UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Daniel Pinheiro Sobreira

O Teorema de Malgrange-Ehrenpreis

Fortaleza
2011

Daniel Pinheiro Sobreira

O Teorema de Malgrange-Ehrenpreis

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Análise.
Orientador: Prof. Dr. Antônio Caminha Muniz Neto.

Fortaleza

2011

Aos meus pais Sobreira, Marta e Neiva, ao irmão Gutemberg e ao amigo Wellington.

AGRADECIMENTOS

O início da minha carreira acadêmica aconteceu nas Olimpíadas de Matemática, na qual fui treinado pelos professores Antonio Caminha Muniz Neto, Onofre Campos da Silva Farias, Francisco José da Silva Junior. Chegou o vestibular e passei para o curso de Ciências da Computação. Concluído o curso, resolvi fazer mestrado em Matemática e agradeço o incentivo e confiança prestados por parte do meu orientador Antonio Caminha Muniz Neto.

Durante o mestrado, além da ajuda do orientador, me ajudaram os colegas: Bruno Holanda, Carlos Augusto, Marcelo Mendes, Samuel Barbosa e Nazareno. Agradeço o suporte financeiro dado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, e à secretária de Pós-Graduação Andréa Costa Dantas.

Fora do âmbito matemático, eu gostaria de agradecer a meus pais Sobreira, Marta e Neiva, meu irmão Gutemberg,minha cunhada Débora, meu amigo Wellington, bem como, aos demais amigos e familiares, primos e tios, que participaram dessa conquista e que me dão a força e o suporte psicológico necessários para que eu enfrente os desafios da vida e compartilhe seus bons momentos.

RESUMO

No primeiro capítulo da dissertação, é apresentada uma breve introdução do trabalho. Em seguida, no segundo capítulo, são demonstradas noções e propriedades de espaços vetoriais topológicos. Dando seguimento ao presente estudo, no terceiro capítulo, efetua-se a abordagem da teoria das distribuições, onde se proporciona, como exemplo a distribuição delta de Dirac, na qual, por conseguinte, são definidas ainda operações com distribuições, entre elas a convolução de uma distribuição com uma função teste, e por fim, ainda no mesmo capitulo é feito uma análise das distribuições com suporte compacto. No capítulo quatro, por sua vez, explana-se a transformada de Fourier e suas propriedades, bem como, propriedades de funções que pertencem ao espaço de Schwartz e ainda, é feito um estudo das distribuições temperadas. Finalmente, no quinto e último capítulo é demonstrado o teorema de Malgrange-Ehrenpreis, que é a temática principal do trabalho elaborado, o qual afirma que todo operador diferencial com coeficientes constantes tem uma solução fundamental. Destarte, é implementado um estudo de alguns exemplos afins ao teorema.

Palavras-chave: Solução Fundamental, Operador Diferencial, Coeficientes Constantes.

ABSTRACT

In the first chapter of the dissertation, is a brief introduction. Then in the second chapter, are shown notions and properties of topological vector spaces. Following the present study, the third chapter, is effected the approach to the theory of distributions, which provides, as an example the Dirac delta distribution, in which, therefore, are defined further distribution operations, including the convolution of a distribution with a test function, and finally, still in same chapter an analysis is made of distributions with compact support. In chapter four, in turn, explains to the Fourier transform and its properties, as well as properties of functions belonging to Schwartz space and also a study is made of tempered distributions. Finally, the fifth and final chapter is shown the Malgrange-Ehrenpreis theorem, which is the main theme of the work done, which states that any differential operator with constant coefficients has a fundamental solution. Thus, it implemented a study of some examples related to the theorem.

Keywords: Fundamental Solution, Differential Operator, Constant Coefficients.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O presente trabalho traz como tema : O Teorema de Malgrange-Ehrenpreis, que foi demonstrado, na primeira metade da década 1950-1960, de forma independente por Bernard Malgrange e Leon Ehrenpreis. O teorema se relaciona com equações em derivadas parciais, que exercem um papel central na matemática pura e aplicada, e o estudo destas tem proporcionado e segue proporcionando resultados de enorme interesse teórico e prático. Elas expressam de forma direta, por exemplo, as leis fundamentais do movimento de Newton, as leis básicas de movimento dos fluidos, dos campos elétricos, transmissão de calor e muitos outros fenômenos. Historicamente, o estudo das equações em derivadas parciais foi motivado por problemas da Física e da Geometria.

Tal estudo foi a primeira evidência impressionante do impacto da teoria das distribuições aplicada a equações diferenciais parciais lineares. Malgrange usou as distribuições de modo sistemático e estudou operadores de convolução.

A teoria das distribuições está motivada pelo desejo de derivar, em algum sentido, funções que não são deriváveis. Para isso estendemos o cálculo a uma classe mais ampla que a classe das funções diferenciáveis, as distribuições. Chegamos ao espaço das distribuições como o dual topológico do espaço das funções-teste. E passamos a ver funções como distribuições, definindo a derivada de uma distribuição e estudando algumas propriedades do produto de convolução que se define somente para uma distribuição e uma função-teste.

Apresentamos a transformada de Fourier como uma técnica para solução de equações diferenciais ordinárias e parciais que nos permite transformar equações diferenciais em equações algébricas e equações diferenciais parciais em equações diferenciais ordinárias. Posteriormente, mostramos que ela é um isomorfismo no Espaço de Schwartz, e a relacionamos com a convolução de funções.

Assim, temos todas as ferramentas necessárias para consecução do objetivo do trabalho, a demonstração do teorema: **Todo operador diferencial L com coeficientes constantes tem uma solução fundamental**, e como este pode ser aplicado.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Espaços vetoriais topológicos

Em tudo o que segue, salvo menção em contrário consideraremos sempre espaços vetoriais complexos.

Definição 2.1. *Um* **espaço vetorial topológico** (**EVT**) *é um espaço vetorial munido de uma topologia Hausdorff, em relação à qual as operações de espaço vetorial são contínuas.*

Alguns comentários sobre as continuidades postuladas na definição acima: a topologia usual de um produto cartesiano $X \times Y$ de espaços topológicos é a **topologia produto**, i.e., aquela que tem por base a família

$$\mathcal{B} = \{A \times B;\ A \subset X \text{ e } B \subset Y \text{ são abertos}\}.$$

A definição acima afirma que a adição $+ : X \times X \to X$ e a multiplicação por escalar $\cdot : \mathbb{C} \times X \to X$ são contínuas com respeito às topologias-produto dos domínios. Assim, por exemplo, se $x_n \to x$, $y_n \to y$ no EVT X e $\lambda_n \to \lambda$ em $\mathbb{C}$, então

$$x_n + y_n \to x + y \quad \text{e} \quad \lambda_n x_n \to \lambda x.$$

O efeito de se combinar a estrutura de espaço vetorial com a topologia torna um EVT X homeomorfo a si mesmo sob translações e homotetias. Mais precisamente, temos a seguinte

Proposição 2.2. *Sejam X um EVT, $y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. As aplicações $f_y : X \to X$ e $g_\lambda : X \to X$, dadas respectivamente por*

$$f_y(x) = x + y \quad e \quad g_\lambda(x) = \lambda x,$$

são homeomorfismos.

Demonstração. As aplicações f_y e g_λ são claramente contínuas. E as aplicações ${f_y}^{-1} : X \to X$ e ${g_\lambda}^{-1} : X \to X$, dadas por

$$
{f_y}^{-1}(x) = x - y \quad \text{e} \quad {g_\lambda}^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda}x,
$$

são suas inversas, que também são contínuas. □

No que segue vamos discutir uma maneira de construir EVT's cujas topologias satisfaçam uma certa condição adicional.

Definição 2.3. *Seja X um espaço vetorial. Uma aplicação $\rho : X \to \mathbb{R}_+$ é uma* **semi-norma** *se as seguintes condições forem satisfeitas:*

(a) ρ é sub-aditiva, i.e., $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$, para todos $x, y \in X$.

(b) $\rho(\lambda x) = |\lambda|\rho(x)$, para todos $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in X$.

Se ρ é uma semi-norma no espaço vetorial X, então é claro que $\rho(0) = 0$. Se a condição recíproca for satisfeita, i.e., se $\rho(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, então ρ será uma norma em X. Há, no entanto, em vários espaços vetoriais de interesse, semi-normas interessantes que não são normas, conforme atesta o seguinte

Exemplo 2.4. Se $X = C^1[0,1]$ é o espaço vetorial das funções $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ de classe C^1, então a aplicação $\rho : X \to \mathbb{R}_+$ dada por $\rho(f) = ||f'||_{L^\infty}$ é uma semi-norma que não é norma. De fato, $\rho(f+g) = ||(f+g)'||_{L^\infty} = ||f'+g'||_{L^\infty} \leq ||f'||_{L^\infty} + ||g'||_{L^\infty} = \rho(f) + \rho(g)$, e ainda, $\rho(\lambda f) = ||(\lambda f)'||_{L^\infty} = ||\lambda f'||_{L^\infty} = |\lambda| ||f'||_{L^\infty} = |\lambda|\rho(f)$, sendo assim uma semi-norma. Mas sendo g qualquer função constante, temos que $\rho(g) = 0$. Assim, ρ não é uma norma.

O lema a seguir coleciona algumas propriedades elementares úteis de semi-normas.

Lema 2.5. *Se ρ é uma semi-norma em um espaço vetorial X, então, para todos $x, y, z \in X$, temos:*

(a) $\rho(x - y) \geq |\rho(x) - \rho(y)|$.

(b) $\rho(x - z) \leq \rho(x - y) + \rho(y - z)$.

Demonstração. (a) $\rho(y + x - y) \leq \rho(y) + \rho(x - y) \Rightarrow \rho(x) - \rho(y) \leq \rho(x - y)$. E ainda $\rho(x + y - x) \leq \rho(x) + \rho(y - x) \Rightarrow \rho(y) \leq \rho(x) + \rho(x - y) \Rightarrow -\rho(x - y) \leq \rho(x) - \rho(y)$, assim

$$
\rho(x - y) \geq |\rho(x) - \rho(y)|.
$$

(b) $\rho(x - z) = \rho(x - y + y - z) \leq \rho(x - y) + \rho(y - z)$

□

Definição 2.6. *Uma família* $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *de semi-normas em um espaço vetorial* X *é* **suficiente** *ou* **separa pontos** *se*

$$\rho_\alpha(x) = 0, \;\; \forall\; \alpha \in I \Rightarrow x = 0.$$

É imediato que se $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in I}$ é uma família suficiente de semi-normas em um espaço vetorial X, então

$$x \neq y \Leftrightarrow \;\exists\; \alpha \in I;\; \rho_\alpha(x-y) > 0.$$

Para o que segue, se X é um espaço vetorial e ρ é uma semi-norma em X, definimos a $\rho-$*bola* de raio r centrada em $x \in X$ por

$$B_r^\rho(x) = \{y \in X;\; \rho(y-x) < r\}.$$

Se $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in I}$ é uma família de semi-normas em X, denotamos $B_r^{\rho_\alpha}(x)$ simplesmente por $B_r^\alpha(x)$; ainda nesse caso, escrevemos

$$\bigcap_{j=1}^{n} B_r^{\alpha_j}(x) = B_r^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(x).$$

Seja $\mathcal{T}$ uma topologia sobre o espaço vetorial X, a qual o torna um EVT. Se $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in I}$ é uma família de semi-normas em X, todas contínuas em relação a $\mathcal{T}$, então, fixados $r > 0$ e $\alpha \in I$, temos que $\rho_\alpha^{-1}(0,r) = B_r^\alpha(0)$ é um aberto de X. Portanto, para cada $x \in X$, são também abertos em X os conjuntos $x + B_r^\alpha(0) = B_r^\alpha(x)$ e $B_r^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(x)$. O teorema a seguir estabelece uma recíproca dessas observações.

Teorema 2.7. *Seja* X *um espaço vetorial e* $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *uma família suficiente de semi-normas em* X*. A coleção* $\mathcal{B}$ *dos conjuntos da forma* $B_r^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(x)$*, com* $x \in X$*,* $r > 0$*,* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$*, é uma base para uma topologia sobre* X*, a qual o torna um EVT.*

Demonstração. Para mostrarmos que $\mathcal{B}$ é uma base para uma topologia em X, vamos mostrar que a interseção de dois abertos U e V é também aberta. Mas se $x \in U \cap V$ e $B_r^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}(x) \subseteq U$ e $B_s^{\beta_1,\ldots,\beta_n}(x) \subseteq V$, é imediato que

$$B_{\min\{r,s\}}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\ldots,\beta_n}(x) \subseteq U \cap V.$$

Para ver que a topologia assim definida é Hausdorff, sejam dados $x, y \in X$, com $x \neq y$. Se $\alpha \in I$ é tal que $\rho_\alpha(y-x) = r > 0$, então a sub-aditividade de ρ_α garante que $B_{r/2}^\alpha(x) \cap B_{r/2}^\alpha(y) = \emptyset$.

Resta verificar a continuidade de $f : X \times X \to X$ e $g : \mathbb{C} \times X \to X$, respectivamente as operações de adição e multiplicação por escalar. Como os conjuntos $B_r^\alpha(x)$ formam uma sub-base para a topologia de X, é suficiente mostrar que $f^{-1}(B_r^\alpha(x)) \subseteq X \times X$ e $g^{-1}(B_r^\alpha(x)) \subseteq \mathbb{C} \times X$ são abertos. Quanto a f, note inicialmente que

$$f^{-1}(B_r^\alpha(x)) = \{(y,z) \in X \times X;\ \rho_\alpha(y+z-x) < r\}.$$

Portanto, fixado $(y_0, z_0) \in f^{-1}(B_r^\alpha(x))$ e sendo $\eta = r - \rho_\alpha(y_0 + z_0 - x) > 0$, a sub-aditividade de ρ_α garante que

$$(y_0, z_0) \in B_{\eta/2}^\alpha(y_0) \times B_{\eta/2}^\alpha(z_0) \subseteq f^{-1}(B_r^\alpha(x)),$$

i.e., $f^{-1}(B_r^\alpha(x))$ é aberto em $X \times X$. Para g, temos

$$g^{-1}(B_r^\alpha(x)) = \{(\lambda, y) \in \mathbb{C} \times X;\ \rho_\alpha(\lambda y - x) < r\}.$$

Portanto, fixado $(\lambda_0, y_0) \in g^{-1}(B_r^\alpha(x))$, queremos encontrar $\delta, \eta > 0$ tais que

$$(\lambda, y) \in B(\lambda_0; \delta) \times B_\eta^\alpha(y_0) \Rightarrow \rho_\alpha(\lambda y - x) < r.$$

Para tanto, utilizando uma vez mais a sub-aditividade de ρ, obtemos

$$\begin{array}{rcl} \rho_\alpha(\lambda y - x) & \leq & \rho_\alpha(\lambda y - \lambda y_0) + \rho_\alpha(\lambda y_0 - \lambda_0 y_0) + \rho_\alpha(\lambda_0 y_0 - x) \\ & = & |\lambda| \rho_\alpha(y - y_0) + |\lambda - \lambda_0| \rho_\alpha(y_0) + \rho_\alpha(\lambda_0 y_0 - x) \\ & < & (\delta + |\lambda_0|)\eta + \delta \rho_\alpha(y_0) + \rho_\alpha(\lambda_0 y_0 - x) < r. \end{array}$$

Portanto, sendo $\epsilon = r - \rho_\alpha(\lambda_0 y_0 - x) > 0$, tome $\delta = \frac{\epsilon}{2(\rho_\alpha(y_0)+1)}$ e $\eta = \frac{\epsilon}{2(\delta + |\lambda_0|)}$. $\square$

Se X é um espaço vetorial e $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in I}$ é uma família suficiente de semi-normas em X, é imediato verificar que a base para a topologia de EVT dada pelo teorema acima é formada por conjuntos *convexos*. De fato, se $y, z \in B_r^{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}(x)$ e $t \in [0,1]$, então

$$\rho_r^{\alpha_j}((1-t)y + tz - x) \leq (1-t)\rho_r^{\alpha_j}(y - x) + t\rho_r^{\alpha_j}(z - x) < (1-t)r + tr = r,$$

i.e., $(1-t)y + tz \in B_r^{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}(x)$. Nesse caso dizemos que X é um espaço vetorial topológico **localmente convexo** (**EVTLC**).

Vale observar que um EVTLC é uma generalização natural de um espaço vetorial normado (EVN), uma vez que uma norma em um espaço vetorial é uma família suficiente e unitária de semi-normas.

Exemplo 2.8. Se X é um EVN, a *topologia fraca−∗* em seu espaço dual X^* é a menor topologia que torna as aplicações de avaliação

$$f \in X^* \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$$

contínuas ($x \in X$). Portanto, tal topologia coincide com aquela gerada pela família suficiente $\{\rho_x\}_{x \in X}$ de semi-normas, onde $\rho_x(f) = |f(x)|$, para todo $f \in X^*$. Em outras palavras, X^* é um EVTLC quando munido com a topologia fraca$-*$.

O teorema a seguir dá uma condição necessária e suficiente para a continuidade de uma aplicação linear entre EVTLC's.

Teorema 2.9. *Sejam X e Y EVTLC's, com topologias geradas pelas famílias suficientes de semi-normas $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in I}$ e $\{\sigma_\beta\}_{\beta\in J}$. Se $T : X \to Y$ é uma aplicação linear, então são equivalentes:*

(a) *T é contínua.*

(b) *T é contínua em $0 \in X$.*

(c) *Para cada $\beta \in J$, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in I$ e uma constante $C > 0$, tais que*

$$\sigma_\beta(Tx) \leq C \sum_{j=1}^{k} \rho_{\alpha_j}(x), \ \forall\, x \in X. \tag{2.1}$$

Demonstração. A equivalência entre (a) e (b) segue imediatamente da proposição 2.2, de maneira que basta mostrarmos a equivalência entre (b) e (c). Para tanto, como $T(0) = 0$, note que T é contínua em 0 se e só se a imagem inversa por T de todo elemento $B_s^\beta(0)$ da sub-base de vizinhanças de $0 \in Y$ for uma vizinhança aberta de $0 \in X$, o que por sua vez ocorre se e só se existirem $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in I$, e $r > 0$ tais que

$$\bigcap_{j=1}^{k} B_r^{\alpha_j}(0) \subset T^{-1}(B_s^\beta(0)).$$

Mas isso é o mesmo que

$$\rho_{\alpha_j}(x) < r, \forall\ 1 \leq j \leq k \Rightarrow \sigma_\beta(Tx) < s. \tag{2.2}$$

Logo, se (2.1) for satisfeita e $s > 0$ e $\beta \in J$ forem dados, tome $r = s/(Ck)$: se $\rho_{\alpha_j}(x) < r$ para todo $1 \leq j \leq k$, então

$$\sigma_\beta(Tx) \leq C \sum_{j=1}^{k} \rho_{\alpha_j}(x) < C \cdot kr = s.$$

Reciprocamente, fixados $s > 0$ e $\beta \in J$, se existirem $r > 0$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in I$ satisfazendo (2.2), então afirmamos que

$$\sigma_\beta(Tx) \leq \frac{s}{r} \sum_{j=1}^{k} \rho_{\alpha_j}(x)$$

para todo $x \in X$. De fato, para $x \in X$ há duas possibilidades:

- $\rho_{\alpha_j}(x) = 0$ para $1 \leq j \leq k$: neste caso $\rho_{\alpha_j}(tx) = 0$ para todo $t > 0$, e segue de (2.2) que $\sigma_\beta(Tx) < s/t$ para todo $t > 0$, donde $\sigma_\beta(Tx) = 0$ e nossa afirmação é verdadeira.

- $\rho_{\alpha_j}(x) \neq 0$ para algum $1 \leq j \leq k$: sendo $\lambda = \sum_{j=1}^k \rho_{\alpha_j}(x) > 0$, temos

$$\rho_{\alpha_j}\left(\frac{r}{\lambda}x\right) = \frac{r}{\lambda}\rho_{\alpha_j}(x) < r$$

para $1 \leq j \leq k$, de modo que $\sigma_\beta\left(\frac{r}{\lambda}Tx\right) < s$. De outro modo,

$$\sigma_\beta(Tx) < \frac{s}{r}\lambda = \frac{s}{r}\sum_{j=1}^{k}\rho_{\alpha_j}(x).$$

□

Desde que todo EVTLC X é Hausdorff, o limite de uma sequência em X, quando existir, será único. A proposição a seguir dá um critério útil para decidir quando uma tal sequência converge para um certo limite.

Proposição 2.10. *Seja X um EVTLC cuja topologia é gerada pela família suficiente $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de semi-normas. Uma sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ em X converge para $x \in X$ se e só se $\rho_\alpha(x_n - x) \to 0$, para todo $\alpha \in I$.*

Demonstração. A sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ converge para $x \in X$ se e só se, dado $x \in U \subseteq X$ aberto, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in U$. Basta agora notar que os conjuntos $B_r^\alpha(x)$ formam uma sub-base de vizinhanças de x, e que $\rho_\alpha(x_n - x) < r \Leftrightarrow x_n \in B_r^\alpha(x)$. □

Definição 2.11. *Seja X um EVTLC. Uma sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ em X é* **de Cauchy** *se, para todo $\epsilon > 0$ e toda semi-norma ρ_α definindo a topologia de X, existir $N = N(\epsilon, \alpha) \in \mathbb{N}$ tal que*

$$m, n \geq N \Rightarrow \rho_\alpha(x_m - x_n) < \epsilon.$$

Como no caso de espaços métricos, é imediato verificar que toda sequência convergente é de Cauchy; reciprocamente, se toda sequência de Cauchy em X convergir, diremos que X é um EVTLC **completo**.

Um espaço topológico X é **metrizável** se existir uma métrica d sobre X cuja topologia induzida coincida com a topologia original de X. Nesse caso, diremos que a métrica d é **compatível** com a topologia de X. O teorema a seguir dá uma condição suficiente para a metrizabilidade de um EVTLC.

Teorema 2.12. *Se a topologia de um EVTLC X for gerada por uma família enumerável $\{\rho_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de semi-normas, então X é metrizável. Mais precisamente, X admite uma métrica compatível e* **translacionalmente invariante** *d, dada por*

$$d(x, y) = \sum_{k\geq 1} 2^{-k}\frac{\rho_k(x - y)}{1 + \rho_k(x - y)}. \tag{2.3}$$

Demonstração. A condição $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ segue da suficiência da família $\{\rho_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Para verificar a desigualdade triangular $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, use que $\rho_k(x - z) \leq \rho_k(x - y) + \rho_k(y - z)$, juntamente com o fato que a função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x}{1+x}$ é crescente e tal que $f(a + b) \leq f(a) + f(b)$, para todos $a, b \in \mathbb{R}_+$.

Para mostrar que a topologia induzida pela métrica coincide com a topologia de EVTLC de X, basta mostrar que toda bola métrica aberta é aberta na topologia de EVTLC e, reciprocamente, que todo aberto básico de tal topologia é aberto na topologia métrica. Sejam, pois $x \in X$, $R > 0$ e $B_d(x; R)$ a bola métrica de centro x e raio R. Se $r > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ são tais que $r + 2^{-N} < R$, afirmamos que $\bigcap_{k=1}^N B_r^k(x) \subseteq B_d(x; R)$. De fato, se $y \in \bigcap_{k=1}^N B_r^k(x)$, então segue do fato da função f do parágrafo anterior ser crescente que

$$\begin{aligned} d(y, x) &= \sum_{k=1}^{N} 2^{-k} \frac{\rho_k(x - y)}{1 + \rho_k(x - y)} + \sum_{k>N} 2^{-k} \frac{\rho_k(x - y)}{1 + \rho_k(x - y)} \\ &< \sum_{k=1}^{N} 2^{-k} \frac{r}{1 + r} + \sum_{k>N} 2^{-k} < r + 2^{-N} < R. \end{aligned}$$

Reciprocamente, dado um aberto básico $\bigcap_{k=1}^N B_r^k(x)$ da topologia de EVTLC de X, se $R = 2^{-N} \frac{r}{1+r}$ afirmamos que $B_d(x; R) \subseteq \bigcap_{k=1}^N B_r^k(x)$. De fato, se $y \in B_d(x; R)$ e $1 \leq k \leq N$, então

$$2^{-k} \frac{\rho_k(y - x)}{1 + \rho_k(y - x)} \leq d(y, x) < 2^{-N} \frac{r}{1 + r} \leq 2^{-k} \frac{r}{1 + r},$$

donde $\rho_k(y - x) < r$. $\square$

Um EVTLC metrizável e completo é denominado um **espaço de Fréchet**. O resultado a seguir é uma consequência imediata da proposição 2.10, da definição 2.11 e do teorema acima.

Corolário 2.13. *Seja X um EVTLC metrizável, cuja topologia é gerada pela família $\{\rho_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de semi-normas. Uma sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ em X é de Cauchy (resp. converge para $x \in X$) em relação à métrica d dada por (2.3) se e só se, para todos $\epsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$, existir $N = N(\epsilon, k) \in \mathbb{N}$ tal que*

$$m, n \geq N \Rightarrow \rho_k(x_m - x_n) < \epsilon \ (\textit{resp. } \rho_k(x_m - x) < \epsilon).$$

Para o que segue, dizemos que um espaço topológico X é **normável** se X puder ser munido com uma norma $|| \ ||$, cuja topologia induzida coincida com a topologia original de X. Nesse caso, diremos que a norma $|| \ ||$ é **compatível** com a topologia de X. O teorema a seguir dá uma condição suficiente para que um EVTLC seja normável.

Teorema 2.14. *Se a topologia de um EVTLC X for gerada por uma família finita $\{\rho_k\}_{1\leq k\leq n}$ de semi-normas, então X é normável. Mais precisamente, X admite a norma compatível $||\ ||$, dada por*

$$||x|| = \sum_{k=1}^{n} \rho_k(x).$$

Demonstração. Adapte a prova do teorema 2.12. □

2.2 Funções-teste

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Se $f \in C^0(\Omega)$, o **suporte** de f é o conjunto

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega;\ f(x) \neq 0\}}.$$

Um **multi-índice** $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é uma $n-$upla de inteiros não-negativos; a **ordem** do multi-índice α é o inteiro não-negativo

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n.$$

Denotamos ainda por ∂^α o operador diferencial linear

$$\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n},$$

de *ordem* $|\alpha|$. Definimos então os espaços vetoriais

$$C^k(\Omega) = \{f \in C^0(\Omega); \partial^\alpha f \in C^0(\Omega),\ \forall\ |\alpha| \leq k\},$$

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\geq 0} C^k(\Omega)$$

e

$$D(\Omega) = C_c^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega);\ \text{supp}(f) \text{ é compacto}\}.$$

Quando $\Omega = \mathbb{R}^n$, denotaremos os conjuntos definidos acima simplesmente por C^k, C^∞ e C_c^∞, respectivamente. Se $K \subset\subset \mathbb{R}^n$, definimos ainda

$$D_k = C_c^\infty(K) = \{f \in C_c^\infty;\ \text{supp}(f) \subset K\}.$$

Para o que segue, precisamos do seguinte lema.

Lema 2.15. *A função $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\eta(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

é um elemento de $C^\infty(\mathbb{R})$.

Demonstração. Essa função é claramente diferenciável em $x \neq 0$, e sua j-ésima derivada tem a forma

$$\eta^{(j)}(x) = \begin{cases} R_j(x)e^{-1/x^2}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

onde $R_j(x)$ é um polinômio dividido por uma potência de x. Mas pela regra de L'Hopital,

$$\lim_{x\to 0} R_j(x)e^{-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

e assim $\eta^{(j)}$ é contínua em 0, para todo j, sendo η infinitamente diferenciável. $\square$

Proposição 2.16. *Os conjuntos $C^k(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$, $C_c^\infty(\Omega)$ e $C_c^\infty(K)$ (para $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ com interior não-vazio) são espaços vetoriais não-vazios.*

Demonstração. É suficiente construirmos, para todos $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, um elemento de $C_c^\infty(K)$, onde $K = \prod_{j=1}^n [x_j - r, x_j + r]$. Por composição com translações e homotetias, basta considerarmos o caso em que $x = 0$ e $r = 1$. Se $\phi \in C_c^\infty([-1,1])$, então é claro que

$$\psi(x) = \phi(x_1)\dots\phi(x_n)$$

é um elemento de $C_c^\infty([-1,1]^n)$, de modo que basta construirmos uma tal ϕ. Sendo η a função do lema anterior, podemos tomar $\phi(x) = \eta(1-x)\eta(1+x)$. $\square$

Fixado um *inteiro estendido* $0 \leq k \leq +\infty$, seja $BC^k(\Omega)$ o subespaço de $C^k(\Omega)$ formado pelas funções $\phi \in C^k(\Omega)$ tais que

$$||\phi||_{k,\infty,\Omega} := \sum_{|\alpha|\leq k} ||\partial^\alpha \phi||_{\infty,\Omega}$$

seja finita. É imediato verificar que $||\ ||_{k,\infty,\Omega}$ é uma norma em $BC^k(\Omega)$ e que, munido com tal norma, $BC^k(\Omega)$ é um espaço de Banach. Se $k \leq l$, é claro que $||\phi||_{k,\infty,\Omega} \leq ||\phi||_{l,\infty,\Omega}$, de modo que a inclusão $\iota : BC^l(\Omega) \to BC^k(\Omega)$ é uma contração, logo uniformemente contínua. Quando $\Omega = \mathbb{R}^n$, denotamos $||\ ||_{k,\infty,\Omega}$ simplesmente por $||\ ||_{k,\infty}$, e $BC^k(\Omega)$ simplesmente por BC^k.

Para $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ fixado, consideramos sobre $C_c^\infty(K)$ a topologia de EVTLC gerada pela família de semi-normas $||\ ||_{k,\infty}$. Como $||\ ||_{k,\infty} \leq ||\ ||_{k+1,\infty}$ para todo $k \geq 0$, dados $\phi \in C_c^\infty(K)$ e $r > 0$, temos $B_r^{k+1}(\phi) \subset B_r^k(\phi)$; portanto, um subconjunto U de $C_c^\infty(K)$ é aberto se e só se, para todo $\phi \in U$, existirem $k \geq 0$ e $r > 0$ tais que $B_r^k(\phi) \subset U$.

Equivalentemente, pelo teorema 2.12, a topologia descrita acima sobre $C_c^\infty(K)$ é aquela dada pela métrica translacionalmente invariante

$$d_K(\phi,\psi) = \sum_{k\geq 0} 2^{-k} \frac{||\phi-\psi||_{k,\infty}}{1 + ||\phi-\psi||_{k,\infty}}.$$

Proposição 2.17. *Com a topologia descrita acima, $C_c^\infty(K)$ é um espaço de Fréchet.*

Demonstração. Se $(\phi_j)_{j\geq 1}$ é uma sequência em $C_c^\infty(K)$, de Cauchy em relação à métrica d_K, segue do corolário 2.13 que, para cada $k \geq 0$ inteiro, $(\phi_j)_{j\geq 1}$ é de Cauchy em relação à norma $|| \ ||_{k,\infty}$ de BC^k. Como BC^k é um espaço de Banach com tal norma, existe $\psi_k \in BC^k$ tal que $\phi_j \to \psi_k$ em BC^k. Agora, para $0 \leq k \leq l$ inteiros, a continuidade da inclusão $\iota : BC^l \to BC^k$ garante que $\phi_j \to \psi_k, \psi_l$ em BC^k, de maneira que $\psi_k = \psi_l$. Fica então bem definida uma função $\psi \in \bigcap_{k\geq 0} BC^k = BC^\infty$, tal que $\phi_j \to \psi$ em BC^k, para todo $k \geq 0$. Em particular, temos $\operatorname{supp}(\psi) \subset K$, donde $\psi \in C_c^\infty(K)$. Portanto, mais uma aplicação do corolário 2.13 garante que $\phi_j \to \psi$ em $C_c^\infty(K)$. $\square$

Observação 2.18. Note que, apesar de ser um espaço de Fréchet, $C_c^\infty(K)$ *não é* um espaço de Banach com a métrica d_K (é imediato provar que tal métrica não provém de uma norma).

O teorema a seguir dá um critério para a continuidade de uma aplicação linear de $C_c^\infty(K)$ em um EVTLC.

Teorema 2.19. *Seja X um EVTLC e $T : C_c^\infty(K) \to X$ uma aplicação linear. São equivalentes:*

(*a*) *T é contínua.*

(*b*) *T é contínua em 0.*

(*c*) *T é sequencialmente contínua.*

(*d*) *Para cada semi-norma ρ em uma família suficiente que gera a topologia de X, existem um inteiro $k \geq 0$ e uma constante $C > 0$ tais que*

$$\rho(T\phi) \leq C||\phi||_{k,\infty}, \ \forall \ \phi \in C_c^\infty(K). \tag{2.4}$$

Demonstração. A equivalência entre os itens (*a*), (*b*) e (*d*) segue imediatamente do teorema 2.9, juntamente com o fato de que as semi-normas de $C_c^\infty(K)$ são encaixantes. A equivalência entre (*a*) e (*c*) segue do fato de que $C_c^\infty(K)$ é um espaço métrico. $\square$

O exemplo a seguir mostra que é mais difícil tratar com $C_c^\infty(\Omega)$ que com $C_c^\infty(K)$.

Exemplo 2.20. Tome $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\operatorname{supp}(\phi) = [0,1]$ e $\phi(x) > 0$ para $x \in (0,1)$. Em seguida, para cada inteiro $n \geq 1$, seja

$$\psi_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\phi(x-j) \in C_c^\infty(\mathbb{R}),$$

de tal sorte que $\mathrm{supp}(\psi_n) = [1, n+1]$. Defina ainda

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \phi(x-j) \in C^{\infty}(\mathbb{R}).$$

É imediato verificar que $||\psi_n^{(k)} - \psi^{(k)}||_{0,\infty} \to 0$ para cada inteiro $k \geq 0$, ou ainda que

$$||\psi_n - \psi||_{k,\infty} \longrightarrow 0$$

para cada inteiro $k \geq 0$; no entanto, $\psi \notin C_c^{\infty}(\mathbb{R})$, de maneira que $C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ não é completo em relação à topologia de EVTLC gerada pelas semi-normas $|| \; ||_{k,\infty}$.

Para assegurar que $C_c^{\infty}(\Omega)$ seja completo, nós precisamos tanto da convergência uniforme dada pelas semi-normas $|| \; ||_{k,\infty,\Omega}$ quanto de uma condição que force que os limites de sequências convergentes também tenham suporte compacto. A definição a seguir explica quais semi-normas devem ser tomadas sobre $C_c^{\infty}(\Omega)$ a fim de que tais condições sejam satisfeitas.

Definição 2.21. *Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, consideramos sobre $C_c^{\infty}(\Omega)$ a topologia de EVTLC gerada pela família $\mathcal{F}(\Omega)$ de semi-normas $\rho : C_c^{\infty}(\Omega) \to \mathbb{R}$ que admitem, para todo $K \subset\subset \Omega$, restrições contínuas $\rho_{|C_c^{\infty}(K)} : C_c^{\infty}(K) \to \mathbb{R}$.*

Segue imediatamente da definição acima que $|| \; ||_{n,\infty,\Omega} \in \mathcal{F}(\Omega)$ para todo $n \geq 0$ inteiro. No que segue provamos que, com tal topologia, $C_c^{\infty}(\Omega)$ é um EVLTC completo. Antes, contudo, precisamos do seguinte

Lema 2.22. *Se $\{\phi_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência em $C_c^{\infty}(\Omega)$, então uma das condições a seguir se verifica:*

(a) *Existe $K \subset\subset \Omega$ tal que* $\mathrm{supp}(\phi_n) \subset K$ *para todo $n \geq 1$.*

(b) *Existe uma semi-norma $\rho \in \mathcal{F}(\Omega)$ tal que a sequência real $\{\rho(\phi_n)\}_{n\geq 1}$ é ilimitada.*

Demonstração. Seja $K = \bigcup_{n\geq 1} \mathrm{supp}(\phi_n)$. Se $\overline{K}$ estiver contido em Ω e for compacto, nada mais haverá a fazer. Senão, ou $\overline{K}$ é ilimitado ou $\overline{K} \not\subset \Omega$. Em qualquer caso, podemos achar uma sequência $\{x_k\}_{k\geq 1}$ em Ω e funções $\psi_k \in \{\phi_n\}_{n\geq 1}$ tais que $\psi_k(x_k) \neq 0$ e ou $|x_k| \to +\infty$ ou $x_k \to x \notin \Omega$. Afirmamos que $\rho : C_c^{\infty}(\Omega) \to \mathbb{R}$, dada para $f \in C_c^{\infty}(\Omega)$ por

$$\rho(f) = \sum_{k\geq 1} \frac{k}{|\psi_k(x_k)|} |f(x_k)|,$$

é uma semi-norma em $\mathcal{F}(\Omega)$. De fato, uma vez que $\mathrm{supp}(f) \subset\subset \Omega$, a soma do segundo membro é finita, e portanto ρ certamente define uma semi-norma em $C_c^{\infty}(\Omega)$. Por outro lado, se $L \subset\subset \Omega$ e $T_k : C_c^{\infty}(L) \to \mathbb{R}$ é a aplicação linear dada por $T_k(f) = f(x_k)$, então

$$|T_k(f)| = |f(x_k)| \leq ||f||_{0,\infty},$$

e segue do teorema 2.19 que T_k é contínua sobre $C_c^\infty(L)$. Portanto, a restrição de ρ a $C_c^\infty(L)$ é uma combinação linear finita das semi-normas $f \mapsto |T_k(f)|$, donde é contínua. Segue então da definição de $\mathcal{F}(\Omega)$ que $\rho \in \mathcal{F}(\Omega)$.

Por fim, note que $\rho(\psi_k) \geq k$, i.e., $\{\rho(\psi_k)\}_{k\geq 1}$ é ilimitada. $\square$

Teorema 2.23. *Com a topologia de EVTLC acima, $C_c^\infty(\Omega)$ é completo. Ademais, dadas uma sequência $\{\phi_n\}_{n\geq 1}$ em $C_c^\infty(\Omega)$ e $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, são equivalentes:*

(*a*) *$\phi_n \to \phi$ em $C_c^\infty(\Omega)$.*

(*b*) *Existe $K \subset\subset \Omega$ tal que $\mathrm{supp}(\phi_n), \mathrm{supp}(\phi) \subseteq K$ e $\phi_n \to \phi$ em $C_c^\infty(K)$.*

Demonstração. Se $\{\phi_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de Cauchy em $C_c^\infty(\Omega)$ e $\rho \in \mathcal{F}(\Omega)$, então é imediato que a sequência $\{\rho(\phi_n)\}_{n\geq 1}$ é limitada. Portanto, pelo lema anterior existe $K \subset\subset \Omega$ tal que $\mathrm{supp}(\phi_n) \subseteq K$ para todo $n \geq 1$, i.e., $\phi_n \in C_c^\infty(K)$ para todo $n \geq 1$. Como $C_c^\infty(\Omega)$ contém todas as semi-normas $|| \ ||_{n,\infty}$, temos que $\{\phi_n\}_{n\geq 1}$ é também de Cauchy em $C_c^\infty(K)$, e portanto existe $\phi \in C_c^\infty(K)$ tal que $\phi_n \to \phi$ em $C_c^\infty(K)$. Mas se $\rho \in \mathcal{F}(\Omega)$, temos que $\rho_{|C_c^\infty(K)} : C_c^\infty(K) \to \mathbb{R}$ é contínua, de maneira que $\rho(\phi_n - \phi) \to 0$. Logo, $\phi_n \to \phi$ em $C_c^\infty(\Omega)$, e portanto, $C_c^\infty(\Omega)$ é completo.

Para a equivalência entre (a) e (b), note inicialmente que a última parte do argumento acima prova a implicação $(b) \Rightarrow (a)$. Para a recíproca, se $\phi_n \to \phi$ em $C_c^\infty(\Omega)$ e $\rho \in \mathcal{F}(\Omega)$, então é novamente claro que a sequência $\{\rho(\phi_n)\}_{n\geq 1}$ é limitada. Aplicando uma vez mais o lema anterior, garantimos a existência de $K \subset\subset \Omega$ tal que $\mathrm{supp}(\phi_n), \mathrm{supp}(\phi) \subseteq K$ para todo $n \geq 1$, i.e., $\phi_n, \phi \in C_c^\infty(K)$ para todo $n \geq 1$. Como $\mathcal{F}(\Omega)$ contém todas as semi-normas $|| \ ||_{n,\infty}$, segue que $\phi_n \to \phi$ em $C_c^\infty(K)$. $\square$

Observação 2.24. Mostraremos ao final desta seção que $C_c^\infty(\Omega)$ não é um espaço metrizável.

O teorema a seguir dá um critério para a continuidade de uma aplicação linear de $C_c^\infty(\Omega)$ em um EVTLC.

Teorema 2.25. *Seja X um EVTLC e $T : C_c^\infty(\Omega) \to X$ uma aplicação linear. São equivalentes:*

(*a*) *T é contínua.*

(*b*) *T é contínua em 0.*

(*c*) *T é sequencialmente contínua.*

(*d*) *Para todo $K \subset\subset \Omega$, $T_{|C_c^\infty(K)} : C_c^\infty(K) \to X$ é contínua.*

(*e*) *Para todo $K \subset\subset \Omega$ e toda semi-norma ρ em uma família suficiente que gera a topologia de X, existem um inteiro $k \geq 0$ e uma constante $C > 0$ tais que*

$$\rho(T\phi) \leq C||\phi||_{k,\infty}, \ \forall \ \phi \in C_c^\infty(K). \tag{2.5}$$

Demonstração. A equivalência entre os itens (a) e (b) segue do teorema 2.9, ao passo que a equivalência entre os itens (d) e (e) segue do teorema 2.19. Note ainda que $(a) \Rightarrow (c)$ é sempre verdade para uma função contínua entre espaços topológicos. Para o que falta, mostremos que $(c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (b)$. Supondo (c) verdadeira, segue do teorema 2.23 que $T_{|C_c^\infty(K)}$ é sequencialmente contínua e portanto contínua, uma vez que $C_c^\infty(K)$ é metrizável. Supondo agora (d) verdadeiro basta provarmos que, se $B_r^\rho(0)$ é um elemento da sub-base da topologia de X em 0, então $T^{-1}(B_r^\rho(0))$ é aberto em $C_c^\infty(\Omega)$. Como

$$T^{-1}(B_r^\rho(0)) = \{\phi \in C_c^\infty(\Omega); (\rho \circ T)(\phi) < r\},$$

basta então mostrarmos que $\rho \circ T \in \mathcal{F}(\Omega)$, o que é imediato, pois $\rho \circ T \in \mathcal{F}(\Omega)$ se, e só se,

$$(\rho \circ T)_{|C_c^\infty(K)} = \rho \circ T_{|C_c^\infty(K)} : C_c^\infty(K) \to \mathbb{C}$$

é contínua, para todo $K \subset\subset \Omega$, o que é garantido por (d). □

Corolário 2.26. *Fixados $\rho \in \mathcal{F}(\Omega)$ e $K \subset\subset \Omega$, existem um inteiro $k \geq 0$ e uma constante $C > 0$ tais que*

$$\rho(\phi) \leq C||\phi||_{k,\infty}, \ \forall \ \phi \in C_c^\infty(K).$$

Demonstração. Aplique a equivalência $(a) \Leftrightarrow (e)$ do teorema anterior à identidade $\mathrm{Id} : C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)$, a qual é obviamente contínua. □

Corolário 2.27. *Para todo multi-índice α, o operador linear $\partial^\alpha : C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)$ é contínuo.*

Demonstração. Fixe $\rho \in \mathcal{F}(\Omega)$ e $K \subset\subset \Omega$. Como $\phi \in C_c^\infty(K) \Rightarrow \partial^\alpha \phi \in C_c^\infty(K)$, segue do corolário anterior que, para certos $k \geq 0$ inteiro e $C > 0$ real (independentes de ϕ),

$$\rho(\partial^\alpha \phi) \leq C||\partial^\alpha \phi||_{k,\infty} \leq C||\phi||_{k+|\alpha|,\infty}.$$

Portanto, aplicando novamente o teorema 2.25 concluímos que $\partial^\alpha : C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)$ é contínua. □

Finalizamos esta seção mostrando que, apesar de completo, $C_c^\infty(\Omega)$ não é metrizável. Para tanto, note inicialmente que, para todo $K \subset\subset \Omega$ fixado, $C_c^\infty(K)$ é fechado em $C_c^\infty(\Omega)$. De fato, seja $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ um ponto de acumulação de $C_c^\infty(K)$, com suporte $L \subset\subset \Omega$; se $L \not\subset K$, fixe $x_0 \in L \setminus K$ tal que $\psi(x_0) \neq 0$. Como as normas $||\ ||_{0,\infty}$ são semi-normas para a topologia de $C_c^\infty(\Omega)$, a definição de ponto de acumulação garante a existência de $\phi \in C_c^\infty(K)$ tal que $||\phi - \psi||_{0,\infty} < |\psi(x_0)|$; em particular,

$$|\psi(x_0)| = |\phi(x_0) - \psi(x_0)| \leq ||\phi - \psi||_{0,\infty} < |\psi(x_0)|,$$

uma contradição.

Suponha agora que $C_c^\infty(\Omega)$ fosse metrizável, donde um espaço métrico completo. Sendo $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$ uma exaustão de Ω por compactos, teríamos

$$C_c^\infty(\Omega) = \bigcup_{n\geq 1} C_c^\infty(K_n),$$

uma união enumerável de fechados. Portanto, para chegarmos a uma contradição via o teorema de Baire (cf. [4]), basta mostrarmos que $C_c^\infty(K)$ tem interior vazio em $C_c^\infty(\Omega)$ para cada $K \subset\subset \Omega$, o que pode ser feito do seguinte modo: suponha $B_r^{\rho_1,\ldots,\rho_m}(\phi) \subset C_c^\infty(K)$ para certos $r > 0$ e semi-normas $\rho_1, \ldots, \rho_m \in \mathcal{F}(\Omega)$. Tome $L \subset\subset \Omega \setminus K$ com interior não-vazio e, pelo corolário 2.26, constantes $C_i > 0$ e $k_i \in \mathbb{N}$ tais que

$$\rho_i(\eta) \leq C_i ||\eta||_{k_i,\infty}, \quad \forall\ \eta \in C_c^\infty(K \cup L).$$

Se $\psi \in C_c^\infty(L)$ for tal que $||\psi - \phi||_{k_i,\infty} < r/C_i$ para $1 \leq i \leq m$, então $\rho_i(\psi - \phi) < r$ para $1 \leq i \leq m$, i.e.,

$$\psi \in B_r^{\rho_1,\ldots,\rho_m}(\phi) \subset C_c^\infty(K),$$

uma contradição.

Capítulo 3

Distribuições

3.1 Distribuições

Definição 3.1. *Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, uma* **distribuição** *em Ω é um funcional linear contínuo $u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$. Denotamos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o espaço vetorial das distribuições em Ω; se $\Omega = \mathbb{R}^n$, denotaremos $\mathcal{D}'(\Omega)$ simplesmente por $\mathcal{D}'$.*

Se $u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ é um funcional linear, denotamos a imagem por u de $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ por $\langle u, \phi \rangle$. O teorema 2.25 nos dá imediatamente o seguinte critério para que $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Teorema 3.2. *Seja $u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ um funcional linear. São equivalentes:*

(a) *u é contínuo.*

(b) *u é contínuo em 0.*

(c) *u é sequencialmente contínuo.*

(d) *Para todo $K \subset\subset \Omega$, $u_{|C_c^\infty(K)} : C_c^\infty(K) \to \mathbb{C}$ é contínuo.*

(e) *Para todo $K \subset\subset \Omega$, existem um inteiro $k \geq 0$ e uma constante $C > 0$ tais que*
$$|\langle u, \phi \rangle| \leq C||\phi||_{k,\infty}, \ \forall \ \phi \in C_c^\infty(K). \tag{3.1}$$

Vejamos, no que segue, alguns exemplos relevantes de distribuições.

Exemplo 3.3. Se $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, e $u_f : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ é o funcional linear dado por
$$\langle u_f, \phi \rangle = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx,$$

então $u_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. De fato, tem-se neste caso

$$|\langle u_f, \phi\rangle| \leq \int_\Omega |f(x)||\phi(x)|dx \leq ||f||_{L^1(\Omega)}||\phi||_{0,\infty},$$

e o item (e) do teorema acima garante que $u_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

A prova da proposição a seguir pode ser encontrada em [3].

Proposição 3.4. *Para $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$.*

O corolário a seguir é conhecido como o **lema de Lebesgue**.

Corolário 3.5 (Lebesgue)**.** *Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, a aplicação linear*

$$\begin{array}{ccc} L^1_{\text{loc}}(\Omega) & \to & \mathcal{D}'(\Omega) \\ f & \mapsto & u_f \end{array}$$

é injetiva.

Demonstração. Basta provar que se $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ é tal que $u_f = 0$, a distribuição nula, então $f = 0$ a.e. em Ω. Fixado um retângulo fechado $R \subset\subset \Omega$, seja $(\phi_k)_{k\geq 1}$ uma sequência de funções em $C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_k \to \mathcal{X}_R$ em $L^1(\Omega)$. Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos

$$0 = \langle u_f, \phi_k\rangle = \int_\Omega f(x)\phi_k(x)dx \to \int_\Omega f(x)\mathcal{X}_R(x)dx = \int_R f(x)dx$$

Como isso é verdadeiro para todo R, segue que $f = 0$ a.e. em Ω. $\square$

O lema de Lebesgue garante que $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ pode ser identificado com um subespaço de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Graças a tal identificação, juntamente com o fato de os elementos de $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ serem funções (definidas a.e.), é costume denominarmos os elementos de $\mathcal{D}'(\Omega)$ de **funções generalizadas** em Ω. Mais ainda, para $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, utilizaremos por vezes a notação alternativa

$$\langle u, \phi\rangle = \int_\Omega u\phi dx.$$

Doravante, sempre que considerarmos $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ como um elemento $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, suporemos que tal elemento é $u = u_f$.

Dada $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, se existe $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que $u = u_f$, dizemos que u é uma distribuição **regular**. Caso contrário, u é dita uma distribuição **singular**.

Exemplo 3.6. Se μ é uma medida (positiva) localmente finita ou uma medida complexa na $\sigma-$álgebra de Borel de Ω, então o funcional linear $u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\langle u, \phi\rangle = \int_\Omega \phi(x)d\mu(x)$$

é um elemento de $\mathcal{D}'(\Omega)$. De fato, neste caso tem-se

$$|\langle u, \phi \rangle| \leq |\mu|(\text{supp}(\phi))||\phi||_{0,\infty} \leq |\mu|(K)||\phi||_{0,\infty},$$

para todo $K \subset\subset \Omega$ e toda $\phi \in C_c^\infty(K)$. Note que se μ for absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue, então o teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym garante a existência de $f \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\langle u, \phi \rangle = \int_\Omega \phi(x) d\mu(x) = \int_\Omega \phi(x) f(x) dx = \langle u_f, \phi \rangle,$$

e a distribuição u será regular.

Exemplo 3.7. Se $x \in \Omega$, o funcional linear $\delta_x : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ dado por

$$\langle \delta_x, \phi \rangle = \phi(x)$$

define uma distribuição singular em Ω, denominada a **função de Dirac**, ou **massa de Dirac**, ou ainda **delta de Dirac** em x.

Demonstração. Que δ_x, definida como acima, é distribuição, é óbvio a partir do teorema 3.2:

$$|\langle \delta_x, \phi \rangle| = |\phi(x)| \leq ||\phi||_{0,\infty}.$$

Para ver que tal distribuição é singular, basta usar o lema de Lebesgue: se $\phi \in C_c^\infty$ e seu suporte esta contido em $\Omega \setminus \{x\}$, então $\langle \delta_x, \phi \rangle = 0$. Portanto, se existisse $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que $\delta_x = u_f$, deveríamos ter $f = 0$ a.e. em $\Omega \setminus \{x\}$, donde $f = 0$ a.e. em Ω; mas aí teríamos, para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\langle \delta_x, \phi \rangle = \int_\Omega f(x)\phi(x) dx = 0,$$

o que é um absurdo. □

No que segue, gostaríamos de aprender a operar com distribuições, de maneira a generalizar as operações elementares com funções, por exemplo adição, multiplicação, etc. Para tanto, nos valeremos do seguinte argumento geral: se $T : C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)$ é um operador linear contínuo, então seu dual (ou adjunto) $T' : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ é tal que $T'u = u \circ T$, i.e.,

$$\langle T'u, \phi \rangle = \langle u, T\phi \rangle,$$

para todos $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Exemplo 3.8. Se $f \in C^\infty(\Omega)$ e $T_f : C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)$ é o operador linear dado por $T_f(\phi) = f\phi$, afirmamos que T_f é contínuo. De fato, fixados $\rho \in \mathcal{F}(\Omega)$ e $K \subset\subset \Omega$, segue do corolário 2.26 a existência de um inteiro $k \geq 0$ e uma constante $C > 0$ tais que

$$\rho(T_f\phi) \leq C||T_f\phi||_{k,\infty} = C||f\phi||_{k,\infty}, \ \forall\ \phi \in C_c^\infty(K).$$

Com tais C e k, a regra de diferenciação de produtos nos dá

$$\rho(T_f\phi) \leq C||f||_{k,\infty}||\phi||_{k,\infty}, \ \forall \ \phi \in C_c^\infty(K),$$

e o item (e) do teorema 2.25 assegura a continuidade de T_f.

A discussão acima nos permite então definir, para $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, uma nova distribuição fu por $fu = T_f'u$, de maneira que

$$\langle fu, \phi\rangle = \langle u, f\phi\rangle, \tag{3.2}$$

para todos $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Observação 3.9. *i) Se $u \in L^1{}_{loc}(\Omega)$ e $f \in C^\infty(\Omega)$, a distribuição fu definida acima coincide com a distribuição regular gerada pela função localmente integrável fu.*

ii) Se $u \in D'(\Omega)$, temos que $u_k \xrightarrow{k} u$ em $D'(\Omega) \Rightarrow fu_k \xrightarrow{k} fu$ em $D'(\Omega)$. E se $\psi \in C_c{}^\infty(\Omega)$, como $\langle \psi u, \phi\rangle = \langle u, \psi\phi\rangle$ e o segundo membro faz sentido para $\phi \in C_c{}^\infty$, podemos usar essa igualdade para definir ψu como um elemento de D'.

Exemplo 3.10. Pelo corolário 2.27, para todo multi-índice α o operador linear $\partial^\alpha : C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)$ é contínuo. Podemos, então, considerar seu dual $(\partial^\alpha)' : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$, tal que $(\partial^\alpha)'u = u \circ \partial^\alpha$. Para $\phi, \psi \in C_c^\infty(\Omega)$. Temos, pela fórmula de integração por partes, que

$$\int \partial^\alpha\phi(x)\psi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int \phi(x)\partial^\alpha\psi(x)dx.$$

Definimos, então, a distribuição $\partial^\alpha u$ por $\partial^\alpha u = (-1)^{|\alpha|}(\partial^\alpha)'u$, de maneira que

$$\langle \partial^\alpha u, \phi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^\alpha\phi\rangle, \tag{3.3}$$

para todos $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Observação 3.11. É imediato verificar que, quando $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e $f \in C^\infty(\Omega)$, a distribuição fu acima definida coincide com a função $fu \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$; do mesmo modo, para $u \in C^k(\Omega)$ e todo multi-índice α de ordem $|\alpha| \leq k$, a distribuição $\partial^\alpha u$ acima definida coincide com a distribuição regular obtida a partir da $\alpha-$derivada ordinária de u.

Para $u, v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e multi-índices quaisquer α, β, segue imediatamente da definição que $\partial^\alpha(u + v) = \partial^\alpha u + \partial^\alpha v$ e $\partial^\alpha\partial^\beta u = \partial^\beta\partial^\alpha u = \partial^{\alpha+\beta}u$.

Proposição 3.12. *Podemos estender, à distribuições, a regra de Leibniz de diferenciação de produtos: para $f \in C^\infty(\Omega)$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e α multi-índice, temos*

$$\partial^\alpha(fu) = \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\partial^{\alpha-\beta}f\partial^\beta u, \tag{3.4}$$

onde
$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} = \prod_{j=1}^{n} \binom{\alpha_j}{\beta_j}.$$

Demonstração. Façamos indução em $|\alpha|$
Seja $|\alpha| = 1$, e $\phi \in {C_c}^{\infty}$, então

$$\begin{aligned}
\langle \partial(fu), \phi\rangle &= -\langle fu, \partial\phi\rangle \\
&= -\langle u, f(\partial\phi)\rangle \\
&= -\langle u, \partial(f\phi) - (\partial f)\phi\rangle \\
&= \langle u, (\partial f)\phi\rangle - \langle u, \partial(f\phi)\rangle \\
&= \langle (\partial f)u, \phi\rangle + \langle \partial u, f\phi\rangle \\
&= \langle (\partial f)u, \phi\rangle + \langle f(\partial u), \phi\rangle \\
&= \langle (\partial f)u + f(\partial u), \phi\rangle.
\end{aligned}$$

E assim $\partial(fu) = (\partial f)u + f(\partial u)$. Assuma agora que a regra é valida para o multi-índice α, mostremos que a regra vale também para o multi-índice γ, com $|\gamma| = |\alpha| + 1$. Suponha, sem perda de generalidade, que $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n)$ e $\gamma = (\alpha_1 + 1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$.

Assim,

$$\begin{gathered}
\partial^{\gamma}(fu) = \\
\partial_1 \partial^{\alpha}(fu) = \\
\partial_1 \textstyle\sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} f \partial^{\beta} u = \\
\textstyle\sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial_1(\partial^{\alpha-\beta} f \partial^{\beta} u) = \\
\sum_{\substack{0\leq\beta_1\leq\alpha_1 \\ 0\leq\beta_2\leq\alpha_2 \cdots \\ 0\leq\beta_n\leq\alpha_n}} \tbinom{\alpha_1}{\beta_1}\tbinom{\alpha_2}{\beta_2}...\tbinom{\alpha_n}{\beta_n} (\partial_1^{\alpha_1-\beta_1+1} \partial_2^{\alpha_2-\beta_2} ... \partial_n^{\alpha_n-\beta_n} f) \partial_1^{\beta_1} \partial_2^{\beta_2} ... \partial_n^{\beta_n} u + \\
\sum_{\substack{0\leq\beta_1\leq\alpha_1 \\ 0\leq\beta_2\leq\alpha_2 \cdots \\ 0\leq\beta_n\leq\alpha_n}} \tbinom{\alpha_1}{\beta_1}\tbinom{\alpha_2}{\beta_2}...\tbinom{\alpha_n}{\beta_n} \partial_1^{\alpha_1-\beta_1} \partial_2^{\alpha_2-\beta_2} ... \partial_n^{\alpha_n-\beta_n} f (\partial_1^{\beta_1+1} \partial_2^{\beta_2} ... \partial_n^{\beta_n} u) = \\
\sum_{\substack{0\leq\beta_1\leq\alpha_1 \\ 0\leq\beta_2\leq\alpha_2 \cdots \\ 0\leq\beta_n\leq\alpha_n}} \tbinom{\alpha_1}{\beta_1}\tbinom{\alpha_2}{\beta_2}...\tbinom{\alpha_n}{\beta_n} (\partial_1^{\alpha_1-\beta_1+1} \partial_2^{\alpha_2-\beta_2} ... \partial_n^{\alpha_n-\beta_n} f) \partial_1^{\beta_1} \partial_2^{\beta_2} ... \partial_n^{\beta_n} u + \\
\sum_{\substack{1\leq\beta_1\leq\alpha_1+1 \\ 0\leq\beta_2\leq\alpha_2 \cdots \\ 0\leq\beta_n\leq\alpha_n}} \tbinom{\alpha_1}{\beta_1-1}\tbinom{\alpha_2}{\beta_2}...\tbinom{\alpha_n}{\beta_n} \partial_1^{\alpha_1-\beta_1+1} \partial_2^{\alpha_2-\beta_2} ... \partial_n^{\alpha_n-\beta_n} f (\partial_1^{\beta_1} \partial_2^{\beta_2} ... \partial_n^{\beta_n} u) = \\
\sum_{\substack{0\leq\beta_1\leq\alpha_1+1 \\ 0\leq\beta_2\leq\alpha_2 \cdots \\ 0\leq\beta_n\leq\alpha_n}} \tbinom{\alpha_1+1}{\beta_1}\tbinom{\alpha_2}{\beta_2}...\tbinom{\alpha_n}{\beta_n} \partial_1^{\alpha_1+1-\beta_1} \partial_2^{\alpha_2-\beta_2} ... \partial_n^{\alpha_n-\beta_n} f (\partial_1^{\beta_1} \partial_2^{\beta_2} ... \partial_n^{\beta_n} u) = \\
\textstyle\sum_{\beta\leq\gamma} \binom{\gamma}{\beta} \partial^{\gamma-\beta} f \partial^{\beta} u
\end{gathered}$$

Concluindo assim a demonstração. $\square$

Exemplo 3.13. Suponha $\Omega = \mathbb{R}^n$ e defina, para $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{C}^*$ fixados, os operadores lineares $\tau_x, T_\lambda : C_c^{\infty} \to C_c^{\infty}$ por

$$(\tau_x\phi)(y) = \phi(y + x) \ \text{ e } \ (T_\lambda\phi)(y) = \phi(\lambda y).$$

Uma vez que

$$||\tau_x\phi||_{k,\infty} = ||\phi||_{k,\infty}$$

e

$$||T_\lambda\phi||_{k,\infty} \leq (\max_{0\leq j\leq k} |\lambda|^j)||\phi||_{k,\infty},$$

raciocinando como no exemplo 3.8 concluímos que τ_x e T_λ são operadores lineares contínuos. Podemos então definir as distribuições $\tau'_x u$ e $T'_\lambda u$ por $\langle \tau'_x u, \phi\rangle = \langle u, \tau_x\phi\rangle$ e $\langle T'_\lambda u, \phi\rangle = \langle u, T_\lambda\phi\rangle$. Agora, gostaríamos de definir o que se entende pelas distribuições $\tau_x u$ e $T_\lambda u$; a fim de que tais definições sejam consistentes com a fórmula de mudança de variáveis para o caso de distribuições regulares, pomos $\tau_x u = u \circ \tau_{-x}$ e $T_\lambda u = \frac{1}{|\lambda|} u \circ T_{1/\lambda}$, i.e.,

$$\langle \tau_x u, \phi\rangle = \langle u, \tau_{-x}\phi\rangle \quad \text{e} \quad \langle T_\lambda u, \phi\rangle = \frac{1}{|\lambda|^n}\langle u, T_{1/\lambda}\phi\rangle. \tag{3.5}$$

Proposição 3.14. *Se $u \in D'(\Omega)$ e e_j denota um vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$, então, em $D'(\Omega)$,*

$$\frac{\tau_{te_j}u - u}{t} \stackrel{t\to 0}{\longrightarrow} \partial_j u.$$

Demonstração. Para $\phi \in {C_c}^\infty$, tem-se

$$\begin{aligned}
\langle \frac{\tau_{te_j}u - u}{t}, \phi\rangle &= \langle \tau_{te_j}u, \frac{\phi}{t}\rangle - \langle u, \frac{\phi}{t}\rangle \\
&= \langle u, \tau_{-te_j}\left(\frac{\phi}{t}\right)\rangle - \langle u, \frac{\phi}{t}\rangle \\
&= \langle u, \frac{\tau_{-te_j}\phi - \phi}{t}\rangle \\
&\stackrel{t\to 0}{\longrightarrow} \langle u, -\partial_j\phi\rangle = \langle \partial_j, \phi\rangle,
\end{aligned}$$

uma vez que $\frac{\tau_{te_j}\phi - \phi}{t} \stackrel{t\to 0}{\longrightarrow} \partial_j\phi$ em ${C_c}^\infty$, pelos teoremas 2.13 e 2.23.

□

Consideramos em $\mathcal{D}'(\Omega)$ a topologia de EVTLC gerada pela família suficiente de seminormas $\{\rho_\phi; \phi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$, onde

$$\rho_\phi(u) = |\langle u, \phi\rangle|.$$

Pela proposição 2.10, uma sequência $\{u_k\}_{k\geq 1}$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se e só se

$$\langle u_k, \phi\rangle \to \langle u, \phi\rangle, \quad \forall\ \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

(observe que tal topologia em $D'(\Omega)$ é simplesmente a topologia fraca$-*$).

Proposição 3.15. *$D'(\Omega)$ é um EVTLC completo.*

Demonstração. Seja $\{u_k\}_{k\geq 1} \subset D'(\Omega)$ tal que $\langle u_k, \phi\rangle$ é de Cauchy para toda $\phi \in {C_c}^{\infty}(\Omega)$, então basta mostrar que $u : {C_c}^{\infty}(\Omega) \to \mathbb{C}$ definido por

$$\langle u, \phi\rangle = \lim_{k\to+\infty} \langle u_k, \phi\rangle$$

define uma distribuição. Mas que u está bem definida e é linear é claro. Para mostrar a continuidade, basta mostrarmos, pelo teorema 3.2, que $u_{|{C_c}^{\infty}(K)}$ é contínua, $\forall\ K \subset\subset \Omega$. Para tanto, seja

$$\begin{aligned} F_j &= \{\phi \in {C_c}^{\infty}(K); |\langle u_k, \phi\rangle| \leq j, \forall\ k \geq 1\} \\ &= \bigcap_{k\geq 1} {u_k}^{-1}(\overline{B(0;j)}), \end{aligned}$$

fechado em ${C_c}^{\infty}(K)$. Como toda sequência $\{\langle u_k, \phi\rangle\}_{k\geq 1}$ converge, temos

$${C_c}^{\infty}(K) = \bigcup_{j\geq 1} F_j.$$

Como ${C_c}^{\infty}(K)$ é um espaço métrico completo, o teorema de Baire garante que $\exists\ l \geq 1$ tal que $Int(F_l) \neq \emptyset$ em ${C_c}^{\infty}(K)$. Assim, existem $m \in \mathbb{Z}_+, r > 0$ e $\psi \in {C_c}^{\infty}(K)$ tais que

$${B_r}^m(\psi) = \{\phi \in {C_c}^{\infty}(K); ||\phi - \psi||_{m,\infty,K} < r\} \subset F_l.$$

Assim,

$$||\phi - \psi||_{m,\infty,K} < r \Rightarrow |\langle u_k, \phi\rangle| \leq l, \forall\ k \geq 1.$$

Em particular, para $\phi \in {C_c}^{\infty}(K)$, temos $\phi_1 = \psi + \frac{r}{2}\frac{\phi}{||\phi||_{m,\infty,K}}$ em ${B_r}^m(\psi)$, donde $|\langle u_k, \phi_1\rangle| \leq l, \forall\ k \geq 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} |\langle u_k, \phi\rangle| &= \frac{2||\phi||_{m,\infty,K}}{r}|\langle u_k, \phi_1 - \psi\rangle| \leq \frac{2||\phi||_{m,\infty,K}}{r}\{|\langle u_k, \phi_1\rangle| + |\langle u_k, \psi\rangle|\} \\ & \frac{2||\phi||_{m,\infty,K}}{r}.2l = \frac{4l}{r}||\phi||_{m,\infty,K}, \end{aligned}$$

e $u_{|{C_c}^{\infty}(K)}$ é contínua.

□

Seja agora $T : C_c^{\infty}(\Omega) \to C_c^{\infty}(\Omega)$ um operador linear contínuo com adjunto T'. Se $u_k \to u$ em $D'(\Omega)$, então $T'u_k \to T'u$ em $D'(\Omega)$. De fato, para $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tem-se

$$\langle T'u_k, \phi\rangle = \langle u_k, T\phi\rangle \to \langle u, T\phi\rangle = \langle T'u, \phi\rangle.$$

Portanto, as operações que definimos acima sobre distribuições se comportam bem em relação à convergência de distribuições; em particular, obtemos a seguinte proposição, que está longe de ser verdadeira para funções ordinárias.

Proposição 3.16. *Seja α um multi-índice qualquer. Se $u_k \to u$ em $D'(\Omega)$, então $\partial^\alpha u_k \to \partial^\alpha u$ em $D'(\Omega)$.*

Demonstração. Para toda $\phi \in D$,

$$\langle \partial^\alpha u_k, \phi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u_k, \partial^\alpha \phi\rangle \to (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^\alpha \phi\rangle = \langle \partial^\alpha u, \phi\rangle.$$

□

3.2 Convoluções

No que segue, denotaremos $u_x = \tau_x$ e $\widetilde{u} = T_{-1}u$, isto é,

$$\langle u_x, \phi\rangle = \langle u, \phi_{-x}\rangle \text{ e } \langle \widetilde{u}, \phi\rangle = \langle u, \widetilde{\phi}\rangle.$$

Exemplo 3.17. *Se $f \in {L^1}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, sabemos que a convolução de f e g é a função $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definida por*

$$(f * g)(x) = \int f(y)g(x-y)dy = \int f(y)\widetilde{g_x}(y)dy = \int f\widetilde{g_x}dy.$$

Isso nos induz a definição definição a seguir.

Definição 3.18. *Definimos a* **convolução** *de $u \in D'$ e $\phi \in C_c^\infty$ como a função $u * \phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ dada por*

$$(u * \phi)(x) = \langle u, \widetilde{\phi_x}\rangle, \ \forall\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Note que $x_k \to x \Rightarrow \widetilde{\phi_{x_k}} \to \widetilde{\phi_x}$ em $C_c^\infty \Rightarrow \langle u, \widetilde{\phi_{x_k}}\rangle \to \langle u, \widetilde{\phi_x}\rangle$, de modo que $u * \phi \in C^0(\Omega)$.

Proposição 3.19. *Se $u \in D'(\Omega)$ e $\phi \in C_c^\infty$, então:*

(a) $(u * \phi)_x = u_x * \phi = u * \phi_x, \ \forall\ x \in \mathbb{R}^n.$

(b) $u * \phi \in C^\infty$ *e* $\partial^\alpha(u * \phi) = \partial^\alpha u * \phi = u * \partial^\alpha \phi, \ \forall\ \alpha.$

Demonstração. (a)

$$\begin{aligned}(u * \phi)_x(y) = (u * \phi)(y + x) &= \langle u, \widetilde{\phi_{y+x}}\rangle.\\ (u_x * \phi)(y) = \langle u_x, \widetilde{\phi_y}\rangle &= \langle u, \tau_{-x}\widetilde{\phi_y}\rangle.\\ (u * \phi_x)(y) &= \langle u, \widetilde{(\phi_x)_y}\rangle.\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}\widetilde{\phi_{y+x}}(z) &= \phi_{y+x}(-z) = \phi(x + y - z)\\ \tau_{-x}\widetilde{\phi_y}(z) = \widetilde{\phi_y}(-x + z) &= \phi_y(x - z) = \phi(x + y - z)\\ \widetilde{(\phi_x)_y}(z) = (\phi_x)_y(-z) &= \phi_x(y - z) = \phi(x + y - z)\end{aligned}$$

Portanto, $(u * \phi)_x = u_x * \phi = u * \phi_x, \ \forall\ x \in \mathbb{R}^n.$

(b) Note primeiro que

$$(\partial^\alpha u * \phi)(x) = \langle \partial^\alpha u, \widetilde{\phi_x} \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \widetilde{\phi_x} \rangle.$$

Mas, pela regra da cadeia,

$$(\partial^\alpha \widetilde{\phi_x})(z) = (-1)^{|\alpha|} (\partial^\alpha \phi_x)(z) = (-1)^{|\alpha|} (\partial^\alpha \phi)_x(z),$$

de modo que

$$(\partial^\alpha u * \phi)(x) = (-1)^{|\alpha|} \langle u, (-1)^{|\alpha|} (\partial^\alpha \phi)_x \rangle = \langle u, (\partial^\alpha \phi)_x \rangle = (u * \partial^\alpha \phi)(x)$$

Resta, então, provar que $\partial^\alpha (u * \phi)(x) = (u * \partial^\alpha \phi)(x)$. Por indução, basta provarmos que $\partial_j (u * \phi)(x) = (\partial_j u * \phi)(x), \forall\ 1 \leq j \leq n$. Para tanto, seja e_j o j-ésimo elemento da base canônica e, para $t > 0$, considere

$$T_t = \frac{1}{t}(\tau_{te_j} - I).$$

Segue de (a) que

$$\begin{aligned} T_t(u * \phi)(x) &= \frac{1}{t}\{\tau_{te_j}(u * \phi)(x) - (u * \phi)(x)\} \\ &= \frac{1}{t}\{(\tau_{te_j} u * \phi)(x) - (u * \phi)(x)\} \\ &= (T_t u * \phi)(x) \\ &= \langle T_t u, \widetilde{\phi_x} \rangle. \end{aligned}$$

Como, pela proposição 3.14, $T_t u \xrightarrow{t \to 0} \partial_j u$ em D', segue do que foi feito acima que $\lim\limits_{t \to 0} T_t(u * \phi)(x)$ existe e é igual a $\langle \partial_j u, \widetilde{\phi_x} \rangle = (\partial_j u * \phi)(x)$. Mas

$$\lim_{t \to 0} T_t(u * \phi)(x) = \partial_j (u * \phi)(x).$$

□

Proposição 3.20. *Se $\phi, \psi \in C_c^\infty$ e $u \in D'$, então $(u * \phi) * \psi = u * (\phi * \psi)$.*

Demonstração. Como $\phi * \psi \in C_c^\infty$, é uniformemente contínua. Portanto, a integral de convolução $(\phi * \psi)(x) = \int \phi(x - y)\psi(y)dy$ é aproximada uniformemente por uma soma de Riemann: se $t > 0$ e

$$R_t(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \phi(x - tk)\psi(tk)t^n,$$

então

$$R_t \xrightarrow{t \to 0} \phi * \psi \text{ uniformemente em } x.$$

Portanto, de
$$(\partial^\alpha R_t)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (\partial^\alpha \phi)(x - tk)\psi(tk)t^n,$$
o mesmo argumento acima garante que
$$\partial^\alpha R_t \overset{t\to 0}{\longrightarrow} (\partial^\alpha \phi) * \psi = \partial^\alpha(\phi * \psi)$$
uniformemente em x, onde na última igualdade usamos a proposição anterior. Lembrando por fim que
$$supp\,(R_t) \subset supp\,(\phi) + supp\,(\psi),$$
concluímos, do que foi exposto acima, que
$$R_t \overset{t\to 0}{\longrightarrow} \phi * \psi \ em\ C_c{}^\infty.$$

Logo,
$$\begin{aligned}
u * (\phi * \psi))(x) &= \langle u, \widetilde{(\phi * \psi)_x}\rangle = \lim_{t\to 0}\langle u, \widetilde{(R_t)_x}\rangle \\
&= \lim_{t\to 0}\langle u, \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \widetilde{(\phi_{-tk})_x}\psi(tk)t^n\rangle \\
&= \lim_{t\to 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle u, \widetilde{(\phi_{-tk})_x}\rangle\psi(tk)t^n \\
&= \lim_{t\to 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (u * \phi_{-tk})(x)\psi(tk)t^n \\
&= \lim_{t\to 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (u * \phi)(x - tk)\psi(tk)t^n \\
&= ((u * \phi) * \psi)(x),
\end{aligned}$$
a última igualdade valendo para cada $x \in \mathbb{R}^n$ □

Observação 3.21. *Fixada $\psi \in C_c{}^\infty$, o operador linear $T : C_c{}^\infty \to C_c{}^\infty$ tal que $T(\phi) = \phi * \psi$ satisfaz, pela desigualdade de Young,*
$$\begin{aligned}
||T\phi||_{k,\infty} &= ||\phi * \psi||_{k,\infty} \\
&= \sum_{|\alpha|\le k} ||\partial^\alpha(\phi * \psi)||_\infty \\
&= \sum_{|\alpha|\le k} ||(\partial^\alpha \phi) * \psi)||_\infty \\
&\le \sum_{|\alpha|\le k} ||\partial^\alpha \phi||_\infty ||\psi||_1 \\
&= ||\psi||_1 ||\phi||_{k,\infty},
\end{aligned}$$

donde é contínua.

Portanto, fica bem definido o operador linear dual $T' : D' \to D'$ por $\langle T'u, \phi\rangle = \langle u, T\phi\rangle = \langle u, \phi * \psi\rangle$. Quando $u \in {L^1}_{loc}$, temos, pelo teorema de Fubini, que

$$\begin{aligned}
\langle u, \phi * \psi\rangle &= \int u(x)(\phi * \psi)(x)dx = \int\int u(x)\phi(y)\psi(x-y)dydx \\
&= \int\int u(x)\widetilde{\psi}(y-x)\phi(x)dxdy \\
&= \int (u * \widetilde{\psi})(y)\phi(y)dy \\
&= \langle u * \widetilde{\psi}, \phi\rangle,
\end{aligned}$$

de modo que $T'u = u * \widetilde{\psi}$. Mas, como $\langle u * \psi, \phi\rangle = \langle u, \phi * \widetilde{\psi}\rangle$, teria sido natural definir, para $u \in D', \psi \in {C_c}^\infty, u * \psi \in D'$ por

$$\langle u * \psi, \phi\rangle = \langle u, \phi * \widetilde{\psi}\rangle.$$

Mostremos que tal definição, mais consoante com o espírito das anteriores, coincide com a dada no exemplo 3.17. Denotando $(u *_1 \psi) = \langle u, \widetilde{\psi_x}\rangle$ e $u *_2 \psi \in D'$ tal que $\langle u *_2 \psi, \phi\rangle = \langle u, \phi *_1 \psi\rangle$, temos

$$\begin{aligned}
u *_1 \psi = u *_2 \psi \text{ em } D' &\Leftrightarrow \langle u *_1 \psi, \phi\rangle = \langle u *_2 \psi, \phi\rangle, \forall\ \phi \in {C_c}^\infty \\
&\Leftrightarrow \int (u *_1 \psi)(x)\phi(x)dx = \langle u, \phi *_1 \widetilde{\psi}\rangle, \forall\ \phi \in {C_c}^\infty.
\end{aligned}$$

Mas pela proposição anterior,

$$\begin{aligned}
\int (u *_1 \psi)(x)\phi(x)dx &= ((u *_1 \psi) *_1 \widetilde{\phi})(0) = (u *_1 (\psi *_1 \widetilde{\phi}))(0) \\
&= \langle u, \widetilde{(\psi *_1 \widetilde{\phi})_0}\rangle = \langle u, \phi *_1 \widetilde{\psi}\rangle,
\end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}
\widetilde{(\psi *_1 \widetilde{\phi})_0}(x) &= (\psi *_1 \widetilde{\phi})_0(-x) = (\psi *_1 \widetilde{\phi})(-x) = (\widetilde{\phi} *_1 \psi)(-x) \\
&= \int \widetilde{\phi}(-x+y)\psi(-y)dy \\
&= \int \phi(x-y)\widetilde{\psi}(y)dy \\
&= (\phi * \widetilde{\psi})(x).
\end{aligned}$$

Definição 3.22. *Uma* **aproximação da identidade** *é uma família* $\{\phi_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ *de funções tal que* $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\phi(\epsilon^{-1}x)$, *onde* $\phi \in L^1$ *é positiva e* $||\phi||_1 = 1$.

Se $u \in C^k(\Omega)$ e $|\alpha| \leq k$, a distribuição $\partial^\alpha u$ coincide com a distribuição regular obtida a partir de derivação ordinária de ordem α de u. Estabelecemos a recíproca desse fato na proposição a seguir.

Proposição 3.23. *Se $u \in C^0(\Omega)$ tem derivadas distribucionais*

$$\partial^\alpha u \in C^0(\Omega), \forall\ |\alpha| \leq k,$$

então $u \in C^k(\Omega)$.

Demonstração. Por indução, podemos supor $k = 1$. Seja $\partial_j u = f_j$ e suponha inicialmente que $supp\,(u) \subset \Omega$ é compacto. Se $\{\phi_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ é uma aproximação da identidade $C_c{}^\infty$, então o teorema 0.13 de [2] garante que $u * \phi_\epsilon \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} u$ uniformemente. Portanto, para $x \in supp\,(u)$ e $\epsilon << 1$, temos

$$\begin{aligned}
\partial_j(u * \phi_\epsilon)(x) &= (u * \partial_j\phi_\epsilon)(x) = \int u(y)(\partial_j\phi_\epsilon)(x-y)dy \\
&= -\int u(y)\partial_j(\phi_\epsilon(x-y))dy = -\int u(y)\partial_j\widetilde{(\phi_\epsilon)_x}(y)dy \\
&= -\langle u, \partial_j\widetilde{(\phi_\epsilon)_x}\rangle = \langle \partial_j u, \widetilde{(\phi_\epsilon)_x}\rangle = \langle f_j, \widetilde{(\phi_\epsilon)_x}\rangle \\
&= \int f_j(y)\widetilde{(\phi_\epsilon)_x}(y)dy = \int f_j(y)\phi_\epsilon(x-y)dy \\
&= (f_j * \phi_\epsilon)(x),
\end{aligned}$$

isto é,

$$\partial_j(u * \phi_\epsilon) = f_j * \phi_\epsilon \text{ como funções.}$$

Agora, novamente pelo teorema 0.13 do [2], ($supp\,(u*\phi_\epsilon) \subset\subset \Omega$ para $\epsilon << 1$, uma vez que $supp\, u$ é compacto)

$$\partial_j(u * \phi_\epsilon) = f_j * \phi_\epsilon \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} f_j$$

uniformemente, donde o teorema da derivação termo a termo garante que u é C^1 e $\partial_j u = f_j$ no sentido clássico.

No caso geral, seja $x_0 \in \Omega$ e $\psi \in C_c{}^\infty(\Omega)$ igual a 1 numa vizinhança de x_0. Então $\psi u \in C^0(\Omega)$ tem suporte compacto e, para $\phi \in C_c{}^\infty(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\langle \partial_j(\psi u), \phi\rangle &= -\langle \psi u, \partial_j\phi\rangle = -\langle u, \psi\partial_j\phi\rangle \\
&= \langle u, (\partial_j\psi)\phi - \partial_j(\psi\phi)\rangle \\
&= \langle (\partial_j\psi)u, \phi\rangle + \langle \partial_j u, \psi\phi\rangle \\
&= \langle (\partial_j\psi)u + \psi\partial_j u, \phi\rangle,
\end{aligned}$$

isto é, no sentido das distribuições,

$$\partial_j(\psi u) = (\partial_j\psi)u + \psi\partial_j u \in C^0(\Omega).$$

Portanto $\psi u \in C^1$. Como $\psi \equiv 1$ numa vizinhança de x_0, segue que u é C^1 numa vizinhança de x_0. Como $x_0 \in \Omega$ foi escolhido arbitrariamente, segue que $u \in C^1(\Omega)$.

□

Lema 3.24. *Se $\phi, \psi \in {C_c}^\infty$, e $\{\phi_\epsilon\}$ é uma aproximação da identidade, então $\psi * \phi_\epsilon \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \psi$ em ${C_c}^\infty$.*

Demonstração. Certamente $\psi * \phi_\epsilon \in {C_c}^\infty$ e $supp\,(\psi * \phi_\epsilon) \subset supp\,\psi + supp\,\phi$ para $\epsilon \leq 1$. Portanto, basta mostrarmos que $\partial^\alpha(\psi*\phi_\epsilon) \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \partial^\alpha\psi$ uniformemente. Para tanto, note que $\partial^\alpha(\psi*\phi_\epsilon) = \partial^\alpha\psi*\phi_\epsilon$ e que $\partial^\alpha\psi*\phi_\epsilon \to \partial^\alpha\psi$ uniformemente, pelo teorema (0.13) de [2]. □

3.3 Distribuições com suporte compacto

Definição 3.25. *Se $u, v \in D'(\Omega)$, dizemos que $u = v$ em $V \subset \Omega$ aberto se $\langle u, \phi\rangle = \langle v, \phi\rangle$, para toda $\phi \in {C_c}^\infty(V)$.*

Lema 3.26. *Sejam $u, v \in D'(\Omega)$ e $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ uma família de abertos de Ω, tal que $u = v$ em cada V_α. Então $u = v$ em $\displaystyle\bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha$.*

Demonstração. Temos de mostrar que $\langle u, \phi\rangle = \langle v, \phi\rangle$, $\forall\ \phi \in {C_c}^\infty\big(\bigcup_\alpha V_\alpha\big)$. Para tanto, note que o suporte de uma tal ϕ está contido numa união $V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_k}$. Tomando uma partição da unidade sobre $supp\,(\phi)$, subordinada a $V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_k}$, podemos escrever $\phi = \phi_1 + \cdots + \phi_k$, com $supp\,(\phi_j) \subset V_j$ para todo $1 \leq j \leq k$. Como $u = v$ em cada V_α, segue que

$$\langle u, \phi\rangle = \sum_{j=1}^{k} \langle u, \phi_j\rangle = \sum_{j=1}^{k} \langle v, \phi_j\rangle = \langle v, \phi\rangle.$$

□

Com o lema acima, a seguinte definição tem sentido.

Definição 3.27. *O* **suporte** *de $u \in D'(\Omega)$ é o complemento do maior conjunto aberto de Ω no qual $u = 0$.*

Se $u \in {L^1}_{loc}(\Omega)$, é imediato que os dois conceitos de suporte coincidem.

Proposição 3.28. *${C_c}^\infty(\Omega)$ é denso em $D'(\Omega)$, $\forall\ \Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto.*

Demonstração. Sejam $u \in D'(\Omega)$, $\{V_j\}_{j\geq 1}$ uma exaustão de Ω por abertos pré-compactos e $\eta_j \in C_c^\infty(\Omega)$, tais que $\eta_j = 1$ em $\overline{V_j}$. Afirmamos inicialmente que $\eta_j u \overset{j}{\to} u$ em $D'(\Omega)$.

De fato, se $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, então existe $j \geq 1$ tal que $supp\,(\phi) \subset V_j$; daí $(1 - \eta_j)\phi = 0$ em Ω, de modo que

$$\langle \eta_j u, \phi\rangle = \langle u, \eta_j\phi\rangle = \langle u, \phi\rangle.$$

Basta agora mostrarmos que cada $\eta_j u$ é o limite, em $D'(\Omega)$, de uma sequência de funções em $C_c^\infty(\Omega)$, vistas como distribuições. Pela observação 3.9, cada $\eta_j u$ pode ser vista como uma distribuição em $\mathbb{R}^n$. Se $\{\psi_\epsilon\}$ é uma aproximação da identidade, então $(\eta_j u) * \psi_\epsilon \in C^\infty$ e, pelo lema 3.24,

$$\begin{aligned} \langle(\eta_j u) * \psi_\epsilon, \phi\rangle &= \langle \eta_j u, \phi * \widetilde{\psi_\epsilon}\rangle \\ &= \langle \eta_j u, \phi * \widetilde{\psi}_\epsilon\rangle \\ &\xrightarrow{\epsilon \to 0} \langle \eta_j u, \phi\rangle \end{aligned}$$

Portanto, basta provarmos que $(\eta_j u) * \psi_\epsilon$ tem suporte compacto para $\epsilon << 1$, o que é imediato: se $supp\,(\eta_j) \subset V_k$, afirmamos que $supp\,((\eta_j u) * \psi_\epsilon) \subset \overline{V_k}$. De fato,

$$supp\,(\phi) \subset \overline{V_k}^c \Rightarrow \langle(\eta_j u) * \psi_\epsilon, \phi\rangle = \langle \eta_j u, \phi * \widetilde{\psi_\epsilon}\rangle = \langle u, \eta_j(\phi * \widetilde{\psi_\epsilon})\rangle = 0$$

para $\epsilon << 1$, uma vez que $supp\,(\eta_j) \in V_k$ e $supp\,(\phi * \widetilde{\psi_\epsilon}) \subset supp\,(\phi) + supp\,(\widetilde{\psi_\epsilon}) \subset \overline{V_k}^c + B(0,\epsilon) \subset \overline{V_k}^c$ para $\epsilon << 1$.

□

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, o espaço das distribuições em Ω com suporte igual a um subconjunto compacto de Ω é denotado por $E'(\Omega)$; se $\Omega = \mathbb{R}^n$, denotamos $E'(\Omega)$ simplesmente por E'. Mostremos que $E'(\Omega)$ é o dual de $C^\infty(\Omega)$ quando consideramos em $C^\infty(\Omega)$ uma topologia apropriada. Para tanto, fixe uma exaustão $\{V_k\}_{k\geq 1}$ de Ω e considere em $C^\infty(\Omega)$ a topologia de EVTLC gerada pela família de semi-normas

$$||f||_{m,\infty,V_k} = \sum_{|\alpha|\leq m} ||\partial^\alpha f||_{L^\infty(V_k)}.$$

Fixada uma outra exaustão $\{U_k\}_{k\geq 1}$ de Ω, a topologia gerada é a mesma. De fato, para cada $k \geq 1$ existe $j \geq 1$ tal que $U_k \subset V_j$; portanto,

$$||f||_{m,\infty,V_j} = \sum_{|\alpha|\leq m} ||\partial^\alpha f||_{L^\infty(V_j)} \geq \sum_{|\alpha|\leq m} ||\partial^\alpha f||_{L^\infty(U_k)} = ||f||_{m,\infty,U_k}$$

Por outro lado, como todo conjunto compacto $K \subset \Omega$ está contido em algum V_k, e como

$$f_j \xrightarrow{j} f \text{ em } C^\infty(\Omega) \Leftrightarrow ||f_j - f||_{m,\infty,V_k} \xrightarrow{j} 0, \forall\, k, m,$$

segue que a topologia de $C^\infty(\Omega)$ é a da convergência uniforme, sobre partes compactas, da função e de todas as suas derivadas.

Como a família de semi-normas é enumerável, $C^\infty(\Omega)$ é um espaço métrico. Mais ainda, o teorema da derivação termo a termo garante que $C^\infty(\Omega)$ é um espaço de Fréchet.

Proposição 3.29. *A inclusão* $\iota : C_c{}^{\infty}(\Omega) \to C_c{}^{\infty}(\Omega)$ *é contínua e densa.*

Demonstração. Para a primeira parte, pelo teorema 2.25 basta provarmos qur $\iota : C_c{}^{\infty}(K) \to C_c{}^{\infty}(\Omega)$ é contínua, $\forall\ K \subset\subset \Omega$. Mas se $K \subset V_j$, então

$$||\phi||_{m,\infty,K} < r \Rightarrow ||\phi||_{m,\infty,V_j} < r, \forall\ \phi \in C_c{}^{\infty}(K),$$

isto é,

$$\iota^{-1}(B_r(0)) \supset B_r(0),$$

onde na primeira bola da equação inclusão acima, usamos a norma $||\ ||_{m,\infty,V_j}$ e na segunda bola usamos a norma $||\ ||_{m,\infty,K}$. Para a densidade, tome, para cada $k \geq 1$, $\psi_k \in C_c^{\infty}(\Omega)$ tal que $\psi_k = 1$ em $\overline{V_k}$. Se $f \in C^{\infty}(\Omega)$, então

$$k \geq k_0 \Rightarrow ||\psi_k f - f||_{k_0,\infty,V_{k_0}} = 0,$$

uma vez que $\psi_k = 1$ em $\overline{V_{k_0}}$. □

Teorema 3.30. $E'(\Omega) \approx C^{\infty}(\Omega)'$. *Mais precisamente, se* $u \in E'(\Omega)$, *então* u *se estende unicamente a um funcional linear contínuo em* $C^{\infty}(\Omega)$, *reciprocamente, se* $v \in C^{\infty}(\Omega)'$, *então* $v_{|C_c{}^{\infty}(\Omega)} \in E'(\Omega)$.

Demonstração. Seja $v : C^{\infty}(\Omega) \to \mathbb{C}$ contínua. Como $\iota : C_c{}^{\infty}(\Omega) \to C^{\infty}(\Omega)$ é contínua, também é contínua $u = v \circ \iota : C_c{}^{\infty}(\Omega) \to \mathbb{C}$. Note agora que a continuidade de v garante, via teorema 2.9 (e porque as seminormas de $C^{\infty}(\Omega)$ são encaixantes) a existência de $C > 0$ e $m, k \geq 1$ tal que

$$|\langle v, f\rangle| \leq C||f||_{m,\infty,V_k}, \forall\ f \in C^{\infty}(\Omega).$$

Portanto,

$$supp(f) \subset \overline{V_k}^{c} \Rightarrow \langle v, f\rangle = 0,$$

de modo que $supp(v) \subset \overline{V_k}$, isto é, $v \in E'(\Omega)$.

Tome agora $u \in E'(\Omega)$, se $\psi \in C_c{}^{\infty}(\Omega)$ qualquer é tal que $\psi = 1$ em $supp(u)$, então

$$\langle v, f\rangle := \langle u, \psi f\rangle$$

bem define um funcional linear $v : C^{\infty}(\Omega) \to \mathbb{C}$. (de fato, se $\psi_1, \psi_2 = 1$ em $supp(u)$, então $(\psi_1 - \psi_2)f = 0$ em $supp(u)$, donde $\langle u, \psi_1 f\rangle = \langle u, \psi_2 f\rangle$). Como, pelo teorema 2.25, $u_{|C_c{}^{\infty}(supp\psi)} : C_c{}^{\infty}(supp\psi) \to \mathbb{C}$ é contínuo, existem $C > 0$, $m \geq 1$ tal que

$$|\langle u, \phi\rangle| \leq C||\phi||_{m,\infty}, \forall\ \phi \in C_c{}^{\infty}(supp\psi).$$

Em particular, para $f \in C^{\infty}(\Omega)$, se $k \geq 1$ é tal que $supp(\psi) \subset V_k$, então

$$|\langle v, f\rangle| = |\langle u, \psi f\rangle| \leq C||\psi f||_{m,\infty} \leq C'||f||_{m,\infty,V_k},$$

onde na última passagem utilizamos a regra de Leibniz de diferenciação de produtos. Portanto, pelo teorema 2.9, $v : C^{\infty}(\Omega) \to \mathbb{C}$ é contínua.

Para o que falta, se $v_1, v_2 \in C^\infty(\Omega)'$ são tais que $v_{1|C_c{}^\infty(\Omega)} = v_{2|C_c{}^\infty(\Omega)}$, então a densidade de $C_c{}^\infty(\Omega)$ em $C^\infty(\Omega)$ garante que $v_1 = v_2$. Portanto, a extensão de $u \in E'(\Omega)$ a $C^\infty(\Omega)$ é única. $\square$

Corolário 3.31. *Para $u \in D'(\Omega)$, se $u \in E'(\Omega)$, então existem $C' > 0$, $m \geq 1$ tais que*

$$|\langle u, \phi\rangle| \leq C'||\phi||_{m,\infty,\Omega}, \forall\ \phi \in C_c{}^\infty(\Omega). \tag{3.6}$$

Demonstração. Se $u \in E'(\Omega)$ e $\psi = 1$ em $supp(u)$, $\psi \in C_c{}^\infty(\Omega)$, então $(1-\psi)\phi = 0$ em $supp(u), \forall\ \phi \in C_c{}^\infty(\Omega)$, donde $\langle u, \phi\rangle = \langle u, \psi\phi\rangle$. Daí, vimos na prova do teorema anterior que existem $C > 0$, $m \geq 1$ tais que

$$|\langle u, \phi\rangle| \leq C||\psi\phi||_{m,\infty,\Omega} \leq C'||\phi||_{m,\infty,\Omega},$$

onde na última passagem usamos novamente a regra de Leibniz. $\square$

É imediato verificar que as operações de multiplicação por uma função C^∞ e de diferenciação preservam $E'(\Omega)$. Para E', também são preservados em operações de translação e reflexão.

Se $u \in E'$ e $\psi \in C_c{}^\infty$, já sabemos que $u * \psi \in C^\infty$. Mas, se

$$supp(\phi) \cap (supp(u) + supp(\psi)) = \emptyset,$$

então

$$\langle u * \psi, \phi\rangle = \langle u, \phi * \widetilde{\psi}\rangle = 0,$$

uma vez que

$$supp(\phi * \widetilde{\psi}) \subset supp(\phi) + supp(\psi),$$

o qual é disjunto de $supp(u)$. No entanto, como u se estende unicamente a C^∞, podemos estender a definição de $u * \psi$ para $\psi \in C^\infty$ pondo

$$(u * \psi)(x) = \langle \overline{u}, \widetilde{\psi_x}\rangle \text{ ou } \langle u * \psi, \phi\rangle = \langle \overline{u}, \phi * \widetilde{\psi}\rangle, \tag{3.7}$$

onde, nos segundos membros acima, $\overline{u}$ representa a única extensão de u a C^∞(note que $\phi * \widetilde{\psi} \in C^\infty$, pelo teorema (0.14) de [2]). Como anteriormente, afirmamos que tais definições coincidem. De fato, se $\eta = 1$ em $supp(u)$, temos de mostrar que

$$x \mapsto \langle u, \eta\widetilde{\psi_x}\rangle \text{ e } \phi \mapsto \langle u, \eta(\phi * \widetilde{\psi})\rangle$$

coincidem em D'. Mas, pela proposição 3.28, existe sequência $(u_k)_{k\geq 1}$ em C_c^∞ tal que $u_k \xrightarrow{k} u$ em D'. Se $x \mapsto \langle u_k, \eta\widetilde{\psi_x}\rangle$ convergir para $x \mapsto \langle u, \eta\widetilde{\psi_x}\rangle$ em L^1, teremos

$$\langle u, \eta(\phi*\widetilde{\psi})\rangle = \lim_k \langle u_k, \eta(\phi*\widetilde{\psi})\rangle = \lim_{k\to+\infty} \int \langle u_k, \eta\widetilde{\psi_x}\rangle\phi(x)dx = \int \langle u, \eta\widetilde{\psi_x}\rangle\phi(x)dx,$$

que é o desejado contanto que valha a segunda igualdade. Isso é fácil:

$$\int \langle u_k, \eta\widetilde{\psi_x}\rangle \phi(x)dx = \int\int u_k(y)(\eta\widetilde{\psi_x})(y)\phi(x)dydx$$
$$= \int\int u_k(y)\eta(y)\psi_x(-y)\phi(x)dydx$$

e

$$\langle u_k, \eta(\phi * \widetilde{\psi})\rangle = \int u_k(y)(\eta(\phi * \widetilde{\psi}))(y)dy = \int u_k(y)\eta(y)\int \phi(x)\widetilde{\psi}(y-x)dxdy$$
$$= \int\int u_k(y)\eta(y)\psi(y-x)\phi(x)dxdy,$$

donde são iguais.

Para o que falta, como $u \in E'$, a prova da proposição 3.28 garante que podemos tomar

$$u_k = u * \zeta_\epsilon,$$

onde ζ_ϵ é uma aproximação da identidade. Portanto,

$$\langle u_k, \eta\widetilde{\psi_x}\rangle = \langle u * \zeta_\epsilon, \eta\widetilde{\psi_x}\rangle = \langle u, (\eta\widetilde{\psi_x}) * \widetilde{\zeta_\epsilon}\rangle.$$

Mas como $u \in E', \exists\ C > 0,\ m \geq 1$, tal que $|\langle u, \phi\rangle| \leq C||\phi||_{m,\infty}, \forall\ \phi \in {C_c}^\infty$, de modo que

$$\begin{aligned}
|\langle u, (\eta\widetilde{\psi_x}) * \widetilde{\zeta_\epsilon}\rangle| &\leq C||(\eta\widetilde{\psi_x}) * \widetilde{\zeta_\epsilon}\rangle||_{m,\infty} \\
&= C\sum_{|\alpha|\leq m} ||\partial^\alpha(\eta\widetilde{\psi_x}) * \widetilde{\zeta_\epsilon}||_{L^\infty} \\
&\leq C'\sum_{|\alpha|\leq m} ||\partial^\alpha(\eta\widetilde{\psi_x})||_{L^\infty}||\widetilde{\zeta_\epsilon}||_{L^1} = C'',
\end{aligned}$$

C'' independente de k. Assim, as funções $x \mapsto \langle u_k, \eta\widetilde{\psi_x}\rangle$ são uniformemente limitadas, convergem pontualmente para $x \mapsto \langle u, \eta\widetilde{\psi_x}\rangle$ (pois $u_k \xrightarrow{k} u$ em D') e para $\epsilon \leq 1$ são suportadas no compacto comum $supp\,(u) + \overline{B(0;1)}$. Portanto, o teorema da convergência dominada garante que $x \mapsto \langle u_k, \eta\widetilde{\psi_x}\rangle$ converge em L^1 para $x \mapsto \langle u, \eta\widetilde{\psi_x}\rangle$.

Se $u \in E', v \in D'$, então $\widetilde{u} \in E', \widetilde{v} \in D'$ de modo que, para $\phi \in {C_c}^\infty, \widetilde{u} * \phi \in {C_c}^\infty$ e $\widetilde{v} * \phi \in {C_c}^\infty$. Portanto, ficam bem definidos os funcionais lineares $u * v, v * u : {C_c}^\infty \to \mathbb{C}$ por

$$\langle u * v, \phi\rangle = \langle u, \widetilde{v} * \phi\rangle \text{ e } \langle v * u, \phi\rangle = \langle v, \widetilde{u} * \phi\rangle.$$

Proposição 3.32. *Sejam $u \in E'$ e $v \in E'$, então $u * v = v * u \in D'$. Ademais, $\partial^\alpha(u * v) = (\partial^\alpha u) * v = u * (\partial^\alpha v)$.*

Demonstração. Como $u \in E'$, $\exists\ C > 0$ e $m \geq 1$ tal que $|\langle u, \phi \rangle| \leq C||\phi||_{m,\infty}, \forall\ \phi \in {C_c}^{\infty}$. Daí,

$$\begin{aligned} |\langle u * v, \phi \rangle| &= |\langle u, \widetilde{v} * \phi \rangle| \leq C||\widetilde{v} * \phi||_{m,\infty} \\ &= C \sum_{|\alpha| \leq m} ||\widetilde{v} * \partial^{\alpha}\phi||_{\infty} \end{aligned}$$

Mas $|(\widetilde{v} * \partial^{\alpha}\phi)(x)| = |\langle \widetilde{v}, \widetilde{(\partial^{\alpha}\phi)_x} \rangle| = |\langle v, (\partial^{\alpha}\phi)_x \rangle| \leq C_1||\partial^{\alpha}\phi||_{m_1,\infty}$ se $\phi \in {C_c}^{\infty}(K), \exists\ C_1 > 0$ e $m_1 \geq 1$. Portanto,

$$\phi \in {C_c}^{\infty}(K) \Rightarrow |\langle u * v, \phi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} C_1||\partial^{\alpha}\phi||_{m_1,\infty} \leq C_1 C||\phi||_{m+m_1,\infty},$$

e $u * v \in D'$.

Quanto a $v * u$, sejam $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ e $L = supp(u) + K \subset\subset \mathbb{R}^n$. Para $\phi \in {C_c}^{\infty}(K)$, temos $\widetilde{u} * \phi \in {C_c}^{\infty}(L)$, de modo que

$$|\langle v * u, \phi \rangle| = |\langle v, \widetilde{u} * \phi \rangle| \leq C_L||\widetilde{u} * \phi||_{m,\infty} \tag{3.8}$$

$\exists\ C_L > 0$, $m \geq 1$. Mas, como acima,

$$||\widetilde{u} * \phi||_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} ||\widetilde{u} * \partial^{\alpha}\phi||_{\infty} \leq C_1||\partial^{\alpha}\phi||_{m,\infty},$$

que, juntamente com a equação 3.8, garante a continuidade de $v * u$.

Para $u * v = v * u$, tome sequências $(u_k)_{k \geq 1}$ e $(v_k)_{k \geq 1}$ em ${C_c}^{\infty}$ tais que $u_k \overset{k}{\to} u$ e $v_k \overset{k}{\to} v$ em D'. Então

$$\begin{aligned} |\langle u_k * v_l, \phi \rangle - \langle u * v, \phi \rangle| &\leq |\langle u_k * v_l, \phi \rangle - \langle u_k * v, \phi \rangle| + |\langle u_k * v, \phi \rangle - \langle u * v, \phi \rangle| \\ &= |\langle u_k, \widetilde{v_l} * \phi \rangle - \langle u_k, \widetilde{v} * \phi \rangle| + |\langle u_k, \widetilde{v} * \phi \rangle - \langle u, \widetilde{v} * \phi \rangle|. \end{aligned}$$

Fixado $\epsilon > 0$, podemos escolher $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq k_0 \Rightarrow |\langle u_k, \widetilde{v} * \phi \rangle - \langle u, \widetilde{v} * \phi \rangle| < \frac{\epsilon}{2}$. Para a 1ª parcela, se mostrarmos que $\widetilde{v_l} * \phi \to \widetilde{v} * \phi$ em C^{∞}, poderemos tomar $l_0 \geq 1$ tal que

$$|\langle u_{k_0}, \widetilde{v_{l_0}} * \phi \rangle - \langle u_{k_0}, \widetilde{v} * \phi \rangle| < \frac{\epsilon}{2},$$

o que garantirá que $u_k * v_l \xrightarrow{k,l} u * v$. Mas o que falta pode ser provado com o mesmo argumento das páginas anteriores, notando que $\partial^{\alpha}(\widetilde{v} * \phi) = \widetilde{v} * \partial^{\alpha}\phi$.(veja também a observação após a prova).

Analogamente, $v_l * u_k \xrightarrow{k,l} v * u$. Daí,

$$\langle u * v, \phi \rangle = \lim_{k,l} \langle u_k * v_l, \phi \rangle = \lim_{k,l} \langle v_l * u_k, \phi \rangle = \langle v * u, \phi \rangle.$$

Para o que falta, note que

$$\begin{aligned}
\langle \partial^\alpha(u*v), \phi\rangle &= (-1)^{|\alpha|}\langle u*v, \partial^\alpha\phi\rangle \;= (-1)^{|\alpha|}\langle u, \widetilde{v}*\partial^\alpha\phi\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^\alpha(\widetilde{v}*\phi)\rangle = \langle \partial^\alpha u, \widetilde{v}*\phi\rangle \\
&= \langle \partial^\alpha u * v, \phi\rangle \\
\langle \partial^\alpha(u*v), \phi\rangle &= \langle \partial^\alpha(v*u), \phi\rangle = \langle \partial^\alpha v * u, \phi\rangle = \langle u * \partial^\alpha v, \phi\rangle
\end{aligned}$$

□

Proposição 3.33. *Fixada $\phi \in {C_c}^\infty$, a aplicação $*\phi : D' \to C^\infty$ dada por $*\phi(u) = u*\phi$ é um operador linear contínuo.*

Demonstração. Se $u_k \overset{k}{\to} u$ em D', temos de mostrar que $u_k * \phi \overset{k}{\to} u*\phi$ em C^∞, isto é, fixado $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ compacto e α multi-índice, temos de provar que $\partial^\alpha(u_k*\phi) = u_k*\partial^\alpha\phi \overset{k}{\to} u*\partial^\alpha\phi = \partial^\alpha(u*\phi)$ uniformemente sobre K. Basta então, por indução, provar que

$$u_k*\phi \overset{k}{\to} u*\phi \text{ uniformemente sobre K.}$$

O que falta é um argumento análogo ao das páginas anteriores, (se $u_k = \eta_j u * \zeta_\epsilon$, a única diferença com o argumento de lá é que temos de controlar uniformemente $||\eta_j||_{m,\infty}$, o que certamente pode ser feito tomando $V_j = B(0;j)$ e η_j com derivada controlada). □

Capítulo 4

A Transformada de Fourier

4.1 Tranformada de Fourier

Definição 4.1. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, a* **transformada de Fourier** $\widehat{f}$ *é uma função limitada em $\mathbb{R}^n$ definida por*

$$\widehat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i x\xi} f(x)dx.$$

Claramente $\widehat{f}(\xi)$ está bem definida para todo ξ e $||\widehat{f}||_\infty \leq ||f||_1$.

Teorema 4.2. *Se $f, g \in L^1$ então $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$*

Demonstração. Usando o teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\xi) &= \int \int e^{-2\pi i x\xi} f(x-y)g(y)dydx \\
&= \int \int e^{-2\pi i(x-y)\xi} f(x-y)e^{-2\pi i y\xi} g(y)dxdy \\
&= \widehat{f}(\xi) \int e^{-2\pi i y\xi} g(y)dy = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).
\end{aligned}$$

□

Proposição 4.3. *Suponha $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*

(a) *Se $f_a(x) = f(x+a)$, então $\widehat{f_a}(\xi) = e^{2\pi i a\xi}\widehat{f}(\xi)$.*

(b) *Se T é uma transforação linear invertível de $\mathbb{R}^n$, então*

$$\widehat{f \circ T}(\xi) = |\det T|^{-1}\widehat{f}((T^{-1})^*\xi).$$

(c) Se T é uma rotação de $\mathbb{R}^n$, então $\widehat{f \circ T} = \widehat{f} \circ T$.

Demonstração.

(a)

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_a(\xi) &= \int e^{-2\pi i x\xi} f_a(x)dx \\
&= \int e^{-2\pi i x\xi} f(x+a)dx \\
&\overset{TMV}{=} \int e^{-2\pi i (x-a)\xi} f(x)dx \\
&= e^{2\pi i a\xi} \int e^{-2\pi i x\xi} f(x)dx = e^{2\pi i a\xi}\widehat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\widehat{f \circ T}(\xi) &= \int e^{-2\pi i x\xi}(f \circ T)(x)dx \\
&= |\det T|^{-1} \int e^{-2\pi i Tx(T^{-1})^*\xi} f(Tx)|\det T|dx \\
&\overset{TMV}{=} |\det T|^{-1} \int e^{-2\pi i x(T^{-1})^*\xi} f(x)dx = |\det T|^{-1}\widehat{f}((T^{-1})^*\xi).
\end{aligned}$$

Note que $Tx(T^{-1})^*\xi = xT^*(T^{-1})^*\xi = x(T^{-1}T)^*\xi = x\xi$.

(c) Se T é uma rotação, então $T^* = T_{-1}$, logo $\widehat{f \circ T}(\xi) = \widehat{f}((T^{-1})^*\xi) = \widehat{f}(T\xi) = (\widehat{f} \circ T)(\xi)$, uma vez que $|\det T| = 1$.

□

Definição 4.4. *O* **espaço de Schwartz** *S é o espaço de todas as funções C^∞ em $\mathbb{R}^n$, tais que juntas com suas derivadas, decaem mais rápido que qualquer potência de x no infinito. Isto é, $u \in S$ se, e somente se, $u \in C^\infty$ e para todos multi-índices α e β,*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta u(x)| < \infty.$$

Proposição 4.5. *Suponha que $f \in S$.*

(a) $\widehat{f} \in C^\infty$ e $\partial^\beta \widehat{f} = -\widehat{(2\pi i x)^\beta f}$.

(b) $\widehat{\partial^\beta f} = (2\pi i \xi)^\beta \widehat{f}$.

Demonstração. (a)

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \int e^{-2\pi i x\xi} f(x)dx \Rightarrow \partial_j \widehat{f}(\xi) = \int -2\pi i x_j e^{-2\pi i x\xi} f(x)dx \\ &= (\widehat{-2\pi i x_j}) f(\xi).\end{aligned}$$

O resultado geral segue agora por indução.

(b) Note primeiro que $\int_\Omega (\partial_j g) f dx = \int_{\partial\Omega} g f \mu_j d\sigma - \int_\Omega g(\partial_j f)dx$. Logo, se $\partial^\beta = \partial_j \partial^\alpha$, então (pois a derivada de f vai para infinito mais rápido que qualquer polinômio)

$$\begin{aligned}\widehat{\partial^\beta f}(\xi) &= \int e^{-2\pi i x\xi}(\partial^\beta f)(x)dx = \int e^{-2\pi i x\xi}(\partial_j \partial^\alpha f)(x)dx \\ &= -\int \partial_j (e^{-2\pi i x\xi})(\partial^\alpha f)(x)dx \\ &= -(-2\pi i \xi_j) \int e^{-2\pi i x\xi}(\partial^\alpha f)(x)dx \\ &= (2\pi i \xi_j)\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (2\pi i \xi_j)((2\pi i x)^\alpha \widehat{f})(\xi) \\ &= (2\pi i \xi_j)(2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi) = ((2\pi i \xi)^\beta \widehat{f})(\xi).\end{aligned}$$

□

Proposição 4.6. *Se $f \in S$, então $\widehat{f} \in S$.*

Demonstração. O item (b) da proposição anterior nos dá que $\xi^\alpha \widehat{f} = (2\pi i)^{-|\alpha|}\widehat{\partial^\alpha f}$, portanto

$$\begin{aligned}\partial^\beta(\xi^\alpha \widehat{f}) &= (2\pi i)^{-|\alpha|}\partial^\beta(\widehat{\partial^\alpha f}) \\ &\overset{(a)}{=} (2\pi i)^{-|\alpha|}(\widehat{-2\pi i x)^\beta \partial^\alpha} f(\xi) \\ &= (-1)^\beta (2\pi i)^{|\beta|-|\alpha|}\widehat{x^\beta \partial^\alpha f}(\xi)\end{aligned}$$

Então $\partial^\beta(\xi^\alpha \widehat{f})$ é limitado para todo α, β. E segue pela regra do produto de derivadas e indução em β que $\xi^\alpha \partial^\beta \widehat{f}$ é limitado para todo α, β, isto é, $\widehat{f} \in S$. □

Lema 4.7. *Se $f \in L^1$ então $\widehat{f}$ é contínua e tende para 0 no infinito.*

Demonstração. Isto é verdade pela proposição anterior, se f pertence ao subspaço denso S de L^1. Mas se $\{f_j\} \subset S$ e $f_j \to f$ em L^1, então $\widehat{f_j} \to \widehat{f}$ uniformemente (pois $||\widehat{f_j} - \widehat{f}||_\infty \leq ||f_j - f||_1$), e o resultado segue imediatamente. □

Teorema 4.8. *Seja $f(x) = e^{-\pi a|x|^2}$ onde $a > 0$. Então*

$$\widehat{f}(\xi) = a^{\frac{-n}{2}} e^{\frac{-\pi|\xi|^2}{a}}.$$

Demonstração. Fazendo uma mudança de variável $x \to a^{\frac{-1}{2}}x$ nós podemos assumir $a = 1$. Como a função exponencial converte soma em produto, pelo teorema de Fubini temos

$$\widehat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i x\xi - \pi|x|^2}dx = \prod_{i=1}^{n}\int e^{-2\pi i x_j \xi_j - \pi {x_j}^2}dx_j,$$

e isto é suficiente para mostrar que o j-ésimo fator do produto é $e^{-\pi{\xi_j}^2}$, isto é, para provar o teorema para $n = 1$. Agora, quando $n = 1$, temos

$$\int e^{-2\pi i x\xi - \pi x^2}dx = e^{-\pi\xi^2}\int e^{-\pi(x+i\xi)^2}dx.$$

Mas $f(z) = e^{-\pi z^2}$ é uma função holomorfa inteira de $z \in \mathbb{C}$ que decresce rapidamente quando $|Re(z)| \to \infty$ enquanto $|Im(z)|$ permanece limitada. E, pelo teorema de Cauchy, podemos calcular o contorno de integração de $Im(z) = 0$ até $Im(z) = -\xi$, que, junto com a proposição (0.4) de [2], nos dá

$$e^{-\pi\xi^2}\int e^{-\pi(x+i\xi)^2}dx = e^{-\pi\xi^2}\int e^{-\pi x^2}dx = e^{-\pi\xi^2}.$$

□

Teorema 4.9. *Se $f, g \in S$ então $\int f\widehat{g} = \int \widehat{f}g$.*

Demonstração. Pelo teorema de Fubini,

$$\int f\widehat{g} = \int\int f(x)g(y)e^{-2\pi i xy}dydx = \int \widehat{f}g.$$

□

Definição 4.10. *Para $f \in L^1$, defina a função $\check{f}$ por*

$$\check{f}(x) = \int e^{2\pi i x\xi}f(\xi)d\xi = \widehat{f}(-x).$$

Teorema 4.11. *Se $f \in S$ então $\check{\widehat{f}} = f$.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$, defina $\phi(\xi) = e^{2\pi i x\xi - \pi\epsilon^2|\xi|^2}$. Então pelo teorema 4.8,

$$\widehat{\phi}(y) = \int e^{-2\pi i(y-x)\xi}e^{-\pi\epsilon^2|\xi|^2}d\xi = \epsilon^{-n}e^{\frac{-\pi|x-y|^2}{\epsilon^2}}.$$

Então,

$$\widehat{\phi}(y) = \epsilon^{-n}g(\epsilon^{-1}(x-y)) = g_\epsilon(x-y), \text{ onde } g(x) = e^{-\pi|x|^2}.$$

Pelo teorema anterior, temos,

$$\int e^{-\pi\epsilon^2|\xi|^2} e^{2\pi i x\xi}\widehat{f}(\xi)d\xi = \int \widehat{f}\phi = \int f\widehat{\phi} = \int f(x)g_\epsilon(x-y)dy = f * g_\epsilon(x).$$

Pela proposição (0.6), juntamente com o teorema (0.14) de [2], $f * g_\epsilon \to f$ uniformemente quando $\epsilon \to 0$ pois funções em S são uniformemente contínuas. Mas claramente, para cada x,

$$\int e^{-\pi\epsilon^2|\xi|^2} e^{2\pi i x\xi}\widehat{f}(\xi)d\xi \to \int e^{2\pi i x\xi}\widehat{f}(\xi)d\xi = \check{\widehat{f}}(x).$$

□

Corolário 4.12. *Se $f \in S$, então $\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x) = \widetilde{f}(x)$.*

Demonstração. Temos pela definição da transformada de Fourier,

$$\widehat{\widehat{f}}(x) = \int e^{-2\pi i x\xi}\widehat{f}(\xi)d\xi = \int e^{2\pi i(-x)\xi}\widehat{f}(\xi)d\xi = \check{\widehat{f}}(-x) = f(-x),$$

pelo teorema 4.11. □

Corolário 4.13. *A transformada de Fourier é um isomorfismo de S em S. Em particular, $\widehat{\check{f}} = f$ para $f \in S$.*

Demonstração. $\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x) \Rightarrow \widehat{\widehat{\widehat{\widehat{f}}}}(x) = f(x)$, e daí $\wedge : S \to S$ é sobrejetiva. De $\check{\widehat{f}} = f$, temos que $\wedge : S \to S$ é injetiva, logo bijetiva. Portanto, desde que $\vee : S \to S$ é inversa à esquerda para $\wedge$, é inversa bilateral,e daí $\widehat{\check{f}} = f, \forall\ f \in S$. □

Teorema 4.14. *Se $f, g \in S$ então $f * g \in S$ e $\widehat{f} * \widehat{g} = \widehat{fg}$*

Demonstração. Pelo teorema 4.2 e pelo corolário 4.12, $\widehat{\widehat{f} * \widehat{g}} = \widehat{\widehat{f}}\widehat{\widehat{g}} = \widetilde{f}\widetilde{g} = \widetilde{fg} = \widehat{\widehat{fg}}$, e assim, aplicando a transformada inversa de Fourier, $\widehat{f} * \widehat{g} = \widehat{fg}$.

Pelo corolário 4.13, $f * g = \widehat{\check{f}} * \widehat{\check{g}} = \widehat{\check{f}\check{g}}$. Mas $f, g \in S \Rightarrow \check{f}, \check{g} \in S \Rightarrow \check{f}\check{g} \in S \Rightarrow \widehat{\check{f}\check{g}} \in S$, logo $f * g \in S$. □

Teorema 4.15. *A Transnformada de Fourier em S se estende de maneira única para um isomorfismo unitário de L^2 em L^2.*

Demonstração. Como S é denso em L^2, pelo corolário anterior, é suficiente mostrar que $||\widehat{f}||_2 = ||f||_2$ para $f \in S$. Se $f \in S$, faça $g(x) = \overline{f(-x)}$. Mas $\widehat{g} = \overline{\widehat{f}}$. Assim, pelos teoremas 4.2 e 4.11,

$$||f||_2{}^2 = \int f(x)\overline{f(x)}dx = f * g(0) = \int \widehat{f * g}(\xi)d\xi = \int \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{f}(\xi)}d\xi = ||\widehat{f}||_2{}^2.$$

□

Proposição 4.16. *Se $f \in L^1$ tem suporte compacto, então $\widehat{f}$ pode ser estendida para uma função inteira holomorfa em $\mathbb{C}^n$. Se $f \in C_c{}^\infty$, então $\widehat{f}(\xi)$ decresce rapidamente quando $|Re\xi| \to \infty$ e quando $|Im\xi|$ permanece limitado.*

Demonstração. A integral $\widehat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i x\xi} f(x)dx$ converge para todo $\xi \in \mathbb{C}^n$, e $e^{-2\pi i x\xi}$ é uma função inteira de $\xi \in \mathbb{C}^n$. Uma vez que podemos calcular as derivadas complexas de $\widehat{f}$ simplesmente diferenciando através da integral, e ainda, se $f \in C_c{}^\infty$ e f tem suporte em $\{x : |x| < K\}$, para algum multi-índice α temos

$$|(2\pi i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)| = \left|\int e^{-2\pi i x\xi}\partial^\alpha f(x)dx\right| \leq e^{K|Im\xi|}||\partial^\alpha f||_1,$$

que finaliza a segunda afirmação. □

4.2 O Espaço de Schwartz

Lembre que o espaço de Schwartz S foi definido por

$$S = \{\phi \in C^\infty; ||x^\alpha \partial^\beta \phi||_\infty < +\infty, \forall\ \alpha, \beta\}.$$

Uma vez que S é um espaço vetorial e $||\phi||_{\alpha,\beta} := ||x^\alpha \partial^\beta \phi||_\infty$ são uma quantidade enumerável de semi-normas em S que separam pontos, tais $||\ ||_{\alpha,\beta}$ tornam S um EVTLC. Para $k \geq 0, \alpha$ multi-índice e $\phi \in S$, sejam

$$\rho_{k,\alpha}(\phi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{\frac{k}{2}} |\partial^\alpha \phi(x)|,$$

e

$$\rho_k(\phi) = \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{\frac{k}{2}} |\partial^\alpha \phi(x)|.$$

Afirmamos que as famílias de semi-normas $\{||\ ||_{\alpha,\beta}\}, \{\rho_{k,\alpha}\}$ e $\{\rho_k\}$ induzem em S a mesma topologia de EVTLC. De fato, fixado $k \geq 0$, uma soma finita de semi-normas $||\ ||_{\alpha,\beta}$ majora ρ_k, uma vez que

$$\begin{aligned}
\rho_k(\phi) &\leq \max_{|\alpha|\leq k}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^k|\partial^\alpha\phi(x)| \\
&= \max_{|\alpha|\leq k}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\sum_{l=0}^{k}|x|^{2l}|\partial^\alpha\phi(x)| \\
&\leq \max_{|\alpha|\leq k}\sum_{l=0}^{k}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x|^{2l}|\partial^\alpha\phi(x)|
\end{aligned}$$

Por outro lado, dados multi-índices α e β, seja $k = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$. Então

$$\begin{aligned}
|x^\alpha\partial^\beta\phi(x)| &\leq |x|^{|\alpha|}|\partial^\beta\phi(x)| \leq \max\{1, |x|^k\}|\partial^\beta\phi(x)| \\
&\leq (1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}|\partial^\beta\phi(x)|,
\end{aligned}$$

donde

$$||\phi||_{\alpha,\beta} \leq \rho_{k,\beta}(\phi).$$

Por fim, dados $k \geq 0$ e um multi-índice α, se $|\alpha| \leq k$, é claro que $\rho_{k,\alpha}(\phi) \leq \rho_k(\phi), \forall\ \phi$.

Caso contrário,

$$\rho_{k,\alpha}(\phi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}|\partial^\alpha\phi(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}}|\partial^\alpha\phi(x)| \leq \rho_{|\alpha|}(\phi).$$

Proposição 4.17. *S é um espaço de Fréchet, com a topologia definida por* $\rho_{k,\alpha}$

Demonstração. Basta mostrarmos que S é completo com a métrica

$$d(\phi,\psi) = \sum_{k\geq 1}\frac{\rho_k(\phi-\psi)}{1+\rho_k(\phi-\psi)}.$$

Seja $(\phi_j)_{j\geq 1}$ sequência de Cauchy em S. Da teoria de EVTLC, sabemos que isto é equivalente a

$$\rho_k(\phi_j - \phi_l) \overset{j,l\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \forall\ k \geq 0.$$

Portanto, se α é um multi-índice e $k \geq |\alpha|$, então a sequência $\{(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}(\partial^\alpha\phi_j)\}_{j\geq 1}$ é de Cauchy em $BC(\mathbb{R}^n)$ com a norma do sup, donde existe $\psi_{k,\alpha} \in BC(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}\partial^\alpha\phi_j \overset{j}{\to} \psi_{k,\alpha} \text{ em } BC(\mathbb{R}^n)$$

Mas $(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}} \geq 1$ garante que

$$\partial^\alpha\phi_j \overset{j}{\to} \frac{\psi_{k,\alpha}}{(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}} \text{ em } BC(\mathbb{R}^n).$$

Em particular, $\phi_j \xrightarrow{j} \psi_{0,0}$ em $BC(\mathbb{R}^n)$. Segue, então, do teorema de derivação termo a termo que $\psi_{0,0} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\psi k, \alpha = (1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}\partial^\alpha \psi_{0,0}$. Como $\psi_{k,\alpha} \in BC(\mathbb{R}^n)$, segue da última igualdade que $\psi_{0,0} \in S$. Por fim,

$$
\begin{aligned}
\rho_k(\phi_j - \psi_{0,0}) &= \max_{|\alpha|\le k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{\frac{k}{2}} |\partial^\alpha \phi_j - \partial^\alpha \psi_{0,0}| \\
&= \max_{|\alpha|\le k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}} \partial^\alpha \phi_j - \psi_{k,\alpha}| \xrightarrow{j} 0,
\end{aligned}
$$

de modo que $\phi_j \xrightarrow{j} \psi_{0,0}$ em S. $\square$

Proposição 4.18. *Se p é um polinômio, $\psi \in S$ e α é um multi-índice, então as aplicações*

$$\phi \mapsto p\phi, \qquad \phi \mapsto \psi\phi, \qquad \phi \mapsto \partial^\alpha \phi$$

são contínuas de S em S.

Demonstração. Como S é um espaço métrico, basta mostrarmos que cada uma das aplicações acima é sequencialmente contínua. Seja, pois, $(\phi_j)_{j\ge 1}$ uma sequência em S, tal que $\phi_j \xrightarrow{j} \phi$ em S. Então

$$
\begin{aligned}
||x^\alpha \partial^\beta (p\phi_j - p\phi)||_\infty &= ||x^\alpha \sum_{\gamma\le\beta} \binom{\beta}{\gamma} (\partial^{\beta-\gamma} p) \partial^\gamma (\phi_j - \phi)||_\infty \\
&\le \sum_{\gamma\le\beta} \binom{\beta}{\gamma} ||x^\alpha \partial^{\beta-\gamma} \sum_j a_\delta x^\delta \partial^\gamma(\phi_j - \phi)||_\infty \\
&\le \sum_{\gamma\le\beta} \sum_\delta \binom{\beta}{\gamma} a_\delta ||x^\alpha (\partial^{\beta-\gamma} x^\delta) \partial^\gamma (\phi_j - \phi)||_\infty \\
&\le \sum_{\alpha',\gamma} ||x^{\alpha'} \partial^\gamma (\phi_j - \phi)||_\infty,
\end{aligned}
$$

onde $|\alpha'| \le |\alpha| + \partial p$ e $\gamma \le \beta$.

Para $\phi \mapsto \psi\phi$, o raciocínio é análogo. Para $\phi \mapsto \partial^\alpha \phi$, basta ver que

$$||x^\gamma \partial^\beta (\partial^\alpha \phi_j - \partial^\alpha \phi)||_\infty = ||x^\gamma \partial^{\beta+\alpha} (\phi_j - \phi)||_\infty.$$

$\square$

Proposição 4.19. *Para $1 \le p \le \infty$, a inclusão $S \hookrightarrow L^p$ se verifica e é contínua.*

Demonstração. Pela desigualdade de interpolação, basta mostrar que se verificam e são contínuas as inclusões $S \hookrightarrow L^1$ e $S \hookrightarrow L^\infty$. A continuidade da 2ª inclusão é óbvia a partir da definição da topologia de S. Quanto à primeira, note que

$$\begin{aligned}
||\phi||_{L^1} &= \int |\phi(x)|dx = \int (1+|x|^2)^{-\frac{k}{2}}(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}|\phi(x)|dx \\
&\leq \rho_{k,0}(x)\int (1+|x|^2)^{-\frac{k}{2}}dx = \omega_n \rho_{k,0}(\phi)\int_0^{+\infty}\frac{r^{n-1}dr}{(1+r^2)^{\frac{k}{2}}}.
\end{aligned}$$

Tomando $k = n+1$, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{\frac{k}{2}}}dr &= \int_0^{+\infty}\frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{\frac{n-1}{2}}}\frac{1}{1+r^2}dr \\
&< \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+r^2}dr = \text{arc tg}r\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

de modo que

$$||\phi||_{L^1} \leq \omega_n \frac{\pi}{2}\rho_{n+1,0}(\phi).$$

$\square$

Lema 4.20. *A transformada de Fourier $\wedge : S \to S$ é contínua.*

Demonstração. Se $\phi_j \xrightarrow{j} \phi$ em S, então $\phi_j \xrightarrow{j} \phi$ em L^1, pela proposição anterior. Como $\wedge : L^1 \to L^\infty$ é contínua, segue que $\widehat{\phi_j} \xrightarrow{j} \widehat{\phi}$ em L^∞. Mas, como

$$\partial^\alpha(x^\beta\phi_j) \xrightarrow{j} \partial^\alpha(x^\beta\phi)$$

em S, pela proposição 4.18, segue do que fizemos acima que

$$\widehat{\partial^\alpha(x^\beta\phi_j)} \xrightarrow{j} \widehat{\partial^\alpha(x^\beta\phi)}$$

em L^∞. Mas, pela proposição 4.5, a menos de uma constante, isso é equivalente a

$$\xi^\alpha\partial^\beta\widehat{\phi_j} \xrightarrow{j} \xi^\alpha\partial^\beta\widehat{\phi}$$

em L^∞, de modo que $\widehat{\phi_j} \xrightarrow{j} \widehat{\phi}$ em S. $\square$

4.3 Distribuições Temperadas

Definição 4.21. *O espaço dual de S, denotado S', é denominado o* **espaço das distribuições temperadas**.

Proposição 4.22. *A inclusão $\iota : {C_c}^\infty \to S$ é contínua e ${C_c}^\infty$ é denso em S.*

Demonstração. Como certamente a inclusão de S em C^∞ é contínua, pela proposição 3.29, basta mostrarmos que $\iota : {C_c}^\infty \to S$ é contínua. Para tanto, é suficiente, pelo teorema 2.25, mostrarmos que $\iota : {C_c}^\infty(K) \to S$ é contínua, $\forall\ K \subset\subset \mathbb{R}^n$. Para tanto, basta notarmos que, para $\phi \in {C_c}^\infty(K)$,

$$\begin{aligned} ||x^\alpha \partial^\beta \phi||_\infty &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} x^\alpha (\partial^\beta \phi)(x) \\ &\leq (\sup_{x\in K} |x|^{|\alpha|}) ||\phi||_{|\beta|,\infty,K} \end{aligned}$$

□

Proposição 4.23. *Se $\iota : {C_c}^\infty \to S$ é a inclusão, então o operador dual(restrição), $\iota^* : S' \to D'$ é injetivo e contínuo, se S' for munido com a topologia $fraca - *$.*

Demonstração. Se $\iota^*(u) = \iota^*(v)$, para $u, v \in S'$, então $u \circ \iota = v \circ \iota : {C_c}^\infty \to \mathbb{C}$. Mas, como ${C_c}^\infty$ é denso em S, segue daí que $u = v : S \to \mathbb{C}$.

Para o que falta, se $u_j \overset{j}{\to} u$ em S', então $\langle u_j, \phi\rangle \overset{j}{\to} \langle u, \phi\rangle$ em $\mathbb{C}, \forall\ \phi \in S$. Mas daí, $\langle u_j \circ \iota, \phi\rangle \overset{j}{\to} \langle u \circ \iota, \phi\rangle$ em $\mathbb{C}, \forall\ \phi \in {C_c}^\infty$, isto é, $\iota^*(u_j) \overset{j}{\to} \iota^*(u)$ em D'. □

Segue imediatamente da proposição acima que S' é o subespaço de D' formado pelos funcionais que têm extensões contínuas de ${C_c}^\infty$ para S (lembre que tais extensões são únicas). Mais geralmente,

$$E' \subset S' \subset D'. \tag{4.1}$$

Observação 4.24. *Como S não é EVN, não vale o teorema de Hahn-Banach, e, portanto, um funcional linear $\phi : {C_c}^\infty \to \mathbb{C}$ não necessariamente admite uma extensão linear a S. Uma extensão existe pela densidade de ${C_c}^\infty$ em S, mas não é necessariamente linear.*

O fato de S ser um espaço métrico nos permite dar a seguinte caracterização de S':

Teorema 4.25. *Um funcional linear $u : S \to \mathbb{C}$ está em S' se, e só se, existem $C > 0$, $k \geq 0$ tais que*

$$|\langle u, \phi\rangle| \leq C\rho_k(\phi), \forall\ \phi \in S. \tag{4.2}$$

Demonstração. Se $u \in S'$, então $u^{-1}(B(0,1))$ é aberto em S contendo $0 \in S$ ($B(0,1) \subset \mathbb{C}$). Como as semi-normas ρ_k são encaixantes, existem $r > 0$, $k \in \mathbb{N}$ tais que

$$u^{-1}(B(0,1)) \supset {B_r}^{\rho_k}(0),$$

isto é, tais que

$$\phi \in S,\ \rho_k(\phi) < r \Rightarrow |\langle u, \phi\rangle| < 1.$$

Logo, para $\phi \in S \setminus \{0\}$, qualquer,

$$|\langle u, \phi\rangle| = \frac{2\rho_k(\phi)}{r}\left|\langle u, \frac{r}{2\rho_k(\phi)}\phi\rangle\right| < \frac{2}{r}\rho_k(\phi).$$

Reciprocamente, suponha que existam $k \geq 0$, $C > 0$ tais que valha a equação 4.2. Como as ρ_l, $l \geq 0$, definem a topologia de S, é imediato que $u : S \to \mathbb{C}$ é contínuo. $\square$

Exemplo 4.26. *Se, para algum $k > 0$ e $1 \leq p < +\infty$, tivermos $\frac{f(x)}{(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}} \in L^p$, onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ é mensurável, então f é denominada uma função L^p-temperada (se $p = +\infty$, diz-se ainda que f é* **vagarosamente crescente***). Nesse caso, se $u : S \to \mathbb{C}$ for dado por*

$$\langle u, \phi\rangle = \int f\phi dx,$$

então $u \in S'$. Em particular, os elementos de L^p (para $1 \leq p \leq \infty$), de S e todo polinômio (ou, mais geralmente, toda função mensurável majorada por um polinômio) definem distribuições temperadas regulares.

Demonstração. A segunda parte é imediata da primeira. Para a primeira, é claro que u, se bem definido, é linear. Mostremos de uma vez a boa definição e a continuidade, apelando para o teorema 4.25. Sendo q o conjugado de p, temos para $\phi \in S$ que

$$\begin{aligned} |\langle u, \phi\rangle| &= \left|\int \frac{f(x)}{(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}}(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}\phi(x)dx\right| \\ &\leq \left|\left|\frac{f(x)}{(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}}\right|\right|_{L^p} ||(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}\phi(x)||_{L^q} \end{aligned}$$

Se $p = 1$, temos $q = +\infty$ e o último termo acima é claramente finito. Se $1 < p \leq +\infty$, então $1 \leq q < +\infty$, e daí

$$\begin{aligned} ||(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}\phi(x)||_{L^q}{}^q &= \int (1+|x|^2)^{\frac{kq}{2}}|\phi(x)|^q dx \\ &= \int (1+|x|^2)^{\frac{kq}{2}-l}(1+|x|^2)^l|\phi(x)|^q dx \end{aligned}$$

Se $l \geq \frac{kq}{2} + n$, então $\frac{kq}{2} - l \leq -n$, de modo que

$$\begin{aligned} \int (1+|x|^2)^{\frac{kq}{2}-l}dx &\leq \int (1+|x|^2)^{-n}dx = \omega_n \int_0^{+\infty} \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^n}dr \\ &< \omega_n \int_0^{+\infty} \frac{dr}{1+r^2} = \frac{\omega_n \pi}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, teremos nesse caso

$$\begin{aligned} ||(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}\phi(x)||_{L^q}^q &\leq \left(\int (1+|x|^2)^{\frac{kq}{2}-l}dx\right).||(1+|x|^2)^{\frac{l}{q}}\phi(x)||_{L^\infty}^q \\ &\leq (C\rho_{\frac{2l}{q}}(\phi))^q, \end{aligned}$$

$\exists\, C = C(n)$, de modo que

$$|\langle u, \phi\rangle| \leq C\left|\left|\frac{f}{(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}}\right|\right|_{L^p}\rho_{\frac{2l}{q}}(\phi).$$

Pelo teorema 4.25, $u : S \to \mathbb{C}$ é contínua. □

Exemplo 4.27. *Nem toda função localmente integrável define uma distribuição temperada. Por exemplo, $e^x \notin S'$, basta considerar $\phi \in S$ tal que $\phi \sim e^{\frac{-|x|}{2}}$ no infinito.*

Proposição 4.28. *Para $1 \leq p \leq +\infty$, a inclusão $\iota : L^p \to S'$ é contínua.*

Demonstração. Basta mostrar que se $f_j \xrightarrow{j} f$ em L^p, então $\int (f_j - f)\phi dx \xrightarrow{j} 0, \forall\, \phi \in S$. Mas, pela desigualdade de Hölder,

$$\left|\int (f_j - f)\phi dx\right| \leq ||f_j - f||_{L^p}||\phi||_{L^q} \xrightarrow{j} 0.$$

□

Como com distribuições ordinárias, podemos definir operações sobre distribuições temperadas por dualidade, isto é, se $T : S \to S$ for linear e contínuo, então $T^* : S' \to S'$ tal que $T^*(u) \mapsto u \circ T$ também o é. Temos então a seguinte

Proposição 4.29. *Seja $u \in S', \phi \in S$.*

(a) $\langle \partial^\alpha u, \phi\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^\alpha \phi\rangle$ define $\partial^\alpha u \in S', \forall\, \alpha$ multi-índice.

(b) $\langle fu, \phi\rangle = \langle u, f\phi\rangle$ define $fu \in S', \forall\, f \in C^\infty$ tal que $\partial^\beta f$ cresce no máximo polinomialmente no infinito para todo multi-índice β.

(c) $\langle u_x, \phi\rangle = \langle u, \phi_{-x}\rangle$ define $u_x \in S', \forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

(d) $\langle \widetilde{u}, \phi\rangle = \langle u, \widetilde{\phi}\rangle$ define $\widetilde{u} \in S'$.

(e) $\langle \widehat{u}, \phi\rangle = \langle u, \widehat{\phi}\rangle$ define a transformada de Fourier, $\widehat{u}$, de $u \in S'$.

(f) $\langle \check{u}, \phi\rangle = \langle u, \check{\phi}\rangle$ define a transformada inversa de Fourier, $\check{u} \in S'$, de u.

Ademais, todas as operações acima são contínuas de S' em S'.

Demonstração. (a) Pela proposição 4.18, o segundo membro está bem definido. De fato,

$$\begin{array}{ccccc} S & \longrightarrow & S & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \phi & \longmapsto & (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\phi & \longmapsto & (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^\alpha\phi\rangle \end{array}$$

é uma composição de aplicações contínuas, logo é também contínua. Agora, se $u_j \xrightarrow{j} u$ em S', então

$$\langle \partial^\alpha u_j, \phi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u_j, \partial^\alpha\phi\rangle \xrightarrow{j} (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^\alpha\phi\rangle = \langle \partial^\alpha u, \phi\rangle,$$

isto é, $\partial^\alpha u_j \xrightarrow{j} \partial^\alpha u$ em S'.

Os demais itens são análogos, sendo que para os itens (e) e (f) usamos respectivamente o lema 4.20 e a proposição 4.6. □

Observação 4.30. *Note que se $\phi \in C_c{}^\infty$, então não necessariamente tem-se $\widehat{\phi} \in C_c{}^\infty$, e, portanto, a transformada de Fourier não está definida para todo $u \in D'$*

Se $u \in S'$, podemos obviamente considerar a convolução $u * \phi$, com $\phi \in C_c{}^\infty$. A definição a seguir garante que podemos tomar $\phi \in S$.

Definição 4.31. *Para $\phi \in S$, $u \in S'$, a* **convolução** $u * \phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *é a função dada por*

$$(u * \phi)(x) = \langle u, \widetilde{\phi_x}\rangle.$$

Proposição 4.32. *Se $u \in S'$ e $\phi \in S$, então $u * \phi \in C^\infty$ e define uma distribuição temperada. Ademais, para todo multi-índice α tem-se*

$$\partial^\alpha(u * \phi) = (\partial^\alpha u) * \phi = u * \partial^\alpha\phi. \tag{4.3}$$

E ainda, $u * \phi$ cresce polinomialmente no infinito, logo define uma distribuição temperada regular.

Demonstração. Suponhamos inicialmente que $u*\phi \in C^\infty$ e mostremos que $u*\phi$ cresce no máximo polinomialmente no infinito, assim definindo uma distribuição temperada.

Como $u \in S'$, existem $C > 0$, $k \in \mathbb{N}$ tal que $|\langle u, \psi\rangle| \le C\rho_k(\psi), \forall\ \psi \in S$. Portanto, para $x \in \mathbb{R}^n$ tem-se

$$|(u * \phi)(x)| = |\langle u, \widetilde{\phi_x}\rangle| \le C\rho_k(\widetilde{\phi_x}).$$

Agora,

$$\begin{aligned} \rho_k(\widetilde{\phi_x}) &= \max_{|\alpha|\le k} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{\frac{k}{2}} |(\partial^\alpha \widetilde{\phi_x})(y)| \\ &= \max_{|\alpha|\le k} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{\frac{k}{2}} |(-1)^{|\alpha|}(\partial^\alpha\phi)(x - y)| \\ &= \max_{|\alpha|\le k} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} (1 + |x - y|^2)^{\frac{k}{2}} |(\partial^\alpha\phi)(y)|, \end{aligned}$$

e segue de

$$1+|x-y|^2 \leq 1+(|x|+|y|)^2 \leq 2(1+|x|^2)(1+|y|^2)$$

que

$$\begin{aligned}
\rho_k(\widetilde{\phi_x}) &\leq \max_{|\alpha|\leq k} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} 2^{\frac{k}{2}}(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}(1+|y|^2)^{\frac{k}{2}}|(\partial^\alpha\phi)(y)| \\
&= 2^{\frac{k}{2}}(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}\rho_k(\phi).
\end{aligned}$$

Para o que falta, note primeiro que, para todo multi-índice α,

$$\begin{aligned}
((\partial^\alpha u)*\phi)(x) &= \langle\partial^\alpha u, \widetilde{\phi_x}\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^\alpha\widetilde{\phi_x}\rangle \\
&= \langle u, \widetilde{(\partial^\alpha\phi_x)}\rangle = \langle u, \widetilde{(\partial^\alpha\phi)_x}\rangle \\
&= (u*\partial^\alpha\phi)(x),
\end{aligned}$$

O restante da prova é essencialmente análogo à prova do resultado correspondente para distribuições ordinárias. Por completude, apresentamo-la:

Se mostrarmos que $\partial_j(u*\phi)$ existe e é igual a $u*\partial_j\phi$, seguirá por indução que $\partial^\alpha(u*\phi)=u*\partial^\alpha\phi, \forall\ \alpha$. Para tanto, seja, como antes,

$$T_t = \frac{1}{t}(\tau_{te_j} - Id).$$

Se, para $\phi\in S$, $T_t\phi \overset{t\to 0}{\longrightarrow} \partial_j\phi$ em S, seguirá que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} T_t(u*\phi)(x) &= \lim_{t\to 0}(u*T_t\phi)(x) = \lim_{t\to 0}\langle u, \widetilde{(T_t\phi)_x}\rangle \\
&= \lim_{t\to 0}\langle(\widetilde{u})_x, T_t\phi\rangle = \langle(\widetilde{u})_x, \partial_j\phi\rangle \\
&= \langle u, \widetilde{(\partial_j\phi)_x}\rangle = (u*\partial_j\phi)(x).
\end{aligned}$$

Portanto, resta somente provar a seguinte

Afirmação. $T_t\phi \overset{t\to 0}{\longrightarrow} \partial_j\phi$ em S.

Tal ocorre se e só se $\rho_k(T_t\phi-\partial_j\phi)\overset{t}{\to} 0, \forall\ k\geq 0$. Agora,

$$\rho_k(T_t\phi-\partial_j\phi) = \max_{|\alpha|\leq k}\sup_x (1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}|\partial^\alpha(T_t\phi)(x)-\partial^\alpha\phi(x)|,$$

e

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha(T_t\phi)(x)-(\partial^\alpha\phi)(x)| &= |T_t(\partial^\alpha\phi)(x)-(\partial^\alpha\phi)(x)| \\
&= \frac{1}{t}\left|\int_0^t (\partial_j(\partial^\alpha\phi)(x+se_j)-\partial_j(\partial^\alpha\phi)(x))ds\right| \\
&\leq \frac{1}{t}\left|\int_0^t ({\partial_j}^2(\partial^\alpha\phi)(x+\sigma se_j)se_j ds\right| \\
&\leq \frac{1}{t}\int_0^t |({\partial_j}^2(\partial^\alpha\phi)(x+\sigma se_j)||s|ds.
\end{aligned}$$

Sendo β o multi-índice de ordem $|\alpha|+2$ tal que $\partial^\beta = {\partial_j}^2\partial^\alpha$, temos

$$\begin{aligned}
(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}|\partial^\alpha(T_t\phi)(x)-\partial^\alpha\phi(x)| &\leq \\
(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}\frac{1}{t}\int_0^t |(\partial^\beta\phi)(x+\sigma s e_j)||s|ds &= \\
\frac{1}{t}\int_0^t (1+|x+\sigma s e_j-\sigma s e_j|^2)^{\frac{k}{2}}|(\partial^\beta\phi)(x+\sigma s e_j)||s|ds &\leq \\
\frac{2^{\frac{k}{2}}}{t}\int_0^t (1+|x+\sigma s e_j|^2)^{\frac{k}{2}}|(\partial^\beta\phi)(x+\sigma s e_j)|(1+|\sigma s e_j|^2)^{\frac{k}{2}}|s|ds &\leq \\
2^{\frac{k}{2}}\rho_{k+2}(\phi)\frac{1}{t}\int_0^t (1+|s|^2)^{\frac{k}{2}}|s|ds &= \\
2^{\frac{k}{2}}\rho_{k+2}(\phi)\frac{1}{t}\frac{(1+s^2)^{\frac{k}{2}+1}}{2(\frac{k}{2}+1)}\Big|_0^{+\infty} &= \\
\frac{2^{\frac{k}{2}}\rho_{k+2}(\phi)}{k+2}.\frac{(1+t^2)^{\frac{k+2}{2}}-1}{t} \overset{t\to 0}{\longrightarrow} 0. &
\end{aligned}$$

□

No que segue, estudamos mais a fundo a relação entre convoluções e transformada de Fourier de distribuições temperadas. Lembre, pelo exemplo 4.26, que se f é uma função L^p-*temperada* então f define uma distribuição temperada regular u_f.

Proposição 4.33. *Se $f \in L^1 \cup L^2$, então $\widehat{u_f} = u_{\widehat{f}}$. Em palavras, as definições L^1 e L^2 de transformada de Fourier coincidem com a definição S'.*

Demonstração. Note primeiro que, como $\int \widehat{f}g = \int f\widehat{g}$ para $f, g \in S$, e S é denso em L^p, $p \geq 1$, segue

$$\int \widehat{f}g = \int f\widehat{g}$$

Quer $f, g \in L^1$ ou $f, g \in L^2$.

Para $f \in L^1 \cup L^2$ e $\phi \in S$, temos então

$$\langle \widehat{u_f}, \phi\rangle = \langle u_f, \widehat{\phi}\rangle = \int f\widehat{\phi} = \int \widehat{f}\phi = \langle u_{\widehat{f}}, \phi\rangle.$$

□

Proposição 4.34. *Se $u \in S'$, então:*

(a) $\check{\widehat{u}} = u$ e $\widehat{\check{u}} = u$

(b) $\widehat{\widehat{u}} = \widetilde{u}$

(c) $\widehat{u} = \check{\widetilde{u}} = \widetilde{\check{u}}$

Demonstração. Se $\phi \in S$, temos $\widehat{\check{\phi}} = \phi$, e daí $\langle \check{\widehat{u}}, \phi \rangle = \langle u, \widehat{\check{\phi}} \rangle = \langle u, \phi \rangle$; analogamente $\widehat{\check{u}} = u$. Para (b) temos $\langle \widehat{\widehat{u}}, \phi \rangle = \langle u, \widehat{\widehat{\phi}} \rangle = \langle u, \widetilde{\phi} \rangle = \langle \widetilde{u}, \phi \rangle$. Por fim, $\langle \widehat{u}, \phi \rangle = \langle u, \widehat{\phi} \rangle = \langle u, \widehat{\widehat{\check{\phi}}} \rangle = \langle u, \widetilde{\check{\phi}} \rangle = \langle \widetilde{u}, \check{\phi} \rangle = \langle \check{\widetilde{u}}, \phi \rangle$ e $\langle \widetilde{\check{u}}, \phi \rangle = \langle u, \check{\widetilde{\phi}} \rangle = \langle u, \check{\widehat{\widehat{\phi}}} \rangle = \langle u, \widetilde{\widetilde{\widehat{\phi}}} \rangle = \langle u, \widehat{\phi} \rangle = \langle \widehat{u}, \phi \rangle$. □

Teorema 4.35. *A transformada de Fourier $\wedge : S' \to S'$ é um isomorfismo contínuo de ordem 4.*

Demonstração. Se $u_j \xrightarrow{j} u$ em S', então, para $\phi \in S$,

$$\langle \widehat{u_j}, \phi \rangle = \langle u_j, \widehat{\phi} \rangle \xrightarrow{j} \langle u, \widehat{\phi} \rangle = \langle \widehat{u}, \phi \rangle,$$

donde $\widehat{u_j} \xrightarrow{j} \widehat{u}$ em S', e $\wedge : S' \to S'$ é contínua. Agora, segue imediatamente de item (b) da proposição anterior que $\widehat{\widehat{\widehat{\widehat{u}}}} = u$, donde $\check{u} = \widehat{\widehat{\widehat{u}}}$, e $\vee : S' \to S'$ é contínua. □

Exemplo 4.36. *Considere a distribuição δ_0 em S', $\delta_0 : S' \to S'$. Para $\phi \in S$, temos*

$$\langle \widehat{\delta_0}, \phi \rangle = \langle \delta_0, \widehat{\phi} \rangle = \widehat{\phi}(0) = \int e^{-2\pi i x.0} \phi(x) dx = \langle 1, \phi \rangle,$$

donde $\widehat{\delta_0} = 1$. Portanto,

$$\widehat{1} = \widehat{\widehat{\widehat{\delta_0}}} = \widetilde{\delta_0} = \delta_0$$

Proposição 4.37. *Se $u \in S'$, então:*

(a) $\widehat{u_x} = e^{2\pi i x \xi} \widehat{u}$ *e* $\widehat{u}_x = \widehat{e^{2\pi i y x} u}, \forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

(b) $\widehat{\partial^\alpha u} = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{u}, \forall\, \alpha$ *multi-índice.*

(c) $\partial^\alpha \widehat{u} = \widehat{(-2\pi i x)^\alpha u}, \forall\, \alpha$ *milti-índice.*

Demonstração. Pelas proposições 4.3 e 4.5, os itens acima são válidos para $u \in S$. Logo, para $\phi \in S$, temos

$$\begin{aligned} \langle \widehat{u_x}, \phi \rangle &= \langle u_x, \widehat{\phi} \rangle = \langle u, \widehat{\phi}_{-x} \rangle = \langle u, \widehat{e^{2\pi i y x} \phi} \rangle \\ &= \langle \widehat{u}, e^{2\pi i y x} \phi \rangle = \langle e^{2\pi i \xi x} \widehat{u}, \phi \rangle. \end{aligned}$$

Os demais itens são análogos. □

Exemplo 4.38. *Pelo item (b) da proposição anterior,* $\widehat{\partial^\alpha \delta_0} = (2\pi i\xi)^\alpha \widehat{\delta_0} = (2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha$. *Logo,*

$$(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\delta_0 = \widetilde{\partial^\alpha\delta_0} = \widehat{\widehat{\partial^\alpha\delta_0}} = (2\pi i)^{|\alpha|}\widehat{\xi^\alpha},$$

donde

$$\widehat{\xi^\alpha} = \frac{1}{(2\pi)^{|\alpha|}}(-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha\delta_0 = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{|\alpha|}\partial^\alpha\delta_0.$$

Proposição 4.39. *Como distribuições temperadas,* $\langle u*\phi, \psi\rangle = \langle u, \psi*\widetilde{\phi}\rangle, \forall\ \phi, \psi \in S, u \in S'$.

Demonstração. Temos de mostrar que $\langle u*\phi, \psi\rangle = \langle u, \psi*\widetilde{\phi}\rangle, \forall\ \phi, \psi \in S$. Como ${C_c}^\infty$ é denso em S, podemos tomar uma sequência $(\psi_j)_{j\geq 1}$ em ${C_c}^\infty$, tal que $\psi_j \xrightarrow{j} \psi$ em S. Portanto, como $u*\phi \in S'$ (pela proposição 4.32), temos

$$\langle u*\phi, \psi_j\rangle \xrightarrow{j} \langle u*\phi, \psi\rangle.$$

Agora, se mostrarmos que:

(a) $\psi_j * \widetilde{\phi} \xrightarrow{j} \psi * \widetilde{\phi}$ em S e,

(b) $\langle u*\phi, \psi_j\rangle = \langle u, \psi_j*\widetilde{\phi}\rangle$,

teremos

$$\langle u*\phi, \psi_j\rangle \xrightarrow{j} \langle u*\phi, \psi\rangle \text{ e}$$
$$\langle u, \psi_j*\widetilde{\phi}\rangle \xrightarrow{j} \langle u, \psi*\widetilde{\phi}\rangle,$$

e a unicidade de limites garante que $\langle u*\phi, \psi\rangle = \langle u, \psi*\widetilde{\phi}\rangle$.

(a) Para, ψ, ψ_j, $\phi \in S$, com $\psi_j \xrightarrow{j} \psi$, em S temos $\psi_j*\phi \xrightarrow{j} \psi*\phi$ em S, e assim $\rho_k(\psi_j*\phi - \psi*\phi) = \max\limits_{|\alpha|\leq k}\sup\limits_x(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}|(\partial^\alpha(\psi_j-\psi)*\phi)(x)|$, e

$$\begin{gathered}
(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}|(\partial^\alpha(\psi_j-\psi)*\phi)(x)| = \\
(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}\left|\int\partial^\alpha(\psi_j-\psi)(y)\phi(x-y)dy\right| \leq \\
\int(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}|\phi(x-y)||\partial^\alpha(\psi_j-\psi)(y)|dy \leq \\
2^{\frac{k}{2}}\int(1+|x-y|^2)^{\frac{k}{2}}|\phi(x-y)|(1+|y|^2)^{\frac{k}{2}}|\partial^\alpha(\psi_j-\psi)(y)|dy \leq \\
2^{\frac{k}{2}}\rho_k(\phi)\int(1+|y|^2)^{\frac{k}{2}}(1+|y|^2)^{\frac{-k-n-1}{2}}\rho_{k+n+1}(\psi_j-\psi)dy = \\
2^{\frac{k}{2}}\rho_k(\phi)\rho_{k+n+1}(\psi_j-\psi)\int\frac{dy}{(1+|y|^2)^{n+1}} < \\
2^{\frac{k}{2}}\frac{\pi}{2}\rho_k(\phi)\rho_{k+n+1}(\psi_j-\psi) \xrightarrow{j} 0,
\end{gathered}$$

independente de x e α.

(b) $\langle u*\phi,\psi\rangle = \langle u,\psi*\widetilde{\phi}\rangle, \forall\ \psi\in S,\ \psi\in {C_c}^{\infty}$: seja $(\phi_j)_{j\geq 1}$ sequência em ${C_c}^{\infty}$, tal que $\phi_j \xrightarrow{j} \phi$ em S. Como $u\in D'$, temos

$$\langle u*\phi_j,\psi\rangle = \langle u,\psi*\widetilde{\phi_j}\rangle \xrightarrow{j} \langle u,\psi*\widetilde{\phi}\rangle,$$

onde a convergência acima é justificada por (a). Portanto, pela unicidade do limite basta provarmos que $\langle u*\phi_j,\psi\rangle \xrightarrow{j} \langle u*\phi,\psi\rangle$. Para tanto, note que

$$\langle u*\phi_j,\psi\rangle = \int (u*\phi_j)(x)\psi(x)dx = \int \langle u,\widetilde{(\phi_j)_x}\rangle\psi(x)dx$$

e

$$\langle u*\phi,\psi\rangle = \int \langle u,\widetilde{\phi_x}\rangle\psi(x)dx.$$

Mostremos que

$$\langle u,\widetilde{(\phi_j)_x}\rangle \xrightarrow{j} \langle u,\widetilde{\phi_x}\rangle$$

uniformemente em $supp\,(\psi)$.
Como $u\in S', \exists\ C>0$ e $k\in\mathbb{N}$ tal que $|\langle u,\eta\rangle| \leq C\rho_k(\eta), \forall\ \eta\in S$. Daí,

$$|\langle u,\widetilde{(\phi_j)_x}\rangle - \langle u,\widetilde{\phi_x}\rangle| =$$
$$|\langle u,(\widetilde{\phi_j-\phi})_x\rangle| \leq C\rho_k((\widetilde{\phi_j-\phi})_x) =$$
$$C\max_{|\alpha|\leq k}\sup_y (1+|y|^2)^{\frac{k}{2}}|\partial^{\alpha}((\widetilde{\phi_j-\phi})_x)(y)| =$$
$$C\max_{|\alpha|\leq k}\sup_y (1+|y|^2)^{\frac{k}{2}}|\partial^{\alpha}(\phi_j-\phi)(x-y)| \leq$$
$$C.2^{\frac{k}{2}}(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}\max_{|\alpha|\leq k}\sup_y (1+|x-y|^2)^{\frac{k}{2}}|\partial^{\alpha}(\phi_j-\phi)(x-y)| \leq$$
$$C.2^{\frac{k}{2}}(1+|x|^2)^{\frac{k}{2}}\rho_k(\phi_j-\phi) \xrightarrow{j} 0$$

uniformemente para $x\in supp\,\phi$.

□

Corolário 4.40. *Se $u\in S'$ e $\phi,\ \psi\in S$, então*

(a) $\widehat{u*\phi} = \widehat{\phi}\widehat{u}$

(b) $\widehat{\phi u} = \widehat{u}*\widehat{\phi}$

(c) $(u*\phi)*\psi = u*(\phi*\psi)$

Demonstração. Mostraremos primeiro que (b) e (c) seguem de (a):

(b) $\widehat{\widehat{u}*\widehat{\phi}} = \widehat{\widehat{\phi}}\widehat{\widehat{u}} = \widetilde{\phi}\widetilde{u} = \widetilde{\phi u} = \widehat{\widehat{\phi u}}$. Tomando transformadas inversas, temos $\widehat{u}*\widehat{\phi} = \widehat{\phi u}$.

(c) Basta mostrarmos que $\widehat{(u * \phi) * \psi} = u * \widehat{(\phi * \psi)}$. Para tanto, notemos que, por (a),

$$\begin{aligned}\widehat{(u * \phi) * \psi} &= \widehat{\psi}\widehat{u * \phi} = \widehat{\psi}\widehat{\phi}\widehat{u} = \widehat{\phi}\widehat{\psi}\widehat{u} \\ &= \widehat{\phi * \psi}\widehat{u} = u * \widehat{(\phi * \psi)}.\end{aligned}$$

Por fim, mostremos (a): basta mostrarmos que $\langle \widehat{u * \phi}, \widehat{\psi} \rangle = \langle \widehat{\phi}\widehat{u}, \widehat{\psi} \rangle, \forall\ \psi \in S$. Mas pela proposição 4.39,

$$\langle \widehat{u * \phi}, \widehat{\psi} \rangle = \langle u * \phi, \widehat{\widehat{\psi}} \rangle = \langle u * \phi, \widetilde{\psi} \rangle = \langle u, \widetilde{\psi} * \widetilde{\phi} \rangle = \langle u, \widetilde{\phi * \psi} \rangle \quad \text{e}$$

$$\langle \widehat{\phi}\widehat{u}, \widehat{\psi} \rangle = \langle \widehat{u}, \widehat{\phi}\widehat{\psi} \rangle = \langle \widehat{u}, \widehat{\phi * \psi} \rangle = \langle u, \widehat{\widehat{\phi * \psi}} \rangle = \langle u, \widetilde{\phi * \psi} \rangle.$$

$\square$

Capítulo 5

O Teorema de Malgrange-Ehrenpreis

5.1 Operadores com coeficientes Constantes

Seja Ω um aberto em $\mathbb{R}^n$, e seja F uma função de variável $x \in \Omega$ e $(u_\alpha)_{|\alpha|\leq k} \in \mathbb{C}^n$. Então podemos formular a equação parcial diferencial

$$F(x, (\partial^\alpha u)_{|\alpha|\leq k}) = 0. \tag{5.1}$$

Uma função $u = u(x)$ em Ω é uma **solução clássica** desta equação se suas derivadas $\partial^\alpha u$ em F existem em Ω, e

$$F(x, (\partial^\alpha u(x))_{|\alpha|\leq k}) = 0, \forall\ x \in \Omega.$$

A equação 5.1 é chamada **linear** se F é um funcional linear de variável vetorial $(u_\alpha)_{|\alpha|\leq k}$, isto é, se 5.1 puder ser reescrito como

$$\sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x)\partial^\alpha u = f(x). \tag{5.2}$$

Neste caso, temos o **operador diferencial** $L = \sum\limits_{|\alpha|\leq k} a_\alpha \partial^\alpha$ e escrevemos 5.2 simplesmente como $Lu = f$. Se os coeficientes a_α são C^∞ em Ω, podemos aplicar o operador L para qualquer distribuição u em Ω, e u é chamada de **solução distribucional** ou **solução fraca** de 5.1 se 5.2 ocorre no sentido de distribuições, ou seja,

$$\sum_{|\alpha|\leq k} (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha(a_\alpha \phi)\rangle = \langle f, \phi\rangle \quad (\phi \in C_c{}^\infty(\Omega)).$$

Seja

$$L = \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha \partial^\alpha$$

um operador diferencial com coeficientes constantes. A maneira natural para estudar esse operador é através da tranformada de Fourier. Se f é uma distribuição temperada, temos

$$\widehat{Lu}(\xi) = P(\xi)\widehat{u}(\xi), \tag{5.3}$$

onde

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha (2\pi i\xi)^\alpha.$$

P é chamado **símbolo** de L.

Comecemos considerando a questão da solubilidade local de L. Pela equação 5.3, se $f \in {C_c}^\infty$, podemos resolver $Lu = f$ fazendo $\widehat{u} = \frac{\widehat{f}}{P}$, isto é,

$$u(x) = \int e^{2\pi ix\xi} \frac{\widehat{f}(\xi)}{P(\xi)} d\xi. \tag{5.4}$$

O problema é que o polinômio P pode ter zeros, assim $\frac{\widehat{f}}{P}$ não é uma função localmente integrável e a integral 5.4 não é está bem definida. Contudo, como $f \in {C_c}^\infty, \widehat{f}$ pode ser estendida para uma função holomorfa inteira em $\mathbb{C}^n$ pela proposição 4.16. A idéia para a equação 5.4 ter sentido é deformar o contorno de integração de forma que eliminemos os zeros de P.

Podemos, então, fazer uma simplificação. Por uma rotação de coordenadas, podemos assumir que o vetor $(0, ...0, 1)$ é não característico para L, logo o coeficiente de ${\xi_n}^k$ em $P(\xi)$ não é zero. Dividindo então todos os termos por ele, podemos assumir que este coeficiente é 1, e assim

$$P(\xi) = {\xi_n}^k + \text{ termos de menor ordem em } \xi_n.$$

Para cada $\xi' = (\xi_1, ..., \xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ fixado, consideramos $P(\xi) = P(\xi', \xi_n)$ como um polinônio na variável complexa ξ_n. Sejam $\lambda_1(\xi'), ..., \lambda_k(\xi')$ seus zeros, contados de acordo com a multiplicidade e ordenados de forma que para $i \leq j$, $Im\lambda_i(\xi') \leq Im\lambda_j(\xi')$ e se $Im\lambda_i(\xi') = Im\lambda_j(\xi')$ então $Re\lambda_i(\xi') \leq Re\lambda_j(\xi')$. Pelo teorema de Rouché, uma pequena perturbação em ξ' produz uma pequena perturbação nos zeros de $P(\xi', \xi_n)$, logo as funções $Im\lambda_j(\xi')$ são funções contínuas de ξ'. Antes de avançarmos ao resultado principal, precisamos de dois lemas.

Lema 5.1. *Existe uma função mensurável* $\phi : \mathbb{R}^{n-1} \to [-k, k]$ *tal que para todo* $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$\min\{|\phi(\xi') - Im\lambda_j(\xi')| : 1 \leq j \leq k\} \geq 1.$$

Demonstração. Existem no máximo k pontos distintos em $Im\lambda_j(\xi')(1 \leq j \leq k)$, e assim pelo menos um dos intervalos $[2m-k-1, 2m-k+1)(0 \leq m \leq k)$ contém nenhum desses pontos, e podemos fazer $\phi(\xi')$ ser o ponto médio de tal intervalo. Isto é, para $0 \leq m \leq k$, seja

$$V_m = \{\xi' : Im\lambda_j(\xi') \notin [2m-k-1, 2m-k+1) \text{ para } j = 1, ..., k\}.$$

Então os conjuntos V_m cobrem $\mathbb{R}^{n-1}$, e são conjuntos de Borel, pois $Im\lambda_j$ é contínua, e assim podemos considerar

$$\phi(x) = 2m - k \text{ para } x \in V_m \setminus \bigcup_{n=0}^{m-1} V_l \quad (0 \leq m \leq k).$$

□

Lema 5.2. *Seja $g(z)$ um polinômio mônico de grau k na variável complexa z tal que $g(0) \neq 0$, e sejam $\lambda_1, ..., \lambda_k$ seus zeros. Então $|g(0)| \geq \left(\frac{d}{2}\right)^k$ onde $d = min|\lambda_j|$.*

Demonstração. Temos $g(z) = (z - \lambda_1)...(z - \lambda_k)$, então

$$\left|\frac{g(z)}{g(0)}\right| = \prod_1^k \left|1 - \frac{z}{\lambda_k}\right| \leq 2^k \text{ para } |z| \leq d.$$

Ademais, $g^{(k)} \equiv k!$, e pela fórmula integral de Cauchy,

$$k! = |g^{(k)}(0)| = \left|\frac{k!}{2\pi i}\int_{|z|=d} \frac{g(z)}{z^{k+1}} dz\right| \leq \frac{k! 2^k |g(0)|}{d^k}.$$

□

Teorema 5.3. *Se L é um operador diferencial com coeficientes constantes em $\mathbb{R}^n$ e $f \in {C_c}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, então existe $u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tal que $Lu = f$.*

Demonstração. Seja ϕ como no lema 5.1, e faça

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{Im\xi_n = \phi(\xi')} e^{2\pi i x\xi} \frac{\widehat{f}(\xi)}{P(\xi)} d\xi_n d\xi'. \tag{5.5}$$

Pelo lema 5.2 (sendo $g(z) = P(\xi', \xi_n + z)$) junto com o lema 5.1, vemos que $|P(\xi)| \geq 2^{-k}$ quando $Im\xi_n = \phi(\xi')$. Ademais, pela proposição 4.16, $\widehat{f}(\xi)$ decresce rapidamente quando $|Re(\xi)| \to \infty$ quando $|Im\xi|$ permanece limitado. Assim o integrando da equação 5.5 é limitado e decresce rapidamente no infinito e, consequentemente, a integral é absolutamente convergente. Pela mesma razão, podemos diferenciar sobre a integral e concluir que u é C^{∞} e que

$$Lu(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{Im\xi_n = \phi(\xi')} e^{2\pi i x\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi_n d\xi'.$$

Mas, agora, o integrando é uma função inteira que decresce rapidamente quando $|Re\xi| \to \infty$, e pelo teorema de Cauchy, podemos deformar o contorno de integração em ξ_n para o eixo real. E, pelo teorema 4.11, $Lu = f$. $\square$

O teorema 5.3 pode ser escrito também da seguinte maneira: Uma **solução fundamental** para um operador de coeficientes constantes L é uma distribuição K em $\mathbb{R}^n$, tal que $LK = \delta$, onde δ é o ponto de massa na origem. Por um lado, o teorema 5.3 é um corolário imediato da existência de uma solução fundamental, pois, se $f \in {C_c}^{\infty}$, podemos fazer $u = K*f$, e temos $Lu = LK*f = \delta*f = f$. Por outro lado, a prova do teorema 5.3 facilmente gera uma solução fundamental.

Teorema 5.4 (Teorema de Malgrange-Ehrempreis)**.** *Todo operador diferencial L com coeficientes constantes tem uma solução fundamental.*

Demonstração. Defina um funcional linear K em ${C_c}^{\infty}$ por

$$\langle K, f\rangle = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{Im\xi_n=\phi(\xi')} \frac{\widehat{f}(-\xi)}{P(\xi)} d\xi_n d\xi'.$$

Como na prova do teorema 5.3, a integral é limitada por

$$C \sup_{|Im\xi|\leq k} (1+|\xi|)^{-n-1}|\widehat{f}(\xi)| \leq C' \sum_{|\alpha|\leq n+1} ||\partial^{\alpha} f||_{\infty},$$

onde C e C' depende. somente do suporte de f, logo K é uma distribuição. Ademais, $\langle LK, f\rangle = \langle K, L'f\rangle$ onde L' é o operador com símbolo $P(-\xi)$, tal que $\widehat{L'f}(-\xi) = P(\xi)\widehat{f}(-\xi)$. Assim, como na prova do teorema 5.3,

$$\langle LK, f\rangle = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{Im\xi_n=\phi(\xi')} \widehat{f}(-\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)d\xi = f(0) = \langle \delta_0, f\rangle.$$

Podemos também observar que $K*f$ é a função u definida pela equação 5.5, e assim $LK*f = Lu = f$ para todo f e ainda $LK = \delta_0$. $\square$

Podemos agora resolver a equação $Lu = f$ não somente quando $f \in {C_c}^{\infty}$, mas quando f é qualquer distribuição com suporte compacto. É claro que a solução u será uma distribuição. De fato, se $f \in E'$, temos

$$L(K*f) = K*Lf = f, \tag{5.6}$$

desde que $L(K*f)$ e $K*Lf$ são ambas iguais a $LK*f = \delta_0*f = f$. Estas relações podem frequentemente ser estendidas para f que não tem suporte compacto, mas a classe de f para as quais isso acontece dependerá da natureza de K.

Um operador diferencial L com coeficientes em C^{∞} é chamado **hipoelíptico** se qualquer distribuição u em um aberto Ω tal que Lu é C^{∞} em Ω é C^{∞} em Ω, isto é, se todas as soluções da equação $Lu = f$ são C^{∞} quando f é C^{∞}.

Teorema 5.5. *Se L é um operador diferencial com coeficientes constantes, então são equivalentes:*

(a) *Uma solução fundamental para L é C^∞ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

(b) *Toda solução fundamental para L é C^∞ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

(c) *L é hipoelíptico.*

Demonstração. Se K é uma solução fundamental para L, então $LK = \delta$ é C^∞ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, então (c) implica (b), (b) trivialmente implica (a), então falta apenas mostrar que (a) implica (c), e para isso precisamos de um lema. $\square$

Lema 5.6. *Suponha que f e g são distribuições em $\mathbb{R}^n, f$ é C^∞ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, e g tem suporte compacto. Então $f * g$ é C^∞ em $\mathbb{R}^n \setminus (\operatorname{supp} g)$.*

Demonstração. Dado $x \notin \operatorname{supp} g$, escolha $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $B_\epsilon(x)$ e $\operatorname{supp} g$ sejam disjuntos, e $\phi \in {C_c}^\infty(B_{\frac{\epsilon}{2}}(0))$ tal que $\phi = 1$ em $B_{\frac{\epsilon}{4}}(0)$. Então podemos escrever

$$f * g = (\phi f) * g + [(1-\phi)f] * g.$$

Por outro lado, $(1-\phi)f$ é uma função C^∞, então $[(1-\phi)f]*g$ é C^∞. Por outro lado,

$$\operatorname{supp}[(\phi f) * g] \subset \operatorname{supp}\phi + \operatorname{supp} g,$$

que é disjunto de $B_{\frac{\epsilon}{2}}(0)$. Logo, em $B_{\frac{\epsilon}{2}}(0), f * g = [(1-\phi)f] * g$ é C^∞. $\square$

Retornando para a porva do teorema 5.5, seja K uma solução fundamental para L que é C^∞ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Suponha que u é uma distribuição em um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que Lu é C^∞ em Ω. Se $x \in \Omega$, pegamos $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset \Omega$, e nós vamos mostrar que u é C^∞ em $B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)$. Seja $\phi \in {C_c}^\infty(B_\epsilon(x))$ com $\phi = 1$ em $B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)$. Então $L(\phi u) = \phi Lu + v$ onde $v = 0$ em $B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)$ e fora de $B_\epsilon(x)$. Mas $K * (\phi Lu)$ é C^∞ desde que $\phi Lu \in {C_c}^\infty$, e $K * v$ é C^∞ em $B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)$ pelo lema 5.6. Mas pela equação 5.6,

$$\phi u = K * L(\phi u) = K * \phi Lu + K * v,$$

então em $B_{\frac{\epsilon}{2}}(x), u = \phi u$ é C^∞.

5.2 Exemplos

Exemplo 5.7. *Uma solução fundamental de*

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

onde $c > 0$ é dada por

$$u(t,x) = \frac{1}{2c}H(ct - |x|) = \frac{1}{2c}H(ct - c)H(ct + x),$$

onde H é uma função tal que $H(x) = 1$, se $x > 0$ e $H(x) = 0$, se $x < 0$. Mostremos que $\langle Lu, \phi\rangle = \phi(0,0)$, $\forall\ \phi \in {C_c}^{\infty}(\mathbb{R}^2)$. Sejam $D_+ = \frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}$ e $D_- = \frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}$, então $L = D_+D_-$. Então

$$\begin{gathered}
\langle Lu, \phi\rangle = \langle u, D_+D_-\phi\rangle = \\
\int\int \tfrac{1}{2c}H(ct - |x|)D_+D_-\phi dtdx = \\
\tfrac{1}{2c}\left[\int_0^{\infty}\int_{\frac{x}{c}}^{\infty} D_+D_-\phi dtdx + \int_{-\infty}^{0}\int_{-\frac{x}{c}}^{\infty} D_-D_+\phi dtdx\right] = \\
\tfrac{1}{2c}\left[\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} (D_+D_-\phi)(t + \tfrac{x}{c}, x)dtdx + \int_{-\infty}^{0}\int_0^{\infty} (D_-D_+\phi)(t - \tfrac{x}{c}, x)dtdx\right] = \\
\tfrac{1}{2}\left[\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \tfrac{d}{dx}(D_-\phi)(t + \tfrac{x}{c}, x)dxdt - \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0} \tfrac{d}{dx}(D_+\phi)(t - \tfrac{x}{c}, x)dxdt\right] = \\
-\tfrac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[D_-\phi(t,0) + D_+\phi(t,0)\right]dt = \\
-\int_0^{\infty}\tfrac{\partial}{\partial t}\phi(t,0)dt = \\
\phi(0,0) = \langle \delta_0, \phi\rangle.
\end{gathered}$$

Exemplo 5.8. *O operador de Laplace é*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial {x_n}^2} = \nabla.\nabla = \nabla^2.$$

Uma solução funtamental é dada por

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}|x|, & se\ n = 1, \\ \frac{1}{2\pi}\ln|x|, & se\ n = 2, \\ \frac{1}{n\omega_n}.\frac{|x|^{2-n}}{2-n}, & se\ n > 2, \end{cases} \tag{5.7}$$

onde $\omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})}$ é o hiper-volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$.

Para $n = 1$, ficamos com $\partial^2\frac{1}{2}|x| = \partial\frac{1}{2}(2H(x) - 1) = H' = \delta_0$. Para $n \geq 2$, precisamos mostrar que

$$\langle \Delta E, \phi\rangle = \langle E, \Delta\phi\rangle = \phi(0),\ \ \forall\ \phi \in {C_c}^{\infty}(\mathbb{R}^n).$$

É importante reconhecer que E é uma distribuição regular, isto é, $E \in {L_{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$. Mas isso é claro para todo ponto fora de uma vizinhança do 0, sendo $0 < r < 1$ e $n = 2$, fazendo mudança de variáveis para coordenadas polares, ficamos com

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(0)}\left|\frac{1}{2\pi}\ln|x|\right|dx &= -\int_0^{2\pi}\int_0^{r}\frac{1}{2\pi}\ln r dr d\sigma \\
&= -\frac{1}{2}r^2\ln r + \frac{1}{4}r^2 < \infty,
\end{aligned}$$

e se $n > 2$,

$$\begin{aligned}\int_{B_r(0)} |E(x)|dx &= -\int_{S_1(0)} \int_0^r \frac{r^{2-n}}{n\omega_n(2-n)} r^{n-1} dr d\sigma \\ &= \frac{r^2}{2(n-2)} < \infty,\end{aligned}$$

onde $S_1(0)$ *é a esfera unitária. Precisamos mostrar então que*

$$\int E(x)\Delta\phi(x)dx = \phi(0), \ \ \forall \ \phi \in C_c{}^{\infty}.$$

Seja $supp\,(\phi) \subset B_R(0)$ *e* $\epsilon > 0$. *Então*

$$\int_{\epsilon<|x|<R} E\Delta\phi dx = -\int_{\epsilon<|x|<R} \nabla E.\nabla\phi dx + \int_{|x|=\epsilon} E\nabla\phi.v d\sigma,$$

pelo teorema da divergência, onde $v \in \mathbb{R}^n$ *é o vetor unitário normal a superfície* $|x| = \epsilon$ *apontando para a origem. Aplicando novamente o teorema da divergência temos que*

$$\int_{\epsilon<|x|<R} E\Delta\phi dx = \int_{\epsilon<|x|<R} \Delta E\phi dx \, - \int_{|x|=\epsilon} \nabla E.v\phi d\sigma \, + \int_{|x|=\epsilon} E\nabla\phi.v d\sigma. \tag{5.8}$$

Mas $\Delta E = 0$ *para* $x \neq 0$. *Além disso, para* $n > 2$

$$\int_{|x|=\epsilon} E\nabla\phi.v d\sigma = \int_{S_1(0)} \frac{1}{n\omega_n}.\frac{\epsilon^{2-n}}{2-n} \nabla\phi.v\epsilon^{n-1} d\sigma \to 0$$

quando $\epsilon \to$, *analogamente para* $n = 2$. *E ainda,*

$$\begin{aligned}-\int_{|x|=\epsilon} \nabla E.v\phi d\sigma &= \int_{S_1(0)} \frac{\partial E}{\partial r}(\epsilon,\sigma)\phi(\epsilon,\sigma)\epsilon^{n-1} d\sigma \\ &= \int_{S_1(0)} \frac{1}{n\omega_n} \epsilon^{1-n}\phi(\epsilon,\sigma)\epsilon^{n-1} d\sigma \to \phi(0).\end{aligned}$$

Então pela equação 5.8,

$$\int E\Delta\phi dx = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon<|x|<R} E\Delta\phi dx = \phi(0),$$

e assim u é uma solução fundamental de Δ.

Referências Bibliográficas

[1] ARBOGAST, T.; BONA, J. *Notes for Applied Mathematics.* Austin: University of Texas, 2004.

[2] FOLLAND, G. B. *Introduction to Partial Differential Equations.* Princeton: Princeton University Press, 1976.

[3] _______. *Real Analysis*: Modern Techniques and their Applications. New York: John Wiley, 1999.

[4] LIMA, E. L. *Espaços Métricos.* Rio de Janeiro: IMPA, 1977 (Projeto Euclides).