Ivan Carneiro Jardim

Promediação dos campos gravito-eletromagnéticos na aproximação pós-newtoniana

Fortaleza

26 de Outubro de 2007

Ivan Carneiro Jardim

Promediação dos campos gravito-eletromagnéticos na aproximação pós-newtoniana

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física

Orientador:
Ricardo Renan Landim de Carvalho

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARA - DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Fortaleza

26 de Outubro de 2007

Ivan Carneiro Jardim

Promediação dos campos gravito-eletromagnéticos na aproximação pós-newtoniana

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física

Aprovada em 26 de Outubro de 2007

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho
(Orientador)
Universidade Federal do Ceará

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida
Universidade Federal do Ceará

Prof. Dr. Marcio André de Melo Gomes
Centro Federal de Educação Tecnológica do Ceará

À minha família

Agradecimentos

Ao professor Ricardo Renan Landim de Carvalho tanto por ter me orientado durante esse trabalho como pelo empenho demonstrado na nossa formação.

Ao professor Carlos Alberto dos Santos Almeida pelo apoio.

Aos professores da pós-graduação do departamento de física da UFC, em especial aos professores Renan, Carlos Alberto, Murilo e Nilson Senna (professor visitante) pelas disciplinas que cursei.

Aos colegas do Laboratório de Simulação de Sistemas Coerentes (LASSCO).

Aos funcionários do departamento de física da UFC que sempre estão dispostos a nos atender.

À minha família, tanto a que eu nasci como a que me acolheu.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho é feito um estudo da gravidade através de equação de Einstein utilizando a aproximação pós-newtoniana, que é um método de linearizá-la indicado para objetos se movendo não-relativisticamente. Mostra-se que com essa aproximação é possível se construir, com os elementos independentes do tensor métrico, campos regidos por equações semelhantes às de Maxwell quando fixado o gauge de Lorentz. Finalmente calculamos a promediação de tais campos para sistemas do tipo sistemas solares, o que nos permite a definição de campos efetivos em grande escala.

Abstract

In this work a study of the gravity is made using Einstein equation in the post-Newtonian approach. This method makes the equation linear and is used to treat non-relativistic objects. It enables us to construct, from metric-independent elements, fields that are governed by equations similar to the Maxwell ones in Lorentz gauge. Finally we promediate the fields for solar systems, what allows a large-scale definition for effective fields.

Sumário

Notação

Índices latinos como i, j, k por exemplo, variam sobre os três índices de coordenadas espaciais, usualmente, $1, 2, 3$ ou x, y, z.

Índices gregos como α, β, γ entre outros correm sobre os quatro índices de espaço-tempo num sistema de coordenadas inerciais, $0, 1, 2, 3$ ou t, x, y, z.

Índices gregos como $\mu, \nu, \lambda, \kappa$ por exemplo correm sobre os quatro índices de um sistema de coordenadas gerais.

Os sistemas de coordenadas inerciais são, geralmente, representados por ξ^α e os sistemas gerais por x^μ.

A métrica em um sistema de coordenadas inercial é a de Minkowski representada por $\eta_{\alpha\beta}$ cuja diagonal é $-1, +1, +1, +1$.

Tri-vetores cartesianos são representados com uma seta em cima, e os tensores em negrito.

Será adotada a convenção de Einstein da soma, ou seja, índices repetidos indicam uma soma implícita.

A velocidade da luz é tomada como a unidade.

INTRODUÇÃO

A teoria da gravitação tem início com Isaac Newton (1642-1727) quando, nos *Principia* (1), ele a descreve como a causa que mantém o sol e os planetas ligados. Esse foi um grande passo no sentido da universalização da física, pois agora ela colocava um fim no conceito de esfera lunar aristotélica[1] e abordava todo o universo com a mesma teoria. A gravitação newtoniana gerava ótimos resultados, mas um aspecto da teoria newtoniana parecia insatisfatório, a natureza da força gravitacional.

Uma formulação mais concreta desta dificuldade só pode ser elaborada com o advento da relatividade especial em 1905, formulada por Albert Einstein (1879-1955). Como resultado dessa teoria qualquer interação só poderia se propagar a uma velocidade inferior ou igual a velocidade da luz, o que tornou mais aparente o problema da natureza da gravidade, pois esta era, na teoria newtoniana, instantânea. Isto motivou Einstein a construir uma nova teoria da gravitação, respeitando a estrutura de relatividade especial, a teoria da relatividade geral em 1916. Esta teoria trazia de imediato a resposta ao problema de Newton, a gravidade era a curvatura do espaço-tempo.

Com tais explicações muitos físicos abandonaram o estudo da gravitação, até que devido as observações astronômicas feitas entre as décadas de 60 a 80, como as estrelas de nêutrons e a expansão do universo, reacenderam o interesse por tal área. Diante de inúmeros dados observacionais os astrofísicos perceberam que precisavam aprimorar o estudo da gravitação para lidarem com os fenômenos recém observados.

Devido ao fato de que somente são conhecidas duas interações de longo alcance, a gravitação e o eletromagnetismo, surgiu a idéia que poderia haver alguma relação entre ambos e a descoberta desse vínculo poderia contribuir para uma melhor compreensão da gravidade, principalmente no sentido da quantização desta, já que o eletromagnetismo é quantizável.

Michel Faraday (1791-1867) na metade do século XIX foi, ao que parece, o primeiro a imaginar que a gravitação e o eletromagnetismo teriam alguma relação entre si. Ape-

[1] Aristóteles dividia o universo no mundo sub-lunar(corruptível, imperfeito) e o mundo supra-lunar (eterno, perfeito e imutável).

sar das experiências realizadas por Faraday terem sido de fundamental importância para o desenvolvimento do eletromagnetismo, ele não conseguiu encontrar nenhuma relação com a gravidade. Mesmo os resultados negativos das experiências neste sentido não abalaram a profunda convicção de Faraday a respeito da existência desse vínculo. Quando Maxwell (1831-1879) publicou o trabalho no qual demonstrava que os fenômenos elétricos e magnéticos eram manifestações de um mesmo campo, o eletromagnético, surgiu a ambição de unificar esses fenômenos com os gravitacionais, descrito até então pela teoria newtoniana. Após a reformulação da gravidade em 1916 por Einstein as tentativas de unificar as interações de longo alcance tomaram um novo rumo e em 1918 Weyl (2) publicou um trabalho no qual propunha modificar a conexão métrica da relatividade geral por outra na qual o campo eletromagnético estaria contido, o que, do ponto de vista matemático, significava abandonar a geometria riemanniana. Outra tentativa de modificar a geometria de modo a unificar as duas interações foi proposta por Kaluza (3) em 1921. A proposta de Kaluza consistia em manter a geometria riemanniana, mas incluir mais uma dimensão espacial, à qual ele não associava um sentido físico direto. O próprio Einstein convenceu-se que deveria existir tal relação e dedicou os últimos anos de sua vida à busca da chamada teoria de campo unificado.

Apesar de todas as tentativas frustradas de unificação feitas por grandes nomes da ciência persiste a crença que tal conexão existe.

Neste trabalho mostramos mais uma face dessa relação entre o campo gravitacional e o eletromagnético. Não pretendemos aqui tentar unificar os campos mais sim demonstrar que em certas condições podemos construir campos gravitacionais que são regidos por equações idênticas as do eletromagnetismo, e a liberdade da teoria de Einstein recai na liberdade da teoria de Maxwell. A fixação de tal liberdade é quem determina que a velocidade de propagação da informação é a da luz.

Obteremos nesse trabalho campos médios cosmológicos considerando a matéria organizada em sistemas locais - tipo sistemas solares - em oposição ao que foi feito por Friedmann (4) onde se considera a matéria igualmente distribuída, e se obtém uma solução satisfatória em grande escala - maior que as consideradas nesse trabalho.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma:

No capítulo 1 iremos fazer uma introdução às idéias da relatividade geral. Seguimos uma linha de indagações e experimentos teóricos que irá nos mostrar a incompatibilidade teórica entre a teoria newtoniana da gravidade com o eletromagnetismo e que irá nos guiar à uma nova teoria da gravitação através do estudo do movimento acelerado, relacionandoo com a curvatura do espaço-tempo.

No capítulo 2 usaremos o guia apresentado no capítulo 1 de forma a incluir os efeitos da gravidade na estrutura da relatividade especial, demonstrando que o potencial gravitacional é o tensor métrico. Estudaremos o problema da curvatura, pois é ela quem nos permite construir uma equação de campo para a gravitação, a equação de Einstein. E finalmente ressaltaremos a liberdade inerente à teoria, a covariância geral, o que nos permite fixar um sistema de coordenadas, de forma análoga ao eletromagnetismo que possui a liberdade de gauge. Iremos ainda definir um sistema de coordenadas através da condição de coordenadas harmônicas que nos permitirá uma grande simplificação na linearização da equação de campo.

No terceiro capítulo apresentaremos um método para linearizar a equação de Einstein conhecida como aproximação pós-newtoniana. Ela consiste em expandir o tensor métrico em série de potências da velocidade média em torno da métrica de Minkowski. Este método é interessante para estudar a trajetória das partículas em um campo gravitacional gerado por matéria não-relativística, onde $\bar{v} \ll 1$. Escolhemos usar essa aproximação porque iremos aplicá-la a sistemas do tipo sistemas solares, onde a matéria é não-relativística, o que é indicado pelos bons resultados experimentais obtidos com o uso da mecânica newtoniana.

No quarto capítulo utilizaremos os quatro elementos independentes da métrica obtidos na aproximação tomada no capítulo anterior para associá-los aos quatro termos independentes do quadri-potencial eletromagnético A^{μ}. Mostraremos que a condição de coordenadas harmônicas não satisfeita trivialmente se reduz ao gauge de Lorentz. Desta forma definiremos os campos gravito-eletromagnéticos da mesma forma que no eletromagnetismo quando fixado o gauge de Lorenz. Finalmente calcularemos o campo médio em uma distribuição de matéria concentrada em sistema solares considerando a dimensão destes muito menores que as dimensões consideradas, de modo a expandi-los em multipolos. Desta forma poderemos definir os campos efetivos cosmológicos com tal distribuição de matéria.

Esse trabalho conta com um apêndice no qual aplicamos a aproximação pós-newtoniana para obtermos a métrica, em coordenadas harmônicas, para o problema de dois corpos puntiformes fixos. Em seguida calculamos os campos gravito-eletromagnéticos para tal distribuição de matéria.

1 FUNDAMENTOS DA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

Neste primeiro capítulo iremos fazer uma introdução às idéias básicas da relatividade geral. Iniciaremos analisando a incompatibilidade teórica de duas teorias bem fundamentadas e verificadas experimentalmente, e a solução que Einstein encontrou, em 1905, formulando assim a teoria da relatividade especial. Porém o próprio Einstein percebeu que esta nova teoria conflitava com outra bem estabelecida teoria, a gravitação de Newton. Estava aí a necessidade de uma nova teoria, a relatividade geral. Veremos os princípios e fundamentos dessa teoria, como ela conecta o movimento acelerado à gravidade e como ela altera a geometria do espaço-tempo.

1.1 A teoria da relatividade especial

Em junho de 1905, Albert Einstein apresentou um artigo técnico aos Anais da Física (5), no qual ele se defrontou com um paradoxo a respeito da luz que o fascinava desde a adolescência. O paradoxo que o perturbou por 10 anos era o seguinte.

Em meados do século XIX, depois de estudar atentamente o trabalho experimental do físico inglês Michael Faraday, o físico escocês James Clerk Maxwell conseguiu unificar a eletricidade e o magnetismo por meio do campo eletromagnético. Além de unir todos os fenômenos elétricos e magnéticos em um esquema matemático único, a teoria de Maxwell demonstrou - inesperadamente - que os pulsos eletromagnéticos se deslocam a uma velocidade constante e imutável, a velocidade da luz. A partir daí, Maxwell concebeu a idéia de que a própria luz é um tipo específico de onda eletromagnética.

Porém a mecânica newtoniana não privilegiava nenhum sistema inercial, sendo as relações de um sistema com outro dado pelas transformações de Galileu. Ou seja, a equação de movimento - a segunda lei de Newton - possui a mesma forma quando escrita em termos de um novo conjunto de coordenadas do tipo

$$\vec{x}\,' = R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{d},$$

$$t' = t + \tau,$$

onde $\vec{v}$, $\vec{d}$ e τ são quaisquer constantes reais, e R é qualquer matriz real e ortogonal. As transformações acima formam um grupo de 10 parâmetros chamado de Grupo de Galileu [1]. Uma conseqüência imediata desta invariância é a inexistência do movimento absoluto.

Unindo esses dois elementos está formado o paradoxo, pois claramente a eletrodinâmica de Maxwell não possui a mesma invariância, já que a velocidade da luz independe do referencial.

No artigo citado, Einstein propõe que as transformações de Galileu sejam substituidas por outra transformação espaço-temporal de 10 parâmetros, as transformações de Lorentz

$$\vec{x}\,' = \frac{\vec{x} - \vec{v}t}{(1 - v^2)^{1/2}},$$

$$t' = \frac{t - \vec{v}.\vec{x}}{(1 - v^2)^{1/2}}.$$

Estas transformações foram desenvolvidas e demonstradas por Lorentz(6)(7) com base no experimento de Michelson-Morley(8) e deixam as equações de Maxwell e a velocidade da luz invariantes. Como a mecânica Newtoniana não era invariante sob o grupo de Lorentz, Einstein teve que modificar a lei de movimento de modo a obedecer esta nova invariância[2]. Com essa mudança Einstein mudou as concepções habituais de espaço e tempo, que em 1908 foi unificado por Minkowski em uma estrutura conhecida como continum quadridimensional de espaço-tempo(9), construindo assim a Teoria da Relatividade Especial.

1.2 Questões levantadas pela relatividade especial

Por meio da relatividade especial, Einstein resolveu o conflito entre a mecânica de Newton e a eletrodinâmica de Maxwell. O resultado foi a alteração da mecânica clássica pela mecânica relativística, criando assim um esquema matemático capaz de descrever todas as leis físicas, e não só as leis da mecânica, em qualquer sistema inercial. Mas o problema se tornou o mesmo da época de Newton. Uma questão fundamental ainda

[1] A invariância das leis da mecânica à estas transformações é chamada de Invariância de Galileu, ou Princípio da Relatividade de Galileu.

[2] A invariância das leis da física à estas transformações é chamada de Invariância de Lorenz, ou Princípio da Relatividade Especial.

não foi resolvida: existe um sistema inercial? [3] Sabemos sobre as leis da natureza, sua invariabilidade com respeito à transformação de Lorentz e sua validade para todos os sistemas inerciais movendo-se uniformemente uns em relação aos outros. Temos as leis, mas não conhecemos a estrutura à qual referi-las.

Outra questão levantada pela relatividade especial é que como resultado das transformações de Lorentz nenhum sinal pode se propagar com velocidade superior à da luz. A interação eletromagnética satisfaz esta condição, entretanto ela não é satisfeita pela descrição newtoniana da gravidade. Nesta teoria um corpo exerce atração gravitacional sobre outro com uma intensidade determinada apenas pela massa dos objetos envolvidos e pela distância que os separa. Essa intensidade não depende do tempo que os objetos fiquem na presença um do outro. Ou seja, se a massa ou a distância se modificarem os objetos sentirão instantaneamente a mudança ocorrida na sua interação gravitacional. Embora faça previsões precisas a respeito do movimento dos corpos que sofrem a influência da gravidade, a gravitação newtoniana não oferece qualquer informação quanto à natureza dessa força. Newton estava bem consciente das limitações de sua teoria, em suas próprias palavras

"Que a gravidade seja algo inato, inerente e essencial à materia, de tal maneira que um corpo possa agir sobre outro à distância através do vácuo e sem a medição de qualquer outra coisa que pudesse transmitir a sua força, é, para mim, absurdo tão grande que não creio que possa existir um homem capaz de pensar com competência em matérias filosóficas e nele incorrer."(1)

As duas questões acima levantadas parecem completamente independentes, mas o princípio da equivalência formulado por Einstein em 1907 nos revela que estes dois problemas, o da gravidade e o dos sistemas não-inerciais, estão intimamente ligados.

1.3 O princípio da equivalência

O princípio da equivalência se baseia na igualdade entre a massa gravitacional[4] e a massa inercial [5], vista na mecânica newtoniana como uma coincidência, que foi verificada

[3]Esse problema foi estudado por Ernst Mach em 1880 e sua hipótese que a distribuição de matéria do universo influenciaria na determinação dos sistemas inerciais ficou conhecida como princípio de Mach. De forma que um sistema inercial seria aquele fixo no centro de massa do universo ou se movendo com velocidade constante em relação a este ponto.

[4]Massa gravitacional é a carga de força gravitacional, como o corpo interage gravitacionalmente. É a massa que aparece na lei da gravitação de Newton.

[5]Massa inercial é uma medida da inércia do corpo, como ele reage a uma força. É a massa que aparece na segunda lei de Newton.

por Galileu, Huygens, Newton, Bessel e Eötvös (este último chegando a uma precisão de uma parte em 10^9)(10). Einstein percebeu que, como conseqüência, um campo gravitacional externo, estático e homogêneo não pode ser detectado por um observador em queda livre, pois tanto o observador quanto seus corpos de prova respondem ao campo gravitacional com a mesma aceleração. Isso é fácil de ser provado para um sistema de partículas, movendo com velocidades não relativísticas sob a influência de forças internas, $\vec{F}(\vec{x}_n - \vec{x}_m)$, e um campo gravitacional externo $\vec{g}$. A equação de movimento para a n-ésima partícula é

$$m_n \frac{d^2\vec{x}_n}{dt^2} = m_n\vec{g} + \sum_m \vec{F}(\vec{x}_n - \vec{x}_m). \tag{1.1}$$

Realizando uma transformação não galileana de coordenas espaço-temporais

$$\vec{x}\,' = \vec{x} - \frac{1}{2}\vec{g}t^2, \qquad t' = t,$$

de modo que $\vec{g}$ será cancelado por uma força inercial, e a equação de movimento toma a forma

$$m_n \frac{d^2\vec{x}_n'}{dt^2} = \sum_m \vec{F}(\vec{x}_n' - \vec{x}_m').$$

O observador original O que usa as coordenadas $\vec{x}$ e t, e o observador em queda livre O' que usa $\vec{x}\,'$ e t', não detectarão nenhuma diferença nas leis da mecânica, exceto pelo fato de que O dirá que sente um campo gravitacional, enquanto O' não o sentirá. O princípio da equivalência diz que esse cancelamento da força gravitacional com a força inercial será obtida para todos os sistemas em queda livre, sendo ou não descritos por equações simples como a (1.1).

Embora as forças inerciais não cancelem exatamente as forças gravitacionais para um sistema em queda livre em um campo gravitacional não-homogêneo ou dependente do tempo, podemos esperar um cancelamento aproximado se restringirmos nossa atenção em uma pequena região do espaço e do tempo de modo que o campo possa ser tomado como constante nessa região. Podemos, então, formular o princípio da equivalência da forma: para todo ponto do espaço-tempo em um campo gravitacional arbitrário é possível escolher um sistema local de coordenadas inerciais de modo que, na região infinitamente pequena do ponto em questão, as leis da natureza tomam a mesma forma que em um sistema cartesiano de coordenadas não acelerado na ausência da gravidade.

Essa descrição completa o trabalho iniciado pela relatividade especial. Através do princípio da relatividade, a teoria da relatividade especial estabelece a equivalência dos pontos de vista observacionais: as leis da física são idênticas para todos os observadores que se movem a velocidades constantes. Mas essa é uma equivalência limitada pois exclui todos os referenciais acelerados. O princípio da equivalência mostra-nos como abarcar todos os pontos de vista em um só sistema igualitário. Não há diferença entre um ponto de vista acelerado sem campo gravitacional e um ponto de vista não acelerado com campo gravitacional. Podemos, então, invocar o mesmo princípio e declarar que todos os observadores, independentemente do seu estado de movimento, podem-se considerar estacionários, desde que incluam um campo gravitacional adequado na descrição do ambiente que os envolve.

A descoberta desse vínculo profundo entre a gravidade e o movimento acelerado é a chave para o entendimento da gravidade. A razão é que esta é misteriosa, é uma grande força, presente em toda a vida do cosmos, mas é fugidia e etérea. Por outro lado, o movimento acelerado, embora mais complicado que o movimento uniforme, é concreto e tangível. Ao encontrar um nexo fundamental entre ambos, Einstein verificou que poderia usar o conhecimento do movimento como um instrumento poderoso para alcançar o conhecimento da gravidade. Para chegar a esse objetivo é necessário estabelecer um segundo elo na cadeia que une a gravidade e o movimento acelerado: a curvatura do espaço e do tempo, que agora vamos considerar.

1.4 A aceleração e a curvatura do espaço-tempo

Verificaremos, agora, como os referenciais não inerciais descrevem os eventos. Nos concentraremos, por simplicidade, no movimento circular uniforme. Consideremos dois observadores A e B, como mostra a figura 1, de modo que o observador A irá medir o raio do círculo enquanto o B irá medir a circunferência. Quando B for fazer a sua medida, sua régua sofrerá a contração de Lorentz, prevista pela relatividade especial. De modo que ele obterá um resultado maior que o obtido por um observador estacionário. Mas o mesmo não ocorre com o observador A pois o seu instrumento de medida estará perpendicular ao movimento, não sofrendo a contração de Lorentz, e obterá o mesmo valor de um observador estacionário. De modo que a razão da circunferência pelo raio dará maior que 2π para os observadores sobre o disco, já que para o observador em repouso é valida a geometria euclidiana. Concluímos então que no movimento acelerado não é valida a geometria euclidiana, logo, pelo princípio da equivalência, na presença de um campo gravitacional também não o é. Como tal geometria só é valida num espaço plano a conclusão de Einstein foi que a gravidade curva o espaço.[6] Discutimos apenas um tipo

[6] Na verdade a gravidade é a curvatura do espaço-tempo.

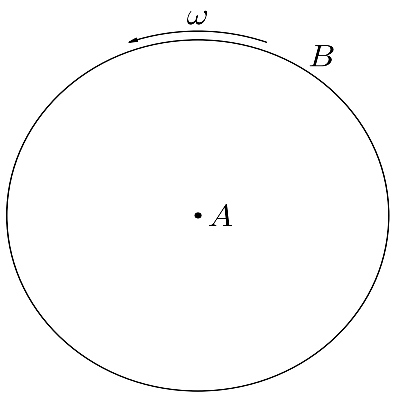

Figura 1: Disco Rígido em Rotação

particular de movimento acelerado, mas Einstein mostrou que para todas as instâncias de movimento acelerado verifica-se um resultado similar: a curvatura do espaço.

A relatividade especial já abolira o espaço e o tempo como entidades separadas, como disse Minkowski em 1908: "Daqui em diante, o espaço e o tempo, como categorias separadas, se converterão em meras sombras, e apenas a união entre ambos se manterá como conceito independente". De modo que devemos esperar que o movimento acelerado também curve o tempo[7]. Mas o que significa tempo curvo?

Para responder a essa pergunta voltemos ao exemplo acima. Agora o observador B e o observador A estão munidos de relógios. O observador A irá, no sentido radial, se dirigir a B. De acordo com a relatividade especial quanto maior for a velocidade de um observador mais devagar o tempo passa para ele, de modo que o relógio de B anda mais devagar que o de A, mas a medida que este se afasta do centro do círculo o ritmo do seu relógio vai diminuindo, até que, quando encontrar B os ritmos serão iguais.

De modo que o tempo é curvo se o ritmo da sua passagem difere de um lugar para outro.

Vemos do exemplo que quanto maior a aceleração mais vagarosa é a passagem do tempo, ou seja, mais acentuada é a curvatura do tempo. Pelo princípio da equivalência concluímos que quanto mais forte for o campo gravitacional maior é a curvatura do espaço-tempo.

[7]Historicamente Einstein chegou primeiro a curvatura do tempo pelo deslocamento para o vermelho de um pulso eletromagnético em um campo gravitacional não uniforme(11).

2 A TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

Neste capítulo iremos utilizar os fundamentos conceituais desenvolvidos no capítulo anterior para dar forma matemática à relatividade geral. Iniciaremos incluindo os efeitos da gravidade na estrutura formada pela relatividade especial, através do princípio da equivalência. Em seguida abordaremos o problema matemático da curvatura do espaço-tempo, para desenvolver as ferramentas necessárias para a construção de uma equação para o campo gravitacional, a equação de Einstein.

2.1 Forças gravitacionais

Para introduzirmos os efeitos da gravidade na equação de movimento consideremos uma partícula movendo-se livremente sobre a influência somente de forças gravitacionais. De acordo com o princípio da equivalência, num sistema em queda livre ξ^α cuja a equação de movimento é dada pela relatividade especial

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \tau^2} = 0, \tag{2.1}$$

onde $d\tau$ é o tempo próprio

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta. \tag{2.2}$$

Agora tomemos um outro sistema de coordenadas quaisquer x^μ. De modo que as coordenadas em queda livre ξ^α são funções de x^μ, e a (2.1) nos dá

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) \\ &= \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}. \end{aligned}$$

Multiplicando essa expressão por $\partial x^\lambda/\partial\xi^\alpha$, e usando a conhecida regra do produto

$$\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial\xi^\alpha}=\delta^\lambda_\mu,$$

obtemos a equação de movimento

$$0=\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2}+\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}, \tag{2.3}$$

onde $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ é a conexão afim, definida por

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\equiv\frac{\partial x^\lambda}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu}. \tag{2.4}$$

O tempo próprio (2.2) pode ser expresso em um sistema de coordenadas arbitrário

$$d\tau^2=-\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}dx^\mu\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}dx^\nu,$$

ou

$$d\tau^2=-g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \tag{2.5}$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico, definido por

$$g_{\mu\nu}\equiv\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}. \tag{2.6}$$

2.2 A conexão afim $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$

Comparando a equação de movimento para um referencial com gravidade (2.3) e a equação para um referencial em queda livre (2.1) observamos que a conexão afim $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ é que determina a força gravitacional, enquanto que o intervalo de tempo próprio entre dois eventos é determinado pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$.

Vamos inicialmente mostrar que $g_{\mu\nu}$, é o potencial gravitacional; ou seja, suas derivadas determinam o campo $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$. Para tal diferenciaremos o tensor métrico, dado por (2.6), com respeito a x^λ, obtendo

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}=\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\lambda\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta}+\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial^2\xi^\beta}{\partial x^\lambda\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta}.$$

Utilizando a definição (2.4) e em seguida a (2.6)

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} &= \Gamma^\rho_{\lambda\mu}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\rho}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta}+\Gamma^\rho_{\lambda\nu}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\rho}\eta_{\alpha\beta}\\ &= \Gamma^\rho_{\lambda\mu}g_{\rho\nu}+\Gamma^\rho_{\lambda\nu}g_{\rho\mu}.\end{aligned}$$

Somando-se a esta equação a mesma com os índices μ e λ trocados e subtraindo a mesma com ν e λ invertidos encontramos[1]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} &= g_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\mu} + g_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\lambda\nu} + g_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\mu\lambda} + \\
&\quad + g_{\rho\lambda}\Gamma^\rho_{\mu\nu} - g_{\rho\lambda}\Gamma^\rho_{\nu\mu} - g_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\nu\lambda} \\
&= 2g_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\mu}.
\end{aligned}$$

Multiplicando essa última equação por $g^{\nu\sigma}$[2] obtemos finalmente

$$\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right]. \tag{2.7}$$

Convém observarmos que a conexão afim não é um tensor, pois quando passamos de x^μ para um sistema diferente x'^μ, ela se transforma, de acordo com (2.4), da forma

$$\begin{aligned}
\Gamma'^\lambda_{\mu\nu} &\equiv \frac{\partial x'^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \right) \\
&= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \left[\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\tau \partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \right].
\end{aligned}$$

Novamente pela definição da conexão afim

$$\Gamma'^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma^\rho_{\tau\sigma} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}. \tag{2.8}$$

O primeiro termo do lado direito é o que se esperaria obter se $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ fosse um tensor; mas como o segundo termo é não-homogêneo, a conexão não é um tensor.

2.3 O limite newtoniano

Para obtermos maiores informações sobre essa nova descrição da gravidade vejamos como os seus efeitos, introduzidos na equação de movimento pela conexão afim, se comportam no domínio de validade da teoria newtoniana. Para tal temos que considerar o caso em que as partículas se movem lentamente (em comparação com a velocidade da luz) em um campo gravitacional fraco. Se as partículas se movem suficientemente devagar,

[1] Lembrando que $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$ são simétricos na troca dos índices μ e ν.

[2] Onde $g^{\nu\sigma}$ é a inversa de $g_{\nu\sigma}$, ou seja

$$g^{\nu\sigma} g_{\nu\rho} = \delta^\sigma_\rho,$$

definida por

$$g^{\nu\sigma} \equiv \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\beta}.$$

poderemos desprezar $dx/d\tau$ frente a $dt/d\tau$, e escrever (2.3) como

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right) = 0.$$

Sendo o campo estacionário, todas as derivadas temporais de $g_{\mu\nu}$ são nulas, de modo que

$$\Gamma^\mu_{00} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu}.$$

Finalmente, se o campo é fraco, poderemos escolher um sistema de coordenadas próximo ao minkowskiano no qual

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \qquad |h_{\alpha\beta}| \ll 1.$$

Em primeira ordem em $h_{\alpha\beta}$,

$$\Gamma^\alpha_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\beta}. \tag{2.9}$$

Que substituído na equação de movimento (2.3) dá

$$\frac{d^2\vec{x}}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \nabla h_{00},$$

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0.$$

Como a solução da segunda equação é $dt/d\tau$ constante, então podemos escrever a primeira como

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{1}{2}\nabla h_{00}.$$

O resultado newtoniano correspondente é

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\nabla\phi.$$

Onde ϕ é o potencial gravitacional. Comparando os dois resultados concluímos que

$$h_{00} = -2\phi.$$

A constante aditiva foi feita zero pois a métrica deve ser minkowskiana a grandes distâncias, ou seja h_{00} deve ir a zero. De modo que

$$g_{00} = -(1 + 2\phi). \tag{2.10}$$

O potencial gravitacional ϕ é da ordem de 10^{-39} na superfície de um próton, 10^{-9} na da terra, 10^{-6} na do sol e 10^{-4} na das estrelas anãs brancas(12). Se torna evidente que as distorções em $g_{\mu\nu}$ produzidas pela gravitação são, geralmente, muito pequenas.

2.4 O princípio da covariância geral

Nas seções anteriores nós usamos o princípio da equivalência para obter os efeitos da gravidade em sistemas físicos de acordo com o seguinte método: escrevemos as equações que precisamos em um sistema de coordenadas localmente inercial, de acordo com a relatividade especial, e realizamos uma transformação de coordenadas para encontrar as equações correspondentes em um sistema de coordenadas geral. Poderíamos continuar com este método, mas ele se demonstra muito trabalhoso quando, por exemplo, aplicado as equações de campo para o eletromagnetismo e para a gravidade. Em vez disso, usaremos um método diferente, com o mesmo conteúdo físico, mas muito mais elegante na aparência e conveniente na execução. Esse método é baseado numa versão alternativa do princípio da equivalência, conhecido como Princípio da Covariância Geral. Ele garante que as equações físicas serão válidas em um campo gravitacional qualquer, se duas condições forem satisfeitas:

1. As equações devem ser satisfeitas na ausência da gravidade; ou seja, concordam com as leis da relatividade especial quando o tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ for igual ao tensor de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$ e a conexão afim $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ vai a zero.

2. As equações possuam covariância geral; ou seja, elas preservem a forma sob transformações de coordenadas gerais (não só transformações de Lorentz) $x \to x'$.

Para vermos que o princípio da covariância geral é um versão do princípio da equivalência, suponha que exista um campo gravitacional arbitrário, e considere qualquer equação que satisfaça essas duas condições. De acordo com a condição 2, essa equação será verdadeira em todos os sistemas de coordenadas se o for em um deles. Porém em qualquer ponto dado existe um classe de sistemas, os sistemas localmente inerciais, nos quais os efeitos da gravidade estão ausentes. A condição 1 nos diz que a nossa equação é válida nesse sistema, e conseqüentemente em todos os sistemas de coordenadas.

De acordo com a segunda condição as equações devem ser invariantes sobre transformações de coordenadas quaisquer; ou seja, devem ser escalares perante essas transformações. Podemos construir escalares pela contração de tensores, porém veremos agora que a derivada de um tensor geralmente não é um tensor, assim, para satisfazer essa condição precisaremos de uma nova derivada, que será trabalhada agora.

2.4.1 A derivada covariante

Consideremos um vetor contravariante V^μ, que obedece à seguinte lei de transformação

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu.$$

Derivando com respeito a x'^λ obtemos

$$\frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} V^\nu. \tag{2.11}$$

O primeiro termo do lado direito é o que se esperaria obter se $\partial V^\mu/\partial x^\lambda$ fosse um tensor; o segundo termo é o que destrói o comportamento tensorial.

Apesar de $\partial V^\mu/\partial x^\lambda$ não ser um tensor, podemos usa-lo para construir um. Usando (2.8) observamos que

$$\begin{aligned}
\Gamma'^\mu_{\lambda\kappa} V'^\kappa &= \left[\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\kappa}\Gamma^\nu_{\rho\sigma} - \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\kappa}\right]\frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\tau} V^\tau \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda}\Gamma^\nu_{\rho\sigma} V^\sigma - \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} V^\sigma.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Somando (2.11) à (2.12) o termo não homogêneo se cancelará, de modo que a quantidade

$$\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\kappa} V^\kappa$$

se transformará como um tensor. O que nos permite definir a derivada covariante de um vetor contravariante

$$V^\mu{}_{;\lambda} \equiv \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\kappa} V^\kappa. \tag{2.13}$$

O procedimento análogo para um vetor covariante V_μ nos permite definir a derivada covariante de um tensor covariante

$$V_{\mu;\lambda} \equiv \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\lambda} - \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} V_\kappa. \tag{2.14}$$

Essa definição pode ser estendida facilmente para um tensor geral.

A derivada covariante com respeito a x^ρ de um tensor é igual a sua derivada ordinária com respeito a x^ρ, adicionando para cada índice contravariante μ um termo com $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ vezes o tensor com μ renomeado por ν e subtraindo para cada índice covariante λ um termo com $\Gamma^\kappa_{\lambda\rho}$ vezes o tensor com λ trocado por κ. Por exemplo

$$T^{\mu\sigma}_{\lambda}{}_{;\rho} = \frac{\partial}{\partial x^\rho} T^{\mu\sigma}_{\lambda} + \Gamma^\mu_{\rho\nu} T^{\nu\sigma}_{\lambda} + \Gamma^\sigma_{\rho\nu} T^{\mu\nu}_{\lambda} - \Gamma^\kappa_{\lambda\rho} T^{\mu\sigma}_{\kappa}.$$

A derivada covariante possui propriedades semelhantes à derivada ordinária, dentre elas a de ser um operador linear e de gozar da regra de Leibniz do produto. Outro resultado importante é que a derivada covariante da métrica é nula, ou seja:

$$g_{\mu\nu;\lambda} = 0. \tag{2.15}$$

Mas a principal importância da derivada covariante reside em duas das suas propriedades: ela converte tensores em outros tensores, e se reduz a derivada ordinária na ausência da gravidade, ou seja, quando $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = 0$. Essas propriedades sugerem o seguinte algoritmo para incluir os efeitos da gravidade em sistemas físicos: escrever as equações de acordo com a relatividade especial, que são válidas na ausência da gravidade, substituir $\eta_{\mu\nu}$ por $g_{\mu\nu}$ e todas as derivadas por derivadas covariantes. As equações resultantes possuirão covariância geral e serão corretas na ausência da gravidade, e de acordo com o princípio da covariância geral, elas serão válidas na presença do campo gravitacional.

2.5 O tensor de curvatura

Vimos no primeiro capítulo que a gravidade está ligada à curvatura do espaço-tempo. Assim, para prosseguirmos com o nosso programa de construir uma equação de campo para gravidade devemos abordar o problema puramente matemático da curvatura, que foi desenvolvido, dentre outros, por Gauss e Riemann. Como mostrado na sessão 2.2, o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é o potencial gravitacional. Então vamos investigar quais são os tensores que podem ser formados com ele e suas derivadas. Mas como mostra a equação (2.15) não podemos usar a derivação covariante da métrica para obter tal tensor. Se usarmos apenas $g_{\mu\nu}$ e suas derivadas primeiras, nenhum novo tensor poderá ser construído, pois, para um dado ponto, é possível encontrar um sistema de coordenadas no qual as derivadas primeiras da métrica sejam nulas. Então neste sistema de coordenadas o tal tensor será um dos que podem ser formados somente pelo tensor métrico ou pelo seu determinante. Como esta é uma igualdade entre tensores ela deverá ser válida em todos os sistemas coordenados. O próximo passo é tentar construir um tensor com as derivadas segundas da métrica. Como não podemos aplicar a derivada covariante duas vezes nela, a aplicaremos em um vetor qualquer V^{λ}, o que nos leva ao tensor de terceira ordem

$$\begin{aligned} V^{\lambda}{}_{;\nu\mu} &= \frac{\partial^2 V^{\lambda}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}\frac{\partial V^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}\frac{\partial V^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\frac{\partial V^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} + \\ &+\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma}V^{\sigma} + \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}}V^{\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}V^{\sigma}. \end{aligned}$$

Os termos com derivadas de V^λ não permitem que encontremos tal tensor, mas por sorte esses termos são simétricos na troca dos índices μ por ν, de modo que podemos eliminá-los fazendo

$$V^\lambda{}_{;\nu\mu} - V^\lambda{}_{;\mu\nu} = \left[\frac{\partial\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho}\Gamma^\rho_{\mu\sigma}\right] V^\sigma.$$

Como o lado esquerdo dessa expressão é um tensor e V^σ é um vetor, então o termo entre colchetes também é um tensor. Observe que o simbolo de Christoffel $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ é formado somente pelo tensor métrico e suas derivadas primeiras, então o tensor

$$R^\lambda_{\sigma\nu\mu} \equiv \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho}\Gamma^\rho_{\mu\sigma} \tag{2.16}$$

é formado somente pela métrica e suas derivadas de até segunda ordem, e ainda é linear em suas derivadas segundas. Esse é o tensor procurado, conhecido como tensor de curvatura de Riemann-Christoffel, e foi demonstrado que é o único tensor com tais propriedades - ser formado pelo tensor métrico e suas primeiras e segundas derivadas, e ser linear nas derivadas segundas. Obviamente outros tensores podem ser formados usando $g_{\mu\nu}$ para formar combinações lineares de $R^\lambda_{\mu\nu\rho}$. Os que nos serão mais úteis são suas formas contraídas, o tensor de Ricci

$$R_{\mu\sigma} \equiv R^\lambda_{\mu\lambda\sigma},$$

e a curvatura escalar

$$R \equiv g^{\mu\sigma} R_{\mu\sigma}.$$

A importância matemática do tensor de Riemann-Christoffel é que em um sistema de coordenadas onde o tensor métrico é constante ele se anula, pois a própria conexão se anula. Então, devido o carater tensorial de $R^\lambda_{\mu\nu\rho}$, em um sistema arbitrário -onde a métrica provavelmente não será constante- ele também se anulará. A nulidade do tensor de Riemann-Christoffel é uma condição necessária -e também suficiente- para que $g_{\mu\nu}$ seja constante mediante uma escolha apropriada do sistema da referência. No problema da gravidade isso corresponde a conseguir a validade da teoria da relatividade especial num domínio finito mediante uma escolha conveniente do sistema de coordenadas.

2.5.1 A identidade de Bianchi

Iremos agora desenvolver uma identidade que nos será muito útil quando formos construir a equação de campo da gravidade. Vimos anteriormente que

$$V^\lambda{}_{;\mu\nu} - V^\lambda{}_{;\nu\mu} = R^\lambda_{\sigma\mu\nu} V^\sigma. \tag{2.17}$$

De modo que

$$V^{\lambda}{}_{;\mu\nu\rho} - V^{\lambda}{}_{;\nu\mu\rho} = R^{\lambda}_{\sigma\mu\nu;\rho} V^{\sigma} + R^{\lambda}_{\sigma\mu\nu} V^{\sigma}{}_{;\rho}. \tag{2.18}$$

Fazendo permutações cíclicas nos índices μ, ν e ρ obtemos as expressões

$$V^{\lambda}{}_{;\rho\mu\nu} - V^{\lambda}{}_{;\mu\rho\nu} = R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu;\nu} V^{\sigma} + R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu} V^{\sigma}{}_{;\nu}, \tag{2.19}$$

$$V^{\lambda}{}_{;\nu\rho\mu} - V^{\lambda}{}_{;\rho\nu\mu} = R^{\lambda}_{\sigma\nu\rho;\mu} V^{\sigma} + R^{\lambda}_{\sigma\nu\rho} V^{\sigma}{}_{;\mu}. \tag{2.20}$$

Lembrando que, pela própria equação (2.17), $R^{\lambda}_{\sigma\mu\nu}$ é anti-simétrico na troca dos índices μ por ν, então se fizermos (2.18) + (2.19) + (2.20) encontramos que

$$\left[R^{\lambda}_{\sigma\mu\nu;\rho} + R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu;\nu} + R^{\lambda}_{\sigma\nu\rho;\mu}\right] V^{\sigma} = 0.$$

Como a expressão acima de ver válida para todo V^{σ} então

$$R^{\lambda}_{\sigma\mu\nu;\rho} + R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu;\nu} + R^{\lambda}_{\sigma\nu\rho;\mu} = 0, \tag{2.21}$$

que é a identidade de Bianchi.

Devido à equação (2.15) podemos contrair λ com μ em (2.21) e obter

$$R_{\sigma\nu;\rho} - R_{\sigma\rho;\nu} - R^{\mu}_{\sigma\nu\rho;\mu} = 0,$$

e novamente contrair σ com ρ

$$R_{\sigma\nu}{}^{;\sigma} - R_{;\nu} + R_{\mu\nu}{}^{;\mu} = 0.$$

Ou seja, obtemos que

$$R_{\mu\nu}{}^{;\mu} = \frac{1}{2} R_{;\nu}. \tag{2.22}$$

2.6 A equação do campo gravitacional

Iremos agora construir uma equação de campo para a gravidade, pois até agora só conseguimos incluir os efeitos gravitacionais nos sistemas físicos através da métrica - que é o potencial gravitacional; porém não temos condições, até agora, de determiná-la. A procurada equação deverá, dentro do seu limite de validade, concordar com a equação de Poisson para o potencial gravitacional newtoniano

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho, \tag{2.23}$$

onde ρ representa a densidade de matéria. A teoria da relatividade especial levou à conclusão de que a massa inerte não é mais do que energia[3], cuja expressão matemática completa se encontra num tensor simétrico de segunda ordem - o tensor momento-energia $T^{\alpha\beta}$. Como foi demonstrado na seção 2.2, nesta nova teoria da gravitação o potencial gravitacional é dado pelo tensor métrico, de modo devemos substituir o potencial gravitacional newtoniano ϕ por $g_{\mu\nu}$. Como

$$\rho \simeq T_{00}$$

a equação (2.23) nos leva a crer que no limite newtoniano é válido

$$\nabla^2 g_{00} = kT_{00}, \tag{2.24}$$

que de acordo com o resultado obtido em (2.10) obtemos que

$$k = -8\pi G.$$

A equação de campo (2.24) é baseada na suposição que um campo fraco e estacionário é gerado pela matéria não-relativística, mas não é invariante de Lorentz da forma que está escrita. No entanto esta equação nos leva a supor que a equação de campo fraco para uma distribuição geral de energia e momento, $T_{\alpha\beta}$, deve possuir a forma

$$G_{\alpha\beta} = -8\pi G T_{\alpha\beta}, \tag{2.25}$$

onde $G_{\alpha\beta}$ é um tensor composto pela combinação linear da métrica e suas primeiras e segundas derivadas. De acordo com o princípio da equivalência a equação que governa um campo gravitacional arbitrariamente forte deve ser da forma

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{2.26}$$

onde $G_{\mu\nu}$ se reduz a $G_{\alpha\beta}$ no regime de campo fraco, e $T_{\mu\nu}$ é um tensor momento-energia geral.

Vimos na seção anterior que o tensor mais geral que pode ser formado com no máximo segundas derivadas da métrica e linear nestas é o tensor de curvatura de Riemann-Christoffel, $R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa}$. A anti-simetria do tensor $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ nos permite construir somente dois tensores por contração com essas características, que são o tensor de Ricci e a curvatura

[3]Através da famosa equação $E = m(c^2)$.

escalar. De modo que a forma mais geral do tensor procurado é

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R. \tag{2.27}$$

Como o tensor de momento-energia deve se conservar, no sentido da derivação covariante

$$T_{\mu\nu}{}^{;\mu} = 0,$$

então, de acordo com (2.26) e com (2.27) e utilizando a relação (2.21)

$$\begin{aligned} 0 = G_{\mu\nu}{}^{;\mu} &= (C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R)^{;\mu} \\ &= C_1 R_{\mu\nu}{}^{;\mu} + C_2 g_{\mu\nu} R^{;\mu} \\ &= \left(\frac{1}{2} C_1 + C_2\right) R_{;\nu}. \end{aligned}$$

Dessa maneira encontramos duas possibilidades: ou $C_2 = -C_1/2$ ou $R_{;\nu}$ é zero sempre. Iremos rejeitar a segunda possibilidade, pois usando (2.27) em (2.26) e contraindo os índices

$$G^{\mu}_{\mu} = (C_1 + 4C_2)R = -8\pi G T^{\mu}_{\mu}.$$

Então se $R_{;\nu}$ for nulo, $T^{\mu}_{\mu;\nu}$ será nulo sempre, o que não é verdade, por exemplo, para o caso da matéria não-homogênea e não-relativística. De modo que devemos aceitar a primeira possibilidade para obtermos que

$$G_{\mu\nu} = C_1 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right).$$

Finalmente para calcularmos C_1 retornaremos ao limite newtoniano estacionário onde a métrica é dada por (2.10) para obtermos, com o uso de (2.9) em (2.16), que

$$R_{00} = \frac{1}{2} \nabla^2 g_{00}.$$

Como no limite tomado a única componente do tensor momento-energia não nulo é

$$T_{00} = \rho,$$

então, pela equação (2.25), para $\alpha = i$ e $\beta = j$

$$G_{ij} = C_1 \left(R_{ij} - \frac{1}{2} \eta_{ij} R\right) = 0.$$

Ou seja,

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} R.$$

De modo que

$$R = \eta^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = \delta^{ij} R_{ij} - R_{00} = \frac{3}{2} R - R_{00},$$

$$\therefore R = 2R_{00}.$$

E para $\alpha = \beta = 0$

$$\begin{aligned} G_{00} &= C_1 \left(R_{00} - \frac{1}{2} \eta_{00} R \right) = -8\pi G \rho \\ &= C_1 \left(R_{00} + R_{00} \right) = -8\pi G \rho \\ &= C_1 \nabla^2 g_{00} = -8\pi G \rho. \end{aligned}$$

Substituindo o resultado (2.10) e comparando com (2.23) concluímos que $C_1 = 1$. O que nos fornece o tensor de curvatura de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R.$$

E conseqüentemente a equação de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{2.28}$$

Este magnífico resultado concorda com a discussão feita no primeiro capítulo pois o lado esquerdo da equação de Einstein é puramente geométrico, representado por um tensor de curvatura; enquanto que o lado direito só possui termos de energia. De modo que podemos concluir que a energia é a fonte da curvatura do espaço-tempo e é exatamente essa curvatura a responsável pela interação gravitacional.

Finalmente iremos escrever a equação de Einstein de outra forma que nos será útil mais tarde. Nesta equação, contraindo μ com ν através do tensor métrico, encontramos que

$$R - \frac{1}{2} g^{\mu}_{\mu} R = -8\pi G T^{\mu}_{\mu},$$

$$\therefore R = 4\pi G T^{\mu}_{\mu}.$$

De modo que a equação de Einstein pode ser escrita da forma

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right], \tag{2.29}$$

onde foi introduzido o escalar de Laue $T = T^{\mu}_{\mu}$.

2.7 Graus de liberdade da teoria

O tensor de curvatura de Einstein, desenvolvido na seção anterior, é um tensor simétrico e como o espaço é quadridimensional isso significa que ele possui 10 componentes independentes. De modo que a equação de campo (2.28) consiste em um conjunto de 10 equações algebricamente independentes. O tensor métrico a ser determinado também possui 10 componentes independentes, e a primeira vista poderíamos pensar que a equação de Einstein -com condições de contorno definidas- é suficiente para determinar a métrica univocamente. Mas isso não acontece, pois mesmo sendo algebricamente independentes, as 10 componentes de $G_{\mu\nu}$ estão relacionadas por leis de conservação, na forma de quatro identidades diferenciais, as identidades de Bianchi

$$G_{\mu\nu}{}^{;\mu} = 0.$$

Ou seja, elas não formam 10 equações funcionalmente independentes, mas somente 6 (10 -4), nos deixando com quatro graus de liberdade na determinação das 10 componentes desconhecidas de $g_{\mu\nu}$. Esses graus de liberdade correspondem ao fato que se $g_{\mu\nu}$ é solução da equação de Einstein então $g'_{\mu\nu}$ também o é, onde $g'_{\mu\nu}$ é obtido de $g_{\mu\nu}$ através de uma transformação de coordenadas geral $x \to x'$. Tal transformação de coordenadas envolve quatro funções arbitrárias $x'^{\mu}(x)$, gerando às soluções de (2.28) exatamente quatro graus de liberdade.

A questão da equação de Einstein de determinar a métrica univocamente é análoga ao problema de determinar univocamente o potencial vetor A_μ através das equações de Maxwell. Podemos escrever, na forma covariante de Lorentz, as equações de Maxwell em termos do potencial vetor na forma

$$\Box^2 A_\alpha - \frac{\partial^2 A^\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = -J_\alpha.$$

Novamente essas quatro equações não determinam univocamente os quatro termos de A_α porquê o lado esquerdo dessas equações estão relacionadas por uma lei de conservação na forma de uma identidade diferencial análoga as identidades de Bianchi

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\Box^2 A_\alpha - \frac{\partial^2 A^\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right] = 0.$$

De modo que o número de equações funcionalmente independentes são somente 3 (4 -1), deixando livre um grau de liberdade na solução das quatro componentes de A_α. Esse grau de liberdade obviamente corresponde a invariância de gauge; dada uma solução A_α, podemos encontrar outra solução da forma $A'_\alpha = A_\alpha + \partial\Phi/\partial x^\alpha$, com Φ arbitrário.

A ambigüidade nas soluções das equações de Maxwell e de Einstein podem ser removidas com escolhas apropriadas. No caso do eletromagnetismo podemos fazer isso escolhendo um gauge particular, por exemplo, dada uma solução A_α, podemos construir uma solução A'_α de modo que

$$\frac{\partial A'^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0.$$

Com isso obtemos o gauge

$$\Box^2\Phi + \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0,$$

que é conhecido como gauge de Lorentz.

Da mesma forma podemos eliminar a ambigüidade no tensor métrico adotando um sistema de coordenadas em particular. A escolha do sistema de coordenadas pode ser expressa por quatro condições de coordenadas, as quais, em adição as seis equações de Einstein independentes, determina a solução univocamente.

Uma escolha conveniente de um sistema coordenado é dado pelas condições de coordenadas harmônicas

$$\Gamma^\lambda \equiv g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0. \tag{2.30}$$

Para mostrar que é possível encontrar um sistema de coordenadas que satisfaça tal condição vamos lembrar a lei de transformação da conexão afim (2.3)

$$\Gamma'^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\Gamma^\rho_{\tau\sigma} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}.$$

Contraindo essa expressão com $g'^{\mu\nu}$, encontramos

$$\Gamma'^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho - g^{\rho\sigma}\frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^{rho}\partial x^\sigma}.$$

Se Γ^ρ for diferente de zero, podemos encontrar o novo sistema de coordenadas x'^λ resolvendo as equações diferenciais parciais de segunda ordem

$$g^{\rho\sigma}\frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho. \tag{2.31}$$

Uma função ϕ é dita harmônica se $\Box^2\phi$ é nulo, onde $\Box^2$ é o invariante d'Alambertiano, definido por

$$\begin{aligned}\Box^2\phi &\equiv g^{\lambda\nu}\phi_{;\lambda\nu} = g^{\lambda\nu}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^\lambda}\right)_{;\nu} \\ &= g^{\lambda\nu}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^\lambda\partial x^\nu} - \Gamma^\mu_{\lambda\nu}\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\right) \\ &= g^{\lambda\nu}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^\lambda\partial x^\nu} - \Gamma^\mu\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}.\end{aligned}$$

Se a condição de coordenadas harmônicas (2.31) é satisfeita, então as próprias coordenadas são funções harmônicas

$$\Box^2 x^\mu = 0,$$

o que justifica a aplicação do adjetivo "harmônico" a esse sistema de coordenadas.

Na ausência do campo gravitacional, um óbvio sistema de coordenadas é o de Minkowski, no qual a condição (2.30) é satisfeita trivialmente, pois a conexão afim é nula. Na presença de um campo gravitacional fraco um sistema de coordenadas harmônicas pode ser construído como um sistema próximo ao minkowskiano. Outra vantagem desse sistema de coordenadas, como será visto no próximo capítulo, é que ele produz grandes simplificações na equação de Einstein quando utilizamos a aproximação pós-newtoniana, similar à simplificação causada nas equações de Maxwell pelo uso do gauge de Lorentz.

3 APROXIMAÇÃO PÓS-NEWTONIANA

Obtivemos, no capítulo anterior, a equação de campo que nos permite encontrar o potencial gravitacional - o tensor métrico - sendo conhecida a distribuição de energia e momento do sistema em questão. Porém a equação de Einstein é não linear, devido a processos de auto-indução, e em geral não conseguimos encontrar uma solução exata. As soluções exatas são obtidas impondo fortíssimas condições de simetria e de independência temporal - quando se obtém soluções como a de Schwarzschild. Mas não devemos nos contentar com essas soluções, pois os sistemas físicos de interesse, como o sistema solar, não são nem estáticos nem isotrópicos. Porém os efeitos causados pelos campos gravitacionais dos planetas podem ser considerados como perturbações num sistema como o de Schwarzschild.

Nesse contexto escolhemos utilizar a aproximação pós-newtoniana que é indicada para sistemas em que as partículas se movem lentamente - em comparação com a velocidade da luz - unidas pela atração gravitacional, como o sistema solar. Historicamente a aproximação pós-newtoniana foi desenvolvida para estudar o problema do movimento(13), ou seja, encontrar a equação de movimento para partículas massivas sobre a ação somente de um campo gravitacional. Porém no presente trabalho daremos um outro enfoque a este método de expansão em série de potências.

3.1 A equação de movimento

Consideremos um sistema de corpos, como o sol e os planetas, que estão ligados somente por uma atração gravitacional mútua, de modo que $\bar{m}$, $\bar{r}$ e $\bar{v}$ sejam os valores típicos de massa, distância e velocidade dos corpos envolvidos. É um resultado conhecido da mecânica newtoniana que a energia cinética média, $\frac{1}{2}\bar{m}\bar{v}^2$, tem a mesma magnitude da energia potencial média, $G\bar{m}^2/\bar{r}$, então

$$\bar{v}^2 \sim \frac{G\bar{m}}{\bar{r}} \sim \phi_n.$$

A aproximação pós-newtoniana consiste em um método para obter as equações de movimento do sistema em ordens de $\bar{v}^2$ o que é equivalente a $G\bar{m}/\bar{r}$, e é satisfatório quando $\bar{v} \ll 1$ [1]. A equação de movimento newtoniana

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\nabla\phi_n$$

é de ordem de $\bar{v}^2/\bar{r}$. No nosso trabalho nos contentaremos em ir um termo adiante de Newton, ou seja, computarmos a equação de movimento em ordem de $\bar{v}^4/\bar{r}$. Para tal observemos que a equação da geodésica (2.3),

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0,$$

nos fornece, respectivamente, para $\mu = 0$ e $\mu = i$, que

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = -\Gamma^0_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau},$$

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = -\Gamma^i_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau}.$$

De modo que a aceleração será dada por

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x^i}{dt^2} &= \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2\frac{d^2x^i}{d\tau^2} - \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^3\frac{dx^i}{d\tau}\frac{d^2t}{d\tau^2} \\
&= -\Gamma^i_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt} + \Gamma^0_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt}\frac{dx^i}{dt} \\
&= -\Gamma^i_{00} + \left(\delta^i_j\Gamma^0_{00} - 2\Gamma^i_{0j}\right)\frac{dx^j}{dt} + \left(2\delta^i_j\Gamma^0_{0k} - \Gamma^i_{jk}\right)\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} + \\
&+ \Gamma^0_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^i}{dt}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

De onde vemos que para cumprir o nosso programa é necessário conhecermos

$$\Gamma^i_{00} \text{ em ordem de } \bar{v}^4/\bar{r},$$

$$\Gamma^i_{0j} \text{ e } \Gamma^0_{00} \text{ em ordem de } \bar{v}^3/\bar{r},$$

$$\Gamma^i_{jk} \text{ e } \Gamma^0_{0j} \text{ em ordem de } \bar{v}^2/\bar{r},$$

$$\Gamma^0_{jk} \text{ em ordem de } \bar{v}/\bar{r}.$$

[1]Esse procedimento também é uma expansão em potências do inverso da velocidade da luz, que no sistema de unidades naturais utilizado perde o sentido, já que $c = 1$.

3.2 A aproximação pós-newtoniana

Da nossa experiência com a solução de Schwarzschild (14), esperamos que seja possível achar um sistema de coordenadas cuja métrica seja aproximadamente a de Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$, com correções expandidas em ordens de potência em $\bar{v}^2$. Em particular esperamos que[2]

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + \overset{[2]}{g}_{00} + \overset{[4]}{g}_{00} + \cdots , \\ g_{ij} &= \delta_{ij} + \overset{[2]}{g}_{ij} + \overset{[4]}{g}_{ij} + \cdots , \\ g_{i0} &= \overset{[3]}{g}_{i0} + \overset{[5]}{g}_{i0} + \cdots . \end{aligned}$$

Uma justificativa para as potências ímpares em g_{i0} é o fato de ter paridade ímpar sob inversão temporal, mas a real justificativa é o fato desse sistema se demonstrar ser uma solução consistente para a equação de Einstein. Não há o termo de $\overset{[0]}{g}_{i0}$ já que na própria solução de Schwarzschild esse termo não está presente. Da relação entre a métrica e sua inversa

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta^{\mu}_{\sigma},$$

encontramos que a inversa do tensor métrico é dado pela expansão

$$\begin{aligned} g^{00} &= -1 - \overset{[2]}{g}_{00} - \overset{[4]}{g}_{00} - \cdots , \\ g^{ij} &= \delta_{ij} - \overset{[2]}{g}_{ij} - \overset{[4]}{g}_{ij} - \cdots , \\ g^{i0} &= \overset{[3]}{g}_{i0} + \overset{[5]}{g}_{i0} + \cdots . \end{aligned}$$

A conexão afim pode ser obtida pela relação (2.7)

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left[\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\rho}} \right].$$

Na hora de calcular os termos de $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ deveremos levar em conta que as escalas de distância e tempo no nosso sistema são dados por $\bar{r}$ e $\bar{r}/\bar{v}$ respectivamente, de modo que as derivadas espaciais e temporais são de ordem

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \sim \frac{1}{\bar{r}}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} \sim \frac{\bar{v}}{\bar{r}}.$$

[2]Outra forma de chegar a tais resultados é através de um princípio variacional, feito por Infeld em (15).

Devido a expansão de $g_{\mu\nu}$, encontramos as seguintes expansões

$$\begin{aligned}\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} &= \overset{[2]}{\Gamma}{}^{\mu}_{\nu\lambda} + \overset{[4]}{\Gamma}{}^{\mu}_{\nu\lambda} + \cdots (\text{para } \Gamma^{i}_{00}, \Gamma^{i}_{jk}, \Gamma^{0}_{0i}),\\ &= \overset{[3]}{\Gamma}{}^{\mu}_{\nu\lambda} + \overset{[5]}{\Gamma}{}^{\mu}_{\nu\lambda} + \cdots (\text{para } \Gamma^{i}_{0j}, \Gamma^{0}_{00}, \Gamma^{0}_{ij}).\end{aligned}$$

Onde o simbolo $\overset{[N]}{\Gamma}{}^{\mu}_{\nu\lambda}$ denota os termos de $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ de ordem de $\bar{v}^N/\bar{r}$. Os termos dessa expansão que serão necessários para o nosso programa são, em termos da métrica,

$$\begin{aligned}\overset{[2]}{\Gamma}{}^{i}_{00} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial \overset{[2]}{g}_{00}}{\partial x^i}, \qquad (3.2)\\ \overset{[4]}{\Gamma}{}^{i}_{00} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial \overset{[4]}{g}_{00}}{\partial x^i} + \frac{\partial \overset{[3]}{g}_{i0}}{\partial t} + \frac{1}{2}\overset{[2]}{g}_{ij}\frac{\partial \overset{[2]}{g}_{00}}{\partial x^j},\\ \overset{[3]}{\Gamma}{}^{i}_{0j} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \overset{[3]}{g}_{i0}}{\partial x^j} + \frac{\partial \overset{[2]}{g}_{ij}}{\partial t} - \frac{\partial \overset{[3]}{g}_{j0}}{\partial x^i}\right],\\ \overset{[2]}{\Gamma}{}^{i}_{jk} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \overset{[2]}{g}_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \overset{[2]}{g}_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \overset{[2]}{g}_{jk}}{\partial x^i}\right],\\ \overset{[3]}{\Gamma}{}^{0}_{00} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial \overset{[2]}{g}_{00}}{\partial t},\\ \overset{[2]}{\Gamma}{}^{0}_{0i} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial \overset{[2]}{g}_{00}}{\partial x^i},\\ \overset{[1]}{\Gamma}{}^{0}_{ij} &= 0.\end{aligned}$$

Observamos que para tal é necessário conhecermos da métrica as componentes g_{00} em ordem de $\bar{v}^4$, g_{i0} em ordem de $\bar{v}^3$ e g_{ij} em ordem de $\bar{v}^2$. O que está de acordo com a nossa intenção de ir à uma ordem além de Newton, pois na mecânica newtoniana g_{00} é dado na ordem $\bar{v}^2$ e g_{i0} e g_{ij} na ordem de $\bar{v}^0$. Para prosseguir com o nosso programa de obter as equações aproximadas da métrica calculemos o tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\rho\lambda}.$$

De acordo com a expansão obtida para a conexão afim obtemos

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu} &= \overset{[2]}{R}_{00} + \overset{[4]}{R}_{00} + \cdots (\text{para } R_{00}, R_{ij}),\\ &= \overset{[3]}{R}_{00} + \overset{[5]}{R}_{00} + \cdots (\text{para } R_{0i}),\end{aligned}$$

onde o símbolo $\overset{[N]}{R}_{\mu\nu}$ representa o termo de $R_{\mu\nu}$ com ordem de $\bar{v}^N/\bar{r}^2$. Utilizando os termos conhecidos da conexão encontramos

$$
\begin{aligned}
\overset{[2]}{R}_{00} &= -\frac{\partial \overset{[2]}{\Gamma}{}^{i}_{00}}{\partial x^i}, \\
\overset{[4]}{R}_{00} &= \frac{\partial \overset{[3]}{\Gamma}{}^{i}_{0i}}{\partial t} - \frac{\partial \overset{[4]}{\Gamma}{}^{i}_{00}}{\partial x^i} + \overset{[2]}{\Gamma}{}^{0}_{0i}\overset{[2]}{\Gamma}{}^{i}_{00} - \overset{[2]}{\Gamma}{}^{i}_{00}\overset{[2]}{\Gamma}{}^{j}_{ij}, \\
\overset{[3]}{R}_{i0} &= \frac{\partial \overset{[2]}{\Gamma}{}^{j}_{ij}}{\partial t} - \frac{\partial \overset{[3]}{\Gamma}{}^{j}_{0i}}{\partial x^j}, \\
\overset{[2]}{R}_{ij} &= -\frac{\partial \overset{[2]}{\Gamma}{}^{0}_{i0}}{\partial x^j} + \frac{\partial \overset{[2]}{\Gamma}{}^{k}_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \overset{[2]}{\Gamma}{}^{k}_{ij}}{\partial x^k},
\end{aligned}
$$

ou, substituindo os valores obtidos dos Γ's

$$
\begin{aligned}
\overset{[2]}{R}_{00} &= \frac{1}{2}\nabla^2 \overset{[2]}{g}_{00}, \\
\overset{[4]}{R}_{00} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{[2]}{g}_{ii}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \overset{[3]}{g}_{i0}}{\partial x^i \partial t} + \frac{1}{2}\nabla^2 \overset{[4]}{g}_{00} - \frac{1}{2}\frac{\partial \overset{[2]}{g}_{ij}}{\partial x^i}\frac{\partial \overset{[2]}{g}_{00}}{\partial x^j} - \frac{1}{2}\overset{[2]}{g}_{ij}\frac{\partial^2 \overset{[2]}{g}_{00}}{\partial x^i \partial x^j} + \\
&\quad + \frac{1}{4}\frac{\partial \overset{[2]}{g}_{00}}{\partial x^i}\frac{\partial \overset{[2]}{g}_{00}}{\partial x^i} + \frac{1}{4}\frac{\partial \overset{[2]}{g}_{00}}{\partial x^i}\frac{\partial \overset{[2]}{g}_{jj}}{\partial x^i}, \\
\overset{[3]}{R}_{i0} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{[2]}{g}_{jj}}{\partial x^i \partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{[3]}{g}_{j0}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{[2]}{g}_{ij}}{\partial x^j \partial t} + \frac{1}{2}\nabla^2 \overset{[3]}{g}_{0i}, \\
\overset{[2]}{R}_{ij} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{[2]}{g}_{00}}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{[2]}{g}_{kk}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{[2]}{g}_{ki}}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{[2]}{g}_{kj}}{\partial x^k \partial x^i} + \frac{1}{2}\nabla^2 \overset{[2]}{g}_{ij}.
\end{aligned}
$$

Para obter uma simplificação nas equações obtidas acima iremos quebrar a covariância geral através de uma escolha conveniente do sistema de coordenadas. Para tal definiremos x^μ de forma a obedecer a condição de coordenadas harmônicas[3] discutida no capítulo anterior

$$\Gamma^\lambda \equiv g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0.$$

De onde obtemos, para $\lambda = 0$ em terceira ordem e $\lambda = i$ em segunda ordem, respectivamente, as condições

$$\frac{\partial \overset{[2]}{g}_{00}}{\partial t} - 2\frac{\partial \overset{[3]}{g}_{i0}}{\partial x^i} + \frac{\partial \overset{[2]}{g}_{ii}}{\partial t} = 0, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial \overset{[2]}{g}_{00}}{\partial x^i} + 2\frac{\partial \overset{[2]}{g}_{ij}}{\partial x^j} - \frac{\partial \overset{[2]}{g}_{jj}}{\partial x^i} = 0. \tag{3.4}$$

[3]Condição esta também conhecida como gauge de Einstein.

Desse par de condições encontramos as relações que serão úteis à nossa simplificação

$$\frac{\partial^2 \overset{[2]}{g}_{00}}{\partial x^i \partial x^k} + 2\frac{\partial^2 \overset{[2]}{g}_{ij}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 \overset{[2]}{g}_{jj}}{\partial x^i \partial x^k} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \overset{[2]}{g}_{00}}{\partial x^i \partial x^k} + 2\frac{\partial^2 \overset{[2]}{g}_{kj}}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 \overset{[2]}{g}_{jj}}{\partial x^i \partial x^k} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \overset{[2]}{g}_{00}}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{\partial^2 \overset{[2]}{g}_{ij}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 \overset{[2]}{g}_{kj}}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 \overset{[2]}{g}_{jj}}{\partial x^i \partial x^k} = 0.$$

Munidos dessas relações, obtemos as fórmulas simplificadas do tensor de Ricci

$$\begin{aligned}
\overset{[2]}{R}_{00} &= \frac{1}{2}\nabla^2 \overset{[2]}{g}_{00}, \\
\overset{[4]}{R}_{00} &= \frac{1}{2}\nabla^2 \overset{[4]}{g}_{00} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{[2]}{g}_{00}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \overset{[3]}{g}_{i0}}{\partial x^i \partial t} - \frac{1}{2}\overset{[2]}{g}_{ij}\frac{\partial^2 \overset{[2]}{g}_{00}}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{1}{2}\frac{\partial \overset{[2]}{g}_{00}}{\partial x^i}.\frac{\partial \overset{[2]}{g}_{00}}{\partial x^i}, \\
\overset{[3]}{R}_{i0} &= \frac{1}{2}\nabla^2 \overset{[3]}{g}_{0i}, \\
\overset{[2]}{R}_{ij} &= \frac{1}{2}\nabla^2 \overset{[2]}{g}_{ij}.
\end{aligned}$$

3.3 Equações de campo aproximadas

Finalmente para chegarmos nas equações desejadas basta calcular as fontes das componentes do tensor de Ricci. Para tal utilizaremos a equação de campo de Einstein na forma (2.28)

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G S_{\mu\nu}, \tag{3.5}$$

onde

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T. \tag{3.6}$$

Devido a expansão de $R_{\mu\nu}$, concluímos, por consistência da equação de Einstein, que $S_{\mu\nu}$ deve seguir a mesma regra, porém, como G é da ordem de $\bar{r}\bar{v}^2/\bar{m}$, devemos diminuir duas ordens nessa expansão. Obtendo

$$\begin{aligned}
S_{\mu\nu} &= \overset{[0]}{S}_{00} + \overset{[2]}{S}_{00} + \cdots (\text{para } S_{00}, S_{ij}), \\
&= \overset{[1]}{S}_{00} + \overset{[3]}{S}_{00} + \cdots (\text{para } S_{0i}),
\end{aligned}$$

onde $\overset{[N]}{S}_{\mu\nu}$ indica o termo de $S_{\mu\nu}$ de ordem de $\bar{v}^N/\bar{r}^2$. Como $g_{\mu\nu}$ segue um expansão parecida, espera-se que, por consistência, $T_{\mu\nu}$ siga a mesma expansão, o que corrobora a interpretação que T^{00} representa a densidade de energia, T^{i0} a densidade de momento e T^{ij}

o fluxo de momento. Devido a este último esperamos que não haja termos independentes da velocidade na expansão de T^{ij}, ou seja, esperamos que

$$
\begin{aligned}
T^{00} &= \overset{[0]}{T}{}^{00} + \overset{[2]}{T}{}^{00} + \cdots, \\
T^{i0} &= \overset{[1]}{T}{}^{i0} + \overset{[4]}{T}{}^{10} + \cdots, \\
T^{ij} &= \overset{[2]}{T}{}^{ij} + \overset{[4]}{T}{}^{ij} + \cdots,
\end{aligned}
$$

onde $\overset{[N]}{T}{}^{\mu\nu}$ denota o termo de $T^{\mu\nu}$ em ordem de $\bar{m}\bar{v}^N/\bar{r}^3$ [4]. Com essa expansão e a de $g_{\mu\nu}$ obtemos as fontes das componentes do tensor de Ricci necessárias à nossa aproximação

$$
\begin{aligned}
\overset{[1]}{S}_{0i} &= -\overset{[1]}{T}{}^{0i}, \\
\overset{[0]}{S}_{00} &= \frac{1}{2}\overset{[0]}{T}{}^{00}, \\
\overset{[2]}{S}_{00} &= \frac{1}{2}[\overset{[2]}{T}{}^{00} - 2\overset{[2]}{g}_{00}\overset{[0]}{T}{}^{00} + \overset{[2]}{T}{}^{ii}], \\
\overset{[1]}{S}_{0i} &= -\overset{[1]}{T}{}^{0i}, \\
\overset{[0]}{S}_{ij} &= \frac{1}{2}\delta_{ij}\overset{[0]}{T}{}^{00}.
\end{aligned}
$$

Substituindo as componentes obtidas na equação de campo (3.5), encontramos que as equações de campo em coordenadas harmônicas são consistentes com as expansões utilizadas e são

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 \overset{[2]}{g}_{00} &= -8\pi G\overset{[0]}{T}{}^{00}, && (3.7) \\
\nabla^2 \overset{[4]}{g}_{00} &= \frac{\partial^2 \overset{[2]}{g}_{00}}{\partial t^2} + \overset{[2]}{g}_{ij}\frac{\partial^2 \overset{[2]}{g}_{00}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial \overset{[2]}{g}_{00}}{\partial x^i}.\frac{\partial \overset{[2]}{g}_{00}}{\partial x^i} -, \\
&- 8\pi G[\overset{[2]}{T}{}^{00} - 2\overset{[2]}{g}_{00}\overset{[0]}{T}{}^{00} + \overset{[2]}{T}{}^{ii}] && (3.8) \\
\nabla^2 \overset{[3]}{g}_{i0} &= 16\pi G\overset{[1]}{T}{}^{i0}, && (3.9) \\
\nabla^2 \overset{[2]}{g}_{ij} &= -8\pi G\delta_{ij}\overset{[0]}{T}{}^{00}. && (3.10)
\end{aligned}
$$

3.4 Tensor momento-energia de matéria

Para encontrarmos o tensor momento-energia geral necessário para obtermos as equações de campo iremos considerar um sistema de partículas em queda livre que interagem gravitacionalmente e, ocasionalmente, por colisões localizadas. O referente tensor dado

[4] Em particular $\overset{[0]}{T}{}^{00}$ é a densidade de massa, enquanto $\overset{[2]}{T}{}^{00}$ a densidade de energia não relativística.

pela relatividade especial é

$$T^{\alpha\beta} = \sum_n m_n \int \frac{dx_n^\alpha}{d\tau_n} dx_n^\beta \delta^4(x - x_n).$$

De acordo com o princípio da equivalência, tal tensor na presença da gravitação é

$$T^{\mu\nu} = g^{-1/2} \sum_n m_n \int \frac{dx_n^\mu}{d\tau_n} dx_n^\nu \delta^4(x - x_n). \tag{3.11}$$

O fator $g^{-1/2}$ se dá pois $\delta^4(x - x_n)$ não se transforma como um escalar, mas como um tensor densidade de peso 1, ou seja, $g^{-1/2}\delta^4(x - x_n)$ é que se transforma com um escalar. Podemos ainda escrever (3.11) na forma

$$T^{\mu\nu} = g^{-1/2}(\vec{x}, t) \sum_n m_n \frac{dx_n^\mu(t)}{dt} \frac{dx_n^\nu(t)}{dt} \left(\frac{d\tau_n}{dt}\right)^{-1} \delta(\vec{x} - \vec{x}_n(t)). \tag{3.12}$$

Para calcularmos o módulo do determinante da métrica, g, usaremos a seguinte identidade

$$\mathrm{Tr}\{M^{-1} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} M\} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \ln |\mathrm{Det} M|,$$

onde M é uma matriz arbitrária com determinante diferente de zero. Fazendo-a igual a $g_{\mu\nu}$ obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \ln g &= g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} g_{\nu\mu} \\
&= g^{00} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} g_{00} + 2g^{0i} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} g_{0i} + g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} g_{ij} \\
&\approx (-1 - \overset{[2]}{g}_{00}) \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \overset{[2]}{g}_{00} + 2\overset{[3]}{g}_{0i} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \overset{[3]}{g}_{0i} + (\delta_{ij} - \overset{[2]}{g}_{ij}) \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \overset{[2]}{g}_{ij} \\
&\approx \frac{\partial}{\partial x^\lambda} (-\overset{[2]}{g}_{00} + \overset{[2]}{g}_{ii}),
\end{aligned}$$

$$\therefore g = 1 - \overset{[2]}{g}_{00} + \overset{[2]}{g}_{ii} + \bigcirc(\bar{v}^4). \tag{3.13}$$

Para calcularmos $dt/d\tau_n$ usaremos a relação válida na relatividade especial

$$\eta_{\alpha\beta} U_n^\alpha U_n^\beta = -1,$$

onde, novamente, usando o princípio da equivalência, obtemos que para uma métrica qualquer

$$g_{\mu\nu} U_n^\mu U_n^\nu = -1, \tag{3.14}$$

onde U_n^μ é o quadrivetor velocidade $dx_n^\mu/d\tau_n$, ou seja

$$U_n^\mu = \frac{dt}{d\tau_n} (1, \vec{v}_n).$$

Usando (3.14)

$$\left(\frac{dt}{d\tau_n}\right)^2 \left[g_{00} + 2g_{i0}v_n^i + g_{ij}v_n^i v_n^j\right] = -1,$$

$$\therefore \frac{dt}{d\tau_n} = \left[-g_{00} - 2g_{i0}v_n^i - g_{ij}v_n^i v_n^j\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Utilizando as expansões na métrica feitas na aproximação pós-newtoniana encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau_n} &= \left[1 - \overset{[2]}{g}_{00} - v_n^2 - \bigcirc(\bar{v}^4)\right]^{-\frac{1}{2}} \\ &\approx 1 + \frac{1}{2}\overset{[2]}{g}_{00} + \frac{1}{2}v_n^2. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Finalmente estamos aptos a encontrar, usando (3.13) e (3.15) em (3.12), que

$$\begin{aligned} T^{00} &= (1 + \frac{1}{2}\overset{[2]}{g}_{00} - \frac{1}{2}\overset{[2]}{g}_{ii})\sum_n m_n(1 + \frac{1}{2}\overset{[2]}{g}_{00} + \frac{1}{2}v_n^2)\delta(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) + \bigcirc(\bar{v}^4) \\ &= \sum_n m_n[1 + (\overset{[2]}{g}_{00} - \frac{1}{2}\overset{[2]}{g}_{ii} + \frac{1}{2}v_n^2)]\delta(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) + \bigcirc(\bar{v}^4), \\ T^{0i} &= (1 + \frac{1}{2}\overset{[2]}{g}_{00} - \frac{1}{2}\overset{[2]}{g}_{ii})\sum_n m_n v_n^i(1 + \frac{1}{2}\overset{[2]}{g}_{00} + \frac{1}{2}v_n^2)\delta(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) + \bigcirc(\bar{v}^5) \\ &= \sum_n m_n v_n^i[1 + (\overset{[2]}{g}_{00} - \frac{1}{2}\overset{[2]}{g}_{ii} + \frac{1}{2}v_n^2)]\delta(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) + \bigcirc(\bar{v}^5), \\ T^{ij} &= (1 + \frac{1}{2}\overset{[2]}{g}_{00} - \frac{1}{2}\overset{[2]}{g}_{ii})\sum_n m_n v_n^i v_n^j(1 + \frac{1}{2}\overset{[2]}{g}_{00} + \frac{1}{2}v_n^2)\delta(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) + \bigcirc(\bar{v}^4) \\ &= \sum_n m_n v_n^i v_n^j[1 + (\overset{[2]}{g}_{00} - \frac{1}{2}\overset{[2]}{g}_{ii} + \frac{1}{2}v_n^2)]\delta(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) + \bigcirc(\bar{v}^4). \end{aligned}$$

Ou seja, os termos que necessitamos para as equações de campo aproximadas são

$$\overset{[0]}{T}{}^{00} = \rho_0, \tag{3.16}$$

$$\overset{[2]}{T}{}^{00} = \frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \rho_0\left(\overset{[2]}{g}_{00} - \frac{1}{2}\overset{[2]}{g}_{ii}\right), \tag{3.17}$$

$$\overset{[1]}{T}{}^{0i} = j_0^i, \tag{3.18}$$

$$\overset{[2]}{T}{}^{ij} = \rho_0 v^i v^j, \tag{3.19}$$

onde

$$\rho_0 = \sum_n m_n \delta(\vec{x} - \vec{x}_n(t)),$$

$$\rho_0 v^i v^j = \sum_n m_n v_n^i v_n^j \delta(\vec{x} - \vec{x}_n(t)),$$

$$j_0^i = \rho_0 v^i = \sum_n m_n v_n^i \delta(\vec{x} - \vec{x}_n(t)).$$

3.4.1 Leis de conservação

Iremos agora verificar as leis de conservação do tensor momento-energia geral encontrado, ou seja

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} T^{\mu\lambda} + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^{\lambda\nu} = 0,$$

$$\therefore \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = -\Gamma^\nu_{\mu\lambda} T^{\mu\lambda} - \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^{\lambda\nu}. \tag{3.20}$$

Expandindo até termos da ordem de $\bar{m}\bar{v}/\bar{r}^4$ para $\nu = 0$, obtemos

$$\frac{\partial T^{\mu 0}}{\partial x^\mu} = -\Gamma^0_{\mu\lambda} T^{\mu\lambda} - \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^{\lambda 0}$$

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{i0}}{\partial x^i} = -\Gamma^0_{\mu 0} T^{\mu 0} - \Gamma^0_{\mu i} T^{\mu i} - \Gamma^0_{0\lambda} T^{\lambda 0} - \Gamma^i_{i\lambda} T^{\lambda 0}$$

$$\frac{\partial \overset{[0]}{T}{}^{00}}{\partial t} + \frac{\partial \overset{[1]}{T}{}^{i0}}{\partial x^i} = 0, \tag{3.21}$$

pois o lado direito desta equação só possui termos de ordem superior a desejada. Substituindo as expressões (3.16) e (3.18) encontramos primeira lei de conservação

$$\nabla.\vec{j}_0 + \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0, \tag{3.22}$$

que é a lei de conservação da massa. Não é surpresa que a massa seja conservada na aproximação pós-newtoniana, pois uma grande taxa de conversão de massa em energia irá produzir temperaturas nas quais as partículas do nosso sistema irão se mover relativisticamente, em oposição a $\bar{v} \ll 1$. A equação (3.21) pode ser escrita de outra forma, pois de acordo com (3.7) e (3.9)

$$\overset{[0]}{T}{}^{00} = -\frac{1}{8\pi G} \nabla^2 \overset{[2]}{g}_{00},$$

$$\overset{[1]}{T}{}^{i0} = \frac{1}{16\pi G} \nabla^2 \overset{[3]}{g}_{i0}.$$

De modo que

$$\frac{\partial \overset{[0]}{T}{}^{00}}{\partial t} + \frac{\partial \overset{[1]}{T}{}^{i0}}{\partial x^i} = \frac{1}{16\pi G} \nabla^2 \left[\frac{\partial \overset{[3]}{g}_{i0}}{\partial x^i} - 2 \frac{\partial \overset{[2]}{g}_{00}}{\partial t} \right] = 0.$$

Como $\overset{[3]}{g}_{i0}$ e $\overset{[2]}{g}_{00}$ devem ir a zero no infinito, concluímos que

$$\frac{\partial \overset{[3]}{g}_{i0}}{\partial x^i} - 2\frac{\partial \overset{[2]}{g}_{00}}{\partial t} = 0. \tag{3.23}$$

E, expandindo a equação (3.20) em termos da ordem de $\bar{m}\bar{v}^2/\bar{r}^4$ para $\nu = i$

$$\frac{\partial T^{\mu i}}{\partial x^\mu} = -\Gamma^i_{\mu\lambda}T^{\mu\lambda} - \Gamma^\mu_{\mu\lambda}T^{\lambda i}$$

$$\frac{\partial T^{0i}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ji}}{\partial x^j} = -\Gamma^i_{00}T^{00} - 2\Gamma^i_{0j}T^{0j} - \Gamma^i_{jk}T^{jk} - \Gamma^0_{0\lambda}T^{\lambda i} - \Gamma^j_{j\lambda}T^{\lambda i}$$

$$\frac{\partial \overset{[1]}{T}{}^{0i}}{\partial t} + \frac{\partial \overset{[2]}{T}{}^{ij}}{\partial x^j} = -\overset{[2]}{\Gamma}{}^i_{00}\overset{[0]}{T}{}^{00}.$$

Substituindo as expressões (3.18), (3.19) e (3.2) obtemos que

$$\frac{\partial \vec{j}_0}{\partial t} + \nabla.[\vec{j}_0\vec{v}] = \frac{1}{2}\rho_0\nabla\overset{[2]}{g}_{00},$$

que podemos reconhecer como a conservação do momento. Usando a lei de conservação da massa na equação acima encontramos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{j}_0}{\partial t} + \nabla.[j_0\vec{v}] &= \rho_0\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\left[\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla.\vec{j}_0\right] + \rho_0\vec{v}.\nabla\vec{v} \\
&= \rho_0\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}.\nabla\vec{v}\right] \\
&= \rho_0\frac{d\vec{v}}{dt},
\end{aligned}$$

ou seja, a conservação do momento será satisfeita se, e somente se, cada partícula obedecer a equação de movimento

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{2}\nabla\overset{[2]}{g}_{00}. \tag{3.24}$$

3.5 Solução das equações de campo aproximadas

Como já conhecemos os termos do tensor momento-energia geral, (3.16)-(3.19), podemos voltar as equações de campo aproximadas, (3.7)-(3.10), e obter os termos da expansão do tensor métrico. De modo que substituindo a equação (3.16) em (3.7) encontramos que

$$\nabla^2\overset{[2]}{g}_{00} = -8\pi G\rho_0. \tag{3.25}$$

Comparando esta equação com a equação de campo newtoniana (2.23) concluímos que

$$\overset{[2]}{g}_{00} = -2\phi_n. \tag{3.26}$$

onde, a partir de agora, mudaremos a notação usada anteriormente e denominaremos o potencial gravitacional newtoniano de ϕ_n. Realizando o mesmo procedimento na equação (3.10) obtemos que

$$\overset{[2]}{g}_{ij} = \delta_{ij}\overset{[2]}{g}_{00} = -2\delta_{ij}\phi_n. \tag{3.27}$$

Finalmente podemos calcular por (3.15) com (3.26), de acordo com a aproximação tomada, que

$$\frac{dt}{d\tau_n} = 1 - \phi_n + \frac{1}{2}v_n^2.$$

E por (3.17) a componente $\overset{[2]}{T}_{00}$

$$\begin{aligned} \overset{[2]}{T}_{00} &= \frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \rho_0\left(\overset{[2]}{g}_{00} - \frac{1}{2}\overset{[2]}{g}_{ii}\right) \\ &= \rho_o\phi_n + \frac{1}{2}\rho_0 v^2, \end{aligned} \tag{3.28}$$

que é a densidade de energia não-relativística, que concorda com o que foi dito na nota de rodapé da página 40. Substituindo essas soluções na equação (3.8), encontramos a expressão

$$\begin{aligned} \nabla^2\overset{[4]}{g}_{00} &= -2\frac{\partial^2\phi_n}{\partial t^2} + 4\delta_{ij}\phi_n\frac{\partial^2\phi_n}{\partial x^i\partial x^j} - 4\frac{\partial\phi_n}{\partial x^i}.\frac{\partial\phi_n}{\partial x^i} - \\ &\quad -8\pi G[\overset{[2]}{T}{}^{00} + 4\phi_n\overset{[0]}{T}{}^{00} + \overset{[2]}{T}{}^{ii}]. \end{aligned}$$

Podemos melhorar essa equação usando a identidade

$$\frac{\partial\phi_n}{\partial x^i}.\frac{\partial\phi_n}{\partial x^i} = \frac{1}{2}\nabla^2\phi_n^2 - \phi_n\nabla^2\phi_n,$$

com a qual obtemos que

$$\begin{aligned} \nabla^2\overset{[4]}{g}_{00} &= -2\frac{\partial^2\phi_n}{\partial t^2} + 4\phi_n\nabla^2\phi_n - 2\nabla^2\phi_n^2 + 4\phi_n\nabla^2\phi_n - \\ &\quad -8\pi G[\overset{[2]}{T}{}^{00} + 4\phi_n\overset{[0]}{T}{}^{00} + \overset{[2]}{T}{}^{ii}] \\ &= -2\frac{\partial^2\phi_n}{\partial t^2} + 32\pi G\phi_n\overset{[0]}{T}{}^{00} - 2\nabla^2\phi_n^2 - 8\pi G\overset{[2]}{T}{}^{00} - \\ &\quad -32\pi G\phi_n\overset{[0]}{T}{}^{00} - 8\pi G\overset{[2]}{T}{}^{ii} \\ &= -2\nabla^2\phi_n^2 - 2[\frac{\partial^2\phi_n}{\partial t^2} + 4\pi G(\overset{[2]}{T}{}^{00} + \overset{[2]}{T}{}^{ii})], \end{aligned}$$

onde, substituindo as expressões (3.28) e (3.19)

$$\nabla^2[\overset{[4]}{g}_{00} + 2\phi_n^2] = -2\left[\frac{\partial^2\phi_n}{\partial t^2} + 4\pi G\rho_0\left(\phi_n + \frac{3}{2}v^2\right)\right].$$

Para simplificar, façamos

$$\overset{[4]}{g}_{00} + 2\phi_n^2 = -2\psi.$$

Ou seja, o termo de quarta ordem em $\bar{v}$ da componente g_{00} da métrica é dado por

$$\overset{[4]}{g}_{00} = -2(\phi_n^2 + \psi), \tag{3.29}$$

onde, o campo de quarta ordem ψ é definido por

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\phi_n}{\partial t^2} + 4\pi G\rho_0\left[\phi_n + \frac{3}{2}v^2\right]. \tag{3.30}$$

Finalmente utilizando a expressão (3.18) em (3.9)

$$\nabla^2\overset{[3]}{g}_{i0} = 16\pi G j_0^i. \tag{3.31}$$

Como ρ_0 e $\vec{j}_0$ e conseqüentemente ϕ_n vão a zero no infinito - o que corrobora a expansão feita sobre a métrica minkowskiana - podemos, usando o teorema de Green, concluir das equações (3.25)-(3.27), (3.30) e (3.31) que

$$\overset{[2]}{g}_{00} = -2\phi_n = -2G\int d^3x'\frac{\rho_0(\vec{x}\,',t)}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}, \tag{3.32}$$

$$\overset{[2]}{g}_{ij} = -2\delta_{ij}G\int d^3x'\frac{\rho_0(\vec{x}\,',t)}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|},$$

$$\overset{[3]}{g}_{i0} = -4G\int d^3x'\frac{j_0^i(\vec{x}\,',t)}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}, \tag{3.33}$$

$$\psi = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\frac{\partial^2\phi_n(\vec{x}\,',t)}{\partial t^2} - G\int\frac{d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\rho_0(\vec{x}\,',t)\left[\phi_n(\vec{x}\,',t) + \frac{3}{2}v^2(\vec{x}\,',t)\right]. \tag{3.34}$$

Para obter o termo $\overset{[4]}{g}_{00}$ basta substituir essas soluções em (3.29).

Vamos verificar como essas soluções alteram as condições de coordenadas. A condição (3.3) toma a forma

$$-2\frac{\partial\phi_n}{\partial t} - 2\frac{\partial\overset{[3]}{g}_{i0}}{\partial x^i} - 2\delta_{ii}\frac{\partial\phi_n}{\partial t} = 0$$

$$4\frac{\partial\phi_n}{\partial t} + \frac{\partial\overset{[3]}{g}_{i0}}{\partial x^i} = 0, \tag{3.35}$$

e a (3.4)

$$-2\frac{\partial \phi_n}{\partial x^i} - 4\delta ij\frac{\partial \phi_n}{\partial x^j} + 2\delta_{jj}\frac{\partial \phi_n}{\partial x^i} = 0$$

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial x^i} - \delta ij\frac{\partial \phi_n}{\partial x^j} = 0.$$

Verificamos que essas soluções tornam a condição (3.4) trivial enquanto que a (3.3) é um acoplamento entre $\overset{[3]}{g}_{i0}$ e o potencial gravitacional newtoniano. E esse acoplamento satisfaz a lei de conservação da massa (3.23), enquanto que a conservação do momento será satisfeita, devido a (3.24), se e somente se,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla \phi_n, \tag{3.36}$$

que é a lei de movimento de Newton.

Isto nos permite compilar um programa para calcular a equação de movimento das partículas na aproximação tomada

I) Resolver o problema newtoniano; ou seja, resolver a (3.36) e (3.32) para obter ϕ_n e $\vec{x}(t)$.

II) Usar os resultados obtidos em (I) para obter o campo ψ e obter as componentes restantes da métrica, $\overset{[4]}{g}_{00}$ e $\overset{[3]}{g}_{i0}$.

III) Finalmente, com esses resultados, calcular as correções pós-newtoniana da trajetória através da (3.1).

4 PROMEDIAÇÃO DOS CAMPOS GRAVITO-ELETROMAGNÉTICOS

No capítulo anterior utilizamos a aproximação pós-newtoniana para solucionar a equação de Einstein e obter as componentes do tensor métrico em ordens de potência de $\bar{v}$. Neste capítulo iremos, com os termos independentes da métrica, construir os campos gravito-eletromagnéticos, que são campos que obedecem equações semelhantes as de Maxwell. Braginski (16) chegou a equações parecidas usando a aproximação pós-newtoniana parametrizada (17), enquanto Campbell a deixou na forma tensorial(18)(19). No presente trabalho iremos atrás de deduzir tais equações utilizando os resultados do capítulo anterior e encontrar os campos efetivos para um conjunto de sistemas do tipo sistemas solares, de modo análogo ao que é feito para obter as equações macroscópicas do eletromagnetismo(20).

Como vimos a relatividade geral possui uma simetria chamada covariância geral e que para obtermos física de suas equações é necessário quebrarmos essa simetria, com a fixação do sistema de coordenadas, de modo análogo ao caso eletromagnético em que é preciso fixar o gauge. Esse é um exemplo dos pontos que as duas teorias tem em comum, porém existem pontos que diferem bastante nessas teorias.

Na teoria de Newton da gravitação um problema é a falta de liberdade do campo gravitacional, pois esse campo é totalmente definido por um único potencial definido pela equação de Poisson (2.23) enquanto que o eletromagnetismo é determinado por um campo escalar e um campo vetorial. Podemos pensar o potencial gravitacional newtoniano como análogo ao potencial escalar eletromagnético, mas para prosseguir com uma analogia entre ambas as teorias precisamos ainda de um potencial vetor para a gravidade.

Na teoria de Einstein o campo gravitacional ganha mais liberdade pois agora ele é determinado pelas 10 componentes independentes do tensor métrico, agora é a gravidade quem tem muita liberdade em relação ao eletromagnetismo. Outro problema gerado pela teoria da relatividade geral é que suas equações são não-lineares enquanto que as equações de Maxwell são lineares. De modo que, para criarmos uma analogia entre ambas nesse contexto temos como desafio linearizar a relatividade geral e reduzir a liberdade da métrica. É com este objetivo que utilizamos a aproximação pós-newtoniana que é um dos dois principais métodos de linearizar a equação de Einstein[1].

Historicamente fazer uma analogia entre ambos é algo que vem tomando a atenção dos físicos desde 1893 quando Heaviside(21) investigou como a energia se propaga em um campo gravitacional. Ele propôs um vetor de Poynting gravitacional que continha componentes magnéticas da gravitação, isso mais de 30 anos antes da teoria de Einstein. Após a descoberta da relatividade geral Forward(22) foi o primeiro a escrever as equações da relatividade geral linearizadas em uma estrutura tipo Maxwell e propôs experimentos para detectar os campos gravito-magnéticos(23). Experimentos mais recentemente em supercondutores foram propostos por Li(24)(25)(26) seguindo as correções introduzidas por deWitt(27) e Ross(28) na equação de London para incluir os campos gravito-magnéticos.

4.1 As equações de Maxwell-Einstein

No capítulo anterior encontramos, utilizando a aproximação em quarta ordem, que a componente 00 da métrica é dada por

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 - 2\phi_n - 2\phi_n^2 - 2\psi \\ &= -1 - 2\left(\phi_n + \psi\right) - 2\left(\phi_n + \psi\right)^2 + \bigcirc\left(\bar{v}^6\right), \end{aligned}$$

e em segunda ordem, que

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \delta_{ij}\left(1 - 2\phi_n\right) \\ &= \delta_{ij}\left[1 - 2\left(\phi_n + \psi\right) + \bigcirc\left(\bar{v}^4\right)\right]. \end{aligned}$$

De modo que se definirmos

$$\phi \equiv \phi_n + \psi, \tag{4.1}$$

e, de acordo com (3.35),

$$A_i \equiv \frac{1}{4} \overset{[3]}{g}_{0i},$$

[1]O outro é a aproximação de campo fraco.

obteremos, de acordo com a aproximação tomada até aqui, que

$$
\begin{aligned}
g_{00} &= -1 - 2\phi - 2\phi^2, &(4.2)\\
g_{0i} &= 4A_i, \\
g_{ij} &= \delta_{ij}\left(1 - 2\phi\right). &(4.3)
\end{aligned}
$$

Onde, de acordo com (3.30) e (2.23)

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= \nabla^2\phi_n + \nabla^2\psi \\
&= \frac{\partial^2\phi_n}{\partial t^2} + 4\pi G\rho_0\left[1 + \phi_n + \frac{3}{2}v^2\right]. \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

E, de acordo com (3.31), que

$$\nabla^2\vec{A} = 4\pi G\vec{j}_0. \qquad (4.5)$$

Da solução do tensor métrico obtida observamos que há somente quatro fatores independentes, o escalar ϕ e as três componentes do vetor $\vec{A}$. De modo que podemos identificá-los como as quatro componentes do quadrivetor eletromagnético A^μ. Mais uma indicação que estamos no caminho certo para construir uma analogia entre a gravitação, na aproximação tomada, e o eletromagnetismo é que a condição de coordenadas harmônicas não satisfeita trivialmente (3.35), nos fornece a condição

$$\frac{\partial\phi_n}{\partial t} + \nabla.\vec{A} = 0,$$

ou, devido a aproximação tomada

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla.\vec{A} = 0. \qquad (4.6)$$

Que, análogo ao eletromagnetismo, é o gauge de Lorentz.

Para chegarmos nas equações em si usaremos a identidade vetorial

$$\nabla^2\vec{A} = \nabla(\nabla.\vec{A}) - \nabla\times(\nabla\times\vec{A}),$$

e o gauge de Lorentz na equação (4.5) para obter que

$$
\begin{aligned}
\nabla(\nabla.\vec{A}) - \nabla\times(\nabla\times\vec{A}) &= 4\pi G\vec{j}_0, \\
\therefore \nabla\times(\nabla\times\vec{A}) &= -4\pi G\vec{j}_0 - \frac{\partial\nabla\phi}{\partial t}. \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

Estamos, agora, aptos a definir os campos gravito-elétrico e gravito-magnético de forma análoga ao eletromagnetismo quando é fixado o gauge de Lorentz, ou seja

$$\vec{E}_g \equiv -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \tag{4.8}$$

$$\vec{B}_g \equiv \nabla \times \vec{A}. \tag{4.9}$$

De onde encontramos que

$$\nabla\phi = -\vec{E}_g - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

que substituída em (4.7), junto com (4.9), nos fornece

$$\nabla \times \vec{B}_g = -4\pi G \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{E}_g}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2},$$

e em (4.4), junto com (4.6)

$$\nabla.(\nabla\phi) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \phi_n}{\partial t}\right) + 4\pi G\rho_0 \left[1 + \phi_n + \frac{3}{2}v^2\right] \tag{4.10}$$

$$-\nabla.\vec{E}_g - \frac{\partial \nabla.\vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \nabla.\vec{A}}{\partial t} + 4\pi G\rho_0 \left[1 + \phi_n + \frac{3}{2}v^2\right] \tag{4.11}$$

$$\nabla.\vec{E}_g = -4\pi G\rho_0 \left[1 + \phi_n + \frac{3}{2}v^2\right]. \tag{4.12}$$

Da própria definição dos campos gravito-elétrico, (4.8), gravito-magnético, (4.9), encontramos as equações restantes

$$\nabla.\vec{B}_g = \nabla.\left(\nabla \times \vec{A}\right) = 0,$$

e

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E}_g &= -\nabla \times (\nabla\phi) - \frac{\partial \nabla \times \vec{A}}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial \vec{B}_g}{\partial t}. \end{aligned}$$

Ou seja, obtemos o conjunto de equações de Maxwell-Einstein

$$\nabla.\vec{E}_g = -\frac{1}{\varepsilon_g}\rho_0 \left[1 + \phi_n + \frac{3}{2}v^2\right], \tag{4.13}$$

$$\nabla.\vec{B}_g = 0, \tag{4.14}$$

$$\nabla \times \vec{E}_g = -\frac{\partial \vec{B}_g}{\partial t}, \tag{4.15}$$

$$\nabla \times \vec{B}_g = -\mu_g \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{E}_g}{\partial t}, \tag{4.16}$$

onde na última equação foi desprezado o termo com derivada segunda no tempo de $\vec{A}$, pois esse termo é de ordem de $\bar{v}^5$. Foi definido

$$\varepsilon_g \equiv \frac{1}{4\pi G},$$

e

$$\mu_g \equiv 4\pi G,$$

de modo que, da mesma maneira que no caso eletromagnético,

$$\varepsilon_g \mu_g = \varepsilon_0 \mu_0 = 1. \tag{4.17}$$

Destas equações podemos encontrar as equações de onda de modo semelhante ao que é feito no caso eletromagnético. Aplicando o rotacional na equação (4.16) e em seguida usando a (4.15) e a (4.13) encontramos

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla \times \vec{E}_g &= -\frac{\partial \nabla \times \vec{B}_g}{\partial t} \\
\nabla(\nabla.\vec{E}_g) - \nabla^2 \vec{E}_g &= \mu_g \frac{\partial \vec{j}_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 \vec{E}_g}{\partial t^2} \\
\nabla^2 \vec{E}_g - \frac{\partial^2 \vec{E}_g}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon_g} \nabla \left[\rho_0 + \rho_0 \phi_n + \frac{3}{2}\rho_0 v^2\right] + \mu_g \frac{\partial \vec{j}_0}{\partial t} \\
\nabla^2 \vec{E}_g - \frac{\partial^2 \vec{E}_g}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon_g} \left[\frac{\partial \vec{j}_0}{\partial t} + \nabla \left(\rho_0 + \rho_0 \phi_n + \frac{3}{2}\rho_0 v^2\right)\right].
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Analogamente para o campo gravito-magnético aplicaremos o rotacional em (4.15) e usaremos a (4.16) e a (4.14) para encontrarmos

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla \times \vec{B}_g &= -\mu_g \nabla \times \vec{j}_0 + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{E}_g \\
\nabla(\nabla.\vec{B}_g) - \nabla^2 \vec{B}_g &= -\mu_g \nabla \times \vec{j}_0 - \frac{\partial^2 \vec{B}_g}{\partial t^2} \\
\nabla^2 \vec{B}_g &= \mu_g \nabla \times \vec{j}_0.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Na última passagem foi desprezado o termo com derivadas segunda de $\vec{B}_g$ pois esse termo é de ordem superior à aproximação tomada, mas de outra forma esse termo se cancelaria com o termo de derivadas segunda de $\vec{A}$, que foi desprezado na obtenção da equação (4.16).

Podemos utilizar o teorema de Green para obtermos a solução de (4.18) e (4.19) que são

$$\vec{E}_g = -G\int \frac{d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\left[\frac{\partial\vec{j}_0(\vec{x}\,',t')}{\partial t'} + \nabla'\left(\rho_0(\vec{x}\,',t') + \rho_0\phi_n(\vec{x}\,',t') + \frac{3}{2}\rho_0 v^2(\vec{x}\,',t')\right)\right]_{RET}, \tag{4.20}$$

$$\vec{B}_g = -G\int d^3x' \frac{\nabla'\times\vec{j}_0(\vec{x}\,',t')}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}, \tag{4.21}$$

onde o colchete $[\quad]_{RET}$ significa que o instante t' tem que ser o tempo retardado, $t' = t - |\vec{x}-\vec{x}\,'|$.

As diferenças destas equações para as de Maxwell são os sinais negativos nas fontes dos campos gravito-elétricos e gravito-magnéticos, o que se dá devido ao fato que a gravidade é atrativa enquanto que o eletromagnetismo é repulsivo para cargas iguais; outra diferença está na fonte do campo gravito-elétrico que não é somente a densidade de matéria mas entra termos proporcionais a densidade de energia gravitacional e de energia cinética, o que provém do fato que não só a massa interage gravitacionalmente mas também a energia.

4.2 Dedução das equações macroscópicas

Iremos deduzir as equações de Maxwell-Einstein efetivas para o caso de sistemas formados por vários sistemas do tipo solar. Para tal consideremos que os corpos envolvidos produzam campos que obedecem as equações

$$\begin{aligned}
\nabla.\vec{e}_g &= -\frac{1}{\varepsilon_g}\left[\rho_0 + \frac{3}{2}\rho_0 v^2 + \rho_0\phi_n\right],\\
\nabla.\vec{b}_g &= 0,\\
\nabla\times\vec{e}_g &= -\frac{\partial\vec{b}_g}{\partial t},\\
\nabla\times\vec{b}_g &= -\mu_g\vec{j}_0 + \frac{\partial\vec{e}_g}{\partial t}.
\end{aligned}$$

A média espacial de uma função $F(\vec{x},t)$ em relação a uma função de ensaio $w(\vec{x})$ é definida como

$$\langle F(\vec{x},t)\rangle \equiv \int d^3x' w(\vec{x}')F(\vec{x}-\vec{x}',t), \tag{4.22}$$

onde $w(\vec{x})$ é uma função real, não-nula numa vizinhança de $\vec{x}=0$ e normalizada à unidade em todo o espaço. Afortunadamente, a função de ensaio não precisa ser especificada em detalhe; tudo o que se necessita são propriedades gerais de continuidade e de variação suave que permitam a rápida convergência do desenvolvimento em série de Taylor sobre distâncias de dimensões do tamanho dos sistemas solares.

Uma vez que as derivadas espaciais e temporais entram na equação de Maxwell-Einstein, devemos considerar essas operações em relação à promediação, definida em (4.22). Evidentemente, temos que

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\langle F(\vec{x},t)\rangle = \int d^3x' w(\vec{x}')\frac{\partial F}{\partial x^i}(\vec{x}-\vec{x}',t) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x^i}\right\rangle,$$

e analogamente

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle F(\vec{x},t)\rangle = \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle.$$

As operações de derivação em relação ao espaço e ao tempo comutam, portanto, com a operação de promediação.

Podemos agora considerar a promediação das equações de Maxwell-Einstein. Os campos $\vec{E}_g$ e $\vec{B}_g$, campos gravito-elétrico e gravito-magnético macroscópicos, serão definidos como as médias dos campos $\vec{e}_g$ e $\vec{b}_g$

$$\vec{E}_g =< \vec{e}_g >,$$

$$\vec{B}_g =< \vec{b}_g > .$$

De modo que as equações de Maxwell-Einstein promediadas são

$$\begin{aligned}
\nabla.\vec{E}_g &= -\frac{1}{\varepsilon_g}\left[\langle\rho_0\rangle + \frac{3}{2}\left\langle\rho_0 v^2\right\rangle + \langle\rho_0\phi_n\rangle\right],\\
\nabla.\vec{B}_g &= 0,\\
\nabla\times\vec{E}_g &= -\frac{\partial\vec{B}_g}{\partial t},\\
\nabla\times\vec{B}_g &= -\mu_g\left\langle\vec{j}_0\right\rangle + \frac{\partial\vec{E}_g}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Para encontrarmos as equações desejadas precisamos calcular as médias espaciais de ρ_0, $\rho_0\phi_n$, $\rho_0 v^2$ e $\vec{j}_0$, que vamos calcular a seguir.

4.2.1 Cálculo da média espacial de ρ_0

Considerando que em grande escala os corpos envolvidos possam ser tomados como pontuais, no sistema de coordenadas ilustrado na figura 2, a densidade de matéria ρ_0 pode

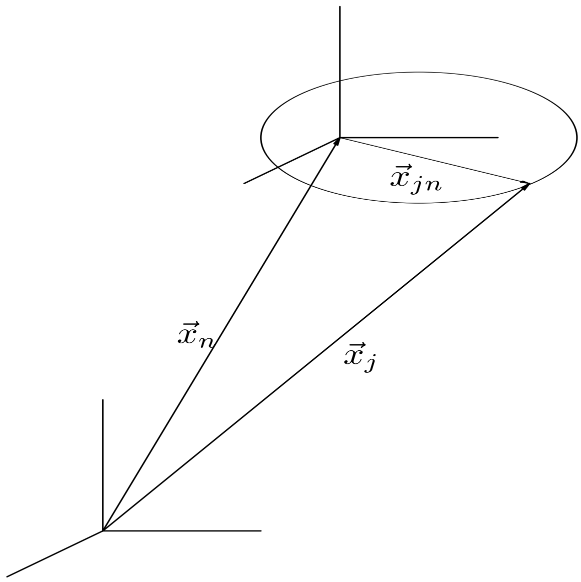

Figura 2: Sistemas de coordenadas locais. É utilizado para escrever a posição dos corpos ligados aos sistemas locais, onde $x_j = x_n + x_{jn}$

ser escrita como

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \sum_{j(livre)} m_j \delta(\vec{x} - \vec{x}_j) + \sum_n \sum_{j(n)} m_j \delta(\vec{x} - \vec{x}_j) \\ &= \sum_{j(livre)} m_j \delta(\vec{x} - \vec{x}_j) + \sum_n \sum_{j(n)} m_j \delta(\vec{x} - \vec{x}_n - \vec{x}_{jn}), \end{aligned} \tag{4.23}$$

onde $\vec{x}_n$ orienta o centro de massa do n-ésimo sistema local e o primeiro termo de ρ_0 é a contribuição dos corpos livres desses sistemas. O segundo termo representa a contribuição desses sistemas, de modo que a média da densidade de matéria do n-ésimo sistema local é dada por

$$\begin{aligned} <\rho_0>_n &= \left\langle \sum_{j(n)} m_j \delta(\vec{x} - \vec{x}_n - \vec{x}_{jn}) \right\rangle = \int w(\vec{s}) \sum_{j(n)} m_j \delta(\vec{x} - \vec{x}_n - \vec{x}_{jn} - \vec{s}) d^3 s \\ &= \sum_{j(n)} m_j w(\vec{x} - \vec{x}_n - \vec{x}_{jn}). \end{aligned}$$

Se as dimensões desses sistemas locais forem muito menores que as dimensões considera-das, então podemos expandir $w(\vec{x} - \vec{x}_n - \vec{x}_{jn})$ em série de Taylor em torno de $\vec{x}_{jn} = \vec{0}$, cuja expansão é

$$w(\vec{x} - \vec{x}_n) - (\vec{x}_{jn}.\nabla) w(\vec{x} - \vec{x}_n) + \frac{1}{2} (\vec{x}_{jn}.\nabla)^2 w(\vec{x} - \vec{x}_n) + \cdots .$$

De modo que

$$\begin{aligned} <\rho_0>_n &= \sum_{j(n)} m_j \left[w(\vec{x}-\vec{x}_n) - (\vec{x}_{jn}.\nabla) w(\vec{x}-\vec{x}_n) + \frac{1}{2}(\vec{x}_{jn}.\nabla)^2 w(\vec{x}-\vec{x}_n) + \cdots \right] \\ &\approx \sum_{j(n)} m_j w(\vec{x}-\vec{x}_n) - \sum_{j(n)} (m_j \vec{x}_{jn}).\nabla w(\vec{x}-\vec{x}_n) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j(n)} m_j (\vec{x}_{jn}.\nabla)[\vec{x}_{jn}.\nabla w(\vec{x}-\vec{x}_n)]. \end{aligned}$$

Como $\vec{x}_n$ orienta o centro de massa do n-ésimo sistema local então

$$\sum_{j(n)} m_j \vec{x}_{jn} = \sum_{j(n)} m_j (\vec{x}_j - \vec{x}_n) = \sum_{j(n)} m_j \vec{x}_j - \sum_{j(n)} m_j \vec{x}_n = m_n \vec{x}_n - m_n \vec{x}_n = \vec{0},$$

onde

$$\sum_{j(n)} m_j = m_n.$$

E observemos que

$$\begin{aligned} (\vec{x}_{jn}.\nabla)[\vec{x}_{jn}.\nabla w(\vec{x}-\vec{x}_n)] &= (\vec{x}_{jn})_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\vec{x}_{jn})_k \frac{\partial}{\partial x_k} w(\vec{x}-\vec{x}_n) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\vec{x}_{jn})_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\vec{x}_{jn})_k w(\vec{x}-\vec{x}_n) \right] \right] \\ &= \nabla. \left[\vec{x}_{jn} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\vec{x}_{jn})_k w(\vec{x}-\vec{x}_n) \right] \right] \\ &= \nabla. \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\vec{x}_{jn})_k \vec{x}_{jn} w(\vec{x}-\vec{x}_n) \right] \right] \\ &= \nabla. \left[\nabla. \left[\vec{x}_{jn} \vec{x}_{jn} w(\vec{x}-\vec{x}_n) \right] \right]. \end{aligned}$$

Definindo o momento de quadrupolo do n-ésimo sistema local como

$$\mathbf{q}_n \equiv \frac{1}{2} \sum_{j(n)} m_j \vec{x}_{jn} \vec{x}_{jn},$$

obtemos que

$$\begin{aligned} <\rho_0>_n &\approx m_n w(\vec{x}-\vec{x}_n) + \nabla. \left[\nabla. [\mathbf{q}_n w(\vec{x}-\vec{x}_n)] \right] \\ &= < m_n \delta(\vec{x}-\vec{x}_n) > + \nabla. \left[\nabla. < \mathbf{q}_n \delta(\vec{x}-\vec{x}_n) > \right]. \end{aligned}$$

Então, de acordo com (4.23),

$$\begin{aligned} <\rho_0> &\approx \left\langle \sum_{j(livre)} m_j \delta(\vec{x}-\vec{x}_j) \right\rangle + \left\langle \sum_n m_n \delta(\vec{x}-\vec{x}_n) \right\rangle + \nabla. \left[\nabla. \left\langle \sum_n \mathbf{q}_n \delta(\vec{x}-\vec{x}_n) \right\rangle \right] \\ &= \rho_f + \nabla. \left[\nabla. \mathbf{Q} \right], \end{aligned} \tag{4.24}$$

onde definimos a densidade de matéria livre

$$\rho_f \equiv \left\langle \sum_{j(livre)} m_j \delta(\vec{x} - \vec{x}_j) \right\rangle + \left\langle \sum_n m_n \delta(\vec{x} - \vec{x}_n) \right\rangle,$$

e a densidade de momento de quadrupolo

$$\mathbf{Q} \equiv \left\langle \sum_n \mathbf{q}_n \delta(\vec{x} - \vec{x}_n) \right\rangle.$$

O resultado (4.24) é semelhante ao obtido no caso eletromagnético com a carga elétrica trocada pela massa, porém a resposta encontrada não possui o termo análogo ao momento de dipolo pois esse termo corresponde a média da soma do momento linear de cada sistema local, que é nulo devido ao sistema de referência tomado sobre o centro de massa dos sistemas locais.

4.2.2 Cálculo da média espacial de $\vec{j}_0$

De modo análogo ao que foi feito em ρ_0 podemos escrever, usando o mesmo sistema de referência, $\vec{j}_0$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} \vec{j}_0 &= \sum_{j(livre)} m_j \vec{v}_j \delta(\vec{x} - \vec{x}_j) + \sum_n \sum_{j(n)} m_j \vec{v}_j \delta(\vec{x} - \vec{x}_j) \\ &= \sum_{j(livre)} m_j \vec{v}_j \delta(\vec{x} - \vec{x}_j) + \sum_n \sum_{j(n)} m_j (\vec{v}_n + \vec{v}_{jn}) \delta(\vec{x} - \vec{x}_n - \vec{x}_{jn}), \end{aligned} \tag{4.25}$$

onde

$$\vec{v}_j = \frac{d\vec{x}_j}{dt}.$$

Novamente, o primeiro termo é a contribuição da massa livre enquanto que o segundo somatório é a contribuição dos corpos ligados. Logo, a média da corrente de matéria do n-ésimo sistema local é dada por

$$\begin{aligned} < \vec{j}_0 >_n &= \int w(\vec{s}) \sum_{j(n)} m_j (\vec{v}_n + \vec{v}_{jn}) \delta(\vec{x} - \vec{x}_n - \vec{x}_{jn} - \vec{s}) d^3 s \\ &= \sum_{j(n)} m_j (\vec{v}_n + \vec{v}_{jn}) w(\vec{x} - \vec{x}_n - \vec{x}_{jn}). \end{aligned}$$

Expandindo, novamente, $w(\vec{x}-\vec{x}_n-\vec{x}_{jn})$ em série de Taylor em torno de $\vec{x}_{jn}=\vec{0}$ obtemos

$$\begin{aligned}
<\vec{j}_0>_n &\approx \sum_{j(n)} m_j(\vec{v}_n+\vec{v}_{jn})\left[w(\vec{x}-\vec{x}_n)-(\vec{x}_{jn}.\nabla)w(\vec{x}-\vec{x}_n)+\frac{1}{2}(\vec{x}_{jn}.\nabla)^2 w(\vec{x}-\vec{x}_n)\right] \\
&= \vec{v}_n\sum_{j(n)}\left[m_j w(\vec{x}-\vec{x}_n)-(m_j\vec{x}_{jn}).\nabla w(\vec{x}-\vec{x}_n)\right]+ \\
&\quad +\vec{v}_n\sum_{j(n)}\nabla.\nabla.\left[\frac{1}{2}m_j\vec{x}_{jn}\vec{x}_{jn}w(\vec{x}-\vec{x}_n)\right]+\sum_{j(n)}\left[m_j\vec{v}_{jn}w(\vec{x}-\vec{x}_n)\right]- \\
&\quad -\sum_{j(n)}\left[(m_j\vec{v}_{jn}\vec{x}_{jn}).\nabla w(\vec{x}-\vec{x}_n)-\nabla.\nabla.\left[\frac{1}{2}m_j\vec{v}_{jn}\vec{x}_{jn}\vec{x}_{jn}w(\vec{x}-\vec{x}_n)\right]\right] \\
&\approx m_n\vec{v}_n w(\vec{x}-\vec{x}_n)+\vec{v}_n\nabla.\nabla.[\mathbf{q}_n w(\vec{x}-\vec{x}_n)]+ \\
&\quad +\sum_{j(n)}[m_j\vec{v}_{jn}w(\vec{x}-\vec{x}_n)-(m_j\vec{v}_{jn}\vec{x}_{jn}).\nabla w(\vec{x}-\vec{x}_n)],
\end{aligned} \tag{4.26}$$

onde na última passagem foi desprezado o termo com $\vec{v}_{jn}\vec{x}_{jn}\vec{x}_{jn}$, que é tomado com muito pequeno. Novamente teremos uma simplificação devido o sistema utilizado, pois

$$\sum_{j(n)} m_j\vec{v}_{jn}=\frac{d}{dt}\sum_{j(n)} m_j\vec{x}_{jn}=\vec{0}.$$

Para melhorarmos essa equação usaremos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\mathbf{q}_n.\nabla w(\vec{x}-\vec{x}_n)\right] &= \frac{d\mathbf{q}_n}{dt}.\nabla w(\vec{x}-\vec{x}_n)+\mathbf{q}_n.\nabla\frac{dw(\vec{x}-\vec{x}_n)}{dt} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j(n)} m_j\left[\vec{x}_{jn}\vec{v}_{jn}+\vec{v}_{jn}\vec{x}_{jn}\right].\nabla w(\vec{x}-\vec{x}_n)-\mathbf{q}_n.\nabla\left[\vec{v}_n.\nabla w(\vec{x}-\vec{x}_n)\right] \\
&= \sum_{j(n)}(m_j\vec{v}_{jn}\vec{x}_{jn}).\nabla w(\vec{x}-\vec{x}_n)-\mathbf{q}_n.\nabla\left[\vec{v}_n.\nabla w(\vec{x}-\vec{x}_n)\right]+ \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{j(n)} m_j\left[\vec{x}_{jn}\vec{v}_{jn}-\vec{v}_{jn}\vec{x}_{jn}\right].\nabla w(\vec{x}-\vec{x}_n),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{j(n)}(m_j\vec{v}_{jn}\vec{x}_{jn}).\nabla w(\vec{x}-\vec{x}_n) &= \frac{d}{dt}\left[\mathbf{q}_n.\nabla w(\vec{x}-\vec{x}_n)\right]+\mathbf{q}_n.\nabla\left[\vec{v}_n.\nabla w(\vec{x}-\vec{x}_n)\right]- \\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{j(n)} m_j(\vec{x}_{jn}\times\vec{v}_{jn}).\nabla w(\vec{x}-\vec{x}_n),
\end{aligned} \tag{4.27}$$

e a identidade

$$\nabla\times\nabla.\left[\mathbf{q}_n\times\vec{v}_n w(\vec{x}-\vec{x}_n)\right]=\nabla.\left[\nabla.(\vec{v}_n\mathbf{q}_n w(\vec{x}-\vec{x}_n)-\mathbf{q}_n\vec{v}_n w(\vec{x}-\vec{x}_n))\right]$$

$$\therefore \nabla.\nabla.[\mathbf{q}_n\vec{v}_n w(\vec{x}-\vec{x}_n)]=\nabla.\nabla.[\vec{v}_n\mathbf{q}_n w(\vec{x}-\vec{x}_n)]-\nabla\times\nabla.\left[\mathbf{q}_n\times\vec{v}_n w(\vec{x}-\vec{x}_n)\right].$$

Substituindo esses resultados em (4.26), encontramos que

$$
\begin{aligned}
<\vec{j}_0>_n &\approx m_n\vec{v}_n w(\vec{x}-\vec{x}_n) + \nabla.\nabla.[\vec{v}_n\mathbf{q}_n w(\vec{x}-\vec{x}_n)] - \nabla\times\nabla.\left[\mathbf{q}_n\times\vec{v}_n w(\vec{x}-\vec{x}_n)\right] - \\
&\quad -\frac{d}{dt}\left[\mathbf{q}_n.\nabla w(\vec{x}-\vec{x}_n)\right] + \frac{1}{2}\sum_{j(n)} m_j(\vec{x}_{jn}\times\vec{v}_{jn}).\nabla w(\vec{x}-\vec{x}_n) - \\
&\quad -\mathbf{q}_n.\nabla\left[\vec{v}_n.\nabla w(\vec{x}-\vec{x}_n)\right] \\
&= \langle m_n\vec{v}_n\delta(\vec{x}-\vec{x}_n)\rangle - \nabla\times\nabla.\langle\mathbf{q}_n\times\vec{v}_n\delta(\vec{x}-\vec{x}_n)\rangle - \frac{\partial}{\partial t}\nabla.\langle\mathbf{q}_n w(\vec{x}-\vec{x}_n)\rangle + \\
&\quad +\nabla\times\langle\vec{\mu}_n\delta(\vec{x}-\vec{x}_n)\rangle\,,
\end{aligned}
$$

onde definimos o momento gravito-magnético do n-ésimo sistema local como

$$\vec{\mu}_n \equiv \frac{1}{2}\sum_{j(n)} m_j(\vec{x}_{jn}\times\vec{v}_{jn}).$$

De acordo com (4.25),

$$\left\langle\vec{j}_0\right\rangle \approx \vec{j}_f - \frac{\partial}{\partial t}\nabla.\mathbf{Q} + \nabla\times\left[\vec{M} - \nabla.\left\langle\sum_n \mathbf{q}_n\times\vec{v}_n\delta(\vec{x}-\vec{x}_n)\right\rangle\right], \tag{4.28}$$

onde foi definido a densidade de corrente livre

$$\vec{j}_f \equiv \left\langle\sum_{j(livre)} m_j\vec{v}_j\delta(\vec{x}-\vec{x}_j)\right\rangle + \left\langle\sum_n m_n\vec{v}_n\delta(\vec{x}-\vec{x}_n)\right\rangle,$$

e a gravito-magnetização

$$\vec{M} \equiv \langle\vec{\mu}_n\delta(\vec{x}-\vec{x}_n)\rangle\,.$$

4.2.3 Cálculo da média espacial de $\rho_0 v^2$

Iremos calcular agora a média espacial do termo proporcional a $\rho_0 v^2$ que é o termo que representa a contribuição da energia cinética. De modo análogo ao que foi feito no cálculo das médias anteriores iremos escrever esse termo da forma

$$\rho_0 v^2 = \sum_{j(livre)} m_j v_j^2\delta(\vec{x}-\vec{x}_j) + \sum_n\sum_{k(n)} m_k\left(\vec{v}_n+\vec{v}_{kn}\right)^2\delta(\vec{x}-\vec{x}_n-\vec{x}_{kn}). \tag{4.29}$$

Novamente, o primeiro termo é proporcional a energia cinética dos corpos livres e o segundo dos objetos ligados aos sistemas locais. Observemos separadamente a contribuição do termo ligado

$$
\begin{aligned}
\left\langle \rho_0 v^2 \right\rangle_n &= \sum_{k(n)} m_k \left(v_n^2 + v_{kn}^2 + 2\vec{v}_n.\vec{v}_{kn} \right) w(\vec{x} - \vec{x}_n - \vec{x}_{kn}) \\
&= \sum_{k(n)} m_k \left(v_n^2 + v_{kn}^2 + 2\vec{v}_n.\vec{v}_{kn} \right) \left[w(\vec{x} - \vec{x}_n) - (\vec{x}_{kn}.\nabla) w(\vec{x} - \vec{x}_n) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (\vec{x}_{kn}.\nabla)^2 w(\vec{x} - \vec{x}_n) \right] \\
&\approx m_n v_n^2 w(\vec{x} - \vec{x}_n) + \nabla.\nabla.\mathbf{q}_n v_n^2 w(\vec{x} - \vec{x}_n) + \sum_{k(n)} m_k v_{kn}^2 w(\vec{x} - \vec{x}_n) - \\
&\quad -2\vec{v}_n. \sum_{k(n)} [m_k \vec{v}_{kn} \vec{x}_{kn}].\nabla w(\vec{x} - \vec{x}_n).
\end{aligned} \tag{4.30}
$$

Para melhorarmos essa expressão usaremos a identidade (4.27) obtida no cálculo da média de $\vec{j}_0$, e que

$$
\vec{v}_n.\frac{d}{dt} \left[\mathbf{q}_n.\nabla w(\vec{x} - \vec{x}_n) \right] = \frac{d}{dt} \nabla. \left[\mathbf{q}_n.\vec{v}_n w(\vec{x} - \vec{x}_n) \right] - \nabla. \left[\mathbf{q}_n.\frac{d\vec{v}_n}{dt} w(\vec{x} - \vec{x}_n) \right],
$$

para obtermos que

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_n. \sum_{k(n)} [m_k \vec{v}_{kn} \vec{x}_{kn}].\nabla w(\vec{x} - \vec{x}_n) &= \frac{d}{dt} \nabla. \left[\mathbf{q}_n.\vec{v}_n w(\vec{x} - \vec{x}_n) \right] - \nabla. \left[\mathbf{q}_n.\frac{d\vec{v}_n}{dt} w(\vec{x} - \vec{x}_n) \right] + \\
&\quad + \vec{v}_n.\nabla \times \nabla. \left[\mathbf{q}_n \times \vec{v}_n w(\vec{x} - \vec{x}_n) \right] - \\
&\quad - \vec{v}_n.\nabla \times \left[\vec{\mu}_n w(\vec{x} - \vec{x}_n) \right] + \nabla.\nabla.[\mathbf{q}_n v_n^2 w(\vec{x} - \vec{x}_n)].
\end{aligned}
$$

Finalmente usaremos que

$$
\begin{aligned}
&\vec{v}_n.\nabla \times \nabla. \left[\mathbf{q}_n \times \vec{v}_n w(\vec{x} - \vec{x}_n) \right] - \vec{v}_n.\nabla \times \left[\vec{\mu}_n w(\vec{x} - \vec{x}_n) \right] = \\
&\nabla.\nabla. \left[(\mathbf{q}_n \times \vec{v}_n) \times \vec{v}_n w(\vec{x} - \vec{x}_n) \right] + \nabla.[\vec{v}_n \times \vec{\mu}_n w(\vec{x} - \vec{x}_n)],
\end{aligned}
$$

na expressão acima de modo a obter, a partir da equação (4.30), que

$$
\begin{aligned}
\left\langle \rho_0 v^2 \right\rangle_n &\approx \left\langle m_n v_n^2 \delta(\vec{x} - \vec{x}_n) \right\rangle - \nabla.\nabla. \left\langle \mathbf{q}_n v_n^2 \delta(\vec{x} - \vec{x}_n) \right\rangle + \left\langle \sum_{k(n)} m_k v_{kn}^2 \delta(\vec{x} - \vec{x}_n) \right\rangle - \\
&\quad -2\frac{\partial}{\partial t} \nabla. \left\langle \mathbf{q}_n.\vec{v}_n \delta(\vec{x} - \vec{x}_n) \right\rangle + 2\nabla. \left\langle \mathbf{q}_n.\frac{d\vec{v}_n}{dt} \delta(\vec{x} - \vec{x}_n) \right\rangle - \\
&\quad -2\nabla.\nabla. \left\langle (\mathbf{q}_n \times \vec{v}_n) \times \vec{v}_n \delta(\vec{x} - \vec{x}_n) \right\rangle - 2\nabla. \left\langle \vec{v}_n \times \vec{\mu}_n \delta(\vec{x} - \vec{x}_n) \right\rangle .
\end{aligned}
$$

Como cada corpo segue a equação de movimento dada por (3.36)

$$
\frac{d\vec{v}_n}{dt} = -\nabla \phi_n,
$$

então, podemos escrever o seguinte termo como

$$\begin{aligned}\left\langle \mathbf{q}_n.\frac{d\vec{v}_n}{dt}\delta(\vec{x}-\vec{x}_n)\right\rangle &= \left\langle \mathbf{q}_n.\sum_{j(liv.)} Gm_j\frac{\vec{x}_j-\vec{x}_n}{|\vec{x}_j-\vec{x}_n|^3}\delta(\vec{x}-\vec{x}_n)\right\rangle + \\ &+\left\langle \mathbf{q}_n.\sum_{m;m\neq n}\sum_{k(m)} Gm_k\frac{\vec{x}_m-\vec{x}_n+\vec{x}_{km}}{|\vec{x}_m-\vec{x}_n+\vec{x}_{km}|^3}\delta(\vec{x}-\vec{x}_n)\right\rangle .\end{aligned}$$

Podemos expandir ainda esse último termo em série de Taylor em torno de $\vec{x}_{km}=\vec{0}$, de modo que

$$\begin{aligned}\sum_{k(m)} Gm_k\frac{\vec{x}_m-\vec{x}_n+\vec{x}_{km}}{|\vec{x}_m-\vec{x}_n+\vec{x}_{km}|^3} &\approx \sum_{k(m)}\frac{Gm_k}{|\vec{x}_m-\vec{x}_n|^3}\left[(\vec{x}_m-\vec{x}_n)+\vec{x}_{km}-3\widehat{n}_{mn}(\widehat{n}_{mn}.\vec{x}_{km})\right] \\ &= Gm_m\frac{(\vec{x}_m-\vec{x}_n)}{|\vec{x}_m-\vec{x}_n|^3},\end{aligned}$$

onde o vetor unitário $\widehat{n}_{mn}$ é dado por

$$\widehat{n}_{mn}=\frac{(\vec{x}_m-\vec{x}_n)}{|\vec{x}_m-\vec{x}_n|}.$$

Finalmente podemos voltar a equação (4.29) para obter a expressão desejada

$$\left\langle\rho_0 v^2\right\rangle \approx \left(\rho_0 v^2\right)_f - \nabla.\vec{A}_1 - \nabla.\nabla.\mathbf{B}_1, \tag{4.31}$$

onde foi definido a energia cinética livre

$$\left(\rho_0 v^2\right)_f \equiv \left\langle \sum_{j(liv.)} m_j v_j^2\delta(\vec{x}-\vec{x}_j)\right\rangle + \left\langle \sum_{n} m_n v_n^2\delta(\vec{x}-\vec{x}_n)\right\rangle + \left\langle \sum_{n}\sum_{k(n)} m_k v_{kn}^2\delta(\vec{x}-\vec{x}_n)\right\rangle,$$

e as quantidades

$$\begin{aligned}\vec{A}_2 &= 2\left\langle\sum_n \vec{v}_n\times\vec{\mu}_n\delta(\vec{x}-\vec{x}_n)\right\rangle - 2\left\langle\sum_{\substack{m,n\\ m\neq n}}\mathbf{q}_n.Gm_m\frac{(\vec{x}_m-\vec{x}_n)}{|\vec{x}_m-\vec{x}_n|^3}\delta(\vec{x}-\vec{x}_n)\right\rangle - \\ &-2\left\langle\sum_n\sum_{j(liv.)}\mathbf{q}_n.Gm_j\frac{\vec{x}_j-\vec{x}_n}{|\vec{x}_j-\vec{x}_n|^3}\delta(\vec{x}-\vec{x}_n)\right\rangle + 2\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\sum_n \mathbf{q}_n.\vec{v}_n\delta(\vec{x}-\vec{x}_n)\right\rangle, \\ \mathbf{B}_2 &= \left\langle\sum_n \mathbf{q}_n v_n^2\delta(\vec{x}-\vec{x}_n)\right\rangle + 2\left\langle\sum_n(\mathbf{q}_n\times\vec{v}_n)\times\vec{v}_n\delta(\vec{x}-\vec{x}_n)\right\rangle.\end{aligned}$$

4.2.4 Cálculo da média espacial de $\rho_0\phi_n$

Finalmente calcularemos a média do termo que representa a contribuição da energia gravitacional newtoniana na fonte do campo gravito-elétrico. Usando o sistema de coordenadas definido no cálculo da média da densidade de matéria, figura 2, podemos escreve-lo como

$$\begin{aligned}
\rho_0\phi_n &= \sum_{j(livre)} m_j\delta(\vec{x}-\vec{x}_j)\left[\sum_{k(livre)k\neq j}\frac{Gm_k}{|\vec{x}-\vec{x}_k|}+\sum_n\sum_{k(n)}\frac{Gm_k}{|\vec{x}-\vec{x}_k|}\right]+\\
&+\sum_m\sum_{j(m)} m_j\delta(\vec{x}-\vec{x}_j)\left[\sum_{k(livre)}\frac{Gm_k}{|\vec{x}-\vec{x}_k|}+\sum_n\sum_{\substack{k(n)\\ k(n)\neq j(m)}}\frac{Gm_k}{|\vec{x}-\vec{x}_k|}\right]\\
&= \sum_{j(livre)}\sum_{\substack{j(livre)\\ k>j}}\frac{Gm_jm_k}{|\vec{x}_j-\vec{x}_k|}\delta(\vec{x}-\vec{x}_j)+\sum_{j(livre)}\sum_n\sum_{k(n)}\frac{Gm_km_j}{|\vec{x}_j-\vec{x}_n-\vec{x}_{kn}|}\delta(\vec{x}-\vec{x}_j)+\\
&+\sum_{k(livre)}\sum_m\sum_{j(m)}\frac{Gm_km_j}{|\vec{x}_m-\vec{x}_k+\vec{x}_{jm}|}\delta(\vec{x}-\vec{x}_m-\vec{x}_{jm})+\\
&+\frac{1}{2}\sum_{m,n}\sum_{\substack{j(m),k(n)\\ k(n)\neq j(m)}}\frac{Gm_jm_k}{|\vec{x}_m-\vec{x}_n-(\vec{x}_{kn}-\vec{x}_{jm})|}\delta(\vec{x}-\vec{x}_m-\vec{x}_{jm}).
\end{aligned}$$

O primeiro termo acima é a interação gravitacional dos corpos livres -por isso $k>j$ para não contar duas vezes a mesma interação. O segundo e o terceiro é a interação dos corpos livres com os corpos ligados e o último é a interação entre os corpos ligados, como não há auto-interação gravitacional $k(n)\neq j(m)$, para tal ou $m\neq n$ ou $j(m)\neq k(m)$. Observemos separadamente a média do último termo

$$\begin{aligned}
<\rho_0\phi_n>_4 &= \frac{1}{2}\sum_{m,n}\sum_{\substack{j(m),k(n)\\ k(n)\neq j(m)}} Gm_jm_k\int w(\vec{s})\frac{\delta(\vec{x}-\vec{x}_m-\vec{x}_{jm}-\vec{s})}{|\vec{x}_m-\vec{x}_n-(\vec{x}_{kn}-\vec{x}_{jm})|}d^3s\\
&= \frac{1}{2}\sum_{m,n}\sum_{\substack{j(m),k(n)\\ k(n)\neq j(m)}}\frac{Gm_jm_k}{|\vec{x}_m-\vec{x}_n-(\vec{x}_{kn}-\vec{x}_{jm})|}w(\vec{x}-\vec{x}_m-\vec{x}_{jm})\\
&= \sum_{\substack{m,n\\ m<n}}\sum_{j(m),k(n)}\frac{Gm_jm_kw(\vec{x}-\vec{x}_m-\vec{x}_{jm})}{|\vec{x}_m-\vec{x}_n-(\vec{x}_{kn}-\vec{x}_{jm})|}+\\
&+\sum_n\sum_{\substack{j,k\\ j<k}}\frac{Gm_jm_k}{|\vec{x}_{kn}-\vec{x}_{jn}|}w(\vec{x}-\vec{x}_n-\vec{x}_{jn}).
\end{aligned}$$

Expandindo $|\vec{x}_m - \vec{x}_n - (\vec{x}_{kn} - \vec{x}_{jm})|^{-1}$ em torno de $\vec{x}_{kn} - \vec{x}_{jm} = \vec{0}$, para $m \neq n$, e $w(\vec{x} - \vec{x}_m - \vec{x}_{jm})$ em torno de $\vec{x}_{jm} = \vec{0}$ obtemos que

$$\begin{aligned}
< \rho_0 \phi_n >_4 \ \approx \ & \sum_n \sum_{\substack{j,k \\ j<k}} \frac{G m_j m_k}{|\vec{x}_{kn} - \vec{x}_{jn}|} \left[w(\vec{x} - \vec{x}_n) - (\vec{x}_{jn}.\nabla) w(\vec{x} - \vec{x}_n) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} (\vec{x}_{jn}.\nabla)^2 w(\vec{x} - \vec{x}_n) \right] + \sum_{\substack{m,n \\ m<n}} \sum_{j(m),k(n)} \frac{G m_j m_k}{|\vec{x}_m - \vec{x}_n|} \left[1 + \right. \\
& \left. + \frac{(\vec{x}_m - \vec{x}_n).(\vec{x}_{kn} - \vec{x}_{jm})}{|\vec{x}_m - \vec{x}_n|^2} \right] \times \left[w(\vec{x} - \vec{x}_m) - \right. \\
& \left. - (\vec{x}_{jm}.\nabla) w(\vec{x} - \vec{x}_m) + \frac{1}{2} (\vec{x}_{jm}.\nabla)^2 w(\vec{x} - \vec{x}_m) \right].
\end{aligned}$$

Observemos separadamente o segundo termo dessa expressão

$$\begin{aligned}
< \rho_0 \phi_n >_{4,2} \ \approx \ & \sum_{\substack{m,n \\ m<n}} \frac{G m_n}{|\vec{x}_m - \vec{x}_n|} \{ m_m w(\vec{x} - \vec{x}_m) + \nabla.\nabla. [\mathbf{q}_m w(\vec{x} - \vec{x}_m)] \} + \\
& + \sum_{\substack{m,n \\ m<n}} G m_n \frac{(\vec{x}_m - \vec{x}_n)}{|\vec{x}_m - \vec{x}_n|^3} . \sum_{j(m)} \nabla. [m_j \vec{x}_{jm} \vec{x}_{jm} w(\vec{x} - \vec{x}_m)] \\
= \ & \left\langle \sum_{\substack{m,n \\ m<n}} \frac{G m_n m_m}{|\vec{x}_m - \vec{x}_n|} \delta(\vec{x} - \vec{x}_m) \right\rangle + \nabla.\nabla. \left\langle \sum_{\substack{m,n \\ m<n}} \frac{G m_n \mathbf{q}_m}{|\vec{x}_m - \vec{x}_n|} \delta(\vec{x} - \vec{x}_m) \right\rangle + \\
& + 2\nabla. \left\langle \sum_{\substack{m,n \\ m<n}} \mathbf{q}_m . \frac{G m_n (\vec{x}_m - \vec{x}_n)}{|\vec{x}_m - \vec{x}_n|^3} \delta(\vec{x} - \vec{x}_m) \right\rangle .
\end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{aligned}
< \rho_0 \phi_n >_4 \ \approx \ & \left\langle \sum_{\substack{m,n \\ m<n}} \frac{G m_n m_m}{|\vec{x}_m - \vec{x}_n|} \delta(\vec{x} - \vec{x}_m) \right\rangle - \nabla. \left\langle \sum_n \sum_{\substack{j,k \\ j<k}} \frac{G m_k \vec{p}_j}{|\vec{x}_{jn} - \vec{x}_{kn}|} \delta(\vec{x} - \vec{x}_n) \right\rangle + \\
& + \nabla.\nabla. \left\langle \sum_{\substack{m,n \\ m<n}} \frac{G m_n \mathbf{q}_m}{|\vec{x}_m - \vec{x}_n|} \delta(\vec{x} - \vec{x}_m) \right\rangle + \left\langle \sum_n \sum_{\substack{j,k \\ j<k}} \frac{G m_j m_k}{|\vec{x}_{jn} - \vec{x}_{kn}|} \delta(\vec{x} - \vec{x}_n) \right\rangle + \\
& + 2\nabla. \left\langle \sum_{\substack{m,n \\ m<n}} \mathbf{q}_m . \frac{G m_n (\vec{x}_m - \vec{x}_n)}{|\vec{x}_m - \vec{x}_n|^3} \delta(\vec{x} - \vec{x}_m) \right\rangle + \\
& + \nabla.\nabla. \left\langle \sum_n \sum_{\substack{j,k \\ j<k}} \frac{G m_k \mathbf{q}_j}{|\vec{x}_{jn} - \vec{x}_{kn}|} \delta(\vec{x} - \vec{x}_n) \right\rangle .
\end{aligned}$$

Nos concentremos agora na média do terceiro termo de $\rho_0\phi_n$

$$
\begin{aligned}
< \rho_0\phi_n >_3 &= \sum_{k(livre)}\sum_m\sum_{j(m)}\frac{Gm_km_j}{|\vec{x}_m-\vec{x}_k+\vec{x}_{jm}|}w(\vec{x}-\vec{x}_m-\vec{x}_{jm}) \\
&\approx \sum_{k(livre)}\sum_m\sum_{j(m)}\frac{Gm_km_j}{|\vec{x}_m-\vec{x}_k+\vec{x}_{jm}|}\{w(\vec{x}-\vec{x}_m)-\nabla.[\vec{x}_{jm}w(\vec{x}-\vec{x}_m)]+ \\
&\quad +\frac{1}{2}\nabla.\nabla.[\vec{x}_{jm}\vec{x}_{jm}w(\vec{x}-\vec{x}_m)]\} \\
&= \left\langle\sum_{k(livre)}\sum_m\sum_{j(m)}\frac{Gm_km_j}{|\vec{x}_j-\vec{x}_k|}\delta(\vec{x}-\vec{x}_m)\right\rangle - \\
&\quad -\nabla.\left\langle\sum_{k(livre)}\sum_m\sum_{j(m)}\frac{Gm_k\vec{p}_j}{|\vec{x}_j-\vec{x}_k|}\delta(\vec{x}-\vec{x}_m)\right\rangle + \\
&\quad +\nabla.\nabla.\left\langle\sum_{k(livre)}\sum_m\sum_{j(m)}\frac{Gm_k\mathbf{q}_j}{|\vec{x}_j-\vec{x}_k|}\delta(\vec{x}-\vec{x}_m)\right\rangle.
\end{aligned}
$$

E, finalmente, juntando a contribuição de todos os termos obtemos que

$$< \rho_0\phi_n > \approx (\rho_0\phi_n)_f - \nabla.\vec{A}_1 + \nabla.\nabla.\mathbf{B}_1,$$

onde

$$
\begin{aligned}
(\rho_0\phi_n)_f &= \left\langle\sum_{j(livre)}\sum_{\substack{k(livre)\\k\neq j}}\frac{Gm_jm_k}{|\vec{x}_j-\vec{x}_k|}\delta(\vec{x}-\vec{x}_j)\right\rangle + \left\langle\sum_{j(livre)}\sum_n\sum_{k(n)}\frac{Gm_km_j}{|\vec{x}_j-\vec{x}_k|}\delta(\vec{x}-\vec{x}_j)\right\rangle + \\
&\quad + \left\langle\sum_{k(livre)}\sum_m\sum_{j(m)}\frac{Gm_km_j}{|\vec{x}_j-\vec{x}_k|}\delta(\vec{x}-\vec{x}_m)\right\rangle + \left\langle\sum_{\substack{m,n\\m\neq n}}\frac{Gm_nm_m}{|\vec{x}_m-\vec{x}_n|}\delta(\vec{x}-\vec{x}_m)\right\rangle + \\
&\quad + \left\langle\sum_n\sum_{\substack{j,k\\j\neq k}}\frac{Gm_jm_k}{|\vec{x}_{jn}-\vec{x}_{kn}|}\delta(\vec{x}-\vec{x}_n)\right\rangle, \\
\vec{A}_1 &= \left\langle\sum_{k(livre)}\sum_m\sum_{j(m)}\frac{Gm_k\vec{p}_j}{|\vec{x}_j-\vec{x}_k|}\delta(\vec{x}-\vec{x}_m)\right\rangle + \left\langle\sum_n\sum_{\substack{j,k\\j\neq k}}\frac{Gm_k\vec{p}_j}{|\vec{x}_{jn}-\vec{x}_{kn}|}\delta(\vec{x}-\vec{x}_n)\right\rangle - \\
&\quad -2\left\langle\sum_{\substack{m,n\\m\neq n}}\mathbf{q}_m.\frac{Gm_n(\vec{x}_m-\vec{x}_n)}{|\vec{x}_m-\vec{x}_n|^3}\delta(\vec{x}-\vec{x}_m)\right\rangle, \\
\mathbf{B}_1 &= \left\langle\sum_{k(livre)}\sum_m\sum_{j(m)}\frac{Gm_k\mathbf{q}_j}{|\vec{x}_j-\vec{x}_k|}\delta(\vec{x}-\vec{x}_m)\right\rangle + \left\langle\sum_{\substack{m,n\\m\neq n}}\frac{Gm_n\mathbf{q}_m}{|\vec{x}_m-\vec{x}_n|}\delta(\vec{x}-\vec{x}_m)\right\rangle + \\
&\quad + \left\langle\sum_n\sum_{\substack{j,k\\j\neq k}}\frac{Gm_k\mathbf{q}_j}{|\vec{x}_{jn}-\vec{x}_{kn}|}\delta(\vec{x}-\vec{x}_n)\right\rangle.
\end{aligned}
$$

4.3 Campos macroscópicos

Nas seções anteriores calculamos as médias necessárias ao cálculo das equações de Maxwell-Einstein promediadas. Em fim encontramos o resultado

$$\begin{aligned}
\nabla.\vec{E}_g &\approx -\frac{1}{\varepsilon_g}\left[\rho_f + \nabla.\nabla.\mathbf{Q} + \frac{3}{2}\left(\rho_0 v^2\right)_f + \frac{3}{2}\nabla.\vec{A}_2 + \frac{3}{2}\nabla.\nabla.\mathbf{B}_2 + \right. \\
&\left. +(\rho_0\phi_n)_f + \nabla.\vec{A}_1 + \nabla.\nabla.\mathbf{B}_1\right], \qquad (4.32) \\
\nabla.\vec{B}_g &= 0, \\
\nabla\times\vec{E}_g &= -\frac{\partial\vec{B}_g}{\partial t}, \\
\nabla\times\vec{B}_g &\approx -\mu_g\vec{j}_f + \mu_g\frac{\partial}{\partial t}\nabla.\mathbf{Q} - \mu_g\nabla\times\left[\vec{M} - \nabla.\left\langle\sum_n \mathbf{q}_n\times\vec{v}_n\delta(\vec{x}-\vec{x}_n)\right\rangle\right] + \\
&+\frac{\partial\vec{E}_g}{\partial t}. \qquad (4.33)
\end{aligned}$$

Reorganizando a equação (4.32) da forma

$$\nabla.\left[\vec{E}_g + \frac{1}{\varepsilon_g}\left(\nabla.\mathbf{Q} + \frac{3}{2}(\vec{A}_2 + \nabla.\mathbf{B}_2) + (\vec{A}_1\nabla.\mathbf{B}_1)\right)\right] \approx -\frac{1}{\varepsilon_g}\left[\rho_f + \frac{3}{2}\left(\rho_0 v^2\right)_f + (\rho_0\phi_n)_f\right],$$

nos permite definir o campo

$$\vec{D}_g \approx \vec{E}_g + \frac{1}{\varepsilon_g}\left(\nabla.\mathbf{Q} + \frac{3}{2}\vec{A}_2 + \frac{3}{2}\nabla.\mathbf{B}_2 + \vec{A}_1 + \nabla.\mathbf{B}_1\right) \qquad (4.34)$$

de modo a tornar válida a equação

$$\nabla.\vec{D}_g = -\frac{1}{\varepsilon_g}\left[\rho_f + \frac{3}{2}\left(\rho_0 v^2\right)_f + (\rho_0\phi_n)_f\right].$$

Da definição (4.34) isolamos

$$\vec{E}_g \approx \vec{D}_g - \frac{1}{\varepsilon_g}\left(\nabla.\mathbf{Q} + \frac{3}{2}\vec{A}_2 + \frac{3}{2}\nabla.\mathbf{B}_2 + \vec{A}_1 + \nabla.\mathbf{B}_1\right),$$

afim de substituir na equação (4.33) para encontrarmos

$$\begin{aligned}
\nabla\times\vec{B}_g &\approx -\mu_g\vec{j}_f + \mu_g\frac{\partial}{\partial t}\nabla.\mathbf{Q} - \mu_g\nabla\times\left[\vec{M} - \nabla.\left\langle\sum_n \mathbf{q}_n\times\vec{v}_n\delta(\vec{x}-\vec{x}_n)\right\rangle\right] + \frac{\partial\vec{D}_g}{\partial t} - \\
&-\frac{1}{\varepsilon_g}\left(\frac{\partial\nabla.\mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{3}{2}\frac{\partial\vec{A}_2}{\partial t} + \frac{3}{2}\nabla.\frac{\partial\mathbf{B}_2}{\partial t} + \frac{\partial\vec{A}_1}{\partial t} + \nabla.\frac{\partial\mathbf{B}_1}{\partial t}\right).
\end{aligned}$$

Devido a propriedade (4.17), mantida do eletromagnetismo

$$\mu_g \frac{\partial}{\partial t} \nabla.\mathbf{Q} - \frac{1}{\varepsilon_g} \frac{\partial \nabla.\mathbf{Q}}{\partial t} = 0,$$

exatamente como no caso eletromagnético. Finalmente encontramos que

$$\nabla \times \left[\vec{B}_g + \mu_g \vec{M} - \mu_g \nabla. \left\langle \sum_n \mathbf{q}_n \times \vec{v}_n \delta(\vec{x} - \vec{x}_n) \right\rangle \right] \approx -\mu_g \vec{j}_e + \frac{\partial \vec{D}_g}{\partial t},$$

onde foi definido a corrente efetiva

$$\vec{j}_e \approx \vec{j}_f + \frac{3}{2} \frac{\partial \vec{A}_2}{\partial t} + \frac{3}{2} \nabla. \frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial t} + \nabla. \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}.$$

Definiremos da mesma forma que na teoria eletromagnética

$$\vec{H}_g \approx \vec{B}_g + \mu_g \vec{M} - \mu_g \nabla. \left\langle \sum_n \mathbf{q}_n \times \vec{v}_n \delta(\vec{x} - \vec{x}_n) \right\rangle,$$

de modo a validar

$$\nabla \times \vec{H}_g = -\mu_g \vec{j}_e + \frac{\partial \vec{D}_g}{\partial t}.$$

Finalmente as equações obtidas foram

$$\begin{aligned}
\nabla.\vec{D}_g &= -\frac{1}{\varepsilon_g} \left[\rho_f + \frac{3}{2} \left(\rho_0 v^2 \right)_f + (\rho_0 \phi_n)_f \right], \\
\nabla.\vec{B}_g &= 0, \\
\nabla \times \vec{E}_g &= -\frac{\partial \vec{B}_g}{\partial t}, \\
\nabla \times \vec{H}_g &= -\mu_g \vec{j}_e + \frac{\partial \vec{D}_g}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Finalmente observemos que, tomando a promediação na lei de conservação da massa (3.22)

$$\nabla. < \vec{j}_0 > + \frac{\partial}{\partial t} < \rho_0 >= 0.$$

Substituindo as expressões (4.24) e (4.28)

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla.\{\vec{j}_f - \frac{\partial}{\partial t} \nabla.\mathbf{Q} + \nabla \times \left[\vec{M} - \nabla. \left\langle \sum_n \mathbf{q}_n \times \vec{v}_n \delta(\vec{x} - \vec{x}_n) \right\rangle \right] \} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_f + \nabla.\nabla.\mathbf{Q} \right] \\
&= \nabla.\vec{j}_f - \frac{\partial}{\partial t} \nabla.\nabla.\mathbf{Q} + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla.\nabla.\mathbf{Q} \\
&= \nabla.\vec{j}_f + \frac{\partial \rho_f}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Que é a lei de conservação da massa livre. As equações macroscópicas obtidas indicam a lei de conservação

$$
\begin{aligned}
0 &= \nabla.\vec{j}_e + \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_f + \frac{3}{2}\left(\rho_0 v^2\right)_f + (\rho_0\phi_n)_f\right] \\
&= \nabla.\left[\vec{j}_f + \frac{3}{2}\frac{\partial \vec{A}_2}{\partial t} + \frac{3}{2}\nabla.\frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial t} + \nabla.\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}\right] + \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_f + \frac{3}{2}\left(\rho_0 v^2\right)_f + (\rho_0\phi_n)_f\right] \\
&= \nabla.\left[\frac{3}{2}\frac{\partial \vec{A}_2}{\partial t} + \frac{3}{2}\nabla.\frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial t} + \nabla.\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{3}{2}\left(\rho_0 v^2\right)_f + (\rho_0\phi_n)_f\right].
\end{aligned}
$$

Essa lei de conservação obtida indica que os termos que entram na definição da corrente efetiva, além da corrente livre, representam uma corrente associada aos termos que aparecem na fonte do campo gravito-elétrico, a menos da densidade livre. O que nos indica uma simetria muito maior nas equações macroscópicas do que nas equações fundamentais, já que nestas últimas a fonte do campo gravito-magnético era somente o fluxo de matéria, sem levar em conta o fluxo de outras formas de energia, enquanto que a fonte do campo gravito-elétrico as levava em conta. Nas equações macroscópicas essa assimetria foi quebrada pois a fonte do campo $\vec{H}_g$ é o fluxo da fonte do campo $\vec{D}_g$.

CONCLUSÃO

Mostramos, neste trabalho, que com os elementos independentes da métrica expandida na aproximação pós-newtoniana de quarta ordem na velocidade média é possível construir campos que obedecem equações similares as de Maxwell do eletromagnetismo quando fixado o gauge de Lorentz. Através dessas equações se torna evidente que não somente a matéria interage gravitacionalmente mais também a energia - no caso a potencial gravitacional e a energia cinética. Devido ao gauge obedecido por tais campos, proveniente da fixação de coordenadas, a propagação desses campos se dá à velocidade da luz, o que corrobora com o espírito da relatividade especial.

Com esses campos gravito-eletromagnéticos encontramos os campos efetivos para uma distribuição de matéria organizada em sistemas locais, como o que ocorre no universo, onde a matéria está organizada em estruturas discretas, como os sistemas solares, em uma escala, galáxias, em uma escala maior, e, finalmente, em grupos de galáxias; somente depois desse último nível é que podemos usar o modelo de Friedmann, onde se pressupõe a matéria homogeneamente distribuída. As equações obtidas para esses campos efetivos, $\vec{D}_g$ e $\vec{H}_g$, apresentaram uma simetria maior que as equações dos campos fundamentais, já que as fontes satisfazem uma equação de continuidade de mesma ordem, ou seja, a fonte do campo $\vec{H}_g$ é o fluxo associado a fonte do campo $\vec{D}_g$. Mostramos que a definição desses campos é bastante simplificado ao escolhermos o sistema de coordenadas fixado nos centros de massa dos sistemas locais, onde os termos de dipolo zeram.

Como perspectivas de estudos posteriores a serem feitos com base nos conhecimentos expostos bem como nos resultados obtidos nesta dissertação podemos exemplificar:

1. A inclusão de partículas carregadas eletricamente, de modo a acoplar o campo gravito-eletromagnético ao campo eletromagnético.

2. Aplicar as equações de Maxwell-Einstein á um sistema binário e verificar se, como na caso eletromagnético, há radiação de energia. Obtendo uma resposta positiva a essa questão então, por exemplo, o sistema solar estaria destinado ao colapso. Um cálculo do tempo necessário para esse colapso poderia indicar a necessidade de se postular, assim como fez Rutherford para o átomo de hidrogênio, que um sistema estacionário não irradia.

3. Prosseguir com a aproximação pós-newtoniana em ordens superiores às consideradas neste trabalho e verificar o que ocorre com os campos descritos aqui.

4. Utilizar funções de ensaio explicitas no cálculo dos campos médios. 5. Incluir a constante cosmológica na estrutura aqui apresentada e verificar como ela afeta os campos gravito-eletromagnéticos.

APÊNDICE A – O problema de dois corpos puntiformes fixos

Como aplicação da aproximação pós-newtoniana e dos campos gravito-eletromagnéticos iremos considerar dois corpos pontuais de massa m_1 e m_2 fixos nas posições $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_2$ respectivamente. De modo que a densidade de matéria desse sistema é dada por

$$\rho_0 = m_1\delta(\vec{x}-\vec{x}_1) + m_2\delta(\vec{x}-\vec{x}_2),$$

e a densidade de energia gravitacional por

$$\rho_0\phi_n = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{x}-\vec{x}_1|}\delta(\vec{x}-\vec{x}_2) - \frac{Gm_2m_1}{|\vec{x}-\vec{x}_2|}\delta(\vec{x}-\vec{x}_1) = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}[\delta(\vec{x}-\vec{x}_1)+\delta(\vec{x}-\vec{x}_2)].$$

De acordo com as equações (3.32),(3.34) e a definição (4.1)

$$\begin{aligned}
\phi &= \phi_n + \psi = -G\int\frac{d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\left[\rho_0(\vec{x}\,') + \rho_0\phi_n(\vec{x}\,')\right] \\
&= -G\int\frac{d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}[m_1\delta(\vec{x}\,'-\vec{x}_1) + m_2\delta(\vec{x}\,'-\vec{x}_2)] + \\
&\quad +G^2\frac{m_1m_2}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}\int\frac{d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}[\delta(\vec{x}\,'-\vec{x}_1)+\delta(\vec{x}\,'-\vec{x}_2)] \\
&= -G\left[\frac{m_1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|} + \frac{m_2}{|\vec{x}-\vec{x}_2|}\right] + G^2\frac{m_1m_2}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}\left[\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|} + \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_2|}\right].
\end{aligned}$$

E, de acordo com (3.33),

$$\overset{[2]}{g}_{ij} = 0.$$

A componente puramente temporal da métrica pode ser obtida por (4.2)

$$\begin{aligned}
g_{00} &= -1 - 2\phi - 2\phi^2 \\
&= -1 - 2\left\{-G\left[\frac{m_1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|} + \frac{m_2}{|\vec{x}-\vec{x}_2|}\right] + G^2\frac{m_1 m_2}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}\left[\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|} + \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_2|}\right]\right\} - \\
&\quad -2\left\{-G\left[\frac{m_1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|} + \frac{m_2}{|\vec{x}-\vec{x}_2|}\right] + G^2\frac{m_1 m_2}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}\left[\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|} + \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_2|}\right]\right\}^2 \\
&= 1 + \left[-1 + \frac{2Gm_1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|} - \frac{2G^2 m_1^2}{|\vec{x}-\vec{x}_1|^2}\right] + \left[-1 + \frac{2Gm_2}{|\vec{x}-\vec{x}_2|} - \frac{2G^2 m_2^2}{|\vec{x}-\vec{x}_2|^2}\right] - \\
&\quad -2G^2\frac{m_1 m_2}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}\left[\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|} + \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_2|}\right]\left\{1 - 2G\left[\frac{m_1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|} + \frac{m_2}{|\vec{x}-\vec{x}_2|}\right] + \right. \\
&\quad \left. + G^2\frac{m_1 m_2}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}\left[\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|} + \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_2|}\right]\right\}. \qquad \text{(A.1)}
\end{aligned}$$

E a componente puramente espacial, por (4.3)

$$\begin{aligned}
g_{ij} &= \delta_{ij}(1 - 2\phi) \\
&= \delta_{ij} - 2\delta_{ij}\left\{-G\left[\frac{m_1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|} + \frac{m_2}{|\vec{x}-\vec{x}_2|}\right] + G^2\frac{m_1 m_2}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}\left[\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|} + \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_2|}\right]\right\} \\
&= -\delta_{ij} + \delta_{ij}\left[1 + \frac{2Gm_1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|}\right] + \delta_{ij}\left[1 + \frac{2Gm_2}{|\vec{x}-\vec{x}_2|}\right] - \\
&\quad -2\delta_{ij}G^2\frac{m_1 m_2}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}\left[\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|} + \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_2|}\right]. \qquad \text{(A.2)}
\end{aligned}$$

Podemos observar que essas soluções são compostas pelas soluções originadas por cada massa separadamente mais um termo de interação. Em uma melhor aproximação podemos substituir as soluções aproximadas independentes por seus valores exatos, mantendo a aproximação somente no termo de interação. A solução exata do problema de Schwarzschild,para uma massa M situada na origem, em coordenadas harmônicas é (12)

$$g_{00} = -\frac{1 - MG/r}{1 + MG/r} \approx -1 + \frac{2GM}{r} - \frac{2G^2M^2}{r^2},$$

$$g_{ij} = \left(1 + \frac{MG}{r}\right)^2 \delta_{ij} + \left(\frac{MG}{r}\right)^2 \frac{1 + MG/r}{1 - MG/r}\left(\frac{x^i x^j}{r^2}\right),$$

$$g_{0i} = 0.$$

Na aproximação tomada esse resultado se converte em (12)

$$g_{00} \approx -1 + \frac{2GM}{r} - \frac{2G^2M^2}{r^2},$$

$$g_{ij} \approx \delta_{ij}\left(1 + 2\frac{MG}{r}\right),$$

$$g_{0i} = 0.$$

De modo que as soluções (A.1) e (A.2) podem ser escritas como

$$\begin{aligned}
g_{00} &= 1-\frac{1-Gm_1/|\vec{x}-\vec{x}_1|}{1+Gm_1/|\vec{x}-\vec{x}_1|}-\frac{1-Gm_2/|\vec{x}-\vec{x}_2|}{1+Gm_2/|\vec{x}-\vec{x}_2|}+\\
&\quad -2G^2\frac{m_1m_2}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}\left[\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|}+\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_2|}\right]\left\{1-2G\left[\frac{m_1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|}+\frac{m_2}{|\vec{x}-\vec{x}_2|}\right]+\right.\\
&\quad \left.+G^2\frac{m_1m_2}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}\left[\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|}+\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_2|}\right]\right\},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&g_{ij} =\\
&\left[\left(1+\frac{m_1G}{|\vec{x}-\vec{x}_1|}\right)^2\delta_{ij}+\left(\frac{m_1G}{|\vec{x}-\vec{x}_1|}\right)^2\frac{1+m_1G/|\vec{x}-\vec{x}_1|}{1-m_1G/|\vec{x}-\vec{x}_1|}\left(\frac{(x^i-x_1^i)(x^j-x_1^j)}{|\vec{x}-\vec{x}_1|^2}\right)\right]+\\
&+\left[\left(1+\frac{m_2G}{|\vec{x}-\vec{x}_2|}\right)^2\delta_{ij}+\left(\frac{m_2G}{|\vec{x}-\vec{x}_2|}\right)^2\frac{1+m_2G/|\vec{x}-\vec{x}_2|}{1-m_2G/|\vec{x}-\vec{x}_2|}\left(\frac{(x^i-x_2^i)(x^j-x_2^j)}{|\vec{x}-\vec{x}_2|^2}\right)\right]-\\
&-\delta_{ij}-2\delta_{ij}G^2\frac{m_1m_2}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}\left[\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|}+\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_2|}\right].
\end{aligned}$$

Finalmente usaremos as soluções (4.20) e (4.21) para obtermos que

$$\vec{B}_g=\vec{0},$$

e

$$\begin{aligned}
\vec{E}_g &= -G\int\frac{d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\nabla'\left(\rho_0(\vec{x}\,')+\rho_0\phi_n(\vec{x}\,')\right)\\
&= -G\int\frac{d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\nabla'\left[m_1\delta(\vec{x}\,'-\vec{x}_1)+m_2\delta(\vec{x}\,'-\vec{x}_2)-\right.\\
&\quad \left.-\frac{Gm_1m_2}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}[\delta(\vec{x}\,'-\vec{x}_1)+\delta(\vec{x}\,'-\vec{x}_2)]\right]\\
&= -G\int d^3x'\nabla'\left[m_1\left(1-\frac{Gm_2}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}\right)\frac{\delta(\vec{x}\,'-\vec{x}_1)}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}+\right.\\
&\quad \left.+m_2\left(1-\frac{Gm_1}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}\right)\frac{\delta(\vec{x}\,'-\vec{x}_2)}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\right]+\\
&\quad +G\int d^3x'\nabla'\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\left[m_1\left(1-\frac{Gm_2}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}\right)\delta(\vec{x}\,'-\vec{x}_1)+\right.\\
&\quad \left.+m_2\left(1-\frac{Gm_1}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}\right)\delta(\vec{x}\,'-\vec{x}_2)\right].
\end{aligned}$$

De acordo com o teorema da divergência (29)

$$\int d^3x'\nabla' \left\{ \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|} \left[m_1 \left(1 - \frac{Gm_2}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|} \right) \delta(\vec{x}\,'-\vec{x}_1) + \right.\right.$$
$$\left.\left. +m_2 \left(1 - \frac{Gm_1}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|} \right) \delta(\vec{x}\,'-\vec{x}_2) \right] \right\} =$$
$$= \int_S \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|} \left[m_1 \left(1 - \frac{Gm_2}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|} \right) \delta(\vec{x}\,'-\vec{x}_1) + \right.$$
$$\left. +m_2 \left(1 - \frac{Gm_1}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|} \right) \delta(\vec{x}\,'-\vec{x}_2) \right] \hat{n} da,$$

que é igual a zero já que o argumento da integral vai a zero no infinito. E como (29)

$$\nabla \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|} = -\frac{\vec{x}-\vec{x}\,'}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|^3}.$$

De modo que

$$\begin{aligned} \vec{E}_g &= -G\int d^3x' \frac{\vec{x}-\vec{x}\,'}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|^3} \left[m_1 \left(1 - \frac{Gm_2}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|} \right) \delta(\vec{x}\,'-\vec{x}_1) + \right. \\ &\qquad \left. +m_2 \left(1 - \frac{Gm_1}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|} \right) \delta(\vec{x}\,'-\vec{x}_2) \right] \\ &= -Gm_1 \left(1 - \frac{Gm_2}{|\vec{x}_2-\vec{x}_1|} \right) \frac{\vec{x}-\vec{x}_1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|^3} - Gm_2 \left(1 - \frac{Gm_1}{|\vec{x}_2-\vec{x}_1|} \right) \frac{\vec{x}-\vec{x}_2}{|\vec{x}-\vec{x}_2|^3}. \end{aligned}$$

Podemos observar desse resultado final que a "carga" de campo gravito-eletromagnético da partícula 1 é

$$m_1 \left(1 - \frac{Gm_2}{|\vec{x}_2-\vec{x}_1|} \right),$$

e da partícula 2

$$m_2 \left(1 - \frac{Gm_1}{|\vec{x}_2-\vec{x}_1|} \right).$$

Ou seja a interação gravitacional mútua diminui a "carga" de campo. Esse resultado demonstra explicitamente como a energia do campo gravitacional contribui para o campo final.

Referências

1 NEWTON, I. *Mathematical principle of natural philosophy and his system of the word*. [S.l.]: University of California Press, 1962. 634 p.

2 WEYL, H. Gravitation and electricity. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, v. 1918, p. 465, 1918.

3 KALUZA, T. On the problem of unity in physics. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, v. 1921, p. 966–972, 1921.

4 FRIEDMANN, A. On the possibility of a world with constant negative curvature of space. *Z. Phys.*, v. 21, p. 326–332, 1924.

5 EINSTEIN, A. On the electrodynamics of moving bodies. *Ann. d. Phys.*, v. 17, p. 891–921, 1905.

6 LORENTZ, H. Attempt of a theory of the electrical and optical features in moved bodies. *Leiden*, p. 89–92, 1895.

7 LORENTZ, H. Electromegnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light. *Procedings Acad. Sc. Amsterdam*, v. 6, p. 809, 1904.

8 MICHELSON, A.; MORLEY, E. On the relative motion of the earth and the luminiferous ether. *Amer. J. Sci.*, v. 34, p. 333–345, 1887.

9 MINKOWSKI, H. The relativity principle. *Ann. d. Phys.*, v. 47, n. 15, p. 927–938, 1915.

10 EöTVöS, R. Contributions to the law of proportionality of inertia and gravity. *Ann. d. Phys.*, v. 68, p. 11–66, 1922.

11 EINSTEIN, A. On the influence of gravitation on the propagation of light. *Ann. d. Phys.*, v. 35, p. 898–908, 1911.

12 WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology*. [S.l.]: John Wiley and Sons, 1972.

13 EINSTEIN, A.; INFELD, L.; HOFFMANN, B. The gravitational equations and the problem of motion. *Annals Math.*, v. 39, p. 65–100, 1938.

14 SCHWARZSCHILD, K. On the gravitational field of a mass point according to einstein's theory. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, v. 1916, p. 189–196, 1916.

15 INFELD, L.; PLEBANSKI, J. *Motion and Relativity*. [S.l.]: Pergamon Press LTD, 1960.

16 BRAGINSKI, V.; CAVES, C.; THORNE, K. Laboratory experiments to test relativity gravity. *Phys. Rev. D*, v. 15, n. 5, p. 2047–2068, 1977.

17 MISNER, C.; THORNE, K.; WHEELER, J. *Gravitation*. [S.l.]: W.H. Freeman and company, 1973.

18 CAMPBELL, W.; MORGAN, T. Maxwell form of the linear theory of gravitation. *Am. J. Phys.*, v. 44, n. 4, p. 356–365, 1976.

19 CAMPBELL, W.; MORGAN, T. Debye potentials for the gravitational fields. *Physica*, v. 53, n. 2, p. 264–288, 1971.

20 RUSSAKOFF, G. A derivation of the macroscopic maxwell equations. *Am. J. Phys.*, v. 38, n. 10, p. 1188–1195, 1970.

21 HEAVISIDE, O. A gravitational and electromagnetic analogy. *The Electrician*, v. 31, n. 18, p. 5125–5134, 1893.

22 FORWARD, R. General relativity for experimentalist. *Proc. Inst. Radio. Engin.*, v. 49, n. 5, p. 892, 1961.

23 FORWARD, R. Guidelines to antigravity. *Am. J. Phys.*, v. 31, n. 3, p. 166, 1963.

24 LI, N.; TORR, D. Effects of a gravitomagnetic field on pure superconductors. *Phys. Rev. D*, v. 43, n. 2, p. 457–459, 1991.

25 LI, N.; TORR, D. Gravitational effects on the magnetic attenuation of superconductors. *Phys. Rev. B*, v. 46, n. 9, p. 5489–5495, 1992.

26 LI, N. et al. Static test for a gravitational force coupled to type ii ybco superconductors. *Physica C*, v. 281, n. 2-3, p. 260–267, 1997.

27 DEWITT, B. Superconductors and gravitational drag. *Phys. Rev. Lett.*, v. 16, n. 24, p. 1092, 1966.

28 ROSS, D. The london equations for superconductors in a gravitational-field. *J. Phys. A-Math. Gen.*, v. 16, n. 6, p. 1331–1335, 1983.

29 JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics*. [S.l.]: John Wiley and Sons, Inc., 1998.