UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Renato Oliveira Targino

A curvatura de Gauss-Kronecker de hipersuperfícies mínimas em formas espaciais 4-dimensionais

Fortaleza
2011

Renato Oliveira Targino

A curvatura de Gauss-Kronecker de hipersuperfícies mínimas em formas espaciais 4-dimensionais

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: geometria diferencial.

Orientador:
Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto.

Fortaleza
2011

Targino, Renato Oliveira
T192c A curvatura de Gauss-Kronecker de hipersuperfícies mínimas em formas espaciais 4-dimensionais / Renato Oliveira Targino.–Fortaleza, 2011.
54 f.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto.
Área de concentração: Geometria Diferencial
Dissertação (Mestrado)–Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Fortaleza, 2011.

1.Geometria Diferencial. I.Muniz Neto, Antonio Caminha (Orient.)

CDD 516.36

Dedico este trabalho a meus pais José Valter Miranda Targino e Francisca Ivaneide Oliveira Targino, a todos meus irmãos e a minha noiva Mayára Gomes dos Santos.

Agradecimentos

Ó Deus, eu te dou graças e te louvo, porque me deste sabedoria e força.

Não apenas aos que colaboraram para que a conclusão deste trabalho fosse possível, mas a todos aqueles que contribuíram para minha formação e direcionamento na vida acadêmica, deixo meus sinceros agradecimentos.

Gostaria de agradecer, em especial, ao professor Antonio Caminha Muniz Neto, meu orientador, pelo incentivo e por sua paciência durante este período de preparação da dissertação e aos professores José Robério Rogério e José Afonso de Oliveira por estarem sempre disponíveis para ajudar.

Agradeço ainda à secretária do Departamento, Andrea Costa Dantas, por todo tempo dela dedicado a resolver os problemas dos alunos; e sempre com atenção e eficiência.

Deixo minha eterna gratidão a minha mãe, Francisca Ivaneide Oliveira Targino, por ser tão boa. A minha irmã, Ruth Targino, pelo companheirismos, sou grato.

Agradecimentos são também devidos aos amigos Rodrigo, Loester, Alexandre e Tiarlos.

A minha noiva, Mayára Gomes, por todo incentivo e pelo refúgio nos momentos difíceis, minha mais sincera gratidão e amor.

Resumo

Neste trabalho estudamos hipersuperfícies mínimas completas e com curvatura de Gauss-Kronecker constante em uma forma espacial $\mathbb{Q}^4(c)$. Provamos que o ínfimo do valor absoluto da curvatura de Gauss-Kronecker de uma hipersuperfície mínima completa em $\mathbb{Q}^4(c)$, $c \leq 0$, na qual a curvatura de Ricci é limitado inferiormente, é igual a zero. Além disso, estudamos hipersuperfícies mínimas conexas M^3 em uma forma espacial $\mathbb{Q}^4(c)$ com curvatura de Gauss-Kronecker K constante. Para o caso $c \leq 0$, provamos, por um argumento local, que se K é constante, então K deve ser igual a zero. Também apresentamos uma classificação de hipersuperfícies completas mínimas em $\mathbb{Q}^4$ com K constante. Exemplos de hipersuperfícies mínimas que não são totalmente geodésicas no espaço Euclidiano e no espaço hiperbólico com curvatura de Gauss-Kronecker nula são apresentados.

Palavras-Chave: hipersuperfícies mínimas em formas espaciais, curvatura de Gauss-Kronecker.

Abstract

In this work we study complete minimal hypersurfaces with constant Gauss-Kronecker curvature in a space form $\mathbb{Q}^4(c)$. We prove that the infimum of the absolute value of the Gauss-Kronecker curvature of a complete minimal hypersurface in $\mathbb{Q}^4(c)$, $c \leq 0$, whose Ricci curvature is bounded from below, is equal to zero. Futher, we study the connected minimal hypersurfaces M^3 of a space form $\mathbb{Q}^4(c)$ with constant Gauss-Kronecker curvature K. For the case $c \leq 0$, we prove, by a local argument, that if K is constant, then K must be equal to zero. We also present a classification of complete minimal hypersurface of $\mathbb{Q}^4$ with K constant. Examples of complete minimal hypersurfaces which are not totally geodesic in the Euclidean space $\mathbb{R}^4$ and the hiperbolic space $\mathbb{H}^4(c)$ with vanishing Gauss-Kronecker curvature are also presented.

Keywords: minimal hypersurfaces in space forms, Gauss-Kronecker curvature.

Conteúdo

Introdução

Neste trabalho investigamos hipersuperfícies mínimas completas com curvatura de Gauss-Kronecker constante em formas espaciais $\mathbb{Q}^4(c)$. Apesar de nossos resultados serem válidos para qualquer valor de c, nas nossas afirmações e demonstrações teremos $c = 0$ ou $c = \pm 1$, isto é, $\mathbb{Q}^4(c)$ é a esfera $\mathbb{S}^n$ unitária se $c > 0$, o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ se $c = 0$ e o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$ de curvatura seccional constante -1, se $c < 0$.

A curvatura de Gauss-Kronecker de hipersuperfícies em formas espaciais recebeu atenção de vários autores. Por exemplo, Hadamard [7] mostrou que hipersuperfícies em $\mathbb{R}^n$ são difeomorfas à esfera se e somente se suas curvaturas de Gauss-Kronecker são não nulas em cada ponto, enquanto do Carmo e Warner obtiveram um resultado similar para o caso de hipersuperfície compactas e orientáveis da esfera $\mathbb{S}^n$.

Recentemente, houve um grande interesse no estudo de hipersuperfícies completas e mínimas em formas espaciais $\mathbb{Q}^4(c)$ com curvatura de Gauss-Kronecker constante. Em particular, Cheng provou, em [3], que uma hipersuperfície completa e mínima em $\mathbb{Q}^4(c)$, $c \leq 0$, com curvatura escalar limitada inferiormente e curvatura de Gauss-Kronecker K constante, deve ter $K = 0$. No teorema 3.7 obtemos o mesmo resultado retirando a hipótese sobre a curvatura escalar e supondo que a hipersuperfície é conexa. Em [8, 9, 10], Hasanis, Savas-Halilaj e Vlachos deram uma classificação das hipersuperfícies mínimas completas em $\mathbb{Q}^4(c)$ com K identicamente zero, segunda forma fundamental não nula e com curvatura escalar limitada inferiormente. Juntando o teorema 3.7 com os resultados em [8, 9] chegamos ao teorema 3.12.

Um dos principais resultado desse trabalho é o teorema 3.9, onde são classificadas as hipersuperfícies mínimas completas da esfera $\mathbb{S}^4$ com curvatura de Gauss-Kronecker constante $K \neq 0$. Combinando esse teorema com o resultado principal de [10] obtivemos uma classificação das hipersuperfícies mínimas completas da esfera $\mathbb{S}^4$ com curvatura de Gauss-Kronecker constante.

Para uma hipersuperfície completa e mínima em $\mathbb{R}^4$ $(c = 0)$ com K constante, Hasanis, Savas-Halilaj e Vlachos [8], usando o teorema principal da curvatura de Smyth e Xavier, sem a hipótese sobre curvatura escalar, chegaram ao mesmo resultado.

Exemplos de hipersuperfícies mínimas com curvatura Gauss-Kronecker nula em $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{H}^4$ que não são totalmente geodésica são apresentadas. Por isso não podemos esperar provar que hipersuperfícies totalmente geodésicas são as únicas hipersuperfícies mínimas com curvatura de Gauss-Kronecker nula em $\mathbb{Q}^4(c)$ $(c \leq 0)$. Além disso, aplicamos o método do referencial móvel para mostrar que o toro de Clifford é hipersuperfície mínima com norma da segunda forma fundamental igual a sua dimensão.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduzimos a notação usada ao longo do texto, bem como alguns fatos básicos da geometria Riemanniana. Durante todo o texto, suave será para nós sinônimo de C^∞, indicaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos vetoriais de classe C^∞ definidas em M e por $C^\infty(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ em M. Para uma abordagem mais completa sugerimos ao leitor [12] e [5].

1.1 Tensores, métricas Riemannianas e a conexão de Levi-Civita

A maioria das ferramentas técnicas de geometria Riemanniana é construída usando tensores. Na verdade, a própria métrica Riemanniana é um tensor. Assim começamos por revisar as definições e propriedades básicas dos tensores em uma variedade.

Um k-**tensor** em uma variedade n-dimensionais M é uma aplicação multilinear

$$F : \mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M).$$

Isto quer dizer que, dados $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, $F(X_1, \ldots, X_k)$ é uma função suave em M, e que F é linear em cada argumento, isto é,

$$\begin{aligned} F(X_1, \ldots, fX + gY, \ldots, X_k) &= fF(X_1, \ldots, X, \ldots, X_k) \\ &\quad + gF(X_1, \ldots, Y, \ldots, X_k) \end{aligned}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M), f, g \in C^\infty(M)$.

O conjunto de todos os k-tensores em M, denotado por $\mathcal{T}^k(M)$, é um espaço vetorial sobre as seguintes operações:

$$(aF)(X_1,\ldots,X_k) = a(F(X_1,...,X_k));$$
$$(F+F')(X_1\ldots,X_k) = F(X_1,...,X_k) + F'(X_1,...,X_k).$$

Seja U um aberto de M onde é possível definir campos $e_1,\ldots,e_n \in \mathfrak{X}(M)$, de modo que em cada $q \in U$, os vetores $\{e_i|_q\}$, $i = 1,\ldots,n$, formam uma base de T_qM; diremos neste caso, que $\{e_i\}$ é um **referencial** em U. As funções $F(e_{i_1},\ldots,e_{i_k}) = F_{i_1\ldots i_k}$ em U são chamadas as **componentes** de F no referencial $\{e_i\}$.

Agora definimos métrica Riemanniana e conexão Riemanniana. Uma **métrica Riemanniana** em uma variedade M é um 2-tensor g simétrico (i.e., $g(X,Y) = g(Y,X)$) e positivo definido (i.e., $g(X,X) > 0$ se $X \neq 0$). Uma métrica Riemanniana é, portanto, uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno no espaço tangente T_pM que é escrita como $\langle X,Y\rangle = g(X,Y)$ para $X,Y \in T_pM$. Uma variedade com uma dada métrica Riemanniana é chamada uma **variedade Riemanniana**. Apresentamos, a seguir, o exemplo mais simples e importante de variedade Riemanniana.

Exemplo 1.1. O espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, com a métrica definida, em coordenadas dadas pela identidade $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$, por

$$g = \sum_i \delta_{ij}dx^idx^j = \sum_i dx^idx^i,$$

que é apenas o produto interno em cada espaço tangente $T_p\mathbb{R}^n$ sobre a identificação natural $T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$.

Assim como na geometria Euclidiana, se p é um ponto em uma variedade Riemanniana (M,g), definimos a **norma** de qualquer vetor $X \in T_pM$ por $|X| := \langle X,X\rangle^{\frac{1}{2}}$. Dizemos que X e Y são **ortogonais** se $\langle X,Y\rangle = 0$. Vetores $X_1,\ldots,X_k$ são ditos **ortonormais** quando $\langle X_i,X_j\rangle = \delta_{ij}$, onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Uma **conexão linear** ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M),$$

que se indica por $(X,Y) \to \nabla_XY$ (∇_XY é chamado de **derivada covariante de Y na direção X**) e que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $\nabla_X Y$ é linear sobre $C^\infty(M)$ em X:

$$\nabla_{fX_1+gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y \text{ para } f, g \in C^\infty(M);$$

(b) $\nabla_X Y$ é linear sobre $\mathbb{R}$ em Y:

$$\nabla_X(aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2 \text{ para } a, b \in \mathbb{R};$$

(c) ∇ satisfaz a seguinte regra do produto:

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y \text{ para } f \in C^\infty(M).$$

Seja g uma métrica Riemanniana em uma variedade M. Uma conexão ∇ é dita **compatível** com g se satisfaz a seguinte regra do produto

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \; X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Uma conexão linear ∇ em uma variedade diferenciável M é dita **simétrica** quando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Exemplo 1.2. É fácil verificar que a conexão Euclidiana dada por

$$\nabla_X Y = \sum_j \nabla_X(Y^j \partial_j) = \sum_j (XY^j)\partial_j$$

é simétrica e compatível com a métrica Euclidiana.

Teorema 1.3 (Levi-Civita)**.** *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Existe uma única conexão linear ∇ em M que é compatível com g e simétrica.*

Demonstração. Ver teorema 3.6 do capítulo 2 de [13]. □

1.2 Curvaturas

Nesta seção, definimos as curvaturas mais conhecidas de uma variedade Riemanniana. As propriedades de curvatura são muito importantes na investigação da geometria diferencial.

A **curvatura** R de uma variedade Riemanniana M é a aplicação $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ definida por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Exemplo 1.4. Em $\mathbb{R}^n$ com a métrica e conexão Euclidiana, temos

$$\nabla_X \nabla_Y Z = \sum_j \nabla_X (Y Z^j) \partial_j = \sum_j XYZ^j \partial_j,$$
$$\nabla_Y \nabla_X Z = \sum_j XYZ^j \partial_j.$$

A diferença entre essas duas expressões é $\sum_k (XYZ^k - YXZ^k)\partial_k = \nabla_{[X,Y]} Z$. Portanto, nesse caso $R = 0$.

Proposição 1.5. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades:*

(i) *R é bilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, isto é,*

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1)Z = fR(X_1, Y_1)Z + gR(X_2, Y_1),$$
$$R(X_1, fY_1 + gY_2)Z = fR(X_1, Y_1)Z + gR(X_1, Y_2);$$

(ii) *Para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o operador curvatura $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é linear, isto é,*

$$R(X,Y)(Z+W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)W,$$
$$R(X,Y)fZ = fR(X,Y)Z,$$

onde $f, g \in C^\infty(M)$ e $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. É evidente que R é multilinear sobre $\mathbb{R}$. Para $f \in C^\infty(M)$,

$$\begin{aligned} R(X, fY)Z &= \nabla_X \nabla_{fY} Z - \nabla_{fY} \nabla_X Z - \nabla_{[X,fY]} Z \\ &= \nabla_X (f \nabla_Y Z) - f \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{f[X,Y] + (Xf)Y} Z \\ &= (Xf)\nabla_Y Z + f\nabla_X \nabla_Y Z - f \nabla_Y \nabla_X Z - f\nabla_{[X,Y]} Z - (Xf)\nabla_Y Z \\ &= fR(X,Y)Z. \end{aligned}$$

Pela definição $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$, então R é multilinear em X. Quanto a segunda parte, temos

$$\begin{aligned} R(X,Y)fZ &= \nabla_X \nabla_Y fZ - \nabla_Y \nabla_X fZ - \nabla_{[X,Y]} fZ \\ &= \nabla_X (f\nabla_Y Z + (Yf)Z) - \nabla_Y (f \nabla_X Z + (Xf)Z) \\ &\quad - [X,Y]fZ - f\nabla_{[X,Y]} Z \\ &= f\nabla_X \nabla_Y Z + (Xf)\nabla_Y Z + (Yf)\nabla_X Z + X(Yf)Z \\ &\quad - (Yf)\nabla_X Z - (Xf)\nabla_Y Z - Y(Xf)Z - [X,Y]fZ - f\nabla_{[X,Y]} Z \\ &= fR(X,Y)Z. \end{aligned}$$

□

Também, definimos o **tensor curvatura** por

$$Rm(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)Z, W\rangle.$$

As componentes de Rm em um referencial $\{e_i\}$ serão representadas por

$$Rm(e_i,e_j,e_k,e_l) = R_{ijkl}.$$

O tensor curvatura apresenta as seguintes simetrias:

Proposição 1.6. (a) *$Rm(X,Y,Z,W) = -Rm(Y,X,Z,W)$;*

(b) *$Rm(X,Y,Z,W) = -Rm(X,Y,W,Z)$;*

(c) *$Rm(X,Y,Z,W) = Rm(Z,W,X,Y)$;*

(d) *$Rm(X,Y,Z,W) + Rm(Y,Z,X,W) + Rm(Z,X,Y,W) = 0$.*

Demonstração. (a) segue de $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$. Para provar (b) é suficiente mostrar que $\langle R(X,Y)Z,Z\rangle = 0$ para todo Z. Usando a compatibilidade da métrica, temos

$$XY|Z|^2 = X(2\langle\nabla_Y Z, Z\rangle) = 2\langle\nabla_X\nabla_Y Z, Z\rangle + 2\langle\nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle \tag{1.1}$$
$$YX|Z|^2 = Y(2\langle\nabla_X Z, Z\rangle) = 2\langle\nabla_Y\nabla_X Z, Z\rangle + 2\langle\nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle \tag{1.2}$$
$$[X,Y]|Z|^2 = 2\langle\nabla_{[X,Y]}Z, Z\rangle. \tag{1.3}$$

Quando subtraímos de (1.1) as equações (1.2) e (1.3), o lado esquerdo é zero e, por conseguinte, obtemos

$$0 = 2(\langle\nabla_X\nabla_Y Z, Z\rangle - \langle\nabla_Y\nabla_X Z, Z\rangle - \langle\nabla_{[X,Y]}Z, Z\rangle) = 2\langle R(X,Y)Z, Z\rangle.$$

Agora provemos (d), que segue direto de

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$

Pela definição de R e a simetria da conexão, temos

$$\begin{aligned}
&(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z)\\
&+ (\nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]}X)\\
&+ (\nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]}Y)\\
&= \nabla_X(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) + \nabla_Y(\nabla_Z X - \nabla_X Z) + \nabla_Z(\nabla_X Y - \nabla_Y X)\\
&- \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_{[Z,X]}Y\\
&= \nabla_X[Y,Z] - \nabla_{[Y,Z]}X + \nabla_Y[Z,X] - \nabla_{[Z,X]}Y + \nabla_Z[X,Y] - \nabla_{[X,Y]}Z\\
&= [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.
\end{aligned}$$

Na última igualdade, usamos a identidade de Jacobi. Finalmente, mostraremos (c), pelo item (d), podemos escrever

$$\begin{aligned}
\langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle R(Y,Z)X,W\rangle + \langle R(Z,X)Y,W\rangle &= 0\\
\langle R(Y,Z)W,X\rangle + \langle R(Z,W)Y,X\rangle + \langle R(W,Y)Z,X\rangle &= 0\\
\langle R(Z,W)X,Y\rangle + \langle R(W,X)Z,Y\rangle + \langle R(X,Z)W,Y\rangle &= 0\\
\langle R(W,X)Y,Z\rangle + \langle R(X,Y)W,Z\rangle + \langle R(Y,W)X,Z\rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Somando as quatro equações acima e usando o item (b) os termos das duas primeiras colunas se cancelam. Aplicando o item (a) e (b) nos termos restantes obtemos $2\langle R(X,Z)W,Y\rangle - 2\langle R(W,Y)X,Z\rangle = 0$ que é equivalente a (c). $\square$

Observação 1.7. A simetria expressa em (d) é chamada de primeira identidade de Bianchi. Usando (a)-(d), é fácil mostrar que a soma obtida por uma permutação cíclica de quaisquer três entradas de Rm também é zero. Em termos das componentes a proposição se traduz em:

(a) $R_{ijkl} = -R_{jikl}$;

(b) $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$;

(c) $R_{ijkl} = R_{klij}$;

(d) $R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$.

Uma vez que 4-tensores são bastante complicados. Muita vezes é útil construir tensores mais simples que resumem algumas das informações contida no tensor curvatura. O mais importante desses tensores é o tensor de Ricci, denotado por Ric, definido por

$$\mathrm{Ric}(X,Y) := \text{traço}(Z \to R(X,Y)Z).$$

Ou seja, tomando um referencial ortonormal local $\{e_i\}$, temos

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \sum \langle R(e_i,X)Y,e_i\rangle.$$

As componentes de Ric serão denotadas por R_{ij}, isto é,

$$R_{ij} = \sum_k \langle R(e_k,e_i)e_j,e_k\rangle.$$

Note que as simetrias do tensor curvatura garantem que $\mathrm{Ric}(X,Y)$ é simétrico com respeito a X, Y. Se $\{e_i\}$ é uma base ortonormal de T_pM, definimos a **curvatura escalar** de M em p como

$$\mathrm{R}(p) = \sum_i \mathrm{Ric}(e_i, e_i) = \sum_{ij} \langle R(e_i, e_j)e_j, e_j \rangle.$$

A proposição abaixo permite definir a curvatura seccional.

Proposição 1.8. *Seja $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional e sejam X, $Y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(X,Y) = \frac{Rm(X,Y,Y,X)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$$

não depende da escolha dos vetores $X, Y \in \sigma$.

Demonstração. Olhar proposição 3.1 no capítulo 4 de [5]. □

Assim, o número $K(X,Y)$ está intimamente associado ao plano σ de T_pM. Portanto, podemos definir $K(p,\sigma) = K(X,Y)$ como sendo a **curvatura seccional** de M em p, ao longo de σ. O lema abaixo mostra que o conhecimento de $K(\sigma)$, para todo σ, determina completamente a curvatura.

Lema 1.9. *Sejam R_1 e R_2 4-tensores definidos em um espaço vetorial V com um produto interno, e ambos satisfazendo as simetrias do tensor curvatura (descritas na proposição 1.6). Além disso, se para todo par de vetores linearmente independentes $X, Y \in V$,*

$$\frac{R_1(X,Y,Y,X)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2} = \frac{R_2(X,Y,Y,X)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2},$$

então $R_1 = R_2$.

Demonstração. Veja lema 3.3 do capítulo 4 de [5]. □

Lema 1.10. *Seja (M, g) uma n-variedade Riemanniana com curvatura seccional constante c. O tensor curvatura é dado pela fórmula*

$$Rm(X,Y,Z,W) = c\{\langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle\}. \tag{1.4}$$

Em componentes,

$$R_{ijkl} = c(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}).$$

Demonstração. Encontra-se na página 106 de [5]. □

Uma variedade Riemanniana completa e com curvatura seccional constante é dita uma **forma espacial**. Entre as variedades Riemannianas, as formas espaciais são as mais simples.

1.3 Sobre referenciais móveis

Agora apresentaremos alguns fatos sobre referenciais móveis. Iniciaremos com um fato puramente algébrico.

Lema 1.11 (Cartan). *Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Sejam $w_1, \ldots, w_r : V \to \mathbb{R}, r \leq n$, formas lineares de V linearmente independentes. Suponhamos que existam formas lineares $\theta_1, \ldots, \theta_r : V \to \mathbb{R}$ satisfazendo a seguinte condições:*

$$\sum_{i=1}^{r} w_i \wedge \theta_i = 0.$$

Então exitem números reais a_{ij} tais que

$$\theta_i = \sum_j a_{ij} w_j, \quad i, j = 1, \ldots r, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Demonstração. Sendo $w_1, \ldots, w_r$ linearmente independentes podemos completar essas formas em uma base $\{w_1, \ldots, w_r, w_{r+1}, \ldots, w_n\}$ de V^* e escrever

$$\theta_i = \sum_j a_{ij} w_j + \sum_l b_{il} w_l, \quad l = r+1, \ldots, n.$$

Então

$$\begin{aligned}
0 = \sum_i w_i \wedge \theta_i &= \sum_i w_i \wedge \sum_j a_{ij} w_j + \sum_i w_i \wedge \sum_l b_{il} w_l \\
&= \sum_{ij} a_{ij} w_i \wedge w_j + \sum_{il} b_{il} w_i \wedge w_l \\
&= \sum_{i<j} a_{ij} w_i \wedge w_j + \sum_i a_{ii} w_i \wedge w_i + \sum_{i>j} a_{ij} w_i \wedge w_j + \sum_{il} b_{il} w_i \wedge w_l \\
&= \sum_{i<j} a_{ij} w_i \wedge w_j - \sum_{i>j} a_{ij} w_j \wedge w_i + \sum_{il} b_{il} w_i \wedge w_l \\
&= \sum_{i<j} a_{ij} w_i \wedge w_j - \sum_{i<j} a_{ji} w_i \wedge w_j + \sum_{il} b_{il} w_i \wedge w_l \\
&= \sum_{i<j} (a_{ij} - a_{ji}) w_i \wedge w_j + \sum_{il} b_{il} w_i \wedge w_l.
\end{aligned}$$

Como os $w_k \wedge w_m, k < m, \ k, m = 1, \ldots, n$ são linearmente independentes, concluímos que $a_{ij} = a_{ji}$ e $b_{il} = 0$. □

Seja M^n uma variedade Riemanniana de dimensão n (de agora em diante, usaremos um índice superior quando quisermos indicar a dimensão de uma variedade) e conexão de Levi-Civita ∇. Um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ sobre um aberto $U \subset M$ é chamado um **referencial móvel**. Existe um único correferencial $\{w_1, \ldots, w_n\}$ satisfazendo $w_i(e_j) = \delta_{ij}$.

As **formas de conexão** w_{ij} no referencial $\{e_1, \ldots, e_n\}$ são as 1-formas suaves em U dadas para $X \in \mathfrak{X}(U)$ por

$$w_{ij}(X) = \langle \nabla_X e_i, e_j \rangle.$$

Segue imediatamente das propriedades da conexão de Levi-Civita que w_{ij} são, de fato, 1-formas suaves e

$$w_{ij} + w_{ji} = 0$$

para todos $1 \leq i, j \leq n$. Em particular, $w_{ii} = 0$ para todo i.

As **formas de curvatura** no referencial $\{e_1, \ldots, e_n\}$ são as 2-formas Ω_{ij} em U dadas, para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, por

$$\Omega_{ij}(X, Y) = \langle R(e_i, e_j)X, Y \rangle.$$

As simetrias do operador de curvatura garantem, imediatamente, que as Ω_{ij} são de fato 2-formas em U, tais que $\Omega_{ij} + \Omega_{ji} = 0$. Note ainda que

$$\Omega_{ij}(e_k, e_l) = \langle R(e_i, e_j)e_k, e_l \rangle = R_{ijkl}.$$

Logo, segue que

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{l,k} R_{ijkl} w_k \wedge w_l.$$

O ponto fundamental no método do referencial móvel é que as formas w_i, w_{ij} e Ω_{ij} satisfazem as chamadas equações de estruturas de Elie Cartan. As proposições 1.12 e 1.13 apresentam, respectivamente, a primeira e segunda equações de estruturas.

Proposição 1.12. *As formas de conexão satisfazem*

$$dw_i = \sum_j w_{ij} \wedge w_j. \tag{1.5}$$

Demonstração. Para $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, segue da Proposição 12.17 de [12] que

$$\begin{aligned}
dw_i(X,Y) &= X(w_i(Y)) - Y(w_i(X)) - w_i([X,Y]) \\
&= X\langle Y, e_i\rangle - Y\langle X, e_i\rangle - \langle [X,Y], e_i\rangle \\
&= \langle \nabla_X Y, e_i\rangle + \langle Y, \nabla_X e_i\rangle - \langle \nabla_Y X, e_i\rangle - \langle X, \nabla_Y e_i\rangle - \langle [X,Y], e_i\rangle \\
&= \sum_k (\langle Y, e_k\rangle\langle e_k, \nabla_X e_i\rangle - \langle X, e_k\rangle\langle e_k, \nabla_Y e_i\rangle) \\
&= \sum_k (w_k(Y) w_{ik}(X) - w_k(X) w_{ik}(Y)) \\
&= \sum_k w_{ik} \wedge w_k(X,Y).
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.13. *Nas notações acima, temos, para todo* $1 \leq i, j \leq n$

$$dw_{ij} = \sum_k w_{ik} \wedge w_{kj} + \Omega_{ij}. \tag{1.6}$$

Demonstração. Para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos que

$$\begin{aligned}
dw_{ij}(X,Y) &= X(w_{ij}(Y)) - Y(w_{ij}(X)) - w_{ij}([X,Y]) \\
&= X\langle \nabla_Y e_i, e_j\rangle - Y\langle \nabla_X e_i, e_j\rangle - \langle \nabla_{[X,Y]} e_i, e_j\rangle \\
&= \langle \nabla_X \nabla_Y e_i - \nabla_Y \nabla_Y e_i - \nabla_{[X,Y]} e_i, e_j\rangle \\
&\quad + \langle \nabla_Y e_i, \nabla_X e_j\rangle - \langle \nabla_X e_i, \nabla_Y e_j\rangle \\
&= \langle R(X,Y) e_i, e_j\rangle + \sum_k \langle \nabla_Y e_i, e_k\rangle\langle \nabla_X e_j, e_k\rangle \\
&\quad - \sum_k \langle \nabla_X e_i, e_k\rangle\langle \nabla_Y e_j, e_k\rangle \\
&= \Omega_{ij}(X,Y) + \sum_k (w_{ik}(Y) w_{jk}(X) - w_{ik}(X) w_{jk}(Y)) \\
&= \Omega_{ij}(X,Y) + \sum_k w_{ik} \wedge w_{kj}(X,Y).
\end{aligned}$$

□

A proposição a seguir garante que as $1-$formas de conexão ficam inteiramente determinadas pela anti-simetria em relação a seus índices e pela primeira equação de estrutura.

Proposição 1.14. *Seja $\{e_1,\dots,e_n\}$ um referencial ortonormal sobre um aberto $U \subset M$ e sejam w_{ij} e θ_{ij} dois conjuntos de formas suaves em U, anti-simétricos ($w_{ij} = -w_{ji}$) e satisfazendo (1.5). Então $w_{ij} = \theta_{ij}$ para todos $1 \leq i, j \leq n$.*

Demonstração. Segue de (1.5) que, para $1 \leq i \leq n$,

$$\sum_j (w_{ij} - \theta_{ij}) \wedge w_j = 0.$$

Portanto, pelo lema de Cartan 1.11, tem-se para cada p em U

$$w_{ij}|_p - \theta_{ij}|_p = \sum_k h_{ij}^k(p) w_k|_p.$$

Assim, ficam definidas as funções $h_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$, tais que $h_{ij}^k = h_{ik}^j$ e $w_{ij} - \theta_{ij} = \sum_k h_{ij}^k w_k$ para todo i, j. Observe que

$$\sum_k h_{ji}^k w_k = w_{ji} - \theta_{ji} = -(w_{ij} - \theta_{ij}) = -\sum_k h_{ij}^k w_k.$$

Logo, $h_{ij}^k = -h_{ji}^k$ e

$$h_{ij}^k = -h_{ji}^k = -h_{jk}^i = h_{kj}^i = h_{ki}^j = -h_{ik}^j = -h_{ij}^k.$$

□

É possível estender aos tensores a noção de derivada covariante. Seja F um k-tensor, a **diferencial covariante** ∇F de F é um $(k+1)$-tensor dado por

$$\begin{aligned}\nabla F(X_1,\dots,X_k,Y) = Y(F(X_1,\dots,X_k)) &- F(\nabla_Y X_1,\dots,X_k) \\ &- \cdots - F(X_1,\dots,\nabla_Y X_k).\end{aligned}$$

As propriedades da conexão de Levi-Civita garantem que a expressão acima define um $(k+1)$-tensor. As componentes de ∇F em um referencial ortonormal local $\{e_1,\dots,e_n\}$ serão denotadas por

$$F_{i_1\dots i_k j} = \nabla F(e_{i_1},\dots,e_{i_k},e_j),$$

onde $i_1,\dots,i_k,j \in \{1,\dots,n\}$.

Proposição 1.15. *Nas notações acima, temos*

$$\begin{aligned}\sum_j F_{i_1 i_2\dots i_k j} w_j = dF_{i_1\dots i_k} &+ \sum_j F_{j i_2\dots i_k} w_{j i_1} \\ &+ \sum_j F_{i_1 j i_3\dots i_k} w_{j i_2} + \cdots + \sum_j F_{i_1\dots i_{k-1} j} w_{j i_k}.\end{aligned}$$

Demonstração. Observe inicialmente que, por exemplo

$$\sum_j F_{i_1 i_2 j i_4 \ldots i_k} w_{j i_3}(e_i) = \sum_j F(e_{i_1}, e_{i_2}, e_j, e_{i_4}, \ldots, e_{i_k}) \langle \nabla_{e_i} e_j, e_{i_3} \rangle,$$

onde $i \in \{1, \ldots, n\}$, como F é linear e $\langle \nabla_{e_i} e_j, e_{i_3} \rangle = -\langle e_j, \nabla_{e_i} e_{i_3} \rangle$, temos

$$\begin{aligned} \sum_j F_{i_1 i_2 j i_4 \ldots i_k} w_{j i_3}(e_i) &= -F(e_{i_1}, e_{i_2}, \sum_j \langle \nabla_{e_i} e_{i_3}, e_j \rangle e_j, e_{i_4}, \ldots, e_{i_k}) \\ &= -F(e_{i_1}, e_{i_2}, \nabla_{e_i} e_{i_3}, e_{i_4}, \ldots, e_{i_k}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_j F_{i_1 i_2 \ldots i_k j} w_j(e_i) = & \sum_j F_{i_1 i_2 \ldots i_k j} \delta_{ij} = F_{i_1 i_2 \ldots i_k i} = \nabla F(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}, e_i) \\ & = e_i(F(e_{i_1} \ldots, e_{i_k})) - F(\nabla_{e_i} e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) - \cdots - \\ & \quad F(e_{i_1}, \ldots, \nabla_{e_i} e_{i_k}) = dF_{i_1 i_2 \ldots i_k}(e_i) + \sum_j F_{j i_2 \ldots i_k} w_{j i_1}(e_i) \\ & \quad + \sum_j F_{i_1 j \ldots i_k} w_{j i_2}(e_i) + \cdots + \sum_j F_{i_1 \ldots i_{k-1}} w_{j i_k}(e_i). \end{aligned}$$

□

Observação 1.16. Para um **referencial geodésico** $\{e_1, \ldots, e_n\}$ em p, ou seja, $e_1, \ldots, e_n$ são ortonormais em uma vizinhança de p e $\nabla_{e_i} e_j|_p = 0$ temos que $\nabla_X e_j|_p = \sum_i \nabla_{X^i e_i} e_j|_p = \sum_i X^i(p) \nabla_{e_i} e_j|_p$, em particular, $w_{ij}|_p = 0$ e daí em p vale

$$F_{i_1 i_2 \ldots i_k j} = \nabla F(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}, e_j) = e_j(F_{i_1 i_2 \ldots i_k}),$$

quer dizer, as componentes da derivada de um tensor são as derivadas das componentes desse tensor.

Seja ϕ um 2-tensor, dizemos que ϕ é **simétrico** quando $\phi(X, Y) = \phi(Y, X)$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, em termos de um referencial, isto significa que $\phi_{ij} = \phi_{ji}$. Se, além disso, ϕ satisfaz $\nabla \phi(X, Y, Z) = \nabla \phi(X, Z, Y)$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, dizemos que ϕ é um tensor de **Codazzi**.

Capítulo 2

Hirpersuperfícies mínimas em formas espaciais

2.1 Imersões isométricas

Nesta seção, introduzimos algumas definições e terminologias sobre subvariedades.

Sejam $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ uma variedade Riemanniana de dimensão $m = n + k$, M uma variedade de dimensão n e $\iota : M \to \widetilde{M}$ uma imersão. Se definimos uma métrica Riemanniana em M por $g = \iota^*\widetilde{g}$ (isto é, para $X, Y \in T_pM, g(X,Y) = \widetilde{g}(\iota^*X, \iota^*Y)$) então dizemos que ι é uma **imersão isométrica**. Se, além disso, ι é injetiva temos que M é uma **subvariedade Riemanniana** de $\widetilde{M}$. Neste caso, chamamos $\widetilde{M}$ de **variedade ambiente**.

Todos os resultados desse capítulo valem para qualquer imersão isométrica, uma vez que os resultados são locais e qualquer imersão é localmente um mergulho. Portanto, sempre que não houver perigo de confusão, identificaremos $p \in M$ com $\iota(p) \in \widetilde{M}$, cada $V \in T_pM$ com $\iota^*(V) \in T_{\iota(q)}\widetilde{M}$ e denotaremos as métricas de M e $\widetilde{M}$ apenas por $\langle\ ,\ \rangle$.

Em cada ponto $p \in M$, o produto interno de $T_p\widetilde{M}$ separa o na soma direta ortogonal

$$T_p\widetilde{M} = T_pM \oplus T_pM^\perp.$$

O conjunto

$$TM^\perp = \coprod_{p \in M} T_pM^\perp$$

é chamado de **fibrado normal**. Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)^\perp$ o espaço das seções de $TM^\perp$. Um referencial $(E_1, \ldots, E_m)$ para $\widetilde{M}$ em um aberto $\widetilde{U} \subset \widetilde{M}$ é dito

adaptado à imersão se os primeiros n vetores $(E_1|_p, \dots, E_n|_p)$ geram T_pM em cada $p \in \widetilde{U} \cap M$. Segue que $(E_{n+1}|_p, \dots, E_m|_p)$ gera $T_pM^\perp$.

2.2 Mais sobre referenciais móveis

Agora, relacionamos as formas de conexão e curvatura da variedade ambiente e da subvariedade. Além disso, definimos a segunda forma fundamental e demonstramos a equação de Gauss (2.4).

Sejam $\widetilde{M}^{n+k}$ uma variedade Riemanniana e $\iota : M^n \to \widetilde{M}^{n+k}$ uma imersão isométrica. Para $p \in M$, considere um referencial ortonormal local $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{n+k}\}$ em uma vizinhança $\widetilde{U}$ de p em $\widetilde{M}$ adaptada à imersão e seja $U = M \cap \widetilde{U}$.

Associado a este referencial, temos o correferencial dual $\{w_1, \dots, w_{n+k}\}$. Convencionamos os índices:

$$1 \leq i, j, k, \dots \leq n, \quad 1 \leq A, B, C, \dots \leq n+k, \quad n+1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \dots \leq n+k.$$

Em $\widetilde{U}$ temos que as formas w_A, w_{AB} satisfazem as equações de estrutura

$$\begin{aligned} dw_A &= \sum_B w_{AB} \wedge w_B, & w_{AB} + w_{BA} &= 0, \\ dw_{AB} &= \sum_C w_{AC} \wedge w_{CB} + \widetilde{\Omega}_{AB}, & \widetilde{\Omega}_{AB} &= \frac{1}{2} \sum_{C,D} \widetilde{R}_{ABCD} w_C \wedge w_D. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Se $X \in \mathfrak{X}(U)$, então $w_\alpha(X) = \langle X, e_\alpha \rangle = 0$, pois, $e_\alpha \in \mathfrak{X}(U)^\perp$. Logo, concluímos que para todo ponto em U e campos em $\mathfrak{X}(U)$

$$dw_i = \sum_C w_{iC} \wedge w_C = \sum_j w_{ij} \wedge w_j + \sum_\alpha w_{i\alpha} \wedge w_\alpha = \sum_j w_{ij} \wedge w_j,$$

ou seja, as restrições destas formas a U satisfazem a equação (1.5) e portanto a proposição 1.14 garante que essas restrições são, de fato, as formas de conexão de M. Assim, as equações de estruturas de M são dadas por

$$\begin{aligned} dw_i &= \sum_j w_{ij} \wedge w_j, & w_{ij} + w_{ji} &= 0, \\ dw_{ij} &= \sum_k w_{ik} \wedge w_{kj} + \Omega_{ij}, & \Omega_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k,l} R_{ijkl} w_k \wedge w_l. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Além disso, $0 = dw_\alpha = \sum_i w_{\alpha i} \wedge w_i$ e pelo lema de Cartan 1.11 tem-se

$$w_{i\alpha} = \sum_j h^\alpha_{ij} w_j. \tag{2.3}$$

Portanto, ficam definidas as funções $h^\alpha_{ij} : U \to \mathbb{R}$. Visto que as formas $w_{i\alpha}$ são suaves tem-se que as funções h_{ij} também são suaves. A partir daí, definimos a **segunda forma fundamental** da imersão na direção e_α por

$$\mathrm{II}^\alpha = \sum_{ij} h^\alpha_{ij} w_i w_j.$$

Se $\{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_{n+k}\}$ for outro referencial ortonormal em $\widetilde{U}$ adaptado à imersão, com $\tilde{e}_\alpha = e_\alpha$ e $\tilde{e}_j = a^k_j e_k$ (aqui estamos usando a convenção de Einstein), então $\tilde{w}_j = a^k_j w_k$,

$$\begin{aligned}\tilde{w}_{\alpha i}(X) &= \langle \widetilde{\nabla}_X \tilde{e}_\alpha, \tilde{e}_i \rangle = \langle \widetilde{\nabla}_X e_\alpha, a^k_i e_k \rangle \\ &= a^k_i \langle \widetilde{\nabla}_X e_\alpha, e_k \rangle = a^k_i w_{\alpha k}(X)\end{aligned}$$

e $\tilde{h}^\alpha_{ij} = \tilde{w}_{\alpha i}(\tilde{e}_j) = a^k_i a^l_j w_{\alpha k}(e_l) = a^k_i a^l_j h^\alpha_{kl}$. Portanto,

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{II}}^\alpha &= \sum_{ij} \tilde{h}^\alpha_{ij} \tilde{w}_i \tilde{w}_j = \sum_{ij} a^k_i a^l_j h^\alpha_{kl} a^r_i w_r a^s_j w_s = \delta^{kr} \delta^{ls} h^\alpha_{kl} w_r w_s \\ &= \sum_{kl} h^\alpha_{kl} w_k w_l = \mathrm{II}^\alpha,\end{aligned}$$

ou seja, II^α não depende da escolha do referencial ortonormal e está globalmente definida. Uma imersão isométrica $\iota : M^n \to \widetilde{M}^{n+k}$ é **totalmente geodésica** se $\mathrm{II}^\alpha \equiv 0$ para todo α.

Considere agora o campo

$$H = \sum_\alpha \frac{1}{n} \left(\sum_i h^\alpha_{ii} \right) e_\alpha.$$

Do mesmo modo, se $\{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_{n+k}\}$ for outro referencial ortonormal em $\widetilde{U}$ adaptado à imersão, com $\tilde{e}_j = a^k_j e_k$ e $\tilde{e}_\alpha = a^\beta_\alpha e_\beta$ então

$$\begin{aligned}\tilde{w}_{\alpha i}(X) &= \langle \widetilde{\nabla}_X \tilde{e}_\alpha, \tilde{e}_i \rangle = \langle \widetilde{\nabla}_X a^\beta_\alpha e_\beta, \tilde{e}_i \rangle \\ &= \langle X(a^\beta_\alpha) e_\beta, \tilde{e}_i \rangle + \langle a^\beta_\alpha \widetilde{\nabla}_X e_\beta, a^k_i e_k \rangle = a^\beta_\alpha a^k_i w_{\beta k}(X), \\ \tilde{h}^\alpha_{ii} &= \tilde{w}_{\alpha i}(\tilde{e}_i) = a^\beta_\alpha a^k_i a^l_i w_{\beta k}(e_l) = \sum_{\beta,k,l} a^\beta_\alpha a^k_i a^l_i h^\beta_{kl}.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= \sum_{\alpha} \frac{1}{n}\Big(\sum_{i} \tilde{h}^{\alpha}_{ii}\Big)\tilde{e}_{\alpha} = \sum_{\alpha,\gamma} \frac{1}{n}\Big(\sum_{i,k,l,\beta} a^{\beta}_{\alpha} a^{k}_{i} a^{l}_{i} h^{\beta}_{kl}\Big) a^{\gamma}_{\alpha} e_{\gamma} \\ &= \sum_{\alpha,\beta,\gamma,k,l} \frac{1}{n} a^{\beta}_{\alpha} a^{\gamma}_{\alpha} \delta^{kl} h^{\beta}_{kl} e_{\gamma} = \sum_{\beta,\gamma,k} \frac{1}{n} \delta^{\beta\gamma} h^{\beta}_{kk} e_{\gamma} \\ &= \sum_{\beta} \frac{1}{n}\Big(\sum_{k} h^{\beta}_{kk}\Big) e_{\beta} = H.\end{aligned}$$

Isto é, H independe do referencial ortonormal e está globalmente definido. Fica assim definido um campo $H \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, sendo o seu valor em $p \in M$ conhecido como o **vetor curvatura média** de ι em p. Uma imersão isométrica $\iota : M^n \to \widetilde{M}^{n+k}$ é **mínima** se $H \equiv 0$, i.e., se $\sum_i h^{\alpha}_{ii} = 0$ para todo α.

Das equações (2.1) e (2.2), obtemos

$$\frac{1}{2} \sum_{kl} R_{ijkl} w_k \wedge w_l = \sum_{\alpha} w_{i\alpha} \wedge w_{\alpha j} + \frac{1}{2} \sum_{kl} \widetilde{R}_{ijkl} w_k \wedge w_l.$$

Mas

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha} w_{i\alpha} \wedge w_{\alpha j} &= -\sum_{\alpha}\Big(\sum_{k} h^{\alpha}_{ik} w_k\Big) \wedge \Big(\sum_{l} h^{\alpha}_{jl} w_l\Big) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{kl}\Big(\sum_{\alpha}(h^{\alpha}_{ik} h^{\alpha}_{jl} - h^{\alpha}_{il} h^{\alpha}_{jk})\Big) w_k \wedge w_l.\end{aligned}$$

Assim, obtemos a *equação de Gauss*

$$R_{ijkl} = \widetilde{R}_{ijkl} - \sum_{\alpha}(h^{\alpha}_{ik} h^{\alpha}_{jl} - h^{\alpha}_{il} h^{\alpha}_{jk}). \tag{2.4}$$

Agora aplicaremos o método do referencial móvel para mostrar que o toro de Clifford é uma hipersuperfície mínima da esfera.

Exemplo 2.1. Sejam m e n números inteiros positivos tal que $m < n$, dizemos que

$$M_{m,n-m} = \mathbb{S}^m\left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-m}\left(\sqrt{\frac{n-m}{n}}\right)$$

é o **toro de Clifford**. Se $x_1 : \mathbb{S}^m\big(\sqrt{\frac{m}{n}}\big) \to \mathbb{R}^{m+1}$ e $x_2 : \mathbb{S}^{n-m}\Big(\sqrt{\frac{n-m}{n}}\Big) \to \mathbb{R}^{n-m+1}$ denotam as imersões canônicas então

$$x = (x_1, x_2) : \mathbb{S}^m\left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-m}\left(\sqrt{\frac{n-m}{n}}\right) \to \mathbb{S}^{n+1}$$

é uma imersão do toro de Clifford na esfera $\mathbb{S}^{n+1}$. Será mostrado que $M_{m,n-m}$ é uma subvariedade mínima da esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ com a norma da segunda forma fundamental igual a n. Seja $f_0, f_1, \ldots, f_m$ um referencial ortonormal para $\mathbb{R}^{m+1}$ tal que $f_0 = -\sqrt{\frac{n}{m}}x_1$ é normal a $\mathbb{S}^m\big(\sqrt{\frac{m}{n}}\big)$ e seja $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ seu correferencial dual. Similarmente, para $\mathbb{S}^{n-m}\Big(\sqrt{\frac{n-m}{n}}\Big)$ em $\mathbb{R}^{n-m+1}$, escolhemos um referencial ortonormal $f_{m+1}, \ldots, f_{n+1}$ tal que $f_{n+1} = -\sqrt{\frac{n}{n-m}}x_2$ é norma a $\mathbb{S}^{n-m}\Big(\sqrt{\frac{n-m}{n}}\Big)$ e seja $\varphi_{m+1}, \ldots, \varphi_{n+1}$ seu correferencial dual. Seja $(\varphi_{AB})_{A,B=0,1,\ldots,n+1}$ as formas de conexão do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+2}$ com respeito ao referencial $(\varphi_A)_{A=0,1,\ldots,n+1}$. Essas formas, restritas a $M_{m,n-m}$ satisfazem

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= \varphi_{n+1} = 0,\\
\varphi_{0,i} &= -\varphi_{i,0} = -\sqrt{\frac{n}{m}}\varphi_i, \qquad i = 1, \ldots, m,\\
\varphi_{j,n+1} &= -\varphi_{n+1,j} = \sqrt{\frac{n}{n-m}}\varphi_j, \quad j = m+1, \ldots, n,\\
\varphi_{AB} &= -\varphi_{BA} = 0 \text{ para } A = 0, 1, \ldots, m \text{ e } B = m+1, \ldots, n+1.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Tomamos um novo referencial ortogonal $e_0, \ldots, e_{n+1}$ para $\mathbb{R}^{n+2}$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
e_0 &= \sqrt{\frac{n-m}{n}}f_0 + \sqrt{\frac{m}{n}}f_{n+1},\\
e_i &= f_i, \quad i = 1, \ldots, n,\\
e_{n+1} &= \sqrt{\frac{n-m}{n}}f_0 - \sqrt{\frac{m}{n}}f_{n+1}.
\end{aligned}$$

Então e_0 é normal a $\mathbb{S}^{n+1}$ e e_{n+1} é normal a $M_{m,n-m}$. Seja $w_0, \ldots, w_{n+1}$ o seu referencial dual. Temos

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt{\frac{n-m}{n}}\varphi_0 + \sqrt{\frac{m}{n}}\varphi_{n+1},\\
w_i &= \varphi_i, \quad i = 1, \ldots, n,\\
w_{n+1} &= \sqrt{\frac{n-m}{n}}\varphi_0 - \sqrt{\frac{m}{n}}\varphi_{n+1}.
\end{aligned}$$

As formas de conexão $(w_{AB})_{A,B=0,1,\ldots,n+1}$ para $\mathbb{R}^{n+2}$ com respeito ao corrreferencial (w_A) são então dadas por

$$\begin{aligned}
w_{0,j} &= -w_{j,0} = \sqrt{\frac{n-m}{n}}\varphi_{0,j} + \sqrt{\frac{m}{n}}\varphi_{n+1,j} \text{ para } j = 1, \dots, n, \\
w_{0,n+1} &= -w_{n+1,0} = -\varphi_{0,n+1}, \\
w_{ij} &= \varphi_{ij} \text{ para } i, j = 1, \dots, n, \\
w_{i,n+1} &= -w_{n+1,i} = \sqrt{\frac{n-m}{n}}\varphi_{i,0} - \sqrt{\frac{m}{n}}\varphi_{i,n+1} \text{ para } i = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

Restringindo essas formas a $M_{m,n-m}$ com auxílio de (2.5), obtemos

$$(w_{AB}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c}
w_{11} & \dots & w_{1m} & & & & \lambda w_1 \\
\vdots & \dots & \vdots & & 0 & & \vdots \\
w_{m+1} & \dots & w_{mm} & & & & \lambda w_m \\
\hline
& & & w_{m+1m+1} & \dots & w_{m+1n} & \mu w_{m+1} \\
& 0 & & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\
& & & w_{nm+1} & \dots & w_{nn} & \mu w_n \\
\hline
-\lambda w_1 & \dots & -\lambda w_m & -\mu w_{m+1} & \dots & -\mu w_n & 0
\end{array}\right),$$

onde $\mu = -\sqrt{\frac{m}{n-m}}$ e $\lambda = \sqrt{\frac{n-m}{m}}$. Daí obtemos que as componentes h_{ij} da segunda forma fundamental da hipersuperfície são dadas por

$$(h_{ij}) = \begin{pmatrix}
\lambda & & & & & \\
& \ddots & & & & \\
& & \lambda & & & \\
& & & \mu & & \\
& & & & \ddots & \\
& & & & & \mu
\end{pmatrix}.$$

Os elementos não indicados são nulos. Calculando a curvatura média obtém-se

$$H = m\lambda + (n-m)\mu = m\sqrt{\frac{n-m}{m}} - (n-m)\sqrt{\frac{m}{n-m}} = 0.$$

Além disso, a norma da segunda forma fundamental é dada por

$$S = \sum_{ij} h_{ij}^2 = m\lambda^2 + (n-m)\mu^2 = n.$$

2.3 O Laplaciano da norma da segunda forma ao quadrado

Em uma variedade Riemanniana M exitem generalizações naturais dos famosos operadores diferenciais em $\mathbb{R}^3$: *gradiente, divergente* e *Laplaciano.* Nesta seção usamos o método do referencial móvel para calcular o Laplaciano da norma da segunda forma de uma hipersuperfície ao quadrado.

Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave, o **gradiente** de f, denotado por ∇f, é o único campo vetorial que satisfaz

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f), \text{ para todo } X \in \mathfrak{X}(M).$$

Seja X um campo vetorial suave em M^n. A **divergência** de X é a função $\operatorname{div} X : M^n \to \mathbb{R}$, dada por

$$(\operatorname{div} X)(p) = \operatorname{tr}\{Y_p \to (\nabla_Y X)_p\}, \text{ para } p \in M$$

Finalmente, o **Laplaciano** de f, denotado por Δf, é a função $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$.

Vejamos primeiro quais as expressões do gradiente, divergente e Laplaciano em termos de um referencial ortonormal local.

Proposição 2.2. *Sejam $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave, X um campo vetorial suave em M^n e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta $U \subset M$. Então em U temos*

(a) $\nabla f = \sum_i e_i(f) e_i$;

(b) $\operatorname{div} X = \sum_i \{e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle\}$, *onde* $X = \sum_i a_i e_i$;

(b) $\Delta f = \sum_i \{e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i) f\}$.

Em particular, se o referencial for geodésico em $p \in U$, então em p temos

(b') $\operatorname{div} X = e_i(a_i)$;

(c') $\Delta f = \sum_i e_i(e_i(f))$.

Demonstração.

(a) Podemos escrever $\nabla f = \sum_i a_i e_i$ em U. Sendo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal temos $a_i = \langle \nabla f, e_i \rangle = e_i(f)$, portanto, $\nabla f = \sum_i e_i(f) e_i$.

(b) Pela definição de divergência de um campo vetorial, temos

$$\begin{aligned}\operatorname{div} X = \operatorname{tr}\{Y \to \nabla_Y X\} &= \sum_i \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle \\ &= \sum_i \{e_i \langle X, e_i \rangle - \langle X, \nabla_{e_i} e_i \rangle\} = \sum_i \{e_i(a_i) - \langle X, \nabla_{e_i} e_i \rangle\}.\end{aligned}$$

(c) Pelo item (a) temos que $\Delta f = \sum_i e_i(f) e_i$ em U. Do item (c) tiramos que

$$\Delta f = \sum_i \{e_i(e_i(f))) - \langle \nabla f, \nabla_{e_i} e_i \rangle\} = \sum_i \{e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i) f\}.$$

Os item (b') e (c') seguem da definição de referencial geodésico. $\square$

Observação 2.3. As equações acima deixam claro que ∇f, $\operatorname{div} X$ e Δf são suaves.

Em seguida, apresentamos as propriedades aritméticas do gradiente, divergente e Laplaciano.

Proposição 2.4. *Se $f, g : M^n \to \mathbb{R}$ são funções suaves e X, Y são campos vetoriais suaves em M^n, então*

(a) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$;

(b) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$;

(c) $\operatorname{div}(X+Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y$;

(d) $\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + \langle \nabla f, X \rangle$;

(e) $\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle$.

(e') *Em particular,*
$$\frac{1}{2}\Delta(f^2) = f\Delta f + |\nabla f|^2.$$

Demonstração. Para (a) e (b), basta observar que para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned}&\langle \nabla(f+g), Z \rangle = Z(f+g) = Zf + Zg = \langle \nabla f, Z \rangle + \langle \nabla g, Z \rangle = \langle \nabla f + \nabla g, Z \rangle \\ &\langle \nabla(fg), Z \rangle = Z(fg) = gZf + fZg = \langle g\nabla f + f\nabla g, Z \rangle.\end{aligned}$$

O item (c) é imediato. Quanto a (b), segue da definição que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(fX) &= \sum_i \langle \nabla_{e_i}(fX), e_i\rangle = \sum_i \langle e_i(f)X + f\nabla_{e_i}X, e_i\rangle \\
&= \sum_i \{\langle X, e_i(f)e_i\rangle + f\langle \nabla_{e_i}X, e_i\rangle\} \\
&= f \operatorname{div} X + \langle \nabla f, X\rangle,
\end{aligned}$$

onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta $U \subset M$. Finalmente, para o item (e) usamos os item (b), (c) e (d),

$$\begin{aligned}
\Delta(fg) &= \operatorname{div}(\nabla(fg)) = \operatorname{div}(g\nabla f + f\nabla g) = \operatorname{div}(g\nabla f) + \operatorname{div}(f\nabla g) \\
&= g \operatorname{div}(\nabla f) + f \operatorname{div}(\nabla g) + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle.
\end{aligned}$$

$\square$

A partir daqui, voltamos nossa atenção a hipersuperfícies. Seja $\iota : M^n \to \widetilde{M}^{n+1}$ uma subvariedade. Em cada ponto de M existem exatamente 2 vetores unitários normais a M. Se M é orientável (o que podemos assumir passando a um subconjunto de M) então podemos escolher um único normal N. Sejam p um ponto de M e $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1} = N\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança $\widetilde{U}$ de p em $\widetilde{M}$ adaptado à imersão. Então, pelas equações da seção 2.2 teremos

$$\begin{aligned}
w_{i,n+1} &= \sum_j h_{ij} w_j, \quad h_{ij} = h_{ij}^{n+1} = h_{ji}, \\
dw_i &= \sum_j w_{ij} \wedge w_j, \\
dw_{ij} &= \sum_k w_{ik} \wedge w_{kj} + w_{i,n+1} \wedge w_{n+1,j} + \widetilde{\Omega}_{ij}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Neste caso, só exite, a menos de orientação, uma única segunda forma fundamental em $U = \widetilde{U} \cap M$, a saber $\mathrm{II}^{n+1} = \sum_{ij} h_{ij} w_i w_j$, denotaremos II^{n+1}, simplesmente, por h. A **curvatura de Gauss-Kronecker** e a **curvatura média** de M^n são dadas, respectivamente, por:

$$K = \det(h_{ij}) \text{ e } H = \frac{1}{n} \sum_i h_{ii}.$$

Vimos na secção anterior que se $\{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n, N\}$ for outro referencial ortonormal em $\widetilde{U}$ adaptado à imersão, com $\tilde{e}_j = a_j^k e_k$ então $\tilde{h}_{ij} = a_i^k a_j^l h_{kl}$, assim, segue que

$$\begin{aligned}\tilde{K} &= \det(\tilde{h}_{ij}) = \det(a_i^k a_j^l h_{kl}) = \det(a_i^k h_{kl} a_j^l) \\ &= \det(a_i^k)\det(h_{kl})\det(a_j^l) = \det(h_{kl}) = K,\end{aligned}$$

ou seja, K independe do referencial escolhido e está globalmente definido.

Para cada ponto $q \in U$, usando a métrica induzida em T_qM, podemos escolher os vetores $e_1, \ldots, e_n$ em q de modo a diagonalizar a matriz $(h_{ij}(q))$, os autovalores $\lambda_i(q)$ da matriz são **as curvaturas principais**. Note que em q temos

$$\begin{aligned}K(q) &= \det(h_{ij}(q)) = \prod_i \lambda_i, \\ H(q) &= \frac{1}{n}\sum_i \lambda_i.\end{aligned}$$

Em particular, M é mínima se, e somente se,

$$\sum_i \lambda_i = 0.$$

Finalmente, definimos a norma ao quadrado de h por $S = \sum_{ij} h_{ij}^2$. O objetivo dessa seção é calcular o Laplaciano de S, i.e., ΔS. Para isso, vejamos algumas propriedades de h.

Segue da proposição 1.15 que a derivada covariante ∇h da segunda forma fundamental h de M, com componentes h_{ijk}, satisfaz

$$\sum_k h_{ijk} w_k = dh_{ij} + \sum_k h_{kj} w_{ki} + \sum_k h_{ik} w_{kj}. \tag{2.7}$$

Proposição 2.5. *Se $\widetilde{M}$ tem curvatura seccional constante c, então a segunda forma fundamental h é um tensor de Codazzi, ou seja, em termos de um referencial ortonormal temos*

$$h_{ijk} = h_{ikj} = h_{jik} = h_{kij} = h_{kji}. \tag{2.8}$$

Demonstração. A equação (2.6) nos dá

$$dw_{i,n+1} = \sum_j w_{ij} \wedge w_{j,n+1} + \widetilde{\Omega}_{i,n+1},$$

já que $w_{n+1,n+1} = 0$. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ temos que

$$\begin{aligned}\widetilde{\Omega}_{i,n+1}(X,Y) &= \langle \widetilde{R}(e_i, e_{n+1})X, Y\rangle = \langle \widetilde{R}(X,Y)e_i, e_{n+1}\rangle \\ &= c\{\langle X, e_{n+1}\rangle\langle Y, e_i\rangle - \langle Y, e_{n+1}\rangle\langle X, e_i\rangle\} = 0.\end{aligned}$$

Na penúltima igualdade acima, usamos a equação (1.4). Logo, pela equação (2.3)

$$dw_{i,n+1} = \sum_j w_{ij} \wedge w_{j,n+1} = \sum_{k,j} h_{jk} w_{ij} \wedge w_k. \tag{2.9}$$

Por outro lado, $w_{i,n+1} = \sum_j h_{ij} w_j$, derivando exteriormente obtemos

$$dw_{i,n+1} = \sum_j dh_{ij} \wedge w_j + \sum_j h_{ij} dw_j.$$

Substituindo a equação (2.7), obtemos

$$\begin{aligned} dw_{i,n+1} = &\sum_{k,j} h_{ijk} w_k \wedge w_j + \sum_{k,j} h_{kj} w_{ik} \wedge w_j \\ &+ \sum_{k,j} h_{ik} w_{jk} \wedge w_j + \sum_{j,k} h_{ij} w_{jk} \wedge w_k. \end{aligned}$$

Observe que

$$\sum_{k,j} h_{ik} w_{jk} \wedge w_j = -\sum_{k,j} h_{ij} w_{jk} \wedge w_k,$$

portanto,

$$dw_{i,n+1} = \sum_{k,j} h_{ijk} w_k \wedge w_j + \sum_{k,j} h_{kj} w_{ik} \wedge w_j. \tag{2.10}$$

Comparando as equações (2.9) e (2.10), concluímos que

$$0 = \sum_{k,j} h_{ijk} w_k \wedge w_j = \sum_{k<j} (h_{ijk} - h_{ikj}) w_k \wedge w_j.$$

□

Seguiremos adiante com a hipótese de $\widetilde{M}$ ter curvatura seccional constante c. Nessa situação, a equação (1.4) faz com que a equação de Gauss seja dada por

$$R_{ijkl} = c(\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl}) + h_{il}h_{jk} - h_{ik}h_{jl}. \tag{2.11}$$

Além disso, a curvatura de Ricci e a curvatura escalar são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \sum_k R_{kijk} = \sum_k \{c(\delta_{ij}\delta_{kk} - \delta_{ik}\delta_{kj}) + h_{ij}h_{kk} - h_{kj}h_{ik}\} \\ &= (n-1)c\delta_{ij} + nHh_{ij} - \sum_k h_{kj}h_{ik} \end{aligned}$$

e

$$R = \sum_i R_{ii} = n(n-1)c + n^2H^2 - S. \tag{2.12}$$

De maneira semelhante, temos que a segunda derivada covariante $\nabla^2 h = \nabla(\nabla h)$ de h, com componentes h_{ijkl}, satisfaz

$$\sum_l h_{ijkl}w_l = dh_{ijk} + \sum_l h_{ljk}w_{li} + \sum_l h_{ilk}w_{lj} + \sum_l h_{ijl}w_{lk}. \tag{2.13}$$

Observação 2.6. Pela observação 1.16, se $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1} = N\}$ é geodésico em p, então temos em p que $e_k(h_{ij}) = dh_{ij}(e_k) = h_{ijk}$ e $e_l(h_{ijk}) = dh_{ijk}(e_l) = h_{ijkl}$.

Será que podemos trocar os dois últimos índices de h_{ijkl}? A resposta é dada pela proposição a seguir.

Proposição 2.7 (Equação de Ricci)**.**

$$h_{ijkl} - h_{ijlk} = \sum_m (h_{mj}R_{imkl} + h_{im}R_{jmkl}). \tag{2.14}$$

Demonstração. Derivando exteriormente a equação (2.7), obtemos

$$\sum_k (dh_{ijk} \wedge w_k + h_{ijk}dw_k) = \sum_k (dh_{kj} \wedge w_{ki} + h_{kj}dw_{ki} + dh_{ik} \wedge w_{kj} + h_{ik}dw_{kj})$$

Vamos calcular cada termo separadamente:

$$\sum_k dh_{ijk} \wedge w_k = \sum_{k,l} h_{ijkl}w_l \wedge w_k - \underbrace{\sum_{k,l} h_{ljk}w_{li} \wedge w_k}_{1} - \underbrace{\sum_{k,l} h_{ilk}w_{lj} \wedge w_k}_{2}$$

$$- \underbrace{\sum_{k,l} h_{ijl}w_{lk} \wedge w_k}_{3};$$

$$\sum_k h_{ijk}dw_k = \underbrace{\sum_{k,l} h_{ijk}w_{kl} \wedge w_l}_{3};$$

$$\sum_k dh_{kj} \wedge w_{ki} = \underbrace{\sum_{k,l} h_{kjl}w_l \wedge w_{ki}}_{1} - \underbrace{\sum_{k,l} h_{lj}w_{lk} \wedge w_{ki}}_{4} - \underbrace{\sum_{k,l} h_{kl}w_{lj} \wedge w_{ki}}_{5};$$

$$\sum_k h_{kj}dw_{ki} = \underbrace{\sum_{k,l} h_{kj}w_{kl}\wedge w_{li}}_{4} + \sum_k h_{kj}\Omega_{ki};$$

$$\sum_k dh_{ik}\wedge w_{kj} = \underbrace{\sum_{k,l} h_{ikl}w_l\wedge w_{kj}}_{2} - \underbrace{\sum_{k,l} h_{lk}w_{li}\wedge w_{kj}}_{5} - \underbrace{\sum_{k,l} h_{il}w_{lk}\wedge w_{kj}}_{6};$$

$$\sum_k h_{ik}dw_{kj} = \underbrace{\sum_{k,l} h_{ik}w_{kl}\wedge w_{lj}}_{6} + \sum_k h_{ik}\Omega_{kj}.$$

Usamos as equações (2.7), (2.13) e as equações de estrutura. Observe que as somas rotuladas com o mesmo número se cancelam. Depois dos cancelamentos ficamos com

$$\sum_{k,l} h_{ijkl}w_k\wedge w_l = \sum_k (h_{ik}\Omega_{jk} + h_{kj}\Omega_{ik}).$$

A partir daí,

$$\begin{aligned} h_{ijkl} - h_{ijlk} &= \sum_{r,s} h_{ijrs}w_r\wedge w_s(e_k,e_l) \\ &= \sum_r (h_{ir}\Omega_{jr} + h_{rj}\Omega_{ir})(e_k,e_l) \\ &= \sum_r (h_{ir}R_{jrkl} + h_{rj}R_{irkl}). \end{aligned}$$

□

De posse da discussão acima, podemos calcular ΔS. Para isso, doravante, assumimos que M é mínima, o referencial ortonormal $\{e_1,\ldots,e_n,e_{n+1}\}$ é geodésico em p e $h_{ij}(p) = \lambda_i\delta_{ij}$. Assim, no ponto p temos

$$\frac{1}{2}\Delta S = \sum_{i,j}\frac{1}{2}\Delta(h_{ij})^2 = \sum_{i,j} h_{ij}\Delta h_{ij} + \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2.$$

Mas

$$\begin{aligned} \Delta h_{ij} &= \sum_k h_{ijkk} = \sum_k h_{kijk} = \sum_k (h_{kijk} - h_{kikj} + h_{kkij}) \\ &= \sum_{k,l} (h_{kl}R_{iljk} + h_{li}R_{kljk}) + nH_{ij} \\ &= \sum_{k,l} (\lambda_k\delta_{kl}R_{iljk} + \lambda_l\delta_{li}R_{kljk}) \\ &= \lambda_i\sum_k R_{kijk} - \sum_k \lambda_k R_{ikkj}. \end{aligned}$$

Na segunda igualdade usamos a observação 2.6, na quarta igualdade usamos a equação (2.14) e na quinta usamos que M é mínima. Pela a equação de Gauss (2.11) é fácil obter

$$R_{ijkl} = (c + \lambda_i \lambda_j)(\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl}). \tag{2.15}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lambda_i \sum_k R_{kijk} &= \lambda_i \sum_k (c + \lambda_i \lambda_k)(\delta_{ij} - \delta_{ik}\delta_{jk}) \\ &= \lambda_i \sum_k (c + \lambda_i \lambda_k)\delta_{ij} - \lambda_i \sum_k (c + \lambda_i \lambda_k)\delta_{ik}\delta_{jk} \\ &= nch_{ij} - (c + \lambda_i \lambda_j)h_{ij}, \\ -\sum_k \lambda_k R_{ikkj} &= \sum_k \lambda_k (c + \lambda_i \lambda_k)(\delta_{ik}\delta_{jk} - \delta_{ij}) \\ &= (c + \lambda_i \lambda_j)h_{ij} - h_{ij}S. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\Delta h_{ij} = \lambda_i \sum_k R_{kijk} - \sum_k \lambda_k R_{ikkj} = (nc - S)h_{ij}. \tag{2.16}$$

Encerramos o capítulo com a seguinte teorema:

Teorema 2.8. *Nas notações da discussão acima, temos:*

$$\frac{1}{2}\Delta S = (nc - S)S + \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2. \tag{2.17}$$

Capítulo 3

Curvatura de Gauss-Kronecker

3.1 Lemas

Nesta seção apresentaremos os lemas que facilitam as demonstrações dos teoremas principais.

A prova do teorema 3.8 depende muito da generalização do princípio do máximo devido a Yau [16].

Teorema 3.1 (Yau). *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci limitado inferiormente e seja $F : M^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 limitada inferiormente em M^n. Então existe uma sequência $\{p_k\}$ de pontos em M^n tal que*

$$\lim_{k\to\infty} F(p_k) = \inf(F), \ \lim_{k\to\infty} |\nabla F(p_k)| = 0 \quad e \ \liminf_{k\to\infty} \Delta F(p_k) \leq 0.$$

Para a prova do teorema 3.9 usaremos a generalização do princípio do máximo devido a Omori [14].

Teorema 3.2 (Omori). *Sejam M^n uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional limitada inferiormente e $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave limitada superiormente em M^n. Então existe uma sequência $\{p_k\}$ de pontos em M^n tal que*

$$\lim_{k\to\infty} f(p_k) = \sup f, \ \lim_{k\to\infty} |\nabla f(p_k)| = 0$$

e

$$\limsup_{k\to\infty} \max\{(Hess_f(p_k))(X,X) : |X| = 1\} \leq 0.$$

Também, precisaremos do seguinte resultado algébrico.

Lema 3.3. *Sejam* $\lambda_i, i = 1, 2, 3$ *números reais tais que* $\sum_i \lambda_i = 0$ *e* $K = \prod_i \lambda_i$. *Então* $S = \sum_i \lambda_i^2 \geq 3\sqrt[3]{2K^2}$ *e a igualdade vale se, e somente se, pelo menos dois dos* λ_i *são iguais.*

Demonstração. Seja $f \in \mathbb{R}[x, y][z]$ o polinômio dado por

$$f(z) = \frac{1}{2}[(x^2 + y^2 + z^2)^3 - 54x^2y^2z^2] - (x - y)^2(z - x)^2(z - y)^2$$

Por um cálculo simples, porém longo, temos $f(-x - y) = 0$, ou seja $-x - y$ é uma raiz de f. Logo

$$\frac{1}{2}(S^3 - 54K^2) = \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \geq 0.$$

Isto implica que $S = \sum_i \lambda_i^2 \geq 3\sqrt[3]{2K^2}$ e a igualdades acontece se, e somente se, pelo menos dois dos λ_i são iguais. □

Lema 3.4. *Seja* $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+1}$ *uma imersão com curvatura de Gauss-Kronecker* K *diferente de zero para todo* $p \in M$. *Então o Laplaciano da função* $F = \log |K|$ *é dado por*

$$\Delta F = -\sum_{i,j,k} \frac{1}{\lambda_i \lambda_j} h_{ijk}^2 + \sum_{i,k} \frac{1}{\lambda_i} h_{iikk},$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *são os autovalores da segunda forma fundamental* h *para alguma escolha de orientação,* h_{ijk} *e* h_{ijkl} *são, respectivamente, as componentes de* ∇h *e* $\nabla^2 h$.

Demonstração. Nesta demonstração usaremos a convenção de Einstein. Como K não se anula, a função $F = \log |\det(h_{ij})|$ está globalmente definida e é suave. Seja $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança de p e geodésico no ponto p tal que $h_{ij}(p) = \lambda_i \delta_{ij}$. Sabemos que

$$\Delta F(p) = \sum_k F_{kk}(p) = \sum_k e_k(e_k(F))(p).$$

Se $\gamma : I \to M$ é um caminho suave tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = e_k$, então

$$\begin{aligned}
F_{kk}(p) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (F_k(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e_k F(\gamma(t)) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e_k|_{\gamma(t)} F = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (F\circ\gamma)'(t) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left[\frac{1}{\det(h_{ij}(t))}\frac{d}{dt}\det(h_{ij}(t))\right] \\
&= \frac{1}{K}\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} \det(h_{ij}(t)) - \frac{1}{K^2}\left[\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\det(h_{ij}(t))\right]^2,
\end{aligned}$$

onde

$$K = \det(h_{ij}(p)) = \prod_i \lambda_i \text{ e } h_{ij}(t) = (h_{ij}\circ\gamma)(t).$$

Se $g(t) = \det(h_{ij}(t))$, temos que

$$g'(t) = \sum_i \det(h_1(t), \dots, h_i'(t), \dots, h_n(t)),$$

onde $h_i(t)$ é a i-ésima coluna da matriz $[h_{ij}(t)]$. Observe que as colunas de $[h_{ij}(0)]$ formam uma base de $\mathbb{R}^n$, uma vez que $K(p) \neq 0$. Logo, para cada $1 \leq i \leq n$, podemos escrever $h_i'(0) = a_i^j h_j(0)$. Então, temos

$$\begin{aligned}
g'(0) &= \sum_i \det(h_1(0), \dots, a_i^j h_j(0), \dots, h_n(0)) \\
&= \sum_i \det(h_1(0), \dots, a_i^i h_i(0), \dots, h_n(0)) \\
&= \sum_i a_i^i \det(h_1(0), \dots, h_n(0)) = K\sum_i a_i^i.
\end{aligned}$$

Mas $h_i'(0) = (h_{1ik}, \dots, h_{nik}) = (a_i^1\lambda_1, \dots, a_i^n\lambda_n)$. Logo, $a_i^i = \frac{h_{iik}}{\lambda_i}$ e daí, $g'(0) = K\sum_i \frac{h_{iik}}{\lambda_i}$. Além disso,

$$\begin{aligned}
g''(0) = &\sum_i \Big\{ \sum_{j<i} \det(h_1, \dots, h_j', \dots, h_i', \dots, h_n) + \det(h_1, \dots, h_{ii}'', \dots, h_n) \\
&+ \sum_{i<j} \det(h_1, \dots, h_i', \dots, h_j', \dots, h_n)\Big\}.
\end{aligned}$$

Omitimos o ponto 0 no segundo membro da equação acima, o qual também será omitido nas expressões abaixo. Calculando o primeiro termo da expressão acima, obtemos

$$\sum_{j<i} \det(h_1, \ldots, h_j', \ldots, h_i', \ldots h_n) = \sum_{j<i} \det(h_1, \ldots, a_j^r h_r, \ldots, a_i^l h_l, \ldots h_n)$$
$$= \sum_{j<i} \{\det(h_1, \ldots, a_j^j h_j, \ldots, a_i^l h_l, \ldots h_n) + \det(h_1, \ldots, a_j^i h_i, \ldots, a_i^l h_l, \ldots, h_n)\}$$
$$= \sum_{j<i} \{\det(h_1, \ldots, a_j^j h_j, \ldots, a_i^i h_i, \ldots h_n) + \det(h_1, \ldots, a_j^i h_i, \ldots, a_i^j h_j, \ldots, h_n)\}$$
$$= K \sum_{j<i} \{a_j^j a_i^i - a_j^i a_i^j\} = K \sum_{j<i} \left\{ \frac{h_{jjk}}{\lambda_j} \frac{h_{iik}}{\lambda_i} - \frac{h_{ijk}}{\lambda_i} \frac{h_{jik}}{\lambda_j} \right\}$$
$$= K \sum_{j<i} \left\{ \frac{h_{jjk}}{\lambda_j} \frac{h_{iik}}{\lambda_i} - \frac{h_{ijk}^2}{\lambda_i \lambda_j} \right\}.$$

Escrevendo $h_i''(0) = b_i^l h_l(0)$, para cada $1 \leq i \leq n$, temos

$$\det(h_1, \ldots, h_i'', \ldots, h_n) = \det(h_1, \ldots, b_i^l h_l, \ldots, h_n) = K b_i^i = K \frac{h_{iikk}}{\lambda_i}.$$

De modo análogo ao primeiro termo, obtemos

$$\sum_{i<j} \det(h_1, \ldots, h_i', \ldots, h_j', \ldots h_n) = \sum_{i<j} \det(h_1, \ldots, a_i^l h_l, \ldots, a_j^r h_r, \ldots h_n)$$
$$= \sum_{i<j} \{\det(h_1, \ldots, a_i^i h_i, \ldots, a_j^j h_j, \ldots h_n) + \det(h_1, \ldots, a_i^j h_j, \ldots, a_j^i h_i, \ldots, h_n)\}$$
$$= K \sum_{i<j} \{a_j^j a_i^i - a_j^i a_i^j\} = K \sum_{i<j} \left\{ \frac{h_{jjk}}{\lambda_j} \frac{h_{iik}}{\lambda_i} - \frac{h_{ijk}}{\lambda_i} \frac{h_{jik}}{\lambda_j} \right\}$$
$$= K \sum_{i<j} \left\{ \frac{h_{jjk}}{\lambda_j} \frac{h_{iik}}{\lambda_i} - \frac{h_{ijk}^2}{\lambda_i \lambda_j} \right\}$$

Logo,

$$g''(0) = K \sum_{i \neq j} \left(\frac{h_{iik} h_{jjk}}{\lambda_i \lambda_j} - \frac{h_{ijk}^2}{\lambda_i \lambda_j} \right) + K \sum_i \frac{h_{iikk}}{\lambda_i}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
F_{kk}(p) &= \sum_{i\neq j}\left(\frac{h_{iik}h_{jjk}}{\lambda_i\lambda_j} - \frac{h_{ijk}^2}{\lambda_i\lambda_j}\right) + \sum_i \frac{h_{iikk}}{\lambda_i} - \sum_{ij}\frac{h_{iik}h_{jjk}}{\lambda_i\lambda_j}\\
&= -\sum_{i\neq j}\frac{h_{ijk}^2}{\lambda_i\lambda_j} - \sum_i \frac{h_{iik}^2}{\lambda_i^2} + \sum_i \frac{h_{iikk}}{\lambda_i}\\
&= -\sum_{i,j}\frac{h_{ijk}^2}{\lambda_i\lambda_j} + \sum_i \frac{h_{iikk}}{\lambda_i}.
\end{aligned}$$

□

Agora, nas notações da discussão acima, enunciamos e demonstramos um lema que desempenha um papel crucial na prova de nossos resultados.

Lema 3.5. *Seja M^3 uma variedade Riemanniana conexa e imersa minimamente em $\mathbb{Q}^4(c)$, com curvatura de Gauss-Kronecker K que não se anula. Então o Laplaciano da função $F = \log|K|$ é dado por:*

$$\begin{aligned}
\Delta F = &-\frac{1}{K^2}\Big[(\lambda_3^2 h_{221} + \lambda_2^2 h_{331})^2 + (\lambda_3^2 h_{112} + \lambda_1^2 h_{332})^2\\
&+ (\lambda_2^2 h_{113} + \lambda_1^2 h_{223})^2\Big] - 3(S - 3c).
\end{aligned}$$

Demonstração. Como K não se anula, a função $F = \log|\det(h_{ij})|$ está definida em toda M^3 e é suave. Para qualquer ponto $p \in M^3$ fixado, tomamos um referencial ortonormal local $\{e_1, e_2, e_3\}$ e geodésico em p tal que $h_{ij}(p) = \lambda_i\delta_{ij}$. Pelo lema anterior o Laplaciano de F é dado por

$$\Delta F = -\sum_{i,j,k}\frac{1}{\lambda_i\lambda_j}h_{ijk}^2 + \sum_{i,k}\frac{1}{\lambda_i}h_{iikk}.$$

Como M^3 é mínima, temos que $\sum_k h_{kkii} = H_{ii} = 0$, para todo i. Segue das equações (2.14) e (2.15) que

$$\begin{aligned}
h_{ijij} - h_{jiji} = h_{ijij} - h_{ijji} &= \sum_k (h_{ik}R_{jkij} + h_{kj}R_{ikij})\\
&= \sum_k (\lambda_i\delta_{ik}R_{jkij} + \lambda_k\delta_{kj}R_{ikij}) = \lambda_i R_{jiij} + \lambda_j R_{ijij}\\
&= (\lambda_i - \lambda_j)R_{jiij} = (\lambda_i - \lambda_j)(c + \lambda_i\lambda_j)(\delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{ij})\\
&= (\lambda_i - \lambda_j)(c + \lambda_i\lambda_j).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\sum_{i,k}\frac{1}{\lambda_i}h_{iikk} &= \sum_{i,k}\frac{1}{\lambda_i}[h_{kkii}+(\lambda_i-\lambda_k)(c+\lambda_i\lambda_k)]\\ &= \sum_{i,k}\frac{1}{\lambda_i}(\lambda_i-\lambda_k)(c+\lambda_i\lambda_k)\\ &= \sum_{i,k}\Big(c+\lambda_i\lambda_k-\frac{\lambda_k}{\lambda_i}c-\lambda_k^2\Big)\\ &= 9c-3S=3(3c-S).\end{aligned}\tag{3.2}$$

Note que a equação de Codazzi (2.8) nos dá

$$\frac{1}{\lambda_i\lambda_j}h_{ijk}^2=\frac{1}{\lambda_i\lambda_j}h_{jik}^2.$$

Então o coeficiente de h_{123}^2 na expressão $\sum_{i,j,k}\frac{1}{\lambda_i\lambda_j}h_{ijk}^2$ é

$$2\bigg(\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_1\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_2\lambda_3}\bigg)=2\frac{\lambda_3+\lambda_2+\lambda_1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}=\frac{2H}{K}=0$$

e podemos escrever

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k}\frac{1}{\lambda_i\lambda_j}h_{ijk}^2=\sum_i\sum_{j\neq i,k\neq i,j<k}\bigg[\frac{1}{\lambda_i^2}h_{iii}^2+\bigg(\frac{1}{\lambda_j^2}+\frac{2}{\lambda_i\lambda_j}\bigg)h_{jji}^2\\ +\bigg(\frac{1}{\lambda_k^2}+\frac{2}{\lambda_i\lambda_k}\bigg)h_{kki}^2\bigg].\end{aligned}\tag{3.3}$$

Sejam i, j, k índices distintos. Como M^3 é mínima, temos $\lambda_i+\lambda_j+\lambda_k=0$ e $h_{iii}=-(h_{jji}+h_{kki})$, o que implica em

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\lambda_i^2}h_{iii}^2+\bigg(\frac{1}{\lambda_j^2}+\frac{2}{\lambda_i\lambda_j}\bigg)h_{jji}^2+\bigg(\frac{1}{\lambda_k^2}+\frac{2}{\lambda_i\lambda_k}\bigg)h_{kki}^2\\ &=\frac{1}{\lambda_i^2}(h_{jji}+h_{kki})^2+\bigg(\frac{1}{\lambda_j^2}+\frac{2}{\lambda_i\lambda_j}\bigg)h_{jji}^2+\bigg(\frac{1}{\lambda_k^2}+\frac{2}{\lambda_i\lambda_k}\bigg)h_{kki}^2\\ &=\bigg(\frac{1}{\lambda_i^2}+\frac{2}{\lambda_i\lambda_j}+\frac{1}{\lambda_j^2}\bigg)h_{jji}^2+\bigg(\frac{1}{\lambda_i^2}+\frac{2}{\lambda_i\lambda_k}+\frac{1}{\lambda_k^2}\bigg)h_{kki}^2+\frac{2}{\lambda_i^2}h_{jji}h_{kki}\\ &=\bigg(\frac{1}{\lambda_i}+\frac{1}{\lambda_j}\bigg)^2h_{jji}^2+\frac{2}{\lambda_i^2}h_{jji}h_{kki}+\bigg(\frac{1}{\lambda_i}+\frac{1}{\lambda_k}\bigg)^2h_{kki}^2\\ &=\frac{\lambda_k^2}{\lambda_i^2\lambda_j^2}h_{jji}^2+\frac{2}{\lambda_i^2}h_{jji}h_{kki}+\frac{\lambda_j^2}{\lambda_i^2\lambda_k^2}h_{kki}^2\\ &=\frac{1}{K^2}(\lambda_k^4h_{jji}^2+2\lambda_k^2\lambda_j^2h_{jji}h_{kki}+\lambda_j^4h_{kki}^2)=\frac{1}{K^2}(\lambda_k^2h_{jji}+\lambda_j^2h_{kki})^2.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Inserindo (3.4) em (3.3), obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k}\frac{1}{\lambda_i\lambda_j}h_{ijk}^2 &= \sum_i\sum_{j\neq i}\sum_{k\neq i\; j<k}\frac{1}{K^2}(\lambda_k^2 h_{jji}+\lambda_j^2 h_{kki})^2\\ &= \frac{1}{K^2}\Big[(\lambda_3^2 h_{221}+\lambda_2^2 h_{331})^2+(\lambda_3^2 h_{112}+\lambda_1^2 h_{332})^2\\ &\quad +(\lambda_2^2 h_{113}+\lambda_1^2 h_{223})^2\Big].\end{aligned}\tag{3.5}$$

Portanto, segue do lema anterior e das equações (3.2) e (3.5) que

$$\begin{aligned}\Delta F &= -\sum_{i,j,k}\frac{1}{\lambda_i\lambda_j}h_{ijk}^2+\sum_{i,k}\frac{1}{\lambda_i}h_{iikk}\\ &= -\frac{1}{K^2}\Bigg[(\lambda_3^2 h_{221}+\lambda_2^2 h_{331})^2+(\lambda_3^2 h_{112}+\lambda_1^2 h_{332})^2\\ &\quad +(\lambda_2^2 h_{113}+\lambda_1^2 h_{223})^2\Bigg]-3(S-3c).\end{aligned}$$

□

3.2 Teoremas principais

Nesta seção final, enunciamos e demonstramos os resultados principais desse trabalho.

Uma função u definida em uma variedade Riemanniana M é dita **fortemente superharmônica** (respectivamente **superharmônica**) se satisfaz a seguinte inequação diferencial em M:

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) \leq \varepsilon < 0 \text{ (respectivamente } \Delta u \leq 0.)$$

Teorema 3.6. *Seja M^3 uma variedade Riemanniana conexa imersa minimamente em $\mathbb{Q}^4(c), c \leq 0$, com curvatura de Gauss-Kronecker que não se anula. Então a função $F = \log|K|$ é:*

(i) *superharmônica se $c = 0$; ou*

(ii) *fortemente superharmônica se $c < 0$*

Demonstração. Pelo lema 3.5 temos $\Delta F \leq 9c$, o que completa a prova. □

Teorema 3.7. *Sejam M^3 uma variedade Riemanniana conexa e $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c), c \leq 0$ uma imersão mínima com curvatura de Gauss-Kronecker K constante. Então K é identicamente nula.*

Demonstração. Suponha que K não é identicamente nula. Segue do lema 3.5 que

$$0 = \Delta F = -\frac{1}{K^2}\bigg[(\lambda_3^2 h_{221} + \lambda_2^2 h_{331})^2 + (\lambda_3^2 h_{112} + \lambda_1^2 h_{332})^2 \\ +(\lambda_2^2 h_{113} + \lambda_1^2 h_{223})^2\bigg] - 3(S - 3c).$$

Então $S = 0$, o que contradiz a suposição $K \neq 0$. □

Teorema 3.8. *Seja M^3 uma hipersuperfície mínima e completa em $\mathbb{Q}^4(c), c \leq 0$, com curvatura de Ricci limitada inferiormente. Então a curvatura de Gauss-Kronecker satisfaz* $\inf |K| = 0$.

Demonstração. Argumentando indiretamente, suponha que $\inf |K| = \varepsilon > 0$. Nesse caso, a função $F = \log|\det(h_{ij})|$ está globalmente definida em M^3 e é suave e limitada inferiormente. Do lema 3.5, obtemos a seguinte desigualdade

$$\Delta F \leq -3(S - 3c). \tag{3.6}$$

Uma vez que a curvatura de Ricci de M^3 é limitada inferiormente e F é uma função suave limitada inferiormente, podemos aplicar o lema 3.1 a função F. Portanto, existe uma sequência $\{p_k\}$ de pontos em M tal que

$$\lim_{k\to\infty} F(p_k) = \inf(F), \quad \lim_{k\to\infty} |\nabla F(p_k)| = 0, \quad \liminf_{k\to\infty} \Delta F(p_k) \geq 0. \tag{3.7}$$

Calculando (3.6) em p_k, tomando o limite e usando (3.7) obtemos

$$0 \leq \liminf_{k\to\infty} \Delta F(p_k) \leq \liminf_{k\to\infty} -3(S(p_k) - 3c) \leq -3(\limsup_{k\to\infty} S(p_k) - 3c).$$

Logo $0 \leq \limsup_{k\to\infty} S(p_k) \leq 3c \leq 0$ o que contradiz a hipótese $\inf |K| = \varepsilon > 0$. □

Para demonstrarmos 3.9 usaremos o seguinte teorema.

Teorema. *Uma subvariedade Riemanniana n-dimensional mínima da $\mathbb{S}^{n+p}$ satisfazendo $S = n$ é localmente o toro de Clifford* $\mathbb{S}^m\Big(\sqrt{\frac{m}{n}}\Big) \times \mathbb{S}^{n-m}\Big(\sqrt{\frac{n-m}{n}}\Big)$.

Onde m e n são números inteiros positivos tal que $m < n$. O resultado acima é uma parte do teorema principal de [4]. Para o caso que usamos $p = 1$, o teorema foi provado independentemente por B. Lawson [11].

Teorema 3.9. *Seja $f : M^3 \to \mathbb{S}^4$ uma imersão mínima de uma variedade completa com curvatura de Gauss-Kronecker constante $K \neq 0$. Então $f(M^3)$ é isométrico ao toro de Clifford* $\mathbb{S}^1\big(\frac{\sqrt{3}}{3}\big) \times \mathbb{S}^2\big(\frac{\sqrt{6}}{3}\big)$.

Demonstração. Para qualquer ponto $p \in M^3$ fixado, tomamos um referencial ortonormal local $\{e_1, e_2, e_3\}$ e geodésico em p tal que $h_{ij}(p) = \lambda_i \delta_{ij}$. Visto que $K \neq 0$ é constante e a curvatura seccional da esfera unitária é 1, pelo lema 3.5 podemos escrever

$$\begin{aligned} 0 = -\frac{1}{K^2}\Big[(\lambda_3^2 h_{221} + \lambda_2^2 h_{331})^2 + (\lambda_3^2 h_{112} + \lambda_1^2 h_{332})^2 \\ +(\lambda_2^2 h_{113} + \lambda_1^2 h_{223})^2\Big] - 3(S-3). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Observe que $S > 0$, caso contrário $K = 0$. Então da equação acima deduzimos que $0 < S \leq 3$ e daí as curvaturas principais são limitadas. Mas a equação (2.15) assegura que $K(e_i, e_j) = 1 + \lambda_i \lambda_j$, onde $K(e_i, e_j)$ é a curvatura seccional de M ao longo do plano gerado por e_i e e_j. Todavia, a curvatura seccional é limitada inferiormente.

Assim, podemos aplicar o teorema 3.2 para obtermos uma sequência $\{p_k\}$ de pontos em M^3 tal que

$$\lim_{k\to\infty} S(p_k) = \sup S, \ \lim_{k\to\infty} |\nabla S(p_k)| = 0 \text{ e } \lim_{k\to\infty} \sup(S_{ii}(p_k)) \leq 0. \tag{3.9}$$

Além disso, desde que as curvaturas principais são limitadas, podemos passar a subsequência, se necessário, e assumir que

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_i(p_k) = \tilde{\lambda}_i, \ i = 1, 2, 3. \tag{3.10}$$

Se $\tilde{\lambda}_i = \tilde{\lambda}_j$ para $i \neq j$, então fazendo k tender para o infinito na primeira relação de (3.9) e aplicando em seguida o lema 3.3 duas vezes, adquirimos

$$\sup S = \tilde{\lambda}_1^2 + \tilde{\lambda}_2^2 + \tilde{\lambda}_3^2 = 3\sqrt[3]{2K^2} \leq \inf S,$$

donde S é constante. Pela equação (2.17)

$$0 = \frac{1}{2}\Delta S \geq S(3 - S).$$

Deste modo, concluímos que $S = 3$. Segue do resultado apresentado acima que a imagem de M^3 é localmente isométrica ao toro de Clifford $\mathbb{S}^1\big(\frac{\sqrt{3}}{3}\big) \times \mathbb{S}^2\big(\frac{\sqrt{6}}{3}\big)$. Como M^3 é completa, $f(M^3)$ é isométrico ao toro.

Suponha agora que $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3$ são dois a dois distintos. Logo, existe $N > 0$ tal que $\lambda_i(p_k) \neq \lambda_j(p_k)$ para $i \neq j$ e $k > N$.

Se $f = \sum_{i,j,k} h_{ij} h_{jk} h_{ki}$, então no ponto p temos

$$f = \sum_{i,j,k} h_{ij} h_{jk} h_{ki} = \sum_{i,j,k} \lambda_i \delta_{ij} \lambda_j \delta_{jk} \lambda_k \delta_{ki} = \sum_i \lambda_i^3.$$

Como M^3 é mínima, temos $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$. Deste modo,

$$f=-(\lambda_2+\lambda_3)^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3=-3\lambda_2\lambda_3(\lambda_2+\lambda_3)=3\lambda_1\lambda_2\lambda_3=3K.$$

Derivando as equações

$$\sum_i h_{ii}=H=0,\quad \sum_{i,j}h_{ij}^2=S,\quad \sum_{i,j,k}h_{ij}h_{jk}h_{ki}=3K, \tag{3.11}$$

com respeito a e_l e aplicando em p, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} h_{11l}+h_{22l}+h_{33l}=0\\ \lambda_1h_{11l}+\lambda_2h_{22l}+\lambda_3h_{33l}=\dfrac{1}{2}S_l\\ \lambda_1^2h_{11l}+\lambda_2^2h_{22l}+\lambda_3^2h_{33l}=0. \end{cases} \tag{3.12}$$

Calculando (3.12) em p_k (para $k>N$) e resolvendo o sistema correspondente, obtemos

$$\begin{cases} h_{11l}=\dfrac{\lambda_3^2-\lambda_2^2}{2D}S_l\\ h_{22l}=\dfrac{\lambda_1^2-\lambda_3^2}{2D}S_l\\ h_{33l}=\dfrac{\lambda_2^2-\lambda_1^2}{2D}S_l, \end{cases}$$

onde $D=\prod_{1\leq i<j\leq 3}(\lambda_i-\lambda_j)$. De $\lim_{k\to\infty}|\nabla S(p_k)|=0$ e $\lim_{k\to\infty}\lambda_i(p_k)=\tilde{\lambda}_i$, obtemos

$$\lim_{k\to\infty}h_{iil}(p_k)=0. \tag{3.13}$$

Inserindo (3.10) e (3.13) em (3.8) chegamos a

$$\sup S=3. \tag{3.14}$$

Em (2.17) mostramos que

$$\frac{1}{2}\Delta S=\frac{1}{2}\sum_i S_{ii}=(3-S)S+3\sum_{i\neq k}h_{iik}^2+\sum_i h_{iii}^2+6h_{123}^2. \tag{3.15}$$

Aplicando a equação acima em p_k, tomado o limite para $k\to\infty$ e usando (3.14) e a última relação em (3.9), obtemos

$$6\limsup_{k\to\infty}h_{123}^2(p_k)=\frac{1}{2}\limsup_{k\to\infty}\sum_i S_{ii}(p_k)\leq\frac{1}{2}\sum_i\limsup_{k\to\infty}S_{ii}(p_k)\leq 0.$$

Consequentemente, $\lim_{k\to\infty} h_{123}(p_k) = 0$. Daí, aplicando a equação (3.15) em p_k e tomado o limite para $k \to \infty$, asseguramos

$$\lim_{k\to\infty} S_{ii}(p_k) = 0.$$

Agora derivando duas vezes as equações em (3.11) com respeito a e_l obtemos o sistema

$$\begin{cases} h_{11ll} + h_{22ll} + h_{33ll} = 0 \\ \lambda_1 h_{11ll} + \lambda_2 h_{22ll} + \lambda_3 h_{33ll} = -\sum_{ij} h_{ijl}^2 + \dfrac{1}{2} S_{ll} \\ \lambda_1^2 h_{11ll} + \lambda_2^2 h_{22ll} + \lambda_3^2 h_{33ll} = -2\sum_{ij} \lambda_i h_{ijl}^2. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, angariamos

$$\begin{cases} h_{11ll} = \dfrac{1}{D}\left[2(\lambda_3 - \lambda_2)\sum_{i,j} \lambda_i h_{ijl}^2 + (\lambda_3^2 - \lambda_2^2)\left(\dfrac{1}{2} S_{ll} - \sum_{i,j} h_{ijl}^2\right)\right] \\ h_{22ll} = \dfrac{1}{D}\left[2(\lambda_1 - \lambda_3)\sum_{i,j} \lambda_i h_{ijl}^2 + (\lambda_1^2 - \lambda_3^2)\left(\dfrac{1}{2} S_{ll} - \sum_{i,j} h_{ijl}^2\right)\right] \\ h_{33ll} = \dfrac{1}{D}\left[2(\lambda_2 - \lambda_1)\sum_{i,j} \lambda_i h_{ijl}^2 + (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)\left(\dfrac{1}{2} S_{ll} - \sum_{i,j} h_{ijl}^2\right)\right]. \end{cases}$$

Como $\lim\limits_{k\to\infty} h_{ijl}(p_k) = \lim\limits_{k\to\infty} S_{ll}(p_k) = 0$ temos que

$$\lim_{k\to\infty} h_{iill}(p_k) = 0.$$

Tomando o limite na equação (3.1) para $k \to \infty$ para todo $i \neq j$ obtemos

$$(\tilde{\lambda}_i - \tilde{\lambda}_j)(1 + \tilde{\lambda}_i \tilde{\lambda}_j) = 0.$$

Desde que $\tilde{\lambda}_i \neq \tilde{\lambda}_j$ para $i \neq j$, temos que $1 + \tilde{\lambda}_i \tilde{\lambda}_j = 0$ para $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$. Mas isto implica que existem dois índices $i \neq j$ tais que $\tilde{\lambda}_i = \tilde{\lambda}_j$ que é uma contradição, finalizando assim a demonstração. □

Exemplo 3.10. Existem numerosos exemplos de hipersuperfícies mínimas em $\mathbb{R}^4$ e com curvatura de Gauss-Kronecker identicamente zero, que não são totalmente geodésicas.

Definimos a imersão

$$\psi : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}^4$$

por

$$\psi(u,v,z) = \frac{1}{z}(\cos u, \operatorname{sen} u, \cos v, \operatorname{sen} v)$$

onde $\mathbb{R}^3_+ = \{(u,v,z) \in \mathbb{R}^3; z > 0\}$.

Para estudar a geometria desta subvariedade, escolhamos um referencial ortonormal e adaptado:

$$\begin{aligned} e_1 &= (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0, 0), & e_2 &= (0,0,-\operatorname{sen} v, \cos v),\\ e_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos u, \operatorname{sen} u, \cos v, \operatorname{sen} v), & e_4 &= \frac{\sqrt{2}}{2}(-\cos u, -\operatorname{sen} u, \cos v, \operatorname{sen} v). \end{aligned}$$

Como $d\psi = \sum w_i e_i$, concluímos que

$$w_1 = \langle e_1, d\psi\rangle = z^{-1}du, \quad w_2 = z^{-1}dv, \quad w_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}z^{-2}dz$$

é o correferencial associado a e_1, e_2, e_3. Para o cálculo das formas de conexão w_{ij}, calcularemos primeiro

$$\begin{aligned} de_1 &= (-\cos u du, -\operatorname{sen} u du, 0, 0),\\ de_2 &= (0,0,-\cos u du, -\operatorname{sen} u du),\\ de_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2}(-\operatorname{sen} u du, \cos u du, -\operatorname{sen} v dv, \cos v dv), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} w_{14} &= \langle de_1, e_4\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}du,\\ w_{24} &= \langle de_2, e_4\rangle = -\frac{\sqrt{2}}{2}dv,\\ w_{34} &= 0. \end{aligned}$$

Daí obtemos que os componentes h_{ij} da segunda forma fundamental da hipersuperfícies são dadas por

$$(h_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}z & 0 & 0\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}z & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, podemos inferir que as curvaturas principais deste hipersuperfície são dadas por $\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}z, \lambda_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}z$ e $\lambda_3 = 0$. Portanto, a hipersuperfície é mínima e a curvatura de Gauss-Kronecker é identicamente igual a zero.

Para nosso último exemplo e para o próximo resultado, denote por $\mathbb{L}^{n+1}$ o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ (visto apenas como variedade diferenciável), munido do 2-tensor $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido por

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1}$$

se $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Sendo $v = (0, \ldots, 0, 1)$, temos $\langle v, v \rangle = -1$, de sorte que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ não é um métrica Riemanniana em $\mathbb{L}^{n+1}$. Apesar disso, podemos estender todo o formalismo de referenciais, correferenciais, formas de conexão, etc., referimos o leitor a [15] para maiores detalhes.

Desde que a estrutura diferenciável de $\mathbb{L}^{n+1}$ é a do $\mathbb{R}^{n+1}$, temos a nossa disposição todo o aparato de campos e funções suaves em $\mathbb{L}^{n+1}$. Definimos então a **conexão de Levi-Civita** ∇ do produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbb{L}^{n+1}$ como a derivação direcional usual 1.2 em $\mathbb{R}^{n+1}$. Uma vez que o colchete de campos de vetores só depende da estrutura diferenciável da variedade, ainda temos ∇ simétrica. Por outro lado, também é imediato verificar que ∇ é compatível com $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Por analogia com o caso Riemanniano, diremos daqui em diante que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica de $\mathbb{L}^{n+1}$ (vale entretanto frisar que, contrariamente aquele caso, a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ não induz sobre $\mathbb{L}^{n+1}$ uma estrutura de espaço métrico). Munido com tal métrica, $\mathbb{L}^{n+1}$ é o **espaço de Lorentz-Minkowski**. Um campo vetorial v no espaço de Lorentz-Minkowski é chamado **tipo-tempo** se $\langle v, v \rangle = -1$.

Um **referencial ortonormal** no aberto $U \subset \mathbb{L}^{n+1}$ é um conjunto $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ de campos suaves em U, tais que $\langle e_i, e_j \rangle = \pm\delta_{ij}$, para todos $1 \leq i, j \leq n+1$, Nesse caso, um pouco de Álgebra Linear permite provar que $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ é uma base de $T_p\mathbb{L}^{n+1}$ para cada $p \in U$, e existe exatamente um índice $1 \leq i \leq n+1$ tal que $\langle e_i, e_i \rangle = -1$. Doravante, suporemos que tal índice é sempre $i = n+1$; entretanto, para simplificar as notações subsequentes escreveremos $\epsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle$.

O correferencial $\{w_1, \ldots, w_{n+1}\}$, as formas de conexão w_{ij} e as formas de curvaturas Ω_{ij} associadas ao referencial $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ são definidas como antes. Observe que nas demonstrações das equações de estruturas não usamos que a métrica é positiva definida, portanto a primeira e a segunda equações de estruturas continuam válidas na seguinte forma:

$$dw_i = \sum_j \epsilon_j w_{ij} \wedge w_j \text{ e } dw_{ij} = \sum_k \epsilon_k w_{ik} \wedge w_{kj} + \Omega_{ij}.$$

Para o que segue, seja $\tilde{\nabla}$ a conexão Levi-Civita de $\mathbb{L}^{n+1}$. Diremos que uma hipersuperfície $M^n \subset \mathbb{L}^{n+1}$ é **tipo-espaço** se a restrição de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a M for uma métrica Riemanniana (dita também induzida pela a métrica de $\mathbb{L}^{n+1}$).

Analogamente ao caso Riemanniano, fixado $p \in M$ existem uma vizinhança V de p em $\mathbb{L}^{n+1}$ e um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}\}$ em V tal que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é tangente a M ao longo de $U = V \cap M$. Também por analogia com o caso Riemanniano, diremos que $e_{n+1} = N$ é normal a M ao longo de U.

Definimos o **espaço hiperbólico** como a hipersuperfície $\mathbb{H}^n$ de $\mathbb{L}^{n+1}$ dada por

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{L}^{n+1}; \langle x, x\rangle = -1 \text{ e } x_{n+1} > 0\}.$$

Afirmamos que $\mathbb{H}^n$ é uma hipersuperfície tipo-espaço de $\mathbb{L}^{n+1}$, tal que

$$T_p\mathbb{H}^n = \{v \in T_p\mathbb{L}^{n+1}; \langle v, p\rangle = 0\}, \tag{3.16}$$

para todo $p \in \mathbb{H}^n$.

De fato, se $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{H}^n$ é tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$, derivando a igualdade $\langle \alpha, \alpha\rangle = -1$ em $t = 0$ obtemos $2\langle p, v\rangle = 0$, de sorte que $T_p\mathbb{H}^n$ está contido no subespaço $\mathcal{V}$ de $T_p\mathbb{L}^{n+1}$ dado pelo segundo membro de (3.16). Por outro lado, tomando uma base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1} = p\}$ de $T_p\mathbb{L}^{n+1}$ e fazendo $v = \sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i$,temos

$$v \in \mathcal{V} \Leftrightarrow \langle v, e_{n+1}\rangle = 0 \Leftrightarrow a_{n+1} = 0,$$

e segue daí que $\dim \mathcal{V} = n$. Logo, $T_p\mathbb{H}^n = \mathcal{V}$. Por outro lado, se $v = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \in T_p\mathbb{H}^n$, então

$$\langle v, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq 0,$$

ocorrendo a igualdade se e só se $v = 0$. Logo, a restrição de $\langle \cdot, \cdot\rangle$ a $\mathbb{H}^n$ é uma métrica Riemanniana.

Lembrarmos aqui que as hipersuperfícies umbílicas de $\mathbb{H}^n$ surgem como a interseções de $\mathbb{H}^n$ com hiperplanos afim de $\mathbb{L}^{n+1}$. Em particular, uma **hipersuperfície equidistante** do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$ é hipersuperfície umbílica em $\mathbb{H}^n$ com curvatura seccional negativa. Vamos precisar também do espaço **De Sitter**

$$\mathbb{S}_1^n = \{x \in \mathbb{L}^{n+1}; \langle x, x\rangle = 1\}.$$

Sejam $g : M^2 \to \mathbb{S}_1^4$ uma imersão tipo-espaço e $i : \mathbb{S}_1^4 \to \mathbb{R}_1^5$ a inclusão. Denote por

$$(i \circ g)^*(T\mathbb{L}^5) = \{(x, w); x \in M^2, w \in T_{g(x)}\mathbb{L}^5\},$$
$$g^*(T\mathbb{S}_1^4) = \{(x, w); x \in M^2, w \in T_{g(x)}\mathbb{S}_1^4\},$$

os fibrados induzidos de $i \circ g$ e g, respectivamente. O fibrado normal $\mathcal{N}(g)$ é dado por

$$\mathcal{N}(g) = \{(x, w) \in g^*(T\mathbb{S}_1^4); w \perp dg(T_x M^2)\}.$$

Suponha agora que M^2 é uma variedade orientada e $g : M^2 \to \mathbb{S}_1^4$ é uma imersão isométrica **estacionária**, isto é, o campo curvatura média H da imersão g é identicamente nula.

Considere o fibrado unitária normal tipo-tempo $\mathcal{N}^1(g)$ de g, definido por

$$\mathcal{N}^1(g) = \{(x, w) \in \mathcal{N}(g); \langle w, w \rangle = -1\}.$$

Denote por $\pi : \mathcal{N}^1(g) \to M^2$ a projeção no primeiro fator e por $\psi_g : \mathcal{N}^1(g) \to \mathbb{H}^4$ a projeção no segundo fator. A aplicação ψ_g é chamada de aplicação polar associada a g.

Exemplo 3.11. Sejam $C_1, \ldots, C_5$ vetores ortogonais em $\mathbb{L}^5$ tais que $\frac{1}{2} = \langle C_1, C_1 \rangle = \langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = \langle C_4, C_4 \rangle$ e $\langle C_5, C_5 \rangle = -1$. A imersão $\phi : \mathbb{R}^3_{+1} \to \mathbb{H}^4 \subset \mathbb{L}^5$ definida por

$$\begin{aligned}\phi(u, v, z) = &\frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}}\{\cos(\sqrt{2}u)C_1 + \operatorname{sen}(\sqrt{2}u)C_2 + \cos(\sqrt{2}v)C_3 \\ &+ \operatorname{sen}(\sqrt{2}v)C_4 + zC_5\},\end{aligned}$$

onde $\mathbb{R}^3_{+1} = \{(u, v, z) \in \mathbb{R}^3; z > 1\}$, é uma imersão mínima com curvatura de Gauss-Kronecker nula, a qual não é totalmente geodésica.

Realmente, definindo os campos $e_1, \ldots, e_5$, para $(u, v, z) \in \mathbb{R}^3_+$, do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
e_1 = &\sqrt{2}\{-\operatorname{sen}(\sqrt{2}u)C_1 + \cos(\sqrt{2}u)C_2\}, \\
e_2 = &\sqrt{2}\{-\operatorname{sen}(\sqrt{2}v)C_3 + \cos(\sqrt{2}v)C_4), \\
e_3 = &\frac{-z}{\sqrt{z^2 - 1}}\{\cos(\sqrt{2}u)C_1 + \operatorname{sen}(\sqrt{2}u)C_2 + \cos(\sqrt{2}v)C_3 + \sin(\sqrt{2}v)C_4\} \\
&- \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}}C_5, \\
e_4 = &-\{\cos(\sqrt{2}u)C_1 + \operatorname{sen}(\sqrt{2}u)C_2\} + \{\cos(\sqrt{2}v)C_3 + \operatorname{sen}(\sqrt{2}v)C_4\}, \\
e_5 = &\frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}}\{\cos(\sqrt{2}u)C_1 + \operatorname{sen}(\sqrt{2}u)C_2 + \cos(\sqrt{2}v)C_3 + \operatorname{sen}(\sqrt{2}v)C_4 \\
&+ zC_5\},
\end{aligned}$$

temos que $e_1, \ldots, e_5$ é uma base ortonormal de $\mathbb{L}^5$ no ponto $\phi(u, v, z)$ tal que $e_1, \ldots, e_4$ é uma base ortonormal de $T_{\phi(u,v,z)}\mathbb{H}^4$ e e_1, e_2, e_3 são tangentes a hipersuperfície. Por um cálculo direto, inferimos que

$$d\phi = \frac{du}{\sqrt{z^2-1}}e_1 + \frac{dv}{\sqrt{z^2-1}}e_2 + \frac{dz}{z^2-1}e_3.$$

Portanto,

$$w_1 = \frac{du}{\sqrt{z^2-1}}, \quad w_2 = \frac{dv}{\sqrt{z^2-1}} \ \text{ e } \ w_3 = \frac{dz}{z^2-1}$$

é o correferencial de e_1, e_2, e_3. Visto que

$$de_i = \sum_{j=1}^{5} w_{ij}\epsilon_j e_j \ \text{ para } \ i = 1, \ldots, 5,$$

temos que

$$(w_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{zdu}{\sqrt{z^2-1}} & du & -\frac{du}{\sqrt{z^2-1}} \\ 0 & 0 & \frac{zdv}{\sqrt{z^2-1}} & -dv & -\frac{dv}{\sqrt{z^2-1}} \\ -\frac{zdu}{\sqrt{z^2-1}} & -\frac{zdv}{\sqrt{z^2-1}} & 0 & 0 & -\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} \\ -du & dv & 0 & 0 & 0 \\ \frac{du}{\sqrt{z^2-1}} & \frac{dv}{\sqrt{z^2-1}} & \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, temos que as componentes h_{ij} da segunda forma fundamental da hipersuperfície são dadas por

$$(h_{ij}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{z^2-1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{z^2-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por conseguinte, a hipersuperfície é mínima e a curvatura de Gauss-Kronecker é identicamente nula.

Hasanis, Savas-Halilaj e Vlachos [8, 9, 10] deram exemplos e uma classificação de hipersuperfície completas mínimas em $\mathbb{Q}^4(c)$ com K identicamente nula. Combinando os Teoremas 3.7 e 3.9 com seus resultados, obtemos os seguintes teoremas.

Teorema 3.12. *Seja $f : M^3 \to \mathbb{Q}^4(c), c \leq 0$ uma imersão mínima de uma variedade Riemanniana conexa com curvatura de Gauss-Kronecker constante, então $K = 0$. Seja S a norma ao quadrado da segunda forma fundamental de f. Se M^3 é completa e $0 < S < \infty$, então*

(i) *$c = 0$ e $f(M^3)$ se divide em um produto Euclidiano $L^2 \times \mathbb{R}$, onde L^2 é uma superfície completa e mínima em $\mathbb{R}^3$ com curvatura Gaussiana limitada inferiormente; ou*

(ii) *$c < 0$ e existe uma imersão mínima $h : M^2 \to N^3$, sem pontos totalmente geodésicos, de uma variedade Riemanniana completa e orientada M^2 em uma hipersuperfície equidistante N^3 do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^4$ e uma isometria local $T : M^3 \to \mathcal{N}^1(\tilde{h})$ tal que $f = \psi_{\tilde{h}} \circ T$.*

Considere uma imersão $g : V \to \mathbb{S}^4$ de uma superfície. Para $p \in V$, a elipse de curvatura $\mathcal{E}(p)$ de g em p é a imagem da circunferência tangente unitária pela segunda forma fundamental h de g em p:

$$\mathcal{E}(p) = \{h(X, X) \in N_pV; X \in T_pV \text{ e } |X| = 1\}.$$

Dizemos que g é **supermínima** se a elipse de curvatura é sempre uma circunferência. Sejam $\{w_1, \dots, w_4\}$ o correferencial e $w_{AB}, A, B = 1, \dots, 4$ as formas conexão de um referencial ortonormal local $\{e_1, \dots, e_4\}$ adaptado a g. A **curvatura normal** $\mathcal{K}_v(p)$ de g é definido pela equação $dw_{34}(p) = -\mathcal{K}_v(p) w_1 \wedge w_2$. Além disso, seja $\mathcal{N}(g)$ o fibrado normal unitário de g dados pelos pares (p, ξ), onde $p \in V$ e ξ é um vetor normal a g em p. Definimos a **aplicação polar** $\psi : \mathcal{N}^1(g) \to \mathbb{S}^4$ de g por $\psi(p, \xi) = \xi$. Destacamos que o seguinte teorema está demonstrado em [10].

Teorema 3.13. *Seja $f : M^3 \to \mathbb{S}^4$ uma imersão mínima de uma variedade Riemanniana com curvatura de Gauss-Kronecker constante K. Então*

(i) *$K \neq 0$ e $f(M^3)$ é isométrico ao toro de Clifford $\mathbb{S}^1\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \times \mathbb{S}^2\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$; ou*

(ii) *$K = 0$ e se S não é zero e é limitado superiormente, então $f(M^3)$ é a imagem da aplicação polar associado a imersão supermínima $g : V \to \mathbb{S}^4$ com curvatura normal positiva. Além disso, se existe $\varepsilon > 0$ tal que $S > \varepsilon$, então V é difeomorfo a esfera $\mathbb{S}^2$ ou ao plano projetivo $\mathbb{RP}^2$ e $f(M^3)$ é compacto.*

Bibliografia

[1] Asperti, A. C.; Chaves, R. M. B.; Sousa L. A. M. Jr. The Gauss-Kronecker curvature of minimal hypersurfaces in four dimensional space forms. *Mathematische Zeitschrift*, v. 267 , no. 3-4, p. 523–533, 2011.

[2] Caminha, A. *Introdução à geometria das aplicações harmônicas.* In XVI Escola de Geometria Diferencial. São Paulo: USP, 2010.

[3] Cheng, Q.M. Curvature of complete hypersurfaces in space forms. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, v. 134A, p. 55-68, 2004.

[4] Chern S.S.; do Carmo M. P.; Kobayashi S. Minimal submanifolds of the sphere with second fundamental form of constant length. *Funcional Analysis and Related Fields*, Berlin: Springer, p. 59-75, 1970.

[5] do Carmo, M. P. *Geometria Riemanniana.* Rio de Janeiro; IMPA, 2008. (Projeto Euclides)

[6] —. *O Método do referencial móvel.* Rio de Janeiro: IMPA, 2009. (Publicações Matemáticas)

[7] Hadamard, J. Les surfaces à courbure opposées et leurs lignes géodésiques. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, v. 4, p. 27-74, 1898.

[8] Hasanis, Th.; Savas-Halilaj, A.; Vlachos, Th. Minimal hypersurfaces with zero Gauss-Kronecker curvature. *Illinois Journal of Mathematics*, v. 49, p. 523-528, 2005.

[9] —. Complete minimal hypersurfaces in the hyperbolic space $\mathbb{H}^4$ with vanishing Gauss-Kronecker. *Transactons of the American Mathematical Society*, v. 359, p. 2799-2818, 2007.

[10] —. Complete minimal hypersurfaces in $\mathbb{S}^4$ with zero Gauss-Kronecker curvature. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, v. 142, p. 125-132, 2007.

[11] Lawson, B. Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces. *Annals of Mathematics*, v. 88, p. 62-105, 1986.

[12] Lee, J. M. *Introduction to smooth manifolds.* Nova Iorque: Springer Verlag, 2003.

[13] —. *Riemannian manifolds: an introduction to curvature.* Nova Iorque: Springer Verlag, 1997.

[14] Omori, H. Isometric immersions of Riemannian manifolds. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, v. 19, p. 205-214, 1967.

[15] O'Neill, B. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity.* Londres: Academic Press, 1983.

[16] Yau, S. T. Harmonic functions on complete Riemannian manifolds. *Communications on Pure and Applied Mathematics,* v. 28, p. 201-228, 1975.