



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL:**  
**ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL**

**LUIZ ANTONIO TAUMATURGO MORORÓ**

**ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE VIGAS LAMINADAS DE PAREDE**  
**FINA**

**FORTALEZA**  
**2013**

LUIZ ANTONIO TAUMATURGO MORORÓ

ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE VIGAS LAMINADAS DE PAREDE  
FINA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas.

Orientador: Antônio Macário Cartaxo de Melo, D.Sc.

Coorientador: Evandro Parente Junior, D.Sc.

FORTALEZA

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca de Pós-Graduação em Engenharia - BPGE

---

M855a Mororó, Luiz Antonio Taumaturgo.  
Análise não linear geométrica de vigas laminadas de parede fina / Luiz Antonio Taumaturgo  
Mororó. – 2013.

151 f. : il. color., enc. ; 30 cm.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Fortaleza, 2012.

Área de Concentração: Estruturas.

Orientação: Prof. Dr. Antônio Macário Cartaxo de Melo.

Coorientação: Prof. Dr. Evandro Parente Junior.

1. Construção Civil. 2. Materiais compostos. 3. Método dos elementos finitos. I. Título.

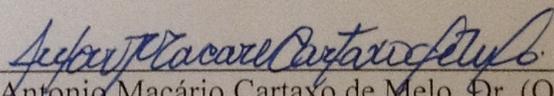
LUIZ ANTÔNIO TAUMATURGO MORORÓ

ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE VIGAS LAMINADAS DE PAREDE FINA

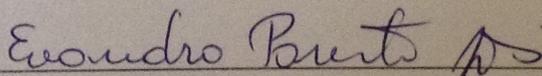
Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil. Área de concentração: Estruturas.

Aprovada em 28 /06 / 2013.

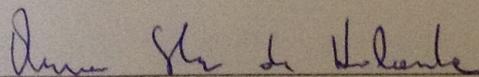
**BANCA EXAMINADORA**



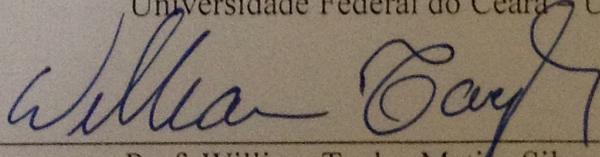
Prof. Antonio Macário Cartaxo de Melo, Dr. (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará – UFC



Prof. Evandro Parente Junior, Dr.  
Universidade Federal do Ceará – UFC



Profa. Áurea Silva de Holanda, Dra.  
Universidade Federal do Ceará – UFC



Prof. William Taylor Matias Silva, Dr.  
Universidade de Brasília

À Deus.

Aos meus pais por todo o amor.

## AGRADECIMENTOS

À DEUS, acima de tudo pela vida, por guiar, proteger e iluminar todos os meus caminhos. Que me dê forças para continuar na busca dos meus objetivos.

Aos meus pais, José Cassimiro Mororó e Rita Gláucia Taumaturgo Mororó, pelo amor que me dedicam, estímulo e apoio nessa longa caminhada.

Às minhas irmãs, Gabriele Taumaturgo Mororó e Isabele Taumaturgo Mororó, pelo apoio e incentivo durante todos estes anos e, principalmente, pelos seus conselhos que contribuíram para a minha formação profissional e pessoal.

À minha namorada, Ana Luisa Martins Ávila, pelo amor, carinho, paciência, por me apoiar em momentos difíceis e responsável por diversos momentos felizes de minha vida desde que a conheci.

Aos professores António Macário Cartaxo de Melo e Evandro Parente Junior, pessoas que tenho como exemplo de capacidade, esforço e honestidade. Obrigado pela orientação, pelos ensinamentos acadêmicos, pessoais e pela amizade desenvolvida durante estes últimos anos.

À professora Áurea Silva de Holanda e ao professor William Taylor Matias Silva por fazerem parte da minha banca.

A todos os meus colegas de laboratório, principalmente, Iuri Barcelos Carneiro Montenegro da Rocha e Rafael Fernandes da Silva, pelo incentivo, pelos momentos de descontração e por me ajudar no desenvolvimento do trabalho.

Aos professores do PEC pelo apoio direto e indireto durante estes anos.

Por fim, aos meus amigos e a todos que de alguma forma desejaram minha obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil.

”Todas as vitórias ocultam uma abdicação”  
*Simone de Beauvoir*

## RESUMO

A utilização de vigas laminadas de parede fina nas Engenharias Aeronáutica, Civil, Mecânica e Naval tem crescido bastante nos últimos anos, devido a suas elevadas relações rigidez/peso e resistência/peso. Esses elementos estruturais normalmente apresentam paredes finas devido à alta resistência dos materiais compósitos. Outra característica importante é que, mesmo sem apresentar grandes deformações e sem que o limite elástico do material seja ultrapassado, estas vigas apresentam comportamento não linear geométrico devido à sua elevada esbelteza, acarretando em grandes deslocamentos e rotações. Dependendo da laminação utilizada, as vigas de materiais compósitos podem apresentar diversos acoplamentos entre esforços e deformações, tornando a sua análise bem mais complexa do que a análise de vigas de material isotrópico. Neste trabalho, foram desenvolvidos dois elementos finitos de pórtico espacial para análise não linear geométrica de vigas laminadas de parede fina. As propriedades seccionais da viga são avaliadas através de teorias de vigas laminadas de parede fina apropriadas, em que desprezam-se os efeitos do empenamento e do cisalhamento transversal. Tais teorias de vigas laminadas conduzem a uma matriz constitutiva  $4 \times 4$ , onde diferentes níveis de acoplamento entre esforços e deformações de viga são considerados, por exemplo, pode-se obter uma matriz constitutiva diagonal ou cheia. A abordagem corrotacional independente do elemento é utilizada para o tratamento de grandes deslocamentos e rotações de corpo rígido no espaço. No âmbito local, são utilizados dois elementos, um baseado na teoria linear e outro na descrição Lagrangeana Total. O tratamento matemático das grandes rotações no espaço é realizado por meio do tensor das rotações (fórmula de Rodrigues), juntamente com o conceito do pseudovetor. As implementações dos elementos finitos propostos neste trabalho são realizadas no *software* de código aberto FAST. A metodologia de trabalho segue o roteiro clássico de métodos computacionais, incluindo formulação, implementação, verificação e validação dos resultados. A verificação é realizada através dos modelos tridimensionais de elementos finitos de casca e sólido desenvolvidos no *software* comercial ABAQUS. A validação é realizada por meio da comparação com resultados de ensaios experimentais encontrados na literatura. No que diz respeito à avaliação das propriedades seccionais, pode-se verificar uma ótima concordância entre as teorias de vigas laminadas adotadas neste trabalho e os resultados numéricos e de ensaios experimentais, para todas as laminações e carregamentos considerados. No caso dos elementos de pórtico espacial, verificou-se uma ótima concordância entre os resultados dos elementos finitos propostos neste trabalho e os resultados analíticos e computacionais disponíveis na literatura. Observa-se também que o elemento baseado na descrição Lagrangeana é mais eficiente do que o elemento baseado na teoria linear no que tange à capacidade de apresentar uma resposta satisfatória com uma malha menos refinada.

**Palavras-chave:** Materiais compósitos. Vigas de parede fina. Elemento de pórtico espacial. Formulação corrotacional. Não linearidade geométrica.

## ABSTRACT

The use of thin walled laminate beams in Aeronautical, Civil, Mechanical and Naval Engineering is increasing in the last years. This is due to their high stiffness/weight and strength/weight ratios. Composite beams and other structural elements tend to have thin walls due to the elevated strength of the material. Other important aspect is that, even without reaching large strains and without overcoming the elastic limit of the material, such beams present geometric nonlinear behavior due to high their slenderness, leading to large displacements and rotations. Depending on the composite layup, the beams of composite materials can present several couplings between generalized stresses and strains, requiring a more complex analysis procedure when compared to isotropic beams. In this work, two three-dimensional space frame finite elements that can be used to analyze composite thin-walled beams subjected to geometric non-linearity were developed. The cross-section properties of the beams are evaluated through suitable thin walled beam theories, where the effects of the warping and transverse shear are neglected. Such theories yield a 4x4 constitutive matrix for the laminate and different levels of coupling between generalized stresses and strains can be considered. Depending of such couplings, the constitutive matrix can either be full or diagonal. The element independent corotational approach was used in order to consider large displacements and rigid body rotations in space. In the local coordinate system, two elements are used, one based on the linear strain theory and the other on the Total Lagrangian formulation. The mathematical treatment of the large rotations in the space is performed by means of the rotation tensor (Rodrigues's formula) in conjunction with the concept of the pseudovector. The computational implementations of the two finite elements proposed in this work were done in the open source software FAST (*Finite Element Analysis Tool*). The methodology used follows the classical steps used in computational methods, including formulation, implementation, verification and validation of results. Such verification is accomplished through shell and solid three-dimensional finite element models developed in the ABAQUS commercial software. The validation is performed by means of comparison with the experimental results found in literature. Regarding the evaluation of cross-sectional properties, one can observe a good agreement between the laminated beam theories adopted in this work and numerical and experimental results for all composite layups and load conditions considered. In the case of space frame elements, a good agreement is obtained between the results of finite elements proposed in this work and the analytical and computational results available in the literature. It is also observed that the element based on the Lagrangian formulation is more efficient than the element based on the linear theory regarding the ability to provide a satisfactory response with a less refined mesh.

**Keywords:** Composite materials. Thin walled beams. Three-dimensional space frame finite element. Corrotacional formulation. Geometric nonlinearity.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Tipos de lâminas reforçadas por fibras. . . . .	19
Figura 2 – Laminado com lâminas orientadas em diferentes ângulos. . . . .	20
Figura 3 – Orientação da lâmina. . . . .	20
Figura 4 – Esquema de laminação. . . . .	21
Figura 5 – Indeformada e deformada de uma faixa de uma placa (hipótese de Kirchoff). . . . .	25
Figura 6 – Placa laminada. . . . .	26
Figura 7 – Variação de deformação e tensão ao longo da espessura do laminado. . . . .	28
Figura 8 – Esforços de viga e sistema de coordenada global. . . . .	32
Figura 9 – Seção transversal qualquer. . . . .	36
Figura 10 – Sistema de coordenadas locais ( $s$ e $r$ ) e numeração dos nós e dos segmentos. . . . .	40
Figura 11 – Esforços resultantes por unidade de comprimento. . . . .	41
Figura 12 – Seção transversal do segmento $i$ . . . . .	44
Figura 13 – Segmento $ds$ da seção circular vazada. . . . .	50
Figura 14 – Identificação dos segmentos da seção transversal. . . . .	56
Figura 15 – Sistemas de coordenadas. . . . .	57
Figura 16 – Corte longitudinal de uma viga de seção fechada. . . . .	58
Figura 17 – Rotações da seção no corte longitudinal. . . . .	59
Figura 18 – Coordenadas do ponto $c_i$ e orientação do segmento (ângulo $\alpha_i$ ). . . . .	60
Figura 19 – Curvaturas do eixo do $i$ -ésimo segmento. . . . .	60
Figura 20 – Esforços resultantes no $i$ -ésimo segmento. . . . .	62
Figura 21 – Seção circular modelada por meio de segmentos retos. . . . .	69
Figura 22 – Malha para elemento de casca (S8R) e modelo deformado. . . . .	70
Figura 23 – Deformada para elementos do tipo sólido (C3D20). . . . .	71
Figura 24 – Viga caixão discretizada com elementos de casca (S8R). . . . .	73
Figura 25 – Dimensões da seção caixão e forma de empilhamento das lâminas (modelo L6). . . . .	74
Figura 26 – Binário aplicado na viga caixão. . . . .	75
Figura 27 – Deformada da viga caixão com laminação L6 submetida ao esforço normal $N = 240$ N. . . . .	77
Figura 28 – Viga de seção transversal circular discretizada com elementos de casca (S8R). . . . .	79
Figura 29 – Deformada da viga com laminação L2 submetida ao momento fletor $M_y = 120$ Nm. . . . .	81
Figura 30 – Ilustração do caráter não vetorial das rotações. . . . .	84
Figura 31 – Rotação de um vetor. . . . .	86
Figura 32 – Detalhe dos vetores $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ . . . . .	87

Figura 33 – Ilustração da descrição cinemática da abordagem corrotacional. . . . .	90
Figura 34 – Sistemas de eixos globais, locais e nodais. . . . .	91
Figura 35 – Movimento do elemento. . . . .	93
Figura 36 – Vetor $\mathbf{X}_i^0$ . . . . .	95
Figura 37 – Deslocamento do ponto P. . . . .	116
Figura 38 – Viga em balanço com carga momento na extremidade livre. . . . .	123
Figura 39 – Deslocamentos para extremidade livre da viga: malha com 4 elementos. . . . .	124
Figura 40 – Deslocamentos para extremidade livre da viga: malha com 8 elementos. . . . .	125
Figura 41 – Viga em balanço com carga transversal na extremidade livre. . . . .	125
Figura 42 – Deslocamentos para extremidade livre da viga. . . . .	126
Figura 43 – Viga circular em balanço com carga aplicada na extremidade livre. . . . .	127
Figura 44 – Pórtico em forma de L com apoios do tipo pino. . . . .	128
Figura 45 – Pórtico em forma de L: deslocamento $u$ do apoio. . . . .	129
Figura 46 – Pórtico em forma de L: deslocamento $w$ do topo. . . . .	129
Figura 47 – Deslocamentos para extremidade livre da viga de seção transversal circular: modelo L1. . . . .	130
Figura 48 – Deslocamentos para extremidade livre da viga de seção transversal circular: modelo L6. . . . .	131
Figura 49 – Deslocamentos para extremidade livre da viga caixão: modelo L6. . . . .	132
Figura 50 – Geometria e laminações da viga caixão. . . . .	133
Figura 51 – Deslocamentos $w$ para extremidade livre da viga: $\theta = 45^\circ$ . . . . .	134
Figura 52 – Deslocamentos $v$ para extremidade livre da viga: $\theta = 45^\circ$ . . . . .	135
Figura 53 – Deslocamentos $u$ para extremidade livre da viga: $\theta = 45^\circ$ . . . . .	135
Figura 54 – Deslocamentos $w$ para extremidade livre da viga: $\theta = 90^\circ$ . . . . .	136
Figura 55 – Deslocamentos $u$ para extremidade livre da viga: $\theta = 90^\circ$ . . . . .	137
Figura 56 – Flambagem local próxima ao apoio. . . . .	138
Figura 57 – Viga caixão circular em balanço com carregamento na extremidade livre. . . . .	139
Figura 58 – Deslocamentos para extremidade livre da viga. . . . .	139

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Dados dos modelos ensaiados. <sup>1</sup> . . . . .	70
Tabela 2 – Propriedades do material. <sup>1</sup> . . . . .	70
Tabela 3 – Resumo das formulações para cálculo da rigidez à flexão de seção circular.	71
Tabela 4 – Resultado para rigidez à flexão (Nm <sup>2</sup> ). . . . .	72
Tabela 5 – Rigidez $\overline{EI}$ dos modelos simétricos - diferença relativa de <b>SNCL-DES-AC</b> (=SNCG-DES-AC) com respeito a Elementos Finitos e Sagggar. <sup>1</sup> . . . . .	72
Tabela 6 – Rigidez $\overline{EI}$ dos modelos assimétricos - diferença relativa de <b>SNCL-DES-AC</b> com respeito a Elementos Finitos e Sagggar. <sup>1</sup> . . . . .	72
Tabela 7 – Rigidez $\overline{EI}$ dos modelos assimétricos - diferença relativa de <b>SNCG-DES-AC</b> com respeito a Elementos Finitos e Sagggar. <sup>1</sup> . . . . .	72
Tabela 8 – Propriedades do material. <sup>2</sup> . . . . .	74
Tabela 9 – Dados dos modelos. . . . .	74
Tabela 10 – Diferença relativa para $N = 240$ N (seção caixão). . . . .	76
Tabela 11 – Deslocamento transversal $w$ e diferença relativa para $M_y = 70$ Nm (seção caixão). . . . .	77
Tabela 12 – Deslocamento transversal $v$ e diferença relativa para $M_z = 50$ Nm (seção caixão). . . . .	78
Tabela 13 – Diferença relativa para $T = 120$ Nm (seção caixão). . . . .	78
Tabela 14 – Diferença relativa para $N = 376.9911$ N (seção circular). . . . .	80
Tabela 15 – Deslocamento transversal $w$ e diferença relativa para $M_y = 120$ Nm (seção circular). . . . .	81
Tabela 16 – Diferença relativa para $T = 240$ Nm (seção circular). . . . .	82
Tabela 17 – Deslocamentos $u$ , $v$ e $w$ para extremidade livre da viga circular. . . . .	127
Tabela 18 – Dados do material da viga box laminada. <sup>3-6</sup> . . . . .	133
Tabela 19 – Deslocamentos da extremidade livre da viga caixão para 1.78 kN. . . . .	134
Tabela 20 – Comparação para viga caixão laminada com $\theta = 45^\circ$ . . . . .	136
Tabela 21 – Comparação para viga caixão laminada com $\theta = 90^\circ$ . . . . .	137
Tabela 22 – Propriedades do material para viga box circular laminada em balanço. <sup>7</sup> . . . . .	138

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	11
<b>1.1</b>	<b>Organização da dissertação</b>	16
<b>2</b>	<b>MATERIAIS COMPÓSITOS LAMINADOS</b>	18
<b>2.1</b>	<b>Fibras e matriz</b>	18
<b>2.2</b>	<b>Lâmina e laminado</b>	19
<b>2.3</b>	<b>Macro-mecânica de uma lâmina</b>	21
<b>2.4</b>	<b>Teoria Clássica de Laminação</b>	24
<b>2.4.1</b>	<i>Relações entre deslocamentos e deformações</i>	25
<b>2.4.2</b>	<i>Relações entre esforços e deformações</i>	27
<b>2.4.3</b>	<i>Influência do esquema de laminação</i>	28
2.4.3.1	Laminados simétricos	29
2.4.3.2	Laminados antissimétricos	30
2.4.3.3	Laminados balanceados	31
<b>3</b>	<b>TEORIAS DE VIGAS LAMINADAS DE PAREDE FINA</b>	32
<b>3.1</b>	<b>Homogeneização</b>	35
<b>3.1.1</b>	<i>Particularização para seção circular</i>	38
<b>3.2</b>	<b>Teoria de Massa e Barbero</b>	38
<b>3.2.1</b>	<i>Seção transversal</i>	39
<b>3.2.2</b>	<i>Rigidez reduzida</i>	40
<b>3.2.3</b>	<i>Eixo neutro de flexão</i>	43
<b>3.2.4</b>	<i>Eixo neutro de torção</i>	44
<b>3.2.5</b>	<i>Rigidez axial</i>	46
<b>3.2.6</b>	<i>Centro mecânico de gravidade</i>	46
<b>3.2.7</b>	<i>Eixos principais de inércia e rigidez à flexão</i>	47
<b>3.2.8</b>	<i>Rigidez à torção</i>	48
<b>3.2.9</b>	<i>Particularização para seção circular</i>	49
3.2.9.1	Rigidez axial	50
3.2.9.2	Centro mecânico de gravidade	51
3.2.9.3	Rigidez à flexão	51
3.2.9.4	Rigidez à torção	53
<b>3.3</b>	<b>Teoria de Kollar e Pluzsik</b>	55
<b>3.3.1</b>	<i>Seção transversal</i>	55
<b>3.3.2</b>	<i>Viga de seção fechada</i>	56
3.3.2.1	Passo 1: deformações em cada segmento	58

3.3.2.2	Passo 2: forças e momentos em cada segmento . . . . .	61
3.3.2.3	Passo 3: esforços na viga . . . . .	63
3.3.2.4	Passo 4: Esforços $X_1$ e $X_2$ . . . . .	64
3.3.2.5	Passo 5: matriz constitutiva $\bar{C}_v$ . . . . .	65
3.3.2.6	Vida de seção transversal aberta . . . . .	65
3.3.2.7	Centroide . . . . .	66
3.3.2.8	Matriz $C_v$ e $W$ referidas ao sistema de coordenadas $xyz$ . . . . .	66
<b>3.3.3</b>	<b><i>Seção circular</i></b> . . . . .	<b>68</b>
<b>3.4</b>	<b>Aplicações</b> . . . . .	<b>69</b>
<b>3.4.1</b>	<b><i>Exemplos de Saggbar</i></b> . . . . .	<b>69</b>
<b>3.4.2</b>	<b><i>Viga caixão</i></b> . . . . .	<b>73</b>
<b>3.4.3</b>	<b><i>Viga com seção transversal circular</i></b> . . . . .	<b>79</b>
<b>4</b>	<b>ANÁLISE NÃO LINEAR COM GRANDES ROTAÇÕES</b> . . . . .	<b>83</b>
<b>4.1</b>	<b>Grandes rotações no espaço</b> . . . . .	<b>83</b>
<b>4.1.1</b>	<b><i>Tensor das rotações</i></b> . . . . .	<b>85</b>
<b>4.1.2</b>	<b><i>Pequenas rotações</i></b> . . . . .	<b>89</b>
<b>4.2</b>	<b>Formulação corrotacional</b> . . . . .	<b>90</b>
<b>4.2.1</b>	<b><i>Equações de equilíbrio</i></b> . . . . .	<b>96</b>
<b>4.2.2</b>	<b><i>Atualizações dos deslocamentos</i></b> . . . . .	<b>98</b>
<b>4.2.3</b>	<b><i>Mudança de variável de rotação</i></b> . . . . .	<b>98</b>
<b>4.2.4</b>	<b><i>Matriz de projeção</i></b> . . . . .	<b>102</b>
<b>4.3</b>	<b>Vetor de forças internas e matriz de rigidez tangente</b> . . . . .	<b>108</b>
<b>5</b>	<b>ELEMENTOS LOCAIS</b> . . . . .	<b>115</b>
<b>5.1</b>	<b>Formulação do elemento CRTL</b> . . . . .	<b>115</b>
<b>5.1.1</b>	<b><i>Discretização por elementos finitos</i></b> . . . . .	<b>118</b>
<b>5.1.2</b>	<b><i>Vetor de forças internas e matriz de rigidez tangente do elemento</i></b> . . . . .	<b>120</b>
<b>5.2</b>	<b>Formulação do elemento CRL</b> . . . . .	<b>122</b>
<b>6</b>	<b>EXEMPLOS NUMÉRICOS</b> . . . . .	<b>123</b>
<b>6.1</b>	<b>Viga em balanço com carga momento na extremidade</b> . . . . .	<b>123</b>
<b>6.2</b>	<b>Viga em balanço com carga transversal na extremidade</b> . . . . .	<b>125</b>
<b>6.3</b>	<b>Viga circular em balanço</b> . . . . .	<b>127</b>
<b>6.4</b>	<b>Pórtico em forma de L com apoios do tipo pino</b> . . . . .	<b>127</b>
<b>6.5</b>	<b>Viga laminada engastada com carga transversal na extremidade</b> . . . . .	<b>130</b>
<b>6.6</b>	<b>Viga caixão circular laminada em balanço</b> . . . . .	<b>138</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>140</b>
<b>7.1</b>	<b>Sugestões para trabalhos futuros</b> . . . . .	<b>141</b>

	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	143
<b>A</b>	<b>ANEXO - CÓDIGO MAPLE PARA O ELEMENTO LOCAL CTRL</b> . . . . .	149
<b>B</b>	<b>ANEXO - CÓDIGO MAPLE PARA O ELEMENTO LOCAL CRL</b> . . . . .	151

# 1 INTRODUÇÃO

Materiais compósitos resultam da combinação de dois ou mais materiais, em uma escala macroscópica, com o objetivo de obter um novo material melhor que cada uma das suas partes isoladamente.<sup>2,8,9</sup> Para projetos estruturais onde se buscam elevadas relações rigidez/peso e resistência/peso, os materiais compósitos mais utilizados são os reforçados por fibras (*Fiber Reinforced Composites*). Estes materiais apresentam excelentes características mecânicas como resistência, rigidez, resistência à fadiga, resistência à corrosão.<sup>8</sup>

No presente trabalho, utilizam-se os compósitos laminados reforçados por fibras unidirecionais. Esses materiais são formados por uma sequência de lâminas (camadas) compostas por um conjunto de fibras de alta resistência imersas em uma matriz polimérica. Cada lâmina isolada apresenta comportamento ortotrópico, com rigidez e resistência maiores na direção das fibras. Por outro lado, o laminado pode apresentar comportamento anisotrópico, devido à presença de lâminas com diferentes orientações, causando acoplamento entre esforços e deformações que não estão presentes no caso de vigas de material isotrópico.

Tirando partido da ortotropia de cada lâmina, os compósitos laminados podem ser fabricados de maneira a obter a máxima vantagem em cada situação específica. Isso pode ser obtido colocando-se a direção das fibras ao longo das direções mais solicitadas. Isso é impossível de ser alcançado utilizando materiais isotrópicos, uma vez que tais materiais têm comportamento igual em todas as direções, havendo resistência disponível em todas as direções, mesmo naquelas onde as solicitações são baixas. Dessa forma, vários trabalhos tratam do uso de técnicas de otimização no projeto de estruturas laminadas.<sup>10-12</sup>

A utilização de vigas laminadas de parede fina nas Engenharias Aeronáutica, Civil, Mecânica e Naval tem crescido bastante nos últimos anos, devido a suas elevadas relações rigidez/peso e resistência/peso. Esses elementos estruturais normalmente apresentam paredes finas devido à alta resistência dos materiais compósitos reforçados por fibras. Outra característica de tais vigas, mesmo sem apresentar grandes deformações e sem que o limite elástico do material seja ultrapassado, é o seu comportamento geometricamente não linear devido à sua elevada esbelteza, acarretando em grandes deslocamentos e rotações no espaço. Dependendo da laminação utilizada, as vigas de materiais compósitos podem apresentar diversos acoplamentos entre esforços e deformações, tornando a análise destas vigas bem mais complexa do que a análise de vigas de material isotrópico.

Como exemplo concreto da aplicação deste material, têm-se as pás de aerogeradores e helicópteros, os perfis laminados fabricados por extrusão, os *risers* compósitos, que são tubulações usadas para produção e extração de petróleo em águas profundas, dentre outras aplicações.

Os *risers* estão submetidos, predominantemente, à atuação conjunta de pressão interna e externa, força normal, momento torçor e flexão oblíqua.<sup>13</sup> As ações podem ter caráter estático ou dinâmico. *Risers* metálicos têm sido usualmente utilizados, contudo, o uso dessa

solução em águas profundas pode ficar comprometido devido ao peso elevado do aço, tornando a exploração e produção de petróleo *offshore* economicamente inviáveis. Devido a isto, tem crescido o interesse na aplicação em *risers* compósitos.<sup>11,12,14</sup>

O projeto de vigas laminadas de parede fina requer a determinação dos deslocamentos, esforços e tensões para os diversos carregamentos atuantes. Estruturas laminadas normalmente são analisadas utilizando elementos finitos sólidos ou de casca, pois permitem a representação de qualquer laminação, bem como a consideração de todos os possíveis acoplamentos entre esforços e deformações. Contudo, o uso dessa abordagem não é viável para algumas estruturas, por exemplo, as exemplificadas anteriormente, devido ao seu grande comprimento. Neste caso, a malha de elementos finitos teria que ser refinada o bastante para capturar estados de tensão e deformação em determinadas regiões para, por exemplo, verificar a segurança da estrutura através de critérios de resistência.

Essa abordagem apresenta alguns problemas sérios, pois a malha possui um número muito grande de graus de liberdade, acarretando num custo computacional elevado e dificultando a modelagem geométrica e geração da malha.<sup>15</sup> Esses problemas são amplificados quando somados aos efeitos dos grandes deslocamentos e rotações.

Assim, para estruturas de grande porte, principalmente, as de materiais compósitos, utiliza-se a abordagem de análise global-local. Segundo Voleti *et al.*,<sup>15</sup> analisar estruturas de grande porte usando o Método dos Elementos Finitos (MEF) requer técnicas especiais para chegar a resultados confiáveis e dentro de tempos computacionais razoáveis. A análise global-local através de elementos finitos refere-se a um conjunto de técnicas destinadas à reduzir o esforço computacional. Há outras técnicas para realização da análise global-local em que combinam-se outros métodos numéricos, como elementos de contorno e diferenças finitas.<sup>16</sup>

Mais uma vez, tomando os *risers* como exemplo, a abordagem global-local pode ser aplicada a tal estrutura. Inicialmente, faz-se uma análise global com o uso de elementos de pórtico para obtenção de deslocamentos, rotações e esforços internos. Em seguida, a partir dos dados da análise precedente, modelos locais mais refinados, utilizando elementos finitos sólidos ou de casca, são empregados para o cálculo das tensões e deformações em regiões críticas da estrutura. Nota-se que esta abordagem realizada em dois níveis (global e local) é uma forma de abordagem multi-escala.<sup>17</sup> Na literatura, encontram-se diversos trabalhos que utilizaram tal abordagem para analisar *risers* compósitos.<sup>13,18,19</sup>

Para uma gama de casos práticos, a análise linear fornece uma avaliação imprecisa da estrutura. Há casos em que a carga de ruína da estrutura é superestimada ou subestimada para um dado nível de carga. Desta maneira, para realizar uma avaliação mais realista da estrutura, é necessário incluir os efeitos não lineares na análise estrutural.

Na análise linear, assume-se que os deslocamentos e deformações sofridos pela estrutura devido ao carregamento externo são pequenos. Isso implica que o deslocamento é uma função linear das forças aplicadas, a determinação da matriz de rigidez e do vetor de forças internas do elemento são obtidos através da configuração indeformada (conhecida) do corpo e

a matriz que relaciona deformação e deslocamento é independente dos deslocamentos.<sup>20</sup>

Contudo, no caso de estruturas que sofrem grandes deslocamentos, mesmo sem apresentar grandes deformações e sem que o limite elástico do material seja ultrapassado, deve-se utilizar equações não lineares de equilíbrio da estrutura. Neste caso, as equações de equilíbrio devem ser escritas na configuração deformada (desconhecida) da estrutura.<sup>20</sup>

Nos problemas geometricamente não lineares de estruturas é comum o uso das abordagens Lagrangeana Total e Atualizada. Na abordagem Lagrangeana Total, as variáveis estáticas e cinemáticas da configuração desconhecida são referidas à configuração inicial da estrutura. Por outro lado, na abordagem Lagrangeana Atualizada, todas as variáveis são referidas à última configuração de equilíbrio da estrutura.<sup>20,21</sup>

Diversos trabalhos tratando da análise não linear de vigas laminadas tem sido publicados nos últimos anos. Bhaskar e Librescu<sup>22</sup> propuseram um elemento finito baseado na descrição Lagrangeana Total considerando os efeitos da deformação de cisalhamento transversal e do empenamento para analisar vigas anisotrópicas de parede fina. Eles aplicaram esse elemento finito para avaliar vigas de seção aberta e fechada. Seguindo a mesma linha de Bhaskar e Librescu,<sup>22</sup> Vo e Lee<sup>4</sup> propuseram um elemento de pórtico espacial baseado nas deformações de von Kármán (tensor de deformação de Green-Lagrange) para analisar vigas caixão. Os autores avaliaram a influência da laminação e dos acoplamentos. Posteriormente, os autores refinaram tal elemento para considerar o efeito do cisalhamento transversal.<sup>5</sup>

Fraternali e Feo<sup>23</sup> propuseram um elemento finito de pórtico espacial para analisar vigas laminadas de parede fina. Tal elemento é formulado por meio da teoria de Vlasov e capta pequenas deformações e rotações moderadas. Os autores avaliaram apenas vigas de seção aberta.

Cardoso *et al.*<sup>24</sup> e Omidvar e Ghorbanpoor<sup>25</sup> propuseram um elemento finito espacial baseado na descrição Lagrangeana Atualizada para analisar vigas laminadas de parede fina. Os autores analisaram apenas vigas de seção aberta. Nestes trabalhos, o efeito do empenamento também foi considerado.

Saravia *et al.*<sup>26</sup> apresentaram uma formulação geometricamente exata para analisar vigas laminadas de parede fina, cujo tratamento das grandes rotações no espaço é realizado por meio de parametrizações em termos dos *spins* (matriz antissimétrica). Tal formulação conduz matriz de rigidez tangente não simétrica. Tal elemento finito é dependente do caminho (*path dependent*) e não invariante (*non-invariant*), e baseia-se no tensor das deformações de Green-Lagrange. É importante notar que um elemento finito é dito invariante quando possui a capacidade de não apresentar deformação quando submetido à deslocamento de corpo rígido.<sup>27</sup> Tal terminologia surgiu com o crescimento das formulações geometricamente exatas (*geometrically exact*).

Seguindo a mesma sistemática que Saravia *et al.*,<sup>26</sup> Saravia *et al.*<sup>7</sup> propuseram um elemento finito de pórtico espacial para analisar vigas laminadas de parede fina. Nesse trabalho, a matriz de rigidez tangente é obtida por meio da parametrização das rotações finitas com o

vetor das rotações totais e o elemento finito é independente do caminho (*path independent*) e invariante (*invariant*).

Machado e Cortínez<sup>28</sup> propuseram uma formulação para analisar vigas laminadas de parede fina de seção aberta e fechada. Salienta-se que tal modelo considera apenas laminações simétricas balanceadas. O empenamento é considerado.

A eficácia da aplicação dos elementos finitos de pórtico das referências supracitadas depende de uma avaliação cuidadosa da relação constitutiva da viga laminada. Tal relação é de difícil obtenção, devido à geometria da seção e ao esquema de laminação de cada segmento da seção transversal. Outra dificuldade verificada nas formulações citadas anteriormente é a não separação explícita das grandezas cinemáticas das propriedades seccionais da viga.

Uma abordagem comumente utilizada para analisar vigas laminadas de parede fina é determinar as propriedades seccionais equivalentes ( $EA$ ,  $EI_y$ ,  $EI_z$ ,  $EI_{yz}$  e  $GJ$ ) por meio de alguma técnica, por exemplo, Homogeneização<sup>29</sup> e a abordagem apresentada por Massa e Barbero,<sup>30</sup> e empregá-las nos elementos finitos de pórticos convencionais. Uma das vantagens dessas abordagens reside no fato de poder utilizar *softwares* de análise comerciais sem grandes alterações, além de resultarem em expressões analíticas simples de fácil aplicação. Porém, neste tipo de abordagem, desprezam-se os efeitos dos possíveis acoplamentos entre os esforços e deformações da viga.

No entanto, há teorias que consideram todos os possíveis acoplamentos de viga, como a abordagem proposta por Kollar e Pluzsik.<sup>31</sup> Esta abordagem é baseada na Teoria Clássica de Laminação e os efeitos do empenamento e do cisalhamento transversal são desprezados. Mororó *et al.*<sup>32</sup> propuseram um elemento de pórtico espacial baseado nesta teoria e aplicaram-no na análise linear de vigas caixão e perfil I.

Os elementos finitos para análise não linear de vigas laminadas supracitados são baseados nas formulações Lagrangeanas Total e Atualizada. Contudo, pesquisas vêm mostrando, gradativamente, que a formulação chamada corrotacional vem ganhando forte apelo quando se trata de pórticos e cascas submetidos a grandes deslocamentos e rotações, mas a pequenas deformações.<sup>33</sup> O principal atrativo desta formulação é a possibilidade da exclusão da não linearidade geométrica do âmbito local do elemento. A parcela não linear é incorporada na matriz de transformação que relaciona os parâmetros locais e globais, que não dependem dos detalhes das formulações dos elementos locais. Tal abordagem é bastante vantajosa, pois elementos lineares e não lineares tradicionais podem ser facilmente adaptados para análise não linear geométrica.

Dentre as formulações corrotacionais da literatura, a mais atrativa e por isso a mais difundida atualmente é a caracterizada como independente do elemento.<sup>33</sup> Desde sua criação, esta formulação tem sido aperfeiçoada por diversos autores.<sup>34-37</sup>

Desta forma, a abordagem corrotacional permite a separação explícita das grandezas cinemáticas das propriedades seccionais da viga laminada. No âmbito local da abordagem corrotacional, pode-se utilizar elementos lineares, como o proposto por Mororó *et al.*,<sup>32</sup> cujo tratamento matemático é menos complexo do que as formulações dos elementos finitos não

lineares mencionadas anteriormente. Assim, o tratamento das complexidades que o compósito laminado possui, principalmente a consideração dos acoplamentos entre esforços e deformações da viga, são tratados no âmbito local da formulação corrotacional. É importante salientar que os elementos finitos não lineares baseados na descrição Lagrangeana mencionados anteriormente, podem ser utilizados também no âmbito local da abordagem corrotacional.

Ressalta-se que, na revisão bibliográfica realizada, não foram detectadas trabalhos que utilizam a abordagem corrotacional para análise de vigas laminadas de parede fina. Na verdade, verifica-se que a grande maioria dos trabalhos sobre análise não linear de vigas laminadas é restrita apenas ao caso de rotações moderadas.

Portanto, o desenvolvimento de elementos finitos de pórtico espacial para análise de vigas laminadas de parede fina submetida a grandes deslocamentos e rotações no espaço é um tema de grande interessante, devido à simplicidade de discretização e baixo custo computacional, quando comparado com o uso de elementos de casca ou sólido laminados.

Com base no que foi exposto, o **objetivo geral** deste trabalho é formular elementos de pórtico espacial para análise não linear geométrica de vigas laminadas de parede fina capazes de considerar grandes deslocamentos e rotações.

Devido às complexidades analíticas e numéricas desses elementos finitos, os **objetivos específicos** deste trabalho incluem:

- a) Empregar as teorias de vigas laminadas para determinação da relação constitutiva da viga laminada de parede fina.
- b) Aplicar as teorias de viga para seções transversais do tipo caixão e circular.
- c) Avaliar as teorias de vigas laminadas por meio de comparações numéricas para diferentes esquemas de laminação.
- d) Desenvolver elementos locais baseados na teoria linear de vigas e na descrição Lagrangeana Total.
- e) Empregar a abordagem corrotacional independente do elemento de forma a permitir o tratamento dos grandes deslocamentos e rotações no espaço.
- f) Verificar a acurácia dos elementos propostos por meio de exemplos numéricos.

A fim de atingir os objetivos acima destacados, a metodologia de trabalho seguiu o roteiro clássico de métodos computacionais, incluindo formulação, implementação, verificação e validação dos resultados. A verificação inclui a comparação com outros modelos matemáticos (elementos finitos 3D), enquanto a validação trata da comparação com resultados experimentais.

É utilizada a abordagem corrotacional independente do elemento para o tratamento dos grandes deslocamentos e rotações de corpo rígido no espaço. No âmbito local, foram desenvolvidos dois elementos: um baseado na teoria linear<sup>32</sup> e outro na descrição Lagrangeana

Total (rotações moderadas). O tratamento matemático das rotações finitas no espaço é realizada por meio do tensor das rotações (ou fórmula de Rodrigues), juntamente com o conceito de pseudovetor.<sup>38</sup>

Assim, com o uso da abordagem corrotacional independente do elemento fica evidente a separação das duas complexidades do problema: a determinação das propriedades seccionais da viga laminada (relação constitutiva), juntamente com todos os possíveis acoplamentos entre esforços e deformações; e o tratamento dos grandes deslocamentos e rotações no espaço.

As propriedades seccionais da viga são avaliadas por meio de teorias adequadas de vigas laminadas de parede fina e são aplicadas apenas para vigas de seção fechada. No entanto, as formulações apresentadas neste trabalho também podem ser utilizadas para vigas de seção aberta, desde que o efeito do empenamento possa ser desprezado.

Os elementos finitos de viga laminada propostos neste trabalho foram implementados no *software* de código aberto FAST (*Finite Element Analysis Tool*) escrito em C++ que utiliza a filosofia de Programação Orientada a Objetos. Atualmente, o FAST encontra-se em desenvolvimento pelo grupo de Mecânica Computacional do Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) da Universidade Federal do Ceará. As análises utilizando elementos finitos de casca ou sólido foram realizadas utilizando o *software* comercial ABAQUS.<sup>39</sup>

Utilizou-se também o *software* de programação MATLAB para implementar as metodologias de análise de vigas de parede fina apresentadas neste trabalho. Utilizou-se também o *software* de programação matemática simbólica Maple para auxiliar na formulação dos elementos locais.

## 1.1 Organização da dissertação

Este trabalho está dividido em sete capítulos em que será contemplada primeiramente a Introdução, que trata da contextualização do problema, da justificativa e dos objetivos.

No Capítulo 2, explana-se sobre materiais compósitos reforçados por fibras. Basicamente, discorre-se sobre as principais características do material e a sua macro-mecânica. Apresenta-se também sobre a Teoria Clássica de Laminação, base das teorias para análise de vigas laminadas apresentadas no capítulo seguinte.

No Capítulo 3, apresentam-se o cálculo das relações constitutivas de vigas laminadas de parede fina empregadas nos elementos finitos desenvolvidos nesta dissertação. Neste capítulo também apresentam-se exemplos numéricos para verificação e validação das teorias de vigas laminadas. São utilizadas vigas em balanço de seção caixão e circular.

No Capítulo 4, apresenta-se a abordagem corrotacional independente do elemento para elementos de pórtico espacial. Neste capítulo também apresenta-se de forma detalhada o tratamento matemático das grandes rotações no espaço.

No Capítulo 5, discutem-se as formulações dos elementos locais propostos neste trabalho. No âmbito local do elemento corrotacional, utilizam-se dois elementos: um baseado

na teoria de pequenos deslocamentos e outro na descrição Lagrangeana Total (rotações moderadas). Inicialmente, apresenta-se a formulação proposta do elemento local não linear baseado no tensor de deformação de Gree-Lagrange, cujo grau de não linearidade é inserido apenas na parcela de membrana. Por fim, é proposto o elemento baseado na teoria de pequenos deslocamentos, cuja formulação é apresentada como uma simplificação do elemento não linear local.

O Capítulo 6 contém as aplicações numéricas para verificação dos elementos propostos. Neste capítulo, inicialmente, apresentam-se exemplos clássicos de estruturas isotrópicas encontrados na literatura para verificar a capacidade do elemento em tratar grandes rotações no espaço e a implementação realizada no *software* FAST. Por fim, são apresentados exemplos em que se utilizam estruturas laminadas.

Por fim, o Capítulo 7 contém as conclusões obtidas neste trabalho e sugestões de trabalhos futuros.

## 2 MATERIAIS COMPÓSITOS LAMINADOS

Os elementos finitos de pórtico espacial propostos neste trabalho são desenvolvidos utilizando as relações constitutivas obtidas pelas metodologias de análise de vigas laminadas de parede fina apresentadas no próximo capítulo. Antes de apresentar tais teorias e as formulações dos elementos finitos, neste capítulo, descrevem-se as principais características dos materiais compósitos laminados reforçados por fibras e sua macro-mecânica.

### 2.1 Fibras e matriz

Os materiais compostos ou compósitos são formados por dois ou mais materiais combinados em escala macroscópica, visando obter um material com melhores propriedades mecânicas do que as dos materiais que o compõem quando utilizados isoladamente.<sup>2,8,9</sup> Apresentam ótimas características mecânicas como resistência, rigidez, resistência à fadiga, resistência à corrosão, dentre outras características.<sup>8</sup>

Para projetos estruturais onde se buscam relações ótimas de rigidez/peso, bem como resistência/peso, objetivando uma estrutura que atenda um nível de segurança e apresente um ótimo desempenho estrutural, os materiais compósitos mais utilizados são os reforçados por fibras (*Fiber Reinforced Composites*). Esses compósitos são formados por dois materiais: as fibras e as matrizes.

As fibras são as grandes responsáveis pela resistência e rigidez do material. Ressalta-se que materiais em forma de fibras apresentam maior resistência e rigidez do que o mesmo material numa forma volumétrica (*bulk form*). Por exemplo, uma placa de vidro comum apresenta, geralmente, valores de resistência à ruptura da ordem de 20 MPa. Já em forma de fibras, o mesmo vidro apresenta resistência à ruptura de 2800 MPa a 4800 MPa em condições comerciais, e em condições laboratoriais, essa fibra de vidro chega a cerca de 7000 MPa de resistência à ruptura.<sup>8,29</sup>

A discrepância entre os valores de resistência do material na forma de fibras e sua forma volumétrica é explicada pela presença de imperfeições ou falhas no material. Um bloco de material possui um número de trincas inerentes ao processo de fabricação. Uma fibra de vidro, por exemplo, é fabricada com diâmetros na faixa de 0.010 mm. Esse diâmetro diminuto dificulta o desenvolvimento excessivo de trincas durante o processo de fabricação, fazendo com que a resistência da fibra fique próxima à resistência máxima (teórica) do material definida pela sua estrutura molecular.<sup>29</sup> Isso explica os altos valores para as relações de resistência/peso e rigidez/peso conseguidas com o uso de materiais em forma de fibras.<sup>8</sup>

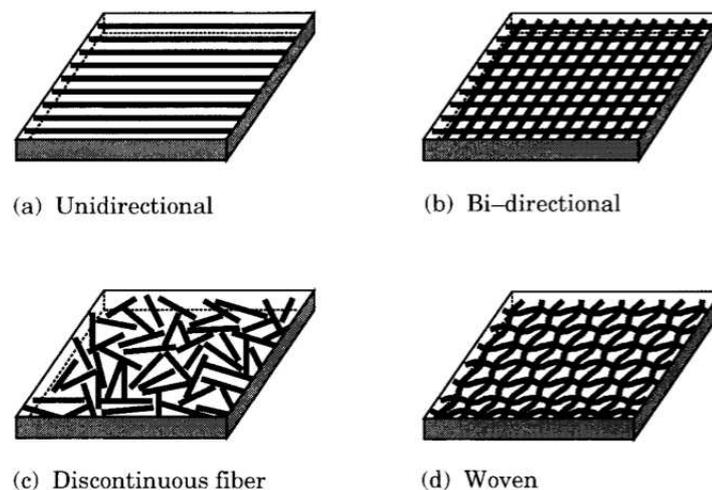
As matrizes são geralmente empregadas na forma de resinas à base epóxi com custo e resistência menores que as fibras.<sup>8</sup> As matrizes são encarregadas de realizar funções primordiais, tais como: manter as fibras unidas no arranjo desejado de forma que elas trabalhem em conjunto, contribuir para a resistência à flambagem de fibras comprimidas, atuar como um dispositivo de transferência de carregamento entre as fibras, além de protegê-las de agentes exter-

nos.<sup>9</sup> A penúltima característica citada anteriormente é de grande importância, principalmente quando uma fibra se rompe, pois a matriz auxilia na redistribuição dos esforços entre as fibras intactas adjacentes.<sup>8</sup>

## 2.2 Lâmina e laminado

A lâmina (*layer* ou *ply*) é o elemento básico para a construção dos compósitos laminados. Uma lâmina reforçada por fibras consiste de muitas fibras imersas em uma matriz. As fibras podem ser contínuas ou descontínuas, unidirecionais ou bidirecionais, trançadas ou com distribuição randômica, como ilustrado na Figura 1.

Figura 1 – Tipos de lâminas reforçadas por fibras.



Fonte: Reddy.<sup>9</sup>

Um laminado é uma coleção de lâminas empilhadas de tal forma que se alcance uma rigidez e uma resistência desejável. Cada camada (lâmina) terá uma espessura e será orientada de acordo com a direção principal das fibras, como ilustrado na Figura 2. Essa sequência de empilhamento é chamada de esquema de laminação (*lamination scheme* ou *stacking sequence*).<sup>9</sup>

O desempenho estrutural dos compósitos laminados reforçados por fibras depende do número de camadas, dos materiais e do esquema de laminação utilizado. O esquema de laminação define o arranjo dos ângulos de orientação das camadas, por exemplo,  $[\alpha/\beta/\gamma/.../\omega]$ , onde  $\alpha$  é a orientação das fibras da primeira camada,  $\beta$  é a orientação das fibras da segunda camada e assim por diante. O ângulo de orientação é medido no sentido anti-horário a partir do eixo  $x$ , conforme mostrado na Figura 3. A numeração das camadas é feita de baixo para cima, no sentido positivo do eixo  $z$ , como ilustrado na Figura 4.

Figura 2 – Laminado com lâminas orientadas em diferentes ângulos.

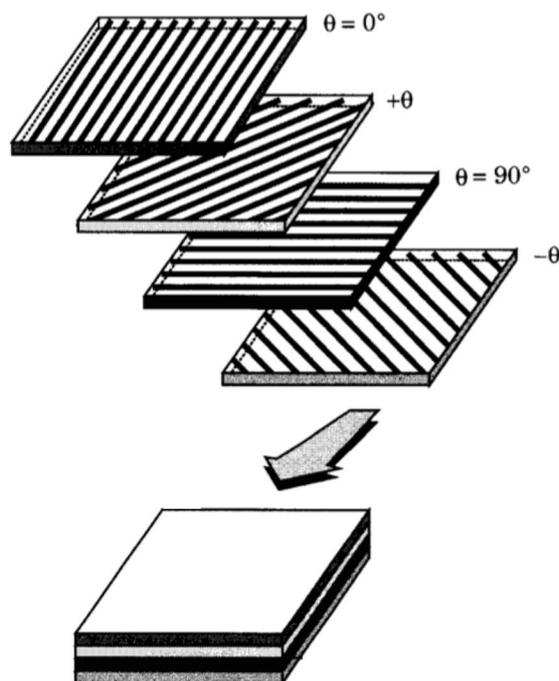
Fonte: Adaptado de Reddy.<sup>9</sup>

Figura 3 – Orientação da lâmina.

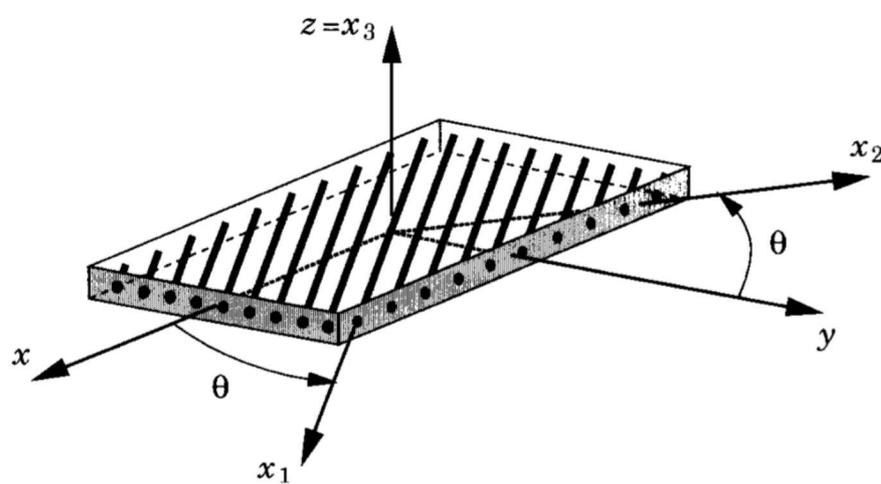
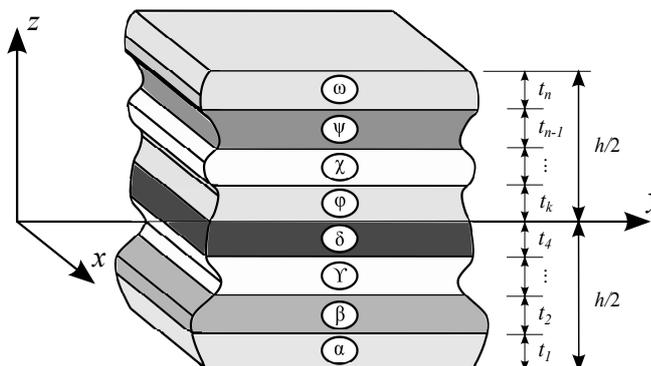
Fonte: Reddy.<sup>9</sup>

Figura 4 – Esquema de laminação.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Encontra-se, comumente na literatura, a classificação para os compósitos em *cross-ply* e *angle-ply*. Um laminado é denominado *cross-ply*, quando esse possui somente fibras orientadas a  $0^\circ$  ou  $90^\circ$ . Assim, a laminação  $[0/90/0/90/0]$  corresponde a um laminado *cross-ply* com cinco camadas. Quando o laminado possui uma laminação qualquer, em outras palavras, se o laminado possuir pelo menos uma fibra orientada em um ângulo diferente de  $0^\circ$  ou  $90^\circ$ , o laminado é denominado *angle-ply*. Por exemplo,  $[30/90/-45/0]$  é um laminado *angle-ply* com quatro camadas.

### 2.3 Macro-mecânica de uma lâmina

Conforme mencionado anteriormente, a lâmina é o elemento básico para a construção dos compósitos laminados. Portanto, o conhecimento do comportamento mecânico da lâmina é essencial para entender o comportamento de estruturas laminadas reforçadas por fibras.

O comportamento da lâmina pode ser visualizado e analisado em diferentes níveis e em diferentes escalas segundo as abordagens micro e macro-mecânica. A análise micro-mecânica estuda as interações dos constituintes no nível microscópico.<sup>2</sup> Essa abordagem considera as propriedades diferentes das fibras e da matriz afim de obter as propriedades equivalentes (médias ou efetivas) do compósito, bem como estudar os modos de falha de maneira a determinar critérios de resistência para os compósitos.<sup>13</sup> A modelagem micro-mecânica é bastante ampla, utilizando desde conceitos simples como a Leis das Misturas até métodos mais sofisticados baseados na Teoria da Elasticidade para determinação dos módulos de elasticidade equivalentes.<sup>2,8</sup>

A abordagem macro-mecânica é utilizada para calcular deslocamentos, deformações, esforços e tensões de elementos estruturais. Nessa abordagem, a lâmina é considerada homogênea e ortotrópica no sistema de coordenadas do material  $(x_1, x_2, x_3)$ , onde o eixo  $x_1$  é orientado paralelamente às fibras fazendo um ângulo  $\theta$  com o eixo principal  $x$ , o eixo  $x_2$  é coplanar e transversal às fibras e o eixo  $x_3$  é perpendicular à lâmina, como mostra a Figura 3.

Verifica-se experimentalmente que, em condições usuais de serviço e para cargas

estáticas de curta duração, o comportamento mecânico dos laminados pode ser considerado como linear-elástico.<sup>8</sup> Neste caso, a relação tensão-deformação pode ser representada pela lei de Hooke generalizada.<sup>8,9,29</sup> Devido à ortotropia das lâminas, a relação entre deformações ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ) e tensões ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) no sistema do material é dada por:<sup>8,9,29</sup>

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma} \quad (1)$$

onde  $\mathbf{S}$  é a matriz de flexibilidade (*compliance*) do material, cujos coeficientes são dados por:<sup>8,9,29</sup>

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1}; S_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}; S_{13} = -\frac{\nu_{31}}{E_3} = -\frac{\nu_{13}}{E_1}; S_{22} = \frac{1}{E_2} \\ S_{23} &= -\frac{\nu_{32}}{E_3} = -\frac{\nu_{23}}{E_2}; S_{33} = \frac{1}{E_3}; S_{44} = \frac{1}{G_{23}}; S_{55} = \frac{1}{G_{31}}; S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \end{aligned} \quad (2)$$

Os índices aplicados nos coeficientes de flexibilidade devem-se à notação  $\varepsilon_4$ ,  $\varepsilon_5$  e  $\varepsilon_6$  e  $\sigma_4$ ,  $\sigma_5$  e  $\sigma_6$  (notação de Voigt) usada para as deformações  $\gamma_{23}$ ,  $\gamma_{31}$  e  $\gamma_{12}$  e para as tensões  $\tau_{23}$ ,  $\tau_{31}$  e  $\tau_{12}$  de cisalhamento, respectivamente. As variáveis  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$  são os módulos de elasticidade nas direções principais, enquanto  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{21}$ ,  $\nu_{13}$ ,  $\nu_{31}$ ,  $\nu_{23}$ ,  $\nu_{32}$  são os coeficientes de Poisson e  $G_{12}$ ,  $G_{13}$  e  $G_{23}$  são os módulos de elasticidade ao cisalhamento.

É importante notar que materiais elásticos ortotrópicos possuem apenas nove constantes independentes, pois os coeficientes de Poisson ( $\nu_{ij}$ ) devem satisfazer a relação:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad (i, j = 1, 2, 3 \quad \text{e} \quad i \neq j) \quad (3)$$

uma vez que a matriz  $\mathbf{S}$  é simétrica ( $S_{ij} = S_{ji}$ ).

Como a lâmina possui uma espessura pequena, normalmente admite-se que a lâmina está sob um Estado Plano de Tensão ( $\sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$ ).<sup>2,8,9</sup> Logo, a relação deformação-tensão dada pela Equação (1) torna-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma}_1 \quad (4)$$

cujos coeficientes são definidos na Equação (2).

A inversão da Equação (4) resulta na relação tensão-deformação no sistema do ma-

terial:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}_1 \quad (5)$$

onde os coeficientes  $Q_{ij}$  são calculados a partir das propriedades do material da lâmina e são dados por:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; Q_{66} = G_{12} \quad (6)$$

Observa-se que as equações escritas até o momento foram referidas ao sistema do material  $(x_1, x_2, x_3)$ . Por outro lado, as equações que regem a solução do problema são escritas no sistema de coordenadas global  $(x, y, z)$ . Portanto, é necessário relacionar as componentes de tensão e deformação nesses sistemas de coordenadas. A transformação de um sistema de coordenadas para o outro é dado por:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (7)$$

A transformação do campo de deslocamento  $u_1, u_2$  e  $u_3$  é dada por:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{u}_1 = \mathbf{A}\mathbf{u} \quad (8)$$

sendo  $u_1, u_2$  e  $u_3$  os deslocamentos segundo as direções  $x_1, x_2$  e  $x_3$ , e  $u, v$  e  $w$  os deslocamentos nas direções  $x, y$  e  $z$ , respectivamente.

A partir das relações cinemáticas da Teoria da Elasticidade, as componentes de deformações no plano, tanto no sistema de coordenadas global como no sistema do material são dadas por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

A partir das Equações (7), (8) e (9), pode-se demonstrar que as deformações podem

ser transformadas através da relação:<sup>40</sup>

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2\sin \theta \cos \theta & 2\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{T}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (10)$$

Utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), pode-se mostrar que a transformação das tensões do sistema local para o sistema global é realizada através de:<sup>40</sup>

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}^t \boldsymbol{\sigma}_1 \quad (11)$$

Finalmente, substituindo as Equações (5) e (10) na Equação (11), tem-se a relação tensão-deformação no sistema de coordenadas global:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}^t \mathbf{Q} \mathbf{T} \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (12)$$

onde  $\bar{\mathbf{Q}}$ , chamada de matriz de rigidez transformada, é dada por:<sup>2,8</sup>

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Os coeficientes  $\bar{Q}_{ij}$  podem ser facilmente obtidos realizando o triplo produto matricial  $\mathbf{T}^t \mathbf{Q} \mathbf{T}$ . Tais coeficientes são escritos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= \cos^4 \theta Q_{11} + 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta (Q_{12} + 2Q_{66}) + \sin^4 \theta Q_{22} \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) Q_{12} \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{22} &= \sin^4 \theta Q_{11} + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta Q_{22} \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) Q_{66} \end{aligned} \quad (14)$$

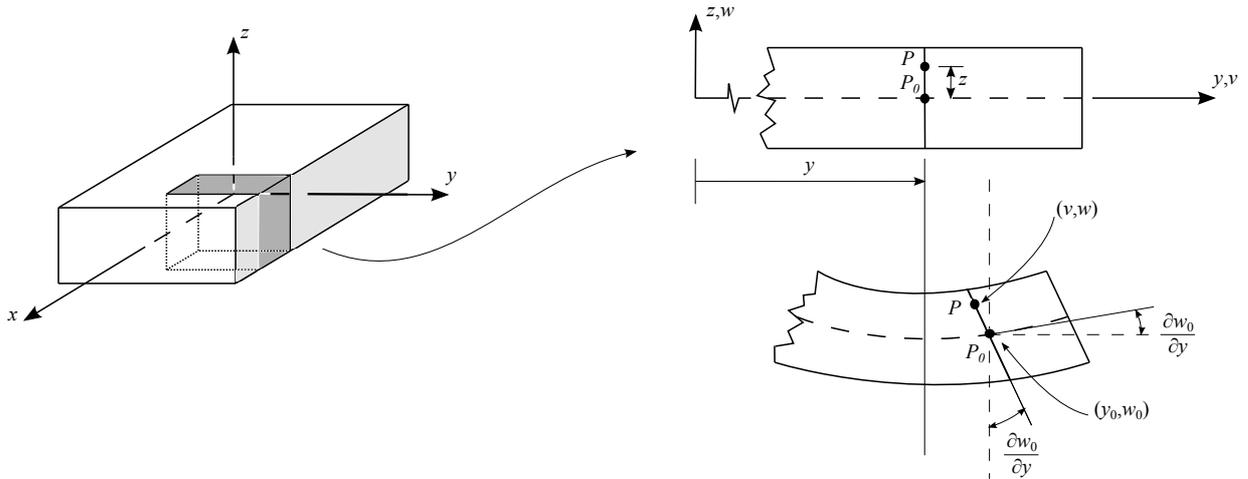
## 2.4 Teoria Clássica de Laminação

A Teoria Clássica de Laminação (TCL) ou Teoria Clássica de Placas Laminadas (TCPL) é uma extensão para compósitos laminados da teoria de placas delgadas com material homogêneo de Kirchhoff. A TCL, a Teoria de Primeira Ordem de Laminação (ou Teoria das Deformações de Cisalhamento de Primeira Ordem), dentre outras teorias, são derivadas da Teoria da Elasticidade tridimensional, onde hipóteses simplificadoras são feitas no que tange às relações cinemáticas de deformação ou estados de tensões ao longo da espessura do laminado.<sup>9</sup>

A partir dessas simplificações, o problema tridimensional passa a ser tratado como bidimensional.

A hipótese básica para esta teoria é que uma linha reta e perpendicular à superfície média da placa permanece reta e perpendicular à superfície média da placa após a deformação e não apresenta deformação na direção do seu eixo (inextensível), como ilustra a Figura 5. A partir desta hipótese, conclui-se que o deslocamento transversal é independente da coordenada transversal  $z$  e as deformações  $\epsilon_z$ ,  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  são nulas.

Figura 5 – Indeformada e deformada de uma faixa de uma placa (hipótese de Kirchoff).



Fonte: Elaborado pelo autor.

#### 2.4.1 Relações entre deslocamentos e deformações

Considera-se uma placa de espessura total  $h$  composta por  $n$  lâminas ortotrópicas com as coordenadas principais do material  $(x_1^k, x_2^k, x_3^k)$  de uma lâmina genérica  $k$  orientada a um ângulo  $\theta^k$  em relação à coordenada  $x$  do laminado, como mostrado na Figura 6. A lâmina  $k$  é localizada entre dois pontos  $z = z_k$  e  $z = z_{k+1}$  na direção da espessura.

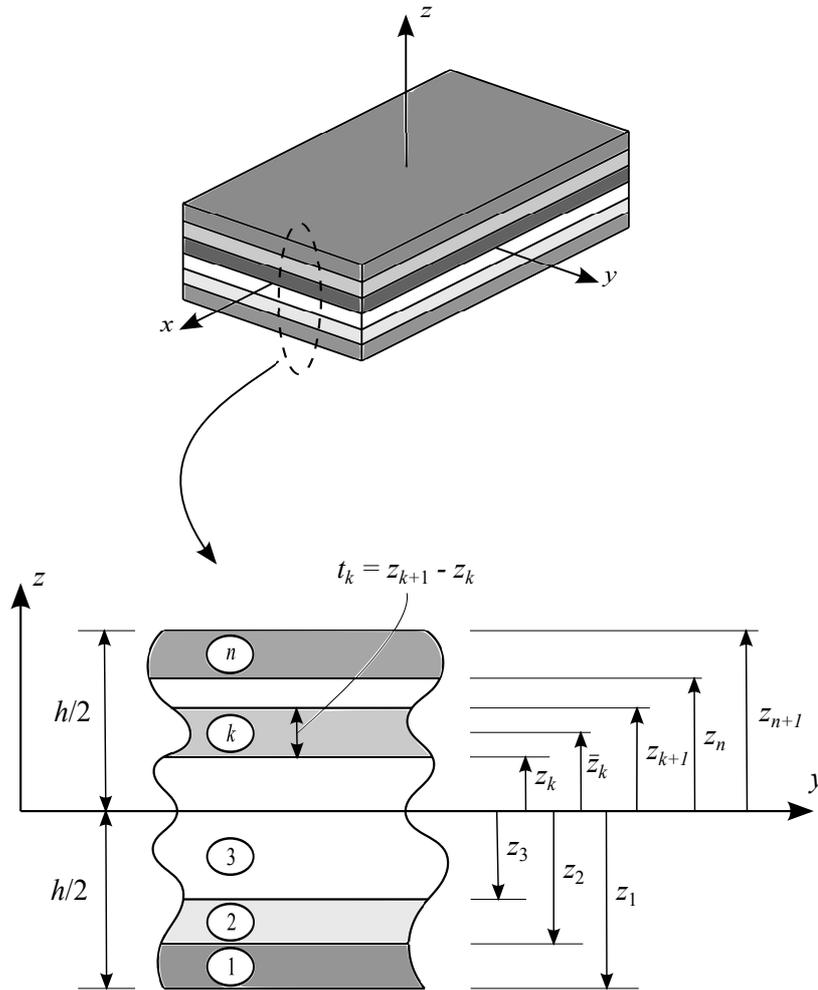
Devido a hipótese de pequenos deslocamentos e pequenas deformações, o campo de deslocamento para qualquer ponto  $P$  da placa é dado por:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\theta_y \\ u_y(x, y, z) &= v_0(x, y) - z\theta_x \\ u_z(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (15)$$

onde  $u_0$ ,  $v_0$  e  $w_0$  são os deslocamentos do ponto  $P_0$  da superfície média da placa nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, e  $\theta_y$  e  $\theta_x$  são as rotações das retas normais segundo os eixos coordenados  $x$  e  $y$ , respectivamente. De acordo com a hipótese de Kirchhoff, tem-se que:

$$\theta_x = \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad \text{e} \quad \theta_y = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (16)$$

Figura 6 – Placa laminada.



Fonte: Adaptado de Reddy.<sup>9</sup>

onde as rotações serão positivas quando os vetores que as representam apontarem para o sentido positivo dos eixos (regra da mão direita).

A partir das relações cinemáticas da Teoria da Elasticidade, têm-se as deformações em qualquer ponto da placa:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial^2 x} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial^2 y} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Pode-se verificar que as deformações são compostas de duas parcelas. A primeira parcela corresponde às componentes de membrana (deformações da superfície média do laminado), e a segunda parcela corresponde às deformações de flexão. A Equação (17) pode ser

escrita, simbolicamente, na forma compacta:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_m + z\boldsymbol{\kappa} \quad (18)$$

onde  $\boldsymbol{\varepsilon}_m$  são as deformações de membrana e  $\boldsymbol{\kappa}$ , as curvaturas da superfície média da placa.

#### 2.4.2 Relações entre esforços e deformações

No caso de placas é mais conveniente trabalhar com os esforços por unidade de comprimento do que utilizar diretamente as tensões. Utilizando-se a Equação (12), as tensões em um lâmina genérica  $k$  podem ser escritas como:

$$\boldsymbol{\sigma}^k = \bar{\mathbf{Q}}^k \boldsymbol{\varepsilon}^k \quad (19)$$

A partir das Equações (18) e (19), as forças e momentos resultantes por unidade de comprimento (tensões generalizadas) são obtidos por integração das tensões ao longo da espessura do laminado. Assim,

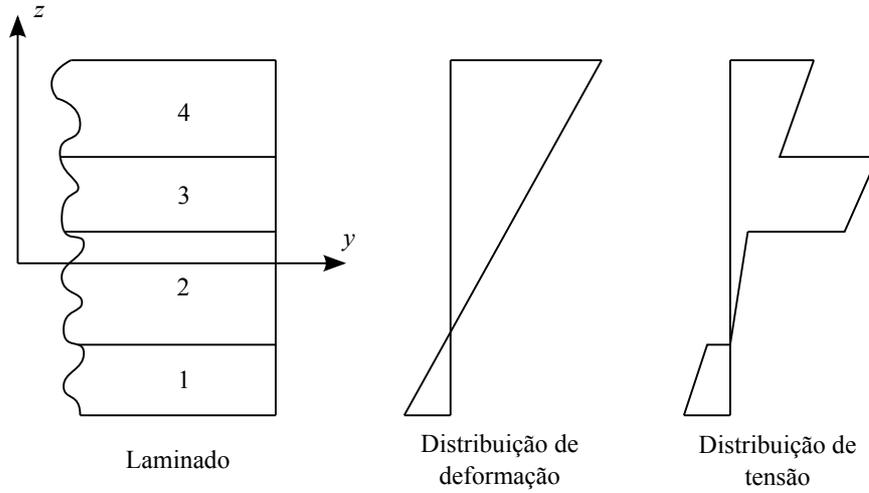
$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{31} & \bar{Q}_{32} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix}^k \left[ \int_{z_{k+1}}^{z_k} \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right) dz \right] \\ \mathbf{M} &= \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{31} & \bar{Q}_{32} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix}^k \left[ \int_{z_{k+1}}^{z_k} \left( z \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right) dz \right] \end{aligned} \quad (20)$$

Vale ressaltar que embora as componentes das deformações sejam contínuas ao longo da espessura (Equação 18), as componentes de tensão podem não ser contínuas entre as lâminas. Isto ocorre porque as deformações dependem apenas das relações cinemáticas (Equação 17), enquanto as componentes de tensão dependem da matriz  $\bar{\mathbf{Q}}$  que pode variar de uma lâmina para outra. Na Figura 7, ilustra-se uma variação hipotética da deformação e da tensão ao longo da espessura do laminado.

A realização das integrações da Equação (20) conduz a:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{11} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{11} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Figura 7 – Variação de deformação e tensão ao longo da espessura do laminado.



Fonte: Elaborado pelo autor.

onde:

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^k (z_{k+1} - z_k) = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^k t_k \\
 B_{ij} &= \sum_{k=1}^n \frac{\bar{Q}_{ij}^k (z_{k+1}^2 - z_k^2)}{2} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^k t_k \bar{z}_k \\
 D_{ij} &= \sum_{k=1}^n \frac{\bar{Q}_{ij}^k (z_{k+1}^3 - z_k^3)}{3} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^k \left( \frac{t_k^3}{12} + t_k \bar{z}_k^2 \right)
 \end{aligned} \tag{22}$$

Nesta equação, o parâmetro  $t_k$  representa a espessura da lâmina  $k$  e  $\bar{z}_k$  representa a distância do centro da lâmina  $k$  ao centro do laminado (Figura 6).

A Equação (21) também pode ser escrita na forma compacta:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \tag{23}$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}$  correspondem às tensões generalizadas (esforços internos) e às deformações generalizadas do laminado, respectivamente. A sub-matriz  $\mathbf{A}$  representa a rigidez de membrana, a sub-matriz  $\mathbf{D}$  representa a rigidez à flexão e a sub-matriz  $\mathbf{B}$  representa o acoplamento membrana-flexão.

### 2.4.3 Influência do esquema de laminação

As Equações (21) a (23) mostram que, para um laminado em geral, todos os termos da matriz  $\mathbf{C}$  que relacionam os esforços e deformações podem ser não nulos. Portanto, diversos acoplamentos entre esforços e deformações podem ocorrer. Entretanto, alguns desses

acoplamentos são indesejáveis. Por exemplo, um elemento estrutural laminado que apresenta desacoplamento entre membrana e flexão tende a não torcer ou fletir com a variação térmica presente no processo de fabricação (diferença entre a temperatura de cura e a temperatura de utilização).<sup>8,9</sup>

A seguir, discute-se como alterações feitas no esquema de laminação influenciam no comportamento mecânico da placa laminada. A ênfase é posta em laminados cujas características são semelhantes às laminações utilizadas no decorrer deste trabalho. Daniel e Ishai,<sup>2</sup> Jones,<sup>8</sup> Reddy<sup>9</sup> e Mendonça<sup>29</sup> apresentam estudos mais detalhados sobre casos especiais de laminados e sua influência na matriz **C**.

#### 2.4.3.1 Laminados simétricos

O laminado é simétrico quando apresenta esquema de laminação, materiais e espessura de camadas simétricas em relação à superfície média. Por exemplo, a laminação [45/90/0/0/90/45] representa um laminado *angle-ply* simétrico. Do mesmo modo, um laminado com número ímpar de camadas pode ser simétrico, por exemplo [90/0/90/0/90], no qual a superfície média divide a camada do meio em duas. Uma consequência dessa simetria é a ausência de acoplamento membrana-flexão, que resulta de **B** nulo. Para esse tipo de laminado, a Equação (21) torna-se:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

Isso ocorre porque para cada valor de  $\bar{z}$  positivo no somatório da Equação (22) existe um valor negativo correspondente. As tensões generalizadas para um laminado simétrico, em geral, têm a mesma forma que placas ortotrópicas com apenas uma única lâmina.<sup>9</sup> Para certos casos especiais de laminados simétricos, a Equação (24) pode assumir uma forma mais simplificada. Por exemplo, para um laminado simétrico *cross-ply*, os termos  $A_{16}$ ,  $A_{26}$ ,  $D_{16}$  e  $D_{26}$  são nulos. Portanto, a Equação (24) torna-se:<sup>8,9</sup>

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

### 2.4.3.2 Laminados antissimétricos

A simetria de um laminado é frequentemente desejável para evitar o acoplamento entre flexão e membrana. Entretanto, há muitas aplicações que necessitam de um laminado antissimétrico para atender requisitos de projeto. Por exemplo, algumas formas de acoplamento são necessárias para fazer as hélices de uma turbina torcerem sem usar moldes complexos.<sup>8</sup>

O laminado é dito antissimétrico quando apresenta esquema de laminação antissimétrico, mas os materiais e espessura são simétricos em relação ao seu plano médio.<sup>9</sup> Laminados com estas características possuem os termos  $A_{16}$ ,  $A_{26}$ ,  $D_{16}$  e  $D_{26}$  nulos, indicando ausência de acoplamento cisalhamento-extensão e flexão-torção.<sup>9</sup> Os laminados antissimétricos têm sempre um número par de camadas, por exemplo,  $[-25/35/0/-65/65/0/-35/25]$ . Neste caso, para um laminado antissimétrico geral, a Equação (21) torna-se:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{11} & B_{22} & B_{26} \\ 0 & 0 & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{11} & D_{22} & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

A antissimetria para laminados *angle-ply* com alternância das orientações, por exemplo, a laminação  $[-45/40/-15/15/-40/45]$ , leva a Equação (21) assumir a forma:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & B_{26} \\ 0 & 0 & A_{66} & B_{16} & B_{26} & 0 \\ 0 & 0 & B_{16} & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & B_{26} & D_{11} & D_{22} & 0 \\ B_{16} & B_{26} & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

uma vez que os termos  $A_{16}$ ,  $A_{26}$ ,  $D_{16}$ ,  $D_{26}$ ,  $B_{11}$ ,  $B_{22}$ , e  $B_{66}$  são nulos. Reddy<sup>9</sup> afirma que para laminados *angle-ply* com espessura fixa, quando o número de lâminas aumenta, os termos  $B_{16}$  e  $B_{26}$  da equação acima podem ser desprezados, pois eles tenderão a zero.

Quando os laminados antissimétricos são *cross-ply*, por exemplo,  $[90/0/90/0/90/0]$ , os termos  $B_{12}$ ,  $B_{16}$ ,  $B_{26}$  e  $B_{66}$  são nulos, mas ainda haverá o efeito de acoplamento membrana-flexão, pois os termos  $B_{11}$  e  $B_{22}$  não são nulos e  $B_{22} = -B_{11}$ . Neste caso, a Equação (21)

fica:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & -B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ B_{11} & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & -B_{11} & 0 & D_{11} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} \quad (28)$$

A laminação anterior apresenta uma característica intrínseca. Para um laminado cuja espessura é fixa, quando se aumenta o número de lâminas o termo  $B_{11}$  tende a zero. Portanto, o efeito do acoplamento diminui, permitindo que os efeitos de membrana e flexão sejam desacoplados.

Se o esquema de laminação não for simétrico nem antissimétrico, o laminado é dito assimétrico, por exemplo  $[15/-45/30/-60/0/-25/90]$ .

#### 2.4.3.3 Laminados balanceados

Os laminados são ditos balanceados quando para cada lâmina existe outra lâmina com mesmo material e espessura, mas com orientação oposta. Segundo Reddy,<sup>9</sup> os pares de camadas não precisam estar simetricamente distribuídos em relação à superfície média. A característica principal de qualquer laminado balanceado é que os termos  $A_{16}$  e  $A_{26}$  são nulos, devido aos termos  $\bar{Q}_{16}$  e  $\bar{Q}_{26}$  da Equação (14) terem os sinais opostos. Para este tipo de laminado, a Equação (21) conduz a:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{11} & B_{22} & B_{26} \\ 0 & 0 & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{11} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} \quad (29)$$

A definição de laminados balanceados não parece unânime. Segundo Jones,<sup>8</sup> laminados balanceados necessariamente são simétricos. Neste caso, a Equação (21) fica:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} \quad (30)$$

### 3 TEORIAS DE VIGAS LAMINADAS DE PAREDE FINA

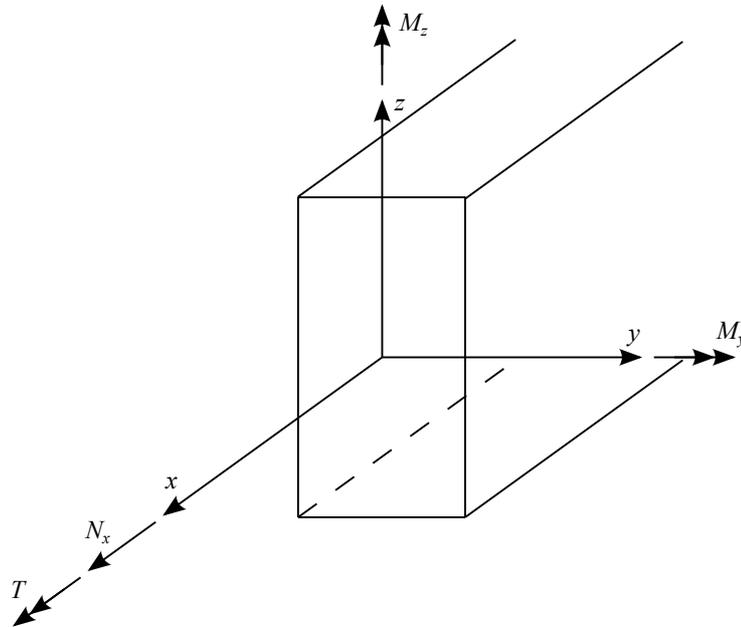
As relações constitutivas de viga laminada de parede fina empregadas nos elementos finitos desenvolvidos nesta dissertação são apresentadas neste capítulo. É importante destacar que a eficácia da aplicação desses elementos finitos de pórticos espaciais depende de uma avaliação cuidadosa dessa relação. Contudo, a determinação de tal relação constitutiva é uma tarefa difícil, devido ao esquema de laminação e à geometria da seção.

Considerando-se laminações e uma geometria da seção transversal quaisquer, e desprezando os efeitos da deformação devido ao cisalhamento transversal e do empenamento, a relação constitutiva da viga laminada de parede fina pode ser escrita na forma:<sup>31</sup>

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_y \\ M_z \\ T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{34} & C_{35} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \\ \beta \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_v = \mathbf{C}_v \boldsymbol{\epsilon}_v \quad (31)$$

onde  $N_x$  é a força normal,  $M_y$  e  $M_z$  são os momentos fletores segundo os eixos  $y$  e  $z$ ,  $T$  é o torque (momento torçor),  $\epsilon_x$  é a deformação axial na direção  $x$ ,  $\kappa_y$  e  $\kappa_z$  são as curvaturas de viga segundo os eixos  $y$  e  $z$ ,  $\beta$  é a taxa de variação do ângulo de torção (Figura 8),  $\mathbf{C}_v$  é a matriz constitutiva da viga, cujos coeficientes representam as rigidezes seccionais da viga.

Figura 8 – Esforços de viga e sistema de coordenada global.



Fonte: Elaborado pelo autor.

É interessante observar que, para uma viga de material isotrópico e com dupla simetria, as relações da Equação (31) baseadas nas teorias de Euler-Bernoulli-Navier e St. Venant

são desacopladas (i.e.  $C_{11} = EA$ ,  $C_{22} = EI_y$ ,  $C_{33} = EI_z$ ,  $C_{44} = GJ$  e demais termos nulos):

$$\begin{pmatrix} N_x \\ M_y \\ M_z \\ T \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \\ \beta \end{pmatrix} \quad (32)$$

Diversas abordagens são encontradas na literatura para obter e aumentar a fidelidade (proximidade com a realidade) da "clássica" ou "padrão" matriz  $C_v$  dada na Equação (31). Dois exemplos importantes desse refinamento são as teorias de Timoshenko e Vlasov.<sup>41</sup> Essa é de suma importância para vigas com seção transversal aberta e a matriz  $C_v$  torna-se 5x5.<sup>42,43</sup> Já aquela possui uma matriz  $C_v$  6x6.<sup>44</sup> Se ambos os refinamentos são consideradas, a matriz  $C_v$  torna-se 7x7.<sup>45</sup> Encontram-se na literatura matrizes 8x8<sup>46,47</sup> e 9x9<sup>48,49</sup> para avaliação de vigas caixão e perfis de seção aberta.

É importante salientar que, quanto maior é o refinamento da teoria (abordagem) para obter  $C_v$  maiores são as dificuldades de formulação e de representação das condições de contorno do problema.<sup>41</sup> Além do maior custo computacional, devido ao aumento do número de graus de liberdade.

Para analisar vigas laminadas de seção retangular, abordagens baseadas nas hipóteses de Estado Plano de Tensões, Estado Plano de Deformações e Arranjo de Lâminas são encontradas na literatura.<sup>50</sup> Essa última abordagem despreza totalmente a integração entre as lâminas, como se cada lâmina pudesse se deformar de maneira independente das demais.<sup>50</sup> Reddy<sup>9</sup> e Mendonça<sup>29</sup> tratam de vigas laminadas de seção retangular com uma abordagem mais simples, uma vez que estas vigas correspondem basicamente a placas muito longas em uma direção.

A forma clássica para analisar vigas de seção não retangular é através da utilização de módulos de elasticidade equivalentes determinados pela TCL, sendo essa abordagem conhecida como homogeneização. O objetivo da homogeneização é determinar um material fictício que apresente as mesmas características equivalentes às do material heterogêneo utilizado na fabricação de determinado elemento estrutural. Assim, a homogeneização envolve a ideia de média, já que as propriedades de um material heterogêneo podem variar de ponto a ponto. Neste caso, a Equação (31) é semelhante à de uma viga isotrópica e homogênea, uma vez que utilizam-se as propriedades seccionais clássicas (i.e.  $EA$ ,  $EI_y$ ,  $EI_z$ ,  $EI_{yz}$ ,  $GJ$ ). Esse método é simples, mas nem sempre leva a resultados aceitáveis. Cardoso *et al.*<sup>51</sup> e Cardoso e Valido<sup>52</sup> utilizaram tal técnica para otimizar vigas laminadas de parede fina.

Vo e Lee<sup>44</sup> propuseram uma metodologia para análise não linear geométrica de vigas laminadas de parede fina de seção aberta, com a matriz constitutiva 6x6 que considerava o efeito do cisalhamento. Variando o esquema de laminação, eles analisaram perfis I e Z e compararam com resultados de elementos finitos e da literatura e obtiveram ótima concordância

entre os resultados.

Lee e Lee<sup>42</sup> propuseram um modelo baseado numa matriz constitutiva 5x5, que considerava o efeito do empenamento, para analisar perfis I laminados simétricos e assimétricos submetidos à torção e a cargas transversais. Esse modelo é baseado na TCL e considera o acoplamento flexão-torção. Modelos de elementos finitos de casca foram desenvolvidos para verificar a acurácia de tal modelo. Lee e Lee<sup>42</sup> variaram o esquema de laminação, condições de contorno e condições de carregamento, obtendo ótima concordância entre o modelo proposto e os modelos de elementos finitos desenvolvidos. Baseado no modelo de Lee e Lee,<sup>42</sup> Vo e Lee<sup>43</sup> expandiram tal metodologia para o caso de vigas caixão.

Sheikh e Thomsen<sup>45</sup> propuseram um elemento finito para analisar vigas laminadas de parede fina de seções transversais abertas e fechadas baseado numa matriz constitutiva 7x7, uma vez que os efeitos da deformação de cisalhamento e do empenamento são considerados. Eles analisaram vigas caixão, perfis I e C. Os resultados obtidos apresentaram ótima concordância quando comparados com resultados experimentais, soluções analíticas e elementos finitos de casca.

Salim e Davalos<sup>48</sup> expandiram a teoria de Vlasov para analisar vigas laminadas de parede fina de seção aberta e fechada. Os efeitos da deformação de cisalhamento, empenamento, bem como todos os possíveis acoplamentos entre esforços e deformações foram considerados. Neste caso, a matriz  $C_v$  é 9x9. Eles analisaram vigas caixão submetidas à torção pura e compararam com modelos de elementos finitos, micro e macro-mecânica e experimentais, obtendo ótima concordância com todos os modelos.

Kim *et al.*<sup>53</sup> também utilizaram a teoria de Vlasov para desenvolver uma metodologia de análise de vigas laminadas de parede fina. Eles consideraram apenas seções abertas sujeitas à torção. Para verificar sua metodologia de análise, Kim *et al.*<sup>53</sup> compararam as respostas obtidas com perfis I e C com a resposta obtida através de modelos de elementos finitos de casca e soluções analíticas.

Pluzsik e Kollar<sup>54</sup> propuseram uma metodologia de análise para tratar vigas de parede fina de seção fechada e ortotrópica. O efeito da deformação devido ao cisalhamento é considerado no tratamento ao empenamento restringido, que pode superestimar a rigidez de empenamento caso tal efeito não seja considerado. Os autores simularam vigas caixão biapoiadas submetidas a um torque senoidal. Ótima concordância foi obtida com resultados de elementos finitos.

Cesnik e Hodges<sup>55</sup> apresentaram um modelo de elemento finito bidimensional, que resultou no *software* VABS (*Variational Asymptotical Beam Sectional Analysis*), para determinar as propriedades seccionais de vigas laminadas. Essa abordagem é baseada no método denominado VAM (*Variational Asymptotic Method*).<sup>56</sup> Esse método divide o modelo tridimensional em dois modelos: um bidimensional na seção transversal e outro de viga ao longo do comprimento.

No intuito de avaliar a influência de diversos efeitos sobre o problema, principal-

mente os efeitos da deformação devido ao cisalhamento e do empenamento, Volovoi *et al.*<sup>41</sup> analisaram diversas teorias de vigas laminadas de parede fina. Segundo Volovoi *et al.*,<sup>41</sup> em muitos casos práticos, uma matriz  $\mathbf{C}_v$  4x4 bem formulada conduz a bons resultados, principalmente, para vigas de seção fechada. Utilizando uma teoria mais refinada para esse tipo de problema, o ganho é pequeno. Volovoi *et al.*<sup>41</sup> também afirmam que os efeitos da deformação de cisalhamento, bem como do empenamento não são importantes para vigas de seção fechada. Contudo, tais efeitos tornam-se importantes quando o comprimento dessas vigas é pequeno em relação às dimensões características da seção. No que tange ao empenamento, o seu efeito é imprescindível para vigas de seção transversal aberta, mas não é importante para as de seção fechada. Assim como Volovoi *et al.*,<sup>41</sup> Pluzsik e Kollar<sup>57</sup> concluíram o mesmo por meio de modelos de elementos finitos de casca.

Pode-se observar que há uma gama bastante grande de metodologias/teorias para tratar vigas laminadas de parede fina, considerando seções abertas e/ou fechadas. Algumas metodologias consideram a influência da deformação de cisalhamento e do empenamento. Assim, considerando-se as conclusões de Volovoi *et al.*<sup>41</sup> e Pluzsik e Kollar<sup>57</sup> e o foco deste trabalho em seções fechadas, utilizam-se três abordagens para analisar vigas laminadas de parede fina: Método da Homogeneização;<sup>29</sup> teoria de Massa e Barbero;<sup>30</sup> teoria de Kollar e Pluzsik.<sup>31</sup>

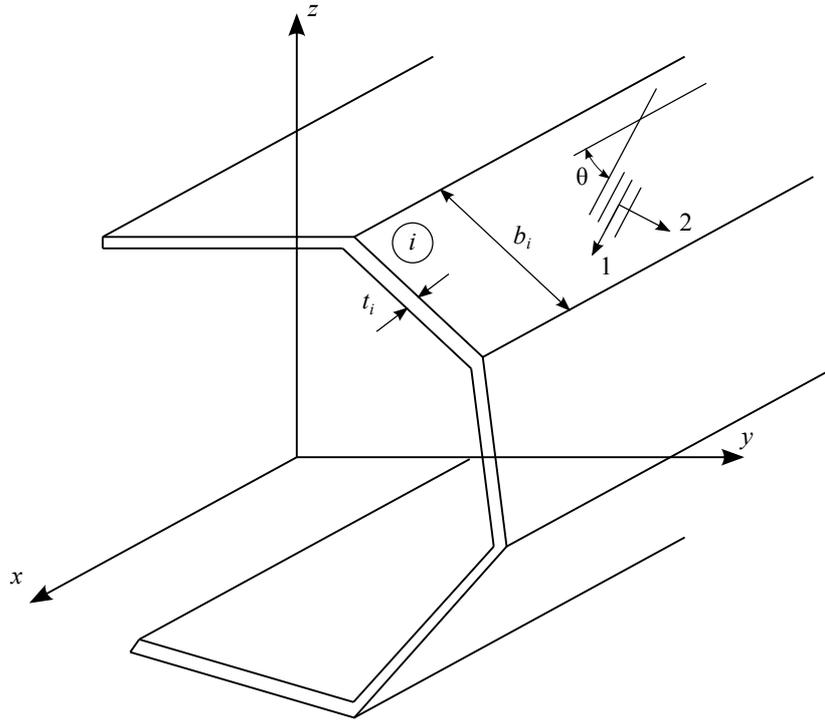
Inicialmente, apresenta-se a técnica de homogeneização conhecida como Método da Flexibilidade do Material.<sup>29</sup> Em seguida, apresenta-se a teoria de Massa e Barbero<sup>30</sup> e, por fim, a de Kollar e Pluzsik.<sup>31</sup> Esta considera todos os possíveis acoplamentos entre esforços e deformações, já aquela apresenta um desacoplamento entre esforços e deformações. A teoria de Massa e Barbero<sup>30</sup> é modificada para melhorar, mesmo que de forma indireta, a representação dos possíveis acoplamentos nos segmentos que compõem a seção transversal da viga na chamada matriz de rigidez reduzida, conforme será visto posteriormente. Neste capítulo, os conceitos básicos de tais abordagens são apresentados e particularizados para o caso de vigas tubulares de seção circular.

### 3.1 Homogeneização

Nesta abordagem, cada segmento da seção transversal da viga é modelado como uma placa laminada (Figura 9). A rigidez da viga é computada pela contribuição da rigidez de cada segmento. A rigidez de cada segmento é obtida pelo produto das propriedades elásticas ( $E$  e  $G$ ) com as propriedades geométricas.

As propriedades elásticas de cada segmento são obtidas através de técnicas de homogeneização. Há dois métodos clássicos de homogeneização de laminados bastante utilizados: Método da Rigidez do Material (MRM) e Método da Flexibilidade do Material (MFM). O primeiro método parte da matriz de rigidez do laminado  $\mathbf{C}$  (Equação 23) com os termos  $B_{ij}$  nulos, por este motivo, tal método é conhecido como Método da Rigidez do Material. O segundo método parte da matriz de flexibilidade do laminado (inversa da matrix  $\mathbf{C}$  com todos os acopla-

Figura 9 – Seção transversal qualquer.



Fonte: Elaborado pelo autor.

mentos possíveis), por tal motivo, esse método é conhecido como Método da Flexibilidade do Material. O MFM é mais adequado para laminados não-simétricos ou não-ortotrópicos do que MRM, uma vez que o MFM considera parcialmente os efeitos dos acoplamentos no processo de inversão da matriz  $\mathbf{C}$ .<sup>29</sup> Assim, nesta dissertação, considera-se apenas o MFM.

A matriz de flexibilidade do laminado é definida como a matriz que transforma as deformações em esforços. Invertendo-se a Equação (23), tem-se que:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta}^t & \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} \quad (33)$$

Portanto, a matriz de flexibilidade ( $\mathbf{C}^{-1}$ ) é a inversa da matriz de rigidez ( $\mathbf{C}$ ) do laminado.

A homogeneização pelo MFM consiste em igualar a matriz de flexibilidade de uma placa laminada com a matriz de flexibilidade de uma placa de material ortotrópico de mesma espessura  $h$  cujas direções principais estão alinhadas com os eixos globais (i.e.  $\theta = 0^\circ$ ). Assim,

$$\mathbf{C}_{orto}^{-1} = \mathbf{C}^{-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{orto} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\delta}_{orto} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta}^t & \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} \quad (34)$$

As propriedades de membrana e flexão podem então ser calculadas a partir das igualdades:

$$\boldsymbol{\alpha}_{orto} = \boldsymbol{\alpha} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\delta}_{orto} = \boldsymbol{\delta} \quad (35)$$

Pode-se verificar que a Equação (34) despreza o acoplamento membrana-flexão ( $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ ). Contudo, no processo de inversão da matriz  $\mathbf{C}$ , a matriz de flexibilidade  $\mathbf{C}^{-1}$  capta tal efeito ( $\mathbf{B} \neq 0$ ) de forma indireta.

No caso das propriedades de membrana (extensão), tem-se:

$$\frac{1}{h} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{16} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{26} \\ \alpha_{16} & \alpha_{26} & \alpha_{66} \end{bmatrix} \quad (36)$$

A partir das Equações (2) e (4) obtém-se um sistema de 4 equações e 4 incógnitas cuja solução é dada por:

$$\begin{aligned} S_{11} = h\alpha_{11} = \frac{1}{E_x} & \Rightarrow E_x^m = \frac{1}{h\alpha_{11}} \\ S_{12} = h\alpha_{12} = \frac{-v_{xy}}{E_x} & \Rightarrow v_{xy}^m = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} \\ S_{22} = h\alpha_{22} = \frac{1}{E_y} & \Rightarrow E_y^m = \frac{1}{h\alpha_{22}} \\ S_{66} = h\alpha_{66} = \frac{1}{G_{xy}} & \Rightarrow G_{xy}^m = \frac{1}{h\alpha_{66}} \end{aligned} \quad (37)$$

O sobrescrito  $m$  indica que a propriedade é obtida através da relação de membrana.

Para o comportamento de flexão, o procedimento é análogo. Assim,

$$\frac{12}{h^3} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{16} \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \delta_{26} \\ \delta_{16} & \delta_{26} & \delta_{66} \end{bmatrix} \quad (38)$$

então:

$$\begin{aligned} S_{11} = \frac{h^3}{12}\delta_{11} = \frac{1}{E_x} & \Rightarrow E_x^f = \frac{12}{h^3\delta_{11}} \\ S_{12} = \frac{h^3}{12}\delta_{12} = \frac{-v_{xy}}{E_x} & \Rightarrow v_{xy}^f = \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} \\ S_{22} = \frac{h^3}{12}\delta_{22} = \frac{1}{E_y} & \Rightarrow E_y^f = \frac{12}{h^3\delta_{22}} \\ S_{66} = \frac{h^3}{12}\delta_{66} = \frac{1}{G_{xy}} & \Rightarrow G_{xy}^f = \frac{12}{h^3\delta_{66}} \end{aligned} \quad (39)$$

O sobrescrito  $f$  indica que a propriedade é obtida através das relações de flexão.

Desta forma, as rigidezes seccionais da viga laminada são computadas através de:<sup>51</sup>

$$\begin{aligned}
 \overline{EA} &= \sum_{i=1}^N E_{x_i}^m A_i \\
 \overline{EI}_z &= \sum_{i=1}^N E_{x_i}^m I_{z_i} \\
 \overline{EI}_y &= \sum_{i=1}^N E_{x_i}^m I_{y_i} \\
 \overline{EI}_{yz} &= \sum_{i=1}^N E_{x_i}^m I_{yz_i}
 \end{aligned} \tag{40}$$

sendo  $N$  o número total de segmentos,  $A_i$  a área do segmento,  $I_{z_i}$  e  $I_{y_i}$  os momentos de inércia do segmento segundo os eixos  $z$  e  $y$ , respectivamente, e  $I_{yz_i}$  o produto de inércia do segmento.

A rigidez à torção para seções transversais abertas e fechadas são, respectivamente, dadas por:<sup>51</sup>

$$\begin{aligned}
 \overline{GJ} &= \sum_{i=1}^N G_{xy}^f J_i, \quad J_i = \frac{b_i t_i^3}{3} \\
 \overline{GJ} &= \sum_{i=1}^N \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{ds}{G_{xy_i}^m t_i}}
 \end{aligned} \tag{41}$$

onde  $\Omega$  é a área fechada definida pela superfície média da seção transversal e  $\oint ds$  representa a integral ao longo do contorno da seção.

### 3.1.1 Particularização para seção circular

Neste tipo de abordagem, a particularização para seção circular é bastante simples. A partir das Equações (40) e (41), as rigidezes para o tubo podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
 \overline{EA} &= E_x^m \pi (R_e^2 - R_i^2) \\
 \overline{EI}_y &= \overline{EI}_z = E_x^m \frac{\pi}{4} (R_e^4 - R_i^4) \\
 \overline{GJ} &= E_x^m \frac{\pi}{2} (R_e^4 - R_i^4)
 \end{aligned} \tag{42}$$

## 3.2 Teoria de Massa e Barbero

Massa e Barbero<sup>30</sup> e Barbero<sup>58</sup> desenvolveram um metodologia, baseada na Resistência dos Materiais, para analisar vigas laminadas de parede fina com seção transversal fechada e aberta. Tal metodologia resulta em bons resultados para laminados simétricos e balanceados e os efeitos do cisalhamento e do empenamento são considerados. No presente trabalho,

apenas seções fechadas são tratadas e os efeitos do cisalhamento transversal e empenamento são desprezados.

Como no MFM, a principal vantagem dessa teoria reside no fato de poder analisar vigas laminadas de parede fina como vigas de materiais homogêneos e isotrópicos. Isto permite o uso de programas de análise existentes sem modificações. As propriedades geométricas utilizadas nas teorias clássicas de viga, tais como área, momento de inércia, centro de gravidade, dentre outras propriedades geométricas, deixam de ser válidas, pois as propriedades do material podem variar de lâmina para lâmina.<sup>30,58</sup> Portanto, no cálculo da rigidez da seção transversal não é possível separar as propriedades elásticas ( $E$  e  $G$ ) das propriedades geométricas. Por esta razão, é necessário trabalhar com as propriedades equivalentes ( $\overline{EA}$ ,  $\overline{EI}_y$ ,  $\overline{EI}_z$ ,  $\overline{EI}_{yz}$  e  $\overline{GJ}$ ) que incorporam as informações geométricas e dos materiais. Assim, a relação entre os esforços de viga e suas respectivas deformações pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_y \\ M_z \\ T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{EA} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{EI}_y & \overline{EI}_{yz} & 0 \\ 0 & \overline{EI}_{yz} & \overline{EI}_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{GJ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \\ \beta \end{Bmatrix} \quad (43)$$

onde  $N_x$  é a força normal,  $M_y$  e  $M_z$  são os momentos fletores segundo os eixos  $y$  e  $z$ ,  $T$  é o torque (momento torçor),  $\varepsilon_x$  é a deformação axial na direção  $x$ ,  $\kappa_y$  e  $\kappa_z$  são as curvaturas de viga segundo os eixos  $y$  e  $z$ , respectivamente,  $\beta$  é a taxa de variação do ângulo de torção (Figura 8),  $\overline{EA}$  é a rigidez axial,  $\overline{EI}_y$  e  $\overline{EI}_z$  são as rigidezes à flexão segundo os eixos  $y$  e  $z$ , respectivamente,  $\overline{EI}_{yz}$  é o produto de inércia mecânico e  $\overline{GJ}$  é a rigidez à torção.

Nesta seção, apresenta-se a metodologia de análise de vigas laminadas de parede fina proposta por Massa e Barbero.<sup>30</sup> Inicialmente, apresentam-se os conceitos gerais básicos da metodologia, dando-se ênfase para o cálculo das propriedades equivalentes. Uma modificação de tal metodologia é realizada, aqui denominada de Processo Acoplado, como uma tentativa para melhorar a representação dos acoplamentos. Posteriormente, tal metodologia é aplicada para o caso de vigas tubulares de seção circular.

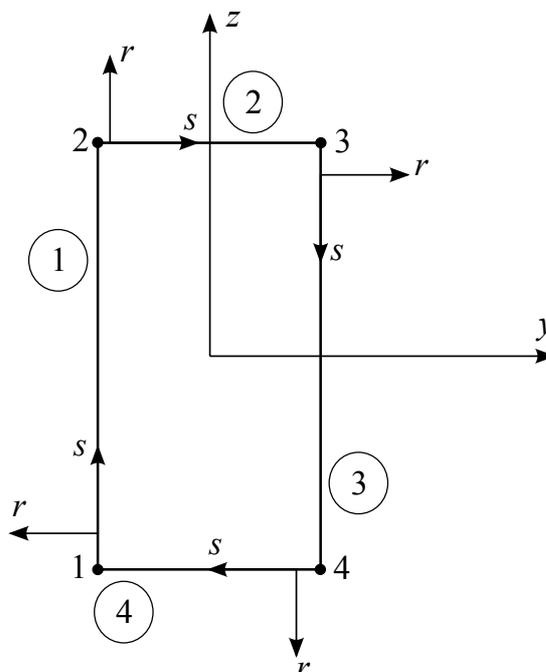
### 3.2.1 Seção transversal

A seção transversal é definida pela linha que passa pelo contorno da superfície média de cada segmento laminado. Os segmentos laminados utilizados para representar a seção transversal podem ser retos, curvos ou áreas concentradas. No caso de segmentos curvos, esses são discretizados em pequenos segmentos retos. Cada segmento laminado é modelado com as equações constitutivas da TCL, ou seja, considera-se uma distribuição linear das deformações normais e de cisalhamento ao longo da espessura da parede da viga.

Na Figura 10, ilustra-se uma seção transversal do tipo caixão. Os números inscritos em círculos definem a numeração dos segmentos, enquanto os demais números definem a

numeração dos nós. A definição de cada segmento é feita em termos dos nós inicial  $n_i$  e final  $n_f$ , que podem ser numerados arbitrariamente. Para uma seção fechada, os segmentos e os nós são numerados consecutivamente, ou seja, o nó final do último segmento coincide com o nó inicial do primeiro segmento.

Figura 10 – Sistema de coordenadas locais ( $s$  e  $r$ ) e numeração dos nós e dos segmentos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Cada segmento tem o seu sistema local de coordenadas. O eixo  $s$  é orientado no sentido do nó  $n_i$  para o nó  $n_f$  (Figura 10). Os outros dois eixos locais são o eixo  $x$ , que é paralelo ao eixo global  $x$  (Figura 8), e o eixo  $r$ , cuja definição é dada pelo produto vetorial  $r = x \times s$ . É importante ressaltar que a definição do eixo  $r$  é de suma importância, pois ele define a direção do empilhamento das lâminas.

As integrais para determinação das propriedades equivalentes são avaliadas segmento por segmento, contabilizando a contribuição de todos eles. A ordem em que os segmentos são definidos e as orientações das coordenadas locais  $s$  em cada segmento deve permitir a correta integração no contorno da seção transversal.

### 3.2.2 Rigidez reduzida

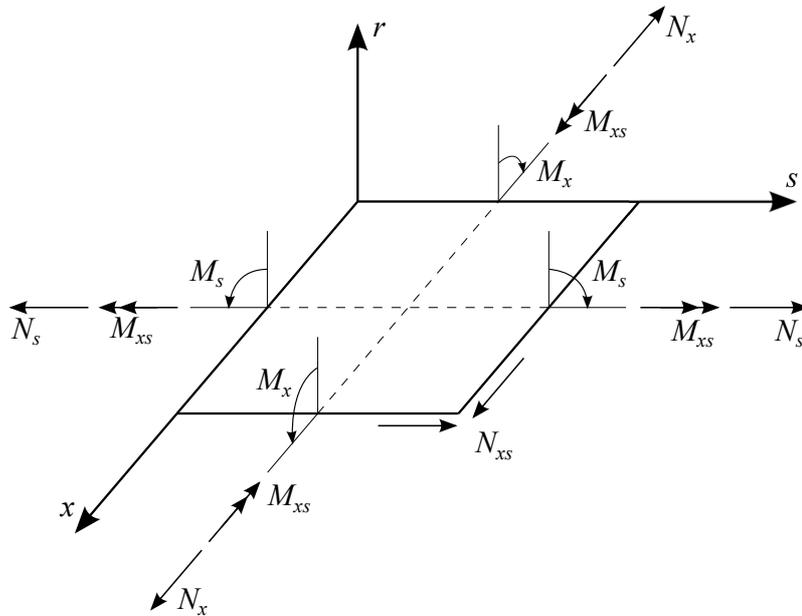
Cada segmento  $i$  da seção transversal é modelado inicialmente como uma placa fina usando a equação de flexibilidade de uma placa laminada. Negligenciando-se as deformações de cisalhamento transversal e substituindo-se a direção  $y$  por  $s$ , a inversão da Equação (21)

resulta:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^i \\ \varepsilon_s^i \\ \gamma_{xs}^i \\ \kappa_x^i \\ \kappa_s^i \\ \kappa_{xs}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{16} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{26} & \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{26} \\ \alpha_{16} & \alpha_{26} & \alpha_{66} & \beta_{61} & \beta_{62} & \beta_{66} \\ \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{61} & \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{16} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{62} & \delta_{12} & \delta_{22} & \delta_{26} \\ \beta_{16} & \beta_{26} & \beta_{66} & \delta_{16} & \delta_{26} & \delta_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x^i \\ N_s^i \\ N_{xs}^i \\ M_x^i \\ M_s^i \\ M_{xs}^i \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_m \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^t & \delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} \quad (44)$$

onde  $N_x^i$  e  $N_s^i$  são forças normais,  $N_{xs}^i$  é a força cisalhante no plano  $xs$ ,  $M_x^i$  e  $M_s^i$  são os momentos fletores,  $M_{xs}^i$  é o momento torçor. A Figura 11 ilustra tais esforços para um laminado de um segmento  $i$  qualquer. Ressalta-se que todos os esforços supracitados são por unidade de comprimento.

Figura 11 – Esforços resultantes por unidade de comprimento.



Fonte: Elaborado pelo autor

O sobrescrito  $( )^i$  e o subscrito  $( )_i$  são usados não apenas para indicar o número do segmento, mas também para diferenciar as grandezas de placa  $N_x^i, N_s^i, N_{xs}^i, M_x^i, M_s^i, M_{xs}^i, \varepsilon_x^i, \varepsilon_s^i, \gamma_{xs}^i, \kappa_x^i, \kappa_s^i$  e  $\kappa_{xs}^i$  das grandezas de viga  $N_x, M_y, M_z, T, \varepsilon_x$ , dentre outras que surgirem ao longo da dissertação.

Salienta-se que, embora a sub-matriz  $\mathbf{B}$  definida na Equação (23) seja simétrica ( $\mathbf{B}^t = \mathbf{B}$ ), a sub-matriz  $\beta$  não necessariamente é simétrica ( $\beta^t \neq \beta$ ), ao contrário do que é dito por Massa e Barbero.<sup>30</sup>

Para vigas de parede fina é válido assumir que  $N_s^i = 0$  e  $M_s^i = 0$ .<sup>30,58</sup> Portanto, retendo e rearranjando apenas os esforços e deformações de interesse para o problema de viga,

a Equação (44) torna-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^i \\ \kappa_x^i \\ \gamma_{xs}^i \\ \kappa_{xs}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} & \alpha_{16} & \beta_{16} \\ \beta_{11} & \delta_{11} & \beta_{61} & \delta_{16} \\ \alpha_{16} & \beta_{61} & \alpha_{66} & \beta_{66} \\ \beta_{16} & \delta_{16} & \beta_{66} & \delta_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x^i \\ M_x^i \\ N_{xs}^i \\ M_{xs}^i \end{Bmatrix} \quad (45)$$

Neste momento, Massa e Barbero<sup>30</sup> e Barbero<sup>58</sup> assumem o desacoplamento entre as deformações de membrana e de cisalhamento ( $\alpha_{16} = 0$ ,  $\beta_{16} = 0$ ,  $\beta_{61} = 0$ ,  $\delta = 0$ ). Desta forma, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^i \\ \kappa_x^i \\ \gamma_{xs}^i \\ \kappa_{xs}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} & 0 & 0 \\ \beta_{11} & \delta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{66} & \beta_{66} \\ 0 & 0 & \beta_{66} & \delta_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x^i \\ M_x^i \\ N_{xs}^i \\ M_{xs}^i \end{Bmatrix} \quad (46)$$

A inversão da Equação (46) resulta na matriz de rigidez reduzida:

$$\begin{Bmatrix} N_x^i \\ M_x^i \\ N_{xs}^i \\ M_{xs}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x^i & B_x^i & 0 & 0 \\ B_x^i & D_x^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{xs}^i & C_{xs}^i \\ 0 & 0 & C_{xs}^i & H_{xs}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^i \\ \kappa_x^i \\ \gamma_{xs}^i \\ \kappa_{xs}^i \end{Bmatrix} \quad (47)$$

As últimas manipulações matriciais para chegar à Equação (47) são definidas como Processo Desacoplado.<sup>59</sup> Contudo, o desacoplamento mostrado na Equação (46) só ocorre para laminados com esquema de laminação *cross-ply* e *angle-ply* com grande número de camadas. Portanto, para capturar os efeitos do acoplamento normal-cisalhamento quando existentes, mesmo que de forma indireta, propõe-se aqui a consideração de todos os termos na inversão da Equação (45), de acordo com Mororó *et al.*<sup>59</sup>, sendo os termos de acoplamento somente desprezados após esta operação. Essa segunda abordagem de inversão da Equação (45) é definida como Processo Acoplado.<sup>59</sup> Assim, a inversão da Equação (45) resulta em:

$$\begin{Bmatrix} N_x^i \\ M_x^i \\ N_{xs}^i \\ M_{xs}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{B}_{11} & \bar{A}_{16} & \bar{B}_{16} \\ \bar{B}_{11} & \bar{D}_{11} & \bar{B}_{61} & \bar{D}_{16} \\ \bar{A}_{16} & \bar{B}_{61} & \bar{A}_{66} & \bar{B}_{66} \\ \bar{B}_{16} & \bar{D}_{16} & \bar{B}_{66} & \bar{D}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^i \\ \kappa_x^i \\ \gamma_{xs}^i \\ \kappa_{xs}^i \end{Bmatrix} \quad (48)$$

Agora, negligenciando o acoplamento entre os efeitos normais e de cisalhamento ( $\bar{A}_{16} = \bar{B}_{16} =$

$\bar{B}_{61} = \bar{D}_{16} = 0$ ), a rigidez reduzida pode ser escrita na forma:

$$\begin{Bmatrix} N_x^i \\ M_x^i \\ N_{xs}^i \\ M_{xs}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x^i & B_x^i & 0 & 0 \\ B_x^i & D_x^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{xs}^i & C_{xs}^i \\ 0 & 0 & C_{xs}^i & H_{xs}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^i \\ \kappa_x^i \\ \gamma_{xs}^i \\ \kappa_{xs}^i \end{Bmatrix} \quad (49)$$

Observa-se que a expressão acima possui a mesma forma obtida por Massa e Barbero<sup>30</sup> e Babero,<sup>58</sup> contudo, há a inclusão, mesmo de forma indireta, dos efeitos do acoplamento normal-cisalhamento quando existentes, pois todos os termos da matriz da Equação (45) foram considerados.

Mororó *et al.*<sup>59</sup> analisaram as duas abordagens de inversão para chegar às Equações (47) e (49). Os autores consideraram tanto laminações *cross-ply* simétricas e antissimétricas como *angle-ply* simétricas e antissimétricas. Através de simulações numéricas utilizando elementos finitos de casca, eles verificaram que o Processo Acoplado é mais eficaz que o Processo Desacoplado.

### 3.2.3 Eixo neutro de flexão

Para investigar o significado físico do termo  $B_x^i$ , assume-se um estado de deformação  $\epsilon_x \neq 0$  e todas as outras deformações e curvaturas nulas.<sup>30,58</sup> Portanto, as duas primeiras relações da Equação (49) tornam-se:

$$\begin{aligned} N_x^i &= A_x^i \epsilon_x^i \\ M_x^i &= B_x^i \epsilon_x^i \end{aligned} \quad (50)$$

Resolvendo a equação anterior em função de  $\epsilon_x^i$ , tem-se que:

$$M_x^i = \frac{B_x^i}{A_x^i} N_x^i = e_b N_x^i \quad (51)$$

onde  $e_b$  é a excentricidade com relação à superfície média do segmento. Se uma força  $N_x^i$  atuar com excentricidade  $e_b$ , a força não produzirá curvatura de flexão, apenas a deformação  $\epsilon_x$ . A grandeza  $e_b$  define a localização da superfície neutra de flexão  $s'$  (Figura 12). As coordenadas do eixo de flexão e do eixo que define a superfície média se relacionam na forma:

$$\begin{aligned} y(s') &= y(s) - e_b \sin \alpha_y^i \\ z(s') &= z(s) + e_b \cos \alpha_y^i \end{aligned} \quad (52)$$

onde  $\alpha_y^i$  é o ângulo de orientação do segmento medido em relação ao eixo  $y$  e positivo no sentido anti-horário (Figura 12).

Uma vez definido o eixo neutro de flexão, a rigidez à flexão do segmento é calculada

com relação ao eixo  $s'$  do segmento. Assumindo que  $N_x^i = 0$  e eliminando  $\epsilon_x^i$  nas duas primeiras relações da Equação (49), encontra-se a relação momento-curvatura:

$$M_x^i = \left( D_x^i - \frac{(B_x^i)^2}{A_x^i} \right) \kappa_x^i \quad (53)$$

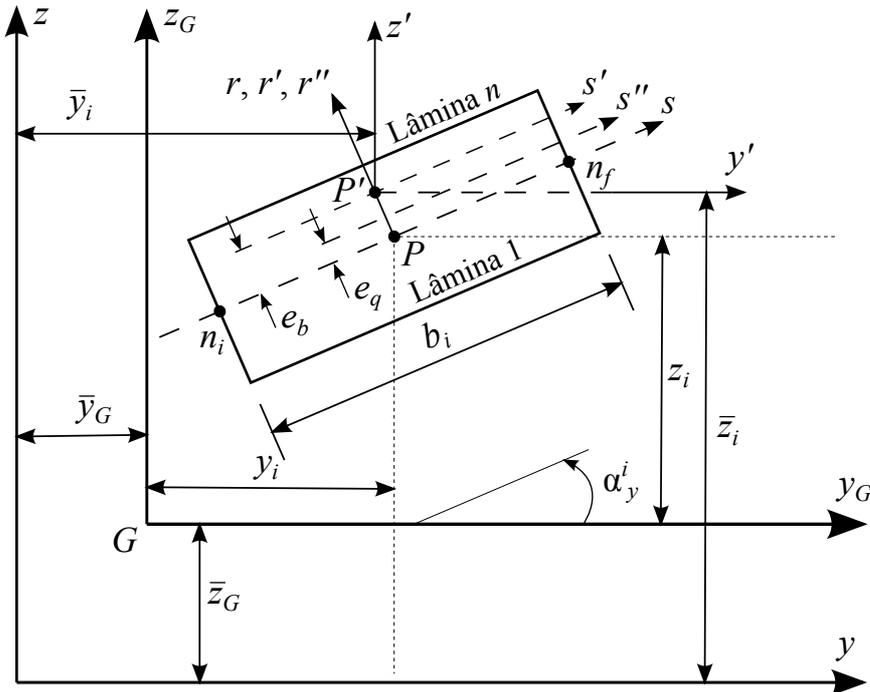
Logo, a rigidez à flexão do segmento por unidade de comprimento pode ser escrita como:

$$\bar{D}_x^i = D_x^i - \frac{(B_x^i)^2}{A_x^i} = D_x^i - e_b^2 A_x^i \quad (54)$$

Assim, definindo  $N_x^i$ ,  $M_x^i$ ,  $\epsilon_x^i$  e  $\kappa_x^i$  em relação ao eixo neutro de flexão, as duas primeiras relações da Equação (49) desacoplam-se:

$$\begin{Bmatrix} N_x^i \\ M_x^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x^i & 0 \\ 0 & \bar{D}_x^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^i \\ \kappa_x^i \end{Bmatrix} \quad (55)$$

Figura 12 – Seção transversal do segmento  $i$ .



Fonte: Adaptado de Massa e Barbero.<sup>30</sup>

### 3.2.4 Eixo neutro de torção

Para investigar o significado físico do termo  $C_x^i$ , assume-se o estado de deformação  $\gamma_{xs}^i \neq 0$  e todas as outras deformações e curvaturas nulas. Assim, as duas últimas relações da

Equação (49) tornam-se:

$$\begin{aligned} N_{xs}^i &= F_{xs}^i \gamma_{xs}^i \\ M_{xs}^i &= C_{xs}^i \gamma_{xs}^i \end{aligned} \quad (56)$$

Resolvendo as relações acima em função de  $\gamma_{xs}^i$ , tem-se:

$$M_{xs}^i = \frac{C_{xs}^i}{F_{xs}^i} N_{xs}^i = e_q N_{xs}^i \quad (57)$$

onde  $e_q$  fornece a localização do eixo neutro de torção  $s''$  para o segmento (Figura 12). Assim, se um fluxo de cisalhamento  $N_{xs}^i$  atuar com excentricidade  $e_q$  com relação à superfície média do segmento,  $N_{xs}^i$  não produzirá curvatura de torção, mas apenas a deformação  $\gamma_{xs}^i$ . As coordenadas do eixo de torção e as da superfície média se relacionam na forma:

$$\begin{aligned} y(s'') &= y(s) - e_q \sin \alpha_y^i \\ z(s'') &= z(s) + e_q \cos \alpha_y^i \end{aligned} \quad (58)$$

Uma vez determinada a posição do eixo neutro de torção, a rigidez à torção do segmento é avaliada com relação ao eixo  $s''$  do segmento. Assumindo que  $N_{xs}^i = 0$  e eliminando  $\gamma_{xs}^i$  nas duas últimas relações da Equação (49), encontra-se a relação momento-curvatura de torção:

$$M_{xs}^i = \left( H_{xs}^i - \frac{(C_{xs}^i)^2}{F_{xs}^i} \right) \kappa_{xs}^i \quad (59)$$

Logo, a rigidez à torção por unidade de comprimento do segmento pode ser escrita como:

$$\bar{H}_{xs}^i = H_{xs}^i - \frac{(C_{xs}^i)^2}{F_{xs}^i} = H_{xs}^i - e_q^2 F_{xs}^i \quad (60)$$

Assim, definindo  $N_{xs}^i$ ,  $M_{xs}^i$ ,  $\epsilon_{xs}^i$  e  $\kappa_{xs}^i$  em relação ao eixo neutro de torção, as duas últimas relações da Equação (49) desacoplam-se:

$$\begin{Bmatrix} N_{xs}^i \\ M_{xs}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{xs}^i & 0 \\ 0 & \bar{H}_{xs}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xs}^i \\ \kappa_{xs}^i \end{Bmatrix} \quad (61)$$

É importante salientar que na determinação dos eixos neutros de flexão e torção foi utilizada a rigidez reduzida obtida por meio da Equação (49) (Processo Acoplado). Essas equações possuem a mesma forma que a descrita anteriormente se fosse considerada a rigidez reduzida obtida por meio da Equação (47) (Processo Desacoplado). Ambos os processos são avaliados em avaliações numéricas apresentadas posteriormente.

### 3.2.5 Rigidez axial

A rigidez axial  $\overline{EA}$  da seção é obtida considerando-se apenas uma deformação normal na direção axial, ou seja,  $\epsilon_x \neq 0$ . A força axial resultante na seção vale:

$$N_x = \int_A \sigma_x dA = \int_s \int_h \sigma_x dr ds = \int_s N_x^i(s') ds \quad (62)$$

A integral na espessura produz  $N_x$  aplicada no eixo neutro de flexão, pois não há curvatura de flexão. Usando a primeira relação da Equação (55), a força axial resultante pode ser escrita da seguinte maneira:

$$N_x = \int_s A_x^i \epsilon_x^i ds = \epsilon_x \int_s A_x^i ds = \overline{EA} \epsilon_x \quad (63)$$

onde

$$\overline{EA} = \int_s A_x^i ds \quad (64)$$

O termo  $\overline{EA}$  representa a rigidez axial da seção e  $\epsilon_x$  representa a deformação uniforme da viga. A integral  $\int_s$  ao longo do contorno da seção transversal reduz-se ao somatório da contribuição de todos os segmentos da seção transversal. Portanto,

$$\overline{EA} = \sum_{i=1}^N A_x^i b_i \quad (65)$$

onde  $N$  é o número de segmentos da seção transversal. Observa-se que o comprimento do segmento é o mesmo independentemente do contorno considerado ( $s$ ,  $s'$  ou  $s''$ ).<sup>30</sup>

### 3.2.6 Centro mecânico de gravidade

O centro mecânico de gravidade da seção transversal é obtido através do equilíbrio de momento da força axial  $N_x$ , resultante das tensões axiais causadas pelo estado constante de deformação, em relação aos eixos  $y$  e  $z$ :

$$\begin{aligned} M_z = N_x \bar{y}_G &= \int_A y(s') \sigma_x dA = \int_s \int_h y(s') \sigma_x dr ds = \int_s y(s') N_x^i(s') ds = \epsilon_x \overline{EA} \bar{y}_G \\ M_y = N_x \bar{z}_G &= \int_A z(s') \sigma_x dA = \int_s \int_h z(s') \sigma_x dr ds = \int_s z(s') N_x^i(s') ds = \epsilon_x \overline{EA} \bar{z}_G \end{aligned} \quad (66)$$

A substituição da primeira expressão da Equação (55) na equação acima conduz a:

$$\begin{aligned} \overline{EA} \bar{y}_G &= \int_s y(s') A_x^i ds \\ \overline{EA} \bar{z}_G &= \int_s z(s') A_x^i ds \end{aligned} \quad (67)$$

que fornece as coordenadas do centroide mecânico:

$$\begin{aligned}\bar{y}_G &= \frac{\overline{EQ}_z}{EA} \\ \bar{z}_G &= \frac{\overline{EQ}_y}{EA}\end{aligned}\quad (68)$$

onde  $\overline{EQ}_z$  e  $\overline{EQ}_y$  são os momentos estáticos mecânicos definidos como:

$$\begin{aligned}\overline{EQ}_z &= \int_s y(s') A_x^i ds = \sum_{i=1}^N \bar{y}_i A_x^i b_i \\ \overline{EQ}_y &= \int_s z(s') A_x^i ds = \sum_{i=1}^N \bar{z}_i A_x^i b_i\end{aligned}\quad (69)$$

e  $\bar{z}_i, \bar{y}_i$  são as coordenadas do ponto  $P'$  de coordenada  $s = b_i/2$  (Figura 12).

### 3.2.7 Eixos principais de inércia e rigidez à flexão

O produto do módulo de elasticidade  $E$  com os momentos de inércia  $I_z, I_y$  e o produto de inércia  $I_{yz}$  da teoria clássica de vigas são substituídos pelas propriedades mecânicas de cada segmento definidas por:<sup>30,58</sup>

$$\begin{aligned}\overline{EI}_{s'}^i &= \bar{D}_i b_i \\ \overline{EI}_{r'}^i &= A_x^i \frac{b_i^3}{12} \\ \overline{EI}_{r's'}^i &= 0\end{aligned}\quad (70)$$

Observa-se que o produto de inércia  $\overline{EI}_{s'r'}^i$  é nulo, pois os eixos  $s'r'$  são os eixos principais de inércia do segmento (Figura 12).

A transformação das propriedades definidas acima para os eixos  $y'z'$  é realizada girando os eixos  $sr$  de um ângulo  $-\alpha_y^i$  em torno do eixo  $x$  (Figura 12). Assim,

$$\begin{aligned}\overline{EI}_{y'}^i &= \overline{EI}_{s'}^i \cos^2 \alpha_y^i + \overline{EI}_{r'}^i \sin^2 \alpha_y^i \\ \overline{EI}_{z'}^i &= \overline{EI}_{s'}^i \sin^2 \alpha_y^i + \overline{EI}_{r'}^i \cos^2 \alpha_y^i \\ \overline{EI}_{y'z'}^i &= \left[ \overline{EI}_{r'}^i - \overline{EI}_{s'}^i \right] \sin \alpha_y^i \cos \alpha_y^i\end{aligned}\quad (71)$$

Finalmente, utilizando o Teorema dos Eixos Paralelos para transformar as propriedades definidas nos eixos  $y'z'$  para o sistema global  $yz$  e computando as contribuições de todos

os segmentos, obtêm-se as seguintes rigidezes:

$$\begin{aligned}\overline{EI}_{y_G} &= \sum_{i=1}^N \left[ \overline{EI}_{y'}^i + A_x^i b_i (z_i + e_b \cos \alpha_y^i)^2 \right] \\ \overline{EI}_{z_G} &= \sum_{i=1}^N \left[ \overline{EI}_{z'}^i + A_x^i b_i (y_i - e_b \sin \alpha_y^i)^2 \right] \\ \overline{EI}_{y_G z_G} &= \sum_{i=1}^N \left[ \overline{EI}_{y'z'}^i + A_x^i b_i (z_i + e_b \cos \alpha_y^i) (y_i - e_b \sin \alpha_y^i) \right]\end{aligned}\quad (72)$$

onde  $y_i$  e  $z_i$  são as coordenadas do centro do segmento  $i$  (ponto  $P$  na Figura 12) sobre o eixo  $s$  ( $r = 0$ ) com relação ao sistema de coordenadas globais  $y_G z_G$ . O sistema de eixos  $y_G z_G$  tem origem no centro mecânico de gravidade da seção transversal e é paralelo ao sistema global  $yz$ . Na Equação (72), os termos  $(y_i - e_b \sin \alpha_y^i)$  e  $(z_i + e_b \cos \alpha_y^i)$  são as coordenadas do centro do segmento sobre o eixo  $s'$  (ponto  $P'$  na Figura 12).

Sendo  $\vartheta$  o ângulo que define os eixos principais de inércia  $\eta$  e  $\xi$  com relação aos eixos  $y_G$  e  $z_G$ , impondo a condição  $\overline{EI}_{\eta\xi} = 0$ , tem-se:

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{2\overline{EI}_{y_G z_G}}{\overline{EI}_{z_G} - \overline{EI}_{y_G}} \quad (73)$$

e a máxima e a mínima rigidezes à flexão com relação aos eixos principais de inércia são dadas por:

$$\begin{aligned}\overline{EI}_{\eta} &= \frac{\overline{EI}_{y_G} + \overline{EI}_{z_G}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\overline{EI}_{y_G} - \overline{EI}_{z_G}}{2}\right)^2 + \overline{EI}_{y_G z_G}} \\ \overline{EI}_{\xi} &= \frac{\overline{EI}_{y_G} + \overline{EI}_{z_G}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\overline{EI}_{y_G} - \overline{EI}_{z_G}}{2}\right)^2 + \overline{EI}_{y_G z_G}}\end{aligned}\quad (74)$$

### 3.2.8 Rigidez à torção

A rigidez à torção é obtida através do balanço de energia, onde o trabalho feito pelo torque externo  $T$  é igual à energia de deformação devido ao cisalhamento:<sup>30,58</sup>

$$\frac{1}{2} T \beta L = \frac{L}{2} \int_s (\gamma_{xs}^i N_{xs}^i + M_{xs}^i \kappa_{xs}^i) ds \quad (75)$$

onde  $L$  é o comprimento da viga. Ressalta-se que o fluxo de cisalhamento  $N_{xs}^i$  e o momento torçor  $M_{xs}^i$  são aplicados no eixo neutro de torção  $s''$ , ou seja, garante-se o desacoplamento definido na Equação (61).

Para vigas com seção transversal fechada, Massa e Barbero<sup>30</sup> e Barbero<sup>58</sup> admitem

que  $\kappa_{xs} = 0$ . Assim, a Equação (61) fica:

$$\begin{aligned} N_{xs}^i &= F_{xs}^i \gamma_{xs}^i \\ M_{xs}^i &= 0 \end{aligned} \quad (76)$$

A substituição destas expressões na Equação (75) e levando em conta que para seções transversais fechadas o fluxo de cisalhamento é constante, tem-se:

$$T\beta = (N_{xs}^i)^2 \oint_s \frac{ds}{F_{xs}^i} \quad (77)$$

A partir deste ponto da formulação faz-se  $N_{xs}^i = q$ . O sobrescrito  $i$  é desprezado em  $q$ , pois o fluxo de cisalhamento é constante em toda a seção transversal da viga.

O momento de torção é obtido pela integração do fluxo de cisalhamento em relação ao eixo neutro de torção  $s''$ . Então,

$$T = \oint_s qR(s'') ds = 2q\Gamma_{s''} \quad (78)$$

onde  $\Gamma_{s''}$  é a área fechada definida pelo contorno  $s''$ .

A taxa de variação do ângulo de torção  $\beta$  é determinada dividindo a Equação (77) pela Equação (78):

$$\beta = \frac{q}{2\Gamma_{s''}} \oint_s \frac{ds}{F_{xs}^i} \quad (79)$$

A rigidez à torção é obtida dividindo a Equação (78) pela Equação (79):

$$\overline{GJ} = \frac{T}{\beta} = \frac{(2\Gamma_{s''})^2}{\sum_{i=1}^N \frac{b_i}{F_{xs}^i}} \quad (80)$$

A expressão acima pode ser melhorada para levar em conta a distribuição não uniforme do cisalhamento ao longo da espessura do laminado. Isto é realizado através da adição da rigidez à torção de seções transversais abertas pré-multiplicada pelo fator  $3/4$ .<sup>30</sup>

$$\overline{GJ} = \frac{T}{\beta} = \frac{(2\Gamma_{s''})^2}{\sum_{i=1}^N \frac{b_i}{F_{xs}^i}} + \frac{3}{4} \left[ 4 \sum_{i=1}^N \overline{H}_{xs}^i b_i \right] \quad (81)$$

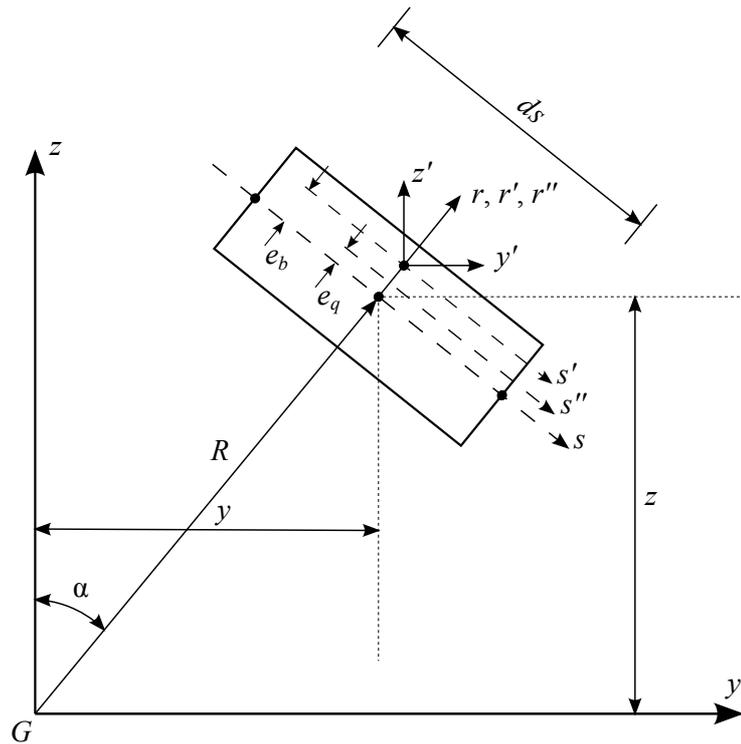
### 3.2.9 Particularização para seção circular

A metodologia apresentada anteriormente foi aplicada, com algumas modificações, para o caso de uma viga tubular de seção transversal circular. Neste caso, as propriedades

equivalentes são computadas a partir de integrações apropriadas realizadas na seção transversal, produzindo expressões simples. Fatores de correção baseados em resultados exatos para tubos homogêneos são obtidos no intuito de capturar efeitos de seções transversais espessas.

Como a metodologia de análise descrita anteriormente foi desenvolvida apenas para vigas com seção transversal composta por segmentos retos, trabalha-se, no caso da seção circular, com um elemento infinitesimal  $ds$ , conforme ilustrado na Figura 13.

Figura 13 – Segmento  $ds$  da seção circular vazada.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O sobrescrito  $i$  será abandonado no desenvolvimento apresentado a seguir, uma vez que a seção é circular, ou seja, a seção possui apenas um segmento, conseqüentemente, ela apresenta apenas um esquema de laminação.

### 3.2.9.1 Rigidez axial

A rigidez axial do tubo é obtida através da Equação (64), onde a integral é realizada ao longo do eixo neutro de flexão  $ds = (R + e_b)d\alpha$  (Figura 13), com  $\alpha$  no intervalo de 0 a  $2\pi$ . Assim,

$$\overline{EA} = \int_s A_x ds = \int_0^{2\pi} A_x (R + e_b) d\alpha = 2\pi R A_x + 2\pi B_x \quad (82)$$

Para tubos laminados com  $B_x$  nulo, o que necessariamente se verifica em laminados simétricos e antissimétricos *angle-ply* com grande número de lâminas,  $e_b = 0$  e a rigidez axial

se reduz a:

$$\overline{EA} = 2\pi RA_x \quad (83)$$

É interessante notar que a Equação (83) é a mesma que se obtém ao integrar a rigidez axial na superfície média da seção ( $ds = R d\alpha$ ). As Equações (82) e (83) reproduzem com exatidão o caso de um tubo homogêneo de material isotrópico, seja ele de parede fina ou espessa.

Massa e Barbero<sup>30</sup> consideraram que cada segmento da seção transversal tinha o mesmo comprimento, independente do sistema de coordenada ( $s$ ,  $s'$  ou  $s''$ ). Entretanto, a seção circular apresenta diferentes propriedades equivalentes quando integrada em contornos diferentes, pois o comprimento deles são diferentes.

### 3.2.9.2 Centro mecânico de gravidade

Pode-se mostrar, a partir da Equação (68), que o centro mecânico de gravidade do tubo coincide com o centro do tubo, origem dos eixos globais  $xyz$ , coincidindo com o centróide. Assim, trabalhando apenas com as formas integrais da Equação (69), tem-se:

$$\begin{aligned} \overline{EQ}_z &= \int_s y(s') A_x ds = \int_s (y(s) + e_b \sin \alpha) ds \\ \overline{EQ}_y &= \int_s z(s') A_x ds = \int_s (z(s) + e_b \cos \alpha) ds \end{aligned} \quad (84)$$

onde  $y(s) = R \sin \alpha$ ,  $z(s) = R \cos \alpha$  e  $ds = (R + e_b) d\alpha$ . Para laminados concêntricos,  $A_x$  não varia com  $\alpha$ . Então,

$$\begin{aligned} \overline{EQ}_z &= (R + e_b)^2 A_x \int_0^{2\pi} \sin \alpha d\alpha = 0 \\ \overline{EQ}_y &= (R + e_b)^2 A_x \int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha = 0 \end{aligned} \quad (85)$$

Portanto,  $y_G = 0$  e  $z_G = 0$ .

### 3.2.9.3 Rigidez à flexão

Considerando um segmento infinitesimal de comprimento  $ds$  da parede do tubo e trabalhando com as propriedades mecânicas do segmento em relação ao sistema de coordenadas  $s' r'$  que contém o eixo neutro de flexão, a partir da Equação (70), tem-se:

$$\begin{aligned} d\overline{EI}_{s'} &= \overline{D}_x ds \\ d\overline{EI}_{r'} &= A_x \frac{ds^3}{12} \\ d\overline{EI}_{s'r'} &= 0 \end{aligned} \quad (86)$$

A transformação destas propriedades para os eixos  $y'z'$  é realizada girando do ângulo  $\alpha$  em relação aos eixos  $s'r'$ , positivo no sentido indicado na Figura 13, e desprezando a contribuição da parcela  $d\overline{EI}_{r'}$ , pois o termo infinitesimal  $ds$  está elevado à terceira potência. Pode-se mostrar que as propriedades transformadas são dadas por:

$$\begin{aligned}d\overline{EI}_{y'} &= \overline{D}_x \cos^2 \alpha ds \\d\overline{EI}_{z'} &= \overline{D}_x \sin^2 \alpha ds \\d\overline{EI}_{y'z'} &= \overline{D}_x \cos \alpha \sin \alpha ds\end{aligned}\tag{87}$$

Finalmente, usando o Teorema dos Eixos Paralelos aplicado às propriedades mecânicas do segmento infinitesimal para transformar para o sistema global  $xyz$ , tem-se:

$$\begin{aligned}d\overline{EI}_y &= \overline{D}_x \cos^2 \alpha ds + A_x (z + e_b \cos \alpha)^2 ds \\d\overline{EI}_z &= \overline{D}_x \sin^2 \alpha ds + A_x (y + e_b \sin \alpha)^2 ds \\d\overline{EI}_{yz} &= \overline{D}_x \cos \alpha \sin \alpha ds + A_x (z + e_b \cos \alpha) (y + e_b \sin \alpha) ds\end{aligned}\tag{88}$$

onde  $y$  e  $z$  são as coordenadas do ponto da superfície média do segmento.

As propriedades mecânicas do tubo podem ser obtidas por integrações na superfície neutra de flexão, ou seja, considerando  $ds = (R + e_b)d\alpha$ . Assim,

$$\begin{aligned}\overline{EI}_y &= \int_0^{2\pi} \overline{D}_x \cos^2 \alpha (R + e_b) d\alpha + \int_0^{2\pi} A_x \cos^2 \alpha (R + e_b)^3 d\alpha \\ \overline{EI}_z &= \int_0^{2\pi} \overline{D}_x \sin^2 \alpha (R + e_b) d\alpha + \int_0^{2\pi} A_x \sin^2 \alpha (R + e_b)^3 d\alpha \\ \overline{EI}_{yz} &= \int_0^{2\pi} \overline{D}_x \cos \alpha \sin \alpha (R + e_b) d\alpha + \int_0^{2\pi} A_x \cos \alpha \sin \alpha (R + e_b)^3 d\alpha\end{aligned}\tag{89}$$

A substituição da Equação (54) na equação acima resulta:

$$\begin{aligned}\overline{EI}_y = \overline{EI}_z &= \pi (R + e_b) (D_x - e_b^2 A_x) + \pi (R^3 + 3R^2 e_b + 3R e_b^2 + e_b^3) A_x \\ \overline{EI}_{yz} &= 0\end{aligned}\tag{90}$$

Observa-se que a igualdade dos momentos mecânicos de inércia e a nulidade do produto mecânico de inércia estão compatíveis com a simetria da seção circular. Usando a definição de  $e_b$  (Equação 51):

$$\overline{EI}_y = \overline{EI}_z = \pi R^3 A_x + 2\pi R \frac{B_x^2}{A_x} + 3\pi R^2 B_x + \pi \frac{B_x}{A_x} D_x + \pi R D_x\tag{91}$$

Na particularização para uma seção circular com apenas uma lâmina de material

isotrópico, a Equação (91) resulta em:

$$\overline{EI}_y = \overline{EI}_z = \pi R^3 E h + \frac{\pi R E h^3}{12} = EI \quad \Rightarrow \quad I = \pi R^3 h + \frac{\pi R h^3}{12} \quad (92)$$

Esse resultado confere com o obtido avaliando-se o momento de inércia do tubo com seção de paredes finas. Por outro lado, o momento de inércia exato do tubo é:

$$I = \frac{\pi}{4} \left[ \left( R + \frac{h}{2} \right)^4 - \left( R - \frac{h}{2} \right)^4 \right] = \pi R^3 h + \frac{\pi R h^3}{4} \quad (93)$$

Comparando-se as duas últimas expressões, observa-se que a diferença será tanto menor quando menor for a espessura do laminado. Numa tentativa para considerar um tubo com parede espessa, baseado no caso de um tubo isotrópico, multiplica-se o último termo da Equação (91) por 3. Assim,

$$\overline{EI}_y = \overline{EI}_z = \pi R^3 A_x + 2\pi R \frac{B_x^2}{A_x} + 3\pi R^2 B_x + \pi \frac{B_x}{A_x} D_x + 3\pi R D_x \quad (94)$$

Tal compatibilização é definida como Correção Local e produz o segundo termo do momento de inércia da Equação (93).

Se a compatibilização for aplicada no primeiro termo da Equação (90), obtém-se outra expressão para o cálculo da rigidez à flexão. Assim,

$$\overline{EI}_y = \overline{EI}_z = \pi R^3 A_x - 2\pi \frac{B_x^3}{A_x^2} + 3\pi R^2 B_x + 3\pi \frac{B_x}{A_x} D_x + 3\pi R D_x \quad (95)$$

Esta segunda compatibilização é definida como Correção Global.

A partir das Equações (94) e (95), observa-se que para laminados com  $B_x = 0$ , como é o caso de laminados simétricos e *angle-ply* com grande número de camadas, não há diferenças entre as equações.

#### 3.2.9.4 Rigidez à torção

A rigidez à torção para o caso da seção transversal circular é obtida, inicialmente, dividindo-se a Equação (78) pela Equação (79):

$$\overline{GJ} = \frac{T}{\beta} = \frac{4\Gamma_{s''}^2}{\oint_s \frac{ds}{F_{xs}}} \quad (96)$$

Para a seção circular vazada, a área  $\Gamma_{s''}$  é dada por:

$$\Gamma_{s''} = \pi (R + e_q)^2 \quad (97)$$

Por fim, integrando com relação à superfície neutra de torção, ou seja,  $ds = (R + e_q)d\alpha$ , tem-se:

$$\overline{GJ} = 2\pi F_{xs} (R + e_q)^3 \quad (98)$$

Na Equação (81), adicionou-se um termo para levar em conta a distribuição não uniforme do cisalhamento ao longo da espessura do laminado. No caso da seção circular, tal termo é obtido pela segunda integral da Equação (75).<sup>30</sup> Assim,

$$T\beta = \int_s M_{xs} \kappa_{xs} ds \quad (99)$$

Por meio da segunda relação da Equação (61) e com  $\kappa_{xs}$  constante na seção, a equação acima se torna:

$$T\beta = \kappa_{xs}^2 \int_s \overline{H}_{xs} ds \quad (100)$$

Da teoria clássica de placas:<sup>30,58</sup>

$$\kappa_{xs} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 2\beta \quad (101)$$

A dupla divisão da Equação (100) pela Equação (101) conduz:

$$\frac{T}{\beta} = 4 \int_s \overline{H}_{xs} ds \quad (102)$$

No tubo laminado, devido à simetria axial,  $\overline{H}_{xs}$  é constante. A integração na superfície neutra de torção da equação acima resulta:

$$\frac{T}{\beta} = 8\pi \overline{H}_{xs} (R + e_q) \quad (103)$$

Desta forma, adicionando a Equação (103) à Equação (98), obtém-se a rigidez à torção da seção circular:

$$\overline{GJ} = 2\pi F_{xs} (R + e_q)^3 + 8\pi \overline{H}_{xs} (R + e_q) \quad (104)$$

A partir da particularização para um tubo isotrópico e homogêneo ( $e_q = 0$ ,  $F_{xs} = Gh$  e  $\overline{H}_{xs} = H_{xs} = Gh^3/12$ ), a equação anterior fornece:

$$\overline{GJ} = G \frac{\pi D^3 h}{4} + G \frac{\pi D h^3}{3} \quad (105)$$

onde  $D$  é o diâmetro médio do tubo.

A solução exata para tubos isotrópicos de parede espessa, onde a tensão varia ao

longo da espessura é dada por:

$$GJ = G \left( \frac{\pi D^3 h}{4} + \frac{\pi D h^3}{4} \right) \quad (106)$$

Observa-se que, para um material isotrópico, aplicando-se um fator de compatibilização igual a 3/4 no segundo termo da Equação (105) conduz à solução exata baseada na Equação (106). Aplicando o mesmo fator de compatibilização no último termo da Equação (104), tem-se a rigidez à torção para material compósito:

$$\overline{GJ} = 2\pi F_{xs} (R + e_q)^3 + 6\pi \overline{H}_{xs} (R + e_q) \quad (107)$$

### 3.3 Teoria de Kollar e Pluzsik

Kollar e Pluzsik<sup>31</sup> propuseram uma teoria geral para analisar vigas laminadas de parede fina e apresentaram expressões analíticas para matriz constitutiva  $\mathbf{C}_v$  para seções transversais aberta e fechada. Nesta teoria, o esquema de laminação em cada segmento da seção transversal é arbitrário.

#### 3.3.1 Seção transversal

Os segmentos que compõem a seção transversal da viga podem consistir de diversas lâminas de material compósito. Cada segmento é modelado como uma placa laminada (Figura 14) denotado pelo subscrito  $i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N$ , onde  $N$  é o número total de segmentos).

Nesta seção, adotam-se os seguintes sistemas de coordenadas (Figura 15): sistema global  $xyz$ , cuja origem coincide com o centroide mecânico da seção (ponto  $C$ ); sistema global  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ , cuja origem é posta num ponto arbitrário (ponto  $O$ ); sistema local  $x_i s_i r_i$  do  $i$ -ésimo segmento com origem no centro da linha média do segmento (ponto  $c_i$ ). O eixo  $x_i$  local é paralelo ao eixo  $x$  global, o eixo  $s_i$  é definido ao longo da circunferência do segmento, e  $r_i$  é perpendicular à circunferência do segmento.

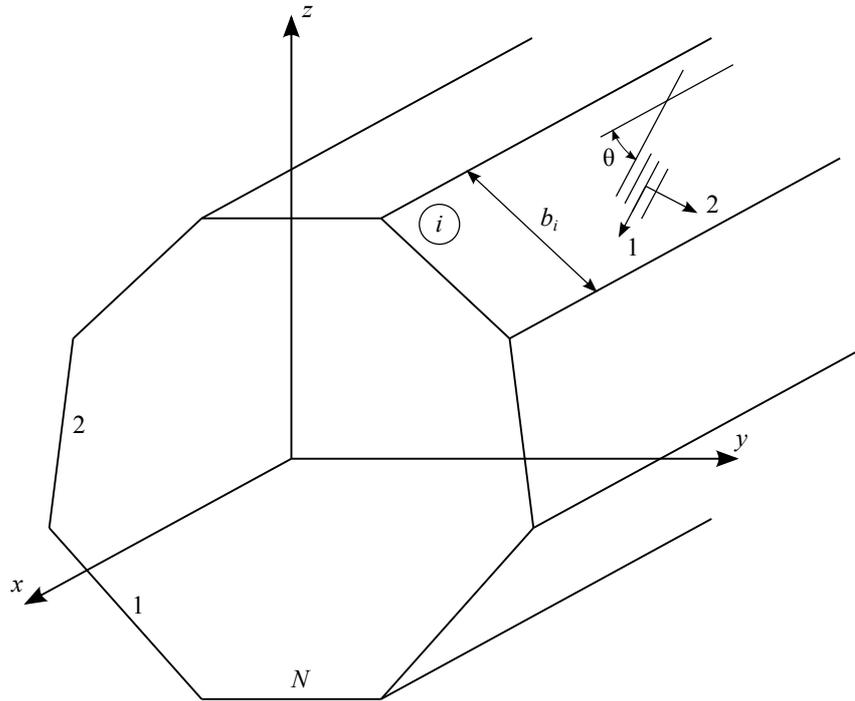
Os deslocamentos do eixo longitudinal da viga, situado no centroide, são o deslocamento axial  $u$ , os deslocamentos transversais  $v$  e  $w$  nas direções  $y$  e  $z$ , respectivamente, e o ângulo de torção  $\psi$  da seção. Considerando a convenção da Figura 8 para esforços positivos, as relações entre os deslocamentos e as deformações de viga no sistema global  $xyz$  são:

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx}; \quad \kappa_y = -\frac{d^2 w}{dx^2}; \quad \kappa_z = \frac{d^2 v}{dx^2}; \quad \beta = \frac{d\psi}{dx} \quad (108)$$

No sistema global  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ , as relações acima tornam-se:

$$\epsilon_{\bar{x}} = \frac{d\bar{u}}{d\bar{x}}; \quad \kappa_{\bar{y}} = -\frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2}; \quad \kappa_{\bar{z}} = \frac{d^2 \bar{v}}{d\bar{x}^2}; \quad \bar{\beta} = \frac{d\bar{\psi}}{d\bar{x}} \quad (109)$$

Figura 14 – Identificação dos segmentos da seção transversal.



Fonte: Elaborado pelo autor.

onde  $\varepsilon_{\bar{x}}$ ,  $\kappa_{\bar{y}}$ ,  $\kappa_{\bar{z}}$  e  $\bar{\beta}$  representam a deformação axial, as curvaturas e a taxa de variação do ângulo de torção do eixo longitudinal passando pela origem do sistema  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ , respectivamente;  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  e  $\bar{\psi}$  são os deslocamentos relativos ao eixo  $\bar{x}$ .

### 3.3.2 Viga de seção fechada

Se uma viga de seção fechada é cortada longitudinalmente, as duas bordas cortadas sofrem um deslocamento relativo, como ilustrado na Figura 16. Na viga original, esse deslocamento relativo é impedido pelos esforços internos  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  e  $X_4$ . As forças transversais  $X_3$  e  $X_4$  são, geralmente, pequenas e podem ser desprezadas.<sup>31</sup>

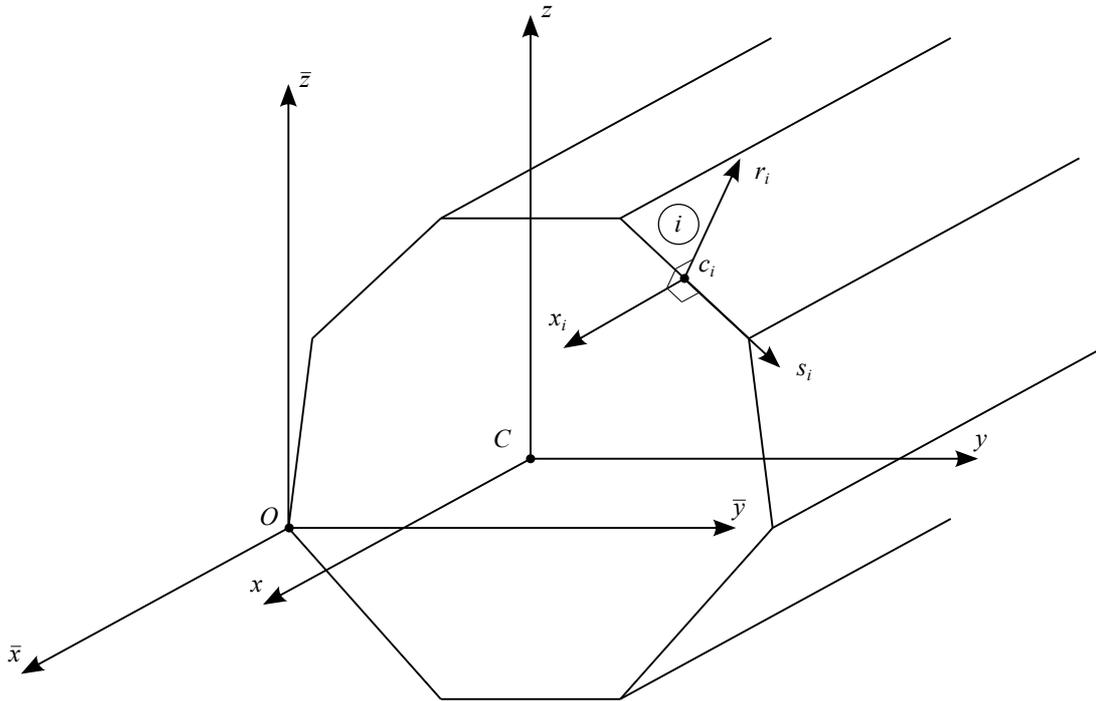
A força axial  $X_1$  e o momento  $X_2$  correspondem aos termos  $N_{xs}$  e  $M_s$  da Equação (44), respectivamente. Considera-se que tais termos não mudam ao longo do segmento.

Para determinar  $X_1$  e  $X_2$ , deve-se utilizar condições de compatibilidade. Essas condições são:<sup>31</sup>

$$\begin{aligned} u|_{\text{esquerda}} &= u|_{\text{direita}} \\ \frac{\partial w^o}{\partial s}|_{\text{esquerda}} &= \frac{\partial w^o}{\partial s}|_{\text{direita}} \end{aligned} \quad (110)$$

onde  $w^o$  é o deslocamento da parede na direção perpendicular à superfície de referência do segmento (Figura 17).

Figura 15 – Sistemas de coordenadas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A primeira equação de compatibilidade pode ser expressa como:<sup>31</sup>

$$-2A\bar{\beta} + \oint \gamma_{xs}^o ds = 0 \quad (111)$$

sendo  $A$  a área fechada da seção transversal definida pelo contorno da superfície média,  $\gamma_{xs}^o$  a deformação de cisalhamento do segmento no seu plano.

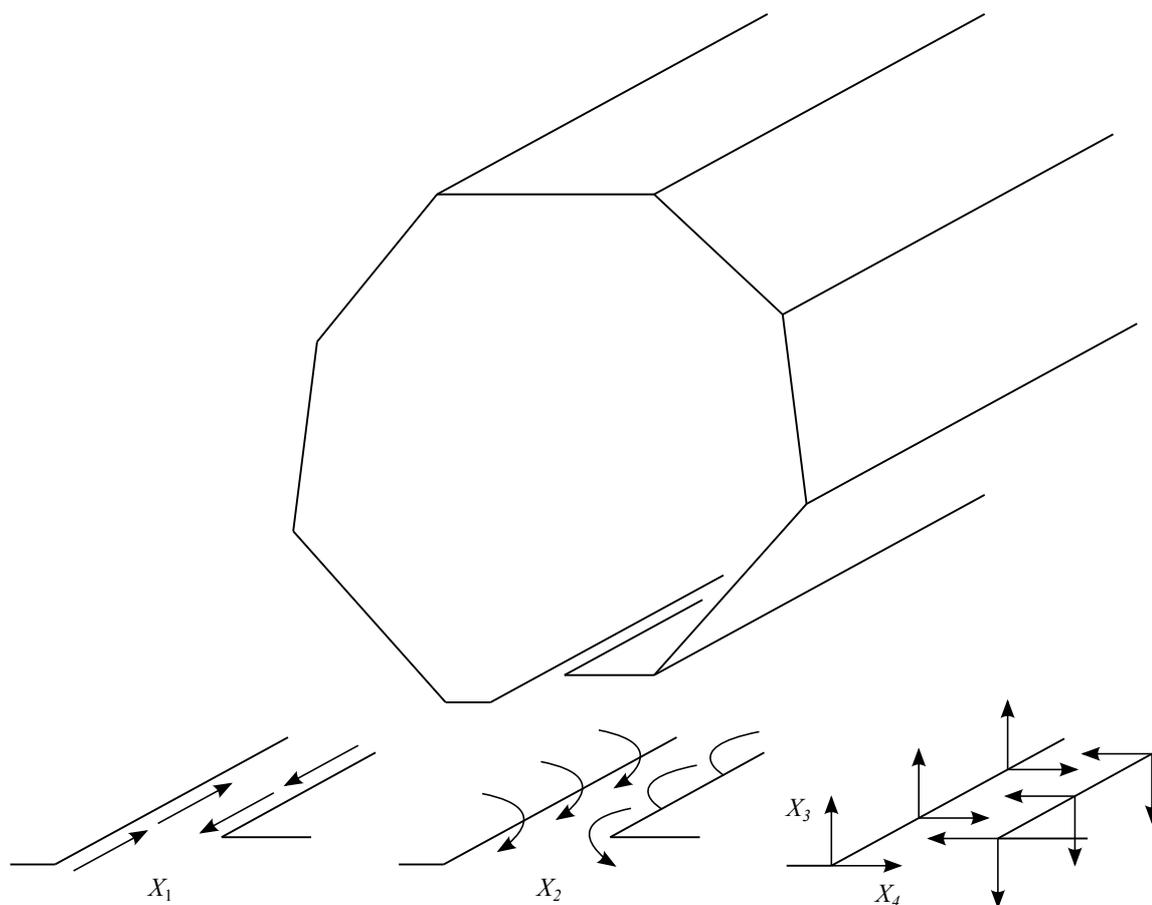
A segunda equação de compatibilidade pode ser expressa através da definição  $\kappa_s = -\partial^2 w^0 / \partial s^2$ . Desta forma, a segunda equação de compatibilidade torna-se:<sup>31</sup>

$$\oint \kappa_s ds = 0 \quad (112)$$

Para analisar vigas compósitas de parede fina de seção fechada, Kollar e Pluzsik<sup>31</sup> definem os seguintes passos que devem ser realizados.

1. As deformações em cada segmento da seção da viga são relacionadas à deformação axial, às curvaturas e ao ângulo de torção do eixo da viga através de hipóteses cinemáticas e da teoria de placas.
2. As forças em cada segmento da seção da viga são expressas em termos das deformações dos segmentos e de  $X_1$  e  $X_2$ .
3. A força axial resultante, os momentos resultantes e o torque resultante atuantes no eixo da viga são determinados através das forças de cada segmento da seção

Figura 16 – Corte longitudinal de uma viga de seção fechada.



Fonte: Elaborado pelo autor.

da viga.

4.  $X_1$  e  $X_2$  são determinados por meio das equações de compatibilidade.
5. A matriz constitutiva  $\mathbf{C}_v$  é determinada relacionando a força axial resultante, os momentos resultantes e o torque resultante à deformação axial, às curvaturas e ao ângulo de torção do eixo da viga.

### 3.3.2.1 Passo 1: deformações em cada segmento

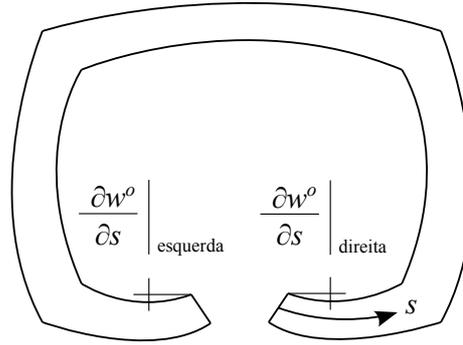
A partir da hipótese de Euler-Bernoulli-Navier, a deformação axial num dado ponto da superfície média de um segmento pode ser escrita como:

$$\epsilon_{xi} = \epsilon_{\bar{x}} + \bar{z}\kappa_{\bar{y}} - \bar{y}\kappa_{\bar{z}} \quad (113)$$

onde  $\bar{z}$  e  $\bar{y}$  são as coordenadas de um ponto arbitrário na superfície média do  $i$ -ésimo segmento e  $\epsilon_{xi}$  é a deformação axial deste ponto.

É importante ressaltar que a seção transversal da viga com esquema de laminação

Figura 17 – Rotações da seção no corte longitudinal.



Fonte: Elaborado pelo autor.

arbitrário pode não permanecer plana e, conseqüentemente, as hipóteses de Euler-Bernoulli-Navier deixam de ser válidas. Entretanto, para vigas longas, as deformações podem ser consideradas constantes ao longo do comprimento da viga, e a condição de Estado Plano de Deformação pode ser aplicada na análise, uma vez que as tensões e deformações variam apenas nos planos perpendiculares ao eixo  $x$ .<sup>31</sup>

As deformações do eixo axial do  $i$ -ésimo segmento pode ser expressa como:

$$\left\{ \begin{array}{c} \epsilon_x^c \\ \kappa_s^c \\ \kappa_r^c \\ \beta^c \end{array} \right\}_i = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \bar{z}_i & -\bar{y}_i & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & \sin \alpha_i & 0 \\ 0 & -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_i} \left\{ \begin{array}{c} \epsilon_{\bar{x}} \\ \kappa_{\bar{y}} \\ \kappa_{\bar{z}} \\ \bar{\beta} \end{array} \right\} \quad (114)$$

onde  $\bar{z}_i$  e  $\bar{y}_i$  são as coordenadas da origem do sistema local  $xsr$  para o segmento  $i$  (Figura 18). O ângulo  $\alpha_i$  é o ângulo entre os eixos  $s$  e  $\bar{y}$  (Figura 18). O sobrescrito  $c$  refere-se ao eixo longitudinal que passa pelo centro da superfície média do segmento, onde  $s = 0$  e  $r = 0$ . A primeira equação é escrita em virtude da Equação (113). As grandezas  $\kappa_{si}^c$  e  $\kappa_{ri}^c$  representam as curvaturas do  $i$ -ésimo segmento nos planos  $xr$  e  $xs$ , respectivamente (Figura 19). A última equação ( $\beta_i^c = \bar{\beta}$ ) é escrita considerando que o ângulo de torção na parede do segmento é o mesmo ângulo de torção da viga.

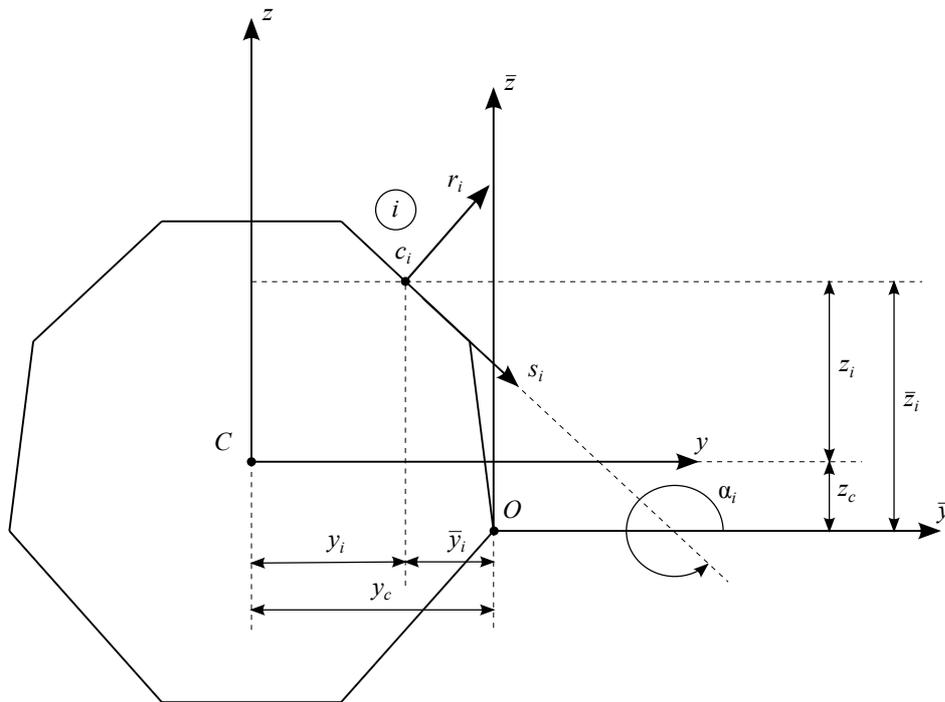
A deformação axial no  $i$ -ésimo segmento varia linearmente com  $s$ . Portanto, pode-se escrever que:

$$\epsilon_{xi} = \epsilon_{xi}^c - s \kappa_{ri}^c \quad (115)$$

A curvatura  $\kappa_{xi}$  é uniforme em cada segmento laminado e é definida por:

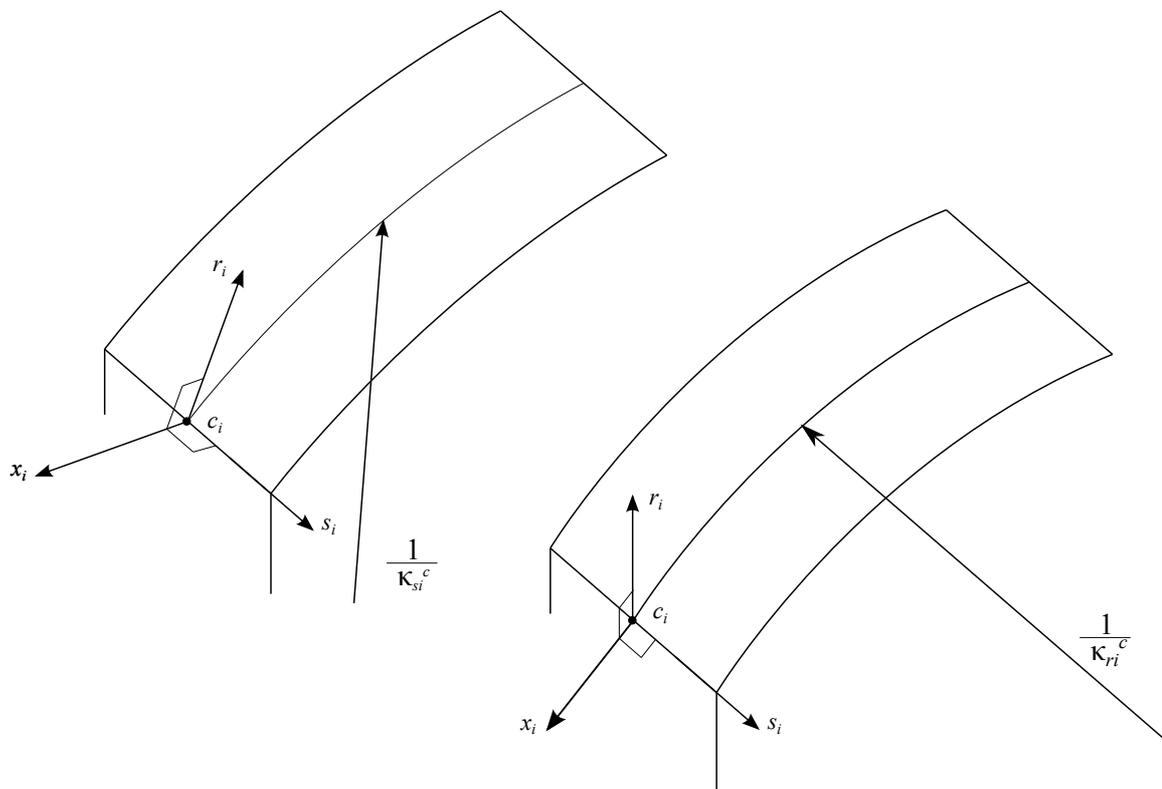
$$\kappa_{xi} = \kappa_{si}^c = \kappa_{\bar{y}} \cos \alpha_i + \kappa_{\bar{z}} \sin \alpha_i \quad (116)$$

Figura 18 – Coordenadas do ponto  $c_i$  e orientação do segmento (ângulo  $\alpha_i$ ).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 19 – Curvaturas do eixo do  $i$ -ésimo segmento.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A taxa de variação do ângulo de torção é definido como:<sup>31</sup>

$$\beta_i^c = -\frac{1}{2}\kappa_{xsi} \quad (117)$$

Logo

$$\kappa_{xsi} = -2\beta_{xi}^c \quad (118)$$

As Equações (115), (116) e (118) podem ser expressas matricialmente:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \kappa_x \\ \kappa_{xs} \end{Bmatrix}_i = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_s} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^c \\ \kappa_s^c \\ \kappa_r^c \\ \beta^c \end{Bmatrix}_i \quad (119)$$

### 3.3.2.2 Passo 2: forças e momentos em cada segmento

Como cada segmento é considerado um placa laminada, a relação entre esforços e deformações do segmento é dada pela Equação (44). Assim, desprezando  $N_s (= X_4)$  e fazendo  $X_1 = N_{xs}$  e  $M_s = X_2$ , a Equação (44) fica:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \kappa_x \\ \kappa_{xs} \end{Bmatrix}_i = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} & \beta_{16} \\ \beta_{11} & \delta_{11} & \delta_{16} \\ \beta_{16} & \delta_{16} & \delta_{66} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\mu}_i} \begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \\ M_{xs} \end{Bmatrix}_i + \begin{bmatrix} \alpha_{16} & \beta_{12} \\ \beta_{61} & \delta_{12} \\ \beta_{66} & \delta_{26} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \quad (120)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xs}^o \\ \kappa_s \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \alpha_{16} & \beta_{61} & \beta_{66} \\ \beta_{12} & \delta_{12} & \delta_{26} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \\ M_{xs} \end{Bmatrix}_i + \begin{bmatrix} \alpha_{66} & \beta_{26} \\ \beta_{26} & \delta_{22} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}$$

Os esforços resultantes do  $i$ -ésimo segmento no sistema de coordenadas  $xsr$  mostrado na Figura 20 são:

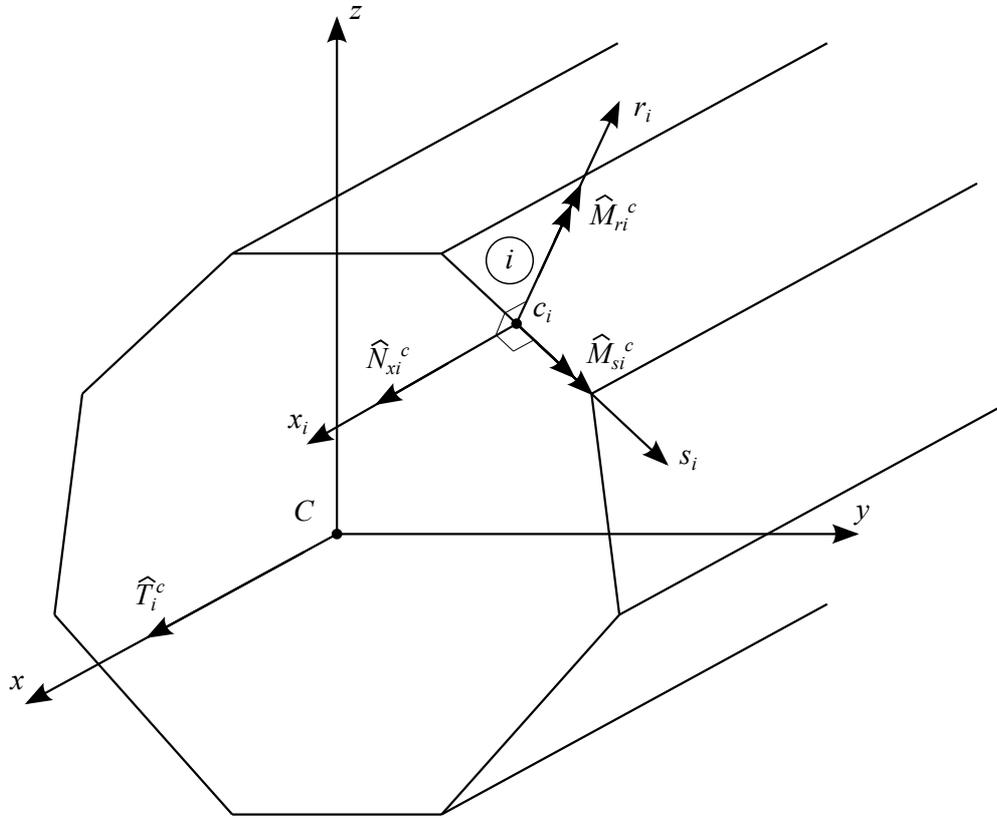
$$\widehat{N}_{xi}^c = \int_s N_{xi} ds = b_i N_{xi} \quad (121)$$

$$\widehat{M}_{si}^c = \int_s M_{xi} ds = b_i M_{xi} \quad (122)$$

$$\widehat{M}_{ri}^c = - \int_s N_{xi} s ds \quad (123)$$

onde  $b_i$  é o comprimento do segmento, conforme ilustrado na Figura 14.

Figura 20 – Esforços resultantes no  $i$ -ésimo segmento.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O torque  $\hat{T}_i^c$  pode ser escrito como:

$$\hat{T}_i^c = -2 \int_s M_{xsi} ds = -2b_i M_{xsi} \quad (124)$$

Ressalta-se que os esforços resultantes obtidos nas Equações (121), (122), (123) e (124) estão localizados no centro da linha média do segmento.

A substituição das Equações (121), (122), (124) e (119) na primeira expressão da Equação (120) resulta:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x^c \\ \kappa_s^c \\ \beta^c \end{Bmatrix}_i = \frac{1}{b_i} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} & -\frac{1}{2}\beta_{16} \\ \beta_{11} & \delta_{11} & -\frac{1}{2}\delta_{16} \\ -\frac{1}{2}\beta_{16} & -\frac{1}{2}\delta_{16} & \frac{1}{4}\delta_{66} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \hat{N}_x^c \\ \hat{M}_s^c \\ \hat{M}_{xs}^c \end{Bmatrix}_i + \begin{bmatrix} \alpha_{16} & \beta_{12} \\ \beta_{61} & \delta_{12} \\ -\frac{1}{2}\beta_{66} & -\frac{1}{2}\delta_{26} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \quad (125)$$

Para avaliar a integral da Equação (123), Kollar e Pluzsik<sup>31</sup> desprezam os esforços  $X_1$  e  $X_2$  e assumem que o segmento possui apenas a curvatura  $\kappa_{ri}^c$ , sendo as demais curvaturas  $\kappa_{xi} = 0$  e  $\kappa_{xsi} = 0$ . Com esta aproximação, a inversa da primeira expressão da Equação (120)

resulta:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \\ M_{xs} \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_i \quad (126)$$

A matriz  $a_{ij}$  é definida como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} & \beta_{16} \\ \beta_{11} & \delta_{11} & \delta_{16} \\ \beta_{16} & \delta_{16} & \delta_{66} \end{bmatrix}_i^{-1} \quad (127)$$

Assim,  $N_{xi} = a_{11i} \varepsilon_{xi}$ . A substituição dessa expressão e da Equação (115) na Equação (123) conduz a:

$$\widehat{M}_{ri}^c = \frac{a_{11i} b_i^3}{12} \kappa_{ri}^c \quad (128)$$

As Equações (125) e (128) conduzem à relação:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^c \\ \kappa_s^c \\ \kappa_r^c \\ \beta^c \end{Bmatrix}_i = \frac{1}{b_i} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} & 0 & -\frac{1}{2}\beta_{16} \\ \beta_{11} & \delta_{11} & 0 & -\frac{1}{2}\delta_{16} \\ 0 & 0 & \frac{12}{a_{11i} b_i^2} & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta_{16} & -\frac{1}{2}\delta_{16} & 0 & \frac{1}{4}\delta_{66} \end{bmatrix}_i}_{\omega_i} \begin{Bmatrix} \widehat{N}_x^c \\ \widehat{M}_s^c \\ \widehat{M}_x^c \\ \widehat{T}^c \end{Bmatrix}_i + \begin{bmatrix} \alpha_{16} & \beta_{12} \\ \beta_{61} & \delta_{12} \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta_{66} & -\frac{1}{2}\delta_{26} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \quad (129)$$

Rearranjando-se a equação acima, pode-se expressar os esforços no segmento em função das deformações no segmento e dos hiperestáticos:

$$\begin{Bmatrix} \widehat{N}_x^c \\ \widehat{M}_s^c \\ \widehat{M}_x^c \\ \widehat{T}^c \end{Bmatrix}_i = \omega_i^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^c \\ \kappa_s^c \\ \kappa_r^c \\ \beta^c \end{Bmatrix}_i - \omega_i^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_{16} & \beta_{12} \\ \beta_{61} & \delta_{12} \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta_{66} & -\frac{1}{2}\delta_{26} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \quad (130)$$

### 3.3.2.3 Passo 3: esforços na viga

Para vigas com seções transversais fechadas, o momento de torção surge devido ao momento de torção  $M_{xs}$  e ao fluxo de cisalhamento  $X_1$ . No sistema de coordenadas  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ , o

torque devido à  $X_1$  é dado:<sup>31</sup>

$$\bar{T} = -2AX_1 \quad (131)$$

onde  $A$  é a área fechada definida pela superfície média da seção transversal. O sinal negativo nesta equação é para compatibilizar os sentidos das grandezas, conforme observado na Figura 8 e Figura 11.

No sistema de coordenadas  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ , os esforços na viga são obtidos através da soma da contribuição de cada segmento:

$$\begin{Bmatrix} N_{\bar{x}} \\ M_{\bar{y}} \\ M_{\bar{z}} \\ \bar{T} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^N \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{z}_i & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ -\bar{y}_i & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_i^t} \begin{Bmatrix} \widehat{N}_x^c \\ \widehat{M}_s^c \\ \widehat{M}_x^c \\ \widehat{T}^c \end{Bmatrix}_i + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2A & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \quad (132)$$

#### 3.3.2.4 Passo 4: Esforços $X_1$ e $X_2$

A substituição da segunda expressão da Equação (120) nas Equações (111) e (112) leva a:

$$0 = - \begin{Bmatrix} 2A\bar{\beta} \\ 0 \end{Bmatrix} + \oint \begin{bmatrix} \alpha_{16} & \beta_{61} & \beta_{66} \\ \beta_{12} & \delta_{12} & \delta_{26} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \\ M_{xs} \end{Bmatrix}_i ds + \oint \begin{bmatrix} \alpha_{66} & \beta_{62} \\ \beta_{62} & \delta_{22} \end{bmatrix}_i ds \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \quad (133)$$

As integrais no contorno da seção podem ser obtidas pelo somatório das integrais realizadas ao longo de cada segmento:

$$\oint ( ) ds = \sum_{i=1}^N \int_{s_i} ( ) ds \quad (134)$$

Após as integrações e levando em conta as Equações (130) e (114), pode-se escrever a seguinte relação:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{L} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\bar{x}} \\ \kappa_{\bar{y}} \\ \kappa_{\bar{z}} \\ \bar{\beta} \end{Bmatrix} \quad (135)$$

onde:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \left( b_i \begin{bmatrix} \alpha_{66} & \beta_{62} \\ \beta_{62} & \delta_{22} \end{bmatrix}_i - \begin{bmatrix} \alpha_{16} & \beta_{61} & 0 & -\frac{1}{2}\beta_{66} \\ \beta_{12} & \delta_{12} & 0 & -\frac{1}{2}\delta_{26} \end{bmatrix}_i \boldsymbol{\omega}_i^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_{16} & \beta_{12} \\ \beta_{61} & \delta_{12} \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta_{66} & -\frac{1}{2}\delta_{26} \end{bmatrix}_i \right) \quad (136)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2A \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \mathbf{J} \quad (137)$$

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} \alpha_{16} & \beta_{61} & 0 & -\frac{1}{2}\beta_{66} \\ \beta_{12} & \delta_{12} & 0 & -\frac{1}{2}\delta_{26} \end{bmatrix}_i \boldsymbol{\omega}_i^{-1} \mathbf{R}_i \quad (138)$$

### 3.3.2.5 Passo 5: matriz constitutiva $\bar{\mathbf{C}}_v$

A partir das Equações (132), (130) e (114), pode-se escrever a relação:

$$\begin{Bmatrix} N_{\bar{x}} \\ M_{\bar{y}} \\ M_{\bar{z}} \\ \bar{T} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i^t \boldsymbol{\omega}_i^{-1} \mathbf{R}_i \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\bar{x}} \\ \boldsymbol{\kappa}_{\bar{y}} \\ \boldsymbol{\kappa}_{\bar{z}} \\ \bar{\beta} \end{Bmatrix} + \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2A & 0 \end{bmatrix} - \mathbf{J}^t \right) \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \quad (139)$$

A substituição da Equação (135) na Equação (139) resulta:

$$\begin{Bmatrix} N_{\bar{x}} \\ M_{\bar{y}} \\ M_{\bar{z}} \\ \bar{T} \end{Bmatrix} = \underbrace{\left( \sum_{i=1}^N \left( \mathbf{R}_i^t \boldsymbol{\omega}_i^{-1} \mathbf{R}_i \right) + \mathbf{L}^t \mathbf{F}^{-1} \mathbf{L} \right)}_{\bar{\mathbf{C}}_v} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\bar{x}} \\ \boldsymbol{\kappa}_{\bar{y}} \\ \boldsymbol{\kappa}_{\bar{z}} \\ \bar{\beta} \end{Bmatrix} \quad (140)$$

onde  $\bar{\mathbf{C}}_v$  é a matriz constitutiva referida ao sistema de coordenadas  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ .

### 3.3.2.6 Vida de seção transversal aberta

Apesar do foco deste trabalho ser em seções transversais fechadas, vale a pena comentar que para uma seção transversal aberta, os hiperestáticos  $X_1$  e  $X_2$  são desprezados. Assim, a partir da Equação (139), a matriz constitutiva  $\bar{\mathbf{C}}_v$  correspondente é dada apenas pela parcela:<sup>31</sup>

$$\bar{\mathbf{C}}_v = \sum_{i=1}^N \left( \mathbf{R}_i^t \boldsymbol{\omega}_i^{-1} \mathbf{R}_i \right) \quad (141)$$

### 3.3.2.7 Centroide

A matriz constitutiva apresentada anteriormente é referida a um sistema de coordenadas arbitrário. Para determinar tal matriz no sistema de coordenada  $xyz$  associado ao centroide mecânico da seção, a localização desse centroide deve ser conhecida. O centroide está localizado no ponto em que o eixo da viga permanece reto quando uma força normal  $N$  é aplicada nele. Enquanto esse eixo permanece reto, a viga pode girar sobre o eixo de torção, que não necessariamente coincide com o eixo que passa pelo centroide.<sup>31</sup>

As coordenadas do centroide referidas ao sistema  $xyz$  são denotadas por  $z_c$  e  $y_c$  (Figura 18). A força e os momentos resultantes referidos no sistema  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  são relacionados com a força aplicada no centroide:

$$N_{\bar{x}} = N; \quad M_{\bar{y}} = z_c N, \quad M_{\bar{z}} = y_c N \quad (142)$$

A relação deformação-tensão para viga é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_{\bar{x}} \\ \bar{\kappa}_{\bar{y}} \\ \bar{\kappa}_{\bar{z}} \\ \bar{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{W}_{11} & \bar{W}_{12} & \bar{W}_{13} & \bar{W}_{14} \\ \bar{W}_{12} & \bar{W}_{22} & \bar{W}_{23} & \bar{W}_{24} \\ \bar{W}_{13} & \bar{W}_{23} & \bar{W}_{33} & \bar{W}_{34} \\ \bar{W}_{14} & \bar{W}_{24} & \bar{W}_{34} & \bar{W}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{\bar{x}} \\ M_{\bar{y}} \\ M_{\bar{z}} \\ \bar{T} \end{Bmatrix} \quad (143)$$

onde  $\bar{W}_{ij}$  é a matriz de flexibilidade da viga no sistema  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  dada por:

$$\bar{\mathbf{W}} = \bar{\mathbf{C}}_v^{-1} \quad (144)$$

A partir das Equações (143) e (142), obtêm-se as curvaturas:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\kappa}_{\bar{y}} \\ \bar{\kappa}_{\bar{z}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{W}_{12} & \bar{W}_{22} & \bar{W}_{23} \\ \bar{W}_{13} & \bar{W}_{23} & \bar{W}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ z_c \\ y_c \end{Bmatrix} N \quad (145)$$

Uma vez que  $N$  é aplicado no centroide, por definição as curvaturas da viga são nulas:  $\bar{\kappa}_{\bar{y}} = 0$  e  $\bar{\kappa}_{\bar{z}} = 0$ . Neste caso, através da Equação (145), obtêm-se as coordenadas do centroide referidas no sistema  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ :

$$\begin{Bmatrix} z_c \\ y_c \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{W}_{22} & \bar{W}_{23} \\ \bar{W}_{23} & \bar{W}_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{W}_{12} \\ \bar{W}_{13} \end{bmatrix} \quad (146)$$

### 3.3.2.8 Matriz $\mathbf{C}_v$ e $\mathbf{W}$ referidas ao sistema de coordenadas $xyz$

A força  $N_{\bar{x}}$  e os momentos  $M_{\bar{y}}$  e  $M_{\bar{z}}$  no sistema  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  se relacionam com a força  $N$  no sistema  $xyz$  através da Equação (142), enquanto os torques nos dois sistemas são idênticos

$\bar{T} = T$ . Neste caso, pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} N_{\bar{x}} \\ M_{\bar{y}} \\ M_{\bar{z}} \\ \bar{T} \end{Bmatrix} = \mathbf{R}_b \begin{Bmatrix} N_x \\ M_y \\ M_z \\ T \end{Bmatrix} \quad (147)$$

onde  $\mathbf{R}_b$  é definida como:

$$\mathbf{R}_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ z_c & 1 & 0 & 0 \\ y_c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (148)$$

A deformação axial do eixo que passa pelo centroide da viga é relacionada com a deformação axial e as curvaturas do eixo  $\bar{x}$  (i.e. passa pelo origem do sistema  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ ) por meio da relação:

$$\epsilon_x = \epsilon_{\bar{x}} + \kappa_{\bar{y}} z_c - \kappa_{\bar{z}} y_c \quad (149)$$

A curvatura e o ângulo de torção por unidade de comprimento dos eixos  $x$  e  $\bar{x}$  são idênticos. Portanto, tal condição permite escrever:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \\ \beta \end{Bmatrix} = \mathbf{R}_b^t \begin{Bmatrix} \epsilon_{\bar{x}} \\ \kappa_{\bar{y}} \\ \kappa_{\bar{z}} \\ \bar{\beta} \end{Bmatrix} \quad (150)$$

A substituição das Equações (147) e (150) na Equação (143) resulta na relação deformação-tensão para viga com relação ao sistema de coordenadas  $xyz$ :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \\ \beta \end{Bmatrix} = \underbrace{\mathbf{R}_b^t \begin{bmatrix} \bar{W}_{11} & \bar{W}_{12} & \bar{W}_{13} & \bar{W}_{14} \\ \bar{W}_{12} & \bar{W}_{22} & \bar{W}_{23} & \bar{W}_{24} \\ \bar{W}_{13} & \bar{W}_{23} & \bar{W}_{33} & \bar{W}_{34} \\ \bar{W}_{14} & \bar{W}_{24} & \bar{W}_{34} & \bar{W}_{44} \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}} \mathbf{R}_b \begin{Bmatrix} N_x \\ M_y \\ M_z \\ T \end{Bmatrix} \quad (151)$$

Assim, realizando o triplo produto da Equação (151), obtém-se a matriz de flexibilidade da viga  $\mathbf{W}$  com relação ao sistema de coordenadas  $xyz$ . É interessante observar que  $\mathbf{W}$  possui quatro

elementos nulos:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_{11} & 0 & 0 & W_{14} \\ 0 & W_{22} & W_{23} & W_{24} \\ 0 & W_{23} & W_{33} & W_{34} \\ W_{14} & W_{24} & W_{34} & W_{44} \end{bmatrix} \quad (152)$$

Esses elementos da matriz  $\mathbf{W}$  são nulos devido ao fato de que uma força normal aplicada no centroide mecânico não resulta em curvaturas de flexão.

A inversa da Equação (152) produz a matriz constitutiva da viga com relação ao sistema de coordenadas  $xyz$ :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11} & 0 & 0 & W_{14} \\ 0 & W_{22} & W_{23} & W_{24} \\ 0 & W_{23} & W_{33} & W_{34} \\ W_{14} & W_{24} & W_{34} & W_{44} \end{bmatrix}^{-1} \quad (153)$$

### 3.3.3 Seção circular

Para consideração de vigas de seção transversal circular, discretizou-se a seção em segmento retos. Dada uma seção de raio médio  $R$ , as coordenadas dos nós de cada segmento são (Figura 21):

$$\begin{aligned} y_i &= R \sin \phi \\ z_i &= R \cos \phi \end{aligned} \quad (154)$$

As coordenadas do centroide de cada segmento são:

$$\begin{aligned} \bar{y}_i &= R \sin(\phi + \Delta\phi/2) \\ \bar{z}_i &= R \cos(\phi + \Delta\phi/2) \end{aligned} \quad (155)$$

Cada segmento possui um comprimento:

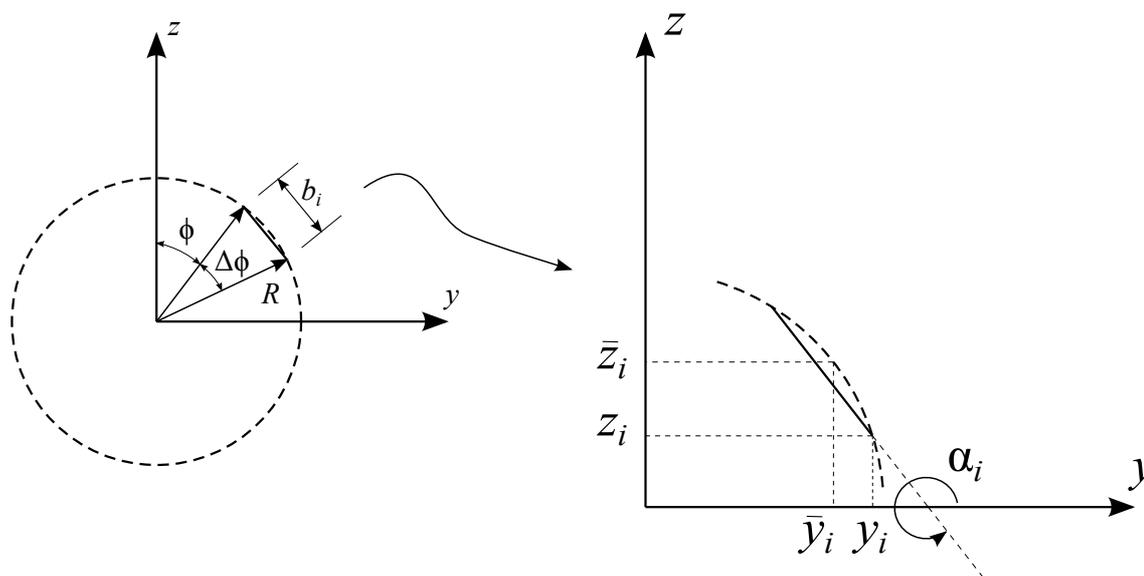
$$b_i = R\Delta\phi \quad (156)$$

e um ângulo de orientação:

$$\alpha_i = 2\pi - \phi \quad (157)$$

Todos os tubos modelados por meio desta sistemática possuem  $\Delta\phi = 2.5^\circ$  e 144 pontos/segmentos.

Figura 21 – Seção circular modelada por meio de segmentos retos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.4 Aplicações

As metodologias de análise de vigas laminadas de parede fina apresentadas neste capítulo foram implementadas no software de programação matemática MATLAB. No intuito de avaliar as formulações propostas, os resultados obtidos nas implementações por meio do MATLAB foram comparadas com soluções de elementos finitos usando o software ABAQUS. No caso das propriedades equivalentes, os resultados também foram comparados com alguns resultados experimentais de Saggar.<sup>1</sup>

#### 3.4.1 Exemplos de Saggar

Saggar<sup>1</sup> avaliou experimentalmente a rigidez à flexão de tubos laminados. Os efeitos da variação do esquema de laminação e da relação raio/espessura (Tabela 1) foram analisados com tubos de seis camadas de *prepegs* de grafite/epóxi T700S/G91, cujas características são mostradas na Tabela 2. Foram consideradas laminações simétricas e assimétricas. A espessura de cada camada é de 0.1473 mm.

Embora soluções alternativas tenham sido desenvolvidas para o cálculo das propriedades equivalentes de seções circulares através da teoria de Massa e Barbero<sup>30</sup> e Barbero,<sup>58</sup> são apresentadas apenas as comparações entre os resultados dos modelos com integrações nas superfícies neutras, com correção e com abordagens acoplada e desacoplada (Tabela 3). Essas propriedades são coerentemente calculadas com os conceitos de eixos neutros de flexão e torção, bem como a particularização para o caso de material isotrópico.

Neste trabalho, o tubo foi discretizado usando elementos de casca quadráticos baseado na teoria de Reisner-Mindlin com oitos nós e integração reduzida (S8R) do ABAQUS.

Tabela 1 – Dados dos modelos ensaiados.<sup>1</sup>

Modelo	Laminações	Raio interno (mm)	$R/h$
2A1	[0/ - 45/ + 45/ + 45/ - 45/0]	9.525	11.28
2A2	[0/ + 45/ - 45/0/ + 45/ - 45]	9.525	11.28
2A3	[+45/ - 45/ + 45/ - 45/0/0]	9.525	11.28
2B1	[0/ - 45/ + 45/ + 45/ - 45/0]	6.350	7.68
2C1	[0/ - 15/ + 15/ + 15/ - 15/0]	9.525	11.28
2C2	[0/ - 75/ + 75/ + 75/ - 75/0]	9.525	11.28

Fonte: Elaborado pelo autor.

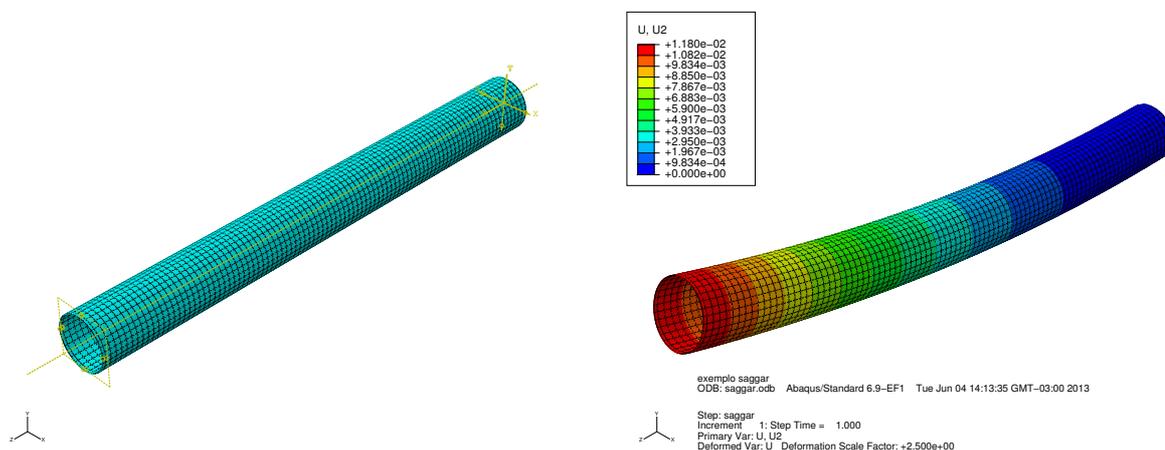
Tabela 2 – Propriedades do material.<sup>1</sup>

Propriedades	Valores médios
$E_1$	138.580 GPa
$E_2$	12.200 GPa
$G_{12}$	7.653 GPa
$\nu_{12}$	0.313

Fonte: Elaborado pelo autor.

A malha, mostrada na Figura 22, têm 64 elementos na direção longitudinal e 24 elementos na direção circunferencial.

Figura 22 – Malha para elemento de casca (S8R) e modelo deformado.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O tubo também foi discretizado com elementos sólidos quadráticos com 20 nós (C3D20) do ABAQUS. A malha tinha 64 elementos na direção longitudinal e 16 elementos na direção circunferencial. O modelo deformado é ilustrado na Figura 23.

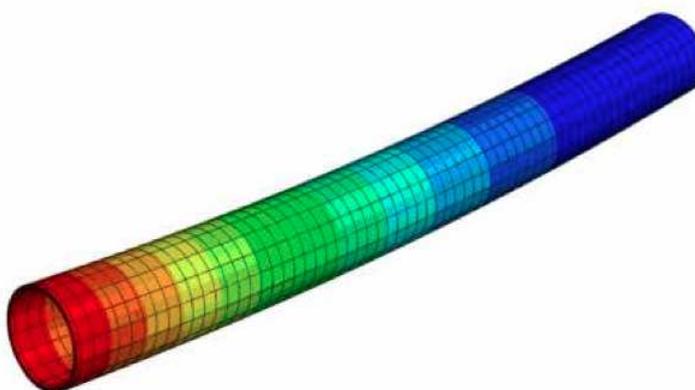
Para o cálculo da rigidez à flexão via elementos finitos, simulou-se, nos dois modelos supracitados, o tubo submetido à flexão pura. O carregamento foi aplicado na forma de um binário. O modelo é engastado na extremidade oposta ao carregamento e tem comprimento

Tabela 3 – Resumo das formulações para cálculo da rigidez à flexão de seção circular.

Formulações	Equações
Integração na sup. neutra, com correção local e com desacoplamento: <b>SNCL-DES</b>	$\overline{EI}$ : (94) Desacoplado: (47)
Integração na sup. neutra, com correção local e com acoplamento: <b>SNCL-AC</b>	$\overline{EI}$ : (94) Acoplado: (49)
Integração na sup. neutra, com correção global e com desacoplamento: <b>SNCG-DES</b>	$\overline{EI}$ : (95) Desacoplado: (47)
Integração na sup. neutra, com correção global e com acoplamento: <b>SNCG-AC</b>	$\overline{EI}$ : (95) Acoplado: (49)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 23 – Deformada para elementos do tipo sólido (C3D20).



Fonte: Elaborado pelo autor.

igual a 20 vezes o seu raio médio. No ABAQUS, esse engastamento foi realizado restringindo todos os deslocamentos dos nós da seção. Para assegurar a hipótese das seções planas, um anel rígido de material isotrópico foi introduzido onde a carga foi aplicada. O anel rígido possui dimensão de 1 mm na direção axial e módulo de elasticidade igual a 100 vezes o módulo de elasticidade do aço ( $E_{aço} = 200\text{GPa}$ ). Assim, da Resistência dos Materiais pode-se escrever:

$$\delta = \frac{ML^2}{2\overline{EI}_{MEF}} \Rightarrow \overline{EI}_{MEF} = \frac{ML^2}{2\delta} \quad (158)$$

onde  $\delta$  é o deslocamento na extremidade do tubo.

Os resultados para a rigidez à flexão obtidos com as formulações SNCL-DES, SNCL-AC, SNCG-DES e SNCG-AC estão apresentados na Tabela 4. Esses resultados são comparados na Tabela 5 (modelos simétricos), Tabela 6 (modelos assimétricos) e Tabela 7 (modelos assimétricos) com os valores obtidos por elementos finitos no ABAQUS e os experimentais de Sagar<sup>1</sup> através da diferença relativa entre aqueles e estes.

A partir dos dados apresentados na Tabela 4, pode-se observar que as formulações

Tabela 4 – Resultado para rigidez à flexão (Nm<sup>2</sup>).

Tipos de laminação	Modelo	SNCL		SNCG	
		DES	AC	DES	AC
Simétrica	2A1	175.980	175.980	175.980	175.980
	2B1	55.892	55.895	55.892	55.895
	2C1	340.980	341.000	340.980	341.000
	2C2	151.480	151.480	151.480	151.480
Assimétrica	2A2	170.450	171.060	170.480	171.030
	2A3	183.830	184.620	183.940	184.510

Fonte: Elaborado pelo autor.

SNCL e SNCG, considerando em ambas o efeito do Desacoplamento e Acoplamento, são iguais para os laminados simétricos. Isto ocorre porque para esse tipo de laminado o termo  $B_x = 0$ , logo, as Equações (94) e (95) conduzem a resultados iguais. A mesma afirmação não pode ser feita para os modelos assimétricos, pois o termo  $B_x$  pode ser diferente de zero.

Tabela 5 – Rigidez  $\overline{EI}$  dos modelos simétricos - diferença relativa de **SNCL-DES-AC** (=SNCG-DES-AC) com respeito a Elementos Finitos e Saggarr.<sup>1</sup>

Modelos simétricos	ABAQUS-DES		ABAQUS-AC		Saggarr ( <i>strain-gage</i> )	
	Casca (%)	Sólido (%)	Casca (%)	Sólido (%)	DES (%)	AC (%)
2A1	0.25	-0.24	0.25	-0.24	5.76	6.11
2B1	0.49	-0.28	0.50	-0.27	4.50	4.71
2C1	0.18	0.06	0.19	0.06	-4.62	4.41
2C2	0.25	-0.33	0.25	-0.33	4.67	-4.90

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 6 – Rigidez  $\overline{EI}$  dos modelos assimétricos - diferença relativa de **SNCL-DES-AC** com respeito a Elementos Finitos e Saggarr.<sup>1</sup>

Modelos assimétricos	ABAQUS-DES		ABAQUS-AC		Saggarr ( <i>strain-gage</i> )	
	Casca (%)	Sólido (%)	Casca (%)	Sólido (%)	DES (%)	AC (%)
2A2	-0.87	-0.26	-0.51	0.10	3.78	4.12
2A3	2.38	-0.82	2.80	-0.39	2.90	3.31

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 7 – Rigidez  $\overline{EI}$  dos modelos assimétricos - diferença relativa de **SNCG-DES-AC** com respeito a Elementos Finitos e Saggarr.<sup>1</sup>

Modelos assimétricos	ABAQUS-DES		ABAQUS-AC		Saggarr ( <i>strain-gage</i> )	
	Casca (%)	Sólido (%)	Casca (%)	Sólido (%)	DES (%)	AC (%)
2A2	-0.85	-0.24	-0.53	0.08	3.80	4.10
2A3	2.44	-0.76	2.74	-0.45	2.96	3.26

Fonte: Elaborado pelo autor.

Pode-se observar que as formulações apresentadas, com correção global e local com ambos os efeitos Acoplados e Desacoplados, produzem excelentes resultados quando comparados com elementos finitos e valores experimentais. A maior diferença percentual (6,11%) ocorreu no modelo simétrico 2A1 (com SNCG e considerando o efeito do Acoplamento) com relação ao resultado experimental. Desta forma, pode-se afirmar que as formulações propostas para uma viga de seção circular foram validadas por resultados experimentais.

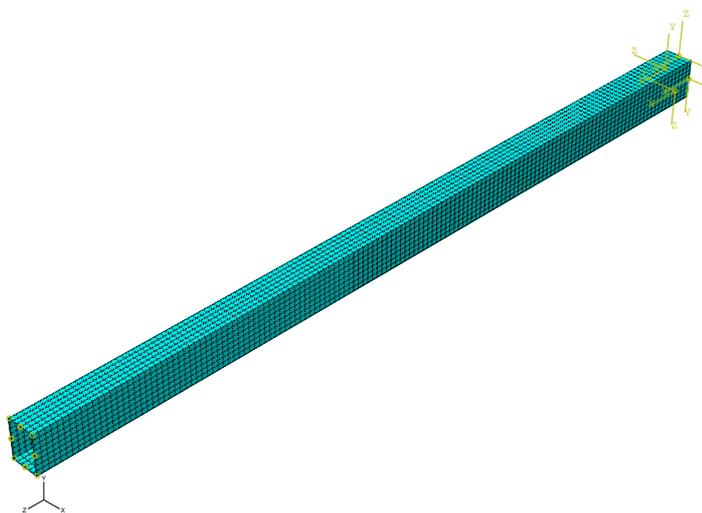
Para as próximas simulações numéricas e comparações, no que tange o cálculo da rigidez à flexão por meio da teoria de Massa e Barbero<sup>30</sup> será utilizada apenas a sistemática SNCG-AC.

### 3.4.2 Viga caixão

No intuito de verificar as formulações apresentadas anteriormente, foram gerados no *software* ABAQUS modelos tridimensionais de vigas laminadas do tipo caixão utilizando elementos de casca.

No ABAQUS, a viga caixão foi discretizada usando elementos de casca quadráticos S8R. Na Figura 24, ilustra-se a malha utilizada. A malha possui 8 elementos na direção de cada alma, 6 elementos na direção de cada mesa e 141 elementos na direção longitudinal da viga.

Figura 24 – Viga caixão discretizada com elementos de casca (S8R).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os modelos foram desenvolvidos usando *prepeg* carbono/epóxi AS4/3501-6, cujas propriedades são apresentadas na Tabela 8.<sup>2</sup> Todos os modelos têm 6 lâminas, cada lâmina com espessura de 1 mm. Foram considerados modelos simétricos e assimétricos para a parede. As especificações de cada modelo são apresentadas na Tabela 9.

Todos os modelos desenvolvidos nesta etapa possuem dimensões de 50 mm para mesa ( $b$ ) e 70 mm para alma ( $d$ ), conforme ilustra a Figura 25. Ressalta-se que tais dimensões

Tabela 8 – Propriedades do material.<sup>2</sup>

$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$E_3$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$G_{13}$ (GPa)	$G_{23}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$
147.0	10.3	10.3	7.0	7.0	3.7	0.27	0.27	0.54

Fonte: Elaborado pelo autor.

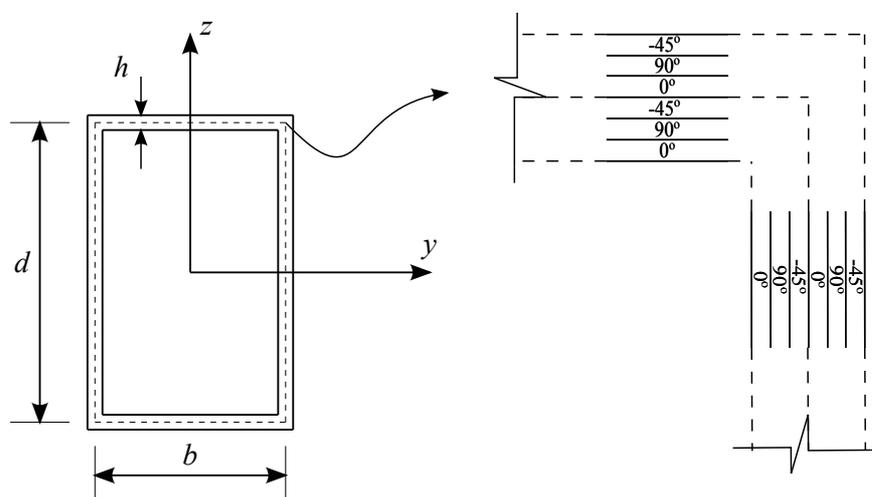
Tabela 9 – Dados dos modelos.

Modelos	Laminações
Simétricos	L1 [+45/-45/+45/+45/-45/+45]
	L2 [0/90/0/0/90/0]
	L3 [0/90/+45/+45/90/0]
Não-simétricos	L4 [+45/-45/+45/-45/+45/-45]
	L5 [0/90/0/90/0/90]
	L6 [0/90/-45/0/90/-45]

Fonte: Elaborado pelo autor.

correspondem aos seus valores médios. Cada segmento (alma e mesa) possui 6 mm de espessura ( $h$ ). O empilhamento das lâminas de cada segmento da seção transversal é posto de forma que a laminação da seção fique simétrica, no sentido de dentro para fora da seção transversal, conforme ilustrado na Figura 25.

Figura 25 – Dimensões da seção caixão e forma de empilhamento das lâminas (modelo L6).

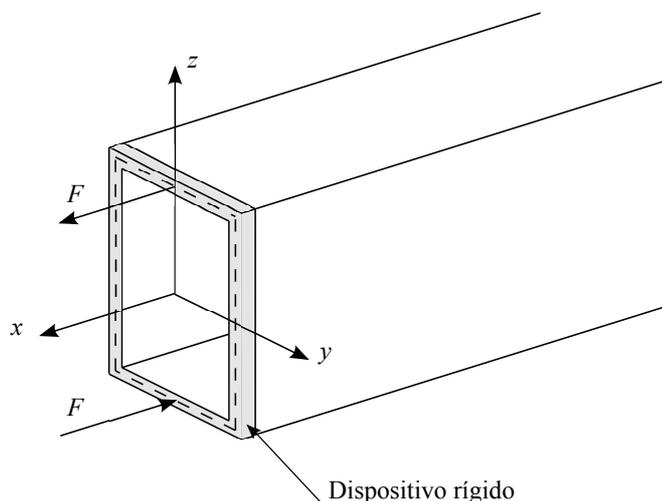


Fonte: Elaborado pelo autor.

A comparação entre as respostas obtidas por meio das abordagens de análise de vigas de parede fina apresentada anteriormente e as respostas obtidas por meio dos modelos de elementos finitos é realizada através da diferença percentual entre estes e aqueles. O parâmetro de comparação são os deslocamentos do centro do vão (isolar os efeitos de extremidade) da viga caixão engastada e livre. O comprimento dos modelos é igual a 20 vezes a alma da seção. Assim como no exemplo de Saggari,<sup>1</sup> para garantir a hipótese das seções planas, foi introduzido

um dispositivo rígido onde as cargas são aplicadas (Figura 26). Tal dispositivo rígido possui a mesma espessura que o laminado, 1 mm de comprimento e módulo de elasticidade igual a 100 vezes o módulo de elasticidade do aço ( $E_{aço} = 100 \text{ GPa}$ ).

Figura 26 – Binário aplicado na viga caixão.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir deste ponto da dissertação, para simplificar e auxiliar a leitura dos resultados, utilizam-se as siglas: MFM para as respostas que são obtidas através do Método da Flexibilidade do Material; MB para as respostas que são obtidas utilizando a teoria de Massa e Barbero;<sup>30</sup> KP para as respostas que são obtidas através da abordagem de Kollar e Pluzsik.<sup>31</sup> Quando necessário, será indicada outra nomenclatura.

Para o cálculo dos deslocamentos através das abordagens MFM, MB e KP, calculou-se, inicialmente, as deformações de viga através da Equação (31). Assim, para uma viga engastada e livre submetida a carregamentos constantes aplicados em sua extremidade livre, os deslocamentos e a rotação na extremidade livre são:

$$\begin{aligned}
 u &= \varepsilon_x L \\
 v &= -\kappa_y \frac{L^2}{2} \\
 w &= -\kappa_z \frac{L^2}{2} \\
 \psi &= \beta L
 \end{aligned}
 \tag{159}$$

onde  $L$  é o comprimento da viga. Para os deslocamentos no centro do vão da viga, faz-se  $L = L/2$ .

Inicialmente, os modelos foram submetidos a uma força axial  $N = 240 \text{ N}$ , aplicada na extremidade livre da viga caixão. No ABAQUS, utilizou-se a opção *shell load* para aplicar uma carga distribuída de  $1000 \text{ N/m}$  ao longo do contorno da seção transversal para produzir a

resultante de 240 N. Na Tabela 10, apresentam-se os deslocamentos obtidos nos modelos do ABAQUS, bem como as diferenças percentuais.

Tabela 10 – Diferença relativa para  $N = 240$  N (seção caixão).

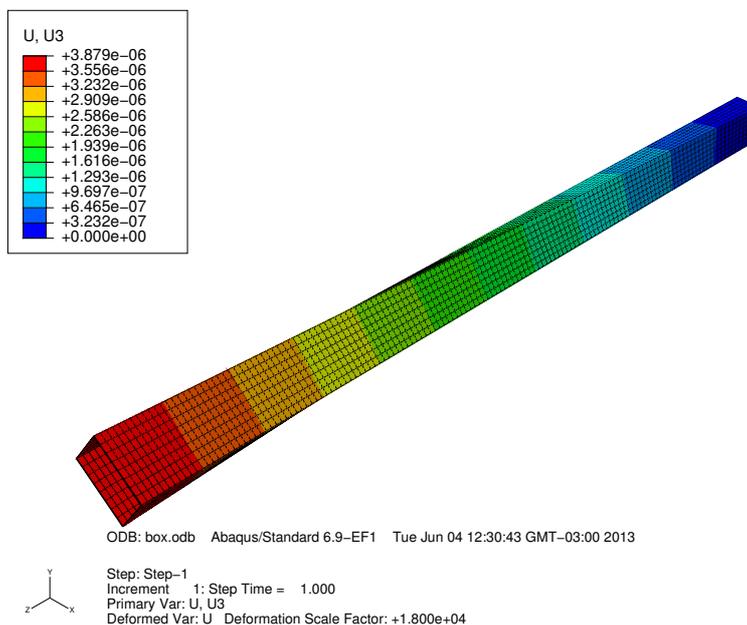
Laminação	Desl.	Casca	MFM (%)	MB (%)	KP (%)
L1	$u$ (m)	4.8962E-06	-6.78	-0.34	0.97
	$\psi$ (rad)	1.6017E-05	-	-	-1.48
L2	$u$ (m)	1.1459E-06	-7.69	0.00	0.00
	$\psi$ (rad)	-	-	-	-
L3	$u$ (m)	1.9225E-06	-7.59	-8.26	0.05
	$\psi$ (rad)	3.9044E-05	-	-	0.31
L4	$u$ (m)	4.8341E-06	-5.91	0.93	0.95
	$\psi$ (rad)	1.2524E-06	-	-	18.95
L5	$u$ (m)	1.14776E-06	-1.48	0.01	0.00
	$\psi$ (rad)	-	-	-	-
L6	$u$ (m)	1.9315E-06	10.34	-8.19	0.07
	$\psi$ (rad)	3.8653E-05	-	-	0.43

Fonte: Elaborado pelo autor.

Pode-se observar a partir da Tabela 10 que as abordagens de análise descritas neste capítulo conduzem a bons resultados. Contudo, o processo MFM produziu resultado ruim para o modelo L6 e a abordagem KP produziu resultado pobre apenas para a rotação  $\psi$  para o modelo L4. Vê-se também, como esperado, que apenas a abordagem do KP conseguiu captar o acoplamento normal-torção, uma vez que as demais abordagens desprezam tal acoplamento. Na Equação (160), verifica-se, claramente, tal acoplamento através da matriz  $C_v$  do modelo L6. Na Figura 27, ilustra-se a deformada do modelo L6 submetido à força normal de 240 N.

$$C_v = \begin{bmatrix} 9.5258E+07 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & -4.1532E+05 \\ 0.0000E+00 & 6.3687E+04 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 \\ 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 3.7809E+04 & 0.0000E+00 \\ -4.1532E+05 & 0.0000E+00 & 0.0000E+00 & 2.0679E+04 \end{bmatrix} \quad (160)$$

Figura 27 – Deformada da viga caixão com laminação L6 submetida ao esforço normal  $N = 240$  N.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Em seguida, aplicou-se um momento  $M_y$  na extremidade livre da viga caixão de 70 Nm. No ABAQUS, tal carregamento foi simulado por meio de um binário, cuja magnitude das forças é de 1000 N ( $F$ ), contido no plano  $xz$ , como ilustrado na Figura 26. Na Tabela 11, apresentam-se os resultados dos modelos de elementos finitos e as diferenças percentuais.

Tabela 11 – Deslocamento transversal  $w$  e diferença relativa para  $M_y = 70$  Nm (seção caixão).

Laminação	Casca (m)	MFM (%)	MB (%)	KP (%)
L1	6.6285E-04	1.55	0.21	1.55
L2	1.5596E-04	0.02	0.01	0.01
L3	2.6087E-04	-40.20	-8.06	0.31
L4	6.5451E-04	2.49	1.49	1.49
L5	2.0461E-04	4.93	0.00	0.02
L6	2.6820E-04	17.20	-8.01	0.40

Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir dos dados da Tabela 11, pode-se observar que todas as abordagens apresentaram ótima concordância com elementos finitos. Por outro lado, nos modelos L3 e L6, não se pode afirmar o mesmo para os resultados obtidos através do MFM.

Aplicou-se também um momento  $M_z$  cuja magnitude é de 50 Nm na extremidade livre da viga caixão. No ABAQUS, tal carregamento foi representado da mesma forma como o momento  $M_y$ , um binário cuja magnitude das forças é de 1000 N. Contudo, o par de forças está contido no plano  $xy$ . Na Tabela 12, encontram-se os valores dos deslocamentos transversais obtidos nos modelos de elementos finitos, bem como as diferenças percentuais.

Tabela 12 – Deslocamento transversal  $v$  e diferença relativa para  $M_z = 50$  Nm (seção caixão).

Laminação	Casca (m)	MFM (%)	MB (%)	KP (%)
L1	7.7977E-04	2.04	0.69	2.04
L2	1.8431E-04	0.04	0.00	0.01
L3	3.0820E-04	0.49	-8.14	0.19
L4	7.6948E-04	3.04	2.04	2.04
L5	2.4461E-04	3.74	-0.01	0.01
L6	3.2305E-04	15.01	-8.40	0.29

Fonte: Elaborada pelo autor.

Pode-se observar a partir dos dados apresentados na Tabela 12 que apenas o MFM apresentou resultado ruim para o modelo L6 (15.01%). Todas as demais abordagens produziram ótimos resultados.

Por fim, os modelos foram submetidos a um momento torçor  $T = 120$  Nm, aplicado na extremidade livre da viga caixão. No ABAQUS, aplicaram-se dois binários no mesmo plano da seção transversal da viga para produzir o momento torçor resultante de 120 Nm. Na Tabela 13, apresentam-se os deslocamentos obtidos nos modelos do ABAQUS, bem como as diferenças percentuais.

Tabela 13 – Diferença relativa para  $T = 120$  Nm (seção caixão).

Laminação	Desl.	Casca	MFM (%)	MB (%)	KP (%)
L1	$u$ (m)	8.0082E-06	-	-	-1.48
	$\psi$ (rad)	1.9354E-03	12.67	-0.86	-0.09
L2	$u$ (m)	-	-	-	-
	$\psi$ (rad)	9.5817E-03	2.24	1.17	0.81
L3	$u$ (m)	1.9523E-05	-	-	0.30
	$\psi$ (rad)	4.7747E-03	77.17	-7.66	0.52
L4	$u$ (m)	6.2922E-07	-	-	18.39
	$\psi$ (rad)	1.7766E-03	8.03	5.86	-0.10
L5	$u$ (m)	-	-	-	-
	$\psi$ (rad)	9.5829E-03	2.22	1.15	0.80
L6	$u$ (m)	1.9326E-05	-	-	0.43
	$\psi$ (rad)	4.5013E-03	16.81	-5.07	-1.10

Fonte: Elaborado pelo autor.

Pode-se observar na Tabela 13 que todas as abordagens conduziram a bons resultados, salvo as abordagem MFM e KP para os modelos L3, L4 e L6. Mais uma vez, pode-se verificar também que apenas a abordagem KP foi capaz de captar o efeito do acoplamento normal-torção.

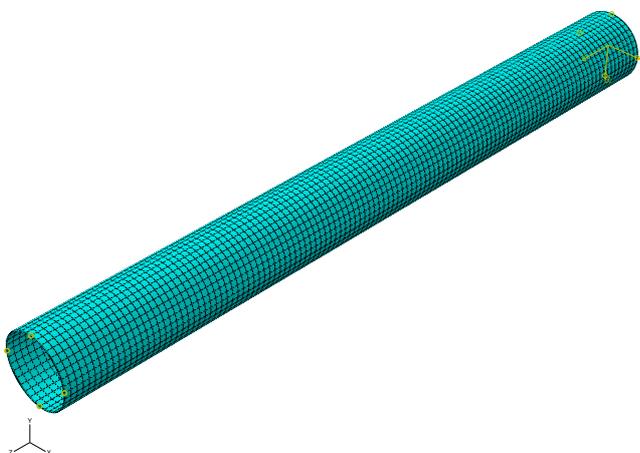
### 3.4.3 Viga com seção transversal circular

No intuito de aumentar a gama de aplicações numéricas para verificação das teorias de vigas, bem como das particularizações para viga de seção circular apresentadas neste trabalho, foram desenvolvidos modelos tridimensionais de vigas tubulares de seção circular no ABAQUS.

As laminações utilizadas (Tabela 9), bem como as propriedades do material (Tabela 8) são as mesmas utilizadas para o exemplo da viga caixão. O tubo possui 60 mm de raio médio e 6 mm de espessura. Os modelos possuem as mesmas condições mencionadas no exemplo de Sagar,<sup>1</sup> com comprimento igual a 20 vezes o raio médio, introdução de um anel rígido em uma extremidade e engastamento na extremidade oposta. No ABAQUS, esse engastamento foi simulado pela restrição de todos os deslocamentos de todos os nós da seção engastada.

Nesta etapa, todos os modelos desenvolvidos no ABAQUS foram discretizados utilizando elementos do tipo casca (S8R). Na Figura 28, ilustra-se a malha utilizada. A malha possui 36 elementos na direção circunferencial e 121 elementos na direção longitudinal.

Figura 28 – Viga de seção transversal circular discretizada com elementos de casca (S8R).



Fonte: Elaborado pelo autor.

A comparação dos resultados seguiu a mesma sistemática do exemplo da viga caixão, diferença relativa para deslocamentos (no centro do vão) entre as respostas obtidas através do MFM, MB, KP e de elementos finitos.

Inicialmente, os modelos de viga de seção circular foram submetidos a uma força normal de  $N = 376.9911$  N, aplicada na extremidade livre da viga. No ABAQUS, utilizou-se a opção *shell load* para aplicar uma carga distribuída de 1000 N/m ao longo do contorno da seção transversal para produzir a resultante de 376.9911 N. Na Tabela 14, apresentam-se os deslocamentos obtidos nos modelos de casca, bem como as diferenças relativas.

Tabela 14 – Diferença relativa para  $N = 376.9911$  N (seção circular).

Laminação	Desl.	Casca	MFM (%)	MB (%)	KP (%)
L1	$u$ (m)	4.1898E-06	1.16	-0.18	1.15
	$\psi$ (rad)	6.7703E-06	-	-	-1.75
L2	$u$ (m)	9.8215E-07	0.00	0.00	0.00
	$\psi$ (rad)	-	-	-	-
L3	$u$ (m)	1.6493E-06	0.03	-8.34	0.01
	$\psi$ (rad)	1.6455E-05	-	-	-0.22
L4	$u$ (m)	4.1327E-06	2.19	1.20	1.20
	$\psi$ (rad)	2.3136E-07	-	-	31.74
L5	$u$ (m)	1.2665E-06	6.73	0.74	0.00
	$\psi$ (rad)	-	-	-	-
L6	$u$ (m)	1.6525E-06	19.75	-7.15	0.08
	$\psi$ (rad)	1.6429E-05	-	-	-0.30

Fonte: Elaborado pelo autor.

Pode-se observar a partir da Tabela 14 que as abordagens MFM, MB e KP produziram bons resultados, salvo o MFM e KP, que produziram resultados ruins para os modelos L6 e L4, respectivamente. Apesar do KP ter resultado em uma solução ruim para o deslocamento secundário (ângulo de torção) do modelo L6, ele produziu bom resultado para o deslocamento principal (deslocamento axial). Vê-se também que apenas o KP conseguiu captar o acoplamento normal-torção, uma vez que as demais abordagens não são capazes de captar tal acoplamento. Na Equação (161), verifica-se esse acoplamento através da matriz  $C_v$  do modelo L1.

$$C_v = \begin{bmatrix} 5.4084E+07 & 1.2648E-12 & 4.3886E-12 & 4.5396E+05 \\ 1.2648E-12 & 9.6160E+04 & -9.6492E-12 & 8.0586E-13 \\ 4.3886E-12 & -1.5163E-11 & 9.6160E+04 & 2.7963E-12 \\ 4.5396E+05 & 8.0586E-13 & 2.7963E-12 & 2.8925E+05 \end{bmatrix} \quad (161)$$

Em seguida, aplicou-se um momento  $M_y$  na extremidade livre da viga de 120 Nm. No ABAQUS, tal carregamento foi simulado por meio de um binário, cuja magnitude das forças é de 1000 N. Na Tabela 15, apresentam-se os resultados dos modelos de elementos finitos e as diferenças relativas.

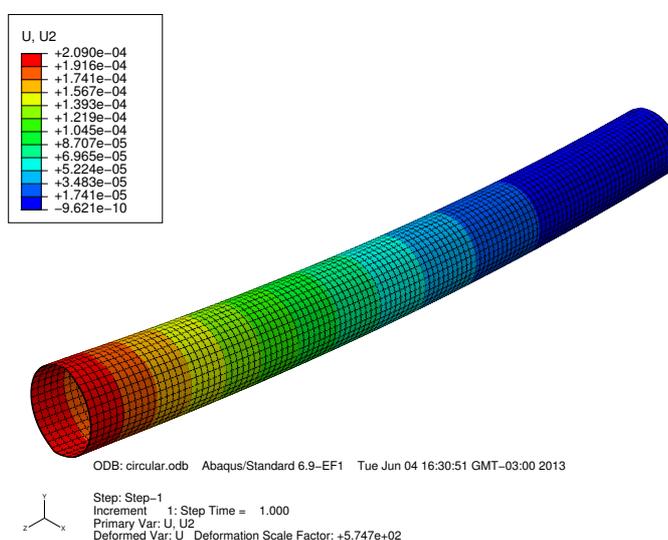
A partir dos dados da Tabela 15, pode-se observar que todas as abordagens apresentaram ótima concordância com elementos finitos (diferença relativa abaixo de 10%). Contudo, no modelo L6 não se pode afirmar o mesmo quando analisado através do MFM. Na Figura 29, ilustra-se a deformada do modelo L2.

Por fim, os modelos foram submetidos a um momento torçor de  $T = 240$  Nm, aplicado na extremidade livre da viga. No ABAQUS, aplicaram-se dois binários, cuja magnitude das forças são de 1000 N, no mesmo plano da seção transversal para produzir a resultante de

Tabela 15 – Deslocamento transversal  $w$  e diferença relativa para  $M_y = 120$  Nm (seção circular).

Laminação	Casca (m)	MFM (%)	MB (%)	KP (%)
L1	2.1949E-04	2.19	0.84	2.34
L2	5.2047E-05	-0.14	-0.16	0.01
L3	8.7283E-05	0.03	-8.49	0.11
L4	2.1640E-04	3.28	2.27	2.43
L5	6.8113E-05	5.02	0.59	0.01
L6	8.9295E-05	17.28	-7.33	0.25

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 29 – Deformada da viga com laminação L2 submetida ao momento fletor  $M_y = 120$  Nm.

Fonte: Elaborado pelo autor.

240 Nm. Na Tabela 16, apresentam-se os resultados dos modelos de elementos finitos e as diferenças relativas.

A partir dos dados apresentados na Tabela 16, pode-se observar que todas as abordagens apresentaram ótima concordância com elementos finitos, diferença percentual abaixo de 10%, salvo o modelo L3 quando analisado através do MFM.

Tabela 16 – Diferença relativa para  $T = 240$  Nm (seção circular).

Laminação	Desl.	Casca	MFM (%)	MB (%)	KP (%)
L1	$u$ (m)	4.3101E-06	-	-	-1.75
	$\psi$ (rad)	5.0501E-04	11.36	-1.29	-0.10
L2	$u$ (m)	-	-	-	-
	$\psi$ (rad)	2.5194E-03	0.27	0.02	-0.06
L3	$u$ (m)	1.0475E-05	-	-	-0.21
	$\psi$ (rad)	1.2437E-03	75.40	-8.20	0.13
L4	$u$ (m)	1.4729E-07	-	-	31.74
	$\psi$ (rad)	4.6288E-03	6.94	5.63	-0.12
L5	$u$ (m)	-	-	-	-
	$\psi$ (rad)	2.5190E-03	0.29	0.04	-0.04
L6	$u$ (m)	1.0459E-05	-	-	-0.30
	$\psi$ (rad)	1.2119E-03	11.90	-4.88	-0.80

Fonte: Elaborado pelo autor.

## 4 ANÁLISE NÃO LINEAR COM GRANDES ROTAÇÕES

No que tange o uso da descrição corrotacional para análise de vigas laminadas de parede fina por meio de elementos de barra, ressalta-se que, na revisão bibliográfica realizada, não foram detectadas pesquisas. Sobre o tema, Almeida e Awruch<sup>60</sup> propuseram um elemento de casca laminada triangular.

Uma das formulações corrotacionais mais consistentes conhecidas como independente do elemento foi introduzida por Rankin e Brogan.<sup>61</sup> A principal característica desta formulação é a separação da parcela de corpo rígido do movimento da parcela deformacional. A parcela não linear é incorporada na matriz de transformação que relaciona os parâmetros locais e globais. Toda a parcela deformacional é realizada pelo elemento local. Desta forma, pode-se utilizar elementos convencionais lineares e não lineares no âmbito local da formulação corrotacional.

Há diversos trabalhos que consolidaram e generalizaram a formulação corrotacional independente do elemento como Rankin e Nour-Omid<sup>62</sup> e Nour-Omid e Rankin.<sup>63</sup> Outros trabalhos importantes usando tal abordagem foram apresentados por Crisfield,<sup>64</sup> Crisfield e Moita<sup>34</sup> e Crisfield.<sup>65</sup> Pacoste e Eriksson,<sup>36</sup> Battini e Pacoste<sup>37</sup> e Battini<sup>66</sup> introduziram algumas modificações no intuito de melhorar a eficiência computacional. Fellipa e Haugen<sup>67</sup> apresentaram uma unificação da descrição corrotacional, discorrendo sobre o histórico, as vantagens, as variações, dentre outros aspectos dela.

Nesta dissertação, utiliza-se a formulação corrotacional independente do elemento para o tratamento de problemas geometricamente não-lineares com grandes rotações. Esta formulação é apresentada nos moldes do trabalho de Monteiro,<sup>33</sup> que é baseado na formulação de Nour-Omid e Rankin.<sup>63</sup>

### 4.1 Grandes rotações no espaço

Nesta seção, explanam-se as fórmulas e o algebrismo para o tratamento das rotações finitas no espaço tridimensional. A ênfase é posta em expressões úteis para formulação corrotacional do elemento de pórtico espacial apresentada a seguir.

A avaliação das rotações no plano é uma tarefa simples, uma vez que uma rotação no plano é definida apenas por um escalar, o ângulo de rotação em torno do eixo perpendicular a este plano. Neste caso, as rotações possuem a propriedade da comutatividade. Por outro lado, a avaliação das rotações finitas no espaço é mais complicada. Seu comportamento é regido por um teorema fundamental de Euler que garante: o movimento genérico de um corpo rígido com um ponto fixo é equivalente a uma rotação em torno de algum eixo que passa por tal ponto.<sup>67</sup>

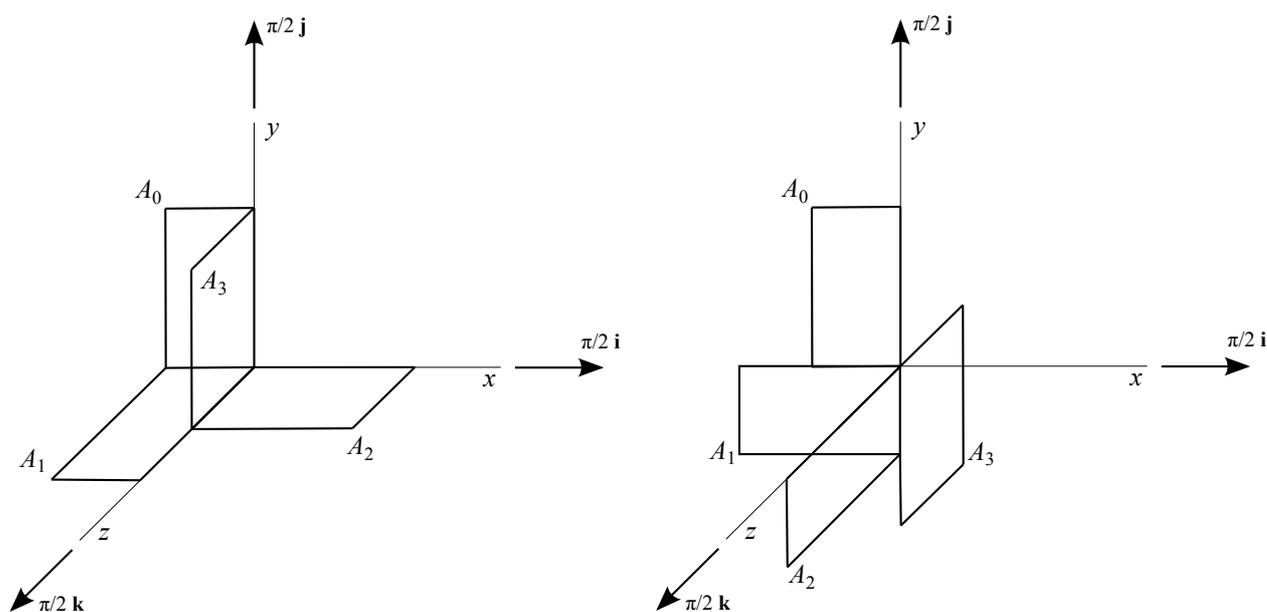
Portanto, para determinação completa das rotações finitas no espaço é necessário o conhecimento da magnitude da rotação e do eixo em torno do qual esta rotação ocorre, ou seja, o ângulo de rotação e o eixo de rotação. Estes são os mesmos atributos que caracterizam os vetores. Entretanto, as rotações finitas no espaço não obedecem as leis do cálculo vetorial. O

maior problema é a propriedade da comutação, que não é obedecida. Desta forma, alternando a sequência de duas rotações, os resultados são distintos, salvo se ambas apresentem o mesmo eixo de rotação.<sup>68</sup>

No intuito de mostrar o caráter não vetorial das rotações finitas no espaço, ilustra-se, a seguir, o exemplo extraído de Malvern.<sup>69</sup> Aplica-se uma sequência de três rotações de  $90^\circ$  ao corpo rígido representado na Figura 30 pelo retângulo  $A_0$  contido inicialmente no plano  $xy$ :

- a) rotação em torno do eixo  $x$ , representado por  $\pi/2 \mathbf{i}$ , que leva o corpo para a posição  $A_1$ ;
- b) rotação em torno do eixo  $y$ , representado por  $\pi/2 \mathbf{j}$ , que leva o corpo para a posição  $A_2$ ;
- c) rotação em torno do eixo  $z$ , representado por  $\pi/2 \mathbf{k}$ , que leva o corpo para a posição  $A_3$ .

Figura 30 – Ilustração do caráter não vetorial das rotações.



Fonte: Adaptado de Malvern.<sup>69</sup>

Se as rotações fossem grandezas vetoriais, a aplicação das rotações na ordem inversa levaria para a mesma posição final  $A_3$  como explanado anteriormente, porém, como ilustrado na Figura 30, isto não ocorre. No entanto, vale ressaltar que quando efetuadas em torno de um único eixo, as rotações podem ser tratadas vetorialmente, como nos casos bidimensionais.

Matematicamente, uma rotação finita  $\theta$  no espaço em torno de um eixo pode ser caracterizada por um tensor ortogonal  $\mathbf{R}_\theta$ . Há várias formas de representar esse tensor. A essas formas de se representar o tensor  $\mathbf{R}_\theta$ , denomina-se parametrização do tensor de rotação ou parametrização das rotações.<sup>68</sup>

Segundo Moreira,<sup>68</sup> existem duas classes de parametrizações: as parametrizações vetoriais e as não vetoriais. As parametrizações vetoriais não são livres de singularidades, porém, apesar dessa limitação, elas são muito convenientes do ponto de vista computacional, uma vez que permitem tratar as rotações de forma semelhante às translações. Pode-se citar as parametrizações de Euler e Parâmetros de Rodrigues como exemplos de parametrizações vetoriais. Por outro lado, as parametrizações ditas não vetoriais envolvem mais de três parâmetros associados a restrições ou têm apenas três parâmetros que, entretanto, não podem ser entendidos como componentes de um vetor, por exemplo, os ângulos de Euler, quatérnions (também conhecidos como Parâmetros de Euler).<sup>68</sup>

Diversas alternativas de parametrização do tensor  $\mathbf{R}_\theta$  podem ser encontradas na literatura. Spring<sup>70</sup> e Felippa e Haugen<sup>67</sup> revisam as parametrizações comumente utilizadas: parâmetros de Euler (quaternions), parâmetros de Rodrigues, ângulos de Euler, dentre outras parametrizações.

A escolha destas parametrizações leva em consideração aspectos teóricos e computacionais. Por exemplo, evitar singularidades ou reduzir o custo computacional.<sup>68</sup>

A seguir, é mostrado o algebrismo para determinação do tensor  $\mathbf{R}_\theta$ . Este algebrismo segue a mesma abordagem apresentada por Argyris,<sup>38</sup> apontado por muitos autores como o trabalho pioneiro no ramo da Mecânica Computacional.<sup>68,71</sup>

#### 4.1.1 Tensor das rotações

Como mencionado anteriormente, matematicamente, uma rotação finita  $\theta$  em torno de um eixo pode ser caracterizada por um tensor ortogonal  $\mathbf{R}_\theta$ . As seis condições de ortogonalidade resultante da condição  $\mathbf{R}_\theta \mathbf{R}_\theta^t = \mathbf{I}$  (no decorrer do trabalho  $\mathbf{I}$  denotará a matriz de identidade de ordem 3) permitem que o tensor  $\mathbf{R}_\theta$  possa ser representado por apenas três parâmetros. Como sugerido pelo teorema de Euler, sejam esses três parâmetros as componentes do pseudovetor:<sup>33</sup>

$$\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{e} \quad (162)$$

definido ao longo do eixo de rotação, cujo vetor unitário é  $\mathbf{e}$  (Figura 31). Desta forma, o pseudovetor  $\boldsymbol{\theta}$  pode ser escrito em termos das componentes  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  no sistema cartesiano  $Oxyz$ :

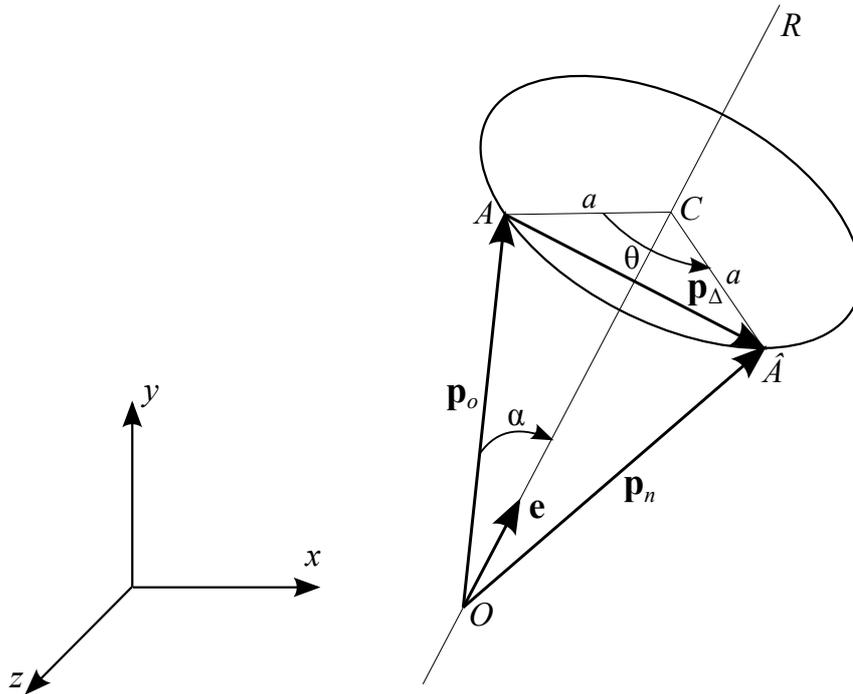
$$\boldsymbol{\theta} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad (163)$$

com

$$\theta = (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)^{1/2} \quad (164)$$

Considera-se, agora, um vetor  $\mathbf{p}_o$  que, com o resultado da aplicação de  $\boldsymbol{\theta}$ , é trans-

Figura 31 – Rotação de um vetor.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

formado em  $\mathbf{p}_n$  (Figura 31). Assim, busca-se estabelecer a transformação linear:

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{R}_\theta \mathbf{p}_o \quad (165)$$

onde o tensor de rotação  $\mathbf{R}_\theta$  associa cada vetor em sua posição antes da rotação a um outro vetor em sua posição após a rotação. Vale ressaltar que, por definição, o vetor  $\mathbf{p}_o$  não sofre alterações no seu comprimento com uma rotação de corpo rígido e, portanto, pode-se dizer:

$$\mathbf{p}_o^t \mathbf{p}_o = \mathbf{p}_n^t \mathbf{p}_n = (\mathbf{R}_\theta \mathbf{p}_o)^t (\mathbf{R}_\theta \mathbf{p}_o) = \mathbf{p}_o^t \mathbf{R}_\theta^t \mathbf{R}_\theta \mathbf{p}_o \quad (166)$$

ou

$$\mathbf{p}_o^t (\mathbf{I} - \mathbf{R}_\theta^t \mathbf{R}_\theta) \mathbf{p}_o = 0 \quad (167)$$

Sendo a Equação (167) válida para qualquer  $\mathbf{p}_o$ , implica na ortogonalidade do tensor  $\mathbf{R}_\theta$ , ou seja:

$$\mathbf{R}_\theta^t \mathbf{R}_\theta = \mathbf{I} \quad (168)$$

Na Figura 31, observa-se que o vetor  $\mathbf{p}_n$  pode ser escrito na forma:

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_o + \mathbf{p}_\Delta \quad (169)$$

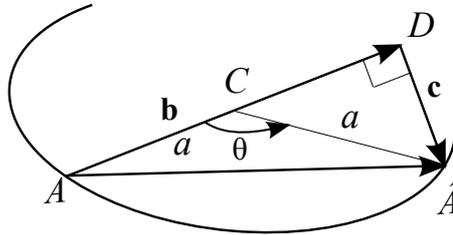
Uma expressão para o tensor de rotação em função do pseudovetor é obtida escrevendo  $\mathbf{p}_\Delta$  na forma (Figura 32):

$$\mathbf{p}_\Delta = \mathbf{b} + \mathbf{c} \quad (170)$$

onde  $\mathbf{c}$  é normal a  $\mathbf{b}$ . O vetor  $\mathbf{c}$  situa-se perpendicular ao plano  $OAC$ , logo,  $\mathbf{c}$  possui a mesma direção que  $(\mathbf{e} \times \mathbf{p}_o)$  e sua magnitude é dada por:

$$|\mathbf{c}| = a \operatorname{sen}\theta \quad (171)$$

Figura 32 – Detalhe dos vetores  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ .



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Por outro lado, observa-se que a magnitude de  $(\mathbf{e} \times \mathbf{p}_o)$  é:

$$\begin{aligned} |\mathbf{e} \times \mathbf{p}_o| &= |\mathbf{e}| |\mathbf{p}_o| \operatorname{sen}\alpha \\ &= |\mathbf{p}_o| \operatorname{sen}\alpha \\ &= |\mathbf{p}_o| \frac{a}{|\mathbf{p}_o|} \\ &= a \end{aligned} \quad (172)$$

A partir das Equações (162), (171) e (172), escreve-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= |\mathbf{c}| \frac{(\mathbf{e} \times \mathbf{p}_o)}{|\mathbf{e} \times \mathbf{p}_o|} \\ &= a \operatorname{sen}\theta \frac{(\mathbf{e} \times \mathbf{p}_o)}{a} \\ &= \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}_o) \end{aligned} \quad (173)$$

A partir da Figura 32, demonstra-se imediatamente que  $\mathbf{b}$  não é apenas perpendicular a  $(\mathbf{e} \times \mathbf{p}_o)$ , mas também a  $\mathbf{e}$ , uma vez que este vetor está contido no plano  $AC\hat{A}$  normal a  $\mathbf{e}$ . Portanto, pode-se associar a direção de  $\mathbf{b}$  à direção de  $\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{p}_o)$ . Verifica-se, que o módulo de  $\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{p}_o)$  é  $a$ , uma vez que  $\mathbf{e}$  é um vetor unitário e normal a  $(\mathbf{e} \times \mathbf{p}_o)$ . Recorrendo mais

uma vez à Figura 32, verifica-se que o módulo do vetor  $\mathbf{b}$  é dado por:

$$|\mathbf{b}| = a - a \cos \theta = (1 - \cos \theta)a = 2a \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (174)$$

Assim, a partir das Equações (162), (174) e de relações trigonométricas, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= |\mathbf{b}| \frac{(\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{p}_o))}{|(\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{p}_o))|} \\ &= 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} (\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{p}_o)) \\ &= \frac{1 \sin^2(\theta/2)}{2 (\theta/2)^2} (\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}_o)) \end{aligned} \quad (175)$$

Substituindo as Equações (175) e (173) na Equação (170) e, em seguida, substituindo a expressão resultante dessa operação na Equação (169), obtém-se o vetor  $\mathbf{p}_n$  na forma:

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_o + \frac{\sin \theta}{\theta} (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}_o) + \frac{1 \sin^2(\theta/2)}{2 (\theta/2)^2} (\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}_o)) \quad (176)$$

A fim de escrever a expressão anterior num formato matricial, introduz-se o seguinte tensor de segunda ordem antissimétrico:

$$\mathbf{S}_m = \begin{bmatrix} 0 & -m_3 & m_2 \\ m_3 & 0 & -m_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (177)$$

onde  $m_i$  são as componentes de um vetor qualquer  $\mathbf{m}$ . O produto vetorial de  $\mathbf{m}$  com outro vetor  $\mathbf{n}$  qualquer pode ser escrito na forma:

$$\mathbf{m} \times \mathbf{n} = \mathbf{S}_m \mathbf{n} \quad (178)$$

ou

$$\mathbf{m} \times \mathbf{n} = -\mathbf{S}_n \mathbf{m} \quad (179)$$

Desta forma, pode-se escrever que:

$$\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}_o = \mathbf{S}_\theta \mathbf{p}_o \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}_o) = \mathbf{S}_\theta^2 \mathbf{p}_o \quad (180)$$

Usando a relação acima na Equação (176) e observando a Equação (165), tem-se:

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_o + \frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{S}_\theta \mathbf{p}_o + \frac{1 \sin^2(\theta/2)}{2 (\theta/2)^2} \mathbf{S}_\theta^2 \mathbf{p}_o = \mathbf{R}_\theta \mathbf{p}_o \quad (181)$$

então,

$$\mathbf{R}_\theta = \mathbf{I} + \frac{\text{sen}\theta}{\theta} \mathbf{S}_\theta + \frac{1}{2} \frac{\text{sen}^2(\theta/2)}{(\theta/2)^2} \mathbf{S}_\theta^2 \quad (182)$$

Recorrendo às Equações (162) e (178), pode-se escrever a Equação (182) em função do vetor unitário  $\mathbf{e}$ :

$$\mathbf{R}_\theta = \mathbf{I} + \text{sen}\theta \mathbf{S}_e + (1 - \cos\theta) \mathbf{S}_e^2 \quad (183)$$

Esta expressão é conhecida na literatura como fórmula de Rodrigues<sup>33</sup> ou como fórmula de Euler<sup>68</sup> e é assim definida em termos do ângulo de rotação e dos cossenos diretores do eixo de rotação (componentes de  $\mathbf{e}$ ).

Recordando-se que  $\mathbf{R}_\theta$  é um tensor ortogonal, a relação inversa da Equação (181) fica:

$$\mathbf{p}_o = \mathbf{R}_\theta^{-1} \mathbf{p}_n = \mathbf{R}_\theta^t \mathbf{p}_n \quad (184)$$

onde

$$\mathbf{R}_\theta^t = \mathbf{I} - \frac{\text{sen}\theta}{\theta} \mathbf{S}_\theta + \frac{1}{2} \frac{\text{sen}^2(\theta/2)}{(\theta/2)^2} \mathbf{S}_\theta^2 \quad (185)$$

uma vez que  $\mathbf{S}_\theta$  é antissimétrico e possui a propriedade:

$$\mathbf{S}_\theta^t = -\mathbf{S}_\theta \quad (186)$$

A obtenção das componentes de  $\boldsymbol{\theta}$  a partir de  $\mathbf{R}_\theta$  é simbolizado por:

$$\boldsymbol{\theta} = \text{rot}(\mathbf{R}_\theta) \quad (187)$$

e pode ser resolvido por meio do algoritmo de Spurrier.<sup>72</sup>

#### 4.1.2 Pequenas rotações

Se o vetor  $\mathbf{p}_o$  da Figura 31 gira de um pequeno ângulo  $\Delta\theta$  em torno do eixo  $\mathbf{e}$ , tem-se que o comprimento do arco descrito pela trajetória do vetor  $\mathbf{p}_o$ , entre as posições  $A$  e  $\hat{A}$ , pode ser aproximado pela corda  $\overline{A\hat{A}}$ ,

$$\Delta\theta a = \overline{A\hat{A}} \approx |\mathbf{p}_\Delta| \quad (188)$$

e que o vetor  $\mathbf{p}_\Delta$  pode ser considerado perpendicular ao plano formado por  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{p}_o$ :

$$\mathbf{p}_\Delta = |\mathbf{p}_\Delta| \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{p}_o}{|\mathbf{e} \times \mathbf{p}_o|} = \frac{|\mathbf{p}_\Delta|}{a} \mathbf{e} \times \mathbf{p}_o \quad (189)$$

Por meio da Equação (188),

$$\mathbf{p}_\Delta = \Delta\theta \mathbf{e} \times \mathbf{p}_o = \Delta\theta \times \mathbf{p}_o \quad (190)$$

Substituindo a equação anterior na Equação (169), obtém-se:

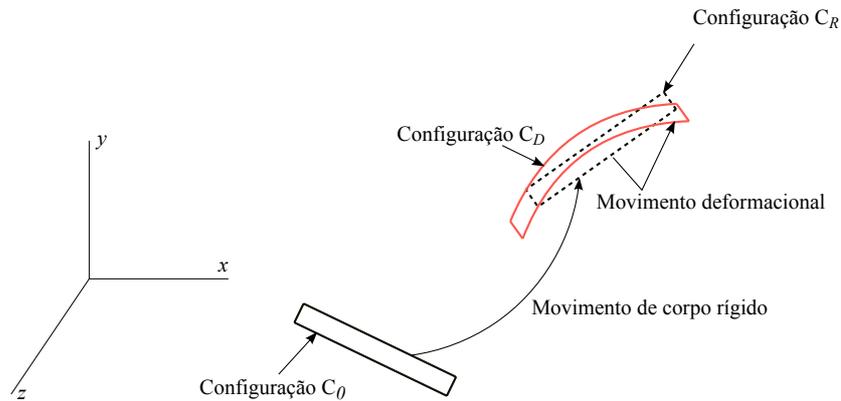
$$\mathbf{R}_{\Delta\theta} = \mathbf{I} + \mathbf{S}_{\Delta\theta} \quad (191)$$

que é a linearização da Equação (183). Neste caso, duas pequenas rotações sucessivas no espaço podem ser tratadas vetorialmente.<sup>33</sup>

## 4.2 Formulação corrotacional

Como no caso 2D,<sup>36,37,65,66,73</sup> a ideia principal da abordagem corrotacional é decompor o movimento em duas parcelas: uma de corpo-rígido e outra deformacional. Na Figura 33, ilustra-se tal ideia. Inicialmente, o elemento que se encontra na configuração dita inicial, indeformada ou base  $C_0$  sofre um deslocamento de corpo-rígido levando-o para a configuração  $C_R$ , dita corrotacionada. Para cada elemento individual sua configuração corrotacionada é obtida através do movimento de corpo-rígido do elemento de base. Por fim, a deformação é aplicada ao elemento obtendo-se configuração  $C_D$ .<sup>67</sup>

Figura 33 – Ilustração da descrição cinemática da abordagem corrotacional.

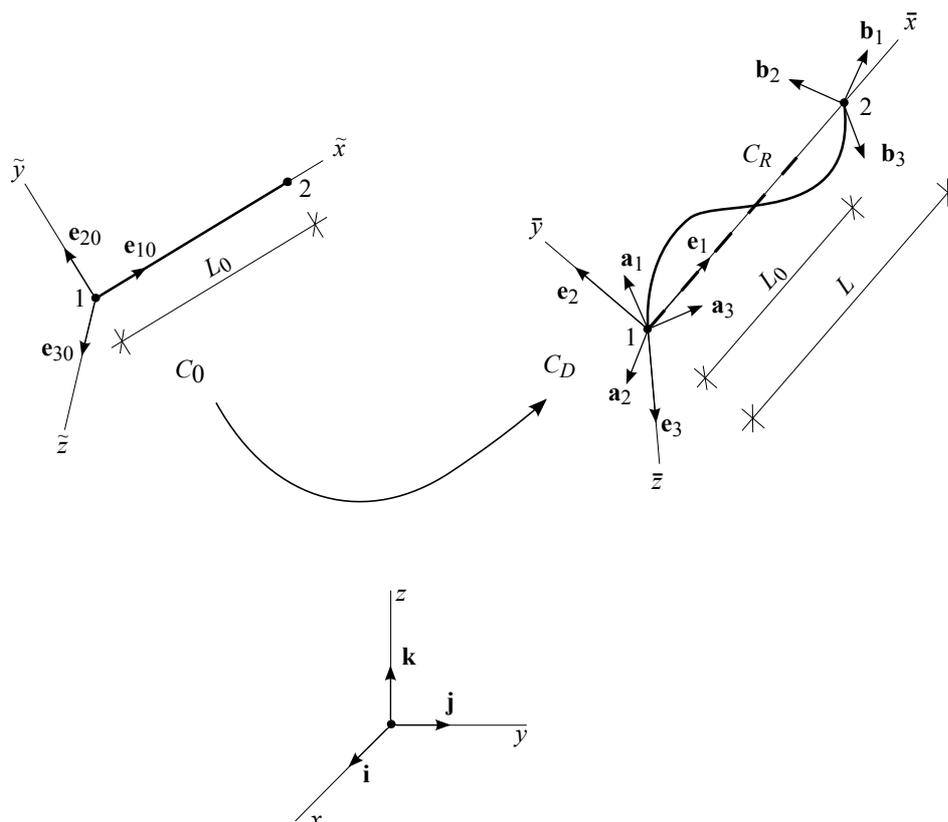


Fonte: Adaptado de Felippa e Haugen.<sup>67</sup>

O movimento de um elemento finito de pórtico espacial, desde sua configuração inicial  $C_0$  até sua configuração de equilíbrio corrente  $C_D$ , é mostrado na Figura 34. Para o estudo desse movimento, é importante definir os seguintes sistemas de eixos cartesianos:

- sistema global  $xyz$ , cuja orientação é definida pelos vetores de base agrupados na matriz  $\mathbf{I} = [\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k}]$ . A conectividade entre os elementos e a equação de equilíbrio global da estrutura são referidas a esse sistema de eixos.
- sistema de base  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ , cuja orientação é definida pelos vetores de base agrupados na matriz  $\mathbf{T}_0 = [\mathbf{e}_{10} \ \mathbf{e}_{20} \ \mathbf{e}_{30}]$ . É o sistema local definido na configuração  $C_0$ .
- sistema corrotacional  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ , cuja orientação é definida pelos vetores de base agrupados na matriz  $\mathbf{T} = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3]$ . É o sistema definido na configuração  $C_R$ .
- sistemas nodais associados aos nós 1 e 2 do elemento, cujos vetores de base são agrupados nas matrizes  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3]$  e  $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3]$ , respectivamente. Os sistemas transladam e giram continuamente com as seções transversais nodais. Quando referidos à configuração inicial, a orientação dos sistemas nodais é igual à do sistema local dessa configuração, isto é,  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{B}_0 = \mathbf{T}_0$ .

Figura 34 – Sistemas de eixos globais, locais e nodais.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

A origem do sistema de base é posta no nó 1 do elemento finito. O eixo de base  $\tilde{x}$  é definido através das posições dos nós do elemento, no sentido do nó 1 para o nó 2, enquanto os eixos  $\tilde{y}$  e  $\tilde{z}$  coincidem com os eixos principais de inércia da seção transversal. A orientação do sistema corrotacional é definida a partir do movimento de corpo rígido do sistema de base.

A origem deste sistema também é posta no nó 1. É interessante observar que, no começo da análise, a configuração corrente reduz-se a configuração de base, as configurações  $C_0$  e  $C_R$  são coincidentes ( $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z} \equiv \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ ). Neste caso, há apenas dois sistemas distintos: o global e o local, os quais concordam com a análise linear.

Convenção de notações: o uso de  $0$ ,  $R$  e  $D$  como sobrescrito ou subscrito indica pertinência às configurações de base, corrotacionada e deformada, respectivamente. Grandezas com símbolos til ou barra são referidos ao sistema de base e ao sistema corrotacional, respectivamente. Grandezas sem esses símbolos são referidas ao sistema global. Exemplo:  $\mathbf{x}_R$  denota o vetor posição de um ponto na configuração  $C_R$  cujas componentes são referidas no sistema global, enquanto  $\tilde{\mathbf{x}}_0$  denota o vetor posição de um ponto na configuração  $C_0$  cujas componentes são referidas no sistema de base. Quando necessário, para não sobrecarregar os símbolos, será indicada outra notação.

Desta forma a orientação do sistema local de eixos da configuração  $C_0$  é definida da seguinte forma:

$$\mathbf{e}_{10} = \frac{\mathbf{X}_{21}}{|\mathbf{X}_{21}|}, \quad \mathbf{e}_{30} = \frac{\mathbf{e}_{10} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{e}_{10} \times \mathbf{v}|}, \quad \mathbf{e}_{20} = \mathbf{e}_{30} \times \mathbf{e}_{10} \quad (192)$$

Onde  $\mathbf{X}_{21} = \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1$ , tal que o vetor  $\mathbf{X}_i$  representa a posição do nó  $i$  do elemento na configuração inicial  $C_0$ . O vetor  $\mathbf{v}$  é um vetor auxiliar contido no plano  $\tilde{x}\tilde{y}$ .

Para definição da orientação do sistema corrotacional, deve-se entender o movimento do elemento de pórtico entre as configurações inicial e atual. Esse movimento pode ser dividido em duas etapas (Figura 35). Inicialmente, os nós 1 e 2 sofrem deslocamentos  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$ , respectivamente, deformando o elemento axialmente. Por fim, os sistemas nodais rotacionam  $\theta_1$  e  $\theta_2$  com relação à configuração inicial  $C_0$ , provocando curvatura e torção no elemento. Portanto, na configuração  $C_D$  a posição dos nós no sistema global é dada por:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{X}_i + \mathbf{u}_i, \quad i = 1, 2 \quad (193)$$

e a orientação dos eixos nodais pode ser obtida por:

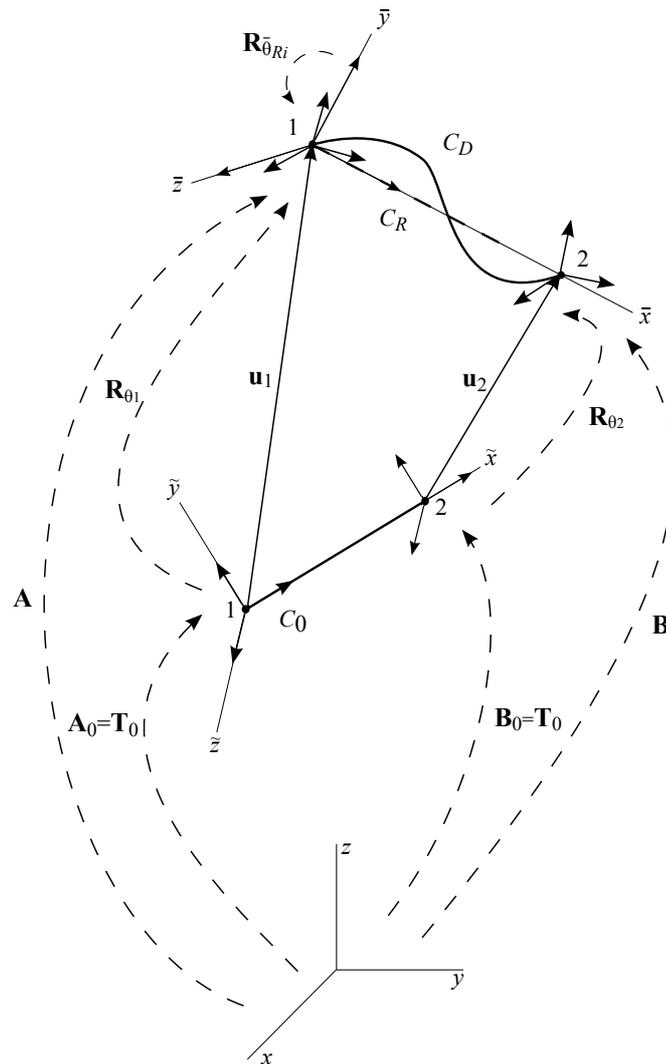
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{\theta_1} \mathbf{A}_0 \quad (194)$$

e

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{\theta_2} \mathbf{B}_0 \quad (195)$$

A orientação do sistema local  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  é definida de maneira semelhante ao sistema da configuração  $C_0$ . O eixo  $\bar{x}$  é direcionado ao longo do eixo do elemento, apontando do nó 1 ao

Figura 35 – Movimento do elemento.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

nó 2. Utiliza-se o vetor  $\mathbf{a}_2$  na definição dos demais eixos. Portanto,

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{x}_{21}}{|\mathbf{x}_{21}|}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{a}_2}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{a}_2|}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 \quad (196)$$

Definidos os sistemas de eixos locais (base e corrotacional) e global, pode-se estabelecer a relação entre as componentes nas direções  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  de um vetor qualquer expresso no sistema  $xyz$  através das seguintes operações, sendo  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{Q}$  grandezas vetorial e tensorial de segunda ordem, respectivamente:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^t \mathbf{x}, \quad \bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^t \mathbf{Q} \mathbf{T} \quad (197)$$

onde  $\mathbf{T}$  é a matriz que relaciona as componentes do vetor em sistemas de coordenadas diferentes.

Uma vez definida as posições  $C_0$  e  $C_R$ , pode-se determinar os deslocamentos e

rotações deformacionais, também denominados corrotacionais, medidos no sistema local. Na Figura 36, apresenta-se a sistemática para o cálculo do deslocamento corrotacional  $\bar{\mathbf{u}}_{Ri}$  do  $i$ -ésimo nó de um elemento finito qualquer, dado por:

$$\bar{\mathbf{u}}_{Ri} = \mathbf{T}^t (\mathbf{X}_{i1} + \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_1) - \mathbf{X}_i^\varphi \quad (198)$$

onde

$$\mathbf{X}_{i1} = \mathbf{X}_i - \mathbf{X}_1 \quad (199)$$

e

$$\mathbf{X}_i^\varphi = |\mathbf{X}_{i1}| \bar{\mathbf{e}}_1 \quad (200)$$

Pode-se dar uma interpretação geométrica do vetor  $\mathbf{X}_i^\varphi$  por meio do resultado de dois movimentos de corpo rígido aplicados sob o vetor  $\mathbf{X}_{i1}$ . Inicialmente, o vetor  $\mathbf{X}_{i1}$  sofre um deslocamento  $\mathbf{u}_1$ . Por fim,  $\mathbf{X}_{i1}$  sofre uma rotação  $\varphi$ . O vetor  $\mathbf{X}_i^\varphi$  possui a mesma magnitude do vetor  $\mathbf{X}_{i1}$ , porém, este é representado no sistema local de  $C_0$ , enquanto aquele é representado no sistema local de  $C_R$ .

Considera-se que a rotação corrente  $\boldsymbol{\theta}_i$  é composta de uma parcela rígida  $\boldsymbol{\theta}_p$ , aplicada ao elemento e que ocorre entre as configurações  $C_0$  e  $C_R$ , seguida de uma parcela deformacional  $\boldsymbol{\theta}_{is}$  que ocorre entre as configurações  $C_R$  e  $C_D$ ,

$$\mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_i} = \mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_{is}} \mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_p} \quad (201)$$

onde, por definição, a rotação de corpo rígido é dado por:

$$\mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_p} = \mathbf{T} \mathbf{T}_0^t \quad (202)$$

Portanto,

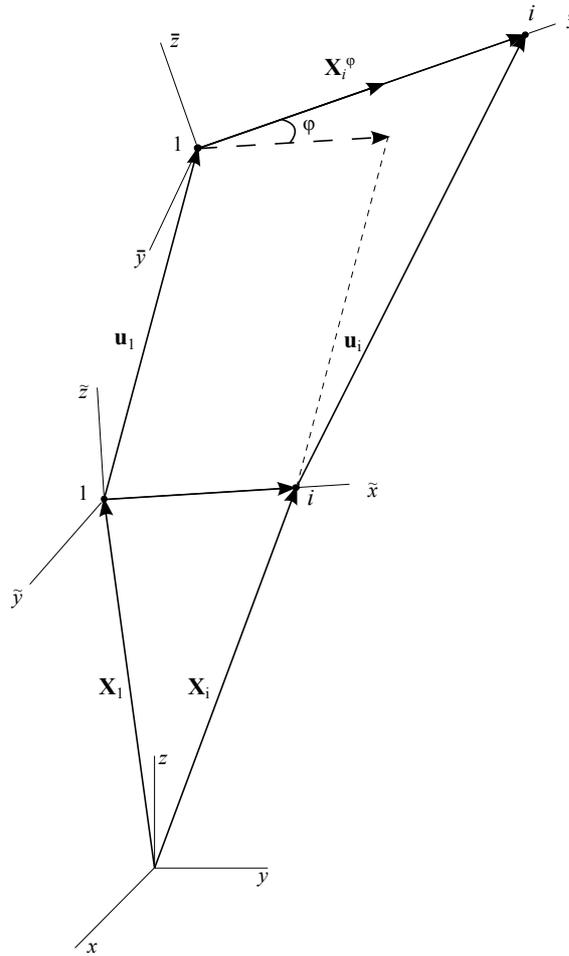
$$\mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_i} = \mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_{is}} \mathbf{T} \mathbf{T}_0^t \quad (203)$$

Após algumas manipulações algébricas, pode-se escrever o tensor correspondente à parcela de deformação da seguinte maneira:

$$\mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_{is}} = \mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_i} \mathbf{T}_0 \mathbf{T}^t \quad (204)$$

A rotação corrotacional  $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{Ri}$  pode, então, ser obtida aplicando a mudança de coorde-

Figura 36 – Vetor  $\mathbf{X}_i^\phi$ .



Fonte: Elaborado pelo autor

nadas apresentada na Equação (197):

$$\mathbf{R}_{\bar{\theta}_{Ri}} = \mathbf{T}^t \mathbf{R}_{\theta_{is}} \mathbf{T} = \mathbf{T}^t \mathbf{R}_{\theta_i} \mathbf{T}_0, \quad \bar{\theta}_{Ri} = rot(\mathbf{R}_{\bar{\theta}_{Ri}}) \tag{205}$$

Pode-se determinar a relação anterior de outra maneira. A tríade global sofre uma rotação definida por  $\mathbf{T}$ , seguida de uma rotação relativa local, isto é,  $\mathbf{R}_{\bar{\theta}_{Ri}}$ . Assim, a orientação final da tríade nodal pode ser obtida através do produto  $\mathbf{T}\mathbf{R}_{\bar{\theta}_{Ri}}$ . Por outro lado, esta mesma orientação pode ser obtida através do produto  $\mathbf{R}_{\theta_i}\mathbf{T}_0$  (Figura 35).<sup>67</sup> Desta forma

$$\mathbf{T}\mathbf{R}_{\bar{\theta}_{Ri}} = \mathbf{R}_{\theta_i}\mathbf{T}_0 \Rightarrow \mathbf{R}_{\bar{\theta}_{Ri}} = \mathbf{T}^t \mathbf{R}_{\theta_i} \mathbf{T}_0 \tag{206}$$

Os deslocamentos corrotacionais nodais generalizados do elemento de pórtico espacial podem ser escritos como:

$$\bar{\mathbf{d}}_R = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{d}}_{R1} \\ \bar{\mathbf{d}}_{R2} \end{Bmatrix} \tag{207}$$

onde

$$\bar{\mathbf{d}}_{R1} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_{R1} \\ \bar{\boldsymbol{\theta}}_{R1} \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{u}}_{R1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{\theta}}_{R1} = \text{rot}(\mathbf{T}^t \mathbf{R}_{\theta_1} \mathbf{T}_0) = \text{rot}(\mathbf{T}^t \mathbf{A}) \quad (208)$$

e

$$\bar{\mathbf{d}}_{R2} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_{R2} \\ \bar{\boldsymbol{\theta}}_{R2} \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{u}}_{R1} = \begin{Bmatrix} L - L_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{\theta}}_{R2} = \text{rot}(\mathbf{T}^t \mathbf{R}_{\theta_2} \mathbf{T}_0) = \text{rot}(\mathbf{T}^t \mathbf{B}) \quad (209)$$

sendo os comprimentos inicial e final do elemento definidos, respectivamente, por:

$$L_0 = |\mathbf{x}_{21}|, \quad L = |\mathbf{x}_{21}| \quad (210)$$

#### 4.2.1 Equações de equilíbrio

Devido à invariância do PTV, pode-se escrever:

$$\delta \mathbf{d}_D^t \mathbf{f}_D = \delta \bar{\mathbf{d}}_R^t \bar{\mathbf{f}}_R \quad (211)$$

onde  $\delta \mathbf{d}_D$  e  $\mathbf{f}_D$  são os vetores, pertinentes à configuração  $C_D$ , de deslocamento virtual e de força interna escritos no sistema global, respectivamente;  $\delta \bar{\mathbf{d}}_R$  e  $\bar{\mathbf{f}}_R$  são os vetores, pertinentes a configuração  $C_R$ , de deslocamento virtual e de força interna escritos no sistema local, respectivamente.

Nesta abordagem corrotacional, antes de qualquer cálculo no nível do elemento local, a parcela deformacional  $\delta \bar{\mathbf{d}}_R$  é obtida através da extração das componentes de corpo rígido do deslocamento total  $\delta \mathbf{d}_D$ . Este pré-processamento dos deslocamentos pode ser realizado fora das rotinas dos elementos finitos padrões e, portanto, é independente do tipo de elemento finito.

Assim, é necessário estabelecer a seguinte relação:

$$\delta \bar{\mathbf{d}}_R = \mathbf{P} \delta \bar{\mathbf{d}}_D \quad (212)$$

com  $\delta \bar{\mathbf{d}}_R$  é  $\delta \bar{\mathbf{d}}_D$  expresso no sistema local. A relação entre as variações dos deslocamentos globais no sistema global e local é dada por:

$$\delta \bar{\mathbf{d}}_D = \mathbf{G}^t \delta \mathbf{d}_D \quad (213)$$

onde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (214)$$

Observa-se que  $\mathbf{G}$  relaciona as componentes de um mesmo vetor nos sistemas local e global. Por outro lado,  $\mathbf{P}$  relaciona dois vetores distintos num mesmo sistema de eixos.

A matriz  $\mathbf{P}$  tem a propriedade  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^2$  e, portanto, é uma matriz de projeção. Na Equação (212), a matriz  $\mathbf{P}$  atua como um filtro para extrair as componentes de corpo rígido do vetor  $\delta\bar{\mathbf{d}}_D$ , isto é, a ação de  $\mathbf{P}$  sobre esse vetor retém a parcela deformacional do movimento, enquanto descarta a parcela de corpo rígido.

A substituição das Equações (212) e (213) na Equação (211) conduz a:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{d}_D^t \mathbf{f}_D &= \delta\bar{\mathbf{d}}_D^t \mathbf{P}^t \bar{\mathbf{f}}_R \\ \delta\mathbf{d}_D^t \mathbf{f}_D &= \delta\mathbf{d}_D^t \mathbf{G} \mathbf{P}^t \bar{\mathbf{f}}_R \\ \mathbf{f}_D &= \mathbf{G} \mathbf{P}^t \bar{\mathbf{f}}_R \end{aligned} \quad (215)$$

A equação anterior pode ser escrita ainda na forma:

$$\mathbf{f}_D = \mathbf{G} \bar{\mathbf{f}}_D \quad (216)$$

onde

$$\bar{\mathbf{f}}_D = \mathbf{P}^t \bar{\mathbf{f}}_R \quad (217)$$

é o vetor de força interna pertinente à configuração no sistema local corrotacional.

A expressão da matrix de rigidez tangente  $\mathbf{k}_t$  é obtida através da variação do vetor de força interna  $\mathbf{f}_D$  definido na Equação (215). Portanto,

$$\mathbf{k}_t = \mathbf{G} \mathbf{P}^t \bar{\mathbf{k}}_R \mathbf{P} \mathbf{G}^t + \frac{\partial(\mathbf{G} \mathbf{P}^t)}{\partial \mathbf{d}_D} : \bar{\mathbf{f}}_R \quad (218)$$

O segundo termo da equação anterior é a conhecida "matriz geométrica".<sup>37,66</sup> O símbolo ":" é usado para denotar uma contração.

As Equações (215) e (218), bem como os termos  $\mathbf{P}$  e  $\partial(\mathbf{G} \mathbf{P}^t)/\partial \mathbf{d}_D$  desempenham um papel fundamental na formulação corrotacional independente do elemento. Elas são responsáveis pela inserção da não linearidade geométrica nas grandezas locais  $\bar{\mathbf{f}}_R$  e  $\bar{\mathbf{k}}_R$ . Observa-se que essas equações, bem como esses termos são independentes das hipóteses para definição dos termos locais  $\bar{\mathbf{f}}_R$  e  $\bar{\mathbf{k}}_R$ . Conseqüentemente, vários elementos locais podem ser definidos a partir de diversas hipóteses de deformação, porém, todos compartilharão as mesmas transformações

de matrizes, isto é, a formulação corrotacional é independente do tipo de elemento. Usando essa propriedade, elementos locais são apresentados no próximo capítulo.

#### 4.2.2 Atualizações dos deslocamentos

No método de Newton-Raphson atualizam-se os deslocamentos nodais para a iteração  $k$  na forma:

$$\mathbf{d}_{k+1} = \mathbf{d}_k + \delta\mathbf{d}_k \quad (219)$$

que, matematicamente, é inconsistente para os graus de liberdade de rotação. Contudo, é inerente ao método, pois os deslocamentos atualizados são apenas candidatos à posição de equilíbrio da estrutura. Portanto, adota-se uma nova estimativa para o deslocamento  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \delta\mathbf{u}_k \quad (220)$$

e para a rotação  $\boldsymbol{\theta}$  tem-se a estimativa matematicamente inconsistente:

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k + \delta\boldsymbol{\theta}_k \quad (221)$$

Segundo Monteiro,<sup>33</sup> o tensor rotação pode ser consistentemente atualizado na forma:

$$\mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_{k+1}} = \mathbf{R}_{\delta\boldsymbol{\theta}_k} \mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_k} \quad (222)$$

Para correções  $\delta\boldsymbol{\theta}$  suficientemente pequenas, poderia ainda ser atualizado em uma das seguintes expressões:<sup>33</sup>

- substituindo a Equação (191) na Equação (222):

$$\mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_{k+1}} = (\mathbf{I} + \mathbf{S}_{\delta\boldsymbol{\theta}_k}) \mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_k} = \mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_k} + \mathbf{S}_{\delta\boldsymbol{\theta}_k} \mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_k} \quad (223)$$

- expandindo  $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}}$  em série de Taylor e truncando após o termo linear:

$$\mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_{k+1}} = \mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_k} + \delta\mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_k} \quad (224)$$

#### 4.2.3 Mudança de variável de rotação

Neste ponto, Monteiro<sup>33</sup> define uma nova variável de rotação  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$  de tal modo que a atualização definida na Equação (223)

$$\mathbf{R}_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}} = \mathbf{R}_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k} + \mathbf{S}_{\delta\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k} \mathbf{R}_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k} \quad (225)$$

seja idêntica à definida na Equação (224), isto é,  $\mathbf{R}_{\tilde{\theta}} = \mathbf{R}_{\theta}$  em qualquer iteração. Assim,

$$\mathbf{S}_{\tilde{\delta\theta}} = \delta\mathbf{R}_{\theta} \mathbf{R}_{\theta}^t \quad (226)$$

Por meio do conceito de rotação espacial e material proposta por Argyris,<sup>38</sup> Pacoste e Eriksson<sup>36</sup> e Battini e Pacoste<sup>37</sup> obtiveram expressões similares à Equação (226). Crisfield<sup>65</sup> também apresenta uma expressão similar à Equação (226), obtida a partir da ideia de somar as componentes do vetor rotação (pseudovetor).

A relação entre as rotações  $\delta\theta$  e  $\delta\tilde{\theta}$  é dada por:

$$\delta\theta = \mathbf{\Lambda}_{\theta} \delta\tilde{\theta} \quad (227)$$

onde

$$\mathbf{\Lambda}_{\theta} = \frac{\partial\theta}{\partial\tilde{\theta}} = \mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{S}_{\theta} + \xi\mathbf{S}_{\theta}^2, \quad \xi = \frac{2\text{sen}\theta - \theta(1 + \cos\theta)}{2\theta^2\text{sen}\theta} \quad (228)$$

O algebrismo de dedução dessa relação é apresentado por Monteiro.<sup>33</sup>

Uma vez atualizados os deslocamentos nodais e o tensor das rotações, obtêm-se os deslocamentos corrotacionais generalizados do elemento através das Equações (198) e (205). Conhecido o vetor de deslocamentos corrotacionais  $\bar{\mathbf{d}}_R$  e a matriz de rigidez do elemento local  $\bar{\mathbf{k}}_R$ , o vetor de forças nodais corrotacionais torna-se:

$$\bar{\mathbf{f}}_R = \bar{\mathbf{k}}_R \bar{\mathbf{d}}_R, \quad \bar{\mathbf{f}}_R = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_{R1} \\ \bar{\mathbf{f}}_{R2} \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{f}}_{Ri} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{n}}_{Ri} \\ \bar{\mathbf{m}}_{Ri} \end{Bmatrix} \quad (229)$$

onde  $\bar{\mathbf{n}}_{Ri}$  e  $\bar{\mathbf{m}}_{Ri}$  são os esforços (forças e momentos) corrotacionais do  $i$ -ésimo nó do elemento.

A mudança da variável de rotação apresentada na seção anterior faz com que seja necessário determinar as novas grandezas  $\bar{\mathbf{f}}_{\tilde{R}}$  e  $\bar{\mathbf{k}}_{\tilde{R}}$ . Ressalta-se que grandezas com o símbolo  $(\tilde{x})$  indicam que estas são relacionadas com a nova variável de rotação. Desta forma, é necessário estabelecer a seguinte relação, da Equação (227),

$$\delta\bar{\mathbf{d}}_R = \frac{\partial\bar{\mathbf{d}}_R}{\partial\tilde{\mathbf{d}}_R} \delta\tilde{\mathbf{d}}_R = \mathbf{H}_R \delta\tilde{\mathbf{d}}_R \quad (230)$$

onde  $\mathbf{H}_R$  é uma matriz quadrada 12x12 definida por:

$$\mathbf{H}_R = \frac{\partial\bar{\mathbf{d}}_R}{\partial\tilde{\mathbf{d}}_R} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{R11} & \mathbf{H}_{R12} \\ \mathbf{H}_{R21} & \mathbf{H}_{R22} \end{bmatrix} \quad (231)$$

e  $\mathbf{H}_{Rij}$  são sub-matrizes quadradas 6x6 definidas por:

$$\mathbf{H}_R = \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}_{Ri}}{\partial \bar{\mathbf{d}}_{Rj}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_{Ri}}{\partial \bar{\mathbf{u}}_{Rj}} & \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_{Ri}}{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_{Rj}} \\ \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_{Ri}}{\partial \bar{\mathbf{u}}_{Rj}} & \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_{Ri}}{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_{Rj}} \end{bmatrix} \quad (232)$$

A partir da Equação (228), pode-se escrever a equação anterior da seguinte maneira:

$$\mathbf{H}_R = \begin{bmatrix} \delta_{ij} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \delta_{ij} \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_{Ri}}{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_{Rj}} \end{bmatrix} = \delta_{ij} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Lambda}_{\bar{\boldsymbol{\theta}}_{Ri}} \end{bmatrix} \quad (233)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker.

Da invariância do PTV, tem-se:

$$\delta \bar{\mathbf{d}}_R^t \bar{\mathbf{f}}_R = \delta \bar{\mathbf{d}}_R^t \bar{\mathbf{f}}_R \quad (234)$$

Substituindo a Equação (230) na equação anterior, fica:

$$\bar{\mathbf{f}}_R = \mathbf{H}_R^t \bar{\mathbf{f}}_R \quad (235)$$

que a partir das Equações (233) e (229):

$$\bar{\mathbf{f}}_R = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{n}}_{R1} \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\bar{\boldsymbol{\theta}}_{R1}}^t \bar{\mathbf{m}}_{R1} \\ \bar{\mathbf{n}}_{R2} \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\bar{\boldsymbol{\theta}}_{R2}}^t \bar{\mathbf{m}}_{R2} \end{bmatrix} \quad (236)$$

Com esta mudança de variável, a matriz de rigidez tangente local  $\bar{\mathbf{k}}_R$  é obtida por:

$$\bar{\mathbf{k}}_R = \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_R}{\partial \bar{\mathbf{d}}_R} \quad (237)$$

Logo,

$$\bar{\mathbf{k}}_R = \mathbf{H}_R^t \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_R}{\partial \bar{\mathbf{d}}_R} + \frac{\partial \mathbf{H}_R^t}{\partial \bar{\mathbf{d}}_R} : \bar{\mathbf{f}}_R = \bar{\mathbf{k}}_{R1} + \bar{\mathbf{k}}_{R2} \quad (238)$$

onde

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{k}}_{R1} &= \mathbf{H}_R^t \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_R}{\partial \bar{\mathbf{d}}_R} \\
&= \mathbf{H}_R^t \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_R}{\partial \mathbf{d}_R} \frac{\partial \mathbf{d}_R}{\partial \bar{\mathbf{d}}_R} \\
&= \mathbf{H}_R^t \bar{\mathbf{k}}_R \mathbf{H}_R
\end{aligned} \tag{239}$$

e a matriz  $\bar{\mathbf{k}}_{R2}$  é dada por:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{k}}_{R2} &= \frac{\partial \mathbf{H}_R^t \bar{\mathbf{f}}_R}{\partial \bar{\mathbf{d}}_R} \\
&= \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}_R} (\mathbf{H}_R^t \bar{\mathbf{f}}_R) \frac{\partial \mathbf{d}_R}{\partial \bar{\mathbf{d}}_R} \\
&= \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}_R} \left\{ \begin{array}{c} \bar{\mathbf{n}}_{R1} \\ \Lambda_{\theta_{R1}}^t \bar{\mathbf{m}}_{R1} \\ \bar{\mathbf{n}}_{R2} \\ \Lambda_{\theta_{R2}}^t \bar{\mathbf{m}}_{R2} \end{array} \right\} \mathbf{H}_R
\end{aligned} \tag{240}$$

Salienta-se que  $\bar{\mathbf{f}}_R$  é constante na derivação de  $\bar{\mathbf{k}}_{R2}$ . Assim,

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{n}}_{R1}}{\partial \bar{\mathbf{d}}_R} = \frac{\partial \bar{\mathbf{n}}_{R2}}{\partial \bar{\mathbf{d}}_R} = \mathbf{0}_{3 \times 12} \tag{241}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{d}}_R} (\Lambda_{\theta_{R1}}^t \bar{\mathbf{m}}_{R1}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{\Omega}_{R1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, & \mathbf{\Omega}_{R1} &= \frac{\partial}{\partial \theta_{R1}} (\Lambda_{\theta_{R1}}^t \bar{\mathbf{m}}_{R1}) \\
\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{d}}_R} (\Lambda_{\theta_{R2}}^t \bar{\mathbf{m}}_{R2}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Omega}_{R2} \end{bmatrix}, & \mathbf{\Omega}_{R2} &= \frac{\partial}{\partial \theta_{R2}} (\Lambda_{\theta_{R2}}^t \bar{\mathbf{m}}_{R2})
\end{aligned} \tag{242}$$

sendo as derivadas que aparecem na equação anterior expressas pela seguinte equação, conforme demonstrado em detalhes por Monteiro<sup>33</sup> e Nour-Omid e Rankin:<sup>63</sup>

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\Lambda_{\theta}^t \mathbf{m}) = -\frac{1}{2} \mathbf{S}_m + \xi (\boldsymbol{\theta}^t \mathbf{m} \mathbf{I} + \boldsymbol{\theta} \mathbf{m}^t - 2 \mathbf{m} \boldsymbol{\theta}^t) + \mu \mathbf{S}_{\theta}^2 \mathbf{m} \boldsymbol{\theta}^t \tag{243}$$

onde

$$\mu = \frac{1}{\theta} \frac{d\xi}{d\theta} = \frac{\theta(\sin\theta + \theta) - 8\sin^2(\theta/2)}{4\theta^2 \sin(\theta/2)} \tag{244}$$

Substituindo as Equações (241) e (242) na Equação (240), tem-se:

$$\bar{\mathbf{k}}_{R2} = \mathbf{\Omega}_R \mathbf{H}_R, \quad \mathbf{\Omega}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Omega}_{R1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Omega}_{R2} \end{bmatrix} \quad (245)$$

Verifica-se que o primeiro termo de  $\bar{\mathbf{k}}_R$ ,  $\bar{\mathbf{k}}_{R1}$ , expresso na Equação (239) será simétrico desde que a matriz  $\bar{\mathbf{k}}_R$  seja simétrica também. Para elementos locais não lineares, a sistemática realizada no cálculo da matriz  $\bar{\mathbf{k}}_{R1}$  deveria considerar que  $\bar{\mathbf{k}}_R$  é função de  $\bar{\mathbf{d}}_R$ . Por outro lado, o segundo termo de  $\bar{\mathbf{k}}_R$ ,  $\bar{\mathbf{k}}_{R2}$ , expresso na Equação (245), é não simétrico. Portanto a matriz  $\bar{\mathbf{k}}_R$  associada à nova variável de rotação é não simétrica.<sup>33</sup>

Segundo Monteiro,<sup>33</sup> a matriz  $\mathbf{H}_R$  aproxima-se da identidade para pequenas rotações corrotacionais ou quando a malha é refinada. Nesse caso, a matriz não simétrica  $\bar{\mathbf{k}}_{R2}$  tem pouca influência, e a matriz de rigidez  $\bar{\mathbf{k}}_R = \bar{\mathbf{k}}_{R1}$  é simétrica para efeitos práticos.

#### 4.2.4 Matriz de projeção

Com a mudança da variável de rotação, se faz necessário reescrever a Equação (212) na forma:

$$\delta \bar{\mathbf{d}}_R = \mathbf{P} \delta \bar{\mathbf{d}}_D \quad (246)$$

onde

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}_R}{\partial \bar{\mathbf{d}}_D} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix} \quad (247)$$

e cada sub-matriz  $\mathbf{P}_{ij}$  é dada por:

$$\mathbf{P}_{ij} = \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}_{Ri}}{\partial \bar{\mathbf{d}}_{Dj}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_{Ri}}{\partial \bar{\mathbf{u}}_{Dj}} & \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_{Ri}}{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_{Dj}} \\ \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_{Ri}}{\partial \bar{\mathbf{u}}_{Dj}} & \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_{Ri}}{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_{Dj}} \end{bmatrix} \quad (248)$$

Faz-se, inicialmente, para a determinação do operador de projeção  $\mathbf{P}$ , a variação do deslocamento corrotacional definido na Equação (198). Desta forma:

$$\delta \bar{\mathbf{u}}_{Ri} = \delta \mathbf{T}^t \mathbf{x}_{i1} + \mathbf{T}^t \delta \mathbf{u}_{i1} \quad (249)$$

onde  $\mathbf{x}_{i1} = \mathbf{X}_{i1} + \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_{i1} = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_1$ . Nota-se que  $\mathbf{X}_i^\phi$  e  $\mathbf{X}_{i1}$  são constantes no sistema local definido em  $C_R$ . Denominando-se  $\boldsymbol{\theta}_T$  a rotação relativa entre os sistemas  $xyz$  e  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  de tal modo que se possa escrever que  $\mathbf{T} = \mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_T} \mathbf{I} = \mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_T}$ , e através da propriedade estabelecida na Equação (226) e das equações que definem a mudança de coordenada proposta na Equação (197), tem-se:

$$\begin{aligned} \delta \bar{\mathbf{u}}_{Ri} &= \mathbf{T}^t \mathbf{S}_{\delta \boldsymbol{\theta}_T}^t \mathbf{x}_{i1} + \mathbf{T}^t \delta \mathbf{u}_{i1} \\ &= -\mathbf{T}^t \mathbf{S}_{\delta \boldsymbol{\theta}_T} \mathbf{T} \mathbf{T}^t \mathbf{x}_{i1} + \mathbf{T}^t \delta \mathbf{u}_{i1} \\ &= -\mathbf{S}_{\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_T} \bar{\mathbf{x}}_{i1} + \delta \bar{\mathbf{u}}_{Di1} \\ &= \mathbf{S}_{\bar{\mathbf{x}}_{i1}} \delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_T + \delta \bar{\mathbf{u}}_{Di1} \end{aligned} \quad (250)$$

Determinada a variação do deslocamento corrotacional  $\bar{\mathbf{u}}_{Ri}$ , o próximo passo é determinar a variação da matriz de rotação associada à rotação corrotacional  $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{Ri}$  definida pela Equação (205). Assim,

$$\delta \mathbf{R}_{\bar{\boldsymbol{\theta}}_{Ri}} = (\delta \mathbf{T}^t \mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_i} + \mathbf{T}^t \delta \mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_i}) \mathbf{T}_0 \quad (251)$$

De maneira análoga ao caso do deslocamento corrotacional, tem-se que:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{R}_{\bar{\boldsymbol{\theta}}_{Ri}} &= \left( \mathbf{T}^t \mathbf{S}_{\delta \boldsymbol{\theta}_T}^t + \mathbf{T}^t \mathbf{S}_{\delta \boldsymbol{\theta}_i} \right) \mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_i} \mathbf{T}_0 \\ &= \left( -\mathbf{T}^t \mathbf{S}_{\delta \boldsymbol{\theta}_T} \mathbf{T} + \mathbf{T}^t \mathbf{S}_{\delta \boldsymbol{\theta}_i} \mathbf{T} \right) \mathbf{T}^t \mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_i} \mathbf{T}_0 \\ &= \left( \mathbf{S}_{\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_i} - \mathbf{S}_{\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_R} \right) \mathbf{R}_{\bar{\boldsymbol{\theta}}_{Ri}} \\ &= \mathbf{S}_{\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_{Di} - \delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_R} \mathbf{R}_{\bar{\boldsymbol{\theta}}_{Ri}} \end{aligned} \quad (252)$$

que resulta, considerando a Equação (226), na seguinte expressão:<sup>33</sup>

$$\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_{Ri} = \delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_i - \delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_T \quad (253)$$

Com base na variação de  $\delta \bar{\mathbf{u}}_{Ri}$ , pode-se definir os termos  $\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_{Ri}}{\partial \bar{\mathbf{u}}_{Dj}}$  e  $\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_{Ri}}{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_{Dj}}$  do operador projeção  $\mathbf{P}_{ij}$ . Assim, lembrando que  $\bar{\boldsymbol{\theta}}_T$  é função de  $\bar{\mathbf{u}}_{Ri}$  e  $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{Dj}$ , a variação total de  $\bar{\boldsymbol{\theta}}_T$  torna-se:

$$\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_T = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_T}{\partial \bar{\mathbf{u}}_{Dj}} \delta \bar{\mathbf{u}}_{Dj} + \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_T}{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_{Dj}} \delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_{Dj} \quad (254)$$

Lembrando também que  $\bar{\mathbf{u}}_{Di}$  e  $\bar{\mathbf{u}}_{D1}$  são funções de  $\bar{\mathbf{u}}_{Dj}$  e  $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{Dj}$ , suas respectivas variações totais

tornam-se:

$$\delta\bar{\mathbf{u}}_{Di} = \frac{\partial\bar{\mathbf{u}}_{Di}}{\partial\bar{\mathbf{u}}_{Dj}}\delta\bar{\mathbf{u}}_{Dj} + \frac{\partial\bar{\mathbf{u}}_{Di}}{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}_{Dj}}\delta\bar{\boldsymbol{\theta}}_{Dj} \quad (255)$$

e

$$\delta\bar{\mathbf{u}}_{D1} = \frac{\partial\bar{\mathbf{u}}_{D1}}{\partial\bar{\mathbf{u}}_{Dj}}\delta\bar{\mathbf{u}}_{Dj} + \frac{\partial\bar{\mathbf{u}}_{D1}}{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}_{Dj}}\delta\bar{\boldsymbol{\theta}}_{Dj} \quad (256)$$

Substituindo as Equações (254), (255) e (256) na Equação (250) e agrupando os termos em função de  $\delta\bar{\mathbf{u}}_{Dj}$  e  $\delta\bar{\boldsymbol{\theta}}_{Dj}$ , tem-se:

$$\delta\bar{\mathbf{u}}_{Ri} = \left( \mathbf{S}_{\bar{x}_{i1}} \frac{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}_T}{\partial\bar{\mathbf{u}}_{Dj}} + \frac{\partial\bar{\mathbf{u}}_{Di}}{\partial\bar{\mathbf{u}}_{Dj}} - \frac{\partial\bar{\mathbf{u}}_{D1}}{\partial\bar{\mathbf{u}}_{Dj}} \right) \delta\bar{\mathbf{u}}_{Dj} + \left( \mathbf{S}_{\bar{x}_{i1}} \frac{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}_T}{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}_{Dj}} + \frac{\partial\bar{\mathbf{u}}_{Di}}{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}_{Dj}} - \frac{\partial\bar{\mathbf{u}}_{D1}}{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}_{Dj}} \right) \delta\bar{\boldsymbol{\theta}}_{Dj} \quad (257)$$

Porém, sabe-se que:

$$\delta\bar{\mathbf{u}}_{Ri} = \frac{\partial\bar{\mathbf{u}}_{Ri}}{\partial\bar{\mathbf{u}}_{Dj}}\delta\bar{\mathbf{u}}_{Dj} + \frac{\partial\bar{\mathbf{u}}_{Ri}}{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}_{Dj}}\delta\bar{\boldsymbol{\theta}}_{Dj} \quad (258)$$

Logo, igualando as duas últimas expressões, tem-se:

$$\frac{\partial\bar{\mathbf{u}}_{Ri}}{\partial\bar{\mathbf{u}}_{Dj}} = \mathbf{S}_{\bar{x}_{i1}} \frac{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}_T}{\partial\bar{\mathbf{u}}_{Dj}} + \frac{\partial\bar{\mathbf{u}}_{Di}}{\partial\bar{\mathbf{u}}_{Dj}} - \frac{\partial\bar{\mathbf{u}}_{D1}}{\partial\bar{\mathbf{u}}_{Dj}} = \mathbf{S}_{\bar{x}_{i1}} \frac{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}_T}{\partial\bar{\mathbf{u}}_{Dj}} + \delta_{1j}\mathbf{I} - \delta_{ij}\mathbf{I} \quad (259)$$

e

$$\frac{\partial\bar{\mathbf{u}}_{Ri}}{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}_{Dj}} = \mathbf{S}_{\bar{x}_{i1}} \frac{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}_T}{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}_{Dj}} + \frac{\partial\bar{\mathbf{u}}_{Di}}{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}_{Dj}} - \frac{\partial\bar{\mathbf{u}}_{D1}}{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}_{Dj}} = \mathbf{S}_{\bar{x}_{i1}} \frac{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}_T}{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}_{Dj}} \quad (260)$$

Os dois últimos termos do operador  $\mathbf{P}_{ij}$  podem ser facilmente obtidos através da Equação (253).

Assim,

$$\frac{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}_{Ri}}{\partial\bar{\mathbf{u}}_{Dj}} = \frac{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}_i}{\partial\bar{\mathbf{u}}_{Dj}} - \frac{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}_T}{\partial\bar{\mathbf{u}}_{Dj}} = -\frac{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}_T}{\partial\bar{\mathbf{u}}_{Dj}} \quad (261)$$

e

$$\frac{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}_{Ri}}{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}_{Di}} = \frac{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}_i}{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}_{Di}} - \frac{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}_T}{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}_{Di}} = \delta_{ij}\mathbf{I} - \frac{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}_T}{\partial\bar{\boldsymbol{\theta}}_{Di}} \quad (262)$$

Substituindo as Equações (259), (260), (261) e (262) na Equação (248), obtém-se

as seguintes expressões para a sub-matriz  $\tilde{\mathbf{P}}_{ij}$ :

$$\tilde{\mathbf{P}}_{ij} = \delta_{ij} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\bar{x}_{i1}} \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_T}{\partial \bar{\mathbf{u}}_{Dj}} & \mathbf{S}_{\bar{x}_{i1}} \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_T}{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_{Dj}} \\ \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_T}{\partial \bar{\mathbf{u}}_{Dj}} & \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_T}{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_{Di}} \end{bmatrix} - \delta_{1j} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (263)$$

que numa forma compacta, fica:

$$\tilde{\mathbf{P}}_{ij} = \delta_{ij} \mathbf{I}_6 - \boldsymbol{\Psi}_i \boldsymbol{\Gamma}_i - \delta_{1j} \boldsymbol{\phi} \quad (264)$$

onde

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}_i &= \begin{bmatrix} -\mathbf{S}_{\bar{x}_{i1}} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\bar{x}_{i1}} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^t \\ \boldsymbol{\Gamma}_i &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_T}{\partial \bar{\mathbf{u}}_{Dj}} & \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_T}{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_{Di}} \end{bmatrix} = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_T}{\partial \bar{\mathbf{d}}_{Dj}} \\ \boldsymbol{\phi} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (265)$$

Assim,  $\tilde{\mathbf{P}}$  do elemento pode, então, ser expresso por:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_6 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_1 \boldsymbol{\Gamma}_1 & \boldsymbol{\Psi}_1 \boldsymbol{\Gamma}_2 \\ \boldsymbol{\Psi}_2 \boldsymbol{\Gamma}_1 & \boldsymbol{\Psi}_2 \boldsymbol{\Gamma}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\phi} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (266)$$

ou numa forma compacta:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{I}_{12} - \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Gamma} - \boldsymbol{\Phi} \quad (267)$$

onde

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_1 \\ \boldsymbol{\Psi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\bar{x}_1} & \mathbf{I} & \mathbf{S}_{\bar{x}_2} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^t \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L \\ 0 & L & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}^t \\ \boldsymbol{\Gamma} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_1 & \boldsymbol{\Gamma}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_T}{\partial \bar{\mathbf{d}}_{D1}} & \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_T}{\partial \bar{\mathbf{d}}_{D2}} \end{bmatrix} = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_T}{\partial \bar{\mathbf{d}}_D} \end{aligned} \quad (268)$$

A seguir, é mostrado o algebrismo para a obtenção da matriz  $\mathbf{\Gamma}$ , que depende da geometria atual e da orientação dos eixos locais do elemento. Inicialmente, a Equação (226) é aplicada na matriz  $\mathbf{T}$  e em seguida é realizada a mudança de coordenada apresentada na Equação (197), tal que:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{\delta\theta_T} &= \delta\mathbf{T}\mathbf{T}^t \\ \mathbf{T}^t\mathbf{S}_{\delta\theta_T}\mathbf{T} &= \mathbf{T}^t(\delta\mathbf{T}\mathbf{T}^t)\mathbf{T} \\ \mathbf{S}_{\delta\bar{\theta}_T} &= \mathbf{T}^t\delta\mathbf{T}\end{aligned}\tag{269}$$

que ao ser expandida a igualdade anterior fornece no sistema local de coordenada a relação:

$$\delta\bar{\theta}_T = \begin{Bmatrix} -\bar{\mathbf{e}}_2^t\delta\bar{\mathbf{e}}_3 \\ -\bar{\mathbf{e}}_3^t\delta\bar{\mathbf{e}}_1 \\ \bar{\mathbf{e}}_2^t\delta\bar{\mathbf{e}}_1 \end{Bmatrix}\tag{270}$$

sendo que  $\bar{\mathbf{e}}_1 = \{1 \ 0 \ 0\}^t$ ,  $\bar{\mathbf{e}}_2 = \{0 \ 1 \ 0\}^t$  e  $\bar{\mathbf{e}}_3 = \{0 \ 0 \ 1\}^t$ . Para determinação das variações  $\delta\bar{\mathbf{e}}_1$  e  $\delta\bar{\mathbf{e}}_3$  que apareceram na equação anterior, deve-se utilizar as Equações (196) e (210). Portanto, para a primeira variação, tem-se:

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{e}_1 &= \frac{1}{L}\delta\mathbf{x}_{21} - \frac{1}{L^2}\delta L(\mathbf{x}_{21}) \\ &= \frac{1}{L}\delta\mathbf{x}_{21} - \frac{1}{L^2}\delta\left(\sqrt{\mathbf{x}_{21}^t\mathbf{x}_{21}}\right)\mathbf{x}_{21} \\ &= \frac{1}{L}\delta\mathbf{x}_{21} - \frac{1}{L^2}\frac{1}{2\sqrt{\mathbf{x}_{21}^t\mathbf{x}_{21}}}\left(\underbrace{\delta\mathbf{x}_{21}^t\mathbf{x}_{21} + \mathbf{x}_{21}^t\delta\mathbf{x}_{21}}_{2\mathbf{x}_{21}^t\delta\mathbf{x}_{21}}\right)\mathbf{x}_{21} \\ &= \frac{1}{L}\delta\mathbf{x}_{21} - \frac{1}{L^3}\mathbf{x}_{21}^t\delta\mathbf{x}_{21}\mathbf{x}_{21} \\ &= \frac{1}{L}\delta\mathbf{x}_{21} - \frac{1}{L^3}\mathbf{x}_{21}\mathbf{x}_{21}^t\delta\mathbf{x}_{21}\end{aligned}\tag{271}$$

Porém  $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{x}_{21}}{L}$ . Assim,

$$\delta\mathbf{e}_1 = \frac{1}{L}\delta\mathbf{x}_{21} - \frac{1}{L}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^t\delta\mathbf{x}_{21}\tag{272}$$

Sendo  $\delta\mathbf{x}_{21} = \delta\mathbf{u}_{D21}$ ,

$$\delta\mathbf{e}_1 = \frac{1}{L}(\mathbf{I} - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^t)\delta\mathbf{u}_{D21}\tag{273}$$

que localmente escreve-se:

$$\delta \bar{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{L} (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{e}}_1 \bar{\mathbf{e}}_1^t) \delta \bar{\mathbf{u}}_{D21} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \delta \bar{\mathbf{u}}_{D21} \quad (274)$$

A variação de  $\delta \bar{\mathbf{e}}_3$  pode também ser obtida a partir da Equação (196), no sistema local de coordenadas, da seguinte forma:

$$\delta \bar{\mathbf{e}}_3 = \frac{1}{|\bar{\mathbf{e}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2|} (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{e}}_3 \bar{\mathbf{e}}_3^t) \delta (\bar{\mathbf{e}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2) \quad (275)$$

Tomando o vetor  $\bar{\mathbf{a}}_2$  como:

$$\bar{\mathbf{a}}_2 = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \quad (276)$$

tem-se, a partir das Equações (196) e (178), que  $q_2 > 0$  e  $q_3 = 0$ . Portanto,

$$\bar{\mathbf{e}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (277)$$

Assim,

$$\delta \bar{\mathbf{e}}_3 = \frac{1}{q_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\delta \bar{\mathbf{e}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2 + \bar{\mathbf{e}}_1 \times \delta \bar{\mathbf{a}}_2) \quad (278)$$

Através da Equação (194) e lembrando que na configuração inicial  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{B}_0 = \mathbf{T}_0$ , tem-se:

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{R}_{\theta_1} \mathbf{T}_0 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (279)$$

cuja variação, considerando a Equação (226), pode ser escrita como:

$$\delta \mathbf{a}_2 = \delta \mathbf{R}_{\theta_1} \mathbf{T}_0 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbf{S}_{\delta \theta_1} \mathbf{R}_{\theta_1} \mathbf{T}_0 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbf{S}_{\delta \theta_1} \mathbf{a}_2 \quad (280)$$

que escrita no sistema local, fornece:

$$\delta \bar{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{S}_{\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_1} \bar{\mathbf{a}}_2 = -\mathbf{S}_{\bar{\mathbf{a}}_2} \delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_1 \quad (281)$$

Por fim, substituindo as Equações (274) e (281) na Equação (278), tem-se:

$$\begin{aligned} \delta \bar{\mathbf{e}}_3 &= \frac{1}{q_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (-\mathbf{S}_{\bar{\mathbf{a}}_2} \delta \bar{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{S}_{\bar{\mathbf{e}}_1} \delta \bar{\mathbf{a}}_2) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \eta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\delta \bar{\mathbf{u}}_{D21}}{L} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_1 \end{aligned} \quad (282)$$

onde  $\eta = \frac{q_1}{q_2}$ .

Uma vez definidas as variações de  $\delta \bar{\mathbf{e}}_1$  e  $\delta \bar{\mathbf{e}}_3$  nas Equações (274) e (282), respectivamente, pode-se então calcular as componentes de  $\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_T$  da Equação (270). Portanto,

$$\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\eta \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\delta \bar{\mathbf{u}}_{D21}}{L} + \begin{bmatrix} 1 & -\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_1 \quad (283)$$

Da definição de  $\boldsymbol{\Gamma}$  (Equação 268) e da Equação (283), obtém-se a matriz  $\boldsymbol{\Gamma}$  na forma:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \frac{\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_T}{\delta \bar{\mathbf{d}}_D} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \eta \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} L & -\eta L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\eta \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (284)$$

Definidos os termos do operador de projeção  $\mathbf{P}$ , pode-se mostrar que  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{I}$ ,<sup>33</sup> portanto, tal operador é dito ser uma matriz de projeção. Esta matriz possui seis autovalores cujos autovetores são nulos, ou seja, são os modos de corpo rígido do elemento. Neste caso, pode-se dizer que a configuração  $C_R$  é ideal, uma vez que tal operador extrai os modos de corpo rígido. Os três modos de translação estão associados com as três colunas de  $\boldsymbol{\Phi}$  e os modos de rotação estão relacionados com as colunas  $\boldsymbol{\Psi}$ .<sup>33</sup>

### 4.3 Vetor de forças internas e matriz de rigidez tangente

O vetor de forças internas do elemento após a mudança de variável pode ser expresso através da invariância do PTV e da Equação (246) na forma:

$$\delta \bar{\mathbf{d}}_D^t \bar{\mathbf{f}}_D = \delta \bar{\mathbf{d}}_R^t \bar{\mathbf{f}}_R = \delta \bar{\mathbf{d}}_D^t \mathbf{P}^t \bar{\mathbf{f}}_R \quad (285)$$

ou

$$\bar{\mathbf{f}}_D = \mathbf{P}^t \bar{\mathbf{f}}_R \quad (286)$$

A substituição da Equação (267) na equação anterior resulta em:

$$\bar{\mathbf{f}}_D = (\mathbf{I}_{12} - \Psi\Gamma)^t \bar{\mathbf{f}}_R - \Phi^t \bar{\mathbf{f}}_R \quad (287)$$

Observa-se que o último termo da equação anterior é escrito na forma:

$$\Phi^t \bar{\mathbf{f}}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{n}}_{R1} \\ \bar{\mathbf{m}}_{R1} \\ \bar{\mathbf{n}}_{R2} \\ \bar{\mathbf{m}}_{R2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{n}}_{R1} + \bar{\mathbf{n}}_{R2} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (288)$$

que para elementos com forças  $\bar{\mathbf{n}}_{Ri}$  auto equilibrado será nulo ( $\bar{\mathbf{n}}_{R1} + \bar{\mathbf{n}}_{R2} = \mathbf{0}$ ). Para os elementos que possuem tal característica, como o elemento local apresentado posteriormente, pode-se reescrever a Equação (286) na forma:

$$\bar{\mathbf{f}}_D = {}^* \mathbf{P}^t \bar{\mathbf{f}}_R \quad (289)$$

onde

$${}^* \mathbf{P} = \mathbf{I}_{12} - \Psi\Gamma \quad (290)$$

Esse operador de projeção também possui a propriedade  ${}^* \mathbf{P} = {}^* \mathbf{P}^2$ .

Mais uma vez, pela invariância do PTV, a Equação (246) pode agora ser reescrita na forma:

$$\delta \bar{\mathbf{d}}_R = {}^* \mathbf{P} \delta \bar{\mathbf{d}}_D \quad (291)$$

Considerando que:

$$\delta \bar{\mathbf{d}}_D = \mathbf{G}^t \delta \mathbf{d}_D \quad (292)$$

pode-se escrever que:

$$\bar{\mathbf{f}}_D = \mathbf{G} \bar{\mathbf{f}}_D = \mathbf{G} {}^* \mathbf{P}^t \bar{\mathbf{f}}_R \quad (293)$$

A matriz de rigidez tangente do elemento  $\underline{\mathbf{k}}_{Dt}$  é obtida pela variação de  $\underline{\mathbf{f}}_D$ . Assim,

$$\delta \underline{\mathbf{f}}_D = \delta \left( \mathbf{G}^* \underline{\mathbf{P}}^t \bar{\underline{\mathbf{f}}}_R \right) = \delta \underline{\mathbf{f}}_{D1} + \delta \underline{\mathbf{f}}_{D2} + \delta \underline{\mathbf{f}}_{D3} \quad (294)$$

onde

$$\begin{aligned} \delta \underline{\mathbf{f}}_{D1} &= \mathbf{G}^* \underline{\mathbf{P}}^t \delta \bar{\underline{\mathbf{f}}}_R \\ \delta \underline{\mathbf{f}}_{D2} &= \mathbf{G}^* \delta \underline{\mathbf{P}}^t \bar{\underline{\mathbf{f}}}_R \\ \delta \underline{\mathbf{f}}_{D3} &= \delta \mathbf{G}^* \underline{\mathbf{P}}^t \bar{\underline{\mathbf{f}}}_R \end{aligned} \quad (295)$$

O termo  $\delta \underline{\mathbf{f}}_{D1}$  pode ser obtido através da relação:

$$\delta \bar{\underline{\mathbf{f}}}_R = \frac{\partial \bar{\underline{\mathbf{f}}}_R}{\partial \bar{\underline{\mathbf{d}}}_R} \delta \bar{\underline{\mathbf{d}}}_R = \frac{\partial \bar{\underline{\mathbf{f}}}_R}{\partial \bar{\underline{\mathbf{d}}}_R} \frac{\partial \bar{\underline{\mathbf{d}}}_R}{\partial \bar{\underline{\mathbf{d}}}_D} \frac{\partial \bar{\underline{\mathbf{d}}}_D}{\partial \underline{\mathbf{d}}_D} \delta \underline{\mathbf{d}}_D = \bar{\underline{\mathbf{k}}}_R^* \underline{\mathbf{P}} \mathbf{G}^t \delta \underline{\mathbf{d}}_D \quad (296)$$

Portanto,

$$\delta \underline{\mathbf{f}}_{D1} = \mathbf{G}^* \underline{\mathbf{P}}^t \bar{\underline{\mathbf{k}}}_R^* \underline{\mathbf{P}} \mathbf{G}^t \delta \underline{\mathbf{d}}_D = \mathbf{G} \bar{\underline{\mathbf{k}}}_{D1} \mathbf{G}^t \delta \underline{\mathbf{d}}_D = \underline{\mathbf{k}}_{D1} \delta \underline{\mathbf{d}}_D \quad (297)$$

onde

$$\bar{\underline{\mathbf{k}}}_{D1} = \underline{\mathbf{P}}^t \bar{\underline{\mathbf{k}}}_R^* \underline{\mathbf{P}} \quad (298)$$

e

$$\underline{\mathbf{k}}_{D1} = \mathbf{G} \bar{\underline{\mathbf{k}}}_{D1} \mathbf{G}^t \quad (299)$$

A segunda parcela  $\delta \underline{\mathbf{f}}_{D2}$  depende da variação de  ${}^* \delta \underline{\mathbf{P}}$ . Assim, pós-multiplicando a Equação (290) por  $\underline{\Psi}$ , pré-multiplicando por  $\underline{\Gamma}$  e verificando que  $\underline{\Gamma} \underline{\Psi} = \mathbf{I}$ , tem-se:

$$\begin{aligned} {}^* \underline{\mathbf{P}} \underline{\Psi} &= (\mathbf{I}_{12} - \underline{\Psi} \underline{\Gamma}) \underline{\Psi} = \underline{\Psi} - \underline{\Psi} \underline{\Gamma} \underline{\Psi} = \mathbf{0} \\ \underline{\Gamma} {}^* \underline{\mathbf{P}} &= \underline{\Gamma} (\mathbf{I}_{12} - \underline{\Psi} \underline{\Gamma}) = \underline{\Gamma} - \underline{\Gamma} \underline{\Psi} \underline{\Gamma} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (300)$$

cuja variação resulta:

$$\begin{aligned} {}^* \delta \underline{\mathbf{P}} \underline{\Psi} + {}^* \underline{\mathbf{P}} \delta \underline{\Psi} &= \mathbf{0} \\ \delta \underline{\Gamma} {}^* \underline{\mathbf{P}} + \underline{\Gamma} {}^* \delta \underline{\mathbf{P}} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (301)$$

Pós-multiplicando a primeira equação acima por  $\underline{\Gamma}$  e pré-multiplicando a segunda por  $\underline{\Psi}$ , tem-

se:

$$\begin{aligned} * \delta \tilde{\mathbf{P}} \Psi \Gamma + * \tilde{\mathbf{P}} \delta \Psi \Gamma &= \mathbf{0} \\ \Psi \delta \Gamma * \tilde{\mathbf{P}} + \Psi \Gamma * \delta \tilde{\mathbf{P}} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (302)$$

que considerando a Equação (290), torna-se:

$$\begin{aligned} * \delta \tilde{\mathbf{P}} \left( \mathbf{I}_{12} - * \tilde{\mathbf{P}} \right) + * \tilde{\mathbf{P}} \delta \Psi \Gamma &= \mathbf{0} \\ \Psi \delta \Gamma * \tilde{\mathbf{P}} + \left( \mathbf{I}_{12} - * \tilde{\mathbf{P}} \right) * \delta \tilde{\mathbf{P}} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (303)$$

Somando as duas últimas expressões, resulta:

$$2 * \delta \tilde{\mathbf{P}} = - * \tilde{\mathbf{P}} \delta \Psi \Gamma - \Psi \delta \Gamma * \tilde{\mathbf{P}} + * \delta \tilde{\mathbf{P}} * \tilde{\mathbf{P}} + * \tilde{\mathbf{P}} * \delta \tilde{\mathbf{P}} \quad (304)$$

Lembrando que  $* \tilde{\mathbf{P}} = * \tilde{\mathbf{P}}^2$ , a variação do operador projeção pode ser também expresso como:

$$* \delta \tilde{\mathbf{P}} = \delta \left( * \tilde{\mathbf{P}} * \tilde{\mathbf{P}} \right) = * \delta \tilde{\mathbf{P}} * \tilde{\mathbf{P}} + * \tilde{\mathbf{P}} * \delta \tilde{\mathbf{P}} \quad (305)$$

que substituída na Equação (304) leva a:

$$* \delta \tilde{\mathbf{P}} = - * \tilde{\mathbf{P}} \delta \Psi \Gamma - \Psi \delta \Gamma * \tilde{\mathbf{P}} \quad (306)$$

A expressão apresentada por Monteiro<sup>33</sup> difere da expressão apresentada por Nour-Omid e Rankinn.<sup>63</sup> Esses últimos admitem na dedução a existência da inversa de matrizes que são singulares para o caso de barra.

Portanto, substituindo a equação acima na segunda expressão da Equação (295), tem-se:

$$\delta \tilde{\mathbf{f}}_{D2} = \mathbf{G} * \delta \tilde{\mathbf{P}}^t \bar{\mathbf{f}}_R = -\mathbf{G} \Gamma^t \delta \Psi^t * \tilde{\mathbf{P}}^t \bar{\mathbf{f}}_R - \mathbf{G} * \tilde{\mathbf{P}}^t \delta \Gamma^t \Psi^t \bar{\mathbf{f}}_R = \delta \tilde{\mathbf{f}}_{D21} + \delta \tilde{\mathbf{f}}_{D22} \quad (307)$$

onde

$$\delta \tilde{\mathbf{f}}_{D21} = -\mathbf{G} \Gamma^t \delta \Psi^t * \tilde{\mathbf{P}}^t \bar{\mathbf{f}}_R \quad (308)$$

e

$$\delta \tilde{\mathbf{f}}_{D22} = -\mathbf{G} * \tilde{\mathbf{P}}^t \delta \Gamma^t \Psi^t \bar{\mathbf{f}}_R \quad (309)$$



A parcela  $\delta \bar{\mathbf{f}}_{D22}$  é considerada nula na literatura.<sup>33</sup> Os termos  $\bar{\mathbf{m}}_{R11}$  e  $\bar{\mathbf{m}}_{R21}$  são os primeiros elementos de  $\bar{\mathbf{m}}_{R1}$  e  $\bar{\mathbf{m}}_{R2}$ , respectivamente. O algebrismo para determinação da matriz  $\mathbf{Y}$  é apresentado por Monteiro.<sup>33</sup>

Portanto, determinadas as parcelas  $\delta \bar{\mathbf{f}}_{D21}$  e  $\delta \bar{\mathbf{f}}_{D22}$  expressas nas Equações (314) e (315), respectivamente, pode-se reescrever  $\delta \bar{\mathbf{f}}_{D2}$  da seguinte forma:

$$\delta \bar{\mathbf{f}}_{D2} = -\mathbf{G} \left( \mathbf{\Gamma}^t \mathbf{H}_1^t * \mathbf{P} + \mathbf{Y} \right) \mathbf{G}^t \delta \bar{\mathbf{d}}_D = \mathbf{G} \bar{\mathbf{k}}_{D2} \mathbf{G}^t \delta \bar{\mathbf{d}}_D = \bar{\mathbf{k}}_{D2} \delta \bar{\mathbf{d}}_D \quad (318)$$

onde

$$\bar{\mathbf{k}}_{D2} = -\mathbf{\Gamma}^t \mathbf{H}_1^t * \mathbf{P} - \mathbf{Y} \quad (319)$$

e

$$\bar{\mathbf{k}}_{D2} = \mathbf{G} \bar{\mathbf{k}}_{D2} \mathbf{G}^t \quad (320)$$

Finalmente, por meio da Equação (269), o termo  $\delta \bar{\mathbf{f}}_{D3}$  pode ser escrito na forma:

$$\delta \bar{\mathbf{f}}_{D3} = \delta \mathbf{G} * \mathbf{P}^t \bar{\mathbf{f}}_R = \delta \mathbf{G} \bar{\mathbf{f}}_D = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{\delta \bar{\theta}_T} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_D = -\mathbf{G} \mathbf{H}_2 \delta \bar{\theta}_T \quad (321)$$

onde

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\bar{\alpha}_{D1}} \\ \mathbf{S}_{\bar{\mathbf{m}}_{D1}} \\ \mathbf{S}_{\bar{\alpha}_{D2}} \\ \mathbf{S}_{\bar{\mathbf{m}}_{D2}} \end{bmatrix} \quad (322)$$

Portanto, a partir da Equação (268), tem-se a seguinte relação:

$$\delta \bar{\theta}_T = \frac{\partial \bar{\theta}_T}{\partial \bar{\mathbf{d}}_D} \delta \bar{\mathbf{d}}_D = \mathbf{\Gamma} \mathbf{G}^t \delta \bar{\mathbf{d}}_D \quad (323)$$

A substituição na Equação (321) conduz a:

$$\delta \bar{\mathbf{f}}_{D3} = -\mathbf{G} \mathbf{H}_2 \mathbf{\Gamma} \mathbf{G}^t \delta \bar{\mathbf{d}}_D = \mathbf{G} \bar{\mathbf{k}}_{D3} \mathbf{G}^t \delta \bar{\mathbf{d}}_D = \bar{\mathbf{k}}_{D3} \delta \bar{\mathbf{d}}_D \quad (324)$$

onde

$$\bar{\mathbf{k}}_{D3} = -\mathbf{H}_2 \mathbf{\Gamma} \quad (325)$$

e

$$\mathbf{k}_{D3} = \mathbf{G} \bar{\mathbf{k}}_{D3} \mathbf{G}^t \quad (326)$$

A matriz de rigidez tangente do elemento no sistema global é então dada por:

$$\mathbf{k}_{Dt} = \mathbf{k}_{D1} + \mathbf{k}_{D2} + \mathbf{k}_{D3} = \mathbf{G} \bar{\mathbf{k}}_{Dt} \mathbf{G}^t \quad (327)$$

onde

$$\bar{\mathbf{k}}_{Dt} = \bar{\mathbf{k}}_{D1} + \bar{\mathbf{k}}_{D2} + \bar{\mathbf{k}}_{D3} = {}^* \mathbf{P}^t \bar{\mathbf{k}}_R {}^* \mathbf{P} - \mathbf{\Gamma}^t \mathbf{H}_1^t {}^* \mathbf{P} - \mathbf{\Upsilon} - \mathbf{H}_2 \mathbf{\Gamma} \quad (328)$$

## 5 ELEMENTOS LOCAIS

Neste trabalho, utilizam-se dois elementos locais para formulação corrotacional independente do elemento: um baseado na teoria de pequenos deslocamentos (CRL) e outro na descrição Lagrangeana (rotações moderadas). Ambos os elementos consideram as hipóteses de flexão de Bernoulli-Euler-Navier e de torção de Saint Venant.

O objetivo deste capítulo é apresentar a formulação do vetor de forças internas  $\mathbf{f}$  e a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{k}_t$  dos elementos locais. Esses termos são derivados por meio do PTV. Todos os elementos foram desenvolvidos no *software* de matemática simbólica Maple, pois facilita a implementação no FAST. As subrotinas desenvolvidas no Maple encontram-se anexas.

Muitos dos elementos corrotacionais encontrados na literatura são baseados em elementos locais lineares.<sup>33,64,74</sup> Entretanto, alguns resultados numéricos apresentados por Battini e Pacoste<sup>37</sup> e Battini<sup>66</sup> mostram a incapacidade de tais elementos em tratar problemas em que os efeitos devido à torção são importantes. Por esta razão, os autores formularam os elementos locais a partir de aproximações do tensor de deformação de Green-Lagrange.

Desta forma, um dos elementos locais é baseado no tensor de Green-Lagrange. Contudo, ressalta-se que as hipóteses feitas para esse elemento não são suficientes para tratar problemas em que os efeitos de torção são importantes. A partir desse elemento, deriva-se o elemento linear local. É importante salientar que todas as grandezas introduzidas neste capítulo são referidas ao sistema corrotacional  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ .

### 5.1 Formulação do elemento CTRL

Considerando-se apenas parte da parcela não linear da deformação axial (despreza-se o termo  $1/2u_{,x}^2$ ) do tensor de Green-Lagrange, tem-se o campo de deformação:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= u_{,x} + \frac{1}{2}v_{,x}^2 + \frac{1}{2}w_{,x}^2 \\ \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} \\ \gamma_{xz} &= u_{,z} + w_{,x}\end{aligned}\tag{329}$$

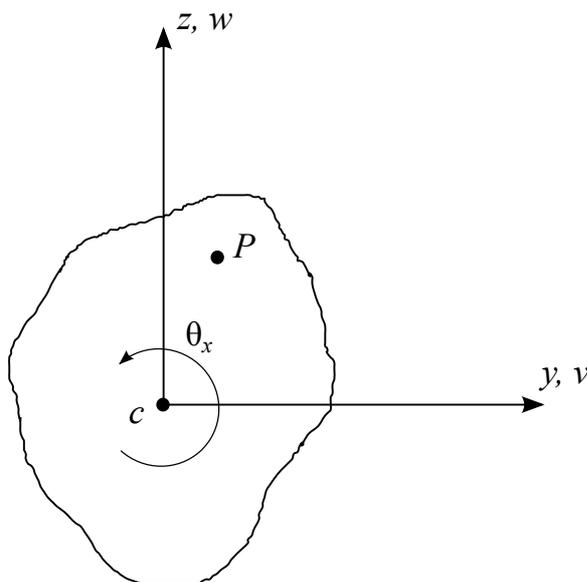
onde  $u$ ,  $v$  e  $w$  são os deslocamento locais (deformacionais) de um ponto P da seção transversal (Figura 37) e  $(\ )_{,x} = \partial(\ )/\partial x$ .

As componentes  $u$ ,  $v$  e  $w$  do deslocamento de um ponto genérico P são dadas por:

$$\begin{aligned}u &= u_c - yv_{c,x} - zw_{c,x} \\ v &= v_c - z\theta_x \\ w &= w_c + y\theta_x\end{aligned}\tag{330}$$

onde  $u_c$ ,  $v_c$  e  $w_c$  são os deslocamentos do centroide da seção transversal e  $\theta_x$  é a rotação em

Figura 37 – Deslocamento do ponto P.



Fonte: Elaborado pelo autor.

torno do eixo  $x$ .

A substituição da Equação (330) na Equação (329) resulta em:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \epsilon_m - y\kappa_z + z\kappa_y + y w_{c,x} \theta_{x,x} - z v_{c,x} \theta_{x,x} \\ \gamma_{xy} &= -z \theta_{x,x} \\ \gamma_{xz} &= y \theta_{x,x}\end{aligned}\tag{331}$$

onde

$$\begin{aligned}\epsilon_m &= u_{c,x} + \frac{1}{2} v_{c,x}^2 + \frac{1}{2} w_{c,x}^2 + \frac{1}{2} (y^2 + z^2) \theta_{x,x}^2 \\ \kappa_y &= -w_{c,xx} \\ \kappa_z &= v_{c,xx}\end{aligned}\tag{332}$$

Neste elemento, o grau de não linearidade é considerado apenas na parcela de membrana  $\epsilon_m$ , como nos casos planos de elementos corrotacionais cujos elementos locais são para rotações moderadas (*shallow arc*).<sup>37,66,73,75</sup> Portanto, os dois últimos termos ( $y w_{c,x} \theta_{x,x}$  e  $z v_{c,x} \theta_{x,x}$ ) do campo de deformação axial definido na Equação (331) são desprezados. A partir deste ponto da formulação, abandona-se o subscrito  $c$  para não sobrecarregar os símbolos.

Do PTV, o trabalho virtual  $\delta W$  realizado pelas forças internas no volume  $V$  é dado por:

$$\delta W = \int_V (\sigma_x \delta \epsilon_x + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dV\tag{333}$$

Substituindo a Equação (331) na Equação (333) e fazendo  $dV = dAdx$ , tem-se:

$$\delta W = \int_L \int_A (\sigma_x \delta \epsilon_m - y \sigma_x \delta \kappa_z + z \sigma_x \delta \kappa_y - z \tau_{xy} \delta \theta_{x,x} + y \tau_{xz} \delta \theta_{x,x}) dAdx \quad (334)$$

onde  $A$  representa a área da seção transversal e  $L$ , o comprimento do elemento.

A integração na área do primeiro termo da Equação (334) é avaliada como:

$$\int_L \int_A \sigma_x \delta \epsilon_m = \int_L \int_A \sigma_x \delta \left[ u_{,x} + \frac{1}{2} v_{,x}^2 + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + \frac{1}{2} (y^2 + z^2) \theta_{x,x}^2 \right] dAdx \quad (335)$$

Observa-se que apenas o último termo de  $\epsilon_m$  varia com a área. Supondo-se uma tensão média de tal modo que  $\sigma_x = N_x/A$ ,<sup>37,66,76</sup> a integral fica:

$$\int_L N_x \delta \left[ u_{,x} + \frac{1}{2} v_{,x}^2 + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + \frac{1}{2} \frac{I_p}{A} \theta_{x,x}^2 \right] dx \quad (336)$$

onde

$$I_p = \int_A (y^2 + z^2) dA \quad (337)$$

é o momento polar de inércia da seção transversal.<sup>76</sup> Para manter a compatibilidade das nomenclaturas dos termos, o termo  $\epsilon_m$  é redefinido como o integrando da Equação (336):

$$\epsilon_m = u_{,x} + \frac{1}{2} v_{,x}^2 + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + \frac{1}{2} \frac{I_p}{A} \theta_{x,x}^2 \quad (338)$$

A integração na área do segundo e terceiro termo da Equação (334) produz os momentos segundo os eixos  $z$  e  $y$ , respectivamente:

$$\begin{aligned} M_z &= - \int_A y \sigma_x dA \\ M_y &= \int_A z \sigma_x dA \end{aligned} \quad (339)$$

A integração na área dos dois últimos termos da Equação (334) conduz a:

$$\begin{aligned} - \int_A z \tau_{xy} dA &= (1 - \alpha) T \\ \int_A y \tau_{xz} dA &= \alpha T \end{aligned} \quad (340)$$

onde as parcelas  $\alpha$  e  $(1 - \alpha)$  do momento de torção total  $T$  são resistidas pelas tensões  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{xy}$ , respectivamente. Para torção pura de Saint Venant  $\alpha = 1/2$ .<sup>76</sup>

Portanto, após todas as integrações na área de todos os termos da Equação (334),

tem-se:

$$\delta W = \int_L (N_x \delta \varepsilon_m + M_y \delta \kappa_y + M_z \delta \kappa_z + T \delta \theta_{x,x}) dx \quad (341)$$

### 5.1.1 Discretização por elementos finitos

Do PTV, explicitando o trabalho virtual externo em termos dos deslocamentos virtuais nodais  $\delta \mathbf{d}$  e das forças  $\mathbf{f}$ , e da Equação (341), pode-se escrever:

$$\delta \mathbf{d}^t \mathbf{f} = \int_L \delta \boldsymbol{\varepsilon}_v^t \boldsymbol{\sigma}_v dx \quad (342)$$

onde  $\delta \mathbf{d}$  representa o vetor dos deslocamentos nodais virtuais, os vetores  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}_v$  e  $\boldsymbol{\sigma}_v$  representam o vetor das deformações virtuais de viga e o vetor de forças de viga, respectivamente.

As deformações de viga se relacionam com os graus de liberdade do elemento por meio da relações:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_v &= \mathbf{B} \mathbf{d} \\ \delta \boldsymbol{\varepsilon}_v &= \overline{\mathbf{B}} \delta \mathbf{d} \end{aligned} \quad (343)$$

onde  $\boldsymbol{\varepsilon}_v = \{\varepsilon_m \ \kappa_y \ \kappa_z \ \beta = \theta_{x,x}\}^t$ ,  $\mathbf{B}$  é a matriz que relaciona deslocamento-deformação e  $\overline{\mathbf{B}}$  representa a matriz que relaciona a variação das deformações com a variação dos deslocamentos. As próximas etapas desta seção dedicam-se à determinação das matrizes  $\mathbf{B}$  e  $\overline{\mathbf{B}}$ .

A fim de evitar o travamento de membrana devido ao desbalanceamento dos termos axiais e transversais,<sup>37,66,75</sup> utiliza-se a deformação de membrana média:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{L} \int_0^L \left( u_{,x} + \frac{1}{2} v_{,x}^2 + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + \frac{1}{2} \frac{I_p}{A} \theta_{x,x}^2 \right) dx \quad (344)$$

então

$$\varepsilon_m = \frac{u_2 - u_1}{L} + \frac{1}{2L} \int_0^L v_{,x}^2 dx + \frac{1}{2L} \int_0^L w_{,x}^2 dx + \frac{1}{2L} \frac{I_p}{A} \int_0^L \theta_{x,x}^2 dx \quad (345)$$

onde  $u_1$  e  $u_2$  são os deslocamentos axiais dos nós 1 e 2 do elemento, respectivamente.

Após a discretização, os deslocamentos no interior do elemento são obtidos pela interpolação dos graus de liberdades nodais. Sendo  $m$  o grau da derivada de maior ordem que aparece na expressão do PTV (i.e. nas deformações) a função de interpolação deve ter continuidade  $C^{m-1}$  entre os elementos adjacentes. Assim, o deslocamento axial e o ângulo de torção podem ser interpolados por funções  $C^0$  e os demais deslocamentos transversais podem

ser interpolados utilizando funções com continuidade  $C^1$ . Assim,

$$\begin{aligned}
 \frac{u_2 - u_1}{L} &= [N_{1,x} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ N_{2,x} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \mathbf{d} = \mathbf{B}_0 \mathbf{d} \\
 v_{,x} &= [0 \ H_{1,x} \ 0 \ 0 \ 0 \ H_{2,x} \ 0 \ H_{3,x} \ 0 \ 0 \ 0 \ H_{4,x}] \mathbf{d} = \mathbf{B}_{bv,x} \mathbf{d} \\
 w_{,x} &= [0 \ 0 \ H_{1,x} \ 0 \ -H_{2,x} \ 0 \ 0 \ 0 \ H_{3,x} \ 0 \ -H_{4,x} \ 0] \mathbf{d} = \mathbf{B}_{bw,x} \mathbf{d} \\
 \theta_{x,x} &= [0 \ 0 \ 0 \ N_{1,x} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ N_{2,x} \ 0 \ 0] \mathbf{d} = \mathbf{B}_{\theta,x} \mathbf{d}
 \end{aligned} \tag{346}$$

onde as funções  $N$ 's representam as funções de Lagrange lineares e as funções  $H$ 's representam os polinômio de Hermite (cúbicos), dadas por:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{L-x}{L} \\
 N_2 &= \frac{x}{L} \\
 H_1 &= 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\
 H_2 &= x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\
 H_3 &= \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\
 H_4 &= -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}
 \end{aligned} \tag{347}$$

A substituição da Equação (346) na Equação (345) resulta em:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_m &= \mathbf{B}_0 \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{Lv} \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{Lw} \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{L\theta} \mathbf{d} \\
 &= \left[ \mathbf{B}_0 + \frac{1}{2} \left( \underbrace{\mathbf{B}_{Lv} + \mathbf{B}_{Lw} + \mathbf{B}_{L\theta}}_{\mathbf{B}_L} \right) \right] \mathbf{d} \\
 &= \left( \mathbf{B}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_L \right) \mathbf{d} \\
 &= \mathbf{B}_m \mathbf{d}
 \end{aligned} \tag{348}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_{Lv} = \mathbf{d}^t \mathbf{A}_v &\Rightarrow \mathbf{A}_v = \int_0^L \mathbf{B}_{bv,x}^t \mathbf{B}_{bv,x} dx \\
 \mathbf{B}_{Lw} = \mathbf{d}^t \mathbf{A}_w &\Rightarrow \mathbf{A}_w = \int_0^L \mathbf{B}_{bw,x}^t \mathbf{B}_{bw,x} dx \\
 \mathbf{B}_{L\theta} = \mathbf{d}^t \mathbf{A}_\theta &\Rightarrow \mathbf{A}_\theta = \int_0^L \mathbf{B}_{\theta,x}^t \mathbf{B}_{\theta,x} dx
 \end{aligned} \tag{349}$$

As curvaturas  $\kappa_y$ ,  $\kappa_z$  e a taxa de variação do ângulo de torção  $\theta_{x,x}$  são as mesmas do elemento tradicional de pórtico espacial linear.<sup>76</sup> Assim, através das Equações (332), (346)

e (348), a matriz  $\mathbf{B}$  expressa na Equação (343) é dada por:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m \\ \mathbf{B}_{bw,xx} \\ \mathbf{B}_{bv,xx} \\ \mathbf{B}_{\theta,x} \end{bmatrix} \quad (350)$$

A variação da deformação de membrana  $\delta\epsilon_m$  é obtida variando a Equação (348):

$$\delta\epsilon_m = \mathbf{B}_0 \delta\mathbf{d} + \frac{1}{2} (\delta\mathbf{B}_L \mathbf{d} + \mathbf{B}_L \delta\mathbf{d}) \quad (351)$$

Por meio da definição de  $\mathbf{B}_L$  na Equação (348), pode-se mostrar que:

$$\begin{aligned} \delta\epsilon_m &= (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L) \mathbf{d} \\ &= \bar{\mathbf{B}}_m \delta\mathbf{d} \end{aligned} \quad (352)$$

A partir das Equações (332), (346) e (352), pode-se expressar a matriz  $\bar{\mathbf{B}}$  da Equação (343):

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_m \\ \mathbf{B}_{bw,xx} \\ \mathbf{B}_{bv,xx} \\ \mathbf{B}_{\theta,x} \end{bmatrix} \quad (353)$$

### 5.1.2 Vetor de forças internas e matriz de rigidez tangente do elemento

O vetor de forças internas do elemento é determinado pela substituição da Equação (343) na Equação (342). Logo,

$$\mathbf{f} = \int_L \bar{\mathbf{B}}^t \boldsymbol{\sigma}_v dx \quad (354)$$

A substituição de  $\boldsymbol{\sigma}_v = \mathbf{C}_v \boldsymbol{\epsilon}_v$  (Equação 31) e da Equação (343) na Equação (342), conduz a:

$$\mathbf{f} = \int_L \bar{\mathbf{B}}^t \mathbf{C}_v \mathbf{B} dx \mathbf{d} \quad (355)$$

A matriz de rigidez do elemento é obtida pela variação do vetor de forças internas. Portanto,

$$\delta\mathbf{f} = \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{d}} \delta\mathbf{d} \Rightarrow \mathbf{k}_t = \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{d}} \quad (356)$$

que da Equação (354):

$$\mathbf{k}_t = \int_L \bar{\mathbf{B}}^t \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_v}{\partial \mathbf{d}} dx + \int_L \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^t}{\partial \mathbf{d}} \boldsymbol{\sigma}_v dx = \mathbf{k}_e + \mathbf{k}_g \quad (357)$$

A matriz  $\mathbf{k}_e$  é dada por:

$$\mathbf{k}_e = \int_L \bar{\mathbf{B}}^t \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_v}{\partial \mathbf{d}} dx = \int_L \bar{\mathbf{B}}^t \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_v}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{d}} dx \quad (358)$$

Utilizando-se a Equação (31) e a segunda expressão da Equação (343):

$$\mathbf{k}_e = \int_L \bar{\mathbf{B}}^t \mathbf{C}_v \bar{\mathbf{B}} dx \quad (359)$$

A matriz  $\mathbf{k}_g$  é dada por:

$$\mathbf{k}_g = \int_L \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^t}{\partial \mathbf{d}} \boldsymbol{\sigma}_v dx \quad (360)$$

Utilizando as Equações (348), (349), (352) e (353):

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial \mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{B}_L}{\partial \mathbf{d}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{B}_L}{\partial \mathbf{d}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}} (\mathbf{d}^t \mathbf{A}_v + \mathbf{d}^t \mathbf{A}_w + \mathbf{d}^t \mathbf{A}_\theta) = \mathbf{A}_v + \mathbf{A}_w + \mathbf{A}_\theta = \mathbf{A} \quad (361)$$

Logo,

$$\mathbf{k}_g = \int_L \mathbf{A}^t N_x dx \quad (362)$$

É interessante ressaltar que  $N_x$  não pode sair da integral da Equação (362) para vigas laminadas, pois os termos da primeira linha da matriz  $\mathbf{C}_v$  ( $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{13}$  e  $C_{14}$ ) podem não ser nulos, fazendo com que  $N_x$  seja variável ao longo do elemento, mesmo com a deformação axial  $\varepsilon_x$  sendo constante. Observa-se nas Equações (346) e (347) que as curvaturas ( $\kappa_y$  e  $\kappa_z$ ) dependem de  $x$ , enquanto  $\varepsilon_x$  e  $\beta$  são constantes ao longo do comprimento do elemento. Assim,

$$N_x = C_{11} \varepsilon_x + C_{12} \kappa_y + C_{13} \kappa_z + C_{14} \beta \quad (363)$$

No entanto, para vigas de material isotrópico e homogêneo ( $C_{11} = EA$  e  $C_{12} = C_{13} = C_{14} = 0$ ), a força normal é constante e, portanto, simplifica o cálculo da matriz de rigidez geométrica.

## 5.2 Formulação do elemento CRL

O vetor de forças internas, bem como a matriz de rigidez tangente do elemento CRL podem ser facilmente obtidos através da formulação do elemento CRTL, uma vez que ele considera apenas as parcelas lineares do tensor de deformação de Green-Lagrange. Assim,

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= u_{,x} \\ \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} \\ \gamma_{xz} &= u_{,z} + w_{,x}\end{aligned}\tag{364}$$

Desta forma, a matriz que relaciona deslocamento-deformação  $\mathbf{B}$  (Equação 343) não depende dos deslocamento nodais do elemento:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{B}_{bw,xx} \\ \mathbf{B}_{bv,xx} \\ \mathbf{B}_{\theta,x} \end{bmatrix}\tag{365}$$

Portanto, o vetor de forças internas se torna:

$$\mathbf{f} = \int_L \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma}_v dx\tag{366}$$

e a matriz de rigidez do elemento é obtida como:

$$\mathbf{k}_t = \int_L \mathbf{B}^t \mathbf{C}_v \mathbf{B} dx\tag{367}$$

Mororó *et al.*<sup>32</sup> utilizaram este elemento para realizar análises lineares de vigas laminadas de parede fina com seção caixão e I.

## 6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Os exemplos numéricos apresentados neste capítulo têm sido utilizados na literatura para verificar a capacidade de elementos finitos em tratar não linearidades geométricas oriundas de grandes rotações. Os problemas são numericamente resolvidos pelo método de Newton-Raphson com controle de carga e pelo método de Comprimento de Arco.<sup>75</sup>

Os quatro primeiros exemplos tratam de estruturas com material isotrópico e homogêneo. Os dois primeiros exemplos são de estruturas cujas configurações inicial e deformada estão contidas no mesmo plano e dispõem de solução analítica para comparação. Os outros dois exemplos tratam de estruturas cujas configurações iniciais estão contidas no plano, porém com a configuração deformada no espaço. Esses possuem apenas resultados numéricos da literatura para comparação.

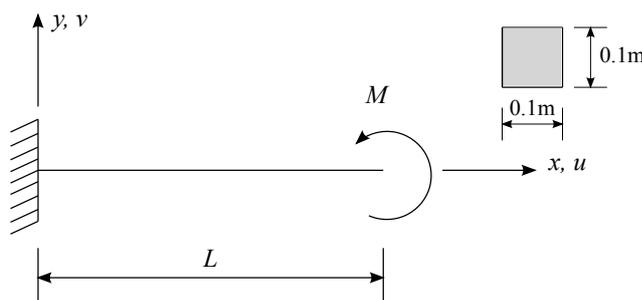
Os dois últimos exemplos tratam de estruturas com material compósito laminado. Desses exemplos, o primeiro trata de vigas cujas configuração inicial e deformada estão contidas no mesmo plano. Nesse primeiro exemplo são utilizadas vigas de seção caixão e circular com algumas das laminações apresentadas na Tabela 9. Tais vigas são comparadas com resultados numéricos da literatura e com solução de elementos finitos de casca. Por fim, o último exemplo trata de uma viga balcão cuja configuração inicial está contida no plano, porém sua configuração deformada está no espaço. Nesse último exemplo são utilizados resultados numéricos de elementos finitos de casca para comparação.

### 6.1 Viga em balanço com carga momento na extremidade

O objetivo deste primeiro exemplo é verificar se o elemento corrotacional apresentado foi implementado corretamente no FAST. Outro objetivo deste exemplo é verificar a influência das malhas nas respostas obtidas pelo uso dos elementos CRL e CRTL.

Este primeiro corresponde a uma viga em balanço sujeita à flexão pura através da aplicação de uma carga momento na sua extremidade livre, conforme ilustrado na Figura 38. A viga possui 3.2 m de comprimento com seção transversal quadrada cujo lado é de 0.1 m. Utilizou-se um material isotrópico com módulo de elasticidade  $E = 210$  GPa.

Figura 38 – Viga em balanço com carga momento na extremidade livre.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Este exemplo com tais características (comprimento e seção da viga, bem como o material) foi extraído de Monteiro.<sup>33</sup> Encontra-se na literatura o mesmo exemplo com característica diferentes.<sup>7,74</sup> A solução analítica deste problema para as componentes do deslocamento na extremidade livre da viga é dada por:

$$\frac{u}{L} = \frac{\sin \theta}{\theta} - 1; \quad \frac{v}{L} = \frac{1 - \cos \theta}{\theta}; \quad \theta = \frac{ML}{EI} \quad (368)$$

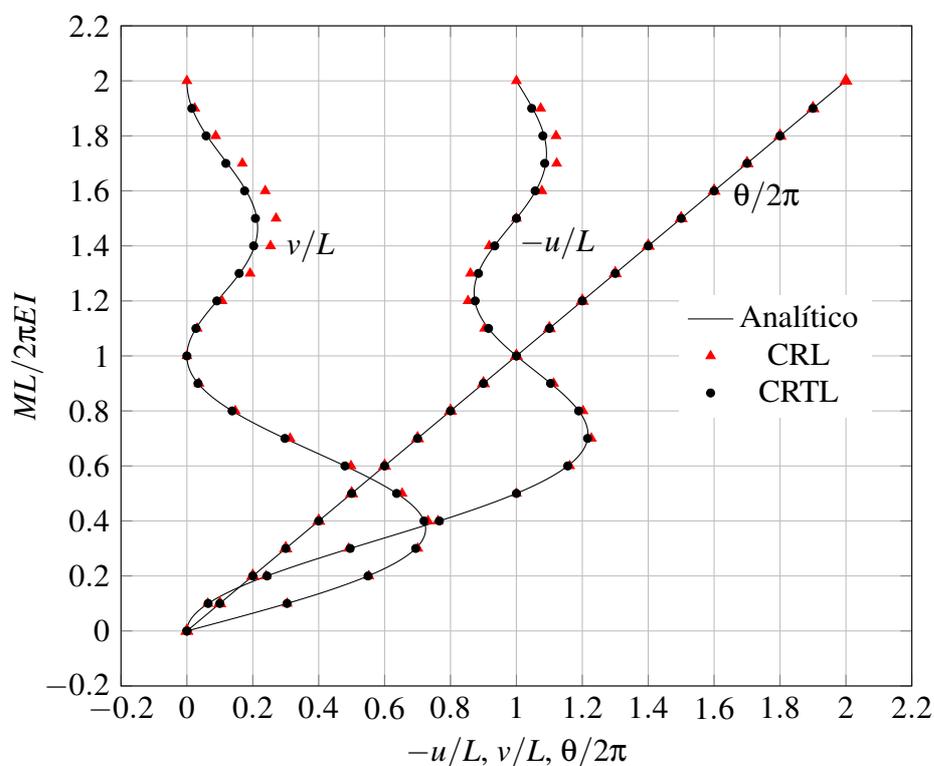
onde  $\theta$  é a rotação do eixo da viga em torno do eixo  $z$ .

A viga foi modelada com 4 e 8 elementos CRL e CRTL. Os resultados obtidos para essas malhas são comparados com a solução analítica na Figura 39 e Figura 40. O carregamento  $M = 4\pi EI/L$  é aplicado em 20 incrementos iguais.

Com base na Figura 39 e Figura 40, pode-se verificar ótima concordância entre as respostas obtidas através dos elementos CRL e CRTL e a solução analítica. Contudo, para malha com 4 elementos, o elemento CRL não apresentou boa concordância com a solução analítica para as curvas  $v/L$  e  $-u/L$  a partir do incremento 12. No entanto, para malha de 8 elementos, ambos os elementos apresentaram bons resultados.

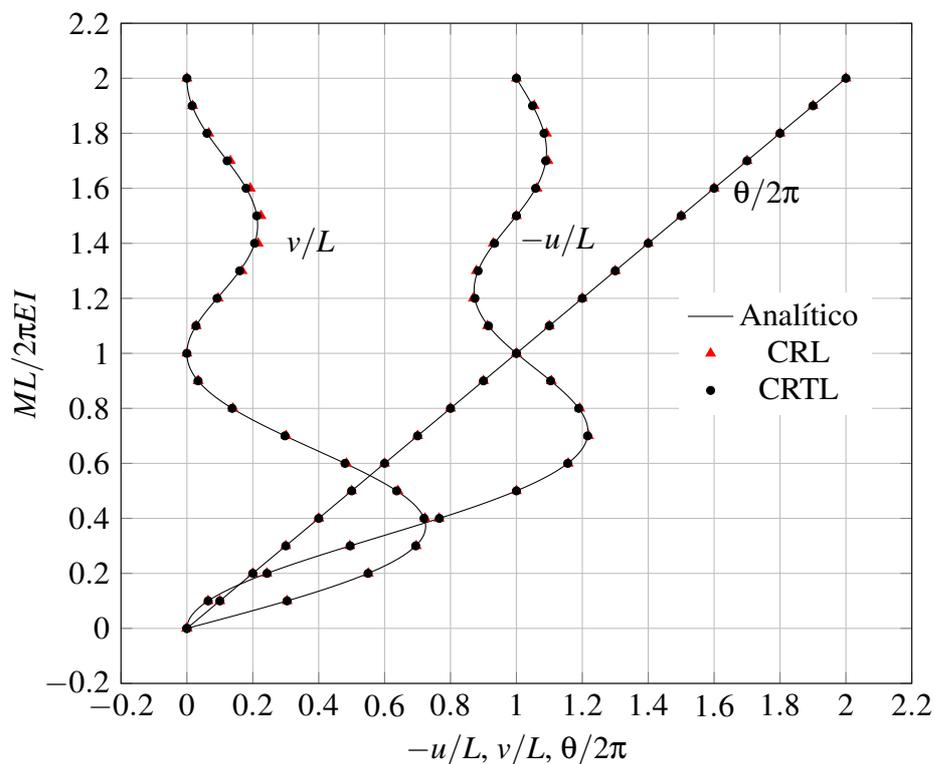
Assim, pode-se afirmar que o elemento corrotacional foi verificado por resultados numéricos e implementado corretamente no FAST.

Figura 39 – Deslocamentos para extremidade livre da viga: malha com 4 elementos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 40 – Deslocamentos para extremidade livre da viga: malha com 8 elementos.

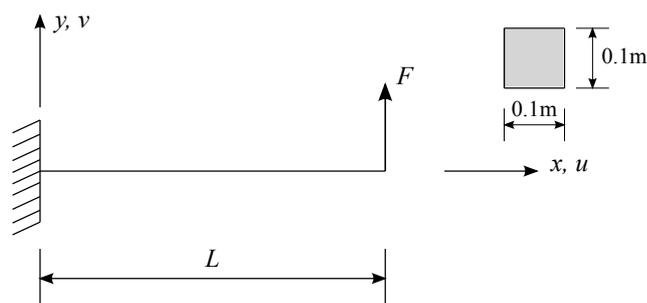


Fonte: Elaborado pelo autor.

## 6.2 Viga em balanço com carga transversal na extremidade

O segundo exemplo corresponde a uma viga em balanço sujeita a uma carga transversal aplicada em sua extremidade livre, conforme ilustrado na Figura 41. Assim como o exemplo anterior, a viga possui 3.2 m de comprimento com seção transversal quadrada cujo lado é de 0.1 m. Utilizou-se também um material isotrópico com módulo de elasticidade  $E = 210$  GPa. Esses parâmetros também foram extraídos de Monteiro.<sup>33</sup> O objetivo deste exemplo é avaliar, mais uma vez, a influência das malhas nas respostas obtidas pelo uso dos elementos CRL e CRTL.

Figura 41 – Viga em balanço com carga transversal na extremidade livre.



Fonte: Elaborado pelo autor.

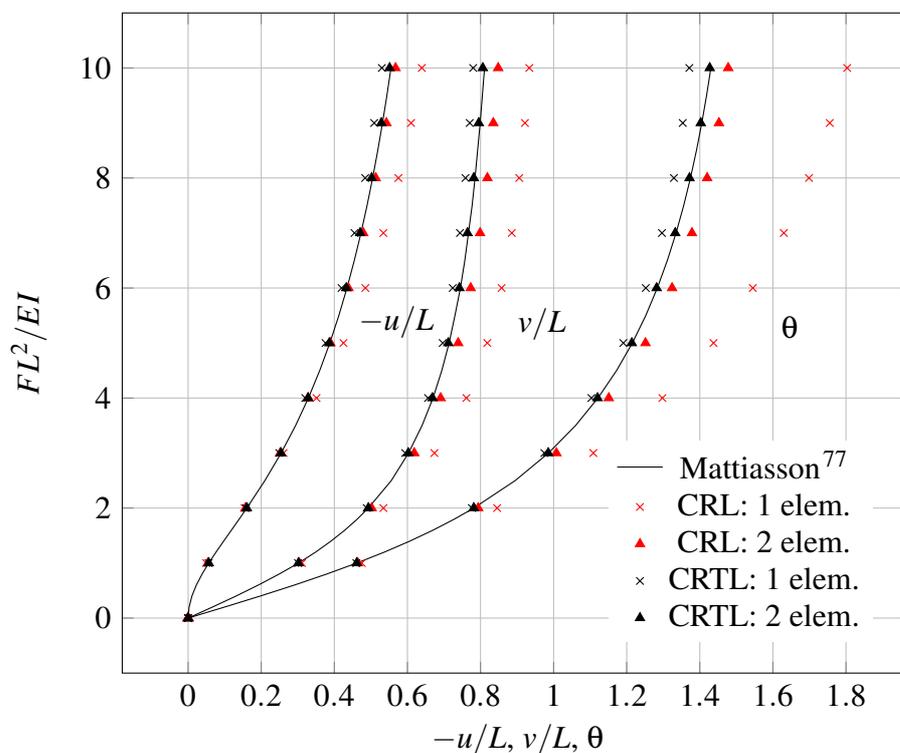
Esta viga foi modelada com 1 e 2 elementos CRL e CRTL. Os resultados obtidos para essas malhas são comparados com a solução analítica de Mattiasson,<sup>77</sup> que a partir de integrais elípticas determinou valores numéricos para os deslocamentos  $u$ ,  $v$  e para a rotação  $\theta$  na extremidade livre da viga. Os resultados obtidos para essas grandezas com a carga  $F = 10EI/L^2$  dividida em 10 incrementos iguais são comparados com os de Mattiasson<sup>77</sup> na Figura 42.

A partir da Figura 42, pode-se verificar ótima concordância entre a solução obtida por meio do elemento CRTL com dois elementos e a solução numérica de Mattiasson.<sup>77</sup> Verifica-se também, claramente, a diferença entre os elementos CRL e CRTL, comparando as malhas de 1 elemento, observa-se que o elemento CRTL obteve uma resposta melhor do que o elemento CRL. Desta forma, pode-se afirmar que o elemento CRTL é mais eficiente do que o elemento CRL, pois com poucos elementos, o elemento CRTL resulta em bons resultados. Ressalta-se que Monteiro<sup>33</sup> utilizou uma malha de 4 elementos equivalente ao elemento CRL para obter uma solução satisfatória.

Para estruturas de pequeno porte, talvez esta diferença entre as malhas não seja tão importante. Contudo, para estruturas de grande porte, como no caso dos *risers* e grandes edificações, esta diferença é de grande importância devido ao custo computacional envolvido para solução do sistema.

Com base nos exemplos acima apresentados e para lidar com número pequeno de dados, utiliza-se apenas o elemento CRTL para o restante dos exemplos.

Figura 42 – Deslocamentos para extremidade livre da viga.

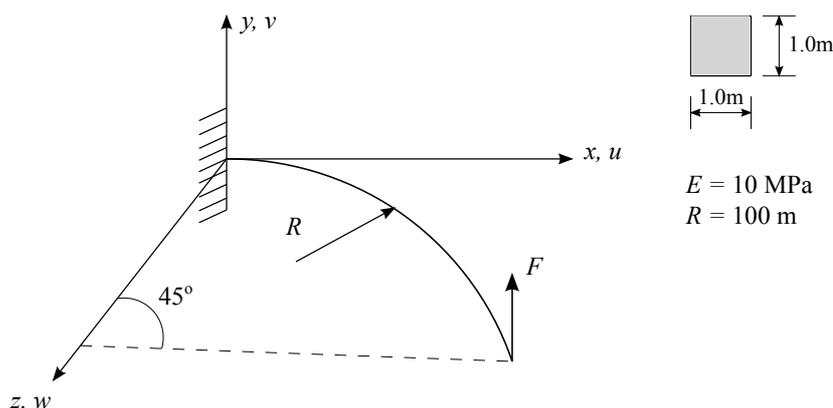


Fonte: Elaborado pelo autor.

### 6.3 Viga circular em balanço

Neste exemplo, uma viga em balanço, inicialmente curva de comprimento  $\pi R/4$  é analisada, conforme ilustrado na Figura 43. Bathe e Bolourchi<sup>21</sup> analisaram este problema utilizando elementos sólidos tridimensionais e de pórtico espacial baseados na descrição Lagrangeana Total e Atualizada.

Figura 43 – Viga circular em balanço com carga aplicada na extremidade livre.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A viga foi discretizada com 8 elementos CRTL e foi submetida a uma carga vertical de 600 N dividida em 4 incrementos iguais (i.e. a carga de referência é de 150 N). Para efeito de comparação com outros trabalhos, analisaram-se os níveis de carga 300 N, 450 N e 600 N. Os resultados obtidos para  $u$ ,  $v$  e  $w$  na extremidade livre da viga são apresentados na Tabela 17, juntamente com os valores fornecidos por Bathe e Borlouchi,<sup>21</sup> Simo e Vu-Quoc<sup>78</sup> e Crisfield,<sup>64</sup> observando-se uma excelente concordância.

Tabela 17 – Deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$  para extremidade livre da viga circular.

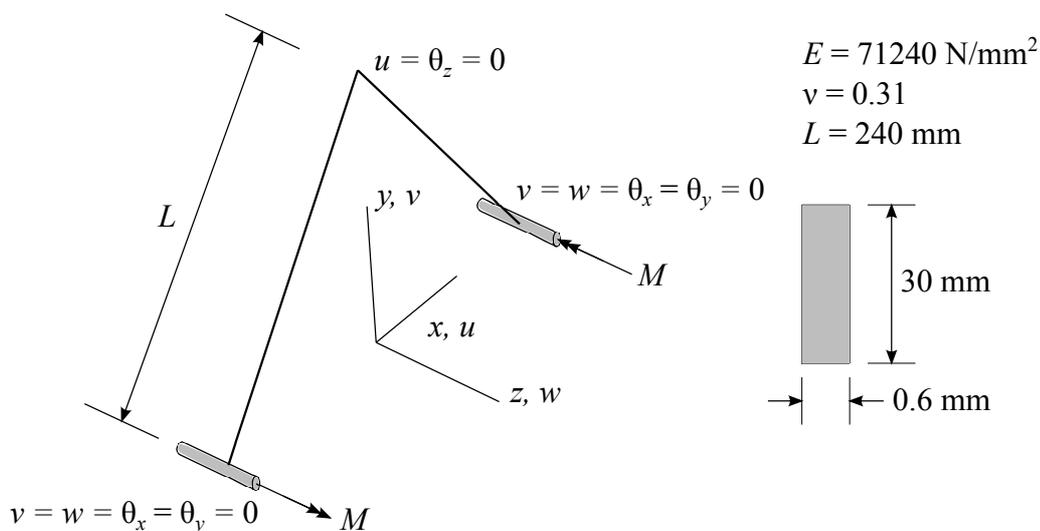
Carregamento	P = 300 N			P = 450 N			P = 600 N		
	$u$ (m)	$v$ (m)	$w$ (m)	$u$ (m)	$v$ (m)	$w$ (m)	$u$ (m)	$v$ (m)	$w$ (m)
Bathe e Bolourchi <sup>21</sup>	-11.51	39.50	-6.79	-	-	-	-23.50	53.40	-13.39
Simo e Vu-Quoc <sup>78</sup>	-11.87	40.08	-6.96	-18.39	48.39	-10.67	-23.48	53.37	-13.50
Crisfield <sup>64</sup>	-12.18	40.53	-7.13	-18.78	48.79	-10.86	-23.87	53.71	-13.68
CRTL	-12.14	40.47	-7.14	-18.70	48.72	-10.88	-23.78	53.64	-13.70

Fonte: Elaborado pelo autor.

### 6.4 Pórtico em forma de L com apoios do tipo pino

O pórtico ilustrado na Figura 44 foi discretizado com 10 elementos CRTL por barra. O objetivo deste exemplo é verificar a capacidade do elemento em lidar com grandes rotações no espaço.

Figura 44 – Pórtico em forma de L com apoios do tipo pino.

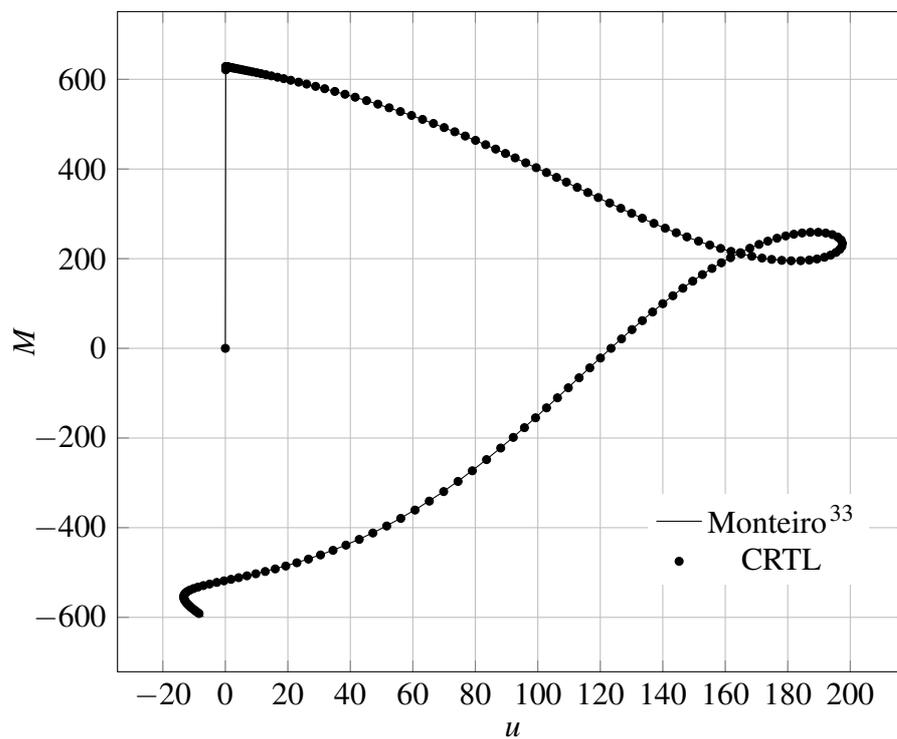


Fonte: Adaptado de Monteiro.<sup>33</sup>

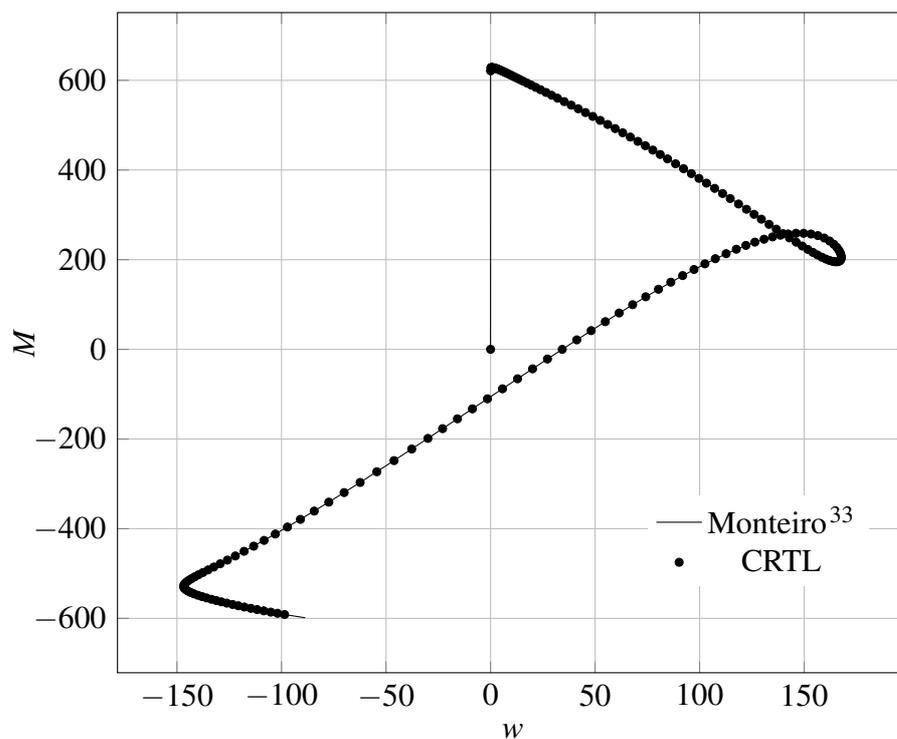
Os apoios são livres para transladar na direção  $x$  e para rotacionar em torno de  $z$ , enquanto o deslocamento no topo é restringido nessas direções. A carga momento é aplicada segundo o eixo  $z$ . À medida que o momento  $M$  cresce a partir de zero, o pórtico permanece no plano  $xy$  até o valor do momento crítico  $M = M_{cr}$ . A partir daí o pórtico pode flambar lateralmente desde que sofra uma perturbação, caso contrário, o pórtico permanecerá no plano.

Para solução do problema, no primeiro passo utilizou-se um momento  $M = 620 \text{ Nm}$ . Uma pequena carga fictícia ( $1.0 \times 10^{-6}$ ), mantida durante toda a análise, é aplicada na direção  $z$  no topo.

A curva para o deslocamento  $u$  do apoio é apresentada na Figura 45. A curva para o deslocamento  $w$  do topo é mostrada na Figura 46. Ambas as grandezas são comparadas com solução obtida por Monteiro.<sup>33</sup> Pode-se verificar a partir dessas figuras ótima concordância com a solução numérica de Monteiro.<sup>33</sup>

Figura 45 – Pórtico em forma de L: deslocamento  $u$  do apoio.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 46 – Pórtico em forma de L: deslocamento  $w$  do topo.

Fonte: Elaborado pelo autor.

## 6.5 Viga laminada engastada com carga transversal na extremidade

Neste exemplo, considerou-se uma viga laminada engastada e livre, com carga transversal na extremidade livre, e dois tipos de seção transversal. A viga possui raio médio de 60 mm, espessura de 6 mm, comprimento de 6 m (100 vezes o raio médio) e corresponde ao modelo L1 apresentado na Tabela 9, cujas propriedades do material são as mesmas apresentadas na Tabela 8.

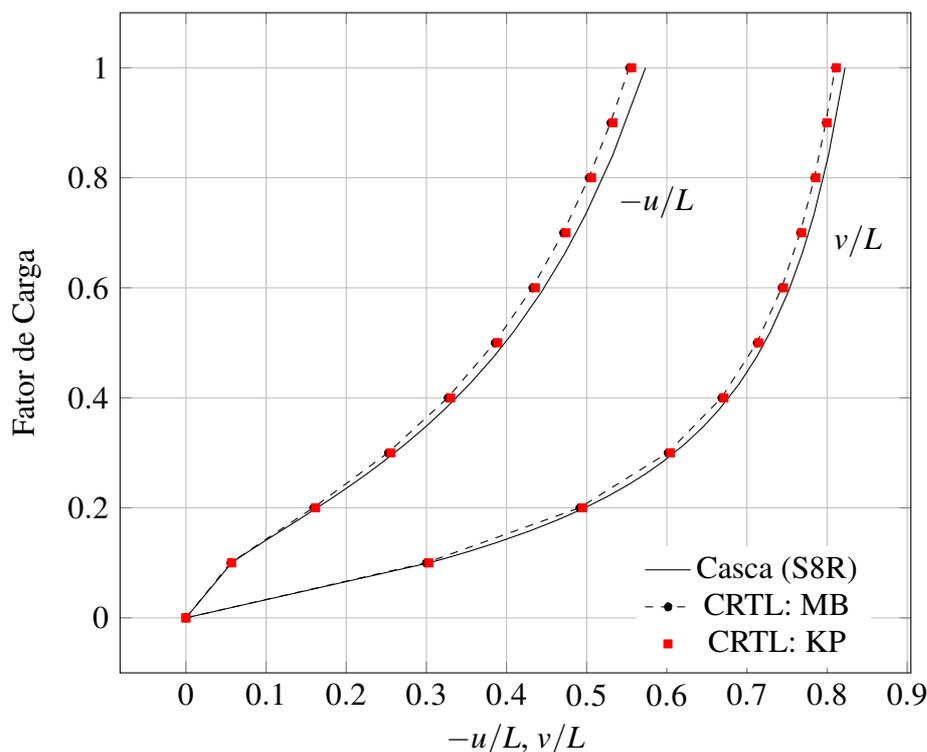
Submeteu-se tal viga a um carregamento de 26.8671 kN, dividido em 10 incrementos iguais. Os resultados são comparados com o modelo de elementos finitos de casca (S8R) desenvolvido no ABAQUS.

No ABAQUS, a viga foi discretizada com 4816 elementos. Impediram-se todos os deslocamentos da seção para simular o engaste. A carga de referência foi aplicada em dois pontos da seção da extremidade livre. Para evitar efeitos localizados, inseriu-se, mais uma vez, um anel rígido onde a carga é aplicada.

A viga foi discretizada com 8 elementos CRTL com duas abordagens, uma com a matriz constitutiva obtida através do processo MB e outra obtida por meio do processo de KP. Na Figura 47, ilustram-se as curvas de equilíbrio.

Com base na Figura 47, pode-se observar ótima concordância entre os resultados. Verifica-se que as duas abordagens MB e KP apresentaram pequena diferença entre si, já que para esta laminação ambas abordagens apresentaram ótimo desempenho, conforme verificado.

Figura 47 – Deslocamentos para extremidade livre da viga de seção transversal circular: modelo L1.



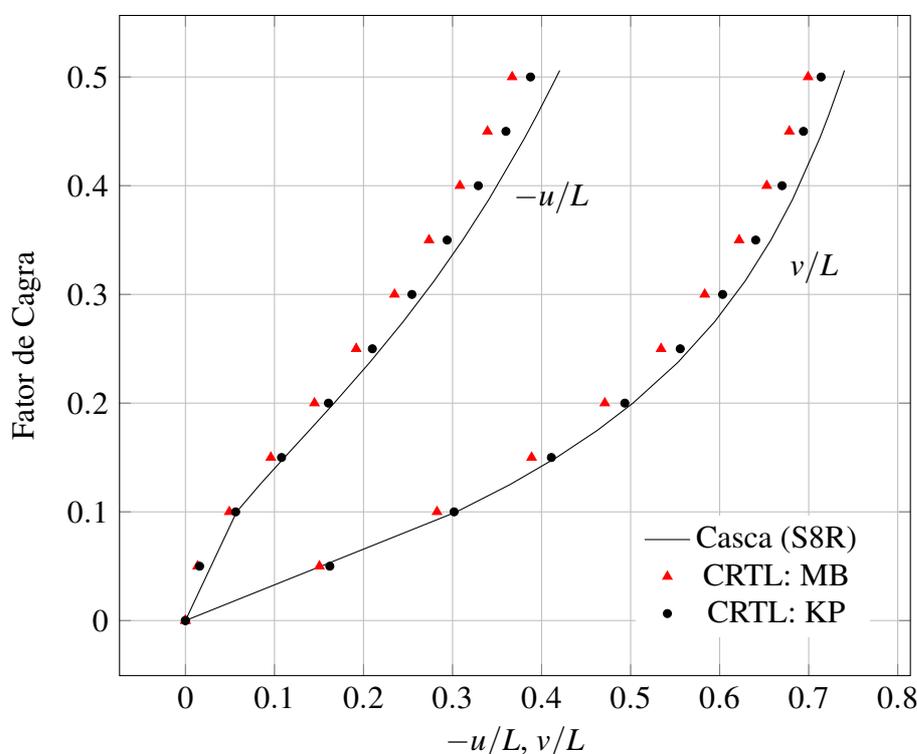
Fonte: Elaborado pelo autor.

Em seguida, analisou-se a mesma viga com o modelo L6 da Tabela 9. Neste caso, submeteu-se a viga a uma carga transversal de 67027.7778 N dividida em 10 incrementos iguais. Infelizmente, no ABAQUS, não foi possível atingir o último nível de carga, pois surgiram efeitos localizados na região do engaste (ovalização). Desta forma, para efeito de comparação, apresenta-se na Figura 48 apenas os pontos até o último nível em que o ABAQUS conseguiu convergir.

Com base na Figura 48, pode-se verificar ótima concordância entre os resultados. É importante ressaltar que a curva obtida por meio da abordagem KP foi melhor do que a abordagem MB. Isso ocorreu devido ao fato da abordagem KP ter apresentado melhores resultados para esta laminação do que MB. Verifica-se também que a resposta de casca foi mais flexível do que as respostas do elemento CRTL, uma vez que o modelo de casca conseguiu captar efeitos localizados que o modelo de pórtico não conseguiu. Dessa forma, o modelo de casca foi perdendo rigidez durante o processo incremental da carga.

Com base nos dois problemas acima apresentados, verifica-se que a abordagem KP apresenta um desempenho melhor do que MB também em problemas geometricamente não lineares. Desta forma, para os próximos exemplos é utilizada apenas a abordagem KP para obter a matriz constitutiva da viga.

Figura 48 – Deslocamentos para extremidade livre da viga de seção transversal circular: modelo L6.



Fonte: Elaborado pelo autor.

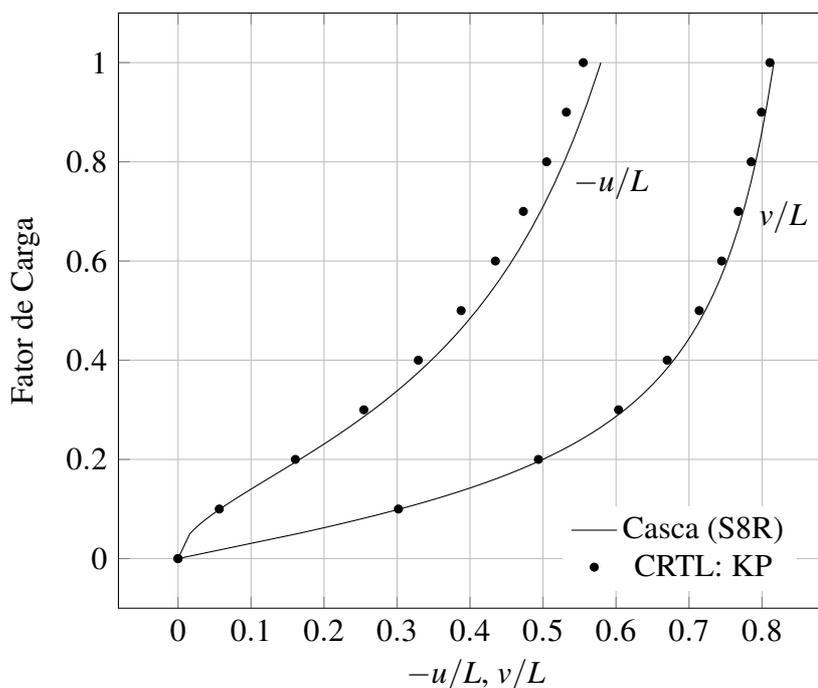
Em seguida, analisou-se uma viga caixão laminada engastada e livre. A viga possui base de 50 mm ( $b$ ) e altura ( $d$ ) de 70 mm, conforme ilustra a Figura 25. Ressalta-se que tais di-

mensões correspondem aos seus valores médios. Cada segmento possui 6 mm de espessura ( $h$ ). Esta viga possui a laminação L6 apresentada na Tabela 9, cujas especificações do material estão apresentadas na Tabela 8. A viga caixão foi discretizada com 8 elementos CRTL e submetida a um carregamento de 13006.4382 N divididos em 10 incrementos iguais.

Os resultados são comparados com o modelo de elementos finitos de casca (S8R) desenvolvido no ABAQUS. A viga foi discretizada com 7488 elementos. Todos os deslocamentos da seção do apoio foram restringidos para simular o engaste. A carga de referência foi dividida em duas cargas pontuais aplicadas na seção transversal livre. Para evitar efeitos localizados devido as cargas pontuais, inseriu-se mais uma vez um dispositivo rígido.

Na Figura 49, apresenta-se a comparação entre as soluções. A partir dessa figura, pode-se observar mais uma vez ótima concordância entre os resultados. Apenas a curva  $-u/L$  apresentou uma pequena diferença para os últimos níveis de carga.

Figura 49 – Deslocamentos para extremidade livre da viga caixão: modelo L6.



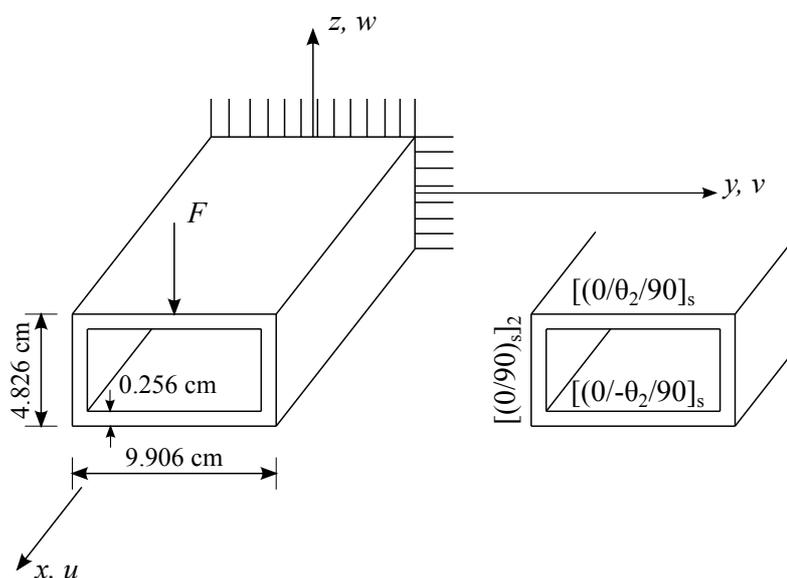
Fonte: Elaborado pelo autor.

Por fim, o problema não linear analisado por Stemple e Lee,<sup>3</sup> Vo e Lee,<sup>4</sup> Vo e Lee<sup>5</sup> e Vanegas e Patiño<sup>6</sup> é analisado nesta seção. Nesse problema, uma viga box laminada engastada e livre submetida a uma carga transversal é considerado.

A carga é de 1.78 kN aplicada na extremidade livre da viga e dividida em 10 incremento iguais. O esquema de laminação de cada membro da seção transversal, bem como suas dimensões são ilustrados na Figura 50. Cada segmento da seção (almas e mesas) possui oito lâminas, cuja espessura de cada lâmina é de 0.032 cm. Varia-se o esquema de laminação das mesas, porém fixa-se o esquema de laminação das almas. O material utilizado é apresentado na

Tabela 18.

Figura 50 – Geometria e laminações da viga caixão.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 18 – Dados do material da viga box laminada.<sup>3-6</sup>

$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$
146.78	10.3	6.2	0.28

Fonte: Elaborado pelo autor.

A viga possui 2.54 m de comprimento e foi discretizada com 8 e 16 elementos CRTL. Fez-se também um modelo de elementos finitos de casca (S8R) no ABAQUS de tal problema. A viga caixão foi discretizada com 7140 elementos.

Para efeito de comparação, os deslocamentos  $w$ ,  $v$  e o ângulo de torção  $\psi$  da extremidade livre da viga são comparados para valores de  $\theta = 90^\circ$  e  $\theta = 45^\circ$ . Na Tabela 19, apresentam-se os valores obtidos com o elemento CRTL e os fornecidos pela literatura. Pode-se observar a partir desses dados que as respostas do CRTL estão maiores do que as demais referências. Ressalta-se que apenas o deslocamento  $w$  de 57.60 cm ficou abaixo do deslocamento de 58.80 cm obtido por Vanegas e Patiño<sup>6</sup> para  $\theta = 45^\circ$ . Observa-se também que o elemento CRTL não apresentou deslocamento lateral  $v$  para  $\theta = 90^\circ$  como as demais resposta, pois neste caso, não há nenhum tipo de acoplamento, conforme verificado na Equação (369).

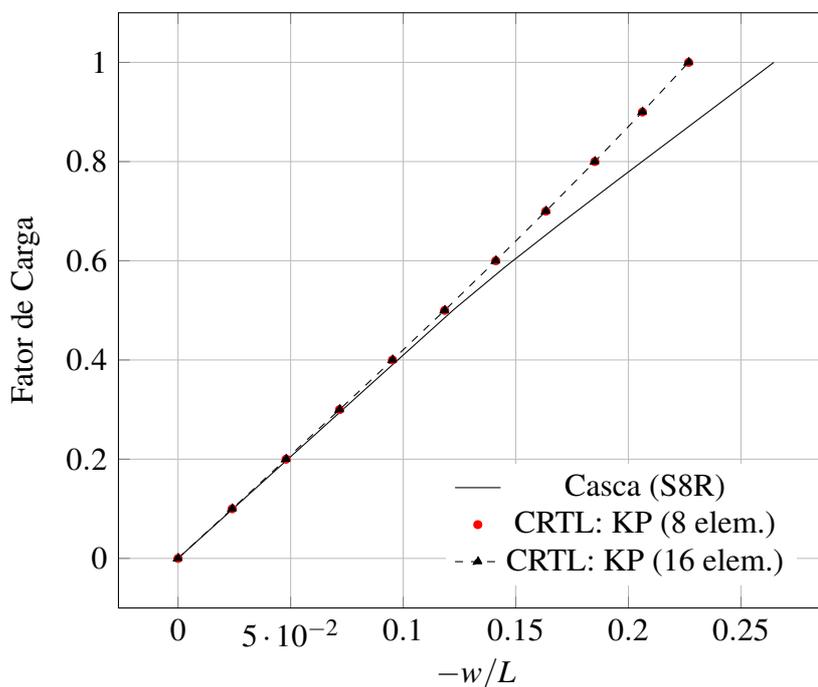
$$\mathbf{C}_v = \begin{bmatrix} 4.0486\text{E} + 07 & 1.4715\text{E} - 30 & 0.0000\text{E} + 00 & 3.8401\text{E} - 13 \\ 1.4715\text{E} - 30 & 1.4739\text{E} + 04 & 0.0000\text{E} + 00 & 1.6675\text{E} - 14 \\ 0.0000\text{E} + 00 & 0.0000\text{E} + 00 & 6.0071\text{E} + 04 & 0.0000\text{E} + 00 \\ 3.8401\text{E} - 13 & 1.6675\text{E} - 14 & 0.0000\text{E} + 00 & 4.3515\text{E} + 03 \end{bmatrix} \quad (369)$$

Tabela 19 – Deslocamentos da extremidade livre da viga caixão para 1.78 kN.

Referências	$\theta = 45^\circ$			$\theta = 90^\circ$		
	$w$ (cm)	$v$ (cm)	$\psi$ (rad)	$w$ (cm)	$v$ (cm)	$\psi$ (rad)
Vanegas e Patiño <sup>6</sup>	58.80	0.91	0.045	59.12	0.03	0.00
Vo e Lee <sup>5</sup>	55.00	1.20	0.072	59.12	0.03	0.00
Vo e Lee <sup>4</sup>	51.30	1.00	0.065	52.90	0.01	0.00
Stemple e Lee <sup>3</sup>	48.50	1.35	0.090	53.40	0.06	0.00
CRTL: 16 elem.	57.60	1.70	0.114	61.91	0.00	0.00

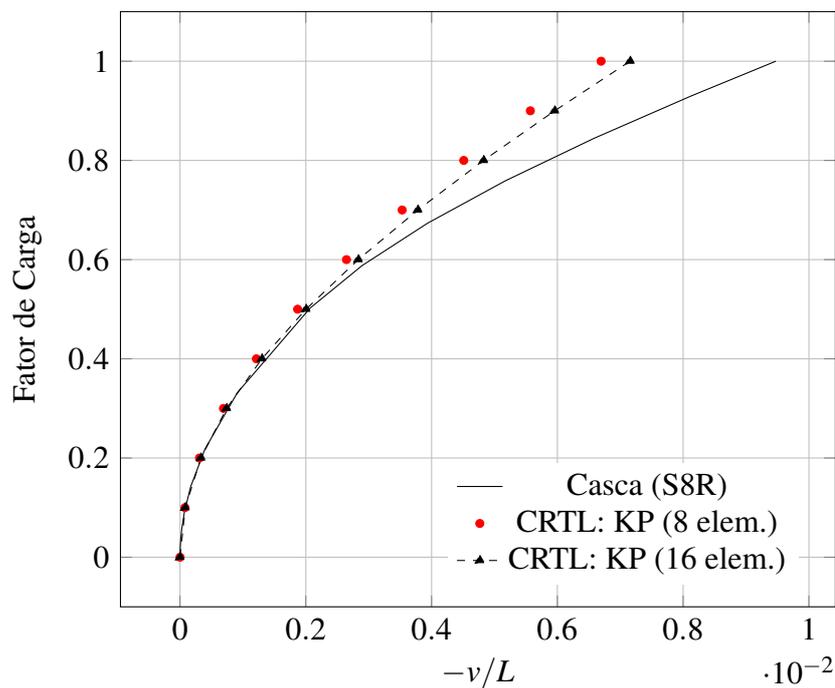
Fonte: Elaborado pelo autor.

A comparação entre o elemento CRTL com 8 e 16 elementos para o modelo com  $\theta = 45^\circ$  é apresentado nas figuras 51, 52 e 53. Os pontos das curvas obtidos através do ABAQUS foram computados pelo método do controle de carga com o incremento ajustável, o *software* ajusta o incremento de carga automaticamente. Porém, para comparar os valores para cada nível de carga com CRTL, fixou-se o incremento no ABAQUS em 0.1. Tal comparação é apresentada na Tabela 20. Ressalta-se que quando se fixou o incremento, só foi possível atingir até o fator de carga 0.5.

Figura 51 – Deslocamentos  $w$  para extremidade livre da viga:  $\theta = 45^\circ$ .

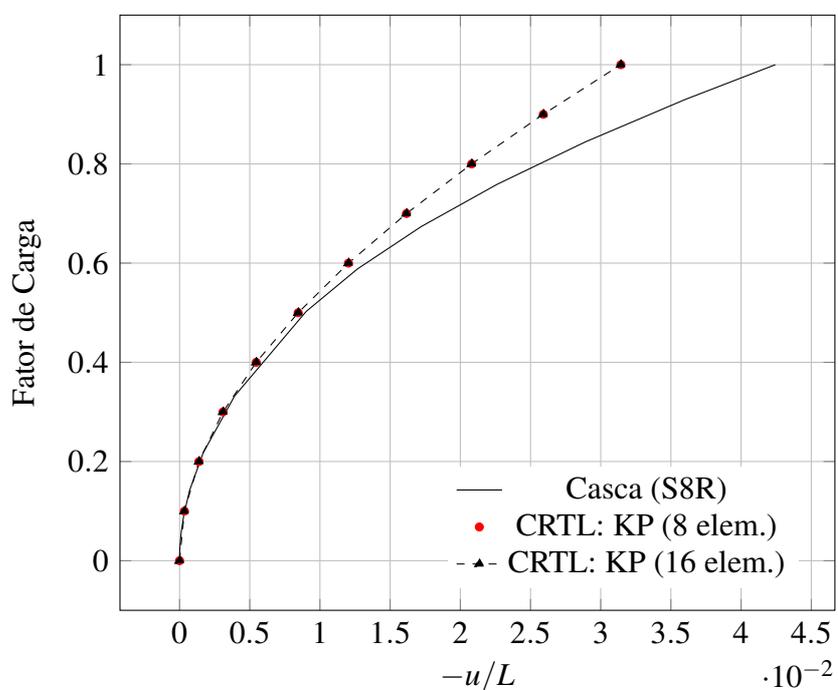
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 52 – Deslocamentos  $v$  para extremidade livre da viga:  $\theta = 45^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 53 – Deslocamentos  $u$  para extremidade livre da viga:  $\theta = 45^\circ$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como pode-se observar na Figura 51, Figura 52 e Figura 53, a resposta do modelo de elementos finitos de casca está mais flexível do que a resposta do elemento CRTL. Observa-

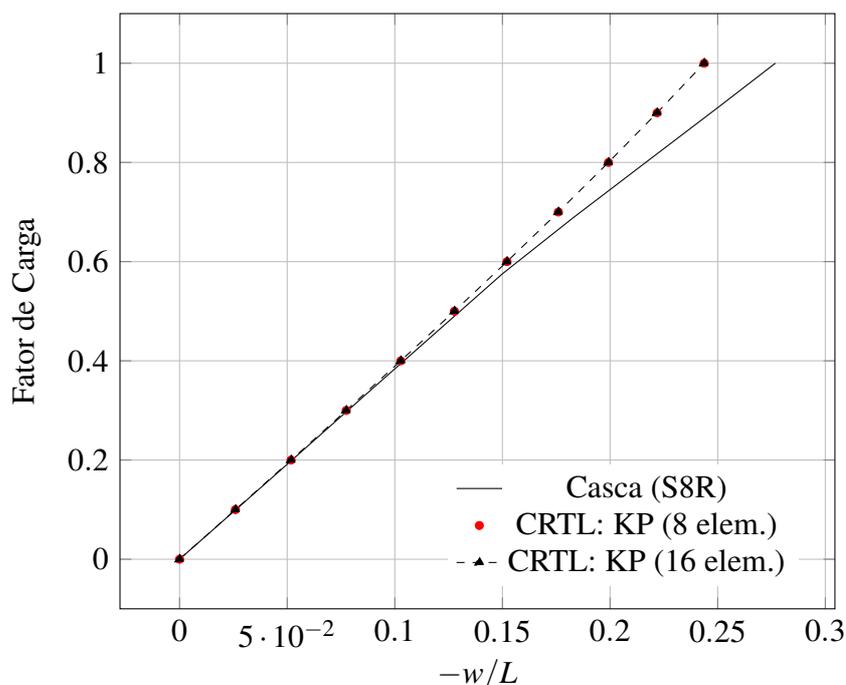
Tabela 20 – Comparação para viga caixão laminada com  $\theta = 45^\circ$ .

Fator de Carga	Casca			CRTL: KP (16 elem.)		
	$u$ (m)	$v$ (m)	$w$ (m)	$u$ (%)	$v$ (%)	$w$ (%)
0.1	-8.8055E-04	-2.1162E-04	-6.1054E-02	-2.49	-0.40	-1.50
0.2	-3.5109E-03	-8.4227E-04	-1.2187E-01	-2.80	-0.60	-1.66
0.3	-7.8575E-03	-1.8795E-03	-1.8223E-01	-3.32	-0.92	-1.93
0.4	-1.3866E-02	-3.3032E-03	-2.4191E-01	-4.05	-1.38	-2.32
0.5	-2.1464E-02	-5.0869E-03	-3.0070E-01	-5.32	-2.28	-3.00

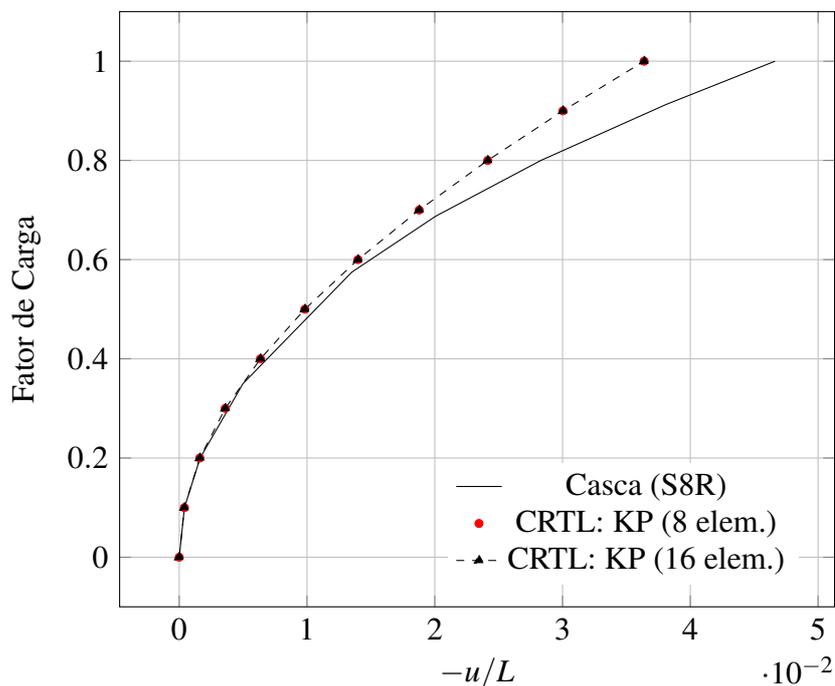
Fonte: Elaborado pelo autor.

se que há uma divergência entre as curvas por volta do fator de carga 0.5. Isso ocorreu devido ao fato do modelo de casca ter apresentado uma flambagem localizada, conforme apresentado nas figuras supracitadas. Desta forma, o modelo de casca perde rigidez a partir deste nível de carga e, portanto, fica mais flexível.

Por fim, as comparações entre o elemento CRTL com 8 e 16 elementos para o modelo com  $\theta = 90^\circ$  são apresentadas na Figura 54 e Figura 55. Como no caso do modelo anterior, os pontos dessas curvas de equilíbrio foram traçadas com o incremento automático do ABAQUS. A partir dessas curvas, pode-se observar ótima concordância entre os resultados até o fator de carga 0.6. Depois desse nível de carga, a estrutura apresentou flambagem localizada como ilustrado na Figura 56.

Figura 54 – Deslocamentos  $w$  para extremidade livre da viga:  $\theta = 90^\circ$ .

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 55 – Deslocamentos  $u$  para extremidade livre da viga:  $\theta = 90^\circ$ 

Fonte: Elaborado pelo autor.

Fixou-se o incremento de carga no ABAQUS em 0.1 e compararam-se as respostas na Tabela 21. Verifica-se claramente que a partir do nível de carga 6, a diferença relativa entre os dois modelos aumenta, indicando a influência da flambagem localizada na resposta.

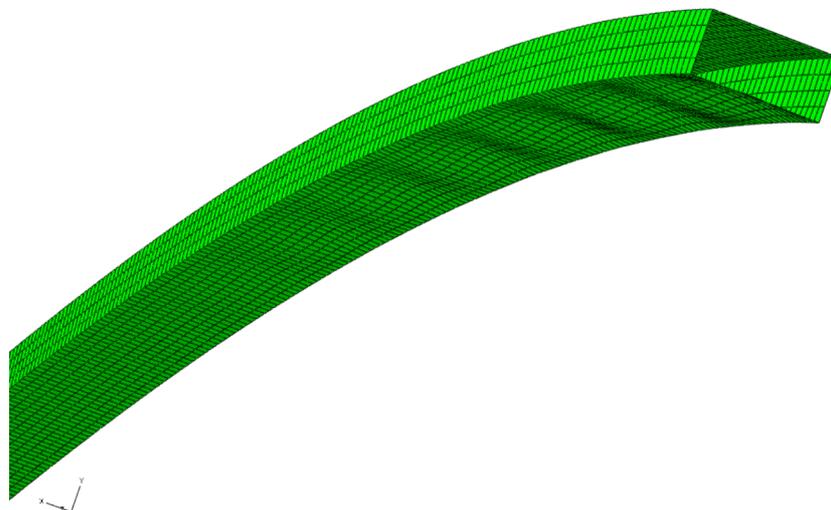
Tabela 21 – Comparação para viga caixão laminada com  $\theta = 90^\circ$ .

Incrementos	Casca		CRTL: KP (16 elem.)	
	$u$ (m)	$w$ (m)	$u$ (%)	$w$ (%)
1	-1.0404E-03	-6.6426E-02	-1.34	-0.76
2	-4.1555E-03	-1.3272E-01	-1.53	-0.86
3	-9.3274E-03	-1.9873E-01	-1.86	-1.03
4	-1.6529E-02	-2.6436E-01	-2.32	-1.27
5	-2.5746E-02	-3.2967E-01	-2.99	-1.63
6	-3.7651E-02	-3.9861E-01	-5.62*	-3.07*
7	-5.3101E-02	-4.7326E-01	-10.17*	-5.55*
8	-7.1905E-02	-5.5010E-01	-14.71*	-8.00*
9	-9.3786E-02	-6.2710E-01	-18.66*	-10.15*
10	-1.1844E-01	-7.0304E-01	-21.97*	-11.95*

\*Flambagem local.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 56 – Flambagem local próxima ao apoio.



Fonte: Elaborado pelo autor.

## 6.6 Viga caixão circular laminada em balanço

Neste exemplo, analisa-se uma viga caixão circular laminada em balanço apresentada por Saravia *et al.*,<sup>7</sup> conforme ilustrada na Figura 57. Cada mesa e alma possui espessura de 0.1 m com 4 lâminas de 0.025 m. A laminação utilizada para cada segmento da seção é [45/−45/−45/45]. As especificações do material são apresentadas na Tabela 22.

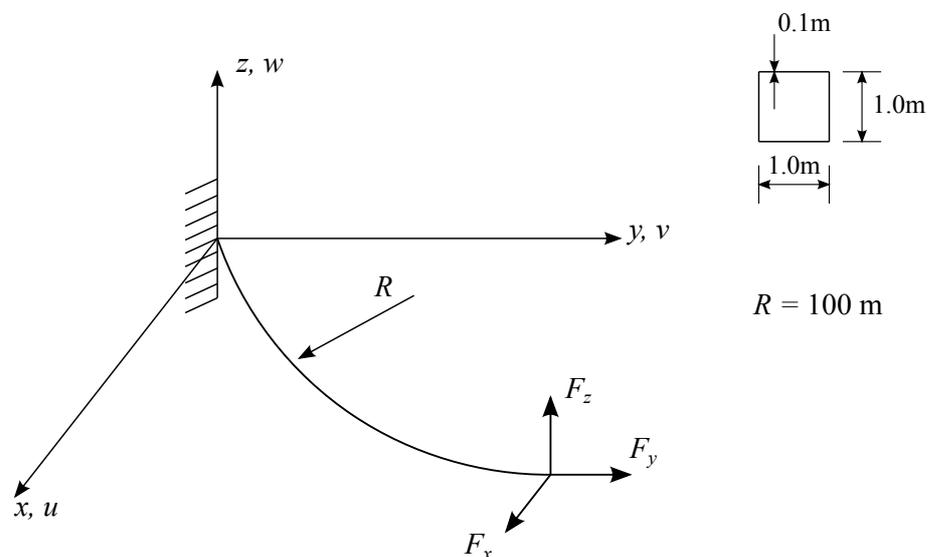
Tabela 22 – Propriedades do material para viga box circular laminada em balanço.<sup>7</sup>

$E_{11}$ (GPa)	$E_{22}$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$G_{23}$ (GPa)	$\nu_{12}$
45.0	12.0	5.5	5.5	0.3

Fonte: Elaborado pelo autor.

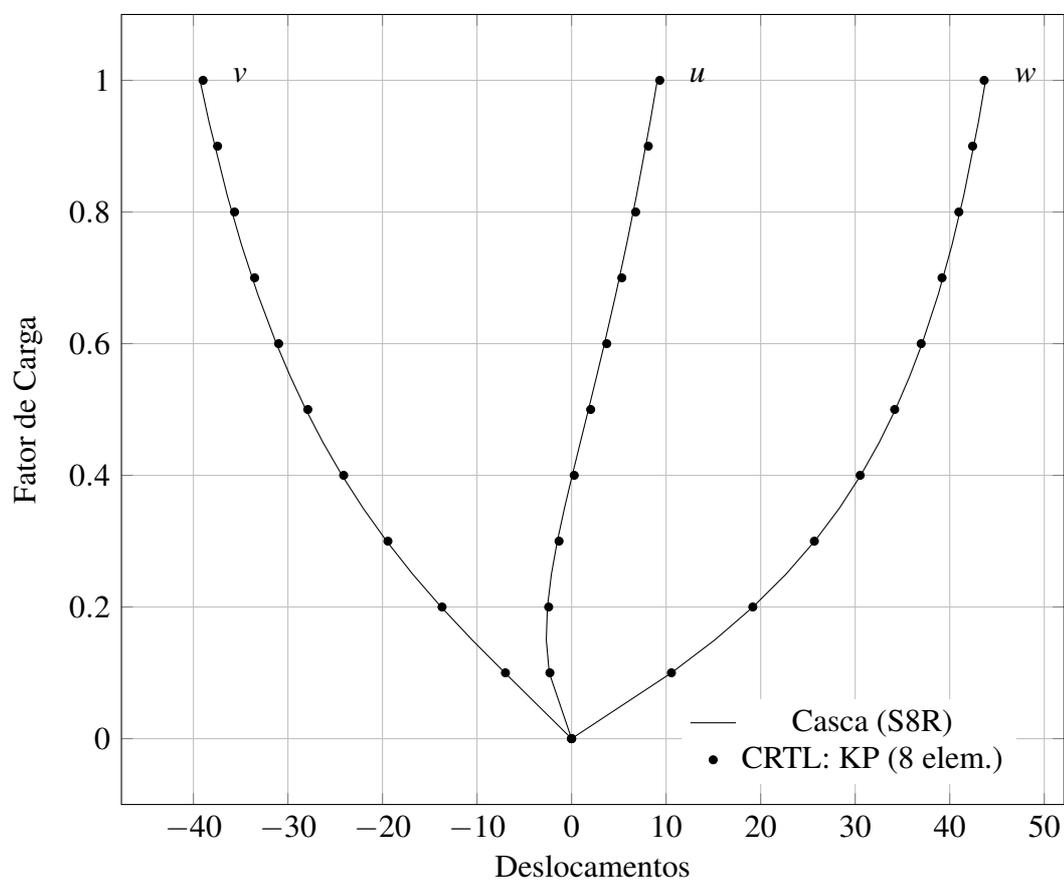
A viga está submetida ao carregamento combinado  $F_x = 4.0 \times 10^5$ ,  $F_y = -4.0 \times 10^5$ ,  $F_z = 8.0 \times 10^5$  dividido em 10 incrementos iguais. No FAST, a viga foi discretizada com oito elementos CRTL. Saravia *et al.*<sup>7</sup> analisaram esta viga no ABAQUS utilizando elementos finitos de casca S8R. Como os autores não disponibilizaram os pontos da curva carga deslocamento, desenvolveu-se um modelo de elementos finitos de casca no ABAQUS para comparação. Na Figura 58, encontram-se as curvas dos dois modelos, observando-se ótima concordância entre os resultados.

Figura 57 – Viga caixão circular em balanço com carregamento na extremidade livre.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 58 – Deslocamentos para extremidade livre da viga.



Fonte: Elaborado pelo autor.

## 7 CONCLUSÃO

Neste trabalho, foram desenvolvidos elementos finitos para análise não linear geométrica de vigas laminadas de parede fina sujeitas a grandes deslocamentos e rotações no espaço. O problema abordado possui duas grandes complexidades, uma relacionada ao tratamento dos acoplamentos entre esforços e deformações (relação constitutiva da viga laminada) e outra relacionada ao tratamento dos grandes deslocamentos e rotações no espaço. Devido a abordagem utilizada neste trabalho, o uso da formulação corrotacional independente do elemento, pode-se separar, explicitamente, ambas as complexidades do problema.

A primeira complexidade foi considerada através de dois elementos finitos, um baseado na teoria de pequenos deslocamentos (CRL) e outro na descrição Lagrangeana Total (CRTL), ambos consideram as hipóteses de flexão de Bernoulli-Euler-Navier e de torção de Saint Venant. O elemento CRTL foi desenvolvido a partir do tensor das deformações de Green-Lagrange, cujo grau de não linearidade foi inserido apenas na parcela de membrana. O elemento CRL foi desenvolvido como uma particularização do elemento CRTL.

Nos elementos locais, as propriedades seccionais da viga laminada são determinadas por meio da abordagem clássica do Método da Flexibilidade do Material (MFM) e nas formulações propostas por Massa e Barbero<sup>30</sup> (MB) e Kollar e Pluzsik<sup>31</sup> (KP). Neste assunto, a principal contribuição deste trabalho reside no fato das particularizações de tais abordagens para o caso da seção transversal circular, de forma a permitir a análise de *risers* de material compósito. A forma MB foi modificada para melhorar, mesmo que de forma indireta, a representação dos acoplamentos existentes no processo de obtenção da matriz de rigidez reduzida. Nessas abordagens, os efeitos do empenamento e da deformação de cisalhamento transversal da viga são desprezados. Nesta dissertação, as aplicações de tais abordagens ficaram restritas apenas ao caso de seção transversal fechada, contudo, ressalta-se que as três abordagens tratadas poderiam ser aplicadas no caso de seção transversal aberta, desde que o empenamento não seja importante.<sup>31,32</sup>

A metodologia MFM, a mais simples dentre as três abordagens de análise de vigas laminadas, conduziu a erros grandes em deslocamentos, mesmo para laminações simétricas em que se esperava erros menores. A partir desta teoria, obteve-se uma matriz constitutiva da viga laminada 4x4 em que desprezavam-se os acoplamentos entre esforços de deformações de viga, pois não há elementos fora da diagonal. Devido a baixa precisão dos resultados obtidos, tal metodologia não foi utilizada nos exemplos geometricamente não lineares.

A metodologia MB conduziu a bons resultados em deslocamentos para todos os esquemas de laminações e seções transversais, indicando que as propriedades equivalentes são computadas corretamente para laminações simétricas e não-simétricas; seções caixão e circular. Vale ressaltar que o processo de obtenção da matriz de rigidez reduzida do laminado (Acoplado ou Desacoplado) pouco influencia o valor das propriedades equivalentes. Assim como no MFM, obteve-se uma matriz diagonal 4x4 para relação constitutiva da viga laminada, resultando num

desacoplamento entre os esforços e deformações de viga.

Dentre as três metodologias utilizadas, a KP é a única que considera os possíveis acoplamentos entre esforços e deformações de viga, pois todos os termos da matriz constitutiva da viga laminada são retidos. A metodologia KP conduziu a bons resultados em deslocamentos para todos os esquemas de laminações e seções transversais, salvo para alguns modelos em que os deslocamentos secundários apresentaram erros maiores. Para o caso da seção circular, discretizou-se a seção com segmentos retos de pequeno comprimento.

A segunda complexidade mencionada foi considerada por meio da abordagem corrotacional independente do elemento. Tal abordagem foi empregada nos moldes do que é apresentado por Monteiro.<sup>33</sup> Um tratamento matemático não trivial, partindo do conceito do tensor das rotações, é realizado para o tratamento das grandes rotações no espaço. Uma vez inserida a não linearidade geométrica nas matrizes de transformação, tem-se um leque de opções para o uso local de diferentes tipos de elementos. No presente trabalho, os elementos CRL e CRTL foram empregados no âmbito local da formulação.

Desta forma, pode-se afirmar que a grande vantagem desta abordagem está relacionado ao fato de que, uma vez inserida a não linearidade geométrica nas matrizes de transformação da abordagem corrotacional, pode-se separar explicitamente o problema dos acoplamento entre esforços e deformações de vigas laminadas do problema das grandes rotações no espaço.

Em função dos exemplos de estruturas isotrópicas sujeitas a grandes rotações, pode-se concluir que a formulação dos exemplos CRL e CRTL e suas implementações no FAST apresentaram, de forma geral, resultados com grande concordância em relação aos da literatura. Pode-se concluir também que o elemento CRTL é mais eficiente do que o CRL no que tange à capacidade de apresentar uma boa resposta com uma malha menos refinada. Portanto, para a análise de estruturas de grande porte, recomenda-se o uso do elemento CRTL, uma vez que este elemento permite utilizar malhas menos refinadas, reduzindo o esforço computacional.

Em relação aos exemplos geometricamente não lineares de estruturas laminadas, pode-se concluir que os elementos CRL e CRTL apresentaram ótima concordância com modelos de elementos finitos de casca, ocorrendo apenas pequenas discrepâncias em problemas em que fenômenos típicos de casca (por exemplo, como flambagem localizada e ovalização da seção transversal) possuem grande influência na resposta. Ressalta-se que tais fenômenos surgiram para níveis elevados de carga, onde a estrutura já apresentava grandes deslocamentos e rotações. Nestes exemplos laminados, pode-se observar também a influência da matriz constitutiva  $C_v$  nas respostas não lineares, uma vez  $C_v$  bem formulada, os resultados obtidos foram muito bons.

## 7.1 Sugestões para trabalhos futuros

O assunto foi bastante explorado e resultou no estudo de uma diversidade de tópicos cujas relações entre si aumentaram com o evolução da pesquisa. Desta forma, apresentam-se

algumas sugestões para futuras linhas de investigação, a fim de abordar aspectos não estudados na presente dissertação:

- a) Efeitos da não linearidade do material.
- b) Vigas de seção aberta.
- c) Efeitos devido ao empenamento.
- d) Efeitos devido à deformação de cisalhamento transversal.
- e) Análise não linear geométrica de cascas laminadas com o uso da abordagem corrotacional.
- f) Análise dinâmica com ênfase em *risers* de material compósito.

## REFERÊNCIAS

- 1 SAGGAR, P. **Experimental study of laminated composite tubes under bending**. 2007. 76 f. Dissertação (Mestrado em Materials Science and Engineering) – University of Texas at Arlington, 2007.
- 2 DANIEL, I. M.; ISHAI, O. **Engineering mechanics of composite materials**. 2. ed. Oxford University, 2006.
- 3 STEMPLE, A. D.; LEE, S. W. A finite element model for composite beams undergoing large deflection with arbitrary cross-sectional warping. **Int. J. Numer. Methods. Eng.**, v. 9, n. 28, p. 2143–2160, 1989.
- 4 VO, T. P.; LEE, J. Geometrically nonlinear analysis of thin walled composite box beams. **Comput. Struct.**, v. 87, p. 236–245, 2009.
- 5 VO, T. P.; LEE, J. Geometrically nonlinear analysis of thin walled composite box beams using shear-deformable beam theory. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 52, p. 65–74, 2010.
- 6 VANEGAS, J. D.; PATINO, I. D. Linear and non-linear finite element analysis of shear-corrected composites box beams. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 10, p. 647–673, 2013.
- 7 SARAVIA, C. M.; MACHADO, S. P.; CORTINEZ, V. H. A consistent total lagrangian finite element for composite closed section thin walled beams. **Thin-Walled Struct.**, v. 52, p. 102–116, 2012.
- 8 JONES, R. M. **Mechanics of composite materials**. 2. ed. Philadelphia: Taylor & Francis, 1999.
- 9 REDDY, J. N. **Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis**. 2. ed. CRC Press, 2004.
- 10 ROCHA, I. B. C. M. **Análise e otimização de cascas laminadas considerando não-linearidade geométrica e falha progressiva**. 2013. 157 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Universidade Federal do Ceará, 2013.
- 11 SILVA, R. F. **Otimização de risers de materiais compósitos**. 2012. 96 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Universidade Federal do Ceará, 2012.
- 12 SILVA, R. F.; TEÓFILO, F. A. F.; JR., E. P.; MELO, A. M. C.; HOLANDA, A. S. Optimization of composite catenary risers. **Marine Structures**, v. 33, p. 1–20, 2013.
- 13 TEÓFILO, F. A. F. **Análise de projeto de risers compósitos em catenária**. 2003. 154 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Ceará, 2003.
- 14 SPARKS, C. P. **Fundamentals of marine risers mechanics: basic principles and simplified analysis**. 1. ed. PennWell Books, 2007.
- 15 VOLETI, S. R.; CHANDRA, N.; MILLER, J. R. Global-local analysis of large-scale com-

- posite structures using finite element method. **Comput. Struct.**, v. 58, p. 453–464, 1996.
- 16 HARYADI, S. G.; KAPANIA, R. K.; HAFTKA, R. T. Global-local analysis of composite plates with cracks. **Composites**, v. 29, p. 271–276, 1998.
  - 17 ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method: solid mechanics vol. 2.** 5. ed. Butterworth-Heinemann, 2000.
  - 18 WITZ, J. A. A case study in the cross-section analysis of flexible risers. **Marine Structures**, v. 9, p. 885–904, 1997.
  - 19 KIM, W. K. **Composite production riser assessment.** 2007. 157 f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Texas, A & M University, USA, 2007.
  - 20 BATHE, K. J. **Finite element procedures.** 6. ed. Prentice Hall, 1996.
  - 21 BATHE, K. J.; BOLOURCHI, S. Large displacement analysis of three-dimensional beam structures. **Int. J. Numer. Methods. Eng.**, v. 14, p. 961–986, 1979.
  - 22 BHASKAR, K.; LIBRESCU, L. A geometrically non-linear theory for laminated anisotropic thin-walled beams. **Int. J. Engng. Sci.**, v. 33, n. 9, p. 1331–1344, 1995.
  - 23 FRATERNALI, F.; FEO, L. On a moderate rotation theory of thin-walled composite beams. **Composites: Part B**, v. 31, p. 141–158, 2000.
  - 24 CARDOSO, J. E. B.; BENEDITO, N. M. B.; VALIDO, A. J. J. Finite element analysis of thin-walled composite laminated beams with geometrically nonlinear behavior including warping deformation. **Thin-Walled Struct.**, v. 47, p. 1363–1372, 2009.
  - 25 OMIDVAR, B.; GHORBANPOOR, A. A nonlinear FE solution for thin-walled open-section composite beams. **J. Struct. Eng.**, v. 11, p. 1369–1378, 1996.
  - 26 SARAVIA, C. M.; MACHADO, S. P.; CORTINEZ, V. H. A geometrically exact nonlinear finite element for composite closed section thin-walled beams. **Comput. Struct.**, v. 89, p. 2337–2351, 2011.
  - 27 CRISFIELD, M. A.; JELENIC, G. Objectivity of strain measures in the geometrically exact three-dimensional beam theory and its finite-element implementation. **Royal Society London**, v. 455, p. 1125–1147, 1998.
  - 28 MACHADO, S. P.; CORTÍNEZ, V. H. Non-linear model for stability of thin-walled composite beams with shear deformation. **Thin-Walled Struct.**, v. 43, p. 1615–1645, 2005.
  - 29 MENDONÇA, P. T. R. **Materiais compósitos e estruturas sanduíches: projeto e análise.** 1. ed. Barueri: Manole Ltda, 2005.
  - 30 MASSA, J. C.; BARBERO, E. J. A strength of materials formulation for thin walled composite beams with torsion. **Journal of Composite Materials**, v. 32, p. 1560–1594, 1998.
  - 31 KOLLAR, L. P.; PLUZSIK, A. Analysis of thin walled composite beams with arbitrary layup. **Journal of Reinforced Plastics and Composites**, v. 21, p. 1423–1465, 2002.

- 32 MORORO, L. A. T.; MELO, A. M. C.; PARENTE, E. J. Análise via elementos finitos de vigas laminadas de parede fina. **Congresso Ibero Latino Americano em Métodos Computacionais em Engenharia (CILAMCE)**, v. 32, p. 1–17, 2011.
- 33 MONTEIRO, F. A. C. **Uma formulação co-rotacional geral: Aplicação a pórticos espaciais**. 2004. 122 f. Dissertação (Mestrado em Mecânica dos Sólidos e Estruturas) – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2004.
- 34 CRISFIELD, M. A.; MOITA, G. F. A unified co-rotational framework for solids, shells and beams. **Int. J. Sol. Struct.**, v. 33, p. 2969–2992, 1996.
- 35 PACOSTE, C. Co-rotational flat facet triangular elementos for shell instability analyses. **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.**, v. 156, p. 75–110, 1998.
- 36 PACOSTE, C.; ERIKSSON, A. Beam elements in instability problems. **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.**, v. 144, p. 163–197, 1997.
- 37 BATTINI, J. M.; PACOSTE, C. Co-rotational beam elements with warpings effects in instability problems. **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.**, v. 191, p. 1755–1789, 2002.
- 38 ARGYRIS, J. An excursion into large rotation. **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.**, v. 32, p. 85–155, 1982.
- 39 SIMULIA. Abaqus/standard user's manual - version 6.12, 2012.
- 40 COOK, R.; MALKUS, D.; PLESHA, M.; WITT, R. J. **Concepts and applications of finite element analysis**. 4. ed. John Wiley & Sons, 2002.
- 41 VOLOVOI, V. V.; HODGES, D. H.; CESNIK, C. E. S.; POPESCU, B. Assessment of beam modeling methods for rotor blade applications. **Mathematical and Computer Modeling**, v. 33, p. 1099–1112, 2001.
- 42 LEE, J.; LEE, S. Flexural-torsional behavior of thin-walled composite beams. **Thin-Walled Struct.**, v. 42, p. 1293–1305, 2004.
- 43 VO, T. P.; LEE, J. Flexural-torsional behavior of thin-walled closed-section composite box beams. **Engineering Structures**, v. 29, p. 1774–1782, 2007.
- 44 VO, T. P.; LEE, J. Geometrically nonlinear analysis of thin-walled open-section composite beams. **Comput. Struct.**, v. 88, p. 347–356, 2010.
- 45 SHEIKH, A. H.; THOMSEN, O. T. An efficient beam element for the analysis of laminated composite beams of thin-walled open and closed cross sections. **Composites Science and Technology**, v. 68, p. 2273–2281, 2008.
- 46 VO, T. P.; LEE, J. Flexural-torsional behavior of thin-walled closed-section composite box beams using shear-deformable beam theory. **Engineering Structures**, v. 30, p. 1958–1968, 2008.
- 47 VO, T. P.; LEE, J. Flexural-torsional behavior of thin-walled composite space frames. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 51, p. 837–845, 2009.

- 48 SALIM, H. A.; DAVALOS, J. F. Torsion of open and closed thin-walled laminated composite section. **Journal of Composite Materials**, v. 39, n. 6, p. 497–524, 2005.
- 49 VO, T. P.; LEE, J. Geometrical nonlinear analysis of thin-walled composite beams using finite element method based on first order shear deformation theory. **Archives of Applied Mechanics**, v. 81, p. 419–435, 2011.
- 50 LOPEZ-ANIDO, R.; DAVALOS, J. F.; BARBERO, E. J. Experimental evaluation of stiffness of laminated composite beam elements under flexure. **Journal of Reinforced Plastics and Composites**, v. 14, p. 349–361, 1995.
- 51 CARDOSO, J. B.; SOUSA, L. G.; CASTRO, J. A.; VALIDO, A. J. Optimal design of laminated composite beam structures. **Struct. Multidisc. Optim.**, v. 24, p. 205–211, 2002.
- 52 CARDOSO, J. B.; VALIDO, A. J. Cross-section optimal design of composite laminated thin-walled beams. **Comput. Struct.**, v. 89, p. 1069–1076, 2011.
- 53 KIM, N.; K. SHIN, D.; KIM, M. Exact solutions for thin-walled open-section composite beams with arbitrary lamination subject to torsional moment. **Thin-Walled Struct.**, v. 44, p. 638–654, 2006.
- 54 PLUZSIK, A.; KOLLAR, L. P. Torsion of closed section, orthotropic, thin-walled beams. **Int. J. Sol. Struct.**, v. 43, p. 5307–5336, 2006.
- 55 CESNIK, C. E. S.; HODGES, D. H. Vabs: A new concept for composite rotor blade cross-sectional modeling. **J. Am. Helicopter Soc.**, v. 42, n. 1, p. 27–38, 1997.
- 56 BERDICHEVSKY, V. L. Variational-asymptotic method of constructing a theory of shell. **P. M. M.**, v. 43, n. 4, p. 664–87, 1979.
- 57 PLUZSIK, A.; KOLLAR, L. P. Effects of shear deformation and restrained warping on the displacement of composite beams. **Journal of Reinforced Plastics and Composites**, v. 21, p. 1517–1541, 2002.
- 58 BARBERO, E. J. **Introduction to composite materials design**. CRC Press, 1998.
- 59 MORORÓ, L. A. T.; MELO, A. M. C.; PARENTE, E. J.; HOLANDA, A. S.; ALMEIDA, D. C. Global analysis of laminated tubes. **Congresso Ibero Latino Americano em Métodos Computacionais em Engenharia (CILAMCE)**, v. 31, p. 1367–1383, 2010.
- 60 ALMEIDA, F. S.; AWRUCH, A. M. Corotational nonlinear dynamic analysis of laminated composite shells. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 47, p. 1131–1145, 2011.
- 61 RANKIN, C. C.; BROGAN, F. A. An element independent corotational procedure for the treatment of large rotations. **Journal of Pressure Vessel Technology**, v. 108, p. 165–174, 1986.
- 62 RANKIN, C. C.; NOUR-OMID, B. The use of projectors to improve finite element performance. **Comput. Struct.**, v. 30, p. 257–267, 1988.
- 63 NOUR-OMID, B.; RANKIN, C. C. Finite rotation analysis and consistent linearization

- using projectors. **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.**, v. 93, p. 353–384, 1991.
- 64 CRISFIELD, M. A. A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements. **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.**, v. 81, p. 131–150, 1990.
- 65 CRISFIELD, M. A. **Non-linear finite element analysis of solids and structures: advanced topics**. 4. ed. John Wiley & Sons, 1997.
- 66 BATTINI, J. M. **Co-rotational beam elements in instability problems**. 2002. 196 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 2002.
- 67 FELIPPA, C. A.; HAUGEN, B. A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. theory. **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.**, v. 194, p. 2285–2335, 2005.
- 68 MOREIRA, M. L. T. **Parametrização das rotações em teorias de barras e cascas**. 2009. 190 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas e Geotécnica) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2009.
- 69 MALVERN, L. E. **Introduction to the mechanics of a continuous medium**. 1. ed. Prentice-Hall, Inc., 1969.
- 70 SPRING, K. W. Euler parameters and the use of quaternion algebra in the manipulation of finite rotation: A review. **Mechanism and Machine Theory**, v. 21, n. 5, p. 365–373, 1986.
- 71 IBRAHIMBEGOVIC, A. On the choice of finite rotation parameters. **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.**, v. 149, p. 49–71, 1997.
- 72 SPURRIER, R. A. Comment on singularity-free extraction of quaternion from a direct-cosine matrix. **J. Spacecraft**, v. 15, p. 255, 1978.
- 73 MEIRELES-NETO, M. **Estabilidade de edifícios de concreto pré-moldado com ligações semirrígidas**. 2012. 112 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Universidade Federal do Ceará, 2012.
- 74 MENIN, R. C. G. **Aplicação da descrição cinemática co-rotacional na análise não-linear geométrica de estruturas discretizadas por elementos finitos de treliças, vigas e cascas**. 2006. 190 f. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil) – Universidade de Brasília, 2006.
- 75 CRISFIELD, M. A. **Non-linear finite element analysis of solids and structures: essentials**. 1. ed. John Wiley & Sons, 1991.
- 76 MACGUIRE, W.; GALLAGHER, R. H.; ZIEMIAN, R. D. **Matrix structural analysis**. 2. ed. John Wiley & Sons, Inc., 2000.
- 77 MATTIASSON, K. Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals. **Int. J. Numer. Methods. Eng.**, v. 17, p. 145–153, 1981.

- 78 SIMO, J. C.; VU-QUOC, L. A three-dimensional finite strain rod model. part 2: Computational aspects. **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.**, v. 58, p. 79–116, 1986.

## A ANEXO - CÓDIGO MAPLE PARA O ELEMENTO LOCAL CRTL

```

> restart;
> with(linalg) : with(CodeGeneration) :
> Polinomios de Lagrange :
> N1 := (L - x)/L;
> N2 := x/L;
> Polinomios de Hermite :
> H1 := 1 - 3*(x/L)^2 + 2*(x/L)^3;
> H2 := x - 2*x^2/L + x^3/L^2;
> H3 := 3*(x/L)^2 - 2*(x/L)^3;
> H4 := -x^2/L + x^3/L^2;
> Derivadas do Polinomios :
> N1x := diff(N1, x); N2x := diff(N2, x);
> H1x := diff(H1, x); H2x := diff(H2, x); H3x := diff(H3, x); H4x := diff(H4, x);
> H1xx := diff(H1, x, x); H2xx := diff(H2, x, x); H3xx := diff(H3, x, x); H4xx := diff(H4, x, x);
> Vetor nodal :
> ue := matrix(12, 1, [u[1], u[2], u[3], u[4], u[5], u[6], u[7], u[8], u[9], u[10], u[11], u[12]]);
> Matrizes B :
> B0 := matrix(1, 12, [N1x, 0, 0, 0, 0, 0, N2x, 0, 0, 0, 0, 0]);
> Bbvx := matrix(1, 12, [0, H1x, 0, 0, 0, 0, H2x, 0, H3x, 0, 0, 0, H4x]);
> Bbvxx := matrix(1, 12, [0, H1xx, 0, 0, 0, 0, H2xx, 0, H3xx, 0, 0, 0, H4xx]);
> Bbwx := matrix(1, 12, [0, 0, H1x, 0, -H2x, 0, 0, 0, H3x, 0, -H4x, 0]);
> Bbwxx := matrix(1, 12, [0, 0, H1xx, 0, -H2xx, 0, 0, 0, H3xx, 0, -H4xx, 0]);
> Bθx := matrix(1, 12, [0, 0, 0, N1x, 0, 0, 0, 0, 0, N2x, 0, 0]);
> Matriz A :
> BbvxtBbvx := evalm(transpose(Bbvx)&*Bbvx);
> Av := evalm(map(int, BbvxtBbvx, x = 0..L)/L);
> BbwxtBbwx := evalm(transpose(Bbwx)&*Bbwx); > Aw := evalm(map(int, BbwxtBbwx, x =
0..L)/L);
> BθxtBθx := evalm(transpose(Bθx)&*Bθx);
> Aθ := evalm(Ip*map(int, BθxtBθx, x = 0..L)/(L*A));
> Matriz Bm :
> BLv := evalm(transpose(ue)&*Av);
> BLw := evalm(transpose(ue)&*Aw);
> BLθ := evalm(transpose(ue)&*Aθ);
> BL := evalm(BLv + BLw + BLθ);
> Bm := evalm(B0 + (1/2)*BL);
> Bbm := evalm(B0 + BL);
> Matriz B :
> B := matrix(4, 12, [[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]);
> for j to 12 do
B[1, j] := Bbm[1, j];
B[2, j] := Bbvxx[1, j];
B[3, j] := Bbwxx[1, j];
B[4, j] := Bθx[1, j];
end do;

```

```

> B1 := matrix(4, 12, [[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]);
> for j to 12 do
B1[1, j] := Bm[1, j];
B1[2, j] := Bbvxx[1, j];
B1[3, j] := Bbwxx[1, j];
B1[4, j] := Bθx[1, j];
end do;
> Matriz C diagonal eC cheia (full) :
> Cdiag := matrix(4, 4, [[EA, 0, 0, 0], [0, EIz, 0, 0], [0, 0, EIy, 0], [0, 0, 0, GJ]]);
> Cfull := matrix(4, 4, [[C11, C12, C13, C14], [C21, C22, C23, C24], [C31, C32, C33, C34], [C41,
C42, C43, C44]]);
> Matriz de Rigidez e Vetor de Forças Interna para Cfull :
> BtCfullB1ue := evalm(transpose(B)&*Cfull&*B1&*ue);
> glfull := map(int, BtCfullB1ue, x = 0..L);
> C(glfull, optimize, declare = [glfull :: numeric, L :: numeric, C11 :: numeric, C12 :: numeric, C13 ::
numeric, C14 :: numeric]);
> BtCfullB := evalm(transpose(B)&*Cfull&*B);
> kfull := map(int, BtCfullB, x = 0..L);
> C(kfull, optimize, declare = [kfull :: numeric, L :: numeric, C11 :: numeric, C12 :: numeric, C13 ::
numeric, C14 :: numeric]);
> At := evalm(transpose(Av + Aw + Aθ));
> Ndx := evalm(Cfull[1, 1]&*Bm&*ue + Cfull[1, 2]&*Bbvxx&*ue + Cfull[1, 3]&*Bbwxx&*
ue + Cfull[1, 4]&*Bθx&*ue);
> Nfull := map(int, Ndx, x = 0..L);
> C(Nfull, optimize, declare = [Nfull :: numeric, L :: numeric, C11 :: numeric, C12 :: numeric, C13 ::
numeric, C14 :: numeric]);
> Matriz de Rigidez e Vetor de Força Interna :
> BtCB := evalm(transpose(B)&*Cdiag&*B);
> kdiag := map(int, BtCB, x = 0..L);
> C(kdiag, optimize, declare = [kdiag :: numeric, L :: numeric, EA :: numeric, EIz :: numeric, EIy ::
numeric, GJ :: numeric]);
> ktdiag := evalm(kdiag + At * N * L);
> BtCB1ue := evalm(transpose(B)&*Cdiag&*B1&*ue);
> gl := map(int, BtCB1ue, x = 0..L);
> C(gl, optimize, declare = [gl :: numeric, L :: numeric, EA :: numeric, EIz :: numeric, EIy ::
numeric, GJ :: numeric]);

```

## B ANEXO - CÓDIGO MAPLE PARA O ELEMENTO LOCAL CRL

```

> restart;
> with(linalg);with(CodeGeneration);
> Polinomios de Lagrange;
> N1 := (l - x)/l;
> N2 := x/l;
> Polinomios de Hermite;
> H1 := 1 - 3*(x/l)2 + 2*(x/l)3;
> H2 := x - 2*x2/l + x3/l2;
> H3 := 3*(x/l)2 - 2*(x/l)3;
> H4 := -x2/l + x3/l2;
> Derivada dos polinomios;
> N1x := diff(N1, x); N2x := diff(N2, x);
> H1xx := diff(H1, x, x); H2xx := diff(H2, x, x); H3xx := diff(H3, x, x); H4xx := diff(H4, x, x);
> Matrix B ::
> B := matrix(4, 12, [[N1x, 0, 0, 0, 0, 0, N2x, 0, 0, 0, 0, 0], [0, H1xx, 0, 0, 0, 0, H2xx, 0, H3xx, 0,
0, 0, H4xx], [0, 0, H1xx, 0, -H2xx, 0, 0, 0, H3xx, 0, -H4xx, 0], [0, 0, 0, N1x, 0, 0, 0, 0, 0, N2x, 0, 0]]);
> Matriz C diagonal e C cheia (full);
> Cdiag := matrix(4, 4, [[EA, 0, 0, 0], [0, EIZ, 0, 0], [0, 0, EIX, 0], [0, 0, 0, GJ]]);
> Cfull := matrix(4, 4, [[C11, C12, C13, C14], [C21, C22, C23, C24], [C31, C32, C33, C34], [C41,
C42, C43, C44]]);
> Matriz de Rigidez;
> BtCB := evalm(transpose(B) & * Cdiag & * B);
> kdiag := map(int, BtCB, x = 0..l);
> BtCB := evalm(transpose(B) & * Cfull & * B);
> kfull := map(int, BtCB, x = 0..l);
> C(kdiag, optimize, declare = [l :: numeric, GJ :: numeric]);
> C(kfull, optimize, declare = [l :: numeric, C11 :: numeric, C12 :: numeric]);

```