

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

PAULO RICARDO PINHEIRO SAMPAIO

ESTIMATIVA PARA ÍNDICE DE HIPERSUPERFÍCIES
MÍNIMAS FECHADAS NA ESFERA

FORTALEZA

2009

PAULO RICARDO PINHEIRO SAMPAIO

ESTIMATIVA PARA ÍNDICE DE HIPERSUPERFÍCIES
MÍNIMAS FECHADAS NA ESFERA

Dissertação submetida à Coordenação do
Curso de Pós-Graduação em Matemática
da Universidade Federal do Ceará, como
requisito parcial para a obtenção do Grau
de Mestre em Matemática.

Área de Concentração:
Geometria Diferencial

Orientador:
Prof. Dr. Antonio Gervásio Colares

FORTALEZA

2009

S185e Sampaio, Paulo Ricardo Pinheiro

Estimativa para índice de hipersuperfícies mínimas fechadas na esfera / Paulo Ricardo Pinheiro Sampaio. - Fortaleza, 2009. 66 f.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Gervásio Colares

Área de concentração: Geometria Diferencial

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Fortaleza, 2009.

1.Geometria diferencial. I. Colares, Antonio Gervásio (Orient.)

CDD 516.36

À minha esposa Maria Celia Silva S.
Sampaio e ao meu filho Paulo Ricardo
Pinheiro Sampaio Filho.

Agradecimentos

Inicialmente, agradeço a Deus por ter me dado força para superar mais esse desafio. Gostaria de expressar meus agradecimentos ao meu orientador Prof. Antonio Gervásio Colares por ter aceitado me orientar, pela paciência e prestatividade que teve durante o desenvolvimento desse trabalho.

Gostaria de agradecer também aos professores Abdênago Alves de Barros e Henrique Fernandes de Lima por terem aceitado o convite de participar da banca examinadora.

Agradeço enormemente à minha mãe Marlene Pinheiro Sampaio, ao meu pai Antônio Pereira Sampaio, à minha esposa Maria Celia Silva S. Sampaio e ao meu filho Paulo Ricardo Pinheiro Sampaio Filho. Não poderia esquecer as minhas irmãs Valeria Pinheiro Sampaio e Vanessa Cristina Pinheiro Sampaio, meu irmão Pedro Henrique Pinheiro Sampaio e meu falecido irmão Francisco Wagner Pinheiro Sampaio.

Como não poderia deixar de ser, agradeço aos meus amigos: Anderson Feitoza Leitão Maia, Héliadio Andrade, Paulo Henrique Ricardo Maia, Raimundo Alves Leitão Júnior, João Francisco da Silva Filho, Edno dos Santos Sousa, Luiz Antônio e aos demais colegas que não tiveram o nome citado pelo apoio e confiança que me concederam durante minha vida acadêmica.

Agradeço a Secretária Andréa Costa Dantas pela sua competência na orientação dada aos alunos e pela sua paciência para com os mesmos.

Finalmente, agradecimentos são devidos ao CNPQ pelo apoio financeiro e ao Departamento de Matemática pelo apoio intelectual.

Resumo

O objetivo dessa dissertação é estudar o índice de hipersuperfície mínima orientável e fechada não-totalmente geodésica Σ^n da esfera unitária Euclidiana \mathbb{S}^{n+1} cuja segunda forma fundamental tem quadrado da norma limitado por baixo por n . Neste caso mostraremos que o índice de estabilidade, denotado por Ind_{Σ^n} , é maior que ou igual a $n + 3$, com igualdade ocorrendo apenas em toros de Clifford $\mathbb{S}^k \left(\sqrt{\frac{k}{n}} \right) \times S^{n-k} \left(\sqrt{\frac{n-k}{n}} \right)$. Além disso, provaremos também que, a menos de toros de Clifford, temos a seguinte lacuna: $Ind_{\Sigma^n} \geq 2n + 5$. Este trabalho é baseado no artigo de A. Barros e P. Sousa, intitulado "Estimate for index of closed minimal hypersurfaces in spheres" publicado no Kodai Mathematical Journal, no ano de 2009.

Palavras chave: Hipersuperfícies Mínimas; Índice; Estabilidade.

Abstract

The objective of this dissertation is to study the index of closed orientable non-totally geodesic minimal hypersurface Σ^n of the Euclidean unit sphere \mathbb{S}^{n+1} whose second fundamental form has squared norm bounded from below by n . In this case we shall show that the index of stability, denoted by Ind_{Σ^n} , is great than or equal to $n + 3$, with equality occurring at only Clifford tori $\mathbb{S}^k \left(\sqrt{\frac{k}{n}} \right) \times S^{n-k} \left(\sqrt{\frac{n-k}{n}} \right)$. Moreover, we shall prove also that, up to Clifford tori, we have the following gap: $Ind_{\Sigma^n} \geq 2n + 5$. This work is based in the article of Barros, A. and Sousa P., entitled "Estimate for index of closed minimal hypersurfaces in spheres" published in the Kodai Mathematical Journal at the year of 2009.

Keywords: Minimal hypersurfaces; Index; Stability.

Sumário

1	Introdução	5
2	Preliminares	8
2.1	Métrica Riemanniana	8
2.2	Conexão Riemanniana	8
2.3	Orientação	9
2.4	Gradiente, Divergente, Laplaciano e Hessiano	9
2.5	Imersões Isométricas	13
2.6	A Segunda Forma Fundamental	14
2.7	Hipersuperfícies	17
3	Fórmulas Especiais	20
3.1	Fórmula da Primeira Variação da Área	20
3.2	Fórmula da Segunda Variação da Área	25
3.3	Variação da Área de Hipersuperfícies na esfera	32
4	O Índice de Hipersuperfícies Mínimas	37
5	Análise de Funções Suportes	41
6	Teoremas Principais	58
7	Referências Bibliográficas	65

Capítulo 1

Introdução

O objetivo desta dissertação é estudar o índice de hipersuperfícies mínimas orientáveis e fechadas não-totalmente geodésicas da esfera unitária Euclidiana \mathbb{S}^{n+1} , cuja segunda forma fundamental tem quadrado da norma limitado por baixo por n . Mais precisamente demonstraremos os seguintes resultados:

Teorema 1. *Seja $x : \Sigma^n \looparrowright \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão isométrica mínima não-totalmente geodésica de uma variedade orientada e fechada Σ^n , com norma da segunda forma fundamental limitada por baixo por \sqrt{n} . Então, $Ind_\Sigma \geq n+3$ com igualdade ocorrendo apenas em toros de Clifford $\mathbb{S}^k \left(\sqrt{\frac{k}{n}} \right) \times S^{n-k} \left(\sqrt{\frac{n-k}{n}} \right)$.*

Com as mesmas hipóteses do Teorema 1 provaremos o seguinte teorema

Teorema 2. *Seja $x : \Sigma^n \looparrowright \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão isométrica mínima não-totalmente geodésica de uma variedade orientada e fechada Σ^n , com norma da segunda forma fundamental limitada por baixo por \sqrt{n} . Então, a menos de toros de Clifford $\mathbb{S}^k \left(\sqrt{\frac{k}{n}} \right) \times S^{n-k} \left(\sqrt{\frac{n-k}{n}} \right)$, $Ind_\Sigma \geq 2n + 5$.*

A dissertação é baseada no artigo de A. Barros e P. Sousa "Estimate for Index of Closed Minimal Hypersurfaces in Spheres" publicado no Kodai Mathematical Journal, no ano de 2009.

Para melhor entendimento dividimos o trabalho em cinco capítulos. No primeiro capítulo apresentamos sucintamente, as definições e resultados básicos relacionados com o que precisamos para chegar à demonstração de alguns teoremas e lemas, e além disso fixamos a notação que será utilizada no decorrer do trabalho.

No segundo capítulo, tratamos um pouco da teoria de estabilidade onde demonstraremos as fórmulas da primeira e da segunda variação da área para o caso de imersões isométricas $x : \Sigma^n \longrightarrow M^{n+m}$ de uma variedade Riemanniana orientável e compacta Σ^n de dimensão n em uma variedade Riemanniana M^{n+m} de dimensão $n + m$. O objetivo em apresentar estas demonstrações é para obter as seguintes fórmulas

$$\left. \frac{dA(t)}{dt} \right|_{t=0} = -n \int_{\Sigma} f H d\Sigma,$$

e

$$\left. \frac{d^2 A(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = - \int_{\Sigma} [f \Delta f + (|A|^2 + n) f^2] d\Sigma,$$

que são, respectivamente, a primeira e a segunda variação da área para hipersuperfície, as quais serão usadas neste trabalho.

No terceiro capítulo, definiremos o operador de Jacobi, bem como a forma quadrática induzida pelo operador de Jacobi. A partir daí daremos a seguinte definição de índice de uma hipersuperfície;

Definição 1.1. *Seja $J : C^\infty(\Sigma^n) \longrightarrow C^\infty(\Sigma^n)$ o operador de Jacobi. O índice de estabilidade de Σ^n , denotado por Ind_{Σ^n} , é definido por*

$$Ind_{\Sigma^n} = \max \{ \dim V : V \subset C^\infty(\Sigma^n), Q(f) < 0, \forall f \in V \},$$

onde $Q(f) = - \int_{\Sigma} f J f d\Sigma$.

A hipersuperfície Σ^n é estável quando, e somente quando, $Ind_{\Sigma^n} = 0$, ou equivalentemente, dizemos que Σ^n é estável quando $Q(f) \geq 0, \forall f \in C^\infty(\Sigma^n)$. Quando a hipersuperfície Σ^n não é estável dizemos que Σ^n é instável.

No quarto capítulo, fazemos uma análise das funções suportes as quais estão definidas abaixo:

Definição 1.2. *Dada uma hipersuperfície $x : \Sigma^n \looparrowright \mathbb{S}^{n+1}$ as funções suportes são definidas por $\ell_v = \langle x, v \rangle$ e $f_v = \langle N, v \rangle$, onde $v \in \mathbb{R}^{n+2}$ e N é a aplicação de Gauss.*

Neste capítulo, calcularemos o Laplaciano destas funções e, além disso, é demonstrado uma sequência de lemas a respeito dos conjuntos

$$V = \{ \ell_v ; v \in \mathbb{R}^{n+2} \} \quad e \quad W = \{ f_v ; v \in \mathbb{R}^{n+2} \},$$

que serão usados na demonstração dos teoremas principais desta dissertação.

Finalmente, no quinto capítulo concluímos o objetivo principal desta dissertação que é demonstrar os Teoremas 1 e 2 citados no início desta introdução.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns resultados que serão utilizados em nosso trabalho. Além disso, iremos considerar Σ^n uma variedade Riemanniana de dimensão n e classe C^∞ , $C^\infty(\Sigma^n)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em Σ^n e $\mathcal{X}(\Sigma^n)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em Σ^n .

2.1 Métrica Riemanniana

Definição 2.1.1. *Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em uma variedade diferenciável Σ^n é uma correspondência que associa a cada ponto p de Σ^n um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente $T_p\Sigma^n$, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Sigma^n$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $x(x_1, \dots, x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \dots, 1, \dots, 0)$, então $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U .*

2.2 Conexão Riemanniana

Definição 2.2.1 (Conexão Afim). *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável Σ^n é uma aplicação*

$$\nabla : \mathcal{X}(\Sigma^n) \times \mathcal{X}(\Sigma^n) \rightarrow \mathcal{X}(\Sigma^n)$$

que se indica por $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

$$\text{i)} \quad \nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ,$$

$$\text{ii)} \quad \nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ,$$

$$\text{iii)} \quad \nabla_X(fY) = f\nabla_XY + X(f)Y,$$

onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\Sigma^n)$ e $f, g \in C^\infty(\Sigma^n)$.

Definição 2.2.2. Uma conexão afim ∇ em uma variedade Riemanniana Σ^n é dita uma conexão Riemanniana se valem as seguintes propriedades:

$$\text{i)} \quad \nabla_XY - \nabla_YX = [X, Y], \quad (\text{simetria})$$

$$\text{ii)} \quad X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_XY, Z \rangle + \langle Y, \nabla_XZ \rangle, \quad (\text{compatibilidade com a métrica})$$

onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\Sigma^n)$.

2.3 Orientação

Definição 2.3.1. Seja Σ uma variedade diferenciável. Diz-se que Σ é orientável se Σ admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ tal que para todo par α, β com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenadas $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$ tem determinante positivo. Caso contrário diz-se que Σ é não-orientável.

2.4 Gradiente, Divergente, Laplaciano e Hessiano

Neste trabalho também vamos utilizar os seguintes referenciais:

i) Ortonormal: Dizemos que um conjunto de campos de vetores $\{X_1, \dots, X_n\}$ é um referencial ortonormal local em Σ^n , quando em cada ponto $p \in \Sigma^n$ $X_1(p), \dots, X_n(p)$ é uma base ortonormal do plano tangente $T_p\Sigma^n$.

ii) Geodésico: Dado $p \in \Sigma^n$, existe uma vizinhança $U \subset \Sigma^n$ de p e campos de vetores X_1, \dots, X_n em $\mathcal{X}(\Sigma^n)$, ortonormais em cada ponto de U , tais que $\nabla_{X_i}X_j(p) = 0$. Uma tal família X_1, \dots, X_n de campos de vetores é chamada um referencial (local) geodésico em p .

Definição 2.4.1 (Gradiente). *Seja $f \in C^\infty(\Sigma^n)$. O gradiente de f , denotado por ∇f , é o campo de vetores em Σ^n , definido pela seguinte condição:*

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f), \quad \forall X \in \mathcal{X}(\Sigma^n).$$

Decorre da definição que se $f, g \in C^\infty(\Sigma^n)$ então:

1. $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$
2. $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$

Proposição 2.4.1. *Se $\{X_1, \dots, X_n\}$ é um referencial ortonormal local em Σ^n , então*

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n X_i(f)X_i. \quad (2.1)$$

Demonstração. De fato, sendo $\nabla f = \sum_{i=1}^n a_i X_i$, temos que

$$X_j(f) = \langle \nabla f, X_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n a_i X_i, X_j \right\rangle = a_j.$$

Logo,

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n X_i(f)X_i.$$

□

Definição 2.4.2. *Seja $X \in \mathcal{X}(\Sigma^n)$. A divergência de X é a função $\text{div}X : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$, definida por*

$$\text{div}X(p) = \text{Tr} [Y(p) \mapsto (\nabla_Y X)(p)],$$

ou seja, o divergente é o traço do operador linear $(Y \longrightarrow \nabla_Y X)$.

As propriedades abaixo decorrem diretamente da definição.

1. $\text{div}(X + Y) = \text{div}X + \text{div}Y$
2. $\text{div}(fX) = f\text{div}X + \langle \nabla f, X \rangle$,

para quaisquer $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma^n)$ e qualquer $f \in C^\infty(\Sigma^n)$.

Proposição 2.4.2. *Seja $\{X_1, \dots, X_n\}$ um referencial ortonormal local em Σ^n , então*

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{X_i} X, X_i \rangle.$$

Demonstração. Observe que

$$\nabla_{X_j} X = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{X_j} X, X_i \rangle X_i.$$

Daí, a matriz da aplicação ($Y \rightarrow \nabla_Y X$) nesta base é dada por

$$(\nabla X) = \begin{pmatrix} \langle \nabla_{X_1} X, X_1 \rangle & \cdots & \langle \nabla_{X_n} X, X_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \nabla_{X_1} X, X_n \rangle & \cdots & \langle \nabla_{X_n} X, X_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\operatorname{div} X = \operatorname{tr}(\nabla X) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{X_i} X, X_i \rangle.$$

□

Proposição 2.4.3. *Se $X = \sum x_i X_i$, onde $\{X_1, \dots, X_n\}$ é um referencial ortonormal local em Σ^n , então*

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n (X_i(x_i) - \langle \nabla_{X_i} X_i, X \rangle). \quad (2.2)$$

Demonstração. Sabemos, pela proposição 2.4.2, que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{X_i} X, X_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \left\langle \nabla_{X_i} \left(\sum_{j=1}^n x_j X_j \right), X_i \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \langle X_i(x_j) X_j, X_i \rangle + \sum_{i,j=1}^n \langle x_j \nabla_{X_i} X_j, X_i \rangle. \end{aligned}$$

Como $\langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}$, então temos que

$$0 = X_i \langle X_i, X_j \rangle = \langle \nabla_{X_i} X_i, X_j \rangle + \langle X_i, \nabla_{X_i} X_j \rangle,$$

ou seja,

$$\langle \nabla_{X_i} X_j, X_i \rangle = - \langle \nabla_{X_i} X_i, X_j \rangle.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^n X_i(x_i) - \sum_{i,j=1}^n x_j \langle \nabla_{X_i} X_i, X_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n X_i(x_i) - \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{X_i} X_i, X \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i(x_i) - \langle \nabla_{X_i} X_i, X \rangle). \end{aligned}$$

□

Definição 2.4.3. *Seja $f \in C^\infty(\Sigma^n)$. O Laplaciano de f é o operador $\Delta : C^\infty(\Sigma^n) \rightarrow C^\infty(\Sigma^n)$ definido por*

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f).$$

Usando as propriedades do gradiente e divergente, temos :

1. $\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g$
2. $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle,$

para quaisquer $f, g \in C^\infty(\Sigma^n)$.

Proposição 2.4.4. *Se $\{X_1, \dots, X_n\}$ é um referencial ortonormal local em Σ^n então*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n (X_i(X_i(f)) - (\nabla_{X_i} X_i)(f)). \quad (2.3)$$

Demonstração. Pela equação (2.1) temos que

$$\Delta f = \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^n X_i(f)X_i\right)$$

e pela equação (2.2) obtemos

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n (X_i(X_i(f)) - \langle \nabla_{X_i} X_i, \nabla f \rangle).$$

Portanto, pelas propriedades de ∇f temos

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n (X_i(X_i(f)) - (\nabla_{X_i} X_i)(f)).$$

□

Observação 2.4.1. Note que quando $\{X_1, \dots, X_n\}$ é um referencial geodésico em $p \in \Sigma^n$ a expressão do Laplaciano simplifica-se para

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^n (X_i(X_i(f)))(p)$$

Definição 2.4.4. Seja $f \in \mathcal{D}(\Sigma^n)$. Definimos o hessiano de f em $p \in \Sigma^n$ como o operador linear $Hess f : T_p \Sigma^n \rightarrow T_p \Sigma^n$, dado por

$$(Hess f)Y = \nabla_Y(\nabla f), \quad \forall Y \in \mathcal{X}(\Sigma^n).$$

Podemos considerar $Hess f$ como um tensor tal que para cada par de campos $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma^n)$, temos

$$(Hess f)(X, Y) = \langle (Hess f)(X), Y \rangle.$$

2.5 Imersões Isométricas

Definição 2.5.1. Sejam Σ^n e M^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\varphi : \Sigma \rightarrow M$ é uma imersão se $d\varphi_p : T_p \Sigma \rightarrow T_{\varphi(p)} M$ é injetiva para todo $p \in \Sigma$. Se, além disso, φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(\Sigma) \subset M$, onde $\varphi(\Sigma)$ tem a topologia induzida por M , diz-se que φ é um mergulho. Se $\Sigma \subset M$ e a inclusão $i : \Sigma \hookrightarrow M$ é um mergulho, diz-se que Σ é uma subvariedade de M .

Definição 2.5.2. Sejam Σ^n e M^n variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $\varphi : \Sigma \rightarrow M$ (isto é, φ é uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável) é chamado uma isometria se:

$$\langle u, v \rangle_p = \langle d\varphi_p(u), d\varphi_p(v) \rangle_{\varphi(p)},$$

para todo $p \in \Sigma$, e $u, v \in T_p \Sigma$.

Seja $\varphi : \Sigma^n \rightarrow M^{n+m}$ uma imersão de uma variedade diferenciável Σ de dimensão n em uma variedade Riemanniana M de dimensão $n + m$, isto é, dado $p \in \Sigma^n$ temos que $d\varphi_p : T_p \Sigma \rightarrow T_{\varphi(p)} M$ é injetiva. A métrica Riemanniana de M induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em Σ : Se $v_1, v_2 \in T_p \Sigma$, define-se

$$\langle v_1, v_2 \rangle_p = \langle d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2) \rangle_{\varphi(p)}.$$

Nesta situação, φ passa a ser uma imersão isométrica de Σ em M .

2.6 A Segunda Forma Fundamental

Seja $f : \Sigma^n \rightarrow M^{n+m=k}$ uma imersão. Então, para cada $p \in \Sigma$, existe uma vizinhança $U \subset \Sigma$ de p tal que $f(U) \subset M$ é uma subvariedade de M . Isto quer dizer que existem uma vizinhança $\bar{U} \subset M$ de $f(p)$ e um difeomorfismo $\varphi : \bar{U} \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k$ em um aberto V do \mathbb{R}^k , tais que φ aplica difeomorficamente $f(U) \cap \bar{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$. Para simplificar a notação, identificaremos U com $f(U)$ e cada vetor $v \in T_q\Sigma$, $q \in U$, como $df_q(v) \in T_{f(q)}M$. Usaremos tais identificações para estender, por exemplo, um campo local (isto é, definido em U) de vetores de Σ a um campo local (isto é, definido em \bar{U}) de vetores em M ; se U é suficientemente pequeno, tal extensão é sempre possível, como se vê facilmente usando o difeomorfismo φ .

Para cada $p \in \Sigma$, o produto interno em T_pM decompõe T_pM na soma direta

$$T_pM = T_p\Sigma \oplus (T_p\Sigma)^\perp,$$

onde $(T_p\Sigma)^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p\Sigma$ em T_pM .

Se $v \in T_pM$, $p \in \Sigma$, podemos escrever

$$v = v^T + v^N, \quad v^T \in T_p\Sigma, \quad v^N \in (T_p\Sigma)^\perp.$$

Denominamos v^T a *componente tangencial* de v e v^N a *componente normal* de v . Tal decomposição é evidentemente diferenciável no sentido que as aplicações de TM em TM dadas por

$$(p, v) \rightarrow (p, v^T) \text{ e } (p, v) \rightarrow (p, v^N)$$

são diferenciáveis.

A conexão Riemanniana de M será indicada por $\bar{\nabla}$. Se X e Y são campos locais de vetores em Σ , e \bar{X}, \bar{Y} são extensões locais a M , definimos

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T.$$

Introduziremos a segunda forma fundamental da imersão $f : \Sigma \rightarrow M$. Para isto convém introduzir previamente a seguinte definição. Se X, Y são campos locais em Σ ,

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y$$

é um campo local em M normal a Σ . É fácil ver que $B(X, Y)$ não depende das extensões \bar{X}, \bar{Y} .

Proposição 2.6.1. *Se $X, Y \in \mathcal{X}(U)$, a aplicação $B : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \longrightarrow \mathcal{X}(U)^\perp$ dada por*

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Demonstração. Ver [7]. □

Como B é bilinear, concluímos, expressando B através de um sistema de coordenadas, que o valor de $B(X, Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e $Y(p)$.

Agora podemos definir a segunda forma fundamental. Seja $p \in \Sigma$ e $\eta \in (T_p \Sigma)^\perp$. A aplicação $H_\eta : T_p \Sigma \times T_p \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle, \quad x, y \in T_p \Sigma$$

é, pela Proposição 2.6.1, uma forma bilinear simétrica.

Definição 2.6.1. *A forma quadrática II_η definida em $T_p \Sigma$ por*

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x)$$

é chamada a segunda forma fundamental de f em p segundo o vetor normal η .

Às vezes se utiliza também a expressão segunda forma fundamental para designar a aplicação B que em cada $p \in \Sigma$ é uma aplicação bilinear, simétrica, tomando valores em $(T_p \Sigma)^\perp$.

Observe que à aplicação bilinear H_η fica associada uma aplicação linear auto-adjunta $S_\eta : T_p \Sigma \longrightarrow T_p \Sigma$ por

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle.$$

A proposição seguinte nos dá uma expressão da aplicação linear associada à segunda forma fundamental em termos da derivada covariante.

Proposição 2.6.2. *Seja $p \in \Sigma$, $x \in T_p\Sigma$ e $\eta \in (T_p\Sigma)^\perp$. Seja N uma extensão local de η normal a Σ . Então*

$$S_\eta(x) = -(\bar{\nabla}_x N)^T.$$

Demonstração. Ver [7]. □

Definição 2.6.2. *Uma imersão $f : \Sigma \rightarrow M$ é geodésica em $p \in \Sigma$ se para todo $\eta \in (T_pM)^\perp$ a segunda forma fundamental II_η é identicamente nula em p . A imersão f é totalmente geodésica se ele é geodésica para todo $p \in \Sigma$.*

A razão desta terminologia é dada pela seguinte proposição.

Proposição 2.6.3. *Uma imersão $f : \Sigma \rightarrow M$ é geodésica em $p \in \Sigma$ se e só se toda geodésica γ de Σ partindo de p é geodésica de M em p .*

Demonstração. Ver [7]. □

Observação 2.6.1. *Exemplos de subvariedades totalmente geodésicas são raros. No caso em que $M = \mathbb{R}^n$, os subespaços lineares são evidentemente subvariedades totalmente geodésicas. No caso em que $M = \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, as intersecções $\bar{\Sigma}$ de subespaços lineares do \mathbb{R}^{n+1} com \mathbb{S}^n são subvariedades totalmente geodésicas. Isto provém do fato que para todo $p \in \bar{\Sigma}$, as geodésicas de \mathbb{S}^n que partem de p e são tangentes a $\bar{\Sigma}$ são geodésicas de $\bar{\Sigma}$.*

Uma condição mais fraca do que a de totalmente geodésica é a condição de mínima.

Definição 2.6.3. *Uma imersão $f : \Sigma \rightarrow M$ é mínima se para todo $p \in \Sigma$ e todo $\eta \in (T_p\Sigma)^\perp$ tem-se que traço $S_\eta(p) = 0$.*

Escolhendo um referencial ortonormal ν_1, \dots, ν_m de vetores em $\mathcal{X}(U)^\perp$, onde U é uma vizinhança de p na qual f é um mergulho, podendo escrever, em p ,

$$B(x, y) = \sum_i H_i(x, y) \nu_i, \quad x, y \in T_p\Sigma, \quad i = 1, \dots, m,$$

onde $H_i = H_{\nu_i}$. Não é difícil verificar que o vetor normal dado por

$$\vec{H} = \frac{1}{n} \sum_i (\text{tr} S_i) \nu_i,$$

onde $S_i = S_{\nu_i}$, não depende do referencial ν_i escolhido. O vetor H é chamado o vetor curvatura média de f . É claro que f é mínima se e só se $H(p) = 0$, para todo $p \in \Sigma$.

Dada uma imersão isométrica, convém indicar por $\mathcal{X}(\Sigma)^\perp$ o espaço dos campos diferenciáveis de vetores normais a Σ . A segunda forma fundamental da imersão pode então ser considerada como um tensor

$$B : \mathcal{X}(\Sigma) \times \mathcal{X}(\Sigma) \times \mathcal{X}(\Sigma)^\perp \rightarrow \mathcal{D}(\Sigma)$$

definido por

$$B(X, Y, \eta) = \langle B(X, Y), \eta \rangle.$$

A definição de derivada covariante se estende a este tipo de tensor de maneira natural

$$(\bar{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta) = X(B(Y, Z, \eta)) - B(\nabla_X Y, Z, \eta) - B(Y, \nabla_X Z, \eta) - B(Y, Z, \nabla_X^\perp \eta).$$

Proposição 2.6.4. (*Equação de Codazzi*) Com a notação acima

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, \eta \rangle = (\bar{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta) - (\bar{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta).$$

Demonstração. Ver [7]. □

Observação 2.6.2. Se o espaço ambiente M tem curvatura seccional constante, a equação de Codazzi se escreve como

$$(\bar{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta) = (\bar{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta).$$

Se além disto, a codimensão da imersão é um, $\nabla_X^\perp \eta = 0$, donde,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X B(Y, Z, \eta) &= X\langle S_\eta Y, Z \rangle - \langle S_\eta(\nabla_X Y), Z \rangle - \langle S_\eta Y, \nabla_X Z \rangle \\ &= \langle \nabla_X(S_\eta Y), Z \rangle - \langle A_\eta(\nabla_X Y), Z \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, neste caso, a equação de Codazzi se escreve

$$\nabla_X(S_\eta Y) - \nabla_Y(S_\eta X) = S_\eta([X, Y]).$$

2.7 Hipersuperfícies

Considere o caso particular em que a codimensão é 1, isto é, $f : \Sigma^n \rightarrow M^{n+1}$; $f(\Sigma) \subset M$ é então denominada uma hipersuperfície. (Observe que uma hipersuperfície pode ter auto-interseções).

Seja $p \in \Sigma$ e $\eta \in (T_p\Sigma)^\perp$, $|\eta| = 1$. Como $S_\eta : T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma$ é simétrica, existe uma base ortonormal de vetores próprios $\{X_1, \dots, X_n\}$ de $T_p\Sigma$ com valores próprios reais $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, isto é, $S_\eta(X_i) = \lambda_i X_i$, $1 \leq i \leq n$. Se Σ e M são ambas orientáveis e estão orientadas (isto é, escolhemos orientações para Σ e M) então o vetor η fica univocamente determinado se exigirmos que sendo $\{X_1, \dots, X_n\}$ uma base na orientação de Σ , $\{X_1, \dots, X_n, \eta\}$ seja uma base na orientação de M . Neste caso, denominamos os X_i direções principais e os $\lambda_i = k_i$ curvaturas principais de f . As funções simétricas de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são invariantes da imersão. Por exemplo: $\det(S_\eta) = \lambda_1 \dots \lambda_n$ é denominada a curvatura de Gauss-Kronecker de f e $\frac{1}{n}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$ é denominada a curvatura média de f .

Definição 2.7.1. *Seja $f : \Sigma^n \rightarrow M^{n+1}$ uma hipersuperfície e $A : T\Sigma^n \rightarrow T\Sigma^n$ o tensor de Weingarten. A derivada covariante de A é a aplicação $\nabla A : T\Sigma^n \times T\Sigma^n \rightarrow T\Sigma^n$ dada por*

$$\nabla A(X, Y) = \nabla_Y(AX) - A(\nabla_Y X).$$

Proposição 2.7.1. *Seja $A : T\Sigma^n \rightarrow T\Sigma^n$ o tensor de Weingarten. Então a derivada covariante ∇A é bilinear.*

Demonstração. Dados $X, Y, Z \in TM^n$ e $f \in C^\infty(M)$, temos

$$\begin{aligned} \nabla A(X + fY, Z) &= \nabla_Z(A(X + fY)) - A(\nabla_Z(X + fY)) \\ &= \nabla_Z(AX) + \nabla_Z(fAY) - A(\nabla_Z X) - A(\nabla_Z(fY)) \\ &= \nabla_Z(AX) - A(\nabla_Z X) + f\nabla_Z(AY) + Z(f)AY \\ &\quad - fA(\nabla_Z Y) - Z(f)AY \\ &= \nabla A(X, Z) + f(\nabla_Z(AY) - A(\nabla_Z Y)) \\ &= \nabla A(X, Z) + f\nabla A(Y, Z). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \nabla A(X, Z + fY) &= \nabla_{Z+fY}(AX) - A(\nabla_{Z+fY} X) \\ &= \nabla_Z(AX) - A(\nabla_Z X) + f(\nabla_Y(AX) - A(\nabla_Y X)) \\ &= \nabla A(X, Z) + f\nabla A(X, Y). \end{aligned}$$

□

Proposição 2.7.2. *Seja $f : \Sigma^n \rightarrow M^{n+1}$ uma hipersuperfície, onde M^{n+1} tem curvatura seccional constante. Então ∇A é simétrica, isto é,*

$$\nabla A(X, Y) = \nabla A(Y, X),$$

para $X, Y \in T\Sigma^n$.

Demonstração. Desde que M^{n+1} tem curvatura seccional constante e f tem codimensão um, segue-se da equação de Codazzi que

$$\nabla_X(AY) - \nabla_Y(AX) = A([X, Y]) = A(\nabla_X Y) - A(\nabla_Y X),$$

para $X, Y \in T\Sigma^n$. □

Definição 2.7.2. *Dado um tensor simétrico $T : T\Sigma^n \times T\Sigma^n \rightarrow T\Sigma^n$, definimos o traço de T como sendo*

$$\text{tr}T = \sum_{i=1}^n T(X_i, X_i),$$

onde $\{X_1, \dots, X_n\}$ é um referencial ortonormal.

Definição 2.7.3. *Sejam $A : T\Sigma \rightarrow T\Sigma$ e $B : T\Sigma \rightarrow T\Sigma$ 1-tensores na variedade Riemanniana Σ . O produto interno dos 1-tensores A e B é a aplicação $\langle A, B \rangle : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\langle A, B \rangle (p) = \text{Tr}(A(p) \cdot B^*(p)),$$

onde $B^*(p)$ é o operador adjunto de $B(p)$.

Observação 2.7.1. *Como o operador de Weingarten é auto-adjunto então obtemos*

$$\text{tr}A^2 = \text{tr}(AA) = \text{tr}(A^*A) = \langle A, A \rangle = |A|^2.$$

Capítulo 3

Fórmulas Especiais

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados a respeito da teoria de estabilidade que são as fórmulas da primeira e segunda variação da área. A partir destas fórmulas obteremos fatos bem conhecidos a respeito da estabilidade de hipersuperfícies orientáveis na esfera unitária Euclidiana que será usado em nosso trabalho.

3.1 Fórmula da Primeira Variação da Área

Nesta secção provaremos a fórmula da primeira variação da área que é uma fórmula muito importante, por exemplo, dela decorre que uma imersão x é mínima se, e somente se, x é um ponto crítico para a função área A correspondente a cada variação.

Definição 3.1.1. *Seja Σ^n uma variedade Riemanniana. Denotando por B a segunda forma fundamental de Σ^n podemos definir o campo curvatura média*

$$\vec{H}(p) = \frac{1}{n} \text{tr}(B(p)),$$

para cada $p \in \Sigma^n$.

Sejam X_1, \dots, X_n campos de vetores ortonormais em torno de p . Então, localmente temos

$$\vec{H}(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B(X_i, X_i)(p).$$

No que segue Σ^n é uma variedade Riemanniana orientável e compacta com bordo $\partial\Sigma^n$ e $x : \Sigma^n \longrightarrow M^{n+m}$ uma imersão de Σ^n na variedade Riemanniana M^{n+m} .

Definição 3.1.2. *Uma variação da imersão $x : \Sigma^n \longrightarrow M^{n+m}$ é uma aplicação diferenciável $X : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma^n \longrightarrow M^{n+m}$ tal que*

1. *Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ a aplicação $x_t = X(t, \cdot) : \Sigma^n \longrightarrow M^{n+m}$ é uma imersão.*
2. $x_0 = x$.
3. $x_t|_{\partial\Sigma^n} = x|_{\partial\Sigma^n}$.

O item 3 significa que a variação fixa o bordo.

O campo $V = X_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \Big|_{t=0}$, onde $\frac{\partial}{\partial t}$ é o campo canônico ao longo de $(-\varepsilon, \varepsilon)$, é chamado campo variacional de X . Observemos que a priori V é uma secção do fibrado $TM \oplus TM^\perp$ e como X fixa o bordo, então $V|_{\partial\Sigma^n} \equiv 0$.

Seja $A : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ a função área dada por

$$A(t) = \int_{\Sigma} d\Sigma_t,$$

onde Σ_t representa a variedade Σ munida com a métrica induzida por x_t e $d\Sigma_t$ é o elemento de volume dessa métrica induzida em Σ .

O resultado seguinte será utilizado na demonstração da primeira fórmula da variação da área.

Lema 3.1. *Se $(g_{ij}(t))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ é uma família de matrizes $n \times n$ tal que $(g_{ij}(0)) = I_{n \times n}$ então*

$$\frac{d}{dt} \det(g_{ij}(t)) \Big|_{t=0} = \text{tr}(g'_{ij}(0)).$$

Demonstração. Cada $(g_{ij}(t))$ pode ser considerada como a matriz de uma transformação linear $g_{ij}(t) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ com respeito a base canônica e_1, \dots, e_n de \mathbb{R}^n . Se W é uma forma alternada em \mathbb{R}^n tal que $W(e_1, \dots, e_n) = 1$ então $\det(g_{ij}(t)) =$

$W(g_{ij}(t)e_1, \dots, g_{ij}(t)e_n)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \det(g_{ij}(t)) \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} W(g_{ij}(t)e_1, \dots, g_{ij}(t)e_n) \Big|_{t=0} \\
&= \sum_{k=1}^n W(g_{ij}(t)e_1, \dots, g'_{ij}(t)e_k, \dots, g_{ij}(t)e_n) \Big|_{t=0} \\
&= \sum_{k=1}^m W(e_1, \dots, g'_{ij}(0)e_k, \dots, e_n) \\
&= \sum_{k=1}^m g'_{kk}(0) \\
&= \text{tr}(g'_{ij}(0)).
\end{aligned}$$

□

Agora podemos obter a primeira fórmula da variação da área

Teorema 3.1 (Fórmula da Primeira Variação da Área). *Seja Σ^n uma variedade Riemanniana orientável e compacta com bordo $\partial\Sigma^n$, $x : \Sigma^n \rightarrow M^{n+m}$ uma imersão isométrica com vetor curvatura média \vec{H} . Seja x_t a variação da imersão e $V = (x_t)_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \Big|_{t=0}$ o campo variacional ao longo de x . Então*

$$\frac{dA(t)}{dt} \Big|_{t=0} = -n \int_{\Sigma} \langle \vec{H}, V \rangle d\Sigma.$$

Demonstração. Seja g_t a métrica induzida pela imersão x_t , e $d\Sigma_t$ seu elemento de volume correspondente. Seja $\{X_1, \dots, X_n\}$ um referencial geodésico em $p \in \Sigma$ com respeito a métrica g_0 . Seja $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ o referencial dual de $\{X_1, \dots, X_n\}$. Então, temos

$$g_{ij}(t) = \langle (x_t)_* X_i, (x_t)_* X_j \rangle = g_t(X_i, X_j),$$

onde $g_t = g_{ij}(t)\omega^i \otimes \omega^j$, $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$. Ponhamos $g(t) = \det(g_{ij}(t))$. Então temos que

$$d\Sigma = \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n = d\Sigma_0$$

e

$$d\Sigma_t = \sqrt{g(t)} \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n = \sqrt{g(t)} d\Sigma_0,$$

Assim,

$$A(t) = \int_{\Sigma} d\Sigma_t = \int_{\Sigma} \sqrt{g(t)} \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n = \int_{\Sigma} \sqrt{g(t)} d\Sigma_0.$$

Logo,

$$\left. \frac{dA(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \left(\int_{\Sigma} d\Sigma_t \right) \right|_{t=0} = \int_{\Sigma} \left(\left. \frac{d}{dt} (d\Sigma_t) \right|_{t=0} \right),$$

onde usamos a compacidade de Σ na segunda igualdade. Desde que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} (d\Sigma_t) \right|_{t=0} &= \left(\left. \frac{d}{dt} (\sqrt{g(t)}) \right|_{t=0} \right) d\Sigma_0 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{g(0)}} \left(\left. \frac{dg(t)}{dt} \right|_{t=0} \right) d\Sigma_0 \\ &= \frac{1}{2} \left(\left. \frac{dg(t)}{dt} \right|_{t=0} \right) d\Sigma_0, \end{aligned}$$

temos

$$\left. \frac{dA(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} g'(0) d\Sigma_0.$$

Pelo Lema 3.1 temos em cada ponto p em Σ

$$\left. \frac{d}{dt} (d\Sigma_t) \right|_{t=0} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{dg_{ii}}{dt}(0) d\Sigma_0 \right).$$

Agora, estendendo os campos X_1, \dots, X_n a $(-\delta, \delta) \times U \subset (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma$ de forma natural, isto é,

$$\tilde{X}_i(t, p) = X_i(p),$$

onde U é um vizinhança pequena de p em Σ , temos

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}, \tilde{X}_i \right] = 0, \tag{3.1}$$

pois

$$T_{(t,p)}((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma) = \mathbb{R} \times T_p \Sigma.$$

Sejam

$$Z_0 = (x_t)_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \quad e \quad Z_i = (x_t)_* \left(\tilde{X}_i \right),$$

para $i = 1, \dots, n$. Então,

$$g_{ii}(t) = \langle Z_i, Z_i \rangle = \left\langle (x_t)_* \left(\tilde{X}_i \right), (x_t)_* \left(\tilde{X}_i \right) \right\rangle.$$

Donde

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} g_{ii}(t) \right|_{t=0} &= \left. (Z_0 \langle Z_i, Z_i \rangle) \right|_{t=0} \\ &= \left. 2 (\langle \bar{\nabla}_{Z_0} Z_i, Z_i \rangle) \right|_{t=0} \\ &= \left. 2 (\langle \bar{\nabla}_{Z_i} Z_0, Z_i \rangle) \right|_{t=0}, \end{aligned}$$

onde usamos (3.1) na terceira igualdade. Então,

$$\left. \frac{d}{dt} g_{ii}(t) \right|_{t=0} = 2 (Z_i \langle Z_0, Z_i \rangle - \langle Z_0, \bar{\nabla}_{Z_i} Z_i \rangle) \Big|_{t=0}. \quad (3.2)$$

Desde que $\nabla_{X_i} X_i(p) = 0$, pois o referencial é geodésico, temos

$$\sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{\tilde{X}_i} \tilde{X}_i(p) = B(\tilde{X}_i, \tilde{X}_i)(p) = B(X_i, X_i)(p) = n \vec{H}(p). \quad (3.3)$$

Usando (3.2) e (3.3) obtemos

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} (d\Sigma_t) \right|_{t=0} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \left. \frac{d}{dt} g_{ii}(0) \right) d\Sigma_0 \right. \\ &= \left\{ - \sum_{i=1}^n \langle V, \bar{\nabla}_{\tilde{X}_i} \tilde{X}_i \rangle(p) + \sum_{i=1}^n X_i \langle V, X_i \rangle(p) \right\} d\Sigma_0 \\ &= \left\{ - \langle V, n \vec{H} \rangle(p) + \sum_{i=1}^n X_i \langle V, X_i \rangle(p) \right\} d\Sigma_0 \\ &= \left\{ -n \langle V, \vec{H} \rangle(p) + \sum_{i=1}^n X_i \langle V, X_i \rangle(p) \right\} d\Sigma_0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Consideremos agora a seguinte $(n-1)$ -forma em Σ

$$\Omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \langle V, X_i \rangle \omega^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\omega^i} \wedge \dots \wedge \omega^n.$$

Então, temos em p

$$\begin{aligned} d\Omega(X_1, \dots, X_n) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} X_i \left(\Omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_n) \right) \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} \Omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} X_i \left(\Omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_n) \right), \end{aligned}$$

pois

$$[X_i, X_j](p) = \nabla_{X_i} X_j(p) - \nabla_{X_j} X_i(p) = 0.$$

Portanto, integrando (3.4) e aplicando o Teorema de Stokes obtemos

$$\begin{aligned} \left. \frac{dA(t)}{dt} \right|_{t=0} &= -n \int_{\Sigma} \langle \vec{H}, V \rangle d\Sigma + \int_{\Sigma} d\Omega \\ &= -n \int_{\Sigma} \langle \vec{H}, V \rangle d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} \Omega \\ &= -n \int_{\Sigma} \langle \vec{H}, V \rangle d\Sigma, \end{aligned}$$

onde $\Omega \Big|_{\partial\Sigma^n} = 0$, pois $V \Big|_{\partial\Sigma^n} = 0$. □

Observação 3.1.1. *Se restringirmos o campo variacional V para ser normal, a saber V é normal a Σ^n em toda parte e $V^T = 0$, então a fórmula continua sendo válida sem a condição do bordo.*

Observação 3.1.2. *Se Σ^n não é compacta, então a fórmula pode ser usada para variações com suporte compacto.*

3.2 Fórmula da Segunda Variação da Área

O propósito desta secção é demonstrar a fórmula da segunda variação da área. Mas, para isto iremos definir alguns invariantes geométricos da imersão $x : \Sigma^n \rightarrow M^{n+m}$. Além disso, para cada $p \in \Sigma^n$ consideremos a decomposição

$$T_p M^{n+m} = T_p \Sigma^n \oplus N_p \Sigma^n,$$

onde $N_p \Sigma^n$ é o complementar ortogonal de $T_p \Sigma^n$.

O primeiro destes invariantes é o operador de Laplace no fibrado normal, definido como segue. Seja $x : \Sigma^n \rightarrow M^{n+m}$ uma imersão mínima onde Σ^n é uma variedade compacta com bordo $\partial\Sigma^n$ (possivelmente vazio).

Seja U uma vizinhança de Σ^n . Denotaremos por $\Gamma(U)$ o espaço dos campos normais a Σ^n em U .

Definição 3.2.1. *Seja $\Gamma_0(\Sigma^n)$ o espaço dos campos normais em Σ^n que se anulam em $\partial\Sigma^n$ e possuem suporte compacto em Σ^n . Definimos o Laplaciano $\Delta : \Gamma_0(\Sigma^n) \longrightarrow \Gamma_0(\Sigma^n)$, em cada $p \in \Sigma^n$, por*

$$\Delta\nu(p) = \sum_{i=1}^n \left(\nabla_{X_i}^\perp \nabla_{X_i}^\perp \nu - \nabla_{\nabla_{X_i}^\perp X_i}^\perp \nu \right) (p),$$

onde ∇^\perp é a conexão normal e $\{X_1, \dots, X_n\}$ é um referencial ortonormal em torno de p .

O segundo invariante geométrico considerado envolve curvatura.

Definição 3.2.2. *Sejam $p \in \Sigma^n$ e $\{X_1, \dots, X_n\}$ um referencial ortonormal em torno de p . Definimos a aplicação $\overline{\mathfrak{R}} : N_p\Sigma^n \longrightarrow N_p\Sigma^n$ por*

$$\overline{\mathfrak{R}}(\nu) = \sum_{i=1}^n \left(\overline{R}(X_i, \nu) X_i \right)^N,$$

onde \overline{R} é a curvatura de M^{n+m} .

A teoria da Álgebra Linear garante que $\overline{\mathfrak{R}}$ não depende da base ortonormal escolhida.

O terceiro e último invariante geométrico envolve a segunda forma fundamental B .

Definição 3.2.3. *Dado $p \in \Sigma^n$ definimos a aplicação $\tilde{\mathfrak{B}} : N_p\Sigma^n \longrightarrow N_p\Sigma^n$ por*

$$\tilde{\mathfrak{B}}(\nu) = B \circ B^t(\nu),$$

onde B é a segunda forma fundamental de Σ^n e B^t é a sua aplicação transposta.

Se X_1, \dots, X_n são campos ortonormais em torno de p , então

$$\langle \tilde{\mathfrak{B}}(\nu), \mu \rangle = \sum_{i,j=1}^n \langle B(X_i, X_j), \nu \rangle \langle B(X_i, X_j), \mu \rangle,$$

para todos $\nu, \mu \in N_p\Sigma^n$.

Agora, observemos o seguinte. Dada uma imersão $x : \Sigma^n \longrightarrow M^{n+m}$ e um referencial ortonormal $\{\nu_1, \dots, \nu_m\}$ em $\Gamma(U)$, onde U é uma vizinhança de p na qual x

é uma subvariedade. Então, considerando um referencial ortonormal $\{X_1, \dots, X_n\}$ tangente a Σ^n numa vizinhança de $p \in \Sigma^n$ temos

$$\begin{aligned}
\vec{H}(p) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{X_i} X_i)^N \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^m \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_i, \nu_k \rangle \nu_k \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_i, \nu_k \rangle \right) \nu_k \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \langle (-\bar{\nabla}_{X_i} \nu_k), X_i \rangle \right) \nu_k \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m (\text{tr}(A_{\nu_k})) \nu_k,
\end{aligned}$$

onde $A_{\nu_k} : T_p \Sigma^n \rightarrow T_p \Sigma^n$ é dada por

$$A_{\nu_k}(X) = -(\bar{\nabla}_X \nu_k)^T,$$

para $k = 1, \dots, m$.

O seguinte lema será utilizado na demonstração da segunda fórmula da variação da área.

Lema 3.2. *Seja $x : \Sigma^n \rightarrow M^{n+m}$ uma imersão. Se X_1, \dots, X_n são campos linearmente independentes em torno de $p \in \Sigma^n$, então*

$$\vec{H}(p) = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(p) (\bar{\nabla}_{X_i} X_j)^N(p),$$

onde $g_{ij}(p) = \langle X_i, X_j \rangle(p)$ e $(g^{ij}(p))$ é a matriz inversa de $(g_{ij}(p))$.

Demonstração. Seja $\{\nu_1, \dots, \nu_m\}$ um referencial ortonormal em $\Gamma(U)$, onde U é uma vizinhança de p na qual x é uma subvariedade. Se $V \in T_p \Sigma$, então podemos escrever

$$V = \sum_{j=1}^n v_j X_j, \text{ donde}$$

$$\bar{\nabla}_V \nu_k = \sum_{j=1}^n v_j \bar{\nabla}_{X_j} \nu_k.$$

Como $\langle \nu_k, \nu_k \rangle = 1$, numa vizinhança de p , temos

$$\bar{\nabla}_{X_j} \nu_k = \sum_{l=1}^n a_{lj}^k X_l + \sum_{l=1, l \neq k}^m C_{lj}^k \nu_l. \quad (3.5)$$

Daqui,

$$A_{\nu_k}(V) = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (-a_{lj}^k) v_j \right) X_l,$$

isto é, $(-a_{ij}^k)$ é a matriz de A_{ν_k} na base $\{X_1, \dots, X_n\}$.

Usando (3.5) obtemos

$$\langle \bar{\nabla}_{X_j} \nu_k, X_i \rangle = \sum_{l=1}^n a_{lj}^k g_{il},$$

para $i, j = 1, \dots, n$. Logo,

$$(-a_{ij}^k) = (-b_{ij}^k) \cdot (g^{ji}),$$

onde $b_{ij}^k = \langle \bar{\nabla}_{X_j} \nu_k, X_i \rangle$. Então,

$$\begin{aligned} \text{tr } A_{\nu_k} &= - \sum_{i=1}^n a_{ii}^k \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \langle \bar{\nabla}_{X_j} \nu_k, X_i \rangle g^{ji} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \langle \nu_k, \bar{\nabla}_{X_i} X_j \rangle g^{ij}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \vec{H}(p) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m (\text{tr } A_{\nu_k}) \nu_k \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i,j=1}^n \langle \nu_k, \bar{\nabla}_{X_i} X_j \rangle g^{ij} \right) \nu_k \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \left(\sum_{k=1}^m \langle \nu_k, \bar{\nabla}_{X_i} X_j \rangle \nu_k \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n g^{ij} (\bar{\nabla}_{X_i} X_j)^N(p). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2 (Fórmula da Segunda Variação da Área). *Dadas uma variedade Riemanniana compacta e orientável Σ^n com bordo $\partial\Sigma^n$ e uma imersão mínima $x : \Sigma^n \rightarrow M^{n+m}$, seja $X : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma^n \rightarrow M^{n+m}$ uma variação da imersão x . Então,*

$$\left. \frac{d^2 A(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = - \int_{\Sigma^n} \left\{ \langle \Delta V, V \rangle + \langle \bar{\mathfrak{R}}(V), V \rangle + \langle \tilde{\mathfrak{B}}(V), V \rangle \right\} d\Sigma^n,$$

onde V é a componente normal do vetor variação $X_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \Big|_{t=0}$ que se anula em $\partial\Sigma$.

Demonstração. Como

$$\left. \frac{dA(t)}{dt} \right|_{t=0} = -n \int_{\Sigma} \langle \vec{H}, V \rangle d\Sigma,$$

então temos

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 A(t)}{dt^2} \right|_{t=0} &= -n \left. \frac{d}{dt} \left(\int_{\Sigma} \langle \vec{H}_t, V_t \rangle d\Sigma_t \right) \right|_{t=0} \\ &= -n \int_{\Sigma} \left. \frac{d}{dt} \left(\langle \vec{H}_t, V_t \rangle d\Sigma_t \right) \right|_{t=0} \\ &= -n \int_{\Sigma} \left. \frac{d}{dt} \left(\langle \vec{H}_t, V_t \rangle \right) \right|_{t=0} d\Sigma_0 - n \int_{\Sigma} \langle \vec{H}, V \rangle \left(\left. \frac{d}{dt} (d\Sigma_t) \right|_{t=0} \right) \\ &= -n \int_{\Sigma} \left. \frac{d}{dt} \left(\langle \vec{H}_t, V_t \rangle \right) \right|_{t=0} d\Sigma, \end{aligned} \quad (3.6)$$

pois a imersão x é mínima.

Seja $\{X_1, \dots, X_n\}$ um referencial geodésico em $p \in \Sigma$. Como no cálculo da primeira variação estendemos o referencial às folhas por

$$(x_t)_* X_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

e definimos

$$g_{ij}(t) = \langle (x_t)_* X_i, (x_t)_* X_j \rangle = g_t(X_i, X_j).$$

Donde a métrica induzida por x_t em Σ é $g_t = g_{ij}(t) \omega^i \otimes \omega^j$, onde $\omega^1, \dots, \omega^n$ são as formas duais de X_1, \dots, X_n .

Identificando $(x_t)_* X_i$ com X_i , segue do lema 3.2 que

$$\vec{H}_t = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(t) (\nabla_{X_i} X_j)^N,$$

onde $(g^{ij}(t))$ denota a matriz inversa de $(g_{ij}(t))$.

Daqui, temos

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \left(\langle \vec{H}_t, V_t \rangle \right) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(t) \left\langle (\bar{\nabla}_{X_i} X_j)^N, V_t \right\rangle \right) \right|_{t=0} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \left. \frac{dg^{ij}}{dt} (0) \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_j, V \rangle + \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(0) \left\langle \bar{\nabla}_{V_t} \bar{\nabla}_{X_i} X_j \right|_{t=0}, V \right\rangle + \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(0) \langle (\bar{\nabla}_{X_i} X_j)^N, \bar{\nabla}_V V \rangle. \end{aligned}$$

Donde obtemos

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \left(\langle \vec{H}_t, V_t \rangle \right) \right|_{t=0} &= \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \left. \frac{dg^{ij}}{dt} (0) \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_j, V \rangle + \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(0) \left\langle \bar{\nabla}_{V_t} \bar{\nabla}_{X_i} X_j \right|_{t=0}, V \right\rangle + \\ &+ \langle \vec{H}, \bar{\nabla}_V V \rangle \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \left. \frac{dg^{ij}}{dt} (0) \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_j, V \rangle + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\langle \bar{\nabla}_V \bar{\nabla}_{X_i} X_i, V \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Como $\sum_{k=1}^n g^{ik} g_{kj} = \delta_{ij}$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, obtemos

$$\sum_{k=1}^n \frac{dg^{ik}}{dt} (0) g_{kj} (0) = - \sum_{k=1}^n g^{ik} (0) \frac{dg_{kj}}{dt} (0),$$

isto é,

$$\begin{aligned} \frac{dg^{ij}}{dt} (0) &= - \frac{dg_{ij}}{dt} (0) \\ &= - \left. \frac{d}{dt} (\langle X_i, X_j \rangle) \right|_{t=0} \\ &= - \langle \bar{\nabla}_V X_i, X_j \rangle - \langle X_i, \bar{\nabla}_V X_j \rangle \\ &= - \langle \bar{\nabla}_{X_i} V, X_j \rangle - \langle X_i, \bar{\nabla}_{X_j} V \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_j, V \rangle + \langle V, \bar{\nabla}_{X_j} X_i \rangle \\ &= 2 \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_j, V \rangle \\ &= 2 \langle B(X_i, X_j), V \rangle, \end{aligned}$$

onde usamos que

$$[X_i, X_j](p) = 0 \quad e \quad \left[\frac{\partial}{\partial t}, X_i \right](p) = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \frac{dg^{ij}}{dt} (0) \langle \bar{\nabla}_{X_i} X_j, V \rangle &= 2 \sum_{i,j=1}^n \langle B(X_i, X_j), V \rangle \langle B(X_i, X_j), V \rangle \\ &= 2 \langle \tilde{\mathcal{B}}(V), V \rangle. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_V \bar{\nabla}_{X_i} X_i, V \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(X_i, V) X_i + \bar{\nabla}_{X_i} \bar{\nabla}_V X_i - \bar{\nabla}_{[X_i, V]} X_i, V \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(X_i, V) X_i + \bar{\nabla}_{X_i} \bar{\nabla}_V X_i, V \rangle \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_V \bar{\nabla}_{X_i} X_i, V \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(X_i, V) X_i, V \rangle + \sum_{i=1}^n X_i \langle \bar{\nabla}_V X_i, V \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_V X_i, \bar{\nabla}_{X_i} V \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(X_i, V) X_i, V \rangle + \sum_{i=1}^n X_i \langle \bar{\nabla}_V X_i, V \rangle - \sum_{i=1}^n |\bar{\nabla}_{X_i} V|^2, \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde usamos que $[V, X_i](p) = 0$ na segunda igualdade.

Além disso, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\bar{\nabla}_{X_i} V|^2 &= \sum_{i=1}^n \left| (\bar{\nabla}_{X_i} V)^T \right|^2 + \sum_{i=1}^n \left| (\bar{\nabla}_{X_i} V)^N \right|^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n \langle \bar{\nabla}_{X_i} V, X_j \rangle^2 + \sum_{i=1}^n \left| (\bar{\nabla}_{X_i} V)^N \right|^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n \langle B(X_i, X_j), V \rangle^2 + \sum_{i=1}^n \left| (\bar{\nabla}_{X_i} V)^N \right|^2 \\ &= \langle \tilde{\mathcal{B}}(V), V \rangle + \sum_{i=1}^n \left| (\bar{\nabla}_{X_i} V)^N \right|^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Usando o fato de que o referencial $\{X_1, \dots, X_n\}$ é geodésico em p , isto é, $\nabla_{X_i} X_i(p) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n X_i \langle \bar{\nabla}_V X_i, V \rangle &= \sum_{i=1}^n X_i \langle \nabla_V^\perp X_i, V \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{X_i}^\perp \nabla_{X_i}^\perp V \rangle + \sum_{i=1}^n \left| (\bar{\nabla}_{X_i} V)^N \right|^2 \\
&= \langle \Delta(V), V \rangle + \sum_{i=1}^n \left| (\bar{\nabla}_{X_i} V)^N \right|^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
n \frac{d}{dt} \langle \vec{H}_t, X_t \rangle \Big|_{t=0} &= 2 \langle \tilde{\mathcal{B}}(V), V \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(X_i, V) X_i, V \rangle + \sum_{i=1}^n X_i \langle \bar{\nabla}_V X_i, V \rangle - \\
&\quad - \langle \tilde{\mathcal{B}}(V), V \rangle - \sum_{i=1}^n \left| (\bar{\nabla}_{X_i} V)^N \right|^2 \\
&= \langle \tilde{\mathcal{B}}(V), V \rangle + \langle \bar{\mathcal{R}}(V), V \rangle + \sum_{i=1}^n \left| (\bar{\nabla}_{X_i} V)^N \right|^2 - \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \left| (\bar{\nabla}_{X_i} V)^N \right|^2 + \langle \Delta(V), V \rangle \\
&= \langle \tilde{\mathcal{B}}(V), V \rangle + \langle \bar{\mathcal{R}}(V), V \rangle + \langle \Delta(V), V \rangle,
\end{aligned}$$

onde usamos (3.7), (3.8) e (3.9) na primeira igualdade e (3.10) na segunda igualdade.

Portanto, segue de (3.6) que

$$\frac{d^2 A(t)}{dt^2} \Big|_{t=0} = - \int_{\Sigma^n} \left\{ \langle \Delta V, V \rangle + \langle \bar{\mathcal{R}}(V), V \rangle + \langle \tilde{\mathcal{B}}(V), V \rangle \right\} d\Sigma^n.$$

□

3.3 Variação da Área de Hipersuperfícies na esfera

Nesta secção utilizaremos as secções anteriores para demonstrar as fórmulas da primeira e segunda variação da área para hipersuperfícies mínima orientadas e fechadas na esfera as quais serão usadas no nosso trabalho.

Definição 3.3.1. *Dada uma hipersuperfície Σ^n , dizemos que Σ^n é mínima quando, e somente quando, a sua curvatura média $H(p)$ é zero para todo $p \in \Sigma^n$.*

Teorema 3.3.1 (Fórmula da Primeira Variação da Área). *Sejam Σ^n uma variedade Riemanniana orientável e compacta com bordo $\partial\Sigma^n$, $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão isométrica com vetor curvatura média H e N um campo de vetores normal da imersão x . Se a variação $X : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ é dada por $x_t(p) = \exp_{x(p)}(tf(p)N(p))$, onde $f : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável. Então*

$$\left. \frac{dA(t)}{dt} \right|_{t=0} = -n \int_{\Sigma} f H d\Sigma.$$

Demonstração. Sendo a variação $X : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ dada por $x_t(p) = \exp_{x(p)}(tf(p)N(p))$, temos

$$\begin{aligned} V &= X_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \Big|_{t=0} \\ &= (d\exp)_0(f(p)N(p)) \\ &= f(p)N(p). \end{aligned}$$

Agora, pelo fato da codimensão ser um temos $\vec{H} = HN$. Como

$$\left. \frac{dA(t)}{dt} \right|_{t=0} = -n \int_{\Sigma} \langle \vec{H}, V \rangle d\Sigma,$$

então

$$\begin{aligned} \left. \frac{dA(t)}{dt} \right|_{t=0} &= -n \int_{\Sigma} \langle HN, fN \rangle d\Sigma \\ &= -n \int_{\Sigma} fH \langle N, N \rangle d\Sigma \\ &= -n \int_{\Sigma} fH d\Sigma. \end{aligned}$$

Portanto, o teorema está provado. □

Corolário 3.3.1. $H = 0$ se, e somente se, $A'(0) = 0$, para toda $f \in C^\infty(\Sigma^n)$.

Demonstração. Suponhamos que $H(p) = 0$ para todo $p \in \Sigma^n$. Então $A'(0) = 0$ para toda $f \in C^\infty(\Sigma^n)$. Reciprocamente, suponhamos que $A'(0) = 0$ para toda

$f \in C^\infty(\Sigma^n)$ e que exista um certo $p \in \Sigma^n$ tal que $H(p) > 0$. Escolhamos f tal que $f(p) = H(p)$, $f \geq 0$, e que $f = 0$ fora de um pequeno domínio $\mathcal{D} \subset \Sigma^n$ em torno de p . Para tal f temos

$$A'(0) = -n \int_{\Sigma} f H d\Sigma < 0,$$

contradizendo o fato que $A'(0) = 0$ para toda $f \in C^\infty(\Sigma^n)$. Portanto, isto mostra que $H(p) = 0$ para todo $p \in \Sigma^n$. \square

Teorema 3.3.2 (Fórmula da Segunda Variação da Área). *Seja $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície mínima, compacta e orientável, com campo de vetores normal N . Se a variação $X : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ é dada por*

$$x_t(p) = \exp_{x(p)}(t f(p) N(p)),$$

onde $f : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então

$$\left. \frac{d^2 A(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = - \int_{\Sigma} [f \Delta f + (|A|^2 + n) f^2] d\Sigma,$$

onde A é a segunda forma fundamental da imersão x .

Demonstração. Seja $\{X_1, \dots, X_n\}$ um referencial ortonormal em torno de $p \in \Sigma^n$ que diagonaliza A em p . Como $\langle N, N \rangle = 1$ então temos

$$\langle \bar{\nabla}_{X_i} N, N \rangle = 0,$$

para $i = 1, \dots, n$. Daí,

$$\nabla_{X_i}^\perp N = (\bar{\nabla}_{X_i} N)^N = 0,$$

Agora, como

$$\begin{aligned} V &= X_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \Big|_{t=0} \\ &= (d \exp)_0 (f(p) N(p)) \\ &= f(p) N(p), \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_i}^\perp (V) &= \nabla_{X_i}^\perp (fN) \\
&= X_i(f) N + f \nabla_{X_i}^\perp N \\
&= X_i(f) N.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_i}^\perp \nabla_{X_i}^\perp (V) &= \nabla_{X_i}^\perp (X_i(f) N) \\
&= X_i X_i(f) N + X_i(f) \nabla_{X_i}^\perp N \\
&= X_i X_i(f) N.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Analogamente, obtemos

$$\nabla_{\nabla_{X_i} X_i}^\perp (fN) = \nabla_{X_i} X_i(f) N. \tag{3.12}$$

Assim, usando (3.11) e (3.12) obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \Delta V, V \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \{X_i X_i(f) - \nabla_{X_i} X_i(f)\} N, fN \right\rangle \\
&= f \sum_{i=1}^n \{X_i X_i(f) - \nabla_{X_i} X_i(f)\} \langle N, N \rangle \\
&= f \Delta f.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
\langle \overline{\mathfrak{R}}(V), V \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(X_i, fN) X_i, fN \rangle \\
&= f^2 \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(X_i, N) X_i, N \rangle \\
&= f^2 n,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

pois, sendo a esfera nossa variedade ambiente, temos $\langle \overline{R}(X_i, N) X_i, N \rangle = 1$.

Finalmente, temos

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\mathcal{B}}(V), V \rangle &= \sum_{i,j=1}^n \langle B(X_i, X_j), V \rangle \langle B(X_i, X_j), V \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n \langle B(X_i, X_j), fN \rangle \langle B(X_i, X_j), fN \rangle \\
&= f^2 \sum_{i,j=1}^n (\langle B(X_i, X_j), N \rangle)^2 \\
&= f^2 \sum_{i,j=1}^n (\langle X_j, -\bar{\nabla}_{X_i} N \rangle)^2 \\
&= f^2 \sum_{i,j=1}^n (\langle X_j, A_N(X_i) \rangle)^2,
\end{aligned}$$

onde A é o operador de Weingarten. Como A é diagonalizada em p então sejam k_1, \dots, k_n os autovalores reais de A em p . Daí, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\mathcal{B}}(V), V \rangle &= f^2 \sum_{i,j=1}^n (\langle X_j, k_i X_i \rangle)^2 \\
&= f^2 \sum_{i,j=1}^n k_i^2 (\langle X_j, X_i \rangle)^2 \\
&= f^2 \sum_{i,j=1}^n k_i^2 (\delta_{ij})^2 \\
&= f^2 \sum_{i=1}^n k_i^2 \\
&= f^2 |A|^2.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Portanto, usando (3.13), (3.14) e (3.15) em

$$\left. \frac{d^2 A(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = - \int_{\Sigma^n} \left\{ \langle \Delta V, V \rangle + \langle \bar{\mathcal{R}}(V), V \rangle + \langle \tilde{\mathcal{B}}(V), V \rangle \right\} d\Sigma^n,$$

obtemos

$$\left. \frac{d^2 A(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = - \int_{\Sigma} \{ f \Delta f + (|A|^2 + n) f^2 \} d\Sigma.$$

□

Capítulo 4

O Índice de Hipersuperfícies Mínimas

A menos que seja declarado, toda variedade considerada neste trabalho será conexa, fechada, isto é, compacta sem bordo. Dada uma imersão isométrica $x : \Sigma^n \looparrowright \mathbb{S}^{n+1}$ de uma variedade orientada e compacta Σ^n , na esfera unitária Euclidiana \mathbb{S}^{n+1} denotaremos sua segunda forma fundamental por A enquanto sua curvatura média H será dada por

$$nH = \text{tr} A.$$

Sendo A um operador auto-adjunto, existe uma base ortonormal de autovetores X_1, \dots, X_n de $T_p \Sigma^n$ com autovalores reais k_1, \dots, k_n , chamados curvaturas principais da imersão x , em relação a qual a matriz de A é dada por

$$[A] = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_n \end{pmatrix}.$$

Sejam S_1 e S_2 , respectivamente, a primeira e a segunda funções simétricas de curvaturas, dadas por

$$S_1 = \sum_{i=1}^n k_i \quad e \quad S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} k_i k_j.$$

Como,

$$|A|^2 = \text{tr} (A^2) = \sum_{i=1}^n k_i^2,$$

então

$$S_1^2 = \left(\sum_{i=1}^n k_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n k_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} k_i k_j = |A|^2 + 2S_2.$$

Portanto, obtemos a seguinte relação

$$|A|^2 + 2S_2 = S_1^2. \quad (4.1)$$

Por outro lado, dada uma função diferenciável $f \in C^\infty(\Sigma^n)$ existe uma variação normal x_t da imersão x , com campo normal variacional fH , tal que

$$\left. \frac{dA(t)}{dt} \right|_{t=0} = -n \int_{\Sigma} fH d\Sigma,$$

onde $A(t)$ é a área de cada imersão x_t e $d\Sigma$ é o elemento de volume de Σ . Portanto, hipersuperfícies mínimas da esfera unitária são caracterizadas como pontos críticos do funcional área. Para compreender o comportamento de tais pontos críticos é fundamental o cálculo da segunda derivada de $A(t)$ que é dada por:

$$\left. \frac{d^2 A(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = - \int_{\Sigma} f [\Delta f + (|A|^2 + n) f] d\Sigma.$$

Definição 4.1. *Sejam $x : \Sigma^n \looparrowright \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície e $A : T\Sigma^n \rightarrow T\Sigma^n$ o tensor de Weingarten. O operador de Jacobi é a aplicação $J : C^\infty(\Sigma^n) \rightarrow C^\infty(\Sigma^n)$ dada por*

$$J(f) = \Delta f + (|A|^2 + n) f,$$

onde Δ denota o operador Laplaciano de Σ^n e $|A|^2$ é o traço de A^2 .

Observação 4.1. *O operador de Jacobi é também chamado de operador de estabilidade.*

O operador de Jacobi induz uma forma quadrática $Q : C^\infty(\Sigma^n) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$Q(f) = - \int_{\Sigma} f J f d\Sigma.$$

Definição 4.2. Seja $J : C^\infty(\Sigma^n) \longrightarrow C^\infty(\Sigma^n)$ o operador de Jacobi. O índice de estabilidade de Σ^n , denotado por Ind_{Σ^n} , é definido por

$$Ind_{\Sigma^n} = \max \{ \dim V : V \subset C^\infty(\Sigma^n), Q(f) < 0, \forall f \in V \},$$

onde $Q(f) = - \int_{\Sigma} f J f d\Sigma$.

Observação 4.2. Sendo Σ^n compacta, sabemos que os autovalores do Laplaciano tendem para mais infinito, assim Ind_{Σ^n} é finito..

Exemplo: As funções constantes sempre tem tal propriedade. De fato, pois se Σ^n é uma hipersuperfície mínima e compacta em \mathbb{S}^{n+1} então para $f \equiv 1$ temos

$$\begin{aligned} Q(1) &= - \int_{\Sigma} 1 [\Delta 1 + (|A|^2 + n) 1] d\Sigma \\ &= - \int_{\Sigma} (|A|^2 + n) d\Sigma \\ &= -n \int_{\Sigma} d\Sigma - \int_{\Sigma} |A|^2 d\Sigma \\ &= -n Area(\Sigma) - \int_{\Sigma} |A|^2 d\Sigma \\ &\leq -n Area(\Sigma) < 0. \end{aligned}$$

Portanto, toda hipersuperfície mínima orientada e compacta $\Sigma^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ tem $Ind_{\Sigma^n} \geq 1$.

Observação 4.3. No trabalho de Alias [1] encontramos uma outra maneira, muito interessante, de definir o índice de estabilidade de Σ^n através dos autovalores do operador de Jacobi, pois o operador de Jacobi J pertence a uma classe de operadores de Schrodinger, ou seja, operadores da forma $\Delta + q$, onde q é alguma função contínua em Σ^n . Como bem sabemos, o espectro de J

$$\begin{aligned} Spec(J) &= \{ \lambda \in \mathbb{R} : Jf = -\lambda f, f \in C^\infty(\Sigma^n), f \neq 0 \} \\ &= \{ \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \cdots \} \end{aligned}$$

é formado por autovalores λ_k com multiplicidades finitas m_k e tais que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty.$$

Além do mais o primeiro autovalor λ_1 é simples ($m_1 = 1$) e ele satisfaz a seguinte caracterização do min-max

$$\lambda_1 = \min \left\{ \frac{-\int_{\Sigma} f J f d\Sigma}{\int_{\Sigma} f^2 d\Sigma} : f \in C^\infty(\Sigma^n), f \neq 0 \right\}.$$

Portanto, o Ind_{Σ^n} é definido como sendo o número de autovalores negativos de J (contados com a multiplicidade) que é necessariamente finito e é dado por

$$Ind_{\Sigma^n} = \sum_{\lambda_k < 0} m_k < \infty,$$

onde a finitude segue do fato de que

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \dots \nearrow +\infty,$$

pois como a seqüência está crescendo para $+\infty$ então chega um momento que os autovalores λ_k serão todos positivos e portanto temos um número finito de autovalores negativos.

Definição 4.3. Seja $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície mínima. Diremos que Σ^n é estável quando, e somente quando, $Ind_{\Sigma^n} = 0$.

Equivalentemente, dizemos que Σ^n é estável quando $Q(f) \geq 0, \forall f \in C^\infty(\Sigma^n)$.

Definição 4.4. Seja $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície mínima. Diremos que Σ^n é instável quando Σ^n não é estável.

Observação 4.4. Como toda hipersuperfície mínima orientada e compacta $\Sigma^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ tem $Ind_{\Sigma^n} \geq 1$ então ela é instável. Além disso, Simons [13] provou que $Ind_{\Sigma^n} = 1$ apenas para esferas totalmente geodésicas.

Capítulo 5

Análise de Funções Suportes

Dada uma hipersuperfície $x : \Sigma^n \looparrowright \mathbb{S}^{n+1}$ as funções suportes $\ell_v = \langle x, v \rangle$ e $f_v = \langle N, v \rangle$, onde $v \in \mathbb{R}^{n+2}$ e N é a aplicação de Gauss, desempenha papel importante na teoria de imersões. Desde que $V = \{\ell_v; v \in \mathbb{R}^{n+2}\}$ e $W = \{f_v; v \in \mathbb{R}^{n+2}\}$ são subespaços lineares do espaço vetorial $C^\infty(\Sigma^n)$, onde a linearidade de V e W segue da linearidade de \mathbb{R}^{n+2} , usando as equações de Gauss e Codazzi podemos obter muitas propriedades para este par de funções.

Definição 5.1. *Um campo de vetores tangente $v^T : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ é definido por*

$$v^T = v - \ell_v x - f_v N.$$

Sejam ∇ , $\bar{\nabla}$ e $\hat{\nabla}$ as conexões de Σ^n , \mathbb{S}^{n+1} e \mathbb{R}^{n+2} , respectivamente. Seja A o operador de Weingarten de Σ^n . Então, as fórmulas de Gauss e Weingarten da imersão $x : \Sigma^n \looparrowright \mathbb{S}^{n+1}$ são dadas, respectivamente, por:

$$\hat{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_X Y - \langle X, Y \rangle x = \nabla_X Y + \langle AX, Y \rangle N - \langle X, Y \rangle x, \quad (5.1)$$

e

$$AX = -\hat{\nabla}_X N = -\bar{\nabla}_X N, \quad X, Y \in T\Sigma^n. \quad (5.2)$$

Além disso, denotando a derivada covariante de A por ∇A onde

$$\nabla A(X, Y) = (\nabla_Y A)X = \nabla_Y(AX) - A(\nabla_Y X), \quad X, Y \in T\Sigma^n,$$

temos a seguinte equação de Codazzi da imersão $x : \Sigma^n \looparrowright \mathbb{S}^{n+1}$

$$\nabla A(X, Y) = \nabla A(Y, X). \quad (5.3)$$

Agora, consideremos o seguinte lema que será utilizado na proposição abaixo.

Lema 1. *Sejam A o operador de Weingarten e H a curvatura média de Σ^n . Então, para todo $X \in T\Sigma^n$*

$$\text{tr}(\nabla_X A) = n\langle X, \nabla H \rangle.$$

Demonstração. Seja $\{X_1, \dots, X_n\}$ um referencial ortonormal em torno de $p \in \Sigma$ que diagonaliza A em p , e sejam $k_1(p), \dots, k_n(p)$ os autovalores associados a, respectivamente, $X_1(p), \dots, X_n(p)$. Então, em p , temos

$$\begin{aligned} \text{tr}(\nabla_X A) &= \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_X A) X_i, X_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_X (AX_i) - A(\nabla_X X_i), X_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_X (AX_i), X_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle A(\nabla_X X_i), X_i \rangle. \end{aligned}$$

Como

$$0 = k_i(p) \langle \nabla_X X_i, X_i \rangle(p) = \langle \nabla_X X_i, AX_i \rangle(p) = \langle A(\nabla_X X_i), X_i \rangle(p),$$

pois X_i é ortogonal em uma vizinhança de p , então escrevendo $X = \sum_{j=1}^n \langle X, X_j \rangle X_j$

obtemos

$$\begin{aligned} \text{tr}(\nabla_X A) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_X (AX_i), X_i \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \langle X, X_j \rangle \langle \nabla_{X_j} (AX_i), X_i \rangle. \end{aligned}$$

Agora, observemos que $\langle \nabla_{X_j}(AX_i), X_i \rangle = X_j \langle AX_i, X_i \rangle - \langle AX_i, \nabla_{X_j} X_i \rangle$. Logo,

$$\begin{aligned}
tr(\nabla_X A) &= \sum_{i,j=1}^n \langle X, X_j \rangle (X_j \langle AX_i, X_i \rangle) \\
&= \sum_{j=1}^n \langle X, X_j \rangle \left[X_j \left(\sum_{i=1}^n \langle AX_i, X_i \rangle \right) \right] \\
&= n \sum_{j=1}^n \langle X, X_j \rangle (X_j(H)) \\
&= n \left\langle X, \sum_{j=1}^n X_j(H) X_j \right\rangle \\
&= n \langle X, \nabla H \rangle.
\end{aligned}$$

□

Proposição 5.1. *Seja $x : \Sigma^n \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável imersa na esfera Euclidiana \mathbb{S}^{n+1} , com vetor normal N . Então,*

- i) $\nabla \ell_v = v^T$ e $\nabla f_v = -A(v^T)$.
- ii) $Hess \ell_v(X, Y) = f_v \langle AX, Y \rangle - \ell_v \langle X, Y \rangle$, $\forall X, Y \in T\Sigma^n$.
- iii) $Hess f_v(X, Y) = -\langle \nabla A(v^T, X), Y \rangle - f_v \langle AX, AY \rangle + \ell_v \langle AX, Y \rangle$, $\forall X, Y \in T\Sigma^n$.
- iv) $\Delta \ell_v = -n\ell_v + nHf_v$ e $\Delta f_v = -n\langle v^T, \nabla H \rangle + nH\ell_v - |A|^2 f_v$.

Demonstração. Seja $\{X_1, \dots, X_n\}$ um referencial ortonormal em torno de $p \in \Sigma^n$ que diagonaliza A em p . Então, em p , temos

$$\nabla \ell_v = \sum_{i=1}^n X_i(\ell_v) X_i = \sum_{i=1}^n \langle X_i, v \rangle X_i = v^T. \quad (5.4)$$

Analogamente, temos

$$\begin{aligned}
\nabla f_v &= \sum_{i=1}^n X_i (f_v) X_i \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{X_i} N, v^T \rangle X_i \\
&= - \sum_{i=1}^n \langle AX_i, v^T \rangle X_i \\
&= - \sum_{i=1}^n \langle A(v^T), X_i \rangle X_i \\
&= -A(v^T). \tag{5.5}
\end{aligned}$$

Desde que $v^T = v - \ell_v x - f_v N$ ao longo da imersão x então usando a equação de Gauss (5.1) e a equação de Weingarten (5.2) temos

$$\begin{aligned}
Hess_{\ell_v}(X, Y) &= \langle \nabla_X \nabla \ell_v, Y \rangle \\
&= \langle \widehat{\nabla}_X \nabla \ell_v, Y \rangle \\
&= \langle \widehat{\nabla}_X v^T, Y \rangle \\
&= \langle \widehat{\nabla}_X (v - \ell_v x - f_v N), Y \rangle \\
&= -\langle \widehat{\nabla}_X (\ell_v x), Y \rangle - \langle \widehat{\nabla}_X (f_v N), Y \rangle \\
&= f_v \langle -\widehat{\nabla}_X N, Y \rangle - \ell_v \langle \widehat{\nabla}_X x, Y \rangle \\
&= f_v \langle AX, Y \rangle - \ell_v \langle X, Y \rangle, \tag{5.6}
\end{aligned}$$

para $X, Y \in T\Sigma$, onde a orientação de \mathbb{S}^{n+1} é a identidade. Agora, utilizando a equação de Codazzi (5.3) no cálculo do hessiano de f_v temos

$$\begin{aligned}
Hess_{f_v}(X, Y) &= \langle \nabla_X \nabla f_v, Y \rangle \\
&= \langle \nabla_X (-A(v^T)), Y \rangle \\
&= -\langle (\nabla_X A)(v^T) + A(\nabla_X v^T), Y \rangle \\
&= -\langle (\nabla_{v^T} A)(X), Y \rangle - \langle A(\nabla_X v^T), Y \rangle \\
&= -\langle (\nabla_{v^T} A)(X), Y \rangle - \langle \nabla_X v^T, AY \rangle \\
&= -\langle \nabla A(X, v^T), Y \rangle - Hess_{\ell_v}(X, AY) \\
&= -\langle \nabla A(v^T, X), Y \rangle - f_v \langle AX, AY \rangle + \ell_v \langle X, AY \rangle. \tag{5.7}
\end{aligned}$$

Segue-se da equação (5.6) que

$$\begin{aligned}
\Delta \ell_v &= \text{tr}(\text{Hess} \ell_v) \\
&= \sum_{i=1}^n \text{Hess} \ell_v \langle X_i, X_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n f_v \langle AX_i, X_i \rangle - \sum_{i=1}^n \ell_v \langle X_i, X_i \rangle \\
&= nHf_v - n\ell_v,
\end{aligned} \tag{5.8}$$

onde H é a curvatura média de Σ^n . Por fim, usando o Lema 1 e a equação (5.7) temos

$$\begin{aligned}
\Delta f_v &= \text{tr}(\text{Hess} f_v) \\
&= \sum_{i=1}^n \text{Hess} f_v \langle X_i, X_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n [-\langle \nabla A(X_i, v^T), X_i \rangle - f_v \langle AX_i, AX_i \rangle + \ell_v \langle X_i, AX_i \rangle] \\
&= -\text{tr}(\nabla_{v^T} A) + nH\ell_v - |A|^2 f_v \\
&= -n\langle v^T, \nabla H \rangle + nH\ell_v - |A|^2 f_v.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

□

Agora, iremos provar alguns resultados que serão de grande importância para o objetivo deste trabalho. Nosso primeiro resultado é um lema bem conhecido onde a imersão $x : \Sigma^n \looparrowright \mathbb{S}^{n+1}$ é mínima.

Lema 5.1. *Seja $x : \Sigma^n \looparrowright \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão isométrica mínima de uma variedade orientada Σ^n . Então temos*

(i) $\Delta \ell_v = -n\ell_v,$

(ii) $\Delta f_v = 2S_2 f_v,$

(iii) *Se Σ^n é fechada, então $\int_{\Sigma} \ell_v \, d\Sigma = 0$ e $\int_{\Sigma} S_2 f_v \, d\Sigma = 0.$*

Demonstração. Seja $\{X_1, \dots, X_n\}$ um referencial ortonormal em torno de $p \in \Sigma$ que diagonaliza A em p . Como, por hipótese, $H \equiv 0$ então pela Proposição 5.1 temos

$$\Delta \ell_v = -n\ell_v + nHf_v \implies \Delta \ell_v = -n\ell_v$$

e

$$\Delta f_v = -n\langle v^T, \nabla H \rangle + nH\ell_v - |A|^2 f_v \implies \Delta f_v = -|A|^2 f_v.$$

Por outro lado, como

$$|A|^2 + 2S_2 = S_1^2,$$

onde S_1 e S_2 são, respectivamente, a primeira e a segunda funções simétricas de curvaturas e além disso $S_1 = nH = 0$ então $2S_2 = -|A|^2$ e portanto

$$\Delta f_v = 2S_2 f_v.$$

Finalmente, usando o Teorema da Divergência e o fato que Σ^n é fechada temos

$$0 = \int_{\Sigma} \Delta \ell_v \, d\Sigma = -n \int_{\Sigma} \ell_v \, d\Sigma \implies \int_{\Sigma} \ell_v \, d\Sigma = 0$$

e

$$0 = \int_{\Sigma} \Delta f_v \, d\Sigma = \int_{\Sigma} 2S_2 f_v \, d\Sigma \implies \int_{\Sigma} 2S_2 f_v \, d\Sigma = 0.$$

□

Procedendo na análise das funções suportes apresentaremos uma série de lemas.

Lema 5.2. *Seja $x : \Sigma^n \looparrowright \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade orientada e fechada Σ^n . Então temos:*

- (i) *A menos das esferas totalmente geodésicas, $\dim V = n + 2$,*
- (ii) *Dado um vetor não nulo u em \mathbb{R}^{n+2} . Então, ou $\{\ell_u, 1\}$ é um conjunto linearmente independente ou $x(\Sigma^n)$ é uma esfera geodésica,*
- (iii) *A menos das esferas geodésicas, $\dim \bar{V} = n + 3$, onde $\bar{V} = V \cup \{1\}$.*

Demonstração. Sejam $\{e_1, \dots, e_{n+2}\}$ uma base para o espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+2} e $V = \{\ell_v : v \in \mathbb{R}^{n+2}\}$ um subespaço linear do espaço vetorial $C^\infty(\Sigma^n)$. Consideremos a seguinte afirmação:

Afirmação: $\dim V \leq n + 2$.

Com efeito, suponha que existem $\ell_{e_1}, \dots, \ell_{e_m}$ linearmente independentes, onde $m > n + 2$. Daí, se

$$a_1 e_1 + \cdots + a_m e_m = 0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m,$$

então

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x, a_1 e_1 + \cdots + a_m e_m \rangle \\ &= a_1 \langle x, e_1 \rangle + \cdots + a_m \langle x, e_m \rangle \\ &= a_1 \ell_{e_1} + \cdots + a_m \ell_{e_m}, \end{aligned}$$

donde $a_i = 0$ para $i = 1, \dots, m$ pois $\{\ell_{e_1}, \dots, \ell_{e_m}\}$ é linearmente independente. Logo, obtemos que $\{e_1, \dots, e_m\}$ é linearmente independente, que é uma contradição. Portanto, $\dim V \leq n + 2$.

Agora, provaremos o item (i).

Pela afirmação anterior sabemos que $\dim V \leq n + 2$. Suponha que $\dim V \leq n + 1$. Então o conjunto $\{\ell_{e_1}, \dots, \ell_{e_{n+2}}\}$ é linearmente dependente. Logo, existem constantes reais não todas nulas a_1, \dots, a_{n+2} satisfazendo

$$\sum_{i=1}^{n+2} a_i \ell_{e_i} = 0.$$

Assim, considerando $u = \sum_{i=1}^{n+2} a_i e_i$ temos que

$$\ell_u = \langle x, u \rangle = \langle x, \sum_{i=1}^{n+2} a_i e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n+2} a_i \langle x, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n+2} a_i \ell_{e_i} = 0.$$

Logo, $\langle x, u \rangle = 0$. Isto significa que $x(\Sigma^n) \subset \mathbb{S}^n$. Mas, como Σ^n é fechada então $x(\Sigma^n)$ é um conjunto fechado e além disso pelo fato do bordo $\partial \mathbb{S}^n = \emptyset$ temos que $x(\Sigma^n)$ é aberto e sendo \mathbb{S}^n conexa concluímos que $x(\Sigma^n) = \mathbb{S}^n$, ou seja, $x(\Sigma^n)$ é totalmente geodésica. Portanto, se $x(\Sigma^n)$ não é totalmente geodésica então $\{\ell_{e_1}, \dots, \ell_{e_{n+2}}\}$ deve ser um conjunto linearmente independente. Além disso, seja $f \in V$, então existe $v \in \mathbb{R}^{n+2}$ tal que $f = \langle x, v \rangle$. Como $v = \sum_{i=1}^{n+2} a_i e_i$ então temos que

$$f = \langle x, v \rangle = \langle x, \sum_{i=1}^{n+2} a_i e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n+2} a_i \langle x, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n+2} a_i \ell_{e_i}.$$

Portanto, de fato, $\{\ell_{e_1}, \dots, \ell_{e_{n+2}}\}$ é uma base de V . Isto mostra que $\dim V = n + 2$. Agora, provaremos o item (ii).

Seja $u \in \mathbb{R}^{n+2}$ não nulo. Suponhamos que $\{\ell_u, 1\}$ é um conjunto linearmente dependente. Então existe um número real não nulo a tal que

$$\ell_u = \langle x, u \rangle = a \cdot 1 = a,$$

isto é, $\langle x, u \rangle = a$. Assim, se $\Gamma_u = \{p \in \mathbb{R}^{n+2} : \langle p, u \rangle = a\}$ é um hiperplano então $x(\Sigma^n) \subset \mathbb{S}^{n+1} \cap \Gamma_u$, isto é, $x(\Sigma^n) = \mathbb{S}^n(r)$ é uma esfera geodésica com centro $c = a \frac{u}{|u|^2}$ e raio $r = \frac{\sqrt{|u|^2 - a^2}}{|u|}$. Portanto, $x(\Sigma^n)$ é uma esfera geodésica. Finalmente, provaremos o item (iii).

Raciocinando como no item (1), suponhamos que $\{\ell_{e_1}, \dots, \ell_{e_{n+2}}, 1\}$ seja um conjunto linearmente dependente. Então, existem constantes reais não todas nulas a_1, \dots, a_{n+2} satisfazendo

$$\sum_{i=1}^{n+2} a_i \ell_{e_i} = 1.$$

Assim, considerando $u = \sum_{i=1}^{n+2} a_i e_i$ temos que

$$\ell_u = \langle x, u \rangle = \langle x, \sum_{i=1}^{n+2} a_i e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n+2} a_i \langle x, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n+2} a_i \ell_{e_i} = 1.$$

Agora, usando o item (2) temos uma contradição, pois $\{\ell_u, 1\}$ é linearmente independente já que $x(\Sigma^n)$ não é esferas geodésicas. Além disso, se $f \in \bar{V}$ então $f = \ell_u + a \cdot 1$ onde existem $u \in \mathbb{R}^{n+2}$ e $a \in \mathbb{R}$. Logo, $\{\ell_{e_1}, \dots, \ell_{e_{n+2}}, 1\}$ é uma base de \bar{V} . Portanto, $\dim \bar{V} = n + 3$. \square

Por outro lado Nomizu e Smyth [11] provaram o seguinte.

Teorema [Nomizu e Smyth]. *Seja M uma variedade Riemanniana orientável e completa de dimensão $n \geq 2$ imersa isometricamente em \mathbb{S}^{n+1} e ϕ sua aplicação de Gauss.*

- i) *Se $\phi(M)$ está contida em uma hiperesfera grande de \mathbb{S}^{n+1} , então M está mergulhada como uma hiperesfera grande e assim $\phi(M)$ é um único ponto.*
- ii) *Se $\phi(M)$ está contida em uma hiperesfera pequena de \mathbb{S}^{n+1} , porém não é um único ponto, então M está mergulhada como uma hiperesfera pequena e $\phi(M)$ é uma hiperesfera pequena.*

Observação 5.1. Uma hipersfera Σ^n em \mathbb{S}^{n+1} significa a interseção de \mathbb{S}^{n+1} com um hiperplano em \mathbb{R}^{n+2} . Σ^n é chamada uma hipersfera grande (equatorial) ou pequena (não equatorial), respectivamente, de acordo com os hiperplanos, passando pela origem de \mathbb{R}^{n+2} ou não.

Agora observemos que este teorema permite uma prova direta do seguinte lema.

Lema 5.3. Seja $x : \Sigma^n \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade orientada e fechada Σ^n , então temos

- (i) A menos das esferas totalmente geodésica, $\dim W = n + 2$,
- (ii) A menos das esferas geodésicas, $\dim \bar{W} = n + 3$, onde $\bar{W} = W \cup \{1\}$.

Demonstração. Sejam $\{e_1, \dots, e_{n+2}\}$ uma base para o espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+2} e $W = \{f_v ; v \in \mathbb{R}^{n+2}\}$ um subespaço linear do espaço vetorial $C^\infty(\Sigma)$. Consideremos a seguinte afirmação:

Afirmação: $\dim W \leq n + 2$.

De fato, suponha que existem f_{e_1}, \dots, f_{e_m} linearmente independentes, onde $m > n + 2$. Daí, se

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_m e_m = 0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

então

$$0 = \langle N, a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_m e_m \rangle = a_1 f_{e_1} + a_2 f_{e_2} + \dots + a_m f_{e_m},$$

donde $a_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$. Logo, $\{e_1, \dots, e_{n+2}\}$ é linearmente independente, o que é uma contradição. Portanto $\dim W \leq n + 2$.

Agora, provaremos o item (i).

Pela afirmação anterior sabemos que $\dim V \leq n + 2$. Suponhamos que $\{f_{e_1}, \dots, f_{e_{n+2}}\}$ é um conjunto linearmente dependente. Então, existem constantes reais não todas nulas a_1, a_2, \dots, a_{n+2} satisfazendo

$$\sum_{i=1}^{n+2} a_i f_{e_i} = 0.$$

Assim, considerando $u = \sum_{i=1}^{n+2} a_i e_i$ temos que

$$f_u = \langle N, u \rangle = \langle N, \sum_{i=1}^{n+2} a_i e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n+2} a_i \langle N, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n+2} a_i f_{e_i} = 0.$$

Logo, $\langle N, u \rangle = 0$, isto é, $N(\Sigma^n) \subset \mathbb{S}^n$. Como compacidade implica completude e $N(\Sigma^n)$ está contida em uma hipersfera grande de \mathbb{S}^{n+1} então pelo Teorema de Nomizu - Smyth Σ^n esta mergulhada como uma hipersfera grande, isto é, $x(\Sigma^n) \subset \mathbb{S}^n$ e além disso $N(\Sigma^n)$ é um único ponto. Logo, $x(\Sigma^n) = \mathbb{S}^n$ é uma esfera totalmente geodésica, que é uma contradição. Portanto, $\{f_{e_1}, \dots, f_{e_{n+2}}\}$ é um conjunto linearmente independente. Agora, dada $f \in W$ existe $v \in \mathbb{R}^{n+2}$ tal que $f = \langle N, v \rangle$. Como $v = \sum_{i=1}^{n+2} a_i e_i$ então temos que

$$f = \langle N, v \rangle = \langle N, \sum_{i=1}^{n+2} a_i e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n+2} a_i \langle N, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n+2} a_i f_{e_i}.$$

Portanto $\{f_{e_1}, \dots, f_{e_{n+2}}\}$ é uma base de W e $\dim W = n + 2$.

Agora, provaremos o item (ii).

Suponhamos que $\{f_{e_1}, \dots, f_{e_{n+2}}, 1\}$ é um conjunto linearmente dependente. Então, existem constantes reais não todas nulas a_1, a_2, \dots, a_{n+2} satisfazendo

$$\sum_{i=1}^{n+2} a_i f_{e_i} = 1.$$

Assim, considerando $u = \sum_{i=1}^{n+2} a_i e_i$ temos que

$$f_u = \langle N, u \rangle = \langle N, \sum_{i=1}^{n+2} a_i e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n+2} a_i \langle N, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n+2} a_i f_{e_i} = 1.$$

Logo, $\langle N, u \rangle = 1$. Assim, considerando o hiperplano $\Gamma_u = \{p \in \mathbb{R}^{n+2} : \langle p, u \rangle = 1\}$ concluímos que $N(\Sigma^n) \subset \mathbb{S}^{n+1} \cap \Gamma_u$, isto é, $N(\Sigma^n) \subset \mathbb{S}^n(r)$. Como $N(\Sigma^n)$ está contida em uma hipersfera pequena de \mathbb{S}^{n+1} , porém não é um único ponto, então pelo Teorema de Nomizu - Smyth Σ^n está mergulhada como uma hipersfera pequena, isto é, $x(\Sigma^n) \subset \mathbb{S}^n(r)$ e $N(\Sigma^n)$ é uma hipersfera pequena, isto é, $N(\Sigma^n) = \mathbb{S}^n(r)$ é uma esfera geodésica com centro $c = a \frac{u}{|u|^2}$ e raio $r = \frac{\sqrt{|u|^2 - a^2}}{|u|}$. Logo, $x(\Sigma^n) = \mathbb{S}^n(r)$

é uma esfera geodésica, que é uma contradição. Daqui temos que $\{f_{e_1}, \dots, f_{e_{n+2}}, 1\}$ é um conjunto linearmente independente. Portanto temos que $\{f_{e_1}, \dots, f_{e_{n+2}}, 1\}$ é uma base para \overline{W} a menos de esferas geodésicas, que conclui a prova do lema. \square

Além de esferas totalmente geodésicas, os toros de Clifford são os exemplos mais simples de hipersuperfícies mínimas da esfera. Em particular se $x_1 : \mathbb{S}^k \left(\sqrt{\frac{k}{n}} \right) \hookrightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ e $x_2 : \mathbb{S}^{n-k} \left(\sqrt{\frac{n-k}{n}} \right) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n-k+1}$ são as imersões usuais, podemos considerar

$$x = (x_1, x_2) \quad e \quad N = \left(-\sqrt{\frac{n-k}{k}}x_1, \sqrt{\frac{k}{n-k}}x_2 \right)$$

para descrever um toro de Clifford e seu normal, respectivamente. De fato, seja $\rho = \sqrt{\frac{k}{n}}$. Denotando os pontos de $\mathbb{R}^{n+2} = \mathbb{R}^{k+1} \oplus \mathbb{R}^{n-k+1}$ por (x_1, x_2) , onde $x_1 \in \mathbb{R}^{k+1}$ e $x_2 \in \mathbb{R}^{n-k+1}$. Dado

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{S}^k(\rho) \times \mathbb{S}^{n-k} \left(\sqrt{1-\rho^2} \right) \quad e \quad v \in T_{(x_1, x_2)} \left(\mathbb{S}^k(\rho) \times \mathbb{S}^{n-k} \left(\sqrt{1-\rho^2} \right) \right),$$

considere uma curva diferenciável $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{S}^k(\rho) \times \mathbb{S}^{n-k} \left(\sqrt{1-\rho^2} \right)$ dada por $\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ satisfazendo $\gamma(0) = (\alpha(0), \beta(0)) = (x_1, x_2)$, e $\gamma'(0) = (\alpha'(0), \beta'(0)) = v$. Então, se $N = (n_1, n_2) \in \mathbb{R}^{n+2}$ é tal que $N \in T_{(x_1, x_2)} \mathbb{S}^{n+1}$ e é normal a $T_{(x_1, x_2)} \left(\mathbb{S}^k(\rho) \times \mathbb{S}^{n-k} \left(\sqrt{1-\rho^2} \right) \right)$, temos

$$0 = \langle N, \gamma(0) \rangle = \langle n_1, \alpha(0) \rangle + \langle n_2, \beta(0) \rangle, \quad (5.10)$$

e

$$0 = \langle N, \gamma'(0) \rangle = \langle n_1, \alpha'(0) \rangle + \langle n_2, \beta'(0) \rangle. \quad (5.11)$$

Como $\alpha(t)$ é uma curva diferenciável em $\mathbb{S}^k(\rho)$ e $\beta(t)$ é uma curva diferenciável em $\mathbb{S}^{n-k} \left(\sqrt{1-\rho^2} \right)$ então temos que $\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle = \rho^2$ e $\langle \beta(t), \beta(t) \rangle = 1 - \rho^2$. Agora, derivando em relação a t obtemos

$$\langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle = 0 \quad e \quad \langle \beta(t), \beta'(t) \rangle = 0.$$

Assim, uma solução que satisfaz as equações (5.10) e (5.11) é

$$N(x_1, x_2) = \left(\left(1 - \frac{1}{\rho} \right) x_1, x_2 \right).$$

Logo, substituindo N por $\frac{N}{|N|}$ obtemos

$$N(x_1, x_2) = \left(-\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}x_1, \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}x_2 \right).$$

Observemos que N é um campo normal a $\mathbb{S}^k(\rho) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-\rho^2})$, pois dado $(x_1, x_2) \in \mathbb{S}^k(\rho) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-\rho^2})$ e $v \in T_{(x_1, x_2)}(\mathbb{S}^k(\rho) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-\rho^2}))$ temos que

$$\begin{aligned} \langle N(x_1, x_2), v \rangle &= \left\langle \left(-\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}x_1, \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}x_2 \right), (\alpha'(0), \beta'(0)) \right\rangle \\ &= -\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} \langle \alpha(0), \alpha'(0) \rangle + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \langle \beta(0), \beta'(0) \rangle \\ &= -\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} 0 + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Além disso, temos também que N é um campo tangente a $T_{(x_1, x_2)}\mathbb{S}^{n+1}$, pois

$$\begin{aligned} \langle N(x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle &= \left\langle \left(-\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}x_1, \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}x_2 \right), (x_1, x_2) \right\rangle \\ &= \left\langle -\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}x_1, x_1 \right\rangle + \left\langle \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}x_2, x_2 \right\rangle \\ &= -\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} \langle x_1, x_1 \rangle + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \langle x_2, x_2 \rangle \\ &= -\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} \rho^2 + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} (1-\rho^2) \\ &= -\sqrt{1-\rho^2} \rho + \sqrt{1-\rho^2} \rho \\ &= 0. \end{aligned}$$

Note que, as curvaturas principais c_1, \dots, c_n de $\mathbb{S}^k(\rho) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-\rho^2})$ são dadas por

$$c_1 = \dots = c_k = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}, \quad c_{k+1} = \dots = c_n = -\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Com efeito, seja $\{X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_n\}$ um referencial ortonormal adaptado, isto é, X_1, \dots, X_k são tangentes a $\mathbb{S}^k(\rho)$ e X_{k+1}, \dots, X_n são tangentes a $\mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-\rho^2})$.

Então, denotando as conexões de $\mathbb{S}^k(\rho)$ e $\mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-\rho^2})$ por ∇^1 e ∇^2 , respectivamente, temos que

$$\begin{aligned} -\bar{\nabla}_{X_i}N &= \nabla_{X_i}^1N - \nabla_{X_i}^2N \\ &= \nabla_{X_i}^1N \\ &= \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}X_i, \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, k$, e

$$\begin{aligned} -\bar{\nabla}_{X_i}N &= \nabla_{E_i}^kN - \nabla_{X_i}^2N \\ &= \nabla_{X_i}^2N \\ &= -\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}X_i, \end{aligned}$$

para $i = k+1, \dots, n$.

Portanto, considerando $\mathbb{S}^k(\rho) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-\rho^2}) \subset \mathbb{R}^{n+2} = \mathbb{R}^{k+1} \oplus \mathbb{R}^{n-k+1}$ vemos que $f_{e_i} = \lambda \ell_{e_i}$ para $i = 1, \dots, n+2$, onde e_i e λ será escolhido apropriadamente.

Por outro lado, em um resultado recente devido a Alias-Brasil-Perdomo [2] eles provaram que se uma hipersuperfície $x : \Sigma^n \looparrowright \mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ tem curvatura média constante com as funções suportes satisfazendo $\ell_v = \lambda f_v$ para algum vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^{n+2}$ e algum $\lambda \in \mathbb{R}$ então $x(\Sigma^n)$ é ou uma esfera totalmente umbílica ou um toro de Clifford. Observemos que podemos provar uma simples modificação deste resultado para hipersuperfície mínima. Mais exatamente temos o seguinte lema.

Lema 5.4. *Seja $x : \Sigma^n \looparrowright \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão isométrica mínima não-totalmente geodésica de uma variedade orientada e fechada Σ^n . Se $\ell_u = \lambda f_v$ para alguns vetores não-nulos $u, v \in \mathbb{R}^{n+2}$ e algum $\lambda \in \mathbb{R}$, então $x(\Sigma^n)$ é um toro de Clifford.*

Demonstração. Suponhamos que existam vetores não-nulos $u, v \in \mathbb{R}^{n+2}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $\ell_u = \lambda f_v$. Se $\ell_u \equiv 0$, então $\langle x, u \rangle \equiv 0$ donde $x(\Sigma^n) = \mathbb{S}^n$ seria totalmente geodésica, o que contaria nossa hipótese. Daí, podemos então assumir que $\ell_u \neq 0$. Levando em consideração que $\ell_u = \lambda f_v$ temos $\lambda \neq 0$ e pelo Lema 5.1 temos que

$$-n\ell_u = \Delta\ell_u = \lambda\Delta f_v = 2\lambda S_2 f_v = 2S_2\ell_u.$$

Daqui, concluímos que $h\ell_u = 0$, onde $h = 2S_2 + n$. Suponhamos que exista $p \in \Sigma^n$ tal que $h(p) \neq 0$. Por continuidade existe uma vizinhança \mathcal{U} de p tal que $h(q) \neq 0$ para todo $q \in \mathcal{U}$. Daí, $\ell_u(q) = 0$ em \mathcal{U} , isto é, $\langle x, u \rangle(q) \equiv 0$ para todo $q \in \mathcal{U}$, isto significa que

$$x(\Sigma^n \cap \mathcal{U}) \subset \mathbb{S}^n.$$

Pelo princípio da continuidade analítica deduzimos que $x(\Sigma^n) = \mathbb{S}^n$ é totalmente geodésica, o que contraria nossa hipótese. Com isto fica demonstrado que $h \equiv 0$, ou seja, $2S_2 + n = 0$. Como

$$|A|^2 + 2S_2 = S_1^2$$

e a imersão é mínima segue que

$$|A|^2 + 2S_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad |A|^2 = -2S_2$$

donde

$$|A|^2 = n.$$

Portanto, podemos usar o seguinte resultado devido a Chern-do Carmo-Kobayashi [8] ou Lawson [9] para concluir que $x(\Sigma^n)$ é um toro de Clifford. \square

Observação 5.2. *O resultado devido a Chern-do Carmo-Kobayashi [8] ou Lawson [9] usado para provar o Lema 5.4 foi o seguinte.*

Teorema [Chern, do Carmo, Kobayashi ou Lawson]. *Seja Σ^n uma hipersuperfície mínima orientável, compacta imersa na esfera Euclidiana \mathbb{S}^{n+1} , e assumamos que $|A| = \sqrt{n}$ em Σ^n . Então Σ^n é um toro mínimo de Clifford.*

Lema 5.5. *Seja $x : \Sigma^n \looparrowright \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão isométrica mínima não-totalmente geodésica de uma variedade orientada e fechada Σ^n . Então*

- (i) *ou $V \cup W$ é um conjunto linearmente independente,*
- (ii) *ou $x(\Sigma^n)$ é um toro de Clifford.*

Demonstração. Sejam $\{e_1, \dots, e_{n+2}\}$ uma base para o espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+2} e façamos $V \cup W = \{\ell_{e_1}, \dots, \ell_{e_{n+2}}, f_{e_1}, \dots, f_{e_{n+2}}\}$ um subespaço linear do espaço vetorial $C^\infty(\Sigma^n)$. Suponha que $\{\ell_{e_1}, \dots, \ell_{e_{n+2}}, f_{e_1}, \dots, f_{e_{n+2}}\}$, seja um conjunto linearmente dependente. Então existem constantes reais não todas nulas $a_1, \dots, a_{n+2}, b_1, \dots, b_{n+2}$ tais que

$$\sum_{i=1}^{n+2} a_i \ell_{e_i} = \sum_{i=1}^{n+2} b_i f_{e_i}.$$

Portanto, definindo $u = \sum_{i=1}^{n+2} a_i e_i$ e $v = \sum_{i=1}^{n+2} b_i e_i$ temos $\ell_u = 1 \cdot f_v$. Logo usando o Lema 5.4 concluímos que $x(\Sigma^n)$ é um toro de Clifford. Daí, ou $\{\ell_{e_1}, \dots, \ell_{e_{n+2}}, f_{e_1}, \dots, f_{e_{n+2}}\}$ é um conjunto linearmente independente ou $x(\Sigma^n)$ é um toro de Clifford, como desejávamos. \square

Lema 5.6. *Seja $x : \Sigma^n \looparrowright \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão isométrica mínima não-totalmente geodésica de uma variedade orientada e fechada Σ^n . Então, para quaisquer vetores não-nulos $u, v \in \mathbb{R}^{n+2}$,*

- (i) *ou $\{\ell_u, f_v, 1\}$ é um conjunto linearmente independente,*
- (ii) *ou $x(\Sigma^n)$ é um toro de Clifford.*

Demonstração. Podemos supor que, para $u, v \in \mathbb{R}^{n+2}$ não nulos, temos $\ell_u \neq 0$, e $f_v \neq 0$, pois a imersão é não-totalmente geodésica. Como antes, começaremos supondo que $\{\ell_u, f_v, 1\}$ é um conjunto linearmente dependente. Então existem constantes reais não todas nulas a, b tais que

$$\ell_u = a f_v + b. \tag{5.12}$$

Se $b = 0$ na equação (5.12) temos $\ell_u = a f_v$ com $a \neq 0$. Logo, pelo lema 5.4, obtemos que $x(\Sigma^n)$ é um toro de Clifford. Suponha agora que $b \neq 0$. Sabemos, pelo lema 5.1 que

$$\Delta \ell_v = -n \ell_v$$

e

$$\Delta f_v = 2S_2 f_v.$$

Como, pela equação (5.12) temos

$$\Delta \ell_u = a \Delta f_v$$

então

$$-n \ell_u = a 2S_2 f_v.$$

Daí, temos

$$-n(af_v + b) = 2aS_2 f_v.$$

Logo,

$$(2aS_2 + na)f_v = -nb. \quad (5.13)$$

Desde que $b \neq 0$, temos que o lado esquerdo da equação (5.13) nunca se anula. Então

$$f_v = -\frac{nb}{a(2S_2 + n)}. \quad (5.14)$$

Agora, notemos que o lado direito da equação (5.14) tem um sinal bem definido, pois se existissem $q_1, q_2 \in \Sigma^n$ tais que

$$2aS_2(q_1) + an < 0 \quad e \quad 2aS_2(q_2) + an > 0$$

deveria existir $q_0 \in \Sigma^n$ tal que $2aS_2(q_0) + an = 0$, pois Σ^n é conexa. Daqui, obtemos um absurdo, pois $a(2S_2 + n) \neq 0$. Então ou $f_v > 0$ ou $f_v < 0$. Mas, isto nos diz que

$$N(\Sigma^n) \subset (\mathbb{S}^{n+1})^\circ,$$

onde $(\mathbb{S}^{n+1})^\circ$ denota um hemisferio aberto da esfera unitária Euclidiana \mathbb{S}^{n+1} . Então, podemos aplicar o seguinte resultado devido a Simons [13] para concluir que $x(\Sigma^n)$ é totalmente geodésica, que nos dar uma contradição a nossa hipótese. \square

Observação 5.3. *O resultado devido a Simons [13] usado para provar o Lema 5.6 foi o seguinte.*

Teorema 5.2.1 [Simons]. *Seja M uma variedade mínima fechada de co-dimensão 1. Então ou a imagem de Gauss $N(M)$ é um único ponto, neste caso $M = \mathbb{S}^n$, ou $N(M)$ não está em um hemisferio aberto de \mathbb{S}^{n+1} .*

Como consequência do Lema 5.6 temos o seguinte.

Lema 5.7. *Seja $x : \Sigma^n \looparrowright \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão isométrica mínima não-totalmente geodésica de uma variedade orientada e fechada Σ^n . Então*

(i) *ou $V \cup W \cup \{1\}$ é um conjunto linearmente independente,*

(ii) *ou $x(\Sigma^n)$ é um toro de Clifford.*

Demonstração. Sejam $\{e_1, \dots, e_{n+2}\}$ uma base para o espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+2} e $V \cup W \cup \{1\} = \{\ell_{e_1}, \dots, \ell_{e_{n+2}}, f_{e_1}, \dots, f_{e_{n+2}}, 1\}$ um subespaço linear do espaço vetorial $C^\infty(\Sigma^n)$. Suponha que $\{\ell_{e_1}, \dots, \ell_{e_{n+2}}, f_{e_1}, \dots, f_{e_{n+2}}, 1\}$ é um conjunto linearmente dependente. Logo existem constantes reais não todas nulas $a_1, \dots, a_{n+2}, b_1, \dots, b_{n+2}, c$ tais que

$$\sum_{i=1}^{n+2} a_i \ell_{e_i} = \sum_{i=1}^{n+2} b_i f_{e_i} + c.$$

Definindo $u = \sum_{i=1}^{n+2} a_i e_i$ e $v = \sum_{i=1}^{n+2} b_i e_i$, temos que

$$\ell_u = f_v + c.$$

Portanto, aplicando o Lema 5.6, concluímos a prova do lema.

□

Capítulo 6

Teoremas Principais

Neste capítulo, será concluído o objetivo principal desta dissertação que é demonstrar o Teorema 6.1 e o Teorema 6.2, obtidos por A. Barros e P. Sousa em [5].

Teorema 6.1. *Seja $x : \Sigma^n \looparrowright \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão isométrica mínima não-totalmente geodésica de uma variedade orientada e fechada Σ^n , com norma da segunda forma fundamental limitada por baixo por \sqrt{n} . Então, $Ind_\Sigma \geq n+3$ com igualdade ocorrendo apenas em toros de Clifford $\mathbb{S}^k \left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-k} \left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right)$.*

Demonstração. Seja A a segunda forma fundamental da imersão $x(\Sigma^n)$. Como, por hipótese, a imersão $x(\Sigma^n)$ é não-totalmente geodésica então A não pode se anular globalmente. Logo, existe $p \in \Sigma^n$ tal que A não se nula em p . Seja $\{X_1, \dots, X_n\}$ uma base ortonormal de $T_p \Sigma^n$ que diagonaliza A em p . Agora, sejam k_1, \dots, k_n as curvaturas principais de A e S_1 e S_2 a primeira e a segunda funções simétricas de curvaturas, respectivamente. Desde que A não pode se anular globalmente então S_2 também não pode se anular globalmente e além disso, como A não se anula em p então S_2 não se anula em p . Por outro lado, como a imersão $x(\Sigma^n)$ é mínima, isto é, $H(p) = 0$ para todo $p \in \Sigma^n$ então temos

$$0 = nH = \text{tr}A = k_1 + \dots + k_n = S_1$$

Daí, pela equação (4.1) obtemos

$$2S_2 = -|A|^2 \leq 0 \Rightarrow S_2 \leq 0$$

e pelo fato de A não se anular em $p \in \Sigma^n$ temos $S_2 < 0$. Sabemos que o índice da hipersuperfície Σ^n é dado por

$$Ind_{\Sigma} = \max \{ \dim V ; V \subset C^{\infty}(\Sigma^n) , Q(f) < 0 , \forall f \in V \} ,$$

onde

$$Q(f) = - \int_{\Sigma} f [\Delta f + (|A|^2 + n) f] d\Sigma .$$

Então, vamos considerar os seguintes casos:

1º caso. $f \in C^{\infty}(\Sigma^n)$, $f \equiv 1$.

Neste caso temos

$$\begin{aligned} Q(1) &= - \int_{\Sigma} 1 [\Delta 1 + (|A|^2 + n) 1] d\Sigma \\ &= - \int_{\Sigma} [|A|^2 + n] d\Sigma \\ &= - \int_{\Sigma} [n - 2S_2] d\Sigma < 0, \end{aligned} \tag{6.1}$$

pois, como $S_2 < 0$ então temos $n - 2S_2 > 0$.

2º caso. $f \in V = \{ \ell_v ; v \in \mathbb{R}^{n+2} \} \subset C^{\infty}(\Sigma^n)$, $f = \ell_v = \langle x, v \rangle$.

Neste caso temos

$$Q(\ell_v) = - \int_{\Sigma} \ell_v [\Delta \ell_v + (|A|^2 + n) \ell_v] d\Sigma$$

Sendo a imersão $x(\Sigma^n)$ mínima, pelo Lema 5.1, temos $\Delta \ell_v = -n\ell_v$. Então,

$$\begin{aligned} Q(\ell_v) &= - \int_{\Sigma} \ell_v [\Delta \ell_v + (|A|^2 + n) \ell_v] d\Sigma \\ &= - \int_{\Sigma} \ell_v [-n\ell_v + (n - 2S_2) \ell_v] d\Sigma \\ &= - \int_{\Sigma} -2S_2 \ell_v^2 d\Sigma \\ &= 2 \int_{\Sigma} S_2 \ell_v^2 d\Sigma < 0, \end{aligned} \tag{6.2}$$

pois como a imersão $x(\Sigma^n)$ é não-totalmente geodésica temos $\ell_v \neq 0$.

3º caso. $f \in W = \{ f_v ; v \in \mathbb{R}^{n+2} \} \subset C^\infty(\Sigma^n)$, $f = f_v = \langle N, v \rangle$.

Neste caso temos

$$Q(f_v) = - \int_{\Sigma} f_v [\Delta f_v + (|A|^2 + n)f_v] d\Sigma.$$

Como a imersão $x(\Sigma^n)$ é mínima temos, pelo Lema 5.1, que $\Delta f_v = 2S_2 f_v$ então

$$\begin{aligned} Q(f_v) &= - \int_{\Sigma} f_v [\Delta f_v + (|A|^2 + n)f_v] d\Sigma \\ &= - \int_{\Sigma} f_v [2S_2 f_v + (n - 2S_2)f_v] d\Sigma \\ &= -n \int_{\Sigma} f_v^2 d\Sigma < 0, \end{aligned} \tag{6.3}$$

pois como a imersão $x(\Sigma^n)$ é não-totalmente geodésica temos $f_v \neq 0$.

Agora, consideremos o seguinte subespaço linear $Z \subset C^\infty(\Sigma^n)$ dado por $Z = V \cup W \cup \{1\}$, isto é,

$$Z = \left\{ f \in C^\infty(\Sigma^n) \ ; \ f = a.1 + \sum_{i=1}^{n+2} b_i \ell_{e_i} + \sum_{i=1}^{n+2} c_i f_{e_i} = a.1 + \ell_u + f_v \right\}.$$

Portanto, para provar o teorema, mostraremos que $Q(f) < 0$, $\forall f \in Z$. Seja, $f \in Z$ tal que $f = a.1 + \ell_u + f_v$. Como $\Delta \ell_v = -n\ell_v$, $\Delta f_v = 2S_2 f_v$ e $2S_2 = -|A|^2$ então temos

$$\Delta f = \Delta \ell_u + \Delta f_v = -n\ell_u + 2S_2 f_v = -n\ell_u - |A|^2 f_v.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta f + |A|^2 f + n f &= -n\ell_u - |A|^2 f_v + |A|^2 (a + \ell_u + f_v) + n(a + \ell_u + f_v) \\ &= -n\ell_u - |A|^2 f_v + a|A|^2 + |A|^2 \ell_u + |A|^2 f_v + an + n\ell_u + n f_v \\ &= a(|A|^2 + n) + |A|^2 \ell_u + n f_v. \end{aligned}$$

Daqui,

$$\begin{aligned}
f [\Delta f + |A|^2 f + n f] &= (a + \ell_u + f_v) [a (|A|^2 + n) + |A|^2 \ell_u + n f_v] \\
&= a^2 (|A|^2 + n) + a |A|^2 \ell_u + a n f_v + \\
&+ a (|A|^2 + n) \ell_u + |A|^2 \ell_u^2 + n \ell_u f_v + \\
&+ a (|A|^2 + n) f_v + |A|^2 \ell_u f_v + n f_v^2 \\
&= a^2 |A|^2 + a^2 n + a |A|^2 \ell_u + a n f_v + \\
&+ a |A|^2 \ell_u + a n \ell_u + |A|^2 \ell_u^2 + n \ell_u f_v + \\
&+ a |A|^2 f_v + a n f_v + |A|^2 \ell_u f_v + n f_v^2 \\
&= |A|^2 [a^2 + 2a \ell_u + \ell_u^2] + n [a^2 + 2a f_v + f_v^2] + \\
&+ a n \ell_u + n \ell_u f_v + a |A|^2 f_v + |A|^2 \ell_u f_v \\
&= |A|^2 (\ell_u + a)^2 + n (f_v + a)^2 - a \Delta \ell_u - a \Delta f_v + (n + |A|^2) \ell_u f_v.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
Q(f) &= - \int_{\Sigma} f [\Delta f + (|A|^2 + n) f] d\Sigma. \\
&= - \int_{\Sigma} [|A|^2 (\ell_u + a)^2 + n (f_v + a)^2] d\Sigma + a \int_{\Sigma} \Delta f_v d\Sigma + \\
&+ a \int_{\Sigma} \Delta \ell_u d\Sigma - \int_{\Sigma} (n + \|A\|^2) \ell_u f_v d\Sigma.
\end{aligned}$$

Mas, como Σ^n é fechada temos

$$\int_{\Sigma} \Delta f_v d\Sigma = 0 \quad e \quad \int_{\Sigma} \Delta \ell_u d\Sigma = 0.$$

Agora, levando em consideração as identidades de Green e o fato que o bordo da imersão é vazio obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma} n \ell_u f_v d\Sigma &= - \int_{\Sigma} f_v \Delta \ell_u d\Sigma \\
&= - \int_{\Sigma} \ell_u \Delta f_v d\Sigma \\
&= \int_{\Sigma} -2S_2 \ell_u f_v d\Sigma \\
&= \int_{\Sigma} |A|^2 \ell_u f_v d\Sigma.
\end{aligned}$$

Portanto chegamos em

$$Q(f) = - \int_{\Sigma} [|A|^2 (\ell_u + a)^2 + n (f_v + a)^2] d\Sigma - 2n \int_{\Sigma} \ell_u f_v d\Sigma.$$

Note que podemos escrever

$$\begin{aligned}\ell_u f_v &= \ell_u f_v + a \ell_u + a f_v + 2a^2 - a \ell_u - a f_v - 2a^2 \\ &= (\ell_u + a)(f_v + a) - a(\ell_u + f_v + 2a) + a^2.\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}Q(f) &= - \int_{\Sigma} [|A|^2 (\ell_u + a)^2 + n (f_v + a)^2] d\Sigma - \\ &\quad - 2n \int_{\Sigma} [(\ell_u + a)(f_v + a) - a(\ell_u + f_v + 2a) + a^2] d\Sigma.\end{aligned}$$

Como, por hipótese, $|A|^2 \geq n$ então temos

$$\begin{aligned}Q(f) &\leq -n \int_{\Sigma} [(\ell_u + a)^2 + (f_v + a)^2] d\Sigma - \\ &\quad - 2n \int_{\Sigma} [(\ell_u + a)(f_v + a) - a(\ell_u + f_v + 2a) + a^2] d\Sigma \\ &= -n \int_{\Sigma} [(\ell_u + a)^2 + (f_v + a)^2 + 2(\ell_u + a)(f_v + a) + a^2] d\Sigma - \\ &\quad - n \int_{\Sigma} [(-2a)(\ell_u + f_v + 2a) + 2a^2] d\Sigma \\ &= -n \int_{\Sigma} [(\ell_u + f_v + 2a)^2 - 2a(\ell_u + f_v + 2a) + 2a^2] d\Sigma.\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$Q(f) \leq -n \int_{\Sigma} p(\ell_u + f_v + 2a) d\Sigma, \quad (6.4)$$

onde $p(t) = t^2 - 2at + 2a^2$, é um polinômio do segundo grau. Desde que,

$$\Delta_p = 4a^2 - 8a^2 = -4a^2 \leq 0, \quad (6.5)$$

onde Δ_p é o discriminante do polinômio $p(t) = t^2 - 2at + 2a^2$, temos que $p(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ e daí temos $p(\ell_u + f_v + 2a) \geq 0$. Portanto,

$$Q(f) \leq 0, \quad \forall f \in Z,$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, $|A|^2 = n$ e $p(\ell_u + f_v + 2a) = 0$, pois $p(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Mas, neste caso $\ell_u + f_v + 2a$ é a única raiz do polinômio $p(t) = t^2 - 2at + 2a^2$, pois $\Delta_p \leq 0$. Assim, para $p(\ell_u + f_v + 2a) = 0$ temos

$$0 = \Delta_p = -4a^2 \quad \Rightarrow \quad a = 0.$$

Por outro lado, como $p(t) = (t - a)^2 + a^2$ então $p(t) = 0$ se, e somente se, $t = 0$ e $a = 0$. Logo,

$$\ell_u + f_v + 2a = 0 \text{ e } a = 0 \quad \Rightarrow \quad \ell_u = -f_v.$$

Portanto, pelo Lema 5.4, concluímos que Σ^n é um toro de Clifford $\mathbb{S}^k \left(\sqrt{\frac{k}{n}} \right) \times \mathbb{S}^{n-k} \left(\sqrt{\frac{n-k}{n}} \right)$. Como neste caso $Z = V \cup \{1\}$ e a imersão $x(\Sigma^n)$ é não-totalmente geodésica então pelo Lema 5.2 temos que $\dim Z = n + 3$. Portanto, concluímos que

$$\text{Ind}_\Sigma \geq n + 3$$

com

$$\text{Ind}_\Sigma = n + 3$$

apenas em toros de Clifford. □

Teorema 6.2. *Seja $x : \Sigma^n \looparrowright \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão isométrica mínima não-totalmente geodésica de uma variedade orientada e fechada Σ^n , com norma da segunda forma fundamental limitada por baixo por \sqrt{n} . Então, a menos de toro de Clifford $\mathbb{S}^k \left(\sqrt{\frac{k}{n}} \right) \times \mathbb{S}^{n-k} \left(\sqrt{\frac{n-k}{n}} \right)$, $\text{Ind}_\Sigma \geq 2n + 5$.*

Demonstração. Sabemos, pelo Teorema 6.1, que

$$Q(f) \leq -n \int_\Sigma p(\ell_u + f_v + 2a) d\Sigma,$$

onde $p(t) = t^2 - 2at + 2a^2$, e além disso, pela equação (6.5), sabemos que $p(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$. Logo,

$$Q(f) \leq 0, \quad \forall f \in Z,$$

onde

$$Z = \left\{ f \in C^\infty(\Sigma^n) \ ; \ f = a.1 + \sum_{i=1}^{n+2} b_i \ell_{e_i} + \sum_{i=1}^{n+2} c_i f_{e_i} = a.1 + \ell_u + f_v \right\}.$$

Como, por hipótese, $x(\Sigma^n)$ não pode ser um toro de Clifford então temos $|A|^2 \geq n$ e $p(\ell_u + f_v + 2a) > 0$, pois se $|A|^2 = n$ e $p(\ell_u + f_v + 2a) = 0$ então $x(\Sigma^n)$ seria um toro de Clifford. Assim, devemos ter

$$Q(f) < 0, \quad \forall f \in Z.$$

Desde que $x(\Sigma^n)$ não é um toro de Clifford então, pelo Lema 5.6, Z é um conjunto linearmente independente e portanto,

$$\dim Z = \dim V + \dim W + \dim \{1\}.$$

Agora, pelo Lema 5.2 sabemos que $\dim V = n + 2$ e pelo Lema 5.3 sabemos que $\dim W = n + 2$. Portanto, pelas equações (6.1), (6.2) e (6.3) concluímos que

$$\text{Ind}_\Sigma \geq 2n + 5.$$

□

Referências Bibliográficas

- [1] ALÍAS, L. J. On the stability index of minimal and constant mean curvature hypersurfaces in spheres. *Revista de la Unión Matemática Argentina*, v. 47, p. 39-61, 2006.
- [2] ALÍAS, L. ; BRASIL, A. ; PERDOMO, O. A characterization of quadratic mean curvature hypersurface of spheres. *Journal of Geometric Analysis*, v. 18, p. 687-703, 2008.
- [3] BARBOSA, J. L. ; CARMO, M. do. Stability of hypersurfaces with constant mean curvature. *Math. Z.*, v. 185, p. 339-353, 1984.
- [4] BARBOSA, J. L.; CARMO, M. do ; ESCHEBURG, J. Stability of hypersurfaces with constant mean curvature in Riemannian manifolds. *Math. Z.*, v. 197, p. 123-138, 1988.
- [5] BARROS, A. ; SOUSA, P. Estimate for index of closed minimal hypersurfaces in spheres. *Kodai Mathematical Journal*, v. 32, n. 3, p. 442-449, 2009.
- [6] BRASIL, A. ; DELGADO, P. A. ; GUADALUPE, I. A characterization of the Clifford torus. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, v. 48, n. 2, p. 537-540, 1988.
- [7] CARMO, M.P. d0. *Geometria Riemanniana (3. ed.)*, Rio de Janeiro: IMPA, 2005. (Projeto Euclides)
- [8] CHERN, S. S. ; CARMO, M. do ; KOBAYASHI, S. Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constante length. In: *Functional analysis and related fields: Proceedings of a Conference in honor of Professor Marshall Stone*. New York: Springer-verlag, 1970. p. 59-75

- [9] LAWSON, B. Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces, *Ann. of Math.*, v. 89, n. 2, p. 187-197, 1969.
- [10] LAWSON, B. *Lectures on Minimal Submanifolds*. Berkeley, CA: Publish or Perish, e/1980.
- [11] NOMIZU, K. ; SMYTH, B. On the Gauss mapping for hypersurface of constant curvature in the sphere. *Comm. Math. Helv.*, v. 44, p. 484-490, 1969.
- [12] PERDOMO, O. Low index minimal hypersurfaces of spheres. *Asian J. Math.*, v. 5, p. 741-749, 2001.
- [13] SIMONS, J. Minimal varieties in Riemannian manifolds. *Ann. of Math.*, v. 88, p. 62-105, 1968.
- [14] URBANO, F. Minimal surfaces with low index in the three-dimensional sphere. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 108, p. 989-992, 1990.