2013.

LEITE, Isabel C.C. **Espaços Vetoriais Transformações Lineares**. In: http://www.ifba.edu.br/dca/Corpo_Docente/MAT/ICCL/Notas%20de%20Aula%20-%20Espa%E7os%20vetoriais%20Transforma%E7%F5es%20Lineares.pdf. Acessado em 06/08/2013.