UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Heloisa Frazão da Silva

SOBRE H-HIPERSUPERFÍCIES COMPACTAS DE $N \times \mathbb{R}$

FORTALEZA
2011

Heloisa Frazão da Silva

SOBRE H-HIPERSUPERFÍCIES COMPACTAS DE $N \times \mathbb{R}$

Dissertacão submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentracão: Geometria

Orientador: Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa

Fortaleza

2011

Silva, Heloisa Frazão da

S58s Sobre H-hipersuperfícies Compactas de $N \times \mathbb{R}$/Heloisa Frazão da Silva. – Fortaleza, 2011.

82 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa

Área de concentração: Geometria

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática,Fortaleza, 2011.

1.Geometria diferencial. I. Bessa, Gregório Pacelli Feitosa (Orient.)

CDD 516.36

Aos meus pais, irmãos e sobrinho amado,
dedico.

Agradecimentos

À Deus acima de tudo, meus pais, meus amigos e meu marido Landerson.

Resumo

Consideraremos $\mathscr{F}(N \times \mathbb{R})$ o conjunto das H-hipersuperfícies fechadas M tal que $M \subset N \times \mathbb{R}$, onde N é uma variedade riemanniana simplesmente conexa com curvatura seccional limitada superiormente ($K_N \leq -k^2 < 0$). A partir daí, com o auxílio do Teorema de Comparação do Hessiano mostraremos algumas desigualdades para estas subvariedades $M \subset N \times \mathbb{R}$ com curvatura média constante H_M.

Palavras-Chaves: Curvatura Média, H-hipersuperfícies, Raio Extrínseco.

Abstract

Consider $\mathscr{F}(N \times \mathbb{R})$ the set of closed hypersurfaces M such that $M \subset N \times \mathbb{R}$ where N is a simply connected riemannian manifold with sectional curvature bounded above ($K_N \leq -k^2 < 0$). Thereafter, with the aid of Hessian Comparison Theorem we show some inequalities for these submanifolds $M \subset N \times \mathbb{R}$ with constant mean curvature H_M.

Keywords: Mean Curvature, H-hypersurfaces, Ray Extrinsic.

Sumário

Introdução

Consideraremos $\mathscr{F}(N\times\mathbb{R})$ o conjunto das H-hipersuperfícies fechadas M tal que $M\subset N\times\mathbb{R}$, onde N é uma variedade riemanniana simplesmente conexa com curvatura seccional limitada superiormente ($K_N\leq -k^2<0$). A partir daí, com o auxílio do Teorema de Comparação do Hessiano mostraremos algumas desigualdades para estas subvariedades $M\subset N\times\mathbb{R}$ com curvatura média constante H_M.

Precisamos das definições e teoremas a seguir para a demonstração do Teorema principal.

Definição 0.1 . *Seja $\mathscr{F}(N\times\mathbb{R})$ o conjunto de todas as H-hipersuperfícies fechadas $M\subset N\times\mathbb{R}$, onde N é uma variedade Riemanniana simplesmente conexa de dimensão n com curvatura seccional $K_N\leq -k^2$. Então definimos o número $\boldsymbol{h}(N\times\mathbb{R})$ por:*

$$\boldsymbol{h}(N\times\mathbb{R}) = inf_{M\in\mathscr{F}(N\times\mathbb{R})}\{|H_M|\}.$$

Definição 0.2 . *Seja $\varphi: M\hookrightarrow N\times\mathbb{R}$ uma imersão de uma variedade m-dimensional M na variedade produto $N\times\mathbb{R}$ onde N é uma variedade Riemanniana Completa com curvatura seccional $K_N\leq c\leq 0$. Seja $K\subset\varphi(M)$ um conjunto compacto conexo. Definimos o raio extrínseco por $R_{p_1}=raio(p_1(K))$, o raio do conjunto $p_1(K)$, isto é o raio da menor bola métrica de N contendo $p_1(K)$, onde $p_1: N\times\mathbb{R}\to N$ é a projeção sobre o primeiro fator.*

Definição 0.3 . *Seja M uma variedade Riemanniana e $\Omega\subset M$ um aberto conexo arbitrário. Definimos o **Tom Fundamental** $\lambda^*(\Omega)$ de Ω por:*

$$\lambda^*(\Omega) = inf\{\frac{\int_\Omega|\nabla f|^2}{\int_\Omega f^2}, f\in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}\} = inf\sum(\Omega),$$

onde $\sum$ é o espectro e $H_0^1(\Omega)$ é o completamento de $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito a norma $\|\varphi\|^2_{H_0^1} = \int_\Omega\varphi^2+\int_\Omega|\nabla\varphi|^2$.

De acordo com isso, como $\Sigma(\mathbb{R}^n) = [0,\infty)$ *e* $\Sigma(\mathbb{H}^n(-k^2)) = [\frac{(n-1)^2k^2}{4},\infty)$, *temos que* $\lambda^*(\mathbb{R}^n) = 0$ *e* $\lambda^*(\mathbb{H}^n(-k^2)) = \frac{(n-1)^2k^2}{4}$.

Teorema 0.1 *(Fórmula de green). Seja* $f: M \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* $C^2(M)$, $h: M \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* $C^1(M)$, *pelo menos uma delas com suporte compacto. Então:*

$$\int_M \{h\triangle f + \langle \operatorname{grad} h, \operatorname{grad} f\rangle\} dV = 0.$$

Se ambas são de classe $C^2(M)$, *então*

$$\int_M \{h\triangle f - f\triangle h\} dV = 0.$$

Teorema 0.2 *(Teorema de Comparação do Hessiano). Seja* M *uma variedade Riemanniana Completa e seja* ρ *a função distância em* M *a partir de* x_0. *Seja* γ *uma geodésica minimizante partindo de* x_0 *e suponha que a curvatura seccional radial de* M *ao longo de* γ *satisfaz* $K_\gamma \leq k$. *Então o Hessiano de* ρ *em* $\gamma(t)$ *satisfaz:*

$$\operatorname{Hess}\rho(x)(X,X) \geq \mu(\rho).\|X\|^2,$$

onde $\mu(\rho) = \dfrac{S'_k}{S_k}(\rho(x))$

A demonstração do teorema principal deste trabalho depende de uma seqüência de resultados.

Para o que segue, seja $p_1 : N \times \mathbb{R} \to N$ a projeção sobre o primeiro fator e para uma dada hipersuperfície fechada $M \subset N \times \mathbb{R}$, seja $R_{p_1(M)}$ o raio extrínseco do conjunto $p_1(M) \subset N$.

Teorema 0.3 *Seja* $\varphi : M \hookrightarrow N \times \mathbb{R}$ *uma imersão de uma hipersuperfície* M *fechada de dimensão* m *com curvatura média limitada* $|H_M| \leq H_0$, *onde* N *é uma Variedade Riemanniana com um polo* x_0 *e curvaturas seccionais radiais limitadas* $K_N \leq c$ *e* $\rho_N : N \to \mathbb{R}$ *a função distância em* x_0. *Suponha que* $p_1(M) \subset B_N(\frac{\pi}{2k})$ *se* $c = k^2$. *Então:*

$$n \cdot |H_0| \geq (n-1) \cdot \mu(R_{p_1(M)}).$$

Segue dos trabalhos de Barbosa-Kenmotsu-Oshikiri em [BARBOSA, KENMOTSU & O. 1991] e Salavessa em [SALAVESSA 1989], que se um gráfico inteiro de uma função diferenciável $f: \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ tem curvatura média constante H então $|H| \leq \frac{n-1}{n}$. Por outro lado, Bessa e Montenegro em [BESSA & MONTENEGRO 2007] mostraram com o teorema abaixo que hipersuperfícies compactas imersas em $N \times \mathbb{R}$, onde N é uma variedade Riemanniana n dimensional com polo e curvaturas seccionais radiais $K_N \leq -k^2 < 0$, satisfaz $|H| \geq \frac{(n-1)k}{n}$.

Teorema 0.4 . *Seja N uma Variedade riemanniana completa de dimensão n com um polo e curvatura seccional radial limitada superiormente $K_N \leq -k^2 < 0\,(k > 0)$. Seja $M \subset N \times \mathbb{R}$ uma imersão de uma hipersuperfície com curvatura média constante H. Então*

$$|H_M| \geq \frac{(n-1)\cdot k}{n} = \frac{2}{n}\sqrt{\lambda^*(\mathbb{H}^n(-k^2))}.$$

Em particular,

$$\boldsymbol{h}(N \times \mathbb{R}) \geq \frac{(n-1)\cdot k}{n}.$$

Podemos agora enunciar o nosso resultado principal.

Teorema 0.5 . *Seja N uma Variedade Riemanniana completa de dimensão n como um polo e curvatura seccional radial limitada superiormente $K_N \leq -k^2 < 0\,(k > 0)$. Seja $M \subset N \times \mathbb{R}$ uma hipersuperfície imersa com curvatura média constante H_M. Então:*

$$R_{p_1(M)} \geq coth^{-1}\left(\frac{n}{(n-1)\cdot k}\cdot |H_M|\right).$$

Em particular, se $M_i \subset N \times \mathbb{R}$ é uma sequência de hipersuperfícies fechadas imersas com curvaturas médias constantes $H_{M_i} \to \frac{(n-1)\cdot k}{n}$ então o raio extrínseco $R_{p_1}(M_i) \to \infty$.

Capítulo 1

Preliminares

Conteúdo

1.1 Gradiente, Divergente, Hessiano e o Laplaciano de uma Função

Nesta seção vamos relembrar alguns conceitos básicos da Geometria Riemanniana envolvendo Gradiente , Divergente , Hessiano e o Laplaciano de uma função real de classe C^{∞} definidos na variedade Riemanniana M diferenciável com métrica $\langle .,. \rangle$ e conexão de Levi-Civita ∇. Denotaremos por $\mathscr{X}(M)$ o espaço dos campos vetoriais diferenciáveis em M. T_pM vai denotar o espaço tangente a M no ponto $p \in M$.

Definição 1.1 . *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O gradiente de f é o campo vetorial diferenciável,* ***grad f****, definido sobre M por:*

$$\langle \textbf{\textit{grad}} f, X \rangle = X(f),$$

para todo $X \in T_xM$, $x \in M$.

Observação 1.1 . *Veja que se f , $g : M \to \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis, então*

(***a***) $\mathrm{grad}\,(f+g) = \mathrm{grad} f + \mathrm{grad}\, g$

(***b***) $\mathrm{grad}\,(f.g) = g\,\mathrm{grad} f + f\mathrm{grad}\, g$

De fato, se X é um campo diferenciável sobre M temos

$\langle \mathrm{grad}(f+g), X\rangle = X(f+g) = X(f) + X(g) = \langle \mathrm{grad} f, X\rangle + \langle \mathrm{grad} g, X\rangle = \langle \mathrm{grad} f + \mathrm{grad} g, X\rangle$,

e

$\langle \mathrm{grad}(f.g), X\rangle = X(f.g) = gX(f) + fX(g) = \langle g.\mathrm{grad} f, X\rangle + \langle f.\mathrm{grad} g, X\rangle = \langle g.\mathrm{grad} f + f.\mathrm{grad} g, X\rangle$

Proposição 1.1 . *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.Dados $p \in M$ e $v \in T_pM$, seja $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ uma curva suave tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Então*

$$\langle \mathrm{grad} f, v\rangle_p = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)|_{t=0}.$$

Em particular, se p é ponto de máximo ou mínimo local para f, então $\mathrm{grad} f(p) = 0$.

<u>**Prova**</u>: Para a primeira parte basta observar que, sendo X uma extensão local de γ', temos $\langle \mathrm{grad} f, v\rangle_p = X(f)\,(p) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)|_{t=0}$.

Suponha agora que p é ponto de máximo local para f (o outro caso é análogo). Então se existe $U \subset M$ vizinhança aberta de p tal que $f(p) \geq f(q)$ para todo $q \in U$.
Se $v \in T_pM$ e $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ é como no enunciado, então $(f \circ \gamma) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ tem um máximo local em 0, donde $\langle \mathrm{grad} f, v\rangle_p = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)|_{t=0} = 0$.
Como a relação acima é válida para todo $v \in T_pM$, segue que $\mathrm{grad} f(p)$=0. □

Proposição 1.2 . *Se $f : M \to \mathbb{R}$ e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis, então*

$$\mathrm{grad}(\varphi \circ f) = \varphi'(f)\,\mathrm{grad} f.$$

<u>**Prova**</u>: Se $p \in M$, $v \in T_pM$ e $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é uma curva diferenciável tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, então segue da proposição anterior que

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{grad}(\varphi \circ f), v\rangle &= \frac{d}{dt}(\varphi \circ f \circ \gamma)(t)\,|_{t=0} \\ &= \varphi'(f(p))\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)|_{t=0} \\ &= (\varphi' \circ f)\langle \mathrm{grad} f, v\rangle_p. \,\square \end{aligned}$$

Definição 1.2 . *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Dizemos que $p \in M$ é um **ponto crítico** de f se* $\mathrm{grad} f(p) = 0$*. Em particular, segue da proposição acima que todo ponto de máximo ou mínimo local de f é um ponto crítico de f.*

Definição 1.3 . *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O **Hessiano** de f em $p \in M$ é o operador linear* $((\mathrm{Hess} f)_p : T_pM \to T_pM$ *definido para $v \in T_pM$ por*

$$(\mathrm{Hess} f)_p(v) = \nabla_v \, \mathrm{grad} f.$$

Observação 1.2 . $(\mathrm{Hess} f)$ *pode ser considerado como um tensor de ordem 2:*

$$\mathrm{Hess}, f(X,Y) = \langle \mathrm{Hess} f(X), Y\rangle = \langle \nabla_X \, \mathrm{grad} f, Y\rangle.$$

Proposição 1.3 . *Se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $p \in M$, então* $(\mathrm{Hess} f)_p : T_pM \to T_pM$ *é um operador linear auto-adjunto.*

Prova. Se $v,w \in T_pM$ e V,W denotam respectivamente extensões de v,w a campos definidos em uma vizinhança de p em M, então

$$\begin{aligned}
\langle (\mathrm{Hess} f)_p(v), w\rangle &= \langle \nabla_V \, \mathrm{grad} f, W\rangle_p \\
&= (V\langle \mathrm{grad} f, W\rangle)(p) - \langle \mathrm{grad} f, \nabla_V W\rangle_p \\
&= (V(Wf))(p) - \langle \mathrm{grad} f, \nabla_W V + [V,W]\rangle_p \\
&= (W(Vf))(p) + ([V,W]f)(p) - \langle \mathrm{grad} f, \nabla_W V + [V,W]\rangle_p \\
&= (W(Vf))(p) - \langle \mathrm{grad} f, \nabla_W V\rangle_p \\
&= \langle (\mathrm{Hess} f)_p(w), v\rangle . \square
\end{aligned}$$

Definição 1.4 . *Seja X um campo vetorial diferenciável em M. A **divergência** de X é a função diferenciável* $\mathrm{div} X : M \to \mathbb{R}$*, dada para $p \in M$ por*

$$(\mathrm{div} X)(p) = \mathrm{tr}\{v \mapsto (\nabla_v X)(p)\},$$

onde $v \in T_pM$ e tr *denota o traço do operador linear acima.*

Definição 1.5 . *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O **Laplaciano** de f é a função $\triangle f : M \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\triangle f = \mathrm{div} \, \mathrm{grad} f.$$

Proposição 1.4 . *Se $f: M \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável , então*

$$\triangle f = \mathrm{tr}(\mathrm{Hess} f).$$

<u>**Prova**</u>. É suficiente provar a igualdade do enunciado para cada $p \in M$. Considere então $U \subset M$ uma vizinhança de p onde esteja definido um referencial móvel $\{e_1, ..., e_n\}$. Então

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\mathrm{Hess} f)_p &= \langle (\mathrm{Hess} f)_p(e_i), e_i \rangle \\ &= \langle \nabla_{e_i} \mathrm{grad} f, e_i \rangle_p \\ &= \mathrm{div}(\mathrm{grad} f)(p) \\ &= \triangle f. \end{aligned}$$

1.2 A segunda forma fundamental

Seja (N, g) uma Variedade Riemanniana de dimensão n e $\varphi : M \hookrightarrow N$ uma subvariedade de N de dimensão m onde em M consideramos a métrica induzida $h = \varphi^* g$. Para $p \in M$ identificamos o subespaço $d\varphi(p)(T_pM)$ de T_pN e consideramos o seu complemento ortogonal $T_pM^\perp$. Assim obtemos a decomposição ortogonal $T_pN = T_pM \oplus T_pM^\perp$. Para $u \in T_pN$ vamos denotar por $u^\top$ e $u^\perp$ a T_pM-componente e a $T_pM^\perp$ - componente, respectivamente. Se ∇^N denota a conexão de Levi-Civita de (N, g). Então para $X \in \mathscr{X}(M)$, lembremos que $(\nabla^N_X Y)(p), p \in M$ é determinado por valores de Y em uma curva em M tangente a X_p , e podemos decompor $(\nabla^N_X Y)(p)$ em duas componentes como um vetor de $T_pN = T_pM \oplus T_pM^\perp$.

Podemos ver que a aplicação $p \mapsto (\nabla^N_X Y)^\top(p)$ satisfaz todas as condições da conexão de Levi-Civita ∇^M de M com a métrica h. Donde temos:

$$\nabla^M_X Y = (\nabla^N_X Y)^\top.$$

Agora temos por definição que $\alpha(X, Y) := (\nabla^N_X Y)^\top$, que é um campo de tensores simétrico de ordem 2 em M e toma valores em $TM^\perp$. De fato podemos checar diretamente que α é $\mathscr{F}(M)$-linear com respeito a X, Y.

Veja que α é um tensor simétrico:

$$\alpha(X, Y) - \alpha(Y, X) = (\nabla^N_X Y - \nabla^N_Y X)^\perp = [X, Y]^\perp = 0.$$

Definição 1.6 . *O campo de tensores α acima é chamado de Segunda Forma Fundamental de*

M.

Definição 1.7 . *Para* $\xi \in T_pM^{\perp}$ *definimos o* ***operador forma*** $A_\xi : T_pM \to T_pM$ *por:*

$$\langle A_\xi x, y\rangle := -\langle \alpha(X,Y), \xi\rangle,$$

onde $\xi \in T_pM^{\perp}$.

Veja que A_ξ é um tensor simétrico.

Os autovalores de A_ξ são chamados de **Curvaturas Principais** de M na direção normal ξ.

Observação 1.3 . *O operador forma pode ser obtido da seguinte maneira:*

Extendendo ξ *a um campo normal diferenciável em uma vizinhança de* p *em* M, *consideramos a decomposição ortogonal* $(\nabla^N_x \xi) = (\nabla^N_x \xi)^{\top} + (\nabla^N_x \xi)^{\perp}$ *para* $x \in T_pM$. *Então temos:*

$$A_\xi x = (\nabla^N_x \xi)^{\top}.$$

De fato, para qualquer $y \in T_pM$, *obtemos*

$$\langle A_\xi x, y\rangle = -\langle \alpha(X,Y), \xi\rangle = -\langle \nabla^N_x Y, \xi\rangle = \langle y, \nabla^N_x \xi\rangle = \langle (\nabla^N_x \xi)^{\perp}, y\rangle,$$

onde X, Y são campos de vetores em M com $X_p = x, Y_p = y$, respectivamente.

1.3 Segunda Variação do Comprimento de Arco

Definição 1.8 . *Seja M uma Variedade Riemanianna. O* ***Comprimento de Arco*** *de uma curva diferenciável* $c : [a,b] \to M$ *é, por definição*

$$\mathrm{L}[c] = \int_a^b \|c'(t)\| dt.$$

Vamos assumir que c é diferenciável, $\|c'(t)\| \neq 0$, e sem perda de generalidade, podemos assumir que c é parametrizada proporcionalmente ao comprimento de arco. Em outras palavras, $\|c'(t)\|$ é uma constante.

Definição 1.9 . *Seja* $c : [a,b] \to M$ *uma curva diferenciável por partes na variedade Riemanniana M. Uma* ***Variação de c*** *é uma aplicação contínua* $\alpha : [a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ *satisfazendo as seguintes condições:*

*(**a**). $\alpha(t,0) = c(t)$;*

*(**b**). Existem $a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$ tais que $\alpha\mid_{[t_i,t_{i+1}]\times(-\varepsilon,\varepsilon)}$ é diferenciável para todo $0 \leq i < k$.*

Seja $c : [a,b] \to M$ uma curva diferenciável por partes e $\alpha : [a,b] \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ uma variação de c. Desde que $s \mapsto \alpha(t,s)$ é, para cada $t \in [a,b]$, uma curva suave em M, fica bem definido ao longo de c o campo vetorial $V = \frac{d\alpha}{ds}(t,0)$, denominado o **campo variacional** de α.

Note que V é diferenciável por partes ao longo de c. As **curvas da variação** α são as curvas $\alpha_s : [a,b] \to M$ dadas por $\alpha_s(t) = \alpha(t,s)$.

Observação 1.4 . *A variação $\alpha : [a,b] \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ dada por $\alpha(t,s) = exp_{c(t)}(s)V(t)$ está bem definida e é diferenciável por partes. Veja que:*

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{ds}(t,0) &= d(exp_{c(t)}(s)V(t))V(t)|_{(t,0)}\\ &= (exp_{c(t)}(0)V(t))\\ &= V(t).\end{aligned}$$

De modo que V é o campo variacional de α.

Sejam T, V campos de vetores tangentes em $[a,b] \times (-\varepsilon,\varepsilon)$ correspondentes a primeira e a segunda variáveis. Vamos identificar estes vetores com suas imagens no âmbito da diferencial de α : $V = \frac{d\alpha}{ds}(t,0)$, $T = \frac{d\alpha}{dt}(t,0)$.

Nosso objetivo é calcular a mudança no comprimento de arco sobre a família de curvas $c_s = \alpha\mid_{[a,b]\times\{s\}}$, onde $-\varepsilon < s < \varepsilon$.

Isto é dado por:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\mathrm{L}[c_s] &= \frac{d}{ds}\int_a^b \langle c'_s(t), c'_s(t)\rangle^{\frac{1}{2}} dt\\ &= \int_a^b V\langle T,T\rangle^{\frac{1}{2}} dt\\ &= \frac{1}{2}\int_a^b \langle T,T\rangle^{-\frac{1}{2}} V\langle T,T\rangle dt\\ &= \frac{1}{2}\int_a^b \langle T,T\rangle^{-\frac{1}{2}}\, 2\langle \nabla_V T, T\rangle dt\\ &= \int_a^b \langle T,T\rangle^{-\frac{1}{2}}\langle \nabla_V T, T\rangle dt.\end{aligned}$$

Como $[T,V] = 0$ em $[a,b] \times (-\varepsilon,\varepsilon)$, podemos escrever isto da seguinte forma:

$$\frac{d}{ds}\mathrm{L}[c_s] = \int_a^b \langle T,T\rangle^{-\frac{1}{2}}\langle \nabla_T V, T\rangle dt.$$

Esta fórmula é conhecida como a fórmula da **Primeira Variação do Comprimento de Arco**

Como $\|c_0'\| = l$, podemos trabalhar um pouco mais com a fórmula acima:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\mathrm{L}[c_s]|_{s=0} &= \frac{1}{l}\int_a^b \langle \nabla_T V, T\rangle dt \\
&= \frac{1}{l}\int_a^b (T\langle V,T\rangle - \langle V, \nabla_T T\rangle)dt \\
&= \frac{1}{l}\int_a^b (\frac{d}{dt}\langle V,T\rangle - \langle V, \nabla_T T\rangle)dt \\
&= \frac{1}{l}(\langle V,T\rangle(b) - \langle V,T\rangle(a)) - \frac{1}{l}\int_a^b \langle V, \nabla_T T\rangle.
\end{aligned}$$

Se todas as curvas $c_s = \alpha|_{[a,b]\times\{s\}}$ têm os mesmos extremos temos que

$c_s(a) = exp_{c_s(a)}(0) = exp_{c_s(a)}(s\cdot 0) \Rightarrow V(a) = 0.$

$c_s(b) = exp_{c_s(b)}(0) = exp_{c_s(b)}(s\cdot 0) \Rightarrow V(b) = 0.$

Portanto

$$\frac{d}{ds}\mathrm{L}[c_s]|_{s=0} = -\frac{1}{l}\int_a^b \langle V, \nabla_T T\rangle.$$

Observação 1.5 . *Se* $\mathrm{c} : [a,b] \to \mathrm{M}$ *é uma geodésica, então :*

$$\nabla_{c'} c' = 0.$$

Portanto,

$$c'\langle c', c'\rangle = 2\langle \nabla_{c'} c', c'\rangle = 0.$$

Isto significa que $\langle c', c'\rangle$ *deve ser constante. Daí,* $\frac{d}{dt}\langle c', c'\rangle = 0$*. Podemos dizer que* $\|c'\| = k \neq 0$ *O comprimento de arco s de* γ*, a partir de uma origem fixa, digamos* $t = t_0$*, é então dado por :*

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|c'(t)\| dt = k(t - t_0).$$

Portanto, o parâmetro de uma geodésica é proporcional ao comprimento de arco.

Quando o parâmetro é o próprio comprimento de arco, isto é $k = 1$*, diremos que a geodésica c está normalizada :* $\|c'(t)\| = 1$.

Passemos agora para a fórmula da **Segunda Variação do Comprimento de Arco**.

Sejam $X = \frac{d\alpha}{ds}(t,0)$, $T = \frac{d\alpha}{dt}(t,0)$ e $c_s = \alpha\mid_{[a,b]\times\{s\}}$. Então já vimos que

$$\mathrm{L}'_X(0) \;=\; \frac{d}{ds}\mathrm{L}[c_s]|_{s=0} = \int_a^b \frac{\langle \nabla_T X, T\rangle}{\|T\|}dt.$$

Derivando novamente obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}''_X(0) &= \frac{d^2}{ds^2}\mathrm{L}[c_s]\\
&= \frac{d}{ds}\int_a^b \frac{\langle \nabla_T X, T\rangle}{\|T\|}dt\\
&= \int_a^b \frac{X\langle \nabla_T X, T\rangle}{\|T\|}dt\\
&= \int_a^b \frac{\langle \nabla_X\nabla_T X, T\rangle + \langle \nabla_T X, \nabla_X T\rangle\cdot\|T\|}{\|T\|^2} - \frac{\langle \nabla_T X, T\rangle\cdot\langle \nabla_X T, T\rangle}{\|T\|^3}dt\\
&= \int_a^b \langle \nabla_X\nabla_T X, T\rangle + \langle \nabla_T X, \nabla_X T\rangle - \langle \nabla_T X, T\rangle\cdot\langle \nabla_X T, T\rangle dt\\
&= \int_a^b \langle \nabla_X\nabla_T X, T\rangle + \langle \nabla_T X, \nabla_T X\rangle - \langle \nabla_T X, T\rangle\cdot\langle \nabla_T X, T\rangle dt\\
&= \int_a^b \langle R(X,T)X, T\rangle + \langle \nabla_T\nabla_X X, T\rangle + \langle \nabla_T X, \nabla_T X\rangle - \langle \nabla_T X, T\rangle\cdot\langle \nabla_T X, T\rangle dt\\
&= \int_a^b -\langle R(X,T)T, X\rangle + T\langle \nabla_X X, T\rangle + \langle \nabla_T X, \nabla_T X\rangle - \langle \nabla_T X, T\rangle\cdot\langle \nabla_T X, T\rangle dt\\
&= \langle \nabla_X X, T\rangle|_a^b + \int_a^b \langle \nabla_T X, \nabla_T X\rangle - \langle R(X,T)T, X\rangle - \langle \nabla_T X, \nabla_T X\rangle\cdot\langle T, T\rangle dt\\
&= \langle \nabla_X X, T\rangle(b) - \langle \nabla_X X, T\rangle(a) - \int_a^b \langle R(X,T)T, X\rangle dt\\
&= \langle \nabla_X X, T\rangle(b) - \langle \nabla_X X, T\rangle(a) - \int_a^b K(T,X)dt.
\end{aligned}$$

Onde $K(T,X)$ representa a curvatura seccional gerada pelo plano determinado pelos vetores T,X.

Proposição 1.5 . *Sejam N e $\overline{N}$ duas variedades de M sem bordo, e seja $\gamma : [0,t] \to M$ uma geodésica tal que $\gamma(0) \in N$, $\gamma(t) \in \overline{N}$, γ a curva mais curta de N para $\overline{N}$. Então $\gamma'(0)$ é perpendicular a $N_{\gamma(0)}$, e $\gamma'(t)$ é perpendicular a $\overline{N}_{\gamma(t)}$.*

Prova. Se $\gamma'(0)$ não é perpendicular a $N_{\gamma(0)}$, escolha $x \in N_{\gamma(0)}$ tal que $\langle \gamma'(0), x\rangle > 0$, e seja c uma curva em N partindo de $\gamma(0)$ tal que $c'(0) = x$.

Construa uma variação $\alpha : [0,t]\times(-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ tal que $\alpha|_{[0,t]\times\{0\}} = \gamma$, $\alpha(0,s) = c(s)$, $\alpha(t,s) \equiv \gamma(t)$. Então, se $\gamma_s = \alpha|_{[0,t]\times\{s\}}$, então pela fórmula da primeira variação do comprimento de arco, temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\mathrm{L}[\gamma_s]|_{s=0} &= -\frac{1}{l}(\langle c'(t),\gamma'(t)\rangle - \langle c'(0),\gamma'(0)\rangle \\ &= -\frac{1}{l}\langle\gamma'(0),x\rangle \\ &< 0.\end{aligned}$$

Portanto, para todo s pequeno no intervalo $(0,\varepsilon)$, $\mathrm{L}[\gamma_s] < \mathrm{L}[\gamma]$, e γ não é mínima.□

1.4 Fórmulas Auxiliares

Definição 1.10 . *Seja $\gamma : [0,a] \to M$ uma geodésica. Um campo diferenciável de vetores ao longo de γ é um* ***campo de Jacobi*** *se J satisfizer a* ***equação de jacobi***

$$\frac{D^2J}{dt^2} + R(J,\gamma')\gamma' = 0, \forall t \in [0,a].$$

Aqui, salvo menção em contrário, iremos considerar $\langle J,\gamma'\rangle = 0$.

Definição 1.11 . *Seja $\gamma : [0,a] \to M$ uma geodésica. O ponto $\gamma(t_0)$ é* ***conjugado*** *a $\gamma(0)$ ao longo de γ, $t_0 \in (0,a]$, se existe um campo de Jacobi J, não nulo, ao longo de γ tal que $J(t_0) = J(0) = 0$.*

O número máximo de tais campos linearmente independentes é a **multiplicidade** de $\gamma(t_0)$(conjugado a $\gamma(0)$).

Definição 1.12 . *Uma variedade Riemanniana M é (geodesicamente)* ***completa*** *se para todo $p \in M$, a aplicação exponencial exp_p, está definida para todo $v \in T_pM$, isto é, se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.*

Definição 1.13 . *Seja M uma variedade riemanniana, $\gamma : [0,a] \to M$ uma geodésica e ν o espaço vetorial dos campos diferenciáveis por partes ao longo de γ. A* ***forma do índice*** *ao longo de γ é a forma bilinear simétrica $I_a : \nu \times \nu \to \mathbb{R}$ dada por*

$$I_a(V,W) = \int_0^a \{\langle V',W'\rangle - \langle R(\gamma',V)\gamma',W\rangle\}dt$$

onde $V,W \in \nu$.

Teorema 1.1 ***(Lema do índice).*** *Seja M uma variedade riemanniana e tal que $\gamma : [0,a] \to M$ uma geodésica tal que $\gamma(t)$ não é conjugado a $\gamma(0)$ ao longo de γ, para todo $0 < t \leq a$. Se V é* *um campo diferenciável por partes e J um campo de Jacobi ao longo de γ, com $V(0) = J(0) = 0$ e $V(t_0) = J(t_0)$ para algum $0 < t_0 \leq a$, então*

$$I_{t_0}(V,V) \geq I_{t_0}(J,J),$$

ocorrendo a igualdade se e só se $V(t) = J(t)$, para $0 \leq t \leq t_0$

<u>**Prova**</u>. Para uma prova, ver [CARMO 2008].

Vamos agora, calcular o Hessiano de $f = g \circ \varphi$ como segue.

Seja $\varphi : M \hookrightarrow N$ uma imersão isométrica onde M e N são Variedades Riemannianas Completas. Considere uma função diferenciável $g : N \to \mathbb{R}$ e a composição $f = g \circ \varphi : M \to \mathbb{R}$. Identificando X com $d\varphi_q(X)$, onde $q \in M$ e para todo $X \in T_qM$, temos que:

$$\langle \mathrm{grad} f, X\rangle = X(f) = df(X) = d(g \circ \varphi)(X) = X(g \circ \varphi) = X(g) = \langle \mathrm{grad} g, X\rangle.$$

pois

$$\mathrm{grad} g = \mathrm{grad} f + \mathrm{grad} g^{\perp}.$$

Consideremos agora ∇^M e ∇^N as conexões de M e N respectivamente, e sejam $\alpha(q)(X,Y)$ e $\mathrm{Hess} f(q)(X,Y)$, respectivamente a segunda forma fundamental da imersão φ e o Hessiano de f em $q \in M$, com $X, Y \in T_qM$. Temos então para $q \in M$ e para quaisquer $X, Y \in T_qM$ que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}_M f(q)(X,Y) &= \langle \nabla^M_X \mathrm{grad} f, Y\rangle_q \\
&= \langle (\nabla^N_X(\mathrm{grad} g - (\mathrm{grad} g)^{\perp}))^{\top}, Y\rangle_{\varphi(q)} \\
&= \langle (\nabla^N_X \mathrm{grad} g)^{\top}, Y\rangle_{\varphi(q)} - \langle (\nabla^N_X(\mathrm{grad} g)^{\perp})^{\top}, Y\rangle_{\varphi(q)} \\
&= \langle (\nabla^N_X \mathrm{grad} g)^{\top}, Y\rangle_{\varphi(q)} \\
&= X\langle \mathrm{grad} g, Y\rangle_{\varphi(q)} - \langle \mathrm{grad} g, (\nabla^N_X Y)^{\top}\rangle_{\varphi(q)} \\
&= X\langle \mathrm{grad} g, Y\rangle_{\varphi(q)} - \langle \mathrm{grad} g, \nabla^N_X Y - (\nabla^N_X Y)^{\perp}\rangle_{\varphi(q)} \\
&= X\langle \mathrm{grad} g, Y\rangle_{\varphi(q)} - \langle \mathrm{grad} g, \nabla^N_X Y\rangle_{\varphi(q)} + \langle \mathrm{grad} g, (\nabla^N_X Y)^{\perp}\rangle_{\varphi(q)} \\
&= \langle \nabla^N_X \mathrm{grad} g, Y\rangle_{\varphi(q)} + \langle \mathrm{grad} g, (\nabla^N_X Y)^{\perp}\rangle_{\varphi(q)} \\
&= \mathrm{Hess}_N\, g(\varphi(q))(X,Y) + \langle \mathrm{grad} g, \alpha(X,Y)\rangle_{\varphi(q)}.
\end{aligned}$$

Tomando o traço na fórmula acima em relação a uma base ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ de T_qM, obtemos que :

$$
\begin{aligned}
\triangle f(q) &= \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Hess} f(q)(e_i, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Hess}\, g(\varphi(q))(e_i, e_i) + \langle \mathrm{grad} g, \sum_{i=1}^{m} \alpha(e_i, e_i) \rangle,
\end{aligned}
$$

onde o vetor curvatura média é dado por : $\overrightarrow{H}_M = \sum_{i=1}^{m} \alpha(e_i, e_i)$.

Capítulo 2

O Teorema de Comparação do Hessiano

Conteúdo

2.1 O Hessiano da Função Distância

Definição 2.1 . *Seja M uma variedade Riemanniana completa. Dados $x \in M$ e $v \in T_xM$ unitário, seja $\gamma_v : [0,\infty) \to M$ o raio geodésico normalizado $\gamma_v(t) = exp_x(tv)$. Se o conjunto dos pontos $t \in (0,\infty)$ tais que γ_v é minimizante em [0,t] for um intervalo da forma $[0,t_0]$, dizemos que $\gamma_v(t_0)$ é o* ***ponto de mínimo*** *de x na direção de v. O* ***cut locus*** *Cut(x) de x em M é definido como o conjunto dos pontos mínimos de x em M(em alguma direção).*

Definindo

$$E_x = \{v \in T_xM; exp_x(tv) \in M \backslash Cut(x), \forall\, 0 \leq t \leq 1\}$$

temos

Proposição 2.1 . *$exp_x : E_x \to M \backslash Cut(x)$ é um difeomorfismo.*

Prova. Para uma prova, ver [CARMO 2008]

Observação 2.1 . *Fixado* $x \in M$ *denotaremos por* $\rho_M : M \backslash (Cut(x) \bigcup \{x\}) \to \mathbb{R}^*_+$ *a função distância a partir de x, isto é,* $\rho_M(x_0) = dist_M(x, x_0)$ *onde* $Cut(x)$ *é o Cut Locus de x.*

Proposição 2.2 . *Seja* $\gamma : [0,a] \to M \backslash Cut(x)$ *uma geodésica normalizada partindo de x. Então:*

$$grad\,\rho(\gamma(t)) = \gamma'(t), \forall 0 < t < a.$$

Em particular, $|grad\,\rho| = 1$.

<u>**Prova**</u>. Seja $\gamma(t) = exp_x(tv)$,$0 \le t \le a$, e $x = \gamma(t_0)$. Se $w \in T_xM$, $w \perp \gamma'(t_0)$, segue da proposição anterior e do Lema de Gauss a existência de $W \in T_v(T_xM)$ tal que $\langle W, v\rangle = 0$ e $dexp_{t_0 v} W = w$. Tomemos então $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to E_x$ tal que $|\alpha(s)| = t_0$, $\alpha(0) = t_0 v$ e $\alpha'(0) = W$. Segue da unicidade da geodésica minimizante que liga $exp_x(\alpha(s))$ a x que

$$\rho(exp_x(\alpha(s))) = t_0,$$

e daí que

$$0 = \langle \nabla\rho(x), (dexp_x)_{t_0 v} W\rangle = \langle \nabla\rho(x), w\rangle.$$

Como a igualdade acima é válida para todo $w \perp \gamma'(t_0)$, segue que $\nabla\rho(x)$ é um mútiplo de $\gamma'(t_0)$. Mas desde que $\rho(\gamma(t)) = t$ para $0 \le t \le a$, temos:

$$\langle \nabla\rho(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle = 1, \forall 0 < t \le a,$$

e daí $\nabla\rho(\gamma(t)) = \gamma'(t)$ para $0 < t \le a$. $\square$

Agora fixemos um ponto $x_0 \in M$. Seja $x \in M \backslash Cut(x_0)$ e consideremos γ uma geodésica minimizante $\gamma : [0, \rho(x)] \to M$ ligando x a x_0, parametrizada pela distância. Seja $J \in T_xM$ tal que $\langle J, \gamma'\rangle(x) = 0$. Como x não é ponto conjugado de x_0, podemos estender J a um campo de jacobi $\widetilde{J}$ ao longo de γ satisfazendo $\widetilde{J}(x_0) = 0$, $\widetilde{J}(x) = J$ e $[\widetilde{J}, \gamma'] = 0$.

Pela proposição anterior temos que $\gamma' = grad\,\rho$ e temos também que $[\widetilde{J}, grad\,\rho] = 0$. Portanto

$$\nabla_{\widetilde{J}}\, grad\,\rho = \nabla_{grad\,\rho} \widetilde{J}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}\rho(x)(X,X) &= \langle \nabla_{\widetilde{J}} grad\,\rho, \widetilde{J}\rangle \\
&= \langle \nabla_{grad\,\rho}\widetilde{J}, \widetilde{J}\rangle \\
&= \int_0^{\rho} \frac{d}{dt}\langle \nabla_{grad\,\rho}\widetilde{J}, \widetilde{J}\rangle dt \\
&= \int_0^{\rho} (\langle \nabla_{grad\,\rho}\widetilde{J}, \nabla_{grad\,\rho}\widetilde{J}\rangle + \langle \widetilde{J}, \nabla_{grad\,\rho}\nabla_{grad\,\rho}\widetilde{J}\rangle)dt \\
&= \int_0^{\rho} \{|\nabla_{grad\,\rho}\widetilde{J}|^2 + \langle \widetilde{J}, \nabla_{grad\,\rho}\nabla_{grad\,\rho}\widetilde{J}\rangle\}dt
\end{aligned}$$

Como $\widetilde{J}$ é um campo de jacobi, temos:

$$\nabla_{grad\,\rho}\nabla_{grad\,\rho}\widetilde{J} + R(\widetilde{J}, grad\,\rho)grad\,\rho = 0.$$

Portanto temos que:

$$\mathrm{Hess}\rho(x)(X,X) = \int_0^{\rho} (|\nabla_{grad\,\rho}\widetilde{J}|^2 - \langle \widetilde{J}, R(\widetilde{J}, grad\,\rho)grad\,\rho\rangle)dt,$$

onde R é a curvatura da Variedade Riemanniana M e o segundo membro acima é a forma do índice.

Podemos então escrever:

$$\mathrm{Hess}\rho(x)(X,X) = \int_0^{\rho} (\langle \widetilde{J}', \widetilde{J}'\rangle - \langle R(\widetilde{J}, \gamma'), \widetilde{J}\rangle)dt$$

Então reescrevendo de forma mais suscinta:

Observação 2.2 . *Tomemos $J \in T_xM$ e extenda-o a um campo de jacobi $\widetilde{J}$ ao longo de γ tal que $\widetilde{J}(x_0) = 0$, $\widetilde{J}(x) = J$, com $\langle \widetilde{J}, \gamma'\rangle = 0$. Dessa forma o Hessiano de $\rho_M(x)$ é dado por*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}\rho(x)(X,X) &= I_{\rho}(\widetilde{J}, \widetilde{J}) \\
&= \int_0^{\rho} (\langle \widetilde{J}', \widetilde{J}'\rangle - \langle R(\widetilde{J}, \gamma')\gamma', \widetilde{J}\rangle)dt \\
&= \int_0^{\rho} (\langle \nabla_{\gamma'}\widetilde{J}, \nabla_{\gamma'}\widetilde{J}\rangle - \langle R(\gamma', \widetilde{J})\gamma', \widetilde{J}\rangle)dt \\
&= \int_0^{\rho} (|\nabla_{\gamma'}\widetilde{J}|^2 - \langle R(\gamma', \widetilde{J})\gamma', \widetilde{J}\rangle dt.
\end{aligned}$$

Dessa forma, podemos agora calcular o Hessiano da função distância das Variedades

Riemannianas completas de curvatura seccional k. Consideremos

$$S_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{k}\sin(k.t),\, se\, SupK = k^2 \\ t,\, se\, SupK = 0 \\ \frac{1}{k}\sinh(k.t),\, se\, SupK = -k^2 \end{cases}$$

Defina $f(t) = \frac{S_k(t)}{S_k(\rho(x))}$. Veja que f satisfaz a equação de Jacobi

$$\begin{cases} \frac{d^2f}{dt^2} + k \cdot f = 0 \\ f(0) = 0, f(\rho(x)) = 1 \end{cases}$$

Os campos de Jacobi ao longo de $\gamma : [0, \rho(x)] \to M$, com $\langle \widetilde{J}, \gamma' \rangle = 0$ são dados por

$$\widetilde{J}(t) = f(t) \cdot X(t)$$

onde X é um campo de vetores paralelo ao longo de γ tal que $\|X(t)\| = 1$, $X(0) = X$. Substituindo o campo $\widetilde{J}(t) = f(t) \cdot X(t)$ na equação obtida na observação 2.2, obtemos

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}\rho(x)(X,X) &= \int_0^\rho (\langle \widetilde{J}', \widetilde{J}' \rangle - \langle R(\widetilde{J}, \gamma'), \widetilde{J} \rangle) dt \\ &= \int_0^\rho \langle f'(t)X(t), f'(t)X(t) \rangle - \langle R(f(t)X(t), \gamma')\gamma', f(t)X(t) \rangle dt \\ &= \int_0^\rho (\|f'(t)\|^2 - \langle R(X(t), \gamma')\gamma', X(t) \rangle f^2(t)) dt \\ &= \int_0^\rho (\|f'(t)\|^2 - K \cdot f^2(t)) dt \\ &= \begin{cases} k \cdot cot(k \cdot \rho(x)), se\, SupK = k^2 \\ \frac{1}{\rho(x)}, se\, SupK = 0 \\ k \cdot coth(k \cdot \rho(x)), se\, SupK = -k^2 \end{cases} \end{aligned}$$

2.2 O Teorema de Comparação do Hessiano

Para a demonstração do Teorema de Comparação do Hessiano, precisaremos do Teorema abaixo:

Teorema 2.1 ***(Rauch)****. Sejam M^n e $\widetilde{M^m}$, $m \geq n$, variedades Riemannianas, $\gamma : [0, a] \to M^n$ e $\widetilde{\gamma} : [0, a] \to \widetilde{M^m}$ geodésicas com mesma velocidade escalar e tais que*

i. *$\widetilde{\gamma}(t)$ não é conjugado a $\widetilde{\gamma}(0)$, ao longo de $\widetilde{\gamma}$, $\forall\, 0 < t \leq a$.*

ii. *$K_M(\gamma'(t),X) \leq K_{\widetilde{M}}(\widetilde{\gamma}'(t),\widetilde{X})$, $\forall\, X \in T_{\gamma(t)}M, \widetilde{X} \in T_{\widetilde{\gamma}(t)}\widetilde{M}$, respectivamente perpendiculares a $\gamma'(t)$ e $\widetilde{\gamma}'(t)$.*

Então:

*(**a**). $\frac{|J(t)|}{|\widetilde{J}(t)|}$ é uma função não-decrescente de $t \in (0,a]$*

*(**b**). $\langle J',J\rangle \geq \frac{|J|^2}{|\widetilde{J}|^2}\langle \widetilde{J}',\widetilde{J}\rangle$, $t \in (0,a]$.*

<u>**Prova**</u>. Ver [CARMO 2008].

Observação 2.3 . *Veja que*

$$
\begin{aligned}
I_\rho(\widetilde{J},\widetilde{J}) &= \int_0^\rho (\langle \widetilde{J}',\widetilde{J}'\rangle - \langle R(\widetilde{J},\gamma')\gamma',\widetilde{J}\rangle)dt \\
&= \int_0^\rho (\langle \widetilde{J}',\widetilde{J}'\rangle - \langle \widetilde{J}'',\widetilde{J}\rangle)dt \\
&= \int_0^\rho \frac{d}{dt}\langle \widetilde{J}',\widetilde{J}\rangle dt \\
&= \langle \widetilde{J}',\widetilde{J}\rangle|_o^\rho.
\end{aligned}
$$

Logo podemos escrever:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hess}\rho(x)(X,X) &= I_\rho(\widetilde{J},\widetilde{J}) \\
&= \langle \widetilde{J}',\widetilde{J}\rangle|_o^\rho.
\end{aligned}
$$

Podemos agora enunciar o Teorema de Comparação do Hessiano.

Teorema 2.2 *(**O Teorema de Comparação do Hessiano**). Sejam M^n e $\widetilde{M^n}$ variedades Riemannianas completas e $\gamma : [0,a] \to M$ e $\widetilde{\gamma} : [0,a] \to \widetilde{M}$ geodésicas normalizadas que não intersectam respectivamente $Cut(\gamma(0))$ e $Cut(\widetilde{\gamma}(0))$. Se*

$$K_M(\gamma'(t),X) \leq K_{\widetilde{M}}(\widetilde{\gamma}'(t),\widetilde{X}),$$

para todos $t \in [0,a]$, $X \in T_{\gamma(t)}M$ e $\widetilde{X} \in T_{\widetilde{\gamma}(t)}\widetilde{M}$, ortogonais respectivamente a $\gamma'(t)$ e $\widetilde{\gamma}'(t)$, e ρ e $\widetilde{\rho}$ denotam respectivamente as funções distância em M e em $\widetilde{M}$ a partir de $\gamma(0)$ e $\widetilde{\gamma}(0)$, então, para $0 < t \leq a$, tem-se:

$$(\mathrm{Hess}\rho)_{\gamma(t)}(X,X) \geq (\mathrm{Hess}\widetilde{\rho})_{\widetilde{\gamma}(t)}(\widetilde{X},\widetilde{X}),$$

para quaisquer $X \in T_{\gamma(t)}M$ e $\widetilde{X} \in T_{\widetilde{\gamma}(t)}\widetilde{M}$, unitários e ortogonais respectivamente a $\gamma'(t)$ e $\widetilde{\gamma}'(t)$.

Prova. Fixe $0 < t \leq a$. Assim temos:

$$(\text{Hess}\rho)_{\gamma(t_0)}(X,X) = \langle J', J\rangle(t_0),$$

onde J é o campo de jacobi ao longo de γ tal que $J(0) = 0$ e $J(t_0) = X$. Note que em particular temos que $\langle J, \gamma'\rangle = 0$ em $[0,t_0]$.

Analogamente,

$$(\text{Hess}\widetilde{\rho})_{\widetilde{\gamma}(t_0)}(\widetilde{X},\widetilde{X}) = \langle \widetilde{J}', \widetilde{J}\rangle(t_0),$$

onde $\widetilde{J}$ é o campo de jacobi ao longo de $\widetilde{\gamma}$ tal que $\widetilde{J}(0) = 0$ e $\widetilde{J}(t_0) = \widetilde{X}$, com $\langle \widetilde{J}, \widetilde{\gamma}'\rangle = 0$.

Agora, como $\widetilde{\gamma}$ não encontra $Cut(\widetilde{\gamma}(0))$ em $(0,t_0]$, ($\widetilde{\gamma}$ não encontra o conjunto dos pontos mínimos de $\widetilde{\gamma}$ em $(0,t_0]$), temos que $\widetilde{\gamma}(t)$ não é conjugado a $\widetilde{\gamma}(0)$ ao longo de $\widetilde{\gamma}$, para $0 < t \leq a$. Portanto, segue do Teorema de Rauch que

$$\begin{aligned}
(\text{Hess}\rho)_{\gamma(t_0)}(X,X) &= \langle J', J\rangle(t_0) \\
&\geq \frac{|J|^2}{|\widetilde{J}|^2}\langle \widetilde{J}', \widetilde{J}\rangle(t_0) \\
&= \frac{|X|^2}{|\widetilde{X}|^2}(\text{Hess}\widetilde{\rho})_{\widetilde{\gamma}(t_0)}(\widetilde{X},\widetilde{X}) \\
&= (\text{Hess}\widetilde{\rho})_{\widetilde{\gamma}(t_0)}(\widetilde{X},\widetilde{X}).
\end{aligned}$$

Para o que segue precisaremos da seguinte versão do Teorema de Comparação do Hessiano:

Corolário 2.1 . *Seja M uma variedade Riemanniana Completa e seja ρ a função distância em M a partir de x_0. Seja γ uma geodésica minimizante partindo de x_0 e suponha que a curvatura seccional radial de M ao longo de γ satisfaz $K_\gamma \leq k$. Então o Hessiano de ρ em $\gamma(t)$ satisfaz:*

$$\text{Hess}\rho(x)(X,X) \geq \mu(\rho).\|X\|^2,$$

onde $\mu(\rho) = \frac{S'_k}{S_k}(\rho(x))$.

Prova. Sejam $X \in T_{\gamma(\rho)}M$ e $X \perp \gamma'(\rho)$. Denotemos por $X(t)$ o campo de vetores obtido pela extensão paralela de X ao longo de γ.

Consideremos

$$S_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{k}\sin(k.t),\ se\ SupK = k^2 \\ t,\ se\ SupK = 0 \\ \frac{1}{k}\sinh(k.t),\ se\ SupK = -k^2 \end{cases}$$

Os campos de jacobi $\widetilde{X}(t)$ ao longo de $\gamma : [0,\rho(x)] \to M$ com $\widetilde{X}(0) = 0$, $\widetilde{X}(\rho) = X$ e $\langle \widetilde{X}, \gamma' \rangle = 0$ são dados por

$$\widetilde{X}(t) = f(t)X(t),$$

onde $f(t) = \frac{S_k(t)}{S_k(\rho(x))}$. Veja que f satisfaz a equação de Jacobi

$$\begin{cases} \frac{d^2f}{dt^2} + k \cdot f = 0 \\ f(0) = 0, f(\rho(x)) = 1. \end{cases}$$

Seja $\{\frac{\partial}{\partial\gamma}, X_1, ..., X_{n-1}\}$ uma base ortonormal de $T_{\gamma(\rho)}M$ e paralela ao longo de γ. Então substituindo o campo de jacobi $\widetilde{X}_i = f(t)X_i(t)$ com $X_i(0) = 0$, $\widetilde{X}_i(\gamma(\rho)) = X_i$ e $|X_i| = 1$ na expressão obtida na observação 2.2, temos que:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}(\rho)(X_i, X_i) &= \int_0^\rho (|\frac{\partial}{\partial\gamma}\widetilde{X}_i|^2 - \langle R(\widetilde{X}_i, \frac{\partial}{\partial\gamma})\frac{\partial}{\partial\gamma}, \widetilde{X}_i\rangle)dt \\ &= \int_0^\rho (|\frac{\partial}{\partial\gamma}f(t)X_i|^2 - f(t)^2\langle R(X_i, \frac{\partial}{\partial\gamma})\frac{\partial}{\partial\gamma}, X_i\rangle)dt \\ &= \int_0^\rho (|\frac{\partial f(t)}{\partial t}|^2 - K_\gamma f(t)^2)dt \\ &= \begin{cases} k \cdot cot(k \cdot \rho(x)), se\, Sup\ K = k^2 \\ \frac{1}{\rho(x)}, se\, Sup\ K = 0 \\ k \cdot coth(k \cdot \rho(x)), se\, Sup\ K = -k^2 \end{cases} \end{aligned}$$

A desigualdade segue diretamente do teorema de Comparação do Hessiano que acabamos de demonstrar.

Capítulo 3

Teorema Principal

Conteúdo

3.1 Resultados Importantes

Nesta sessão mostraremos notações e resultados que serão utilizados na demostração do teorema principal.

Teorema 3.1 ***(Fórmula de Green)****. Sejam* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* $C^2(M)$ *e* $h : M \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* $C^1(M)$*, pelo menos uma delas com suporte compacto. Então:*

$$\int_M \{h\triangle f + \langle \mathrm{grad}\, h, \mathrm{grad} f\rangle\} dV = 0.$$

Se ambas são de classe $C^2(M)$*, então*

$$\int_M \{h\triangle f - f\triangle h\} dV = 0.$$

Prova: Para uma prova ver [SAKAI 1995].

Definição 3.1 . *Seja* $\mathscr{F}(N \times \mathbb{R})$ *o conjunto de todas as H-hipersuperfícies fechadas* $M \subset N \times$

$\mathbb{R}$, *onde N é uma variedade riemanniana simplesmente conexa de dimensão n com curvatura seccional $K_N \leq -k^2$. Então definimos o número $\boldsymbol{h}(N\times\mathbb{R})$ por:*

$$\boldsymbol{h}(N\times\mathbb{R}) = inf_{M\in\mathscr{F}(N\times\mathbb{R})}\{|H_M|\}.$$

Seja $\varphi : M \hookrightarrow N$ uma imersão própria de uma variedade m-dimensional M em uma variedade riemanniana completa N de dimensão n. Definimos a bola extrínseca de raio R centrada em p denotada por $D_R(p)$ como sendo a componente conexa diferenciável de $\varphi(M)\cap B_N(R) = \{q \in \varphi(M); dist(p,q) \leq R\}$ contendo p, onde $B_N(R)$ denota a bola geodésica em N centrada em $p = \varphi(p)$ sujeita a restrição de que $R \leq inf\{i_N(p), \frac{\pi}{2\sqrt{k}}\}$, onde k é o supremo das curvaturas seccionais de N e $i_N(p) = inf\, d(p, Cut(p))$ é o raio de injetividade de N em p.

Observe que $D_R(p)$ é um domínio compacto e conexo em $\varphi(M)$.

Seja $\varphi : M \hookrightarrow N\times\mathbb{R}$ uma imersão de uma variedade m-dimensional M na variedade produto $N\times\mathbb{R}$ onde N é uma variedade riemanniana completa com curvatura seccional $K_N \leq c \leq 0$. Seja $K \subset \varphi(M)$ um conjunto compacto conexo. Definimos o raio extrínseco por $R_{p_1} = raio(p_1(K))$, o raio do conjunto $p_1(K)$, isto é o raio da menor bola métrica de N contendo $p_1(K)$, onde $p_1 : N\times\mathbb{R} \to N$ é a projeção sobre o primeiro fator.

Em [Frankel 1966], Frankel prova que para duas hipersuperfícies, uma fechada e a outra propriamente imersa em uma variedade riemanniana completa com curvatura de Ricci positiva se intersectam. Este resultado tem uma versão para $N\times\mathbb{R}$ onde N tem curvatura seccional positiva. vejamos:

Teorema 3.2 . *Seja N uma variedade riemanniana completa com curvatura seccional positiva. Sejam M_1 e M_2 hipersuperfícies mínimas imersas em $N\times\mathbb{R}$, onde M_1 é fechada e M_2 é própria. Então (por uma translação vertical)elas se intersectam, isto é, $p_1(M_1)\cap p_1(M_2) \neq \emptyset$.*

Prova. Sejam M_1 e M_2 hipersuperfícies de $N\times\mathbb{R}$, onde N tem curvatura de Ricci positiva, M_1 é fechada e M_2 é própria.

Suponha que $p_1(M_1)\cap p_1(M_2) = \emptyset$, onde $p_1 : N\times\mathbb{R} \to N$ é a projeção sobre o primeiro fator.

Seja γ uma geodésica ligando $a \in M_1$ a $b \in M_2$ de comprimento positivo realizando a distância l entre M_1 e M_2.

Pela proposição (1.5), esta geodésica chega a M_1 e a M_2 perpendicularmente a a e b respectivamente.

Seja $X(0) \in T_aM_1$ um vetor unitário e $X(t)$ seu transporte paralelo ao longo de γ. Este vetor dá origem a uma variação de γ mantendo os extremos fixos sobre M_1 e M_2.

Pela fórmula da segunda variação do comprimento de arco, temos:

$$L''_X(0) = B_2(X(l),X(l)) - B_1(X(0),X(0)) - \int_0^l K(X \wedge T)dt,$$

onde B_1 e B_2 são os operadores forma de M_1 e M_2 respectivamente.

Tomando uma base ortonormal $\{X^1,...,X^n\}$ de T_aM_1 temos

$$\sum_{i=1}^n L''_{X^i}(0) = -\int_0^l Ric_{N\times\mathbb{R}}(\gamma'(t)).$$

Veja que $\gamma'(t) = \gamma'_N(t) + \gamma'_{\mathbb{R}}(t)$ tem componente horizontal $\gamma'_N(t) \neq 0$ (pois γ_N é não constante) para cada $t \in I$, I intervalo de medida positiva, $I \subset [0,l]$.

Calculando a curvatura de Ricci de $N \times \mathbb{R}$ na direção de $\gamma'(t)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
Ric_{N\times\mathbb{R}}(\gamma'(t)) &= \sum_{i=1}^n \langle R(\gamma'_{\mathbb{R}} + \gamma'_N, X^i)X^i, \gamma'_{\mathbb{R}} + \gamma'_N\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle R(\gamma'_{\mathbb{R}}, X^i)X^i, \gamma'_{\mathbb{R}} + \gamma'_N\rangle + \langle R(\gamma'_N, X^i)X^i, \gamma'_{\mathbb{R}} + \gamma'_N\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle R(\gamma'_{\mathbb{R}}, X^i_N)X^i_N, \gamma'_{\mathbb{R}}\rangle + \langle R(\gamma'_{\mathbb{R}}, X^i_N)X^i_N, \gamma'_N\rangle + \langle R(\gamma'_N, X^i_N)X^i_N, \gamma'_{\mathbb{R}}\rangle + \langle R(\gamma'_N, X^i_N)X^i_N, \gamma'_N\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle R(\frac{\gamma'_N}{|\gamma'_N|}, \frac{X^i_N}{|X^i_N|})\frac{X^i_N}{|X^i_N|}, \frac{\gamma'_N}{|\gamma'_N|}\rangle \cdot |\gamma'_N|^2 \cdot |X^i_N|^2
\end{aligned}$$

Veja que $\gamma'_{\mathbb{R}}$ e $X^i_{\mathbb{R}}$ são múltiplos.

Portanto,

$$Ric_{N\times\mathbb{R}}(\gamma'(t)) = \sum_{i=1}^n K_N[(\frac{X^i_N}{|X^i_N|}) \wedge (\frac{\gamma'_N}{|\gamma'_N|})] \cdot |\gamma'_N|^2 \cdot |X^i_N|^2 > 0, se\, K_N > 0.$$

Consequentemente, $\sum_{i=1}^n L''_{X^i}(0) < 0$, contradizendo o fato de que γ tem comprimento mínimo.(Se $\sum_{i=1}^n L''_{X^i}(0) \geq 0$, $\forall i$, então a geodésica γ é ponto de mínimo para o funcional comprimento de arco).

Portanto, $p_1(M_1) \cap p_1(M_2) \neq \emptyset$.$\square$

3.2 Teorema Principal

A demonstração do teorema principal deste trabalho depende de uma sequencia de resultados.

Para o que segue, seja $p_1 : N \times \mathbb{R} \to N$ a projeção sobre o primeiro fator e para uma dada hipersuperfície fechada $M \subset N \times \mathbb{R}$, seja $R_{p_1(M)}$ o raio extrínseco do conjunto $p_1(M) \subset N$.

Teorema 3.3 . *Sejam $\varphi : M \hookrightarrow N \times \mathbb{R}$ uma imersão de uma hipersuperfície M fechada de dimensão m com curvatura média limitada $|H_M| \leq H_0$, onde N é uma variedade riemanniana com um polo x_0 e curvaturas seccionais radiais limitadas $K_N \leq c$ e $\rho_N : N \to \mathbb{R}$ a função distância em x_0. Suponha que $p_1(M) \subset B_N(\frac{\pi}{2k})$ se $c = k^2$. Então:*

$$n \cdot |H_0| \geq (n-1) \cdot \mu(R_{p_1(M)}).$$

Prova. Seja $\varphi : M \hookrightarrow N \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica. Considere a função distância $\rho(x) = dist(x_0, x)$ ao polo $x_0 \in N$, $g : N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável dada por $g(x,t) = \rho_N^2(x)$ e defina $f = g \circ \varphi : M \to \mathbb{R}$. Veja que $f \geq 0$ é diferenciável sobre M. Pelo teorema de Green temos que:

$$\int_M f \triangle f + |\text{grad} f|^2 dM = \int_{\partial M} f \frac{\partial f}{\partial \nu} d(\partial M) = 0$$

(pois $\partial M = \emptyset$). ν := normal unitária exterior a M ao longo de ∂M.
Isto implica que existe um subconjunto $\emptyset \neq S \subset M$ tal que para algum ponto $x \in S$ temos $\triangle f < 0$ ($f \geq 0$, $|\text{grad} f|^2 > 0$).

Então se $\{e_1, ..., e_n\}$ é uma base ortonormal de $T_q M$ temos que:

$$\begin{aligned} 0 > \triangle f &= tr(\text{Hess} f)(e_i, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \text{Hess} f(x)(e_i, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \text{Hess} g(\varphi(x))(e_i, e_i) + \langle \text{grad} g, \sum_{i=1}^{n} \alpha(e_i, e_i) \rangle \end{aligned}$$

Escolhamos agora uma base ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ de $T_q M$ do seguinte modo.

Tomemos $\{e_2, ..., e_n\}$ tangentes a esfera $\partial B_N(\rho(x))$ de raio $\rho(x) = \rho_N(\varphi(x))$.
Considerando uma base ortonormal em coordenadas polares para $T_{\varphi(x)} N$,

$\{\text{grad}\,\rho_N, \frac{\partial}{\partial\theta_2}, ..., \frac{\partial}{\partial\theta_n}\}$, temos que a escolha dessa base ortonormal em T_qM é dada por:

$$\begin{cases} e_1 = \langle e_1, \frac{\partial}{\partial t}\rangle \frac{\partial}{\partial t} + \langle e_1, \text{grad}\,\rho_N\rangle \text{grad}\,\rho_N \\ e_j = \frac{\partial}{\partial\theta_j}, j = 2, ..., m. \end{cases}$$

Calculando Hess$g$ obtemos:

$$\begin{aligned} \text{Hess}g(X,X) &= \langle \overline{\nabla}_X \text{grad}g, X\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X(\rho_N \,\text{grad}\rho_N + \rho_N \,\text{grad}\rho_N), X\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X 2\rho_N \,\text{grad}\rho_N, X\rangle \\ &= \langle X(2\rho_N)\text{grad}\rho_N + 2\rho_N \overline{\nabla}_X \text{grad}\rho_N, X\rangle \\ &= \langle 2X(\rho_N)\text{grad}\rho_N + 2\rho_N \overline{\nabla}_X \text{grad}\rho_N, X\rangle \\ &= \langle 2\langle \text{grad}\rho_N, X\rangle \,\text{grad}\rho_N + 2\rho_N \overline{\nabla}_X \text{grad}\rho_N, X\rangle \\ &= 2\langle \text{grad}\rho_N, X\rangle^2 + 2\rho_N \text{Hess}\rho_N(X,X) \end{aligned}$$

Donde temos

$$\text{Hess}g(e_i, e_i) = \begin{cases} 2\langle e_1, \text{grad}\rho_N\rangle^2, se\ i = 1 \\ 2\rho_N \text{Hess}\rho_N(e_i, e_i), se\ i \geq 2 \end{cases}$$

Temos também

$$\langle \text{grad}\, g, \alpha(X,X)\rangle = \langle 2\rho_N \,\text{grad}\rho_N, \alpha(X,X)\rangle = 2\rho_N \langle \text{grad}\rho_N, \alpha(X,X)\rangle.$$

Portanto, para $x \neq x_0 \in S$ temos que

$$\begin{aligned} 0 > \triangle f(x) &= \sum_{i=1}^{n} \text{Hess}g(\varphi(x))(e_i, e_i) + \langle \text{grad}g, \sum_{i=1}^{n} \alpha(e_i, e_i)\rangle \\ &\geq 2\langle e_1, \text{grad}\rho_N\rangle^2 + 2(n-1)\rho_N \text{Hess}\rho_N(e_i, e_i) + 2\rho_N \langle \text{grad}\rho_N, n\overrightarrow{H}_M\rangle \\ &\geq 2\langle e_1, \text{grad}\rho_N\rangle^2 + 2(n-1)\rho_N \text{Hess}\rho_N(e_i, e_i) + 2n\rho_N \langle \text{grad}\rho_N, \overrightarrow{H}_M\rangle \\ &\geq 2\langle e_1, \text{grad}\rho_N\rangle^2 + 2(n-1)\rho_N \text{Hess}\rho_N(e_i, e_i) + 2n\rho_N \langle \text{grad}\rho_N, \overrightarrow{H}_M\rangle - 2n\rho_N |H_0| \\ &\geq 2\langle e_1, \text{grad}\rho_N\rangle^2 + 2(n-1)\rho_N \text{Hess}\rho_N(e_i, e_i) - 2n\rho_N |H_0| \\ &\geq 2(n-1)\rho_N \mu(\rho_N) - 2n\rho_N |H_0| \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$2n\rho_N |H_0| \geq 2(n-1)\rho_N \mu(\rho_N)$$

Portanto

$$\begin{aligned} n|H_0| &\geq (n-1)\mu(\rho_N) \\ &\geq (n-1)\mu(R_{p_1(M)}). \end{aligned}$$

Seja M uma variedade riemanniana e $\Omega \subset M$ um aberto conexo arbitrário. Definimos o **Tom Fundamental** $\lambda^*(\Omega)$ de Ω por:

$$\lambda^*(\Omega) = inf\{\frac{\int_\Omega |\nabla f|^2}{\int_\Omega f^2}, f \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}\} = inf\sum(\Omega),$$

onde $H_0^1(\Omega)$ é o completamento de $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito a norma $\|\varphi\|_{H_0^1}^2 = \int_\Omega \varphi^2 + \int_\Omega |\nabla\varphi|^2$.

De acordo com isso, como $\Sigma(\mathbb{R}^n) = [0,\infty)$ e $\Sigma(\mathbb{H}^n(-k^2)) = [\frac{(n-1)^2k^2}{4}, \infty)$,como podemos ver em [BESSA & MONTENEGRO 2003] temos que $\lambda^*(\mathbb{R}^n) = 0$ e $\lambda^*(\mathbb{H}^n(-k^2)) = \frac{(n-1)^2k^2}{4}$.

Segue dos trabalhos de Barbosa-Kenmotsu-Oshikiri em [BARBOSA, KENMOTSU & O. 1991] e Salavessa em [SALAVESSA 1989], que se um gráfico inteiro de uma função diferenciável $f: \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ tem curvatura média constante H então $|H| \leq \frac{n-1}{n}$. Por outro lado, Bessa e Montenegro em [BESSA & MONTENEGRO 2007] mostraram com o teorema abaixo que hipersuperfícies compactas imersas em $N \times \mathbb{R}$, onde N é uma variedade Riemanniana n dimensional com polo e curvaturas seccionais radiais $K_N \leq -k^2 < 0$, satisfaz $|H| \geq \frac{(n-1)k}{n}$:

Teorema 3.4 . *Seja N uma variedade riemanniana completa de dimensão n com um polo e curvatura seccional radial limitada superiormente $K_N \leq -k^2 < 0\, (k > 0)$. Seja $M \subset N \times \mathbb{R}$ uma imersão de uma hipersuperfície com curvatura média constante H. Então*

$$|H_M| \geq \frac{(n-1)\cdot k}{n} = \frac{2}{n}\sqrt{\lambda^*(\mathbb{H}^n(-k^2))}.$$

Em particular,

$$\boldsymbol{h}(N \times \mathbb{R}) \geq \frac{(n-1)\cdot k}{n}.$$

<u>**Prova**</u>. Pelo teorema anterior, temos que:

$$\begin{aligned} n|H_M| &\geq (n-1)\mu(R_{p_1(M)}) \\ &= (n-1)\cdot k \cdot coth(k \cdot R_{p_1}(M)) \\ &\geq (n-1)\,k. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|H_M| \geq \frac{(n-1)\,k}{n}.$$

Veja agora que como $\mathbf{h}(N\times\mathbb{R}) = inf_{M\in\mathscr{F}(N\times\mathbb{R})}\{|H_M|\}$, e $\frac{(n-1)k}{n} \leq |H_M|$ então segue da definição de ínfimo que

$$\mathbf{h}(N\times\mathbb{R}) \geq \frac{(n-1)\,k}{n}.\square$$

Podemos agora enunciar o nosso resultado principal.

Teorema 3.5 . *Seja N uma variedade riemanniana completa de dimensão n com um polo e curvatura seccional radial limitada superiormente $K_N \leq -k^2 < 0\,(k>0)$. Seja $M\subset N\times\mathbb{R}$ uma hipersuperfície compacta imersa com curvatura média constante H_M. Então:*

$$R_{p_1(M)} \geq coth^{-1}(\frac{n}{(n-1)\cdot k}\cdot|H_M|).$$

Em particular, se $M_i \subset N\times\mathbb{R}$ é uma sequência de hipersuperfícies fechadas imersas com curvaturas médias constantes $H_{M_i} \to \frac{(n-1)\cdot k}{n}$ então o raio extrínseco $R_{p_1}(M_i)\to\infty$.

<u>**Prova**</u>: Pelo teorema anterior temos que

$$n\,|H_M| \quad\geq\quad (n-1)\cdot k\,coth\,(k\cdot R_{p_1(M)})$$

Assim temos:

$$coth\,(k\cdot R_{p_1}(M)) \leq \frac{n\cdot|H_M|}{(n-1)\cdot k}.$$

Como $coth^{-1}$ é uma função decrescente temos que

$$k\cdot R_{p_1(M)} \geq coth^{-1}(\frac{n\cdot|H_M|}{(n-1)\cdot k})$$

Portanto,

$$R_{p_1(M)} \geq \frac{1}{k}coth^{-1}(\frac{n\cdot|H_M|}{(n-1)\cdot k}).$$

Agora, se $M_i\subset N\times\mathbb{R}$ é uma sequência de hipersuperfícies fechadas imersas com curvaturas médias constantes, então temos:

$$R_{p_1(M_i)} \geq \frac{1}{k}coth^{-1}(\frac{n\cdot|H_{M_i}|}{(n-1)\,k}).$$

Fazendo $|H_{M_i}| \to \frac{(n-1)\,k}{n}$, temos que $coth^{-1}(\frac{n\cdot|H_{M_i}|}{(n-1)\,k}) = coth^{-1}(1) = +\infty$.

Portanto, $R_{p_1}(M_i)\to\infty$.

Referências Bibliográficas

BARBOSA, JOÃO LUCAS MARQUES; KENMOTSU, K.; O., OSHIKIRI. Foliations by hypersurfaces with constant mean curvature. **Mathematische Zeitschrift**, v. 207, p. 97–98, 1991.

BESSA, G. PACELLI; MONTENEGRO, J. FÁBIO. Eigenvalue estimates for submanifolds with locally bounded mean curvature. **Annals of Global Analysis and Geometry**, n. 24, p. 279–290, 2003.

BESSA, G. PACELLI; MONTENEGRO, J. FÁBIO. Sobre H-hipersuperfícies compactas de $N \times \mathbb{R}$. **Geometry Dedicata**, v. 127, p. 1–5, 2007.

CARMO, M. P. do. **Geometria Riemanniana**. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 2008.

COSTA, M. S. **Sobre subvariedades com segunda forma fundamental dominada em espaços de Hadamard**. 2007. 44f. Tese (Doutorado) — Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2007.

FRANKEL, T. On the fundamental group of a compact minimal submanifold. **Ann. Math.**, v. 83, p. 68–73, 1966.

SAKAI, T. **Riemannian Geometry**. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1995.

SALAVESSA, I. Graphs with parallel mean curvature. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 107, p. 449–458, 1989.