UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

FRANCISCA DAMIANA VIEIRA

# NÃO EXISTÊNCIA DE AUTOVALORES DO OPERADOR DE LAPLACE-BELTRAMI EM GRÁFICOS RADIAIS

FORTALEZA
2015

FRANCISCA DAMIANA VIEIRA

# NÃO EXISTÊNCIA DE AUTOVALORES DO OPERADOR DE LAPLACE-BELTRAMI EM GRÁFICOS RADIAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro.

FORTALEZA

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

V715e Vieira, Francisca Damiana
Não existência de autovalores do operador de Laplace-Beltrami em gráficos radiais / Francisca Damiana Vieira. – 2015.
34 f. : enc. ; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2015.
Área de Concentração: Análise
Orientação: Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro.

1. Operador de Laplace. 2. Espectro. 3. Autovalores. I. Título

CDD 515

FRANCISCA DAMIANA VIEIRA

NÃO EXISTÊNCIA DE AUTOVALORES DO OPERADOR DE LAPLACE-BELTRAMI

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise.

Aprovado em: 16/06/2014.

BANCA EXAMINADORA

José Fábio Bezerra Montenegro

Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Luiz Antonio Caetano Monte
Universidade de Fortaleza (UNIFOR)

Dedico este trabalho aos meus pais e aos meus irmãos.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por estar comigo em todos os momentos da minha vida e desse trabalho me dando força, perseverança, paciência e amor.

Aos meus pais, Antonio e Raimunda, por todo o apoio, amor, incentivo, amizade, orações e principalmente por todas as oportunidades que me permitiram aproveitar.

Aos meus irmãos Francisco, Antonia, Aparecida e Leidmar, pelo amor, compreensão e amizade. De forma especial a Leidmar pelo companherismo, paciência, atenção e amizade, além de ter cativado minha admiração pessoal e profissional.

Aos meus sobrinhos Lívia e Edmundo pelo amor, amizade, alegria e aprendizado.

Aos meus cunhados Francisco e Tiago pela amizade. Principalmente a Tiago pelas palavras de incentivo e confiança.

Aos amigos José Ilhano e Iolanda Mariano por todas as brincadeiras e também pelas boas conversas, incentivo e companhia.

A todos os professores do DM-UFC, em especial aos professores Luquésio Petrola, Lev Birbrair, Marcos Melo, Darlan Girão, Ernani Ribeiro, Gleydson Chaves, Gregório Pacelli, João Lucas, José Othor e Fábio Montenegro que contribuíram para minha formação.

Aos companheiros de pós-graduação: Rafael, Elano, Ilhano, Airton, Raimundo, Diego, Helano, Acásio, Rodrigo, Nino, Davi, Wanderley, João Luiz, Narcélio.

A todos os funcionários do DM-UFC pela simpatia e ajuda quando necessária. Em especial a Andrea e Jessica pela paciência e prestatividade.

Ao Cnpq pela ajuda financeira.

Enfim, agradeço a todos que contribuíram para minha formação acadêmica e aos que colaboraram para a conclusão desse trabalho. Em especial, ao meu orientador Professor Fábio Montenegro pelo incentivo, atenção e por sua paciência durante este período de preparação da dissertação e pelos conhecimentos transmitidos.

"A persistência é o menor caminho do êxito.
(Charles Charplin)"

**RESUMO**

Neste trabalho estudamos o operador de Laplace-Beltrami definido em variedades Riemannianas. Além do espectro de tal operador, apresentamos também algumas de suas propriedades, como o fato deste operador ser auto adjunto e não negativo. Nosso objetivo principal consiste em analisar a existência de autovalores para o operador de Laplace-Beltrami, sob determinadas condições, em superfícies que são gráficos de funções radiais, definida sobre todo o plano, ou seja, superfícies não compactas de revolução. Esta dissertação se baseia no artigo “On the spectrum of the Laplace-Beltrami Operator on a Non-Compact Surface” de Takao Tayoshi ( Comm. By Kinjirô Kunugi, M. J. A., Feb. 12, 1971). Para realização desse trabalho foram introduzidos conceitos básicos de análise funcional com destaque para o estudo de espaços de Hilbert e a teoria espectral de operadores auto adjuntos, geometria riemanniana em superfícies e equações diferenciais parciais, em particular resultados para operadores elípticos de segunda ordem. Além disso, se fizeram necessários alguns resultados de matemática avançada.

**Palavras-chave**: Operador de Laplace. Espectro. Autovalores.

**ABSTRACT**

In this work we study the Laplace-Beltrami operator defined on Riemannian manifolds. In addition to the spectrum of such an operator, we also present some of its properties, such as the fact that this operator is self-adjoint and non-negative. Our main goal is to analyze the existence of eigenvalues for the Laplace-Beltrami operator, under certain conditions, for exemple, surfaces that are complete graphs of radial functions, which is a revolution non-compact surfaces. This dissertation is based on the article "On the spectrum of the Laplace-Beltrami Operator on the Non-Compact Surface"of Takao Tayoshi (Comm. By Kinjiro Kunugi, MJA, Feb. 12, 1971). To perform this work were introduced basics concepts of functional analysis, with emphasis on the study of Hilbert spaces and the spectral theory of self-adjoint operators, Riemannian Geometry in surfaces and Partial Differential Equations, in particular results for elliptic operators of second order. In addition, were needed some results for advanced mathematics.

**Keywords**: Laplace operator. Spectrum. Eigenvalues.

**SUMÁRIO**

# 1 INTRODUÇÃO

O operador de Laplace-Beltrami, costumeiramente denotado por $\Delta$, é um operador diferencial elíptico de segunda ordem e linear, que pode ser definido sobre superfícies no espaço euclidiano e de forma mais geral, em variedades riemannianas, dado como o divergente do gradiente de funções definidas no espaço trabalhado. O Laplaciano aparece naturalmente em equações diferenciais que descrevem muitos fenômenos físicos, como equação da onda, equação da difusão do calor, na mecânica quântica, representando a densidade do fluxo do gradiente de uma função. Considerado num sistema de coordenadas cartesianas, o Laplaciano corresponde à soma das derivadas parciais de segunda ordem com respeito a cada variável independente. Em outros sistemas de coordenadas, como o sistema esférico e sistema cilíndrico, o Laplaciano tem essa mesma forma. Para qualquer sistema de coordenada $(x^1, x^2)$, considerando uma superfície M de classe $C^2$ no $\mathbb{R}^3$ e uma métrica riemanniana $(g_{ij})$ sobre M, onde $G = det(g_{ij})$. O operador de Laplace-Beltrami é dado por

$$\Delta u = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{G} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j} \right),$$

onde $u \in C^2(M)$.

Neste texto, vamos trabalhar com o espaço das funções quadrado integráveis $L^2(M)$, sendo este um espaço de Hilbert com o produto interno $(\phi, \psi) = \displaystyle\int \phi\overline{\psi} dM$, onde $dM = \sqrt{G} dx^1 dx^2$ é o elemento de medida da superfície M e nosso grande intuito é demonstrar o seguinte resultado:

“Considerando M como uma superfície de revolução, representada por

$$x = r(s)\cos\theta, \; y = r(s)\sin\theta, \; z = h(s), \; r(0) = h(0) = 0, \; (0 \leq s < \infty; \; 0 \leq \theta < 2\pi),$$

onde o parâmetro $s$ é o comprimento de $(0,0,0)$ à $(x, y, z)$ ao longo da reta gerada por $M$. Se tomarmos $\dfrac{dr}{ds} \geq 0$ para $0 \leq s < \infty$, então $\Delta$ não possui autovalores.

# 2 PRELIMINARES

Neste capítulo são apresentados alguns dos principais conceitos utilizados no decorrer desse trabalho. Iniciamos com resultados básicos sobre espaços de Hilbert, uma vez que o espaço vetorial que trabalhamos pertence a essa categoria de espaços.

## 2.1 *Espaços de Hilbert*

**Definição 2.1** *Seja $E$ um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{C}$. Um produto vetorial interno em $E$ é uma aplicação*

$$\langle .,. \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

*tal que para quaisquer $x, x_1, x_2, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ :*
$(p_1)$ $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$;
$(p_2)$ $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$;
$(p_3)$ $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$;
$(p_4)$ *Para todo $x \neq 0$, $\langle x, x\rangle$ é um número real estritamente positivo.*

*Pelas propriedades acima, temos:*

. $\langle x, 0\rangle = \langle 0, y\rangle = 0$;

. $\langle x, x\rangle = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$;

. $\langle x, y_1 + y_2\rangle = \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle$;

. $\langle x, y_1 - y_2\rangle = \langle x, y_1\rangle - \langle x, y_2\rangle$;

. $\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$;

. *Se* $\langle z, y_1\rangle = \langle z, y_2\rangle$, $\forall z \in E$, *então* $y_1 = y_2$.

*O par $(E, \langle ., .\rangle)$ é chamado de espaço com produto interno.*

**Proposição 2.1** *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz): Seja $E$ um espaço vetorial com produto interno. Então*

$$\langle x, y\rangle \|x\| \|y\|$$

*para qualquer $x, y$ em $E$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente, se os vetores $x$ e $y$ são linearmente dependentes.*

**Demonstração 1** *O resultado é imediato se $x = 0$ ou $y = 0$. Podemos então supor*

*Chame* $a = \langle y, y\rangle$ *e* $b = \langle x, y\rangle$ *para concluir que* $a\bar{b}\langle x, y\rangle = \langle y, y\rangle\bar{b}b = |b|^2\langle y, y\rangle$ *é um número real positivo. Lembrando que a também é um número real positivo,*

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle ax - by, ax - by\rangle \\ &= a\bar{a}\langle x, x\rangle - b\bar{a}\langle y, x\rangle - a\bar{b}\langle x, y\rangle + b\bar{b}\langle y, y\rangle \\ &= a^2\langle x, x\rangle - 2Re(a\bar{b}\langle x, y\rangle) + |b|^2\langle y, y\rangle \\ &= a^2\langle x, x\rangle - 2|b|^2\langle y, y\rangle + |b|^2\langle y, y\rangle \\ &= a^2\langle x, x\rangle - |b|^2\langle y, y\rangle \\ &= \langle y, y\rangle(\langle y, y\rangle\langle x, x\rangle - |b|^2) \\ &= \langle y, y\rangle(\langle y, y\rangle\langle x, x\rangle - |\langle x, y\rangle|^2). \end{aligned}$$

*Como* $\langle y, y\rangle > 0$ *segue que*

$$\|y\|^2\|x\|^2 - |\langle x, y\rangle|^2 = \langle y, y\rangle\langle x, x\rangle - |\langle x, y\rangle|^2 \geq 0,$$

*o que prova a desigualdade desejada.*

**Corolário 2.1** *Seja* $E$ *um espaço com produto interno. A função*

$$\|.\| : E \to \mathbb{R}, \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

*é uma norma em* $E$*.*

**Demonstração 2** *Provaremos apenas a desigualdade triangular, uma ver que a verificação das demais é imediata. Para todo* $x, y \in E$*, usando a desigualdade Cauchy-Schwarz obtemos*

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2Re(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

*Extraindo a raiz quadrada da desigualdade triangular segue o resultado*

**Definição 2.2** *Um espaço com produto interno que é completo na norma induzida pelo produto interno é chamado de espaço de Hilbert. Em particular, um espaço de Hilbert é um espaço de Banach com a norma induzida pelo produto interno.*

*Considere o espaço das funções quadrado integráveis* $L^2(X)$*, isto é,*

$$L^2(X) = \left\{ f \in X : \int f^2 < \infty \right\}$$

*a expressão* $\langle f, g\rangle = \int_X f\overline{g}du$ *define um produto interno em* $L^2(X)$. *A norma induzida coincide com a norma original de* $L^2(X)$,

$$\|f\|_{L^2(X)} = \left(\int_X |f|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$$

*onde* $L^2(X)$ *é completo. Portanto,* $L^2(X)$ *munido desse produto interno é Hilbert.*

***Proposição 2.2 (Lei do Paralelogramo)*** *Seja* $E$ *um espaço vetorial com um produto interno. Então, para quaisquer* $x, y \in E$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

***Demonstração 3*** *Somando as igualdades*

$$\begin{cases} \|x+y\|^2 & = & \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 \\ \|x-y\|^2 & = & \|x\|^2 - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \|y\|^2 \end{cases}$$

*obtemos o resultado.*

**Proposição 2.3** *Seja* $E$ *um espaço com produto interno e seja* $M$ *um subespaço completo de* $E$. *Para todo* $x \in E$ *existe um único* $p \in M$ *tal que*

$$\|x-p\| = dist(x, M) := \inf_{y\in M} \|x-y\|.$$

**Demonstração 4** *Como* $d = dist(x, M)$, *da definição de ínfimo podemos tomar uma sequência* $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ *de vetores de* $M$ *tal que*

$$d < \|x - y_n\| < d + \frac{1}{n} \qquad (*)$$

*para todo* $n$. *Sejam* $m, n \in \mathbb{N}$. *Aplicamos a Lei do Paralelogramo para os vetores* $x - y_n$ *e* $x - y_m$ *para obtermos*

$$2\|x-y_m\|^2 + 2\|x-y_n\|^2 = \|x-y_n+x-y_m\|^2 + \|x-y_n-x+y_m\|^2.$$

*Como* $M$ *é subespaço vetorial,* $\dfrac{y_n+y_m}{2} \in M$, *da igualdade acima e de* $(*)$ *resulta que*

$$\begin{array}{rcl} \|y_n - y_m\|^2 & = & 2\|x-y_m\|^2 + 2\|x-y_n\|^2 - \|2x-(y_n+y_m)\|^2 \\ & = & 2\|x-y_m\|^2 + 2\|x-y_n\|^2 - 4\left\|x - \dfrac{y_n+y_m}{2}\right\|^2 \\ & \leq & 2\left(d+\dfrac{1}{m}\right)^2 + 2\left(d+\dfrac{1}{n}\right)^2 - 4d^2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

*se* $m, n \to \infty$.
*Isso prova que a sequêcia* $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ *é de Cauchy no espaço completo* $M$*, logo convergente para um certo* $p \in M$. *Como* $y_n \to p$*, fazendo* $n \to \infty$ *em* $(*)$ *concluímos que* $\|x-p\| = d$.
*Para provar a unicidade, seja* $q \in M$ *tal que* $\|x-q\| = d$. *aplicando a Lei do Paralelogramo para os vetores* $x-p$ *e* $x-q$ *obtemos*

$$\begin{aligned} 4d^2 &= 2d^2 + 2d^2 = 2\|x-p\|^2 + 2\|x-q\|^2 \\ &= \|x-p+x-q\|^2 + \|x-p-x+q\|^2 \\ &= \|2x-p-q\|^2 + \|p-q\|^2 \\ &= 4\left\|x - \frac{p+q}{2}\right\|^2 + \|p-q\|^2. \end{aligned}$$

*Como* $\frac{p+q}{2} \in M$*, segue que*

$$0 \le \|p-q\|^2 = 4d^2 - 4\left\|x - \frac{p+q}{2}\right\|^2 \le 4d^2 - 4d^2 = 0,$$

*o que é suficiente para concluir que* $p = q$.
**Definição 2.3** *Sejam* $E$ *um espaço com produto interno e* $A$ *um subconjunto de* $E$. *Denominamos o subconjunto*

$$A^{\perp} = \{y \in E; \langle x, y\rangle = 0 \text{ para todo } x \in A\}$$

*de complemento ortogonal de* $A$.
**Proposição 2.4** *Sejam* $H$ *um espaço de Hilbert e* $M$ *um subespaço fechado de* $H$. *Então* $H = M \oplus M^{\perp}$*, isto é,* $x \in H$ *admite uma única representação na forma* $x = p + q$ *com* $p \in M$ *com* $q \in M^{\perp}$

*Além disso,*

$$\|x-p\| = dist(x, M).$$

*O vetor* $p$ *é chamado de projeção ortogonal de* $x$ *sobre* $M$

**Demonstração 5** *Dado* $x \in H$*, pela Proposição 2.3, existe um único vetor* $p \in M$ *tal que*

$$\|x-p\| = dist(x, M).$$

*Tomando* $q = x - p$ *segue imediatamente que* $x = p + q$. *Basta então provar que* $q \in M^{\perp}$.
*Para todo* $y \in M$ *e todo escalar* $\lambda$*, o vetor* $p + \lambda y$ *pertence a* $M$*, logo*

$$\begin{aligned} \|q\|^2 &= \|x-p\|^2 = dist(x, M)^2 \le \|x-(p+\lambda y)\|^2 = \|q-\lambda y\|^2 \\ &= \langle q-\lambda y, q-\lambda y\rangle = \|q\|^2 - \lambda\langle y, q\rangle - \overline{\lambda}\langle q, y\rangle + \lambda\overline{\lambda}\|y\|^2. \end{aligned}$$

*Disso concluímos que*

$$0 \leq |\lambda|^2 \|y\|^2 - 2Re(\lambda\langle y, q\rangle).$$

*Escreva* $\langle y, q\rangle$ *na forma polar* $|\langle y, q\rangle|e^{i\theta}$ *para cada* $t \in \mathbb{R}$ *chame* $\lambda = te^{-i\theta}$. *Da desigualdade acima segue que*

$$0 \leq t^2\|y\|^2 - 2t|\langle y, q\rangle|$$

*para todo* $t \in \mathbb{R}$ *e consequentemente o discriminante do binômio é menor ou igual a zero. Isso nos dá* $|\langle y, q\rangle| = 0$, *e portanto* $q \in M^{\perp}$.
*Para provar a unicidade, suponha que* $p + q = p_1 + q_1$ *com* $p,\ p_1 \in M$ *e* $q,\ q_1 \in M^{\perp}$
*Como* $M$ *e* $M^{\perp}$ *são subespaços*

$$p - p_1 = q_1 - q \in M \cap M^{\perp} = \{0\}.$$

*Segue que* $p = p_1$ *e* $q = q_1$.
.

## 2.2 *Geometria Riemanniana*

Agora introduziremos alguns fatos de geometria riemanniana, definindo ferramentas importantes como divergente de um campo e o laplaciano sobre variedades riemannianas.
**Definição 2.4** *Um subconjunto* $S \subset \mathbb{R}^3$ *é uma superfície regular se, para todo ponto* $p \in S$, *existem uma vizinhança* $V$ *de* $p$ *em* $\mathbb{R}^3$ *e uma aplicação* $x : U \subset \mathbb{R}^2 \to V \cap S$ *de um aberto* $U \subset \mathbb{R}^2$ *sobre* $V \cap S$, *tais que:*
*(i)* $x$ *é um homeomorfismo diferenciável;*
*(ii) A diferencial* $dx_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *é biunívoca para todo* $q \in U$.
**Definição 2.5** *Uma métrica riemanniana (ou estrutura riemanniana) em uma variedade diferenciável* $M$ *é uma correspondência que associa a cada ponto* $p$ *de* $M$ *um produto interno* $\langle , \rangle_p$ *no espaço tangente* $T_pM$ *que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se* $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ *é um sistema de coordenadas locais em torno de* $p$, *com* $x(x_1, x_2, \cdots, x_n) = q \in x(U)$ *e* $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \cdots, 1, \cdots, 0)$, *então*

$$\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q)\rangle = g_{ij}(x_1, \cdots, x_n)$$

*é uma função diferenciável em* $U$.
**Proposição 2.5** *Se* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *é uma função suave e* $U \subset M$ *é uma vizinhança coordenada, com campos coordenados* $\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}$, *então o gradiente de* $f$ *é dado em* $U$ *por*

$$\nabla f = g^{kl}\frac{\partial f}{\partial x_l}\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

*Em particular,*

$$|\nabla f|^2 = g^{kl}\frac{\partial f}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_l}.$$

**Demonstração 6** *Se* $\nabla f = a_j\frac{\partial}{\partial x_j}$*, então*

$$\frac{\partial f}{\partial x_l} = \left\langle \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_l}\right\rangle = a_j\left\langle\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right\rangle = a_j g_{jl}.$$

*De maneira que*

$$g^{kl}\frac{\partial f}{\partial x_l} = a_j g^{kl} g_{jl} = a_j\delta_{kj} = a_k.$$

*Para o que falta, temos:*

$$\begin{aligned}
|\nabla f|^2 &= \left\langle g^{kl}\frac{\partial f}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_k}, g^{mj}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_m}\right\rangle\\
&= g^{kl}g^{mj}g_{km}\frac{\partial f}{\partial x_l}\frac{\partial f}{\partial x_j}\\
&= g^{kl}\delta_{jk}\frac{\partial f}{\partial x_l}\frac{\partial f}{\partial x_j}\\
&= g^{kl}\frac{\partial f}{\partial x_l}\frac{\partial f}{\partial x_k}.
\end{aligned}$$

**Proposição 2.6** *Seja* $\{\Omega_\alpha\}$ *uma arbitrária cobertura de* $M$ *por conjuntos abertos. Então, para qualquer função* $f \in C_0^\infty(M)$ *existe uma sequência finita* $\{f_i\}_{i=1}^k$ *de funções de* $C_0^\infty(M)$ *tal que cada* $f_i$ *é suportada em um dos conjuntos* $\Omega_\alpha$ *e*

$$f = f_1 + ... + f_k.$$

***Demonstração 7*** *Ver o capítulo 3 de [5].*

**Teorema 2.1** *(Teorema da Divergência): Para qualquer campo vetorial suave* $v(x)$ *em uma variedade riemanniana* $M$*, existe uma única função suave em* $M$*, denotada por* $div\, v$*, tal que a seguinte identidade é satisfeita*

$$\int_M (div\, v)u dM = \int_M \langle v, \nabla u\rangle\, dM \qquad (*)$$

*para todo* $u \in C_0^\infty(M)$*.*

**Demonstração 8** *A unicidade do* $div\, v$ *é simples:*

*Se existem dois candidatos a* $div\, v$*, digamos* $(div\, v)'$ *e* $(div\, v)''$ *então, para todo* $u \in$

$C_0^\infty(M)$,

$$\int_M (div\, v)' u dM = \int_M (div\, v)'' u dM \Rightarrow (div\, v)' = (div\, v)''.$$

*Para provar a existência de* $div\, v$*, primeiramente mostraremos que* $div\, v$ *existe em qualquer carta. Se* $U$ *é uma carta em* $M$ *com as coordenadas* $x^1, \cdots, x^n$ *então usando integração por partes em* $U$*, obtemos para qualquer* $u \in C_0^\infty(U)$*,*

$$\begin{aligned}
\int_U \langle v, \nabla u\rangle_g dv &= \int_U \langle v, du\rangle dv \\
&= \int_U v^k \frac{\partial u}{\partial x^k} \sqrt{det\, g} d\lambda \\
&= -\int_U \frac{\partial}{\partial x^k}(v^k \sqrt{det\, g}) u d\lambda \\
&= -\int_U \frac{1}{\sqrt{det\, g}} \frac{\partial}{\partial x^k}(v^k \sqrt{det g}) u dv.
\end{aligned}$$

*Comparando com* $(*)$ *vemos que o divergente em* $U$ *pode ser definido por*

$$div\, v = \frac{1}{\sqrt{det\, g}} \frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{det g} v^k). \qquad (**)$$

*Se* $U$ *e* $V$ *são duas cartas, então* $(**)$ *define o divergente em* $U$ *e* $V$*, o qual coincide em* $U \cap V$ *por a mesma sentença. Assim* $(**)$ *define* $div\, v$ *como uma função definida em toda a variedade* $M$*, e o divergente definido deste modo satisfaz a identidade* $(*)$ *para toda função teste* $u$ *de suporte compacto em uma carta.*

*Vamos extender a identidade* $(*)$ *para toda função* $u \in C_0^\infty(M)$*. Seja* $\{\Omega_\alpha\}$ *qualquer família de cartas que cobre* $M$*. Pela proposição 2.6, qualquer função* $u \in C_0^\infty(M)$ *pode ser representada como uma soma* $u_1 + u_2 + \cdots + u_k$*, onde cada* $u_i$ *é suave e de suporte compacto em algum* $\Omega_\alpha$*.*

*Assim,* $(*)$ *é satisfeita para cada função* $u_i$*, e somando-se todas essas identidades, obtemos* $(*)$ *para a função* $u$*.*

**Definição 2.6** *Definimos o operador de Laplace em qualquer variedade Riemanniana como segue*

$$\Delta = div \circ \nabla.$$

*Isto é, para qualquer função suave* $f$ *em* $M$*,*

$$\Delta f = div(\nabla f),$$

*onde* $\Delta f$ *é também uma função suave em* $M$*. Em coordenadas locais, temos*

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{det\, g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{det\, g} g^{kl} \frac{\partial}{\partial x^l}\right),$$

*onde* $g = (g_{kl})$.

## 2.3 *Teoria Espectral*

Nesta seção nos restringiremos a expor algumas definições iniciais da teoria espectral e resultados sobre o espectro de operadores auto adjuntos.

**Definição 2.7** *Seja* $H$ *um espaço de Hilbert e* $T : H \to H$ *um operador linear limitado. Definamos* $T_\lambda = T - \lambda I : H \to H$ *e os conjuntos* $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; T_\lambda \text{ não é um isomorfismo}\}$, *denotado por espectro de* $T$, *e* $\rho(T) = \mathbb{C} - \sigma(T)$, *denotado por resolvente de* $T$.

**Definição 2.8** *Se* $\lambda \in \sigma(T)$, *então* $T_\lambda : H \to H$ *não é um isomorfismo, isso pode acontecer por*

1. $T_\lambda$ *não é injetivo;*
2. $T_\lambda$ *é injetivo, mas* $\overline{ImT_\lambda} \neq H$;
3. $T_\lambda$ *é injetivo,* $\overline{ImT_\lambda} = H$, *mas* $T_\lambda^{-1} : ImT_\lambda \to H$ *não é contínua.*

*Assim temos:*

1. $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; T_\lambda \text{ não é injetiva}\}$ *(Espectro Pontual);*
2. $\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; T_\lambda \text{ é injetiva, mas } \overline{ImT_\lambda} \neq H\}$ *(Espectro Resídual);*
3. $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,;\, T_\lambda \text{ é injetiva, } \overline{ImT_\lambda} = H, \text{ mas } T_\lambda^{-1} : ImT_\lambda \longrightarrow H \text{ não é contínua}\}$ *(Espectro contínuo).*

**Observação 2.1**

1. *Dizemos que* $\lambda \in \mathbb{R}$ *é autovalor de* $T \in B(H)$, *se* $Ker(T_\lambda) \neq 0$. *Denotaremos por* $VP(T)$, *o conjunto dos autovalores de* $T$;
2. *Note que* $VP(T) = \sigma_p(T)$.

**Proposição 2.7** *Seja* $T : H \longrightarrow H$ *um operador linear, auto adjunto, definido num espaço de Hilbert. Então,*

*(i)* $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$;

*(ii)* $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$.

**Demonstração 9** *(i) Para todo* $x \in H$, *temos*

$$\langle Tx, x\rangle = \langle x, T^*x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$$

*Logo,*

$$\langle Tx, x\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}.$$

*Assim,*

$$\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}.$$

*(ii) Sejam* $\lambda \in \sigma_p(T)$ *e* $x \in Ker(T_\lambda) \setminus \{0\}$, *então* $Tx = \lambda x$.

*Assim,*

$Tx = \lambda x \Rightarrow \langle Tx, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \|x\|^2$ *onde* $\|x\|^2 > 0$.
*Logo,*

$$\lambda = \frac{\langle Tx, x\rangle}{\|x\|^2}.$$

*Portanto, como* $\|x\|^2 \in \mathbb{R}$ *e pelo item (i)* $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$, *temos que* $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Proposição 2.8** *Seja $H$ um espaço de Hilbert e $T : H \to H$ um operador linear auto-adjunto. Então, $\sigma_r(T) = \emptyset$.*

**Demonstração 10** *Se $\lambda \in \sigma_r(t)$, por definição, $T_\lambda$ é injetiva mas $\overline{ImT_\lambda} \neq H$.*
*Tome $y \in \overline{ImT_\lambda}^{\perp}$, com $y \neq 0$. Então $\langle T_\lambda x, y\rangle = 0, \forall x \in H$ e assim $0 = \langle T_\lambda x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle - \langle \lambda x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle - \langle x, \overline{\lambda} y\rangle = \langle x, T_{\overline{\lambda}} y\rangle \Rightarrow \langle x, T_{\overline{\lambda}} y\rangle = 0, \forall x \in H \Rightarrow T_{\overline{\lambda}} y = 0 \Rightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_p(T) \subset \mathbb{R} \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}$.*
*Portanto, $\lambda \in \sigma_r(T) \cap \sigma_p(T)$, um absurdo, já que esses conjuntos são disjuntos.*

**Proposição 2.9** *Se $H$ é um espaço de Hilbert e $T : H \to H$ é um operador auto-adjunto, então*

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T).$$

**Demonstração 11** *Seja $\lambda \in \sigma(T) \backslash \sigma_p(T)$, mostraremos que $\overline{ImT_\lambda} \neq H$.*
*Se $y \in \overline{ImT_\lambda}^{\perp}$, então $\langle T_\lambda x, y\rangle = 0, \forall x \in H \Rightarrow \langle x, T_{\overline{\lambda}} y\rangle = 0; \forall x \in H \Rightarrow T_{\overline{\lambda}} y = 0 = T_\lambda y \Rightarrow y = 0$, já que $\lambda \not\in \sigma_p(T)$.*
*Logo,*
$\overline{ImT_\lambda}^{\perp} = \{0\}$ *e assim* $\overline{ImT_\lambda} = H$.
*Portanto, $\lambda \in \sigma_c(T)$.*

**Proposição 2.10** *Seja $T : H \to H$ um operador auto-adjunto definido num espaço de Hilbert. Então,*

$$\lambda \in \rho(T) \Leftrightarrow \|T_\lambda x\| \geq c\|x\|, \forall x \in H\, e\, c > 0.$$

**Demonstração 12** *Suponha que $\lambda \in \rho(T)$, então $T_\lambda$ é um isomorfismo.*
*Assim,*
$T_\lambda \circ T_\lambda^{-1} = I = T_\lambda^{-1} \circ T_\lambda \Rightarrow \|x\| = \|T_\lambda^{-1} \circ T_\lambda(x)\| \leq \|T_\lambda^{-1}\| \|T_\lambda(x)\| \Rightarrow \|T_\lambda(x)\| \geq \|T_\lambda^{-1}\|^{-1} \cdot \|x\| = c\|x\|$, *onde* $c = \|T_\lambda^{-1}\|^{-1}$.
*Reciprocamente, suponhamos que $\|T_\lambda\| \geq c\|x\|$. Segue que $T_\lambda$ é injetiva e sua imagem fechada.*
*Caso $ImT_\lambda = H$, teremos $T_\lambda$ bijetiva e pelo Teorema da Aplicação Inversa, $T_\lambda$ é um isomorfismo, ou seja, $\lambda \in \rho(T)$.*
***Afirmação:*** $\overline{ImT_\lambda} = H$.

*Seja* $y \epsilon \overline{ImT_\lambda}^\perp$ *e* $y \neq 0$. *Então*

$$\langle T_\lambda x, y \rangle = 0, \forall x \in H.$$

*Mas,*

$$\langle T_\lambda x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle - \langle \lambda x, y \rangle = \langle x, Ty \rangle - \langle x, \overline{\lambda} y \rangle = \langle x, T_{\overline{\lambda}} y \rangle.$$

*Assim,*

$\langle x, T_{\overline{\lambda}} y \rangle = 0, \forall x \in H \Rightarrow T_{\overline{\lambda}} y = 0 \Rightarrow Ty = \overline{\lambda} y \Rightarrow \overline{\lambda} \in \sigma(T) \subset \mathbb{R} \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow$ $T_\lambda = T_{\overline{\lambda}}$ *não é injetiva, pois* $T_{\overline{\lambda}} y = 0$ *e* $y \neq 0$, *uma contradição.*

*Logo,*

$\overline{ImT}^\perp = \{0\}$ *e daí* $H = \overline{ImT} \oplus \overline{ImT}^\perp = \overline{ImT} = ImT$, *onde essa última igualdade segue do fato de* $ImT$ *ser fechada.*

**Proposição 2.11** *Se* $H$ *é um espaço de Hilbert e* $T : H \to H$ *é um operador auto-adjunto, antão*

$$\sigma(T) \subset \left[ \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle, \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle \right]$$

**Demonstração 13** *Tomando* $R = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$ *e* $r = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$ *vamos provar que se* $\lambda > R$ *ou* $\lambda < r$, *então* $\|T_\lambda x\| \geq c\|x\|, \forall x \in H$, *o que implica, pela proposição 2.10, que* $\lambda \in \rho(T)$.

*Com efeito, para* $\|x\| = 1$, *temos*

$$\langle T_\lambda x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle - \lambda \|x\|^2 \leq R - \lambda = -a < 0$$

$$\langle T_\lambda x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle - \lambda \|x\|^2 \geq r - \lambda = d > 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcccc} a < |\langle T_\lambda x, x \rangle| & \leq & \|T_\lambda x\| \|x\| & = & \|T_\lambda x\| \\ d < |\langle T_\lambda x, x \rangle| & \leq & \|T_\lambda x\| \|x\| & = & \|T_\lambda x\| \end{array} \right. , \forall x \in H; \|x\| = 1.$$

*Se* $y \neq 0$, *então*

$$\left| T_\lambda \left( \frac{y}{\|y\|} \right) \right| > a \Rightarrow \|T_\lambda y\| > a\|y\|$$

*e*

$$\left|T_\lambda\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right| > d \Rightarrow \|T_\lambda y\| > d\|y\|$$

*o que implica em* $\lambda \in \rho(T)$.

**Proposição 2.12** *Seja* $H$*um espaço de Hilbert e* $T$ *um operador limitado e auto-adjunto. Então*

$$\|T\| = \sup\{\|\langle Tx, x\rangle\|; \|x\| = 1\}.$$

**Demonstração 14** *Se* $T \equiv 0$, *o resultado é imediato. Suponhamos* $T \not\equiv 0$. *Note que, da desigualdade de Cauchy-Schwarz,*

$$|\langle Tx, x\rangle \leq \|Tx\|\|x\| \leq \|T\|\|x\|^2$$

*para todo* $x \in H$, *e portanto*

$$\sup\{|\langle Tx, x\rangle|; \|x\| = 1\} \leq \|T\|.$$

*Resta provar a desigualdade inversa.Como* $T \not\equiv 0$, *podemos tomar* $x_0 \in H$ *com* $\|x_0\| = 1$ *e* $T(x_0) \neq 0$. *Chamemos*

$$x := \|Tx_0\|^{\frac{1}{2}} \cdot x_0 \qquad e \qquad y := \|Tx_0\|^{\frac{1}{2}} \cdot T(x_0).$$

*Então* $\|x\|^2 = \|y\|^2 = \|Tx_0\|$. *É claro que* $\langle Tx, y\rangle = \|Tx_0\|^2$ *e como* $T$ *é auto-adjunto,*

$$\langle Ty, x\rangle = \langle y, Tx\rangle = \langle\overline{Tx, y}\rangle = \|Tx_0\|^2$$

*provando que*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle Ty, x\rangle = \|Tx_0\|^2.$$

*Definindo* $u = x + y$ *e* $v = x - y$, *e substituindo as equações*

$$\begin{aligned}
\langle Tu, u\rangle &= \langle Tx, x\rangle + \langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle + \langle Ty, y\rangle \\
\langle Tv, v\rangle &= \langle Tx, x\rangle - \langle Tx, y\rangle - \langle Ty, x\rangle + \langle Ty, y\rangle.
\end{aligned}$$

*Obtemos,*

$$\langle Tu, u\rangle - \langle Tu, v\rangle = 2\langle Tx, y\rangle + 2\langle Ty, x\rangle = 4\|Tx_0\|^2.$$

*Para simplificar a notação, escrevamos* $C = \sup\{|\langle Tz, z\rangle|; \|z\| = 1\}$ *e vejamos que* $|\langle Tw, w\rangle| \leq C\|w\|^2$, *para todo* $w \in H$.

*De fato, para* $w = 0$ *o resultado é imediato, e para* $w \neq 0$,

$$\frac{1}{\|w\|^2} \cdot |\langle Tw, w\rangle| = \left|\left\langle T\left(\frac{w}{\|w\|}\right), \frac{w}{\|w\|}\right\rangle\right| \leq C.$$

*Usando a lei do paralelogramo e lembrando que $\langle Tw, w\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $w \in H$ (proposição 2.7), temos,*

$$\begin{array}{rcccl} 4\|Tx_0\|^2 & = & |\langle Tu,u\rangle| - |\langle Tv,v\rangle| & \leq & |\langle Tu,u\rangle| + |\langle Tv,v\rangle| \\ & \leq & C\|u\|^2 + C\|v\|^2 & = & C\|x+y\|^2 + C\|x-y\|^2 \\ & = & 2C\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) & = & 4C\|Tx_0\|. \end{array}$$

*Como$T(x_0) \neq 0$ concluímos que $\|Tx_0\| \leq C$. Isso vale para todo $x_0 \in H$, tal que $\|x_0\| = 1$ e $T(x_0) \neq 0$. Então $\|T\| = \sup\{\|T(x_0)\|; \|x_0\| = 1\} = \sup\{\|Tx_0\|; \|x_0\| = 1 \, e Tx_0 \neq 0\} \leq C$.*

## 2.4 *Teorema da Continuação Única para Equações Elípticas*

Agora definiremos Equações Diferenciais Parciais Elípticas de segunda ordem e apresentamos um dos principais resultados desse trabalho, o qual permite a conclusão da prova do teorema principal.

**Definição 2.9** *Uma equação a derivadas parciais ou equação diferencial parcial (E.D.P.) é uma equação envolvendo duas ou mais variáveis independentes $x$, $y$, $z$, $t\ldots$ e derivadas parciais de uma função (variável dependente) $u = u(x, y, z, t\ldots)$. De maneira mais precisa, uma E.D.P. em $n$ variáveis independentes $x_1$, $x_2, \ldots,$ $x_n$ é uma equação da forma*

$$F\left(x_1, \ldots,\ x_n,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots,\ \frac{\partial u}{\partial x_n},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^t u}{\partial x_n^k}\right) = 0,$$

*onde $(x_1, \ldots,\ x_n) \in \Omega$, $\Omega$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $F$ é uma função dada e $u(x)$ é a função que queremos determinar.*

*A ordem de uma E.D.P. é dada pela derivada parcial de maior ordem que ocorre na equação: Por exemplo, a ordem da equação acima é $k$ se $F$, como função de alguma das derivadas de ordem $k$, é não constante.*

**Definição 2.10** *Um operador diferencial de segunda ordem é dado portanto*

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \ + \ \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} \ + \ c(x)u,$$

*onde $u \in C^2(\Omega)$ e $\Omega$ é um aberto do $\mathbb{R}^n$.*

*Dizemos que $L$ é um operador elíptico, se a matriz $(a_{ij}(x))$ é positiva definida para todo $x \in \Omega$, ou seja, se $\lambda(x)$ e $\Lambda(x)$ denotam o menor e o maior autovalor de $(a_{ij}(x))$, então*

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2$$

*para todo* $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

**Teorema 2.2** ***(Teorema da Continuação Única para Equações Elípticas)***
*Seja* $u(x_1, \ldots, x_k)$ *uma solução de uma equação elíptica num domínio* $D$. *Se* $u$ *se anula num subconjunto aberto de* $D$, *o princípio da continuação única assegura que* $u$ *se anula em todo o domínio* $D$.

## 2.5 *Operador de Laplace*

Em seguinda, faremos um estudo mais focado no Operador de Laplace, estabelecendo suas propriedades no ambiente trabalhado. Além disso, introduzimos importantes resultados para a conclusão da prova do teorema principal, obtendo argumentos necessários para tal intuito.

**Proposição 2.13** *Se* $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *e* $\partial_i u, \partial_i v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *para algum índice* $i$, *então*

$$(\partial iu, v)_{L^2} = -(u, \partial iv)_{L^2}$$

**Demonstração 15** *:Ver o capítulo 2 de [5].*

**Proposição 2.14** *(Fórmula de Green) Para toda função* $u \in W_0^1(M)$ *e* $v \in W^2(M)$, *temos*

$$\int_M u\Delta v d\mu = -\int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle d\mu. \qquad (*)$$

**Demonstração 16** *De fato, se* $u \in D$, *então pela definição do laplaciano* $\Delta v$ *e do gradiente* $\nabla u$, *temos*

$$\begin{aligned} \int_M \Delta v d\mu &= (\Delta v, u) = (v, \Delta u) \\ &= (v, div(\nabla u)) \\ &= -(\nabla v, \nabla u) \\ &= -\int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle d\mu. \end{aligned}$$

*Para qualquer* $u \in W_0^1$, *existe uma sequência* $\{u_k\} \subset D$ *que converge para* $u$ *em* $W^1$. *Aplicando* $(*)$ *para* $u_k$ *e passando ao limite, obtemos a mesma identidade para* $u$ *pois ambos os lados de* $(*)$ *são funcionais de* $u \in W^1$.

**Definição 2.11** *Seja* $D_1$ *o completamento de* $C_0^2(M)$, *munido da norma*

$$\|f\|^2 = \|f\|^2 + \int |grad\, f|^2 dM,$$

*onde* $\|f\|^2 = (f, f)$ *e* $|grad\, f|^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \dfrac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \overline{\dfrac{\partial f}{\partial x^j}}$.
$D_1^*$ *é o espaço dual de* $D_1$ *e* $L^2(M)$ *está mergulhado em* $D_1^*$

**Definição 2.12** $F \in D_1^*$ *é igual a* $\Delta u$*, para* $u \in D_1$*, se*

$$F(\psi) = \int u \Delta \psi dM,$$

*para qualquer* $\psi \in C_0^2(M)$.

**Definição 2.13** *Seja* $L$ *o operador com domínio* $D(L) = \{f; f \in D_1, \Delta f \in L^2(M)\}$ *e* $Lu = \Delta u$.

**Proposição 2.15** *Para qualquer* $\alpha > 0$*, o resolvente* $R_\alpha := (L + \alpha id)^{-1}$ *existe e é um operador em* $L^2$ *limitado, não-negativo e auto adjunto. Além disso,* $\|R_\alpha\| \leq \alpha^{-1}$.

**Demonstração 17** *Ver o capítulo 4 de [5].*

**Lema 2.1** *$L$ é um operador auto-adjunto, não-positivo definido em $L^2(M)$.*

**Demonstração 18** *$L$ é não-positivo: segue da proposição 2.14 ,*

$$\int_M u\Delta u d\mu = -\int_M |\nabla u|^2 d\mu \leq 0.$$

*$L$ é auto-adjunto: Pela proposição 2.15, o resolvente $R = R_1 = (L + Id)^{-1}$ existe e é um operador limitado auto-adjunto. Vamos mostrar que $L = R^{-1} - Id$ é também um operador auto-adjunto.*
*É suficiente provar que $R^{-1}$ com o domínio $W_0^2$ é um operador auto adjunto.*
*A simetria de $R^{-1}$ segue da simetria de $L$, garantida pela proposição 2.13. Portanto, $(R^{-1})^*$ é uma extensão de $R^{-1}$, e tudo que precisamos mostrar é que*

$$dom(R^{-1})^* \subset dom(R^1).$$

*Pela definição de operador adjunto, $dom(R^{-1})^* = \{u \in L^2; \exists f \in L^2, \forall v \in domR^{-1}\ e\ (R^{-1}v, u) = (v, f)\}$.*
*Como $R_f$ definido e pertencente ao domínio de $R^{-1}$, temos pela simetria de $R^{-1}$, $(R^{-1}v, Rf) = (v, R^{-1}Rf) = (v, f)$.*
*Logo, concluímos que*

$$(R^{-1}v, u) = (R^{-1}v, Rf),\ \forall v \in W_0^2$$

*donde $u = Rf$ e $u \in domR^{-1}$.*
**Definição 2.14** *Seja $M$ uma superfície de revolução em $\mathbb{R}^3$, dada por $x = r(s)\cos\theta$, $y = r(s)\sin\theta$, $z = h(s)$, com $r(0) = h(0) = 0$ onde $0 \leq s < \infty$ e $0 \leq \theta < 2\pi$.*
*O parâmetro $s$ é o comprimento de $(0,0,0)$ à $(x,y,z)$ ao longo da geratriz de $M$.*
**Proposição 2.16** *A métrica de Riemann induzida em $M \subset R^3$ é dada por $g_{11} = 1$, $g_{22} = r^2$ e $g_{21} = g_{12} = 0$ e então*

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial u}{\partial s}) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, para\, u \in C^2(M).$$

**Demonstração 19** *De fato, já temos que*

$$\Delta u = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{G} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^i}\right).$$

*Logo,*

$$\begin{array}{rcl}\Delta u & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial}{\partial s}\left(\sqrt{G} g^{1j} \frac{\partial u}{\partial x^j}\right) \quad + \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sqrt{G} g^{2j} \frac{\partial u}{\partial x^j}\right) \\ \Delta u & = & \displaystyle\frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial}{\partial s}\left(\sqrt{G} g^{11} \frac{\partial u}{\partial s}\right) \quad + \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sqrt{G} g^{21} \frac{\partial u}{\partial s}\right) \\ & + & \displaystyle\frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial}{\partial s}\left(\sqrt{G} g^{12} \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) \quad + \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sqrt{G} g^{22} \frac{\partial u}{\partial \theta}\right).\end{array}$$

*Note que*

$$G = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{vmatrix} = r^2 \Rightarrow \sqrt{G} = r.$$

*Substituindo,*

$$\Delta u = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial s}\left(r \cdot 1 \cdot \frac{\partial u}{\partial s}\right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(r \cdot 0 \cdot \frac{\partial u}{\partial s}\right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial s}\left(r \cdot 0 \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(r \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}\right).$$

*Assim,*

$$\Delta u = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial s}\left(r \cdot \frac{\partial u}{\partial s}\right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

**Lema 2.2** *Seja $M_t$ o subdomínio de $M$ caracterizado por $s \in [0, t)$, e $\Gamma_t$ a fronteira de $M_t$. Se $w$ é uma função suave em $M$ e $\Delta w = \lambda w$ para um único número real $\lambda$, então*

$$2\lambda \int_{M_t} \frac{dr}{ds} |w|^2 dM = r(t) \int_{\Gamma_t} \left(\lambda |w|^2 - \left|\frac{\partial w}{\partial s}\right|^2 + \frac{1}{r^2}\left|\frac{\partial w}{\partial \theta}\right|^2\right) d\Gamma.$$

$(dM = r ds d\theta, d\Gamma = r d\theta)$, $M_t = \{(r(s)\cos\theta,\, r(s)\sin\theta, h(s)), 0 \leq s \leq t \; e \, \theta \in [0, 2\pi]\}$

**Demonstração 20** *Como vimos anteriormente,*

$$\Delta w = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial s}\left(r \cdot \frac{\partial w}{\partial s}\right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}.$$

*Basta mostrar o resultado para uma auto-função real.*
*Consideraremos,* $I = 2\int_{M_t} r \dfrac{\partial w}{\partial s} \Delta w dM$.
*Daí,*

$$\begin{aligned}
I &= 2\int_{M_t} r\frac{\partial w}{\partial s}\Delta w dM \\
&= 2\int_0^{2\pi}\int_0^t r^2(s)\frac{\partial w}{\partial s}\left[\frac{1}{r(s)}\left(r(s)\frac{\partial w}{\partial s}\right)' + \frac{1}{r(s)^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right] dsd\theta \\
&= 2\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^t \left(r(s)\frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}\left((r(s)\frac{\partial w}{\partial s}\right) + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) dsd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\left(r^2(s)\frac{\partial w}{\partial s}ds\right) d\theta + 2\int_0^t\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\cdot\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) - \frac{\partial w}{\partial s\partial \theta}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right] d\theta ds.
\end{aligned}$$

*Temos* $\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\dfrac{\partial w}{\partial s}\dfrac{\partial w}{\partial \theta}\right) = 0$, *já que é uma função periódica de período* $2\pi$. *Daí,*

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} r^2(t)\left|\frac{\partial w}{\partial s}\right|^2 d\theta - 2\int_0^{2\pi}\int_0^t\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\partial w}{\partial s\partial \theta}\right) dsd\theta \\
&= r^2(t)\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial w}{\partial s}\right|^2 d\theta - 2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2\right] ds\right) d\theta \\
&= r^2(t)\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial w}{\partial s}\right|^2 d\theta - \int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial w}{\partial \theta}\right|^2 d\theta \\
&= r^2(t)\int_0^{2\pi}\left(\left|\frac{\partial w}{\partial s}\right|^2 - \frac{1}{r^2(t)}\left|\frac{\partial w}{\partial \theta}\right|^2\right) d\theta.
\end{aligned}$$

*Mas,* $r(t)d\theta = d\Gamma$

$$I = r(t)\int_{\Gamma_t}\left(\left|\frac{\partial w}{\partial s}\right|^2 - \frac{1}{r^2(t)}\left|\frac{\partial w}{\partial \theta}\right|^2\right) d\Gamma.$$

*Por outro lado, como* $\Delta w = \lambda w$, *temos*

$$
\begin{aligned}
I &= 2\int_{M_t} r(s)\frac{\partial w}{\partial s}\cdot \Delta w dM \\
&= 2\lambda \int_{M_t} r(s)\frac{\partial w}{\partial s}\cdot w dM \\
&= 2\lambda \int_0^{2\pi}\int_0^t r^2(s) w \frac{\partial w}{\partial s} ds d\theta \\
&= \lambda \int_0^{2\pi}\int_0^t \left( r^2(s)\frac{\partial}{\partial s}(w^2)\right) ds d\theta \\
&= \lambda \int_0^{2\pi}\int_0^t \left( \frac{\partial}{\partial s}(r^2(s)w^2) ds\right) d\theta - \lambda \int_0^{2\pi}\int_0^t \frac{d}{ds}(r^2(s)) w^2 ds d\theta \\
&= \lambda \int_0^{2\pi} r^2(t) w^2 d\theta - 2\lambda \int_0^{2\pi}\int_0^t r(s)\frac{d}{ds}(r(s))|w|^2 ds d\theta.
\end{aligned}
$$

*Logo,*

$$
I = \lambda r^2(t)\int_0^{2\pi} |w|^2 d\theta - 2\lambda \int_0^{2\pi}\int_0^t \frac{d}{ds}(r(s))|w|^2 r(s) ds d\theta.
$$

*Mas,* $dM = r(s)dsd\theta$*. Então,*

$$
I = r(t)\int_{\Gamma_t} \lambda |w|^2 d\Gamma - 2\lambda \int_{M_t} \frac{d}{ds}(r(s))|w|^2 dM.
$$

*Por fim, temos a igualdade:*

$$
\begin{aligned}
r(t)\int_{\Gamma_t}\left( \left|\frac{\partial w}{\partial s}\right|^2 - \frac{1}{r^2(t)}\left|\frac{\partial w}{\partial \theta}\right|^2\right) d\Gamma &= r(t)\int_{\Gamma_t} \lambda |w|^2 d\Gamma - 2\lambda \int_{M_t} \frac{d}{ds}(r(s))|w|^2 dM \\
\Rightarrow 2\lambda \int_{M_t} \frac{dr}{ds}|w|^2 dM &= r(t)\int_{\Gamma_t}\left( \lambda|w|^2 - \left|\frac{\partial w}{\partial s}\right|^2 + \frac{1}{r^2(t)}\left|\frac{\partial w}{\partial \theta}\right|^2\right) d\Gamma.
\end{aligned}
$$

**Proposição 2.17** *Seja* $g : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função integrável. Então, existe uma sequência* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $t_k g(tk) \longrightarrow 0$ *e* $t_k \longrightarrow \infty$*.*

**Demonstração 21** *Por hipótese temos que* $\int_0^\infty g(t)dt < \infty$*. Queremos mostrar que existe uma sequência* $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *tal que* $t_k g(tk) \longrightarrow 0$ *quando* $k \longrightarrow \infty$*.*

***Afimação 2.1*** $\lim_{t\to\infty} \inf_{s\geq t} s|g(s)| = 0.$

*Suponhamos que isto não ocorra, ou seja,*

$$\lim_{t\to\infty} \inf_{s\geq t} s|g(s)| = c > 0.$$

*Assim, existe* $t_0 > 0$, *tal que*

$$\inf_{s\geq t_0} s|g(s)| > \frac{c}{2}.$$

*O que implica em*

$$s|g(s)| > \frac{c}{2},\ \forall s \geq t_0,\ \text{ou ainda } |g(s)| > \frac{c}{2s}.$$

*Logo,* $\displaystyle\int_0^\infty |g(s)|ds \geq \int_{t_0}^\infty |g(s)|ds > \frac{c}{2}\int_{t_0}^\infty \frac{ds}{s} = \infty$. *Contradição.*

*Pela afirmação, dado* $k \in \mathbb{N}$, *existe* $s_k \in \mathbb{R}$ *tal que*

$\displaystyle\inf_{s\geq s_k} s|g(s)| < \frac{1}{k}$ *e pela definição de ínfimo, existe* $t_k > s_k$ *tal que* $\displaystyle t_k|g(t_k)| < \frac{1}{k}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{k} < t_k g(t_k) < \frac{1}{k}.$$

# 3 TEOREMA PRINCIPAL

Por fim, apresentaremos o resultado principal desse trabalho.

**Teorema 3.1** *(Teorema Principal) Se* $\frac{dr}{ds} \geq 0$ *para* $0 \leq s \leq \infty$, *então* $L$ *não tem autovalores.*

**Demonstração 22** *Temos que* $Lu = \Delta u$ *onde* $D(L) = \{f; f \in D_1 \text{ e } \Delta f \in L^2(M)\}$.
*Seja* $Lu = \lambda u$, *com* $u \in D(L)$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Como* $\Delta$ *é um operador elíptico, segue a suavidade de* $u$.
*Pelo lema 2.1, temos que* $L$ *é definido não-positivo, dessa forma* $\lambda$ *deve ser não-positivo.*
***Caso 1:*** $\lambda = 0$.
*Temos que*

$$div(u\nabla u) = u\Delta u + |\nabla u|^2 \Rightarrow u\Delta u = div(u\nabla u) - |\nabla u|^2.$$

*Daí,*

$$\int_{M_t} u\Delta u\, dM = \int_{M_t} div(u\nabla u) dM - \int_{M_t} |\nabla u|^2 dM.$$

*Então, pelo Teorema da Divergência,*

$$\begin{aligned} \int_{M_t} u\Delta u dM &= \int_{\Gamma_t} \langle u\nabla u, v\rangle d\Gamma - \int_{M_t} |\nabla u|^2 dM \\ &= \int_{\Gamma_t} u\frac{\partial u}{\partial v} d\Gamma - \int_{M_t} |\nabla u|^2 dM. \end{aligned}$$

*Mas,* $\Delta u = Lu = 0$. *Logo,*

$$0 = \int_{\Gamma_t} u\Delta u dM = \int_{\Gamma_t} u\frac{\partial u}{\partial v} d\Gamma - \int_{M_t} |\nabla u|^2 dM.$$

***Afirmação*** $\int_{\Gamma_s} u\frac{\partial u}{\partial v} d\Gamma \longrightarrow 0$

***Demonstração 23*** *Inicialmente note que*

$$\left|\frac{\partial u}{\partial s}\right| = \left\langle \nabla u, \frac{\partial s}{\partial v}\right\rangle \leq |\nabla u|^2 \left|\frac{\partial s}{\partial v}\right|^2 = |\nabla u|^2.$$

*Assim, como* $u \in L^2(M)$ *e* $\nabla u \in L^2(M)$

$$\int_M \left|u\frac{\partial u}{\partial v}\right| dM \leq \left(\int_M u^2 dM\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_M \left(\frac{\partial u}{\partial s}^2\right) dM\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_M u^2 dM\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M |\nabla u|^2 dM\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

*Por outro lado,*

$$\int_M u\frac{\partial u}{\partial v}dM = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} u\frac{\partial u}{\partial v} r d\theta ds = \int_0^\infty \left(\int_{\Gamma_s} u\frac{\partial u}{\partial v} d\Gamma_s\right) ds = \int_0^\infty F(s)ds,$$

*onde* $F(s) = \int_{\Gamma_s} u\frac{\partial u}{\partial v}d\Gamma_s$
*Logo,*

$$\int_0^\infty F(s)ds < \infty.$$

*Então, existe uma sequência* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $s_n \to \infty$ *e* $F(s_n) \to 0$.
*Portanto,*

$$\int_{\Gamma_s} u\frac{\partial u}{\partial v}d\Gamma \longrightarrow 0.$$

*Dessa forma, concluímos que*

$$\int_M |\nabla u|^2 dM = 0 \Rightarrow |\nabla u|^2 = 0 \Rightarrow \nabla u = 0 \Rightarrow u = constante.$$

*Uma vez que* $u \in L^2(M)$, *segue que* $u \equiv 0$ *e então* $\lambda = 0$ *não pode ser um autovalor de* $L$.
***Caso 2:*** $\lambda < 0$.
*Usando a igualdade dada no lema 2.2, temos*

$$2\lambda \int_{M_t} \frac{dr}{ds}|u|^2 dM = r(t)\int_{\Gamma_t}\left(\lambda|u|^2 - \left|\frac{\partial u}{\partial s}\right|^2 + \frac{1}{r^2}\left|\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|^2\right) d\Gamma.$$

*Existe uma sequência* $(tn)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que*

$$tn\int_{\Gamma_{tn}}\left(\lambda|u|^2 - \left|\frac{\partial u}{\partial s}\right|^2 + \frac{1}{r^2}\left|\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|^2\right) d\Gamma \longrightarrow 0,$$

*quando* $n \to \infty$
*Como a curva sobre* $M$ *é parametrizada pelo comprimento de arco,*

$$r'(t) + h'(t) = 1 \Rightarrow r'(t) = 1 - h'(t) \Rightarrow r'(t) < 1 \Rightarrow r(t) < t,$$

*logo* $r(tn) < tn$, *e dessa forma,*

$$r(tn)\int_{\Gamma_{tn}}\left(\lambda|u|^2 - \left|\frac{\partial u}{\partial s}\right|^2 + \frac{1}{r^2}\left|\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|^2\right) d\Gamma \longrightarrow 0.$$

*E assim observando a igualdade dada no lema 2.2, temos:*

$$\lambda \int_{M_t} \frac{dr}{ds} \cdot |u|^2 dM = 0.$$

*De modo geral,*

$$\begin{aligned}
\int_M \frac{dr}{ds}|u|^2 dM &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{dr}{ds}|u|^2 r d\theta ds \\
&= \int_0^\infty \int_{\Gamma_s} \frac{dr}{ds}|u|^2 d\Gamma s ds \\
&= \int_0^\infty F(s) ds,
\end{aligned}$$

*onde* $F(s) = \displaystyle\int_{\Gamma s} \frac{dr}{ds}|u|^2 d\Gamma$.

*Mas,*

$$\int_0^\infty F(s) ds = \int_M \frac{dr}{ds}|u|^2 dM < \infty.$$

*Logo, existe uma sequência* $(tn)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $tn \to \infty$ *e* $F(tn) \to 0$.

*Concluímos então que* $\displaystyle\int_M \frac{dr}{ds}|u|^2 dM = 0$.

*Então,*

$$\lambda \int_M \frac{dr}{ds}|u|^2 dM = 0.$$

*Dessa forma,* $u \equiv 0$ *no subconjunto de* $M$ *em que temos* $\dfrac{dr}{ds} > 0$. *Esse subconjunto é não-vazio e aberto, já que* $r(0) = 0$ *e* $r(s) > 0$, *para* $s \neq 0$.

*Para finalizarmos, usando o Teorema da Continuação Única para Equações Elípticas de Segunda Ordem, Concluímos que* $u \equiv 0$ *em todo* $M$.

# 4 CONCLUSÃO

Ao longo dessa dissertação estudamos vários resultados de Geometria Riemanniana e Análise Funcional, além de alguns conceitos de Teoria da Medida e Equações Diferenciais Parciais Elípticas. Em particular, trabalhamos com a teoria espectral, mais especificamente a teoria espectral de operadores autoadjuntos, uma vez que o operador em destaque é o de Laplace-Beltrami.

Trabalhamos no espaço das funções quadrado integráveis sobre uma superfície não compacta, cujo Laplaciano de tais funções também é quadrado integrável sobre esta superfície. Além disso, para obtermos a prova do teorema principal, dois resultados tiveram maior relevância. O primeiro nos garantindo que o operador de Laplace-Beltrami, sobre tal domínio, é autoadjunto e não negativo e o segundo nos dando uma identidade entre integrais, sobre subdomínios de uma superfície de revolução e sua fronteira limitada.

Por fim, analisamos o espectro do Laplaciano sobre uma superfície de revolução e demonstramos a não existência de autovalores para o operador de Laplace-Beltrami, sempre que a derivada da função radial é não negativa.

## REFERÊNCIAS

BOTELHO, Geraldo; PELLEGRINO, Daniel; TEIXEIRA, Eduardo. **Fundamentos de Análise Funcional**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

CALDERON, A. P. Uniqueness in the Cauchy problem for partial diferential equations. **Amer. J. Math.**, v. 80, p. 16–36, 1958.

CARMOS, Manfredo Perdigão. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 5.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

EIDUS, D. M. The principle of limiting absorption. **Math. Sb. (N.S)**, v. 57, p. 13–44, 1962.

GRIGOR'YAN, Alexander. **Heat Kernel and Analysis on Manifolds**. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2009.

IÓRIO, Valéria. **EDP:***um curso de graduação.* 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

MIZOHATA, S. Theory of Partial Differential Equation. *Tokyo: Iwanami*, 1965.

RELLICH, F. Uber das asymptotische Verhalten der Losungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten. **Jber. Deustsch. Math. Verein.**, v. 53, p. 57–65, 1943.

TAYOSHI, Takao. On the Spectrum of the Laplace-Beltrami Operator on a Non-Compact Surface. **Proc. Japan. Acad.**, v. 47, p. 187–189, 1971.

BOTELHO, PELLEGRINO, and TEIXEIRA (2012) CALDERON (1958) CARMOS (2011) EIDUS (1962) GRIGOR'YAN (2009) IÓRIO (2007) MIZOHATA (1965) RELLICH (1943) TAYOSHI (1971)