UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - UFC
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Francisco de Assis Benjamim Filho

Desigualdades Isoperimétricas para Integrais de Curvatura em Domínios k-Convexos Estrelados

Fortaleza
2011

Francisco de Assis Benjamim Filho

Desigualdades Isoperimétricas para Integrais de Curvatura em Domínios k-Convexos Estrelados

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentação: Geometria Diferencial.
Orientador: Prof. Dr. Levi Lopes de Lima.

Fortaleza
2011

Benjamim Filho, Francisco de Assis
B416d Desigualdades isoperimétricas para integrais de curvatura em domínios k-convexos estrelados. -Fortaleza, 2011.
61 f.

Orientador: Prof. Dr. Levi Lopes de Lima.
Área de concentração: Geometria Diferencial
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Fortaleza, 2011.

1. Geometria Diferencial. I. Lima, Levi Lopes de (Orient.)

CDD 516.36

Folha de aprovação

Dedico este trabalho aos meus pais Francisco de Assis Benjamim e Maria Anita Benjamim por todo o apoio e por me ensinarem os princípios básicos de vivência, tolerância e persistência, mais do que suficientes para construir todo o resto.

Se o Senhor não edificar a casa, em vão trabalham os que edificam; se o Senhor não guardar a cidade, em vão vigia a sentinela. Inútil vos será levantar de madrugada, repousar tarde, comer o pão de dores, pois assim dá ele aos seus amados o sono.

Salmo 127,1s.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por todos os dons que me deu e pelas pessoas que tenho ao meu redor.

Agradeço aos meus irmãos: José Newton Benjamim, Maria Elizabete Benjamim e Gabriel Benjamim do Nascimento Neto, pelo apoio, e aos que mesmo estando ainda mais distantes não esquecem de mim: Antônio Ailton Benjamim, Cícera Maria Benjamim Pinheiro e Francisco Adailton Benjamim.

Agradeço a Maria Rosely Evangelista Silva pela paciência e compreensão nas horas mais necessárias e difíceis em que mesmo distante esteve sempre do meu lado.

Agradeço ao professor Mário de Assis oliveira pelo incentivo que me deu a continuar meus estudos.

Agradeço aos mestrandos e doutorandos da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará com quem cursei diversas disciplinas e passei várias e exaustivas horas resolvendo listas de exercícios: Disson Soares dos Prazeres, Adriano Alves de Medeiros, João Vítor da Silva, Antônio Wilson Rodrigues da Cunha, e ainda a Cícero Tiarlos Nogueira Cruz, Marcelo Dário dos Santos Amaral, Isaías Pereira de Jesus, José Ederson Melo Braga, Rondinelle Marcolino Batista, Francisco Pereira Chaves, Maria de Fátima Cruz Tavares, Priscila Rodrigues de Alcântara, Júnio Moreira de Alencar, Maria Wanderlândia de Lavor Coriolano, Jardênia Sobrinho Goes, Renivaldo Sodré de Sena, Raquel Costa da Silva, Elaine Sampaio de Sousa Carlos, Rafael Jorge Pontes Diógenes, Leonardo Tavares de Oliveira, Francisco Calvi da Cruz Júnior, Maria Selene Bezerra de Carvalho, Leo Ivo da Silva Souza.

Agadeço a José Loéster Sá Carneiro, meu colega de gabinete, pelas conversas frutíferas, pela paciência e por saber respeitar as diferenças que existem entre as pessoas.

Agradeço aqueles de quem não fui colega de turma mas que em algum momento me ajudaram: João Francisco da Silva Filho, Flávio França Cruz, José Nazareno Vieira Gomes, Luiz Antônio Caetano Monte, Wesley Marinho Lozório, Damião Junio Gonçalves Araújo.

Agradeço aos colegas que moram ou moraram comigo: Robério Alexandre Coelho, João Nunes de Araújo Neto (João Nunes BARRA), ao futuro engenheiro eletricista Upá Gomes (êta má), José Deibsom da Silva, Filipe Mendonça de Lima, Leon Denis da Silva pelas conversas descontraídas e por me tolerarem durante tanto tempo e ainda aquele que considero a encarnação da superação: Cícero Fagner da Silva.

Agradeço à secretária da Pós-Graduação em Matemática da UFC, Andrea Costa Dantas, pela disposição e seriedade com que encara seu trabalho, sempre pronta para resolver todos os assuntos de natureza burocrática dos quais, infelizmente, não podemos nos esquivar.

Agradeço a Rocilda Maria Cavalcante Sales pela simpatia na correção dos erros bibliográficos deste trabalho.

Agradeço aos professores do Mestrado/Doutorado em Matemática da UFC: Antônio Caminha Muniz Neto, Eduardo Vasconcelos Oliveira Teixeira, Abdênago Alves de Barros, Diego Ribeiro Moreira e Francesco Mercuri com quem fiz cursos de altíssimo nível de qualidade.

Agradeço a José Fábio Bezerra Montenegro por fazer parte da banca.

Agradeço a Juscelino Pereira Silva pela contribuição crucial que teve em minha formação sempre me incentivando e disposto a me ajudar.

Agradeço a Levi Lopes de Lima pela orientação.

Agradeço ao CNPQ pelo apoio financeiro.

Resumo

Baseados nos trabalhos de Gerhardt e Urbas [12], [36], provamos um resultado de convergência global e determinamos precisamente o comportamento assintótico de soluções de um fluxo geométrico que descreve a evolução de hipersuperfícies estreladas e k-convexas por funções das curvaturas principais. Como aplicação, e seguindo o argumento de Guan e Li [16], utilizamos um caso particular deste resultado de convergência para generalizar a clássica desigualdade de Alexandrov-Fenchel para domínios estrelados e k-convexos.

Palavras-chave: Desigualdade de Alexandrov-Fenchel, estrelado, k-convexo.

Abstract

Based on the work of Gerhardt and Urbas [12], [36], we prove a global convergence result and precisely determine the asymptotic behavior of solutions of a geometric flow describing the evolution of starshaped, k-convex hypersurfaces according to certain functions of the principal curvatures. As an application, and following the argument of Guan and Li [16], we use a special case of this convergence result to generalize the classical Alexandrov-Fenchel inequality for domains which are starshaped and k-convex.

Key words: Alexandrov-Fenchel inequality, starshaped, k-convex.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A desigualdade isoperimétrica clássica afirma que se L é o comprimento de uma curva plana simples $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ então vale

$$L^2 \geqslant 4\pi|\Omega|,$$

onde $|\Omega|$ é a área da região Ω limitada por Γ. Mais ainda, a igualdade acontece se e somente se γ é um círculo.

Esta desigualdade notável tem sido bastante estudada e generalizada ao longo dos tempos. Por exemplo, se $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é um domínio limitado com fronteira suave $\Sigma = \partial\Omega$ então vale

$$\mathcal{A}(\Sigma) \geqslant c_n |\Omega|^{\frac{n}{n+1}}, \tag{1.1}$$

onde $\mathcal{A}(\Sigma)$ é área de Σ, $|\Omega|$ é o volume de Ω e $c_n > 0$ é uma constante que depende somente de n. Novamente, esta desigualdade é ótima no sentido que a igualdade acontece se e somente se Ω é uma bola aberta B^{n+1} (e portanto, Σ é uma esfera S^n). Note que isto implica em particular que

$$c_n = \frac{\mathcal{A}(S^n)}{|B^{n+1}|^{\frac{n}{n+1}}}.$$

Uma maneira equivalente de formular (1.1) é considerar o *quociente isoperimétrico*

$$\Omega \mapsto J(\Omega) = \frac{\mathcal{A}(\Sigma)}{|\Omega|^{\frac{n}{n+1}}},$$

que evidentemente é invariante por homotetias. Assim, a desigualdade isoperimétrica expressa-se como

$$J(\Omega) \geqslant J(B),$$

com a igualdade acontecendo se e somente se Ω é uma bola. Noutras palavras, J é minimizado precisamente nas bolas.

Mais geralmente ainda, podemos considerar a normal unitária ν *exterior* a $\Sigma = \partial\Omega$ e considerar o operador de Weingarten correspondente $A : T\Sigma \to T\Sigma$, $Ax = \tilde{\nabla}_x \nu$, onde $\tilde{\nabla}$ é a derivada covariante usual em $\mathbb{R}^{n+1}$. Desse modo, A define um campo de endomorfismos simétricos de $T\Sigma$ cujos autovalores, se ordenados em ordem não-decrescente, definem o *vetor das curvaturas principais*

$$x \in \Sigma \mapsto \kappa(x) = (\kappa_1(x), \cdots, \kappa_n(x)) \in \mathbb{R}^n.$$

Para cada $l = 0, \cdots, n$ definamos a *função simétrica elementar de grau* l, $\sigma_l = \sigma_l(\kappa)$, por meio de

$$\sigma_l(\kappa) = \sum_{i_1 < \cdots < i_l} \kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_l},$$

e, para $k = 1, \cdots, n$, a *integral de curvatura de ordem* $k-1$ de Ω por

$$\mathcal{A}_{k-1}(\Omega) = C_{n,k} \int_\Sigma \sigma_{k-1}(\kappa) d\Sigma, \quad C_{n,k} = \frac{n-(k-1)}{k}.$$

Para estes objetos, a clássica *desigualdade de Alexandrov-Fenchel* afirma: existe $D_{n,k} > 0$ tal que, para qualquer Ω *convexo* vale

$$\mathcal{A}_{k-1}(\Omega)^{\frac{1}{n-(k-1)}} \leqslant D_{n,k} \mathcal{A}_k(\Omega)^{\frac{1}{n-k}}, \tag{1.2}$$

com a igualdade acontecendo se e somente se Ω é uma bola. Observe que se iterarmos (1.2) e a combinarmos com (1.1), concluiremos que existe $c_{n,k} > 0$ tal que

$$\mathcal{A}_k(\Omega) \geqslant c_{n,k} |\Omega|^{\frac{n-k}{n+1}}, \tag{1.3}$$

com a igualdade acontecendo se e somente se Ω é uma bola. Neste sentido, (1.2) induz uma extensão da desigualdade isoperimétrica para domínios convexos em $\mathbb{R}^{n+1}$ no sentido que (1.3) reduz-se a (1.1) quando $k = 0$.

Mais uma vez, podemos reformular este resultado após considerar o quociente isoperimétrico correspondente, a saber,

$$I_k(\Omega) = \frac{\mathcal{A}_{k-1}(\Omega)^{\frac{1}{n-(k-1)}}}{\mathcal{A}_k(\Omega)^{\frac{1}{n-k}}}, \tag{1.4}$$

que novamente é invariante por homotetias. Assim, (1.2) reescreve-se como

$$I_k(\Omega) \leqslant I_k(B),$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e a igualdade acontece se e somente se Ω é alguma bola B. Note que isso implica em particular que

$$D_{n,k} = I_k(B).$$

Assim, a igualdade significa que I_k é *maximizado* exatamente nas bolas.

A demonstração usual de (1.2) é fortemente baseada na hipótese de convexidade de Ω, pois usa a Teoria dos Volumes Mistos para corpos convexos [1], [2], [32]. Mas é natural suspeitar que a desigualdade vale para domínios não necessariamente convexos, eventualmente satisfazendo propriedades adicionais sobre sua geometria. O propósito desta dissertação é precisamente demonstrar um resultado recente, devido a Guan e Li [16], que estende a desigualdade , incluindo a caracterização do caso de igualdade, para uma classe mais geral de domínios euclidianos.

Diremos que um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com fronteira regular $\Sigma = \partial\Omega$ é k-*convexo* se, na notação acima, satisfaz $\sigma_i(\kappa)(x) \geqslant 0$ para $i = 1, \cdots, k$ e $x \in \Sigma$. O teorema de Guan-Li (veja Teorema 3 abaixo) afirma que (1.2) continua valendo se supusermos que Ω é k-convexo e estrelado. Mais ainda, a igualdade vale em (1.2) se e somente se Ω é uma bola. A demonstração deste resultado, porém, utiliza técnicas bastante diversas do caso clássico. Mais precisamente, dado Ω como acima, e supondo inicialmente que $\sigma_i(\kappa) > 0$, $i = 1, \cdots, k$, considera-se o fluxo geométrico

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k}\nu, \quad t > 0, \tag{1.5}$$

onde $X(\cdot, t) : S^n \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma família de hipersuperfíces parametrizadas como gráficos radiais sobre S^n, com $X(\cdot, 0)$ parametrizando Σ e com ν sendo a normal unitária exterior. Um resultado profundo, obtido independentemente por Gerhardt e Urbas [12], [36], garante que, nas condições dadas, (1.5) de fato possui uma solução suave definida para todo $t > 0$. Mais ainda, se esta solução é adequadamente normalizada por uma família a um-parâmetro de homotetias, então as hipersuperfícies correspondentes convergem, na topologia C^∞, para uma esfera redonda. De posse deste resultado, e observando que um cálculo direto nos garante que o quociente isoperimétrico (1.4) é *não-crescente* ao longo da solução normalizada, a desigualdade (1.2) é então imediatamente obtida. O caso geral, em que supomos que Ω é meramente k-convexo (e estrelado) é então inferido por meio de um processo de aproximação.

Esta dissertação é organizada da seguinte maneira. No Capítulo 2, é apresentada a demonstração do Teorema de Gerhardt-Urbas acima mencionado (Teorema 1 abaixo). Na verdade, o resultado que apresentamos vale para funções das curvaturas principais muito mais gerais que σ_{k-1}/σ_k. Como sempre, a demonstração depende de estimativas a priori das derivadas da solução até *segunda* ordem, que são então combinadas com a Teoria de Regularidade Parabólica para garantir a existência de soluções globais (no tempo). Uma análise complementar, que envolve estimativas mais refinadas para o gradiente de soluções, permite caracterizar exatamente o comportamento assintótico de tais soluções, como sendo precisamente determinados por esferas. Este resultado é então utilizado no Capítulo 3, seguindo o argumento de Guan-Li, para verificar que o quociente isoperimétrico é não-decrescente ao longo de soluções de (1.5), conforme já explicado acima. Finalmente, reservamos um apêndice para a compilação de fatos básicos sobre as funções simétricas elementares e sobre os espaços funcionais utilizados no corpo da dissertação.

Capítulo 2

Expansão de hipersuperfície estreladas por funções da curvatura

Neste capítulo, demonstraremos a convergência global e descreveremos precisamente o comportamento de soluções de um certo fluxo geométrico com velocidade dada por funções apropriadas das curvaturas principais de uma hipersuperfície; veja Teorema 1. Este resultado será utilizado no Capítulo 3 para verificar a monoticidade de certas integrais de curvatura e, consequentemente, fornece uma demonstração da clássica desigualdade de Alexandrov-Fenchel para hipersuperfícies euclidianas estreladas e k-convexas.

2.1 Expansão de hipersuperfícies estreladas: o teorema de Gerhardt-Urbas

Seja M_0 uma hipersuperfície compacta, sem bordo e mergulhada em $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geqslant 2$, definida por um mergulho diferenciável $X_0 : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$. Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial t}(x,t) & = & K(x,t)\nu(x,t) \\ X(\cdot,0) & = & X_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $K(\cdot,t)$, $t \in [0,T)$, é uma função conveniente das curvaturas principais da hipersuperfície M_t parametrizada por $X(\cdot,t) : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ e $\nu(\cdot,t)$ é o campo de vetores normal unitário exterior a M_t.

Suporemos que K pode ser expressa como

$$K(\cdot,t) = \frac{1}{f(\kappa_1,\cdots,\kappa_n)}, \tag{2.2}$$

onde $\kappa_1,\cdots,\kappa_n$ são as curvaturas principais de M_t, e $f \in C^\infty(\Gamma) \cap C^0(\overline{\Gamma})$ é uma função simétrica positiva definida em um cone aberto, convexo e simétrico $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ com vértice na origem, contendo o cone positivo

$$\Gamma^+ = \{(\kappa_1, \cdots, \kappa_n) \in \mathbb{R}^n;\ \kappa_i > 0\ \forall\ i\}.$$

É claro que

$$\Gamma \subset \{(\kappa_1, \cdots, \kappa_n) \in \mathbb{R}^n;\ \sum_{i=1}^{n} \kappa_i > 0\}.$$

Admitiremos ainda que f satisfaz as seguintes condições de estrutura:

$$f \text{ é positiva e homogênea de grau um em } \Gamma; \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \kappa_i} > 0 \ \text{ em } \ \Gamma; \tag{2.4}$$

$$f \text{ é côncava em } \Gamma; \tag{2.5}$$

$$f \equiv 0 \ \text{ em } \ \partial\Gamma. \tag{2.6}$$

Neste capítulo, demonstraremos o seguinte resultado de convergência global, com correspondente descrição do comportamento assintótico, para soluções de (2.1) com condições iniciais apropriadas.

Teorema 1. *([12], [36]) Nas condições acima, suponha que M_0 é estrelada com respeito a algum $P_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$. Sejam ainda Γ e f como acima, satisfazendo as condições de estrutura (2.3)-(2.6). Suponha, além disso, que vale*

$$f(\kappa_1(\xi), \cdots, \kappa_n(\xi)) > 0, \tag{2.7}$$

para qualquer $\xi \in M_0$, onde $\kappa_1, \cdots, \kappa_n$ são as curvaturas principais de M_0 com respeito à normal unitária exterior. Então o problema de valor inicial (2.1)-(2.2) possui uma única solução suave X definida em $[0, \infty)$, de modo que para cada $t \in [0, \infty)$, $X(\cdot, t)$ parametriza uma hipersuperfície suave M_t em $\mathbb{R}^{n+1}$, que é estrelada com respeito a P_0. Além disso, se $\tilde{M}_t$, $t \in [0, +\infty)$, é dada por $\tilde{X}(\cdot, t) = e^{-\beta t} X(\cdot, t)$, onde

$$\beta = f(1, \cdots, 1), \tag{2.8}$$

então $\tilde{M}_t$ converge para uma esfera redonda centrada em P_0 na topologia C^∞ quando $t \to \infty$.

Exemplo 1. Em geral, exemplos interessantes de funções satisfazendo as hipóteses do teorema são encontrados por meio da teoria de polinômios hiperbólicos de Gärding [11], conforme elaborada em [7]; veja ainda [30]. Assim, as funções

$$S_m(\kappa_1, \cdots, \kappa_n) = \sigma_m(\kappa_1, \cdots, \kappa_n)^{\frac{1}{m}}, \tag{2.9}$$

e

$$\tilde{S}_m(\kappa_1, \cdots, \kappa_n) = \sigma_m\left(\frac{1}{\kappa_1}, \cdots, \frac{1}{\kappa_n}\right)^{-\frac{1}{m}}, \tag{2.10}$$

onde $1 \leqslant m \leqslant n$, satisfazem tais condições. No primeiro caso, tomamos Γ como a componente conexa do conjunto em que S_m é positiva e que contém $(1, \cdots, 1)$, enquanto que no segundo tomamos Γ como o cone positivo. Note que $\tilde{S}_m$ é um quociente de funções simétricas elementares; a saber,

$$\tilde{S}_m = \sigma_m\left(\frac{1}{\kappa_1}, \cdots, \frac{1}{\kappa_n}\right)^{-\frac{1}{m}} = \left(\frac{\sigma_{n-m}}{\sigma_n}\right)^{-\frac{1}{m}} = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_{n-m}}\right)^{\frac{1}{m}} \tag{2.11}$$

Na verdade, neste trabalho somente usaremos o teorema no caso em que

$$f(\kappa_1, \cdots, \kappa_n) = \frac{\sigma_m}{\sigma_{m-1}}, \quad m = 2, \cdots, n, \tag{2.12}$$

onde $\kappa \in \Gamma_{m-1}$ e

$$\Gamma_{m-1} = \{\kappa \in \mathbb{R}^n; \sigma_k(\kappa) > 0, \forall\, k \leqslant m-1\}.$$

A justificativa de que f como em (2.12) satisfaz as condições de estrutura (2.3)-(2.6) é detalhadamente tratado em [21] e [29].

2.2 Gráficos radiais: a existência de soluções locais

Como, no Teorema (1), a hipersuperfície inicial é estrelada com respeito a P_0, o qual pode ser tomado como sendo a origem, é natural expressar as hipersuperfícies do fluxo como gráficos radiais sobre S^n. Conforme veremos, a vantagem deste procedimento é que a equação de evolução em (2.1), se descrita em termos da função radial ρ que define os gáficos, torna-se escalar com esta escolha. Isto simplificará sobremaneira a análise do problema de valor inicial correspondente. Em particular, conforme veremos nesta seção, este método é especialmente efetivo para verificar a existência de soluções locais, no tempo, de (2.1), com condições iniciais apropriadas.

Com efeito, seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície estrelada com respeito à origem, que supomos não pertencer a M. Nestas condições, podemos escrever

$$X(x) = \rho(x)x, \quad x \in S^n, \tag{2.13}$$

onde $\rho : S^n \to \mathbb{R}$ é positiva e suave; esta é precisamente a *função radial* que representa M. Nosso objetivo nesta seção é descrever a geometria de M em termos de ρ. Seja então $\{e_1, \cdots, e_n\}$ um referencial ortonormal em S^n, de modo que derivadas em relação a este referencial serão denotadas por sub-índices. Assim, como

$$X_i = \rho_i x + \rho e_i, \quad i = 1, \cdots, n,$$

constituem uma base de TM e x é normal a S^n, a métrica induzida em M escreve-se, em termos de ρ, como

$$g_{ij} = \rho^2\delta_{ij} + \rho_i\rho_j, \tag{2.14}$$

onde $\rho_i = \nabla_i\rho$, ∇ é o operador gradiente em S^n e $\langle\, , \rangle$ é o produto interno canônico em $\mathbb{R}^{n+1}$. Além disso, a inversa da métrica é

$$g^{ij} = \rho^{-2}\left(\delta_{ij} - \frac{\rho_i\rho_j}{w^2}\right), \tag{2.15}$$

onde $w^2 = \rho^2 + |\nabla\rho|^2$, donde resulta que a normal exterior a M é

$$\nu = \frac{1}{w}(\rho x - \nabla\rho). \tag{2.16}$$

A proposição a seguir determina os coeficientes $h_{ij} = -\langle X_{ij}, \nu\rangle$ da segunda forma fundamental de M em relação ao referencial $\{X_i\}$. Enfatizamos que, se $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é compacta e mergulhada, sempre consideraremos seu operador de Weingarten A em relação à normal unitária exterior ν, definida como

$$A = \tilde{\nabla}\nu, \tag{2.17}$$

onde $\tilde{\nabla}$ é a derivada covariante em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Proposição 1. *Nas condições acima, vale*

$$h_{ij} = (\rho^2 + |\nabla\rho|^2)^{-\frac{1}{2}}(\rho^2\delta_{ij} + 2\rho_i\rho_j - \rho\rho_{ij}), \tag{2.18}$$

onde $\rho_{ij} = \nabla_i\nabla_j\rho$.

Demonstração. Basta fazer o cálculo em $x_0 \in S^n$ onde o referencial $\{e_i\}$ é geodésico, ou seja, $\nabla_{e_i}e_j(x_0) = 0$. Note inicialmente que

$$X_{ij} = \rho_{ij}x + \rho_i e_j + \rho_j e_i + \rho\tilde{\nabla}_{e_j}e_i.$$

Por outro lado, com a nossa convenção, o operador de Weingarten de S^n é o tensor identidade, e resulta da equação de Gauss que

$$\tilde{\nabla}_{e_i}e_j = -\delta_{ij}x.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
h_{ij} &= -\langle X_{ij}, \nu\rangle \\
&= -\frac{1}{w}(\rho\rho_{ij} - \rho_i\rho_k\delta_{jk} - \rho_j\rho_k\delta_{ik} + \rho^2\langle\tilde{\nabla}_{e_j}e_i, x\rangle - \rho\langle\tilde{\nabla}_{e_i}e_j, \nabla\rho\rangle) \\
&= \frac{1}{w}(-\rho\rho_{ij} + 2\rho_i\rho_j - \rho^2\langle\tilde{\nabla}_{e_j}e_i, x\rangle) \\
&= \frac{1}{w}(-\rho\rho_{ij} + 2\rho_i\rho_j - \rho^2\langle -\delta_{ij}x, x\rangle) \\
&= \frac{1}{w}(\rho^2\delta_{ij} + 2\rho_i\rho_j - \rho\rho_{ij}).
\end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração. $\square$

As curvaturas principais de M são os autovalores do operador de Weingarten relativamente à métrica, ou seja, são precisamente as soluções em κ de

$$\det(h_{ij} - \kappa g_{ij}) = 0.$$

Equivalentemente, elas satisfazem

$$\det(a_{ij} - \kappa\delta_{ij}) = 0,$$

onde

$$[a_{ij}] = [g^{ij}]^{\frac{1}{2}}[h_{ij}][g^{ij}]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.19}$$

Aqui, $[g^{ij}]^{\frac{1}{2}}$ é a matriz raiz quadrada positiva de $[g^{ij}]$; explicitamente,

$$[g^{ij}]^{\frac{1}{2}} = \rho^{-1}\left(\delta_{ij} - \frac{\rho_i\rho_j}{\sqrt{\rho^2+|\nabla\rho|^2}(\rho+\sqrt{\rho^2+|\nabla\rho|^2})}\right). \tag{2.20}$$

Vamos agora ilustrar a abordagem acima verificando como o problema de valor inicial (2.1)-(2.2) pode ser reduzido a uma equação de evolução escalar para a funçao radial ρ. Seja então M_0 uma hipersuperfície compacta e suave em $\mathbb{R}^{n+1}$, que é estrelada com respeito à origem e descrita por um mergulho $X_0 : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$. Suponha que $X : S^n \times [0,T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ é solução suave do problema de valor inicial (2.1)-(2.2), de tal modo que, para cada $t \in [0,T)$, $X(\cdot,t)$ é uma hipersuperfície compacta e mergulhada M_t em $\mathbb{R}^{n+1}$ e estrelada com respeito à origem. Então, para uma família conveniente de difeomorfismos $\varphi(\cdot,t) : S^n \to S^n$, vale

$$X(x,t) = \rho(\varphi(x,t),t)\varphi(x,t), \tag{2.21}$$

onde $\rho(\cdot,t) : S^n \to \mathbb{R}_+$ é a função radial que representa M_t. Se estendermos $\rho(\cdot,t)$ de modo a ser constante em direções radiais teremos

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^i}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right)\varphi + \rho\frac{\partial\rho}{\partial t},$$

e como $\partial\varphi/\partial t$ é tangencial a S^n,

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= \left\langle\frac{\partial X}{\partial t},\nu\right\rangle \\ &= \frac{1}{w}\left(\left(\frac{\partial\rho}{\partial x^i}\frac{\varphi^i}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right)\rho - \rho\left\langle\nabla\rho,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\rangle\right) \\ &= \frac{\rho}{w}\frac{\partial\rho}{\partial t}. \end{aligned}$$

Desse modo, $\rho : S^n \times [0,T) \to \mathbb{R}$ satisfaz o problema de valor inicial *escalar*

$$\left\{\begin{aligned} D_t\rho &= \frac{(\rho^2+|\nabla\rho|^2)^{\frac{1}{2}}}{\rho F(a_{ij})}, \\ \rho(\cdot,0) &= \rho_0, \end{aligned}\right. \tag{2.22}$$

onde $D_t\rho = \partial\rho/\partial t$ e ρ_0 é a função radial que representa a hipersuperfície M_0, $a_{ij} = a_{ij}(t)$ é dada por (2.19) com ρ substituída por $\rho(\cdot, t)$, e

$$F(a_{ij}) = f(\kappa_1, \cdots, \kappa_n), \tag{2.23}$$

onde $\kappa_1, \cdots, \kappa_n$ são os autovalores de $[a_{ij}]$.

Reciprocamente, suponha que $\rho > 0$ é uma solução de (2.22), e que φ_0 é um difeomorfismo de S^n satisfazendo

$$X_0(x) = \rho(\varphi_0(x), 0)\varphi_0(x). \tag{2.24}$$

Pelo cálculo que leva a (2.22), mostra-se facilmente que os mergulhos $\hat{X}(\cdot, t)$ dados por

$$\hat{X}(x) = \rho(\varphi_0(x), t)\varphi_0(x) \tag{2.25}$$

satisfazem (2.1)-(2.2). Verificamos assim que, a menos de difeomorfismos tangenciais, os problemas de valor inicial (2.1)-(2.2) e (2.22) são completamente equivalentes. Em particular, pode-se reduzir o problema de encontrar soluções locais (no tempo) do fluxo original (2.1)-(2.2) ao problema correspondente ao fluxo escalar (2.22).

Note, porém, que a dependência dos lados direitos das equações de evolução (2.1) e (2.22) em relação à geometria das hipersuperfícies expressa-se de maneira diversa, ou seja, no primeiro caso, esta dependência é expressa em termos de $f = f(\kappa_1, \cdots, \kappa_n)$ que depende dos autovaloes do operador de Weingarten

$$a_{ij} = g^{ik}h_{kj}, \tag{2.26}$$

enquanto que no segundo caso a dependência é descrita em termos de $F(a_{ij})$, que depende do próprio operador de Weingarten. Felizmente, conforme mostrado em [7], as condições de estrutura em f (2.3)-(2.6) implicam em condições correspondentes sobre F. Mais precisamente,

$$F \in C^\infty(M(\Gamma)) \cap C^0(\overline{M(\Gamma)}), \tag{2.27}$$

onde $M(\Gamma)$ é o cone convexo das matrizes reais simétricas com autovalores pertencentes a Γ, e

$$F \text{ é homogênea de grau um em } M(\Gamma). \tag{2.28}$$

Além disso, se

$$F_{ij} = \frac{\partial F}{\partial a_{ij}}, \quad F_{ij,kl} = \frac{\partial^2 F}{\partial a_{ij}\partial a_{kl}},$$

então vale

$$F_{ij}\xi_i\xi_j > 0 \text{ em } M(\Gamma), \tag{2.29}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, ou seja, F_{ij} é positiva definida, e, mais ainda, F é *côncava* no sentido que

$$F_{ij,kl}\gamma_{ij}\gamma_{kl} \leqslant 0 \text{ em } M(\Gamma), \tag{2.30}$$

para qualquer matriz real simétrica $[\gamma_{ij}]$. Finalmente,

$$F \equiv 0 \text{ em } \partial M(\Gamma). \tag{2.31}$$

Note ainda que, como F é homogênea de grau 1, podemos supor que

$$F(\delta_{ij}) = 1. \tag{2.32}$$

Usando o resultado fundamental na teoria de existência e unicidade de equações diferenciais parabólicas [27], estas observações nos permitem garantir a existência local (no tempo) de soluções do problema de valor inicial (2.1)-(2.2) no caso em que a hipersuperfície inicial é estrelada com $f = f(\kappa_1, \cdots, \kappa_n)$ satisfazendo as equações de estruturas acima descritas.

Teorema 2. *Se M_0 é como na formulação do problema de valor inicial (2.1)-(2.2) e $f = f(\kappa_1, \cdots, \kappa_n)$ satisfaz as condições de estrutura (2.3), (2.4) e (2.6) então, para $T > 0$ suficientemente pequeno, existe uma aplicação suave $X : S^n \times [0, T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ que é solução do problema. Mais ainda, esta solução é única (a menos de difeomorfismos de S^n) no sentido que quaisquer duas soluções do problema coincidem onde estão definidas.*

Demonstração. Pelos comentários acima, basta verificar o resultado correspondente para o problema de valor inicial (2.22). Os resultados usuais de existência de soluções locais para equações parabólicas [27] nos garantem o resultado se verificarmos que (2.22) é *parabólica* em $t = 0$, o que por definição significa que o lado direito de (2.22), que denotaremos por $\mathcal{F}(a_{ij})$, satisfaz

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho_{ij}}(\rho_0) > 0. \tag{2.33}$$

Mas, por (2.18), (2.26) e a Regra da Cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho_{ij}} &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_{km}} \frac{\partial a_{km}}{\partial \rho_{ij}} \\ &= -\frac{\rho}{w} g^{ik} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_{kj}}, \end{aligned}$$

de modo que, como g^{ik} é positiva definida, (2.33) acontece se e somente se

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_{kj}}(\rho_0) < 0.$$

Mas,

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_{kj}}(\rho_0) = -\frac{w}{\rho} f(\lambda)^{-2} \frac{\partial F}{\partial a_{ij}}(\rho_0),$$

e a existência segue de (2.29). A unicidade é consequência do Princípio do Máximo Parabólico [27]. $\square$

Resulta da demonstração acima que, para T como no teorema, $a_{ij} \in M(\Gamma)$ e $\rho > 0$ em $[0, T)$, o que implica em particular que as condições de estrutura para F são satisfeitas neste intervalo. Diremos que uma tal solução é *admissível*. A proposição a seguir fornece um critério muito conveniente para garantir a admissibilidade de soluções.

Proposição 2. *Uma solução de 2.22 permanece admissível enquanto for positiva e* $[a_{ij}]$ *pertencer a* $M(\Gamma)$.

Demonstração. Num ponto em que $\rho(\cdot, t)$ assume seu máximo espacial, $[a_{ij}]$ evidentemente pertence a $M(\Gamma)$. Mas, como F é contínua e vale (2.31), $[a_{ij}] \in M(\Gamma)$ em qualquer outro ponto. □

Resulta do teorema acima que o problema de valor inicial (2.22), ou equivalentemente (2.1)-(2.2), possui uma solução admissível definida em algum intervalo $[0, \tilde{T})$, onde $\tilde{T} \leqslant +\infty$. Mostraremos na seção seguinte que, na verdade, $\tilde{T} = +\infty$, ou seja, a solução é global no tempo. Para tanto, devemos obter estimativas a priori para todas as derivadas de soluções *admissíveis* de (2.22) independendemente de t em intervalos limitados. Na verdade, a teoria de Regularidade Parabólica [27] nos asegura que, neste caso, basta controlar as derivadas de ρ em (2.22), o que faremos na próxima seção.

Encerraremos esta seção apresentando um artifício que facilitará consideravelmente a obtenção destas estimativas, a saber, a descrição local das hipersuperfíces do fluxo como gráfico euclidianos. Mais precisamente, se $\tau \in [0, \tilde{T})$ e t situa-se próximo de τ, podemos, após composição com um movimento rígido, escrever $M_t = \{((x, t), u(x, t)\}$, onde x varia num aberto de $\mathbb{R}^n$ e u é suave. Observe que, se $\{e_i\}_{i=1}^n$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$ e $D_i u = \partial u / \partial x_i$, os vetores $X_i = (e_i, D_i u)$, $i = 1, \cdots, n$, geram o espaço tangente a M_t em cada ponto, de modo que a métrica em relação a este referencial é

$$g_{ij} = \delta_{ij} + D_i u D_j u, \tag{2.34}$$

com inversa

$$g^{ij} = \delta_{ij} - \frac{D_i u D_j u}{v^2}, \tag{2.35}$$

onde $v^2 = 1 + |Du|^2$. Assim,

$$\nu = \frac{1}{v}(D_1 u, \cdots, D_n u, -1)$$

pode ser escolhido como a normal unitária a M_t. Consequentemente,

$$\begin{aligned} h_{ij} &= -\langle X_{ij}, \nu \rangle \\ &= \frac{1}{v} D_{ij} u. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Neste caso,

$$[g^{ij}]^{\frac{1}{2}} = \delta_{ij} - \frac{D_i u D_j u}{v(1+v)},$$

e as curvaturas principais de M_t são os autovalores de

$$a_{ij} \;=\; [g^{il}]^{\frac{1}{2}}[h_{lk}][g^{kj}]^{\frac{1}{2}},$$

ou, de modo mais explícito, de

$$\begin{aligned} a_{ij} \;=\; & \frac{1}{v}\bigg(D_{ij}u - \frac{D_iuD_luD_{jl}u}{v(1+v)} - \frac{D_juD_luD_{il}u}{v(1+\tilde{w})} \\ & + \frac{D_iuD_juD_kuD_luD_{kl}u}{v^2(1+v)^2}\bigg), \end{aligned} \tag{2.37}$$

(veja [8]). Isto e (2.28) nos dizem que u é solução admissível da equação

$$D_tu = -\frac{(1+|Du|^2)^{\frac{1}{2}}}{F(a_{ij})}. \tag{2.38}$$

2.3 Estimativas a priori e existência de soluções globais

Vamos estabelecer nesta seção as estimativas a priori necessásias para garantir a existência de uma solução de (2.22) definida para $t > 0$. Conforme já mencionamos, basta controlar uniformemente no tempo as derivadas até segunda ordem de soluções admissíveis. Este controle, para a própria função, é feito na próxima subseção.

2.3.1 Estimativas a priori de ordem zero

O primeiro resultado em nossa jornada no sentido de estabelecer estimativas a priori para soluções admissíveis de (2.22) é o lema a seguir, que mostra que a solução cresce exponencialmente no tempo, sendo em particular uniformemente limitada em intervalos limitados.

Proposição 3. *Se $\rho > 0$ é uma solução admissível de (2.22) em $S^n \times [0,T)$ então vale*

$$\min_{S^n} \rho_0 \leqslant e^{-t}\rho(\cdot,t) \leqslant \max_{S^n} \rho_0, \quad t \in [0,T). \tag{2.39}$$

Demonstração. Se $\rho(\cdot,t)$ atinge seu máximo com respeito à variável espacial em x_t então, neste ponto, temos $\nabla\rho = 0$ e $\nabla^2\rho \leqslant 0$. Assim, (2.15), (2.18) e (2.26) nos dão

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \rho^{-1}\delta_{ij} - \rho^{-2}\rho_{ij} \\ &\geqslant \rho^{-1}\delta_{ij}, \end{aligned}$$

donde resulta, por (2.29), (2.28) e (2.32), que

$$F(a_{ij}) \geqslant F(\rho^{-1}\delta_{ij}) = \rho^{-1}F(\delta_{ij}) = \rho^{-1},$$

o que significa, por (2.22), que a função $\overline{\rho}(t) = \max_{S^n} \rho(\cdot, t)$, que é Lipschitz e portanto diferenciável em quase todo ponto, satisfaz

$$D_t\overline{\rho} \leqslant \overline{\rho},$$

o que implica $\overline{\rho}(t) \leqslant e^t\overline{\rho}(0)$. Isto mostra a segunda estimativa em (2.39). A primeira é obtida por um argumento análogo. □

2.3.2 Estimativas a priori para a primeira e segunda derivadas

O próximo passo na demonstração do teorema (1) é estabelecer estimativas a priori para as derivadas de ordem um e dois de soluções admissíveis de (2.22). Na verdade, inverteremos a ordem natural e provaremos inicialmente uma estimativa para a norma do vetor curvatura principal (ou, equivalentemente, para as derivadas de ordem dois) das soluções. A estimativa para a derivada de primeira ordem decorre então disto, da Proposição 3 e de um controle uniforme sobre $F(a_{ij})$; veja Proposição 7. A primeira etapa desta estratégia é o conteúdo do lema abaixo, que adapta ao nosso contexto uma estimativa de curvatura de [8]. Salientamos que é precisamente neste ponto da demonstração que a condição de estrutura envolvendo a concavidade de F, a saber, (2.30), é utilizada.

Proposição 4. *Sejam $\rho > 0$ uma solução admissível de (2.22) em $S^n \times [0, T)$ e M_t a hipersuperfície correspondente, ou seja, $X(x, t) = \rho(x, t)x$. Então, para qualquer $t \in [0, T)$,*

$$\max_{M_t} |\kappa| \leqslant Ce^{-t} \tag{2.40}$$

onde C depende apenas de n, M_0 e ρ_0 e o máximo é tomado sobre M_t e $\kappa = (\kappa_1, \cdots, \kappa_n)$.

Demonstração. Considere a função

$$h = \log\left(\frac{|\kappa|}{\langle X, \nu\rangle}\right),$$

e suponha que, em $\tau \in (0, T)$, h atinge seu máximo sobre todas as M_t e todas as curvaturas principais κ em $Z_\tau = X(x_\tau, \tau) \in M_\tau$ na direção $\xi_\tau \in T_{Z_\tau}M_\tau$. A menos de uma rotação podemos supor que $x_\tau \in S^n$ é o polo sul. Seja Σ o plano tangente a M_τ em Z_τ. Então, em uma vizinhança de (Z_τ, τ), a família de hipersuperfícies M_t pode ser escrita como um gráfico de uma função suave u definida em uma vizinhança de (Z_τ, τ) em $\Sigma \times [0, T)$. Como vimos no final da Seção 2.2, tal função é uma solução admissível de (2.38).

Escolhamos agora um novo sistema de coordenadas ortogonais em Σ com origem em Z_τ, que denotaremos por $x_1, \cdots, x_n$. Então, em termos das coordenadas paralelas às novas coordenadas com centro na origem, temos

$$Z_\tau = (a_1, \cdots, a_n, -a)$$

para constantes convenientes $a_1, \cdots, a_n, a$ com $a > 0$. Daí,

$$\nu = \frac{(Du, -1)}{v}$$

e

$$\varphi := \langle X, \nu \rangle = \frac{D_k u a_k + D_k u x_k - u + a}{v}, \tag{2.41}$$

onde $v^2 = 1 + |Du|^2$.

Por uma rotação das novas coordenadas, podemos admitir que a curvatura principal máxima do gráfico $u(\cdot, \tau)$ na origem ocorre na direção x_1. Assim, próximo a $(0, \tau)$, temos

$$\kappa_1 = \frac{D_{11}u}{v(1 + (D_1 u)^2)}.$$

Mais ainda, após estas mudanças de coordenadas, a função

$$h = \log\left(\frac{D_{11}u}{\varphi v(1 + (D_1 u)^2)}\right)$$

atinge seu máximo espacial local no tempo τ na origem, de forma que vale

$$u(0, \tau) = |Du(0, \tau)| = 0, \tag{2.42}$$

e, naturalmente,

$$D_{1\alpha}u(0, \tau) = 0 \quad \text{para } \alpha > 1.$$

Como consequência, após girarmos convenientemente as coordenadas $x_2, \cdots, x_n$, podemos admitir que $D^2u(0, \tau)$ é diagonal e $D_{11}(0, \tau) > 0$.

A estratégia, a partir das normalizações acima, é obter uma inequação diferencial apropriada para h; veja (2.51) abaixo. Para tanto, observemos inicialmente que

$$\begin{aligned} D_\alpha h &= \frac{D_{11\alpha}u\varphi v(1 + (D_1u)^2) - D_{11}u[D_\alpha \varphi v(1 + (D_1u)^2)}{(D_{11}u\varphi v(1 + (D_1u)^2)} \\ &\quad + \frac{\varphi D_\alpha v(1 + (D_1u)^2) + \varphi v D_\alpha(1 + (D_1u)^2)]}{(D_{11}u\varphi v(1 + (D_1u)^2)} \\ &= \frac{D_{11\alpha}u}{D_{11}u} - \frac{D_\alpha \varphi}{\varphi} - \frac{D_\alpha v}{v} - \frac{2D_1uD_{1\alpha}u}{(1 + (D_1u)^2)} \end{aligned}$$

e

$$D_\alpha \varphi = \frac{D_{\alpha k}u a_k}{v} - \frac{D_{\alpha k}u x_k}{v} - \frac{\varphi D_\alpha v}{v},$$

onde tanto acima como a seguir, somaremos sobre índices latinos mas não sobre índices gregos, a menos que indicado explicitamnte. Por outro lado,

$$D_\alpha v = v^{-1} D_k u D_{\alpha_k} u,$$

de modo que, por (2.42),

$$D_\alpha v = 0, \quad D_\alpha \varphi = D_{\alpha\alpha} u a_\alpha,$$

e

$$D_\alpha h = \frac{D_{11\alpha} u}{D_{11} u} - \frac{D_{\alpha\alpha} u a_\alpha}{\varphi} = 0 \tag{2.43}$$

em $(0, \tau)$.

Derivando mais uma vez, encontramos

$$D_{\alpha\alpha} v = (D_{\alpha\alpha} u)^2$$

e

$$\begin{aligned}
D_\alpha\left(\frac{D_\alpha \varphi}{\varphi}\right) &= \frac{D_\alpha(D_{\alpha k} u a_k + D_{\alpha k} u x_k)\varphi v - D_\alpha(\varphi v)(D_{\alpha k} u a_k + D_{\alpha k} u x_k)}{(\varphi v)^2} \\
&\quad - \frac{D_{\alpha\alpha} v v - (D_\alpha v)^2}{v^2} \\
&= \frac{(D_{\alpha\alpha k} u a_k + D_{\alpha\alpha k} u x_k + D_{\alpha\alpha} u)(\varphi v)}{(\varphi v)^2} - \\
&\quad - \frac{(D_\alpha \varphi v + \varphi D_\alpha v)(D_{\alpha k} u a_k + D_{\alpha k} u x_k)}{(\varphi v)^2} \\
&\quad - \frac{(D_\alpha \varphi D_\alpha v + \varphi D_{\alpha\alpha} v)\varphi v}{(\varphi v)^2} - \frac{(\varphi D_\alpha v)(D_\alpha \varphi v + \varphi D_\alpha v)}{(\varphi v)^2} \\
&= \frac{D_{\alpha\alpha k} u a_k + D_{\alpha\alpha} u}{\varphi} - \frac{D_\alpha \varphi v D_{\alpha k} u a_k}{\varphi^2} - D_{\alpha\alpha} v \\
&= \frac{D_{\alpha\alpha k} u a_k + D_{\alpha\alpha} u}{\varphi} - \frac{(D_{\alpha\alpha} u a_\alpha)^2}{\varphi^2} - (D_{\alpha\alpha} u)^2
\end{aligned}$$

em $(0, \tau)$. Daí, se pusermos $A^2 = 1 + (D_1 u)^2$ e aplicarmos o cálculo anterior, teremos

$$\begin{aligned}
0 \geqslant D_{\alpha\alpha} h &= D_\alpha\left(\frac{D_{11\alpha} u}{D_{11} u} - \frac{D_\alpha v}{v} - 2\frac{D_1 u D_{1\alpha} u}{1 + (D_1 u)^2} - \frac{D_\alpha \varphi}{\varphi}\right) \\
&= \frac{D_{11\alpha\alpha} u}{D_{11} u} - \left(\frac{D_{11\alpha} u}{D_{11} u}\right)^2 - \left\{\left(\frac{D_{\alpha\alpha} v}{v}\right) - \left(\frac{D_\alpha v}{v}\right)^2\right\} \\
&\quad -2\left\{\frac{D_\alpha(D_1 u D_{1\alpha} u)A^2 - (D_1 u D_{1\alpha} u) 2 D_1 u D_{1\alpha} u}{A^4}\right\} \\
&\quad - \left\{\frac{D_{\alpha\alpha k} u a_k + D_{\alpha\alpha} u}{\varphi} - \left(\frac{D_{\alpha\alpha} u a_\alpha}{\varphi}\right)^2 - (D_{\alpha\alpha} u)^2\right\} \\
&= \frac{D_{11\alpha\alpha} u}{D_{11} u} - \left(\frac{D_{11\alpha} u}{D_{11} u}\right)^2 - \left\{\left(\frac{D_{\alpha\alpha} v}{v}\right) - \left(\frac{D_\alpha v}{v}\right)^2\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-2\left\{\frac{[(D_{1\alpha}u)^2 + D_1uD_{1\alpha\alpha}u])A^2 - (D_1uD_{1\alpha}u)2D_1uD_{1\alpha}u}{A^4}\right\}\\
&+\left(\frac{D_{\alpha\alpha}ua_\alpha}{\varphi}\right)^2 - \frac{D_{\alpha\alpha k}ua_k + D_{\alpha\alpha}u}{\varphi} + (D_{\alpha\alpha}u)^2\\
= \quad & \frac{D_{11\alpha\alpha}u}{D_{11}u} - \left(\frac{D_{11\alpha}u}{D_{11}u}\right)^2 - (D_{\alpha\alpha}u)^2 - 2(D_{1\alpha})^2 + \left(\frac{D_{\alpha\alpha}ua_\alpha}{\varphi}\right)^2\\
&-\frac{D_{\alpha\alpha k}ua_k + D_{\alpha\alpha}u}{\varphi} + (D_{\alpha\alpha})^2\\
= \quad & \frac{D_{11\alpha\alpha}u}{D_{11}u} - \left(\frac{D_{11\alpha}u}{D_{11}u}\right)^2 - 2(D_{1\alpha})^2 + \left(\frac{D_{\alpha\alpha}ua_\alpha}{\varphi}\right)^2\\
&-\frac{D_{\alpha\alpha k}ua_k + D_{\alpha\alpha}u}{\varphi}
\end{aligned}
$$

em $(0,\tau)$, de maneira que, por (2.43), obtemos a estimativa

$$0 \geqslant \frac{D_{11\alpha\alpha}u}{D_{11}u} - 2(D_{1\alpha}u)^2 - \frac{D_{\alpha\alpha k}ua_k + D_{\alpha\alpha}u}{\varphi} \tag{2.44}$$

em $(0,\tau)$ para cada $\alpha = 1, \cdots, n$.

É chegada a hora de usar a equação de evolução para u, a saber, (2.38). Derivando-a uma primeira vez na direção x_1, obtemos

$$D_{1t}u = -\frac{(1+|Du|^2)^{-\frac{1}{2}}}{F}D_kuD_{k1}u + \frac{(1+|Du|^2)^{\frac{1}{2}}}{F^2}F_{ij}D_1a_{ij}, \tag{2.45}$$

e derivando novamente, aplicando em $(0,\tau)$ e usando (2.42) resulta que

$$
\begin{aligned}
D_{11t}u \quad = \quad & -\frac{(D_{11}u)^2}{F} + \frac{F_{ij}D_{11}a_{ij}}{F^2} + \frac{F_{ij,rs}D_1a_{ij}D_1a_{rs}}{F^2}\\
&-\frac{2}{F^3}(F_{ij}D_1a_{ij})^2\\
\leqslant \quad & -\frac{(D_{11}u)^2}{F} + \frac{F_{ij}D_{11}a_{ij}}{F^2} + \frac{F_{ij,rs}D_1a_{ij}D_1a_{rs}}{F^2}.
\end{aligned}
$$

É precisamente neste ponto que a crucial hipótese de concavidade sobre F, (2.30), será usada. Assim, obtemos uma desigualdade diferencial preliminar para $D_{11}u$, a saber,

$$D_{11t}u \leqslant -\frac{(D_{11}u)^2}{F} + \frac{F_{ij}D_{11}a_{ij}}{F^2}, \quad t \in (0,\tau). \tag{2.46}$$

A etapa final da demonstração consiste em entender a natureza do segundo termo à direita em (2.46). Para tanto, veja que, por (2.37),

$$a_{ij} = \frac{1}{v}C_{ij} \tag{2.47}$$

onde

$$C_{ij} := D_{ij}u - \frac{D_iuD_luD_{jl}u}{v(1+v)} - \frac{D_juD_luD_{il}u}{v(1+v)} + \frac{D_iuD_juD_kuD_luD_{kl}u}{v^2(1+v)^2}.$$

Mas,

$$\begin{aligned} D_1C_{ij} &= D_{1ij}u - \Bigg(\frac{D_{1i}uD_luD_{jl}u + D_iuD_{1l}uD_{jl}u + D_iuD_luD_{1jl}u}{v(1+v)} \\ &\quad -D_iuD_luD_{jl}u\frac{v^{-1}D_muD_{1m}u(1+v) + vD_muD_{1m}u}{v^2(1+v)^2}\Bigg) \\ &\quad -\Bigg(\frac{D_{1j}uD_luD_{il}u + D_juD_{1l}uD_{il}u + D_juD_luD_{1il}u}{v(1+v)} \\ &\quad -D_juD_luD_{il}u\frac{v^{-1}D_muD_{1m}u(1+v) + vD_muD_{1m}u}{v^2(1+v)^2}\Bigg) \\ &\quad +\Bigg(\frac{D_{1i}uD_juD_kuD_luD_{kl}u + D_iuD_{1j}uD_kuD_luD_{kl}u}{v^2(1+v)^2} \\ &\quad +\frac{D_iuD_juD_{1k}uD_luD_{kl}u + D_iuD_juD_kuD_{1l}uD_{kl}u}{v^2(1+v)^2} \\ &\quad +\frac{D_iuD_juD_kuD_luD_{1kl}u}{v^2(1+v^2)^2} \\ &\quad -D_iuD_juu_kD_luD_{kl}u\frac{2vv^{-1}D_muD_{1m}u(1+v)}{v^4(1+v)^4} \\ &\quad -D_iuD_juu_kD_luD_{kl}u\frac{v(1+v)v^{-1}D_muD_{1m}u}{v^4(1+v)^4}\Bigg), \end{aligned}$$

e usando que no ponto em questão tem-se $Du = 0$, obtemos

$$D_1\left(\frac{1}{v}\right) = D_1v = 0$$

e

$$D_{11}\left(\frac{1}{v}\right) = -D_{1m}uD_{1m}u,$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned} D_{11}C_{ij} &= D_{11ij}u - \frac{D_{1i}uD_{1l}uD_{jl}u + D_{1i}uD_{1l}uD_{jl}u}{2} \\ &\quad -\frac{D_{1j}uD_{1l}uD_{il}u + D_{1j}uD_{1l}uD_{il}u}{2} \\ &= D_{11ij}u - D_{1i}uD_{1l}uD_{jl}u - D_{1j}uD_{1l}uD_{il}u. \end{aligned}$$

Lembrando agora que

$$D_1a_{ij} = D_1\left(\frac{1}{v}\right)C_{ij} + \frac{1}{v}D_1C_{ij},$$

resulta que

$$\begin{aligned}
D_{11}a_{ij} &= D_{11}\left(\frac{1}{v}\right)C_{ij} + D_1\left(\frac{1}{v}\right)D_1C_{ij} + D_1\left(\frac{1}{v}\right)D_1C_{ij} + \frac{1}{v}D_{11}C_{ij}\\
&= -D_{1m}uD_{1m}uD_{ij} + D_{11ij}u - D_{1i}uD_{1l}uD_{jl}u - D_{1j}uD_{1l}uD_{il}u\\
&= D_{11ij}u - D_{1k}uD_{1k}uD_{ij} - 2D_{1i}uD_{1k}uD_{jk}u.
\end{aligned}$$

Observe agora que no ponto em questão, $D_{ij}u$ e $F_{ij} = F_{ij}(D_{ij}u)$ são ambas diagonalizáveis, de modo que vale

$$D_{11}a_{11} = D_{1111}u - 3(D_{11}u)^3 \tag{2.48}$$

e

$$D_{11}a_{\alpha\alpha} = D_{11\alpha\alpha}u - D_{\alpha\alpha}u(D_{11}u)^2, \tag{2.49}$$

para $\alpha = 2, \cdots, n$. Substituindo estas expressões em (2.46), obtemos

$$\begin{aligned}
D_{11t}u &\leqslant -\frac{(D_{11}u)^2}{F} + \frac{1}{F^2}\Big(F_{11}D_{11}a_{11} + \sum_{\alpha>1} F_{\alpha\alpha}D_{11}a_{\alpha\alpha}\Big)\\
&\leqslant -\frac{(D_{11}u)^2}{F} + \frac{1}{F^2}\Big(F_{11}D_{1111}u - 3F_{11}(D_{11}u)^3\\
&\qquad + \sum_{\alpha>1}(F_{\alpha\alpha}D_{11}a_{\alpha\alpha}u - D_{\alpha\alpha}u(D^2_{11}u))\Big)\\
&\leqslant -\frac{(D_{11}u)^2}{F} + \frac{1}{F^2}\Big(F_{11}D_{1111}u - 3F_{11}(D_{11}u)^3\\
&\qquad + \sum_{\alpha>1} F_{\alpha\alpha}D_{11\alpha\alpha}u - \sum_{\alpha>1} F_{\alpha\alpha}D_{\alpha\alpha}u(D^2_{11}u)\Big),
\end{aligned}$$

e usando a estimativa (2.44),

$$\begin{aligned}
D_{11t}u &\leqslant -\frac{(D_{11}u)^2}{F} + \frac{1}{F^2}\Big(F_{11}D_{1111}u - 3F_{11}(D_{11}u)^3 + \sum_{\alpha>1} F_{\alpha\alpha}D_{11\alpha\alpha}u\\
&\qquad - \sum_{\alpha>1} F_{\alpha\alpha}D_{\alpha\alpha}u(D_{11})^2\Big)\\
&\leqslant -\frac{(D_{11}u)^2}{F} + \frac{1}{F^2}\Big(\frac{F_{11}D_{11}u(D_{11k}ua_k + D_{11}u)}{\varphi} - F_{11}(D_{11}u)^3\\
&\qquad + \sum_{\alpha>1}\Big(2F_{\alpha\alpha}D_{11}u(D_{1\alpha})^2 + F_{\alpha\alpha}D_{11}u\frac{(D_{\alpha\alpha k}ua_k + D_{\alpha\alpha}u)}{\varphi}\Big)\\
&\qquad - \sum_{\alpha>1}(D_{11})^2F_{\alpha\alpha}D_{\alpha\alpha}u
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{(D_{11}u)^2}{F} - \frac{F_{11}(D_{11}u)^3}{F^2} - \frac{(D_{11}u)^2}{F^2}\sum_{\alpha>1} F_{\alpha\alpha}D_{\alpha\alpha}u \\
&\quad + \frac{D_{11}uF_{11}}{F^2\varphi}(D_{11k}ua_k + D_{11}u) + \frac{D_{11}u}{F^2\varphi}\sum_{\alpha>1} F_{\alpha\alpha}(D_{\alpha\alpha k}ua_k + D_{\alpha\alpha}u) \\
&= -\frac{(D_{11}u)^2}{F} - \frac{(D_{11}u)^2}{F^2}\sum_{\alpha=1}^{n} F_{\alpha\alpha}D_{\alpha\alpha}u + \frac{D_{11}u}{F^2\varphi}\sum_{\alpha=1}^{n} F_{\alpha\alpha}(D_{\alpha\alpha k}ua_k + D_{\alpha\alpha}u) \\
&= -\frac{(D_{11}u)^2}{F} - \frac{(D_{11}u)^2}{F^2}\sum_{\alpha=1}^{n} F_{\alpha\alpha}D_{\alpha\alpha}u + \frac{D_{11}u}{F^2\varphi}\sum_{\alpha=1}^{n} F_{\alpha\alpha}D_{\alpha\alpha k}ua_k + \\
&\quad + \frac{D_{11}u}{F^2\varphi}\sum_{\alpha=1}^{n} F_{\alpha\alpha}D_{\alpha\alpha}u,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$D_{11t}u \leqslant -2\frac{(D_{11}u)^2}{F} + \frac{D_{11}u}{Fa} + \frac{D_{11}u}{F^2a}\sum_{\alpha=1}^{n} F_{\alpha\alpha}D_{\alpha\alpha k}ua_k,$$

uma vez que $\varphi(0,\tau) = a$ e, pela homogeneidade de F,

$$F = \sum_{\alpha=1}^{n} F_{\alpha\alpha}D_{\alpha\alpha}u.$$

Como, no ponto em questão, $D_ka_{ij} = D_{ijk}u$, se trocarmos 1 por k em (2.45), vemos que

$$D_{kt}u = \frac{F_{ij}D_ka_{ij}}{F^2} = \frac{F_{ij}D_{ijk}u}{F^2},$$

donde

$$
\begin{aligned}
D_{11t}u &\leqslant -2\frac{(D_{11}u)^2}{F} + \frac{D_{11}u}{Fa} + \frac{D_{11}u}{F^2a}\sum_{\alpha=1}^{n} F_{\alpha\alpha}D_{\alpha\alpha k}ua_k \\
&= -2\frac{(D_{11}u)^2}{F} + \frac{D_{11}u}{Fa} + \frac{D_{11}uD_{kt}ua_k}{a}.
\end{aligned} \tag{2.50}
$$

Por outro lado, pelas definições de h e φ,

$$\begin{aligned}
D_t h &= \frac{\varphi\nu(1+(D_1u)^2)}{D_{11}u}\left(\frac{D_{11t}u}{\varphi\nu(1+(D_1u)^2)} - D_{11}\left(\frac{D_t\varphi\nu(1+(D_1u)^2)}{(\varphi\nu(1+(D_1u)^2))^2}\right.\right.\\
&\qquad \left.\left.+\frac{\varphi D_t\nu(1+(D_1u)^2)+2\varphi\nu D_k u D_{kt}u}{(\varphi\nu(1+(D_1u)^2))^2}\right)\right)\\
&= \frac{D_{11t}u}{D_{11}u} - \frac{D_t\varphi}{\varphi}\\
&= \frac{D_{11t}u}{D_{11}u} - \frac{1}{a}(D_{kt}u a_k - D_t u)\\
&= \frac{D_{11t}u}{D_{11}u} - \frac{1}{a}\left(D_{kt}u a_k + \frac{1}{F}\right),
\end{aligned}$$

donde, por (2.50),

$$D_t h \leqslant -2\frac{D_{11}u}{F}.$$

Mas, como $D_{11}u$ é o maior autovalor de D^2u, temos, pela homogeneidade e monotonicidade de F,

$$\frac{F}{D_{11}u} = F\left(\frac{D^2u}{D_{11}u}\right) \leqslant F(\delta_{\alpha\beta}) = 1,$$

ou seja,

$$D_t h \leqslant -2, \quad t \in (0,\tau). \tag{2.51}$$

Repetindo o argumento do final da demonstração da Proposição 3, obtemos, após integração desta desigualdade diferencial, que

$$h_{\max}(t) \leqslant h_{\max}(0) - 2t, \quad t \in (0,\tau),$$

Mas $|\kappa| = \rho\langle x,\nu\rangle e^h \leqslant |\rho| e^h$ e assim obtém-se, por meio da Proposição 3, uma estimativa uniforme para $|\kappa|$ em $(0,\tau)$. Como $\tau \in (0,\tilde{T})$ é arbitrário, a demonstração está concluída. □

2.3.3 Estimativas a priori refinadas para o gradiente

Nesta subseção estabeleceremos uma estimativa a priori para a função de curvatura $F = F(a_{ij})$ associada a uma solução $\rho > 0$ de (2.22). Isto resulta imediatamente da proposição abaixo, que implica ainda dois fatos cruciais na teoria, a saber, o controle uniforme no tempo sobre o gradiente da solução e a parabolicidade *uniforme* da equação de evolução para ρ. Essas informações nos permitirão, conforme veremos, estabelecer a existência global no tempo de soluções de (2.22) através do controle uniforme, em intervalos finitos, de derivadas de *todas* as ordens de ρ.

Proposição 5. *Seja* $\rho > 0$ *uma solução admissível de (2.22) em* $\mathbb{S}^n \times [0, T)$. *Então existem constantes positivas* $\tilde{C}_1$ *e* $\tilde{C}_2$*, que dependem apenas de* n, F *e* ρ_0 *e suas derivadas até segunda ordem, tais que*

$$\tilde{C}_1 \leqslant \frac{(1 + \frac{|\nabla\rho|^2}{\rho^2})^{\frac{1}{2}}}{\rho F(a_{ij})} \leqslant \tilde{C}_2, \quad t \in [0, T). \tag{2.52}$$

Demonstração. Será conveniente trabalhar com $r = \log \rho$, de forma que inicialmente reescreveremos os invariantes geométricos das hipersuperfícies do fluxo em termos de r. Notando que $\nabla_i \rho = e^r \nabla_i r$ e pondo $\tilde{v}^2 = 1 + |\nabla r|^2$, obtemos

$$g_{ij} = e^{2r}(\delta_{ij} + \nabla_i r \nabla_j r), \tag{2.53}$$

$$g^{ij} = e^{-2r}\left(\delta_{ij} - \frac{\nabla_i r \nabla_j r}{\tilde{v}^2}\right), \tag{2.54}$$

$$h_{ij} = e^r \tilde{v}^{-1}(\delta_{ij} + \nabla_i r \nabla_j r - \nabla_{ij} r), \tag{2.55}$$

e

$$a_{ij} = e^{-r}\tilde{v}^{-1} b_{ij}, \tag{2.56}$$

onde

$$b_{ij} = \gamma_{il}(\delta_{lm} + \nabla_l r \nabla_m r - \nabla_{lm} r)\gamma_{mj}, \tag{2.57}$$

e

$$\gamma_{il} = \left(\delta_{il} - \frac{\nabla_i r \nabla_l r}{\tilde{v}(1 + \tilde{v})}\right). \tag{2.58}$$

Assim, r é uma solução admissível do problema de valor inicial

$$D_t r = \frac{(1 + |\nabla r|^2)}{F(b_{ij})} \quad \text{em} \quad \mathbb{S}^n \times [0, T), \quad r(\cdot, 0) = r_0 = \log \rho_0. \tag{2.59}$$

Escrevamos então (2.59) na forma

$$D_t r = G(c_{ij}) \quad \text{em} \quad \mathbb{S}^n \times [0, T), \tag{2.60}$$

onde

$$G(c_{ij}) = \frac{1}{F(c_{ij})} \tag{2.61}$$

e

$$c_{ij} = (1 + |\nabla r|^2)^{-1} b_{ij}.$$

Mas como $\nabla_i r = \nabla_i \rho/\rho$ implica $|\nabla r|^2 = |\nabla \rho|^2/\rho^2$, (2.56) e a homogeneidade de F nos fornecem

$$\begin{aligned}
G(c_{ij}) &= \frac{1}{F(c_{ij})} \\
&= \frac{1}{(1+|\nabla r|^2)^{-1}F(b_{ij})} \\
&= \frac{1}{(1+|\nabla r|^2)^{-1}e^r(1+|\nabla r|^2)^{\frac{1}{2}}F(a_{ij})} \\
&= \frac{(1+|\nabla r|^2)^{\frac{1}{2}}}{\rho F(a_{ij})},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$G(c_{ij}) = \frac{(1+\frac{|\nabla \rho|^2}{\rho^2})^{\frac{1}{2}}}{\rho F(a_{ij})}. \tag{2.62}$$

Derivando (2.60) com respeito a t, obtemos

$$D_t G = G_{ij} D_t c_{ij} \tag{2.63}$$

onde

$$G_{ij} = -\frac{F_{ij}}{F(c_{ij})^2}. \tag{2.64}$$

Desejamos agora verificar que G satisfaz um equação diferencial conveniente. Para tanto, observe que se derivarmos c_{ij} com respeito a t e observarmos que, por (2.60), valem

$$\nabla_k D_t r = \nabla_k G, \quad \nabla_{kl} D_t r = \nabla_{kl} G,$$

obteremos

$$D_t c_{ij} = \alpha_{ijk}\nabla_k G + \beta_j \nabla_i G + \gamma_i \nabla_j G - \frac{\gamma_{il}\nabla_{lm}G\gamma_{jm}}{1+|\nabla r|^2}. \tag{2.65}$$

Para justificar isto, escrevamos r_i, r_{ij} em vez de $\nabla_i r$, $\nabla_{ij} r$. Com esta convenção,

$$\begin{aligned}
\frac{D_t(\gamma_{il})(\delta_{lm} + r_l r_m - r_{lm})\gamma_{mj}}{1 + |\nabla r|^2} &= -\frac{(\delta_{lm} + r_l r_m - r_{lm})\gamma_{mj}}{1 + |\nabla r|^2}\Bigg(\frac{D_t(r_i r_l)}{\tilde{v}(1+\tilde{v})} \\
&\qquad - \frac{r_i r_l D_t(\tilde{v}(1+\tilde{v}))}{\tilde{v}^2(1+\tilde{v})^2}\Bigg) \\
&= -\frac{(\delta_{lm} + r_l r_m - r_{lm})\gamma_{mj}}{1 + |\nabla r|^2}\Bigg(\frac{r_l \nabla_i D_t r + r_i \nabla_l D_t r}{\tilde{v}(1+\tilde{v})} \\
&\qquad - \frac{r_i r_l r_k \nabla_k G(2\tilde{v}+1)}{\tilde{v}^3(1+\tilde{v})^2}\Bigg) \\
&= -\frac{(\delta_{lm} + r_l r_m - r_{lm})\gamma_{mj}}{1 + |\nabla r|^2}\Bigg(\frac{r_l \nabla_i G + r_i \nabla_l G}{\tilde{v}(1+\tilde{v})} \\
&\qquad - \frac{r_i r_l r_k \nabla_k G(2\tilde{v}+1)}{\tilde{v}^3(1+\tilde{v})^2}\Bigg) \\
&= \beta_j \nabla_i G + P_{ijl} \nabla_l G + Q_{ijk} \nabla_k G \\
&= \beta_j \nabla_i G + P_{ijk} \nabla_k G + Q_{ijk} \nabla_k G,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma_{il}(\delta_{lm} + r_l r_m - r_{lm}) D_t(\gamma_{mj})}{1 + |\nabla r|^2} &= -\frac{\gamma_{il}(\delta_{lm} + r_l r_m - r_{lm})}{1 + |\nabla r|^2}\Bigg(\frac{r_m \nabla_j G + r_j \nabla_m G}{\tilde{v}(1+\tilde{v})} \\
&\qquad - \frac{r_m r_j r_k \nabla_k G(2\tilde{v}+1)}{\tilde{v}^3(1+\tilde{v})^2}\Bigg) \\
&= \gamma_i \nabla_j G + R_{ijm} \nabla_m G + S_{ijk} \nabla_k G \\
&= \gamma_i \nabla_j G + R_{ijk} \nabla_k G + S_{ijk} \nabla_k G,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma_{il}\gamma_{mj} D_t(\delta_{lm} + r_l r_m - r_{lm})}{1 + |\nabla r|^2} &= \frac{\gamma_{il}\gamma_{mj}(r_l \nabla_m G - r_l \nabla_m G - \nabla_{lm} G)}{1 + |\nabla r|^2} \\
&= T_{ijm} \nabla_m G + U_{ijm} \nabla_m G - \gamma_{il}\gamma_{mj}(1 + |\nabla r|^2)^{-1} \nabla_{lm} G \\
&= T_{ijk} \nabla_k G + U_{ijk} \nabla_k G - \gamma_{il}\gamma_{mj}(1 + |\nabla r|^2)^{-1} \nabla_{lm} G,
\end{aligned}$$

de modo que

$$
\begin{aligned}
D_t c_{ij} &= \frac{D_t(b_{ij})}{1+|\nabla r|^2} - b_{ij}\frac{D_t(1+|\nabla r|^2)}{(1+|\nabla r|^2)^2} \\
&= \frac{D_t\{\gamma_{il}(\delta_{lm}+r_l r_m - r_{lm})\gamma_{mj}\}}{1+|\nabla r|^2} - \frac{2b_{ij}r_k\nabla_k D_t r}{(1+|\nabla r|^2)^2} \\
&= \frac{D_t(\gamma_{il})(\delta_{lm}+r_l r_m - r_{lm})\gamma_{mj} + \gamma_{il}D_t(\delta_{lm}+r_l r_m - r_{lm})\gamma_{mj}}{1+|\nabla r|^2} \\
&\qquad + \frac{\gamma_{il}(\delta_{lm}+r_l r_m - r_{lm})D_t(\gamma_{mj})}{1+|\nabla r|^2} - \frac{2b_{ij}r_k\nabla_k D_t r}{(1+|\nabla r|^2)^2} \\
&= \beta_j\nabla_i G + P_{ijk}\nabla_k G + Q_{ijk}\nabla_k G \\
&\qquad + T_{ijk}\nabla_k G + U_{ijk}\nabla_k G - \gamma_{il}\gamma_{mj}(1+|\nabla r|^2)^{-1}\nabla_{lm}G \\
&\qquad + \gamma_i\nabla_j G + R_{ijk}\nabla_k G + S_{ijk}\nabla_k G \\
&= \alpha_{ijk}\nabla_k G + \beta_j\nabla_i G + \gamma_i\nabla_j G - (1+|\nabla r|^2)^{-1}\gamma_{il}\gamma_{jm}
\end{aligned}
$$

onde α_{ijk}, β_j, γ_i, P_{ijk}, Q_{ijk}, R_{ijk}, S_{ijk}, T_{ijk}, U_{ijk}, dependem de ∇r e $\nabla^2 r$, e γ_{ij} é dado por (2.58). Isto completa a dedução de (2.65), que, substituida em (2.63), nos dá

$$
D_t G = \frac{\gamma_{li}F_{ij}\gamma_{jm}}{F(c_{ij})^2(1+|\nabla r|^2)}\nabla_{lm}G + (G_{ij}\alpha_{ijk}\nabla_k G + G_{ij}\beta_j\nabla_i G + G_{ij}\gamma_i\nabla_j G),
$$

de maneira que, se pusermos

$$
A_{ij} = \frac{\gamma_{il}F_{lm}\gamma_{mj}}{F(c_{ij})^2(1+|\nabla r|^2)},
$$

resulta que G satisfaz uma equação diferencial parabólica do tipo

$$
D_t G = A_{ij}\nabla_{ij}G + B_i\nabla_i G.
$$

Pelo príncípio do máximo [27],

$$
\min_{S^n} G(\cdot,0) \leqslant G(\cdot,t) \leqslant \max_{S^n} G(\cdot,0),
$$

o que completa demonstração. □

2.4 Existência de soluções globais

A proposição acima é um dos ingredientes cruciais na demonstração de que as soluções do problema de valor inicial estão globalmente definidas no tempo. Para explicar isto, convencionemos que no restante deste capítulo todas as contantes que aparecem nas estimativas, salvo menção explícita em contrário, dependem somente de n, F de ρ_0 e de suas derivadas até segunda ordem. Observemos inicialmente que a homogeneidade de F nos fornece a estimativa

$$|F(a_{ij})| \leqslant C \max |\kappa|, \quad C > 0,$$

de modo que a Proposição 4 nos fornece então uma estimativa a apriori para F, a saber,

$$|F(a_{ij})| \leqslant C' e^{-t}, \quad t \in [0, T). \tag{2.66}$$

Resulta imediatamente daí, de (2.52) e da Proposição 3 que

$$\frac{|\nabla \rho|}{\rho} \leqslant \tilde{C}_2 \rho |F(a_{ij})| \leqslant \tilde{C}_2', \tag{2.67}$$

e assim obtemos a seguinte estimativa para o gradiente de ρ:

$$\max |\nabla \rho| \leqslant C_3' e^t, \quad t \in [0, T). \tag{2.68}$$

A proposição a seguir resulta então de (2.68) e das Proposições 3 e 4.

Proposição 6. *Seja* $\rho > 0$ *uma solução admissível de (2.22) em* $S^n \times [0, T)$. *Então,*

$$\|\rho\|_{\tilde{C}^2(S^n \times [0,t])} \leqslant C e^t, \quad t \in [0, t). \tag{2.69}$$

Observe que esta proposição implica que, em intervalos finitos, a norma C^2 de ρ está uniformemente limitada. É necessário agora controlar similarmente todas as derivadas superiores em termos do controle explicitado em (2.69). Nesse intuito usaremos a Teorema de Regularização Parabólica [27], mas para tanto faz-se necessário verificar que a equação de evolução para ρ é *uniformemente* parabólica, que é precisamente o conteúdo da proposição a seguir.

Proposição 7. *Existem constantes* $0 < C_1 < C_2$ *tais*

$$C_1 e^{-t} \leqslant F(a_{ij}) \leqslant C_2 e^{-t}, \quad t \in [0, T). \tag{2.70}$$

Demonstração. A dupla estimativa (2.52) implica que $F(a_{ij})$ e $\rho^{-1}(1 + |\nabla \rho|^2/\rho^2)^{1/2}$ possuem o mesmo tipo de crescimento. Mas por (2.67), $(1 + |\nabla \rho|^2/\rho^2)^{1/2}$ possui o mesmo tipo de crescimento de uma contante, donde $F(a_{ij})$ possui o mesmo tipo de crescimento de ρ^{-1}. O resultado segue então da Proposição 3. □

Observação 1. Note que as Proposições 3 e 7 garantem, em virtude da Proposição 2, que todas as soluções de (2.22) são admissíveis enquanto existirem. Em particular, isto justifica a hipótese de admissibilidade nas estimativas a priori até aqui estabelecidas.

De todo modo, de posse de (2.69) e (2.70), a Teoria de Regularidade Parabólica [27], garante que, para cada $k \geqslant 3$, existe $C^{(k)}(t) > 0$, contínua em t, tal que

$$\|\rho\|_{\tilde{C}^k(S^n\times[0,t])} \leqslant C^{(k)}(t), \quad t \in [0,t). \tag{2.71}$$

Com estas estimativas em mãos, é fácil verificar que o problema de valor inicial (2.22) possui uma solução global no tempo. Com efeito, suponha por absurdo que a solução maximal do problema, que é admissível pela Observação 1, está definida em $[0,\tilde{T})$ para $\tilde{T} < +\infty$. Por (2.71), Ascoli-Arzelà e a equação de evolução, todas as derivadas de ρ, tanto espaciais como temporais, estão bem definidas no intervalo $(0,\tilde{T}]$ e a equação de evolução é satisfeita em $t = \tilde{T}$. Resolvendo então a equação com dado inicial $\rho(\cdot,\tilde{T})$ e justapondo esta solução à solução original, obtém-se uma solução de (2.22) definida num intervalo do tipo $[0,\tilde{T}+\epsilon)$, $\epsilon > 0$. Mas isto entra em contradição com a hipótese de $\tilde{T} < +\infty$ ser o tempo maximal de solução. Assim, $\tilde{T} = +\infty$, conforme queríamos.

Este argumento demonstra o Teorema 1, exceto pela descrição do comportamento assintótico das soluções, que trataremos na próxima seção.

2.5 Comportamento assintótico: convergência para esferas

Mostraremos aqui que, para qualquer dado inicial admissível, a solução correspondente de (2.22), se propriamente normalizada, converge para uma função constante. Isto encerra a demonstração do Teorema 2.

A estimativa a seguir, que representa um melhoramento substancial em relação a (2.67), é o passo crucial na estratégia.

Proposição 8. *Se $\rho > 0$ é uma solução de (2.22) em $S^n \times [0,+\infty)$ então existe $\mu > 0$, independente de t, tal que vale*

$$\max_{S^n} \frac{|\nabla \rho(\cdot,t)|}{\rho(\cdot,t)} \leqslant e^{-\mu t} \max_{S^n} \frac{|\nabla \rho_0|}{\rho_0}, \quad t > 0. \tag{2.72}$$

Demonstração. Lembrando que $r = \log \rho$ e derivando (2.59) na direção e_k, obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_k D_t r &= -\frac{(1+|\nabla r|^2)\nabla_k F}{F^2} + \frac{\nabla_k |\nabla r|^2}{F} \\ &= -\frac{(1+|\nabla r|^2)F_{ij}\nabla_k b_{ij}}{F^2} + \frac{2}{F}\nabla_l r \nabla_{kl} r, \end{aligned} \tag{2.73}$$

de modo que multiplicando isto por $\nabla_k r$ e somando em k,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{|\nabla r|^2}{2}\right) &= \nabla_k r \nabla_k D_t r \\ &= -\frac{(1+|\nabla r|^2)}{F^2} F_{ij}\nabla_k b_{ij} \nabla_k r + \frac{2}{F}\nabla_l r \nabla_k r \nabla_{kl} r. \end{aligned} \tag{2.74}$$

Em um ponto $(x_t, t) \in S^n \times [0, T)$ em que $|\nabla r|^2$ atinge um máximo espacial no tempo t, deve ocorrer $\nabla|\nabla r|^2 = 0$, donde

$$\nabla_m r \nabla_{km} r = 0 \quad \text{para todo } k = 1, \cdots, n. \tag{2.75}$$

Observemos agora que, em (x_t, t), temos

$$\nabla_k \gamma_{ij} \nabla_k r = 0. \tag{2.76}$$

Com efeito, usando (2.75),

$$\begin{aligned}
\nabla_k \gamma_{ij} \nabla_k r &= \nabla_k \left(\delta_{ij} - \frac{\nabla_i r \nabla_j r}{(1 + |\nabla r|^2)^{\frac{1}{2}} (1 + (1 + |\nabla r|^2)^{\frac{1}{2}})} \right) \nabla_k r \\
&= -\left(\frac{\nabla_k (\nabla_i r \nabla_j r)(1 + |\nabla r|^2)^{\frac{1}{2}} (1 + (1 + |\nabla r|^2)^{\frac{1}{2}}) - 0}{(1 + |\nabla r|^2)(1 + (1 + |\nabla r|^{\frac{1}{2}}))^2} \right) \nabla_k r \\
&= -\left(\frac{(\nabla_{ki} r \nabla_j r + \nabla_i r \nabla_{kj} r)((1 + |\nabla r|^2)^{\frac{1}{2}})(1 + (1 + |\nabla r|^2)^{\frac{1}{2}})}{(1 + |\nabla r|^2)(1 + (1 + |\nabla r|^2)^{\frac{1}{2}})^2} \right) \nabla_k r \\
&= -\left(\frac{(\nabla_{ki} r \nabla_j r + \nabla_i r \nabla_{kj} r))}{(1 + |\nabla r|^2)^{\frac{1}{2}} (1 + (1 + |\nabla r|^2)^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}} \right) \nabla_k r \\
&= -\left(\frac{(\nabla_{ki} r \nabla_k r \nabla_j r + \nabla_i r \nabla_{kj} r \nabla_k r))}{(1 + |\nabla r|^2)^{\frac{1}{2}} (1 + (1 + |\nabla r|^2)^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}} \right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

como prometido. Agora, (2.75), (2.76) implicam

$$\nabla_k b_{ij} \nabla_k r = -\nabla_{klm} r \nabla_k r \gamma_{il} \gamma_{mj}, \tag{2.77}$$

pois

$$\begin{aligned}
\nabla_k b_{ij} \nabla_k r &= \nabla_k \{\gamma_{il} (\delta_{lm} + \nabla_l r \nabla_m r - \nabla_{lm} r) \gamma_{mj}\} \nabla_k r \\
&= (\nabla_k \gamma_{il} \nabla_k r)(\delta_{lm} + \nabla_l r \nabla_m r - \nabla_{lm} r) \gamma_{mj} \\
&\qquad + \gamma_{il} \{\nabla_k (\delta_{lm} + \nabla_l r \nabla_m r - \nabla_{lm} r)\} \gamma_{mj} \nabla_k r \\
&\qquad + \gamma_{il} (\delta_{lm} + \nabla_l r \nabla_m r - \nabla_{lm} r)(\nabla_k \gamma_{mj} \nabla_k r) \\
&= \gamma_{il} \gamma_{mj} \nabla_k (\delta_{lm} + \nabla_l r \nabla_m r - \nabla_{lm} r) \nabla_k r \\
&= \gamma_{il} \gamma_{mj} (\nabla_{kl} r \nabla_m r \nabla_k r + \nabla_l r \nabla_{km} r \nabla_k r - \nabla_{klm} r \nabla_k r) \\
&= -\nabla_{klm} r \nabla_k r \gamma_{il} \gamma_{mj}.
\end{aligned}$$

Substituindo (2.77) em (2.74) e usando a fórmula de comutação para derivadas covariantes, a saber,

$$\nabla_{klm} r = \nabla_{lmk} r + \delta_{km} \nabla_l r - \delta_{lm} \nabla_k r, \tag{2.78}$$

obtemos que, em (x_t, t),

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{|\nabla r|^2}{2}\right) &= \frac{\tilde{v}^2}{F^2} F_{ij}\nabla_k r \gamma_{il}\gamma_{mj}(\nabla_{lmk} r + \delta_{km}\nabla_l r - \delta_{lm}\nabla_k r)\\
&= \frac{\tilde{v}^2}{F^2}(\gamma_{li}F_{ij}\gamma_{jm}\nabla_{lmk} r\nabla_k r + \gamma_{li}F_{ij}\gamma_{jk}\nabla_l r\nabla_k r - \gamma_{li}F_{ij}\gamma_{jl}|\nabla_k r|^2)\\
&= \frac{\tilde{v}^2}{F^2}(A_{lm}\nabla_{lmk} r\nabla_k r + A_{lk}\nabla_l r\nabla_k r - \tau|\nabla r|^2)\\
&= \frac{\tilde{v}^2}{F^2}(A_{ij}\nabla_{ijk} r\nabla_k r + A_{ij}\nabla_i r\nabla_j r - \tau|\nabla r|^2),
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{|\nabla r|^2}{2}\right) = \frac{\tilde{v}^2}{F^2}\left(A_{ij}\nabla_{ij}\left(\frac{|\nabla r|^2}{2}\right) + A_{ij}\nabla_i r\nabla_j r - \tau|\nabla r|^2\right),
$$

onde

$$
\tau = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}
$$

e $[A_{ij}]$ é a matriz simétrica positiva definida dada por

$$
A_{ij} = \gamma_{il}F_{lm}\gamma_{mj}.
$$

Observe que, em função de (2.58) e 2.70, na verdade temos $A_{ij} \geqslant c\delta_{ij}$, para alguma constante $c > 0$.

Sejam $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ os autovalores de A, de modo que $\lambda_1 \geqslant c$. Então,

$$
\begin{aligned}
\frac{A_{ij}\nabla_i r\nabla_j r}{|\nabla r|^2} &\leqslant \lambda_n\\
&\leqslant \tau - \sum_{i<n}\lambda_i\\
&\leqslant \tau - (n-1)c,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{|\nabla r|^2}{2}\right) \leqslant \frac{\tilde{v}^2}{F^2}A_{ij}\nabla_{ij}\left(\frac{|\nabla r|^2}{2}\right) - \mu\frac{|\nabla r|^2}{2}, \tag{2.79}
$$

onde

$$
\mu = (n-1)c\min_t \frac{\tilde{v}^2}{F^2} > 0.
$$

A proposição resulta agora do Princípio do Máximo Parabólico aplicado à inequação (2.79); (veja [27]). □

Daqui em diante, é conveniente usar a função normalizada $\tilde{\rho} = e^{-t}\rho$, $t > 0$. Repetindo os cálculos (2.14)-(2.19) é imediato escrever os invariantes geométricos do gráfico estrelado correspondente a $\tilde{\rho}$:

$$\begin{array}{lcl} \tilde{g}_{ij} & = & e^{-2t}g_{ij}, \\ \tilde{g}^{ij} & = & e^{2t}g^{ij}, \\ \tilde{\nu} & = & \nu, \\ \tilde{h}_{ij} & = & e^{-t}h_{ij}, \\ [\tilde{g}^{ij}]^{\frac{1}{2}} & = & e^{t}[g^{ij}]^{\frac{1}{2}}, \end{array}$$

donde,

$$\tilde{a}_{ij} = e^t a_{ij}. \tag{2.80}$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned} D_t\tilde{\rho} &= \partial_t\rho e^{-t} - \rho e^{-t} \\ &= \frac{(\rho^2 + |\nabla\rho|^2)^{\frac{1}{2}}}{\rho F(a_{ij})}e^{-t} - \tilde{\rho} \\ &= \frac{(\tilde{\rho}^2 + |\nabla\tilde{\rho}|^2)^{\frac{1}{2}}}{\tilde{\rho}e^tF(a_{ij})} - \tilde{\rho} \\ &= \frac{(\tilde{\rho}^2 + |\nabla\tilde{\rho}|^2)^{\frac{1}{2}}}{\tilde{\rho}F(e^ta_{ij})} - \tilde{\rho} \\ &= \frac{(\tilde{\rho}^2 + |\nabla\tilde{\rho}|^2)^{\frac{1}{2}}}{\tilde{\rho}F(\tilde{a}_{ij})} - \tilde{\rho}, \end{aligned}$$

isto é, $\tilde{\rho}$ é solução global do problema de valor inicial

$$D_t\tilde{\rho} = \frac{(\tilde{\rho}^2 + |\nabla\tilde{\rho}|^2)^{\frac{1}{2}}}{\tilde{\rho}F(\tilde{a_{ij}})} - \tilde{\rho} \quad \text{em} \quad S^n \times [0, T), \;\; \tilde{\rho}(\cdot, 0) = \rho_0. \tag{2.81}$$

Observe agora que as estimativas (2.39), (2.67) e (2.40) implicam um controle do tipo

$$\|\tilde{\rho}\|_{\tilde{C}^2(S^n\times[0,+\infty))} \leqslant C_2',$$

para uma constante $C_2' > 0$ que *não* depende de t. Mais ainda, a equação de evolução é também uniformente parabólica, pois vale

$$C_1 \leqslant F(\tilde{a}_{ij}) \leqslant C_2,$$

conforme decorre de (2.70) e (2.80). Assim, a Teoria de Regularidade Parabólica [27] aplica-se para garantir que, para quaisquer $p \geqslant 0$ e $0 < \alpha < 1$, existe $C_{p,\alpha} > 0$, *independente* de t, tal que

$$\|\tilde{\rho}\|_{\tilde{C}^{p,\alpha}(S^n\times[0,+\infty))} \leqslant C_{p,\alpha} \tag{2.82}$$

Com os preliminares acima estabelecidos, é relativamente fácil agora determinar o comportamento assintótico das soluções de (2.22) e concluir a demonstração do Teorema 1. Com efeito, usemos agora a estimativa melhorada (2.72) para $\nabla\rho$, que nos fornece

$$\max_{S^n} |\nabla\tilde{\rho}(\cdot, t)| \leqslant Ce^{-\mu t}, \quad t > 0. \tag{2.83}$$

Em particular, existe a função limite *constante* e positiva

$$\rho^* = \lim_{t\to\infty} \tilde{\rho}(\cdot, t),$$

e, além disto,

$$\max_{S^n} |\tilde{\rho}(\cdot, t) - \rho^*| \leqslant \tilde{C}e^{-\mu t}. \tag{2.84}$$

É hora de usar a famosa *desigualdade de interpolação*,

$$\int_{S^n} |\nabla^k T|^2 \leqslant C(m, n) \left(\int_{S^n} |\nabla^m T|^2\right)^{\frac{k}{m}} \left(\int_{S^n} |T|^2\right)^{1-\frac{k}{m}},$$

que é válida para qualquer campo de tensores suave T em S^n e inteiros k, m tais que $0 \leqslant k \leqslant m$; (veja [17], Corolário 12.7). Aplicando isto a $T = \nabla\tilde{\rho}$ e usando (2.82) e (2.83), obtemos

$$\sum_{k=0}^{m} \int_{S^n} |\nabla^k \nabla\tilde{\rho}|^2 \leqslant C'(m, n)e^{-\mu' t}, \quad t > 0,$$

onde $\mu' > 0$ não depende do tempo. Noutras palavras, verificamos que a norma de Sobolev de ordem m de $\nabla\tilde{\rho}$ converge para 0 quando $t \to +\infty$, para qualquer $m \geqslant 0$. Usando o Teorema do Mergulho de Sobolev (veja [4], Seção 2.7), obtemos que, se $0 \leqslant l < m - n/2$ então

$$\|\nabla\tilde{\rho}\|_{C^l(S^n)} \leqslant C \left(\sum_{k=0}^{m} \int_{S^n} |\nabla^k \nabla\tilde{\rho}|^2\right) \leqslant \tilde{C}(m, n)e^{-\tilde{\mu} t}, \quad t > 0, \tag{2.85}$$

ou seja,

$$\lim_{t\to+\infty} \|\tilde{\rho}(\cdot, t) - \rho^*\|_{C^\infty(S^n)} = 0.$$

exponencialmente em t. Isto demonstra a asserção no Teorema 1 a respeito do comportamento assintótico de soluções. Como a unicidade de soluções de (2.22) decorre facilmente do Princípio do Máximo Parabólico [27], isto conclui a demonstração do Teorema 1.

Capítulo 3

As desigualdades para integrais de curvatura em domínios k-convexos estrelados

Nesta seção definiremos as integrais de curvatura para hipersufícies fechadas e mergulhadas em $\mathbb{R}^{n+1}$ e demonstraremos, para estas integrais, as famosas desigualdades de Alexandrov-Fenchel, seguindo o argumento de Guan e Li [16]; veja Teorema 3 abaixo. Para isso é preciso determinar como as quocientes isoperimétricos evoluem ao longo de fluxos geométricos com velocidade dada por alguma função das curvaturas principais, pois a idéia da demonstração é precisamente verificar que estes quocientes são *monótonos* ao longo de certos fluxos geométricos e então aplicar o Teorema 1, que descreve o comportamento assintótico de tais fluxos.

3.1 As integrais de curvatura e a desigualdade de Alexandrov-Fenchel

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um domínio limitado com fronteira $M = \partial M$, que supomos suave. Seja

$$\kappa(x) = (\kappa_1(x), \cdots, \kappa_n(x))$$

o vetor das curvaturas principais em $x \in M$ e $\sigma_k(\kappa)$ a k-ésima função simétrica elementar em κ.

Definição 1. Para k inteiro positivo e $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, a *curvatura integral* de ordem $k-1$ de Ω é definida por

$$\mathcal{A}_{k-1}(\Omega) = C_{n,k} \int_M \sigma_{k-1}(\kappa) d\mu_M, \tag{3.1}$$

onde

$$C_{n,k} = \frac{\sigma_k(I)}{\sigma_{k-1}(I)}, \tag{3.2}$$

e $I = (1, \cdots, 1)$, ou seja,

$$C_{n,k} = \frac{n-(k-1)}{k}. \tag{3.3}$$

A clássica *desigualdade de Alexandrov-Fenchel* estabelece que, no caso em que Ω é convexo, vale

$$\left(\frac{\mathcal{A}_{m-1}(\Omega)}{\mathcal{A}_{m-1}(B)}\right)^{\frac{1}{n-(m-1)}} \leqslant \left(\frac{\mathcal{A}_m(\Omega)}{\mathcal{A}_m(B)}\right)^{\frac{1}{n-m}}, \quad 1 \leqslant m \leqslant n, \tag{3.4}$$

onde B é uma bola qualquer em $\mathbb{R}^{n+1}$. Mais ainda, a igualdade vale em (3.4) se, e somente se, Ω é uma bola.

Definição 2. *Diremos que* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *é* k*-convexo se* $\kappa(x) \in \overline{\Gamma}_k$ *para todo* $x \in M$*, onde*

$$\Gamma_k = \{\kappa \in \mathbb{R}^n; \quad \sigma_m(\kappa) > 0, \ \forall \ m \leqslant k\}.$$

Diremos ainda que Ω *é estritamente* k*-convexo se* $\kappa(x) \in \Gamma_k$ *para qualquer* $x \in M$.

O objetivo deste capítulo é precisamente demonstrar o resultado a seguir, que é uma extensão de (3.4) para domínios k-convexos estrelados.

Teorema 3. *([16]) Se* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *é um domínio suave,* k*-convexo e estrelado então a desigualdade (3.4) é válida para* $1 \leqslant m \leqslant k$*. Mais ainda, a igualdade acontece se e somente se* Ω *é uma bola.*

A demonstração que apresentaremos, baseada em [16], usa métodos parabólicos e consiste em verificar que, nas condições do teorema, o *quociente isoperimétrico*

$$I_k(\Omega) = \frac{\mathcal{A}_{k-1}(\Omega)^{\frac{1}{n-(k-1)}}}{\mathcal{A}_k(\Omega)^{\frac{1}{n-k}}}, \tag{3.5}$$

é *não-decrescente* ao longo de uma versão normalizada do fluxo

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k}(\kappa)\nu, \tag{3.6}$$

onde ν é o vetor normal exterior às hipersuperfícies do fluxo. Observe que o quociente isoperimétrico (3.5) é obviamente invariante por homotetias de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Este fluxo é um caso especial do fluxo mais geral tratado no Teorema 1. Com efeito, podemos reescrevê-lo na forma

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\nu}{f(\kappa)}, \quad f = \frac{\sigma_k}{\sigma_{k-1}},$$

e este caso satisfaz as hipóteses gerais do Teorema 1; veja exemplo 1. Como, novamente pelo Teorema 1, o comportamento assintótico de (3.6) é determinado por esferas e (3.4) é equivalente a

$$I_k(\Omega) \leqslant I_k(B), \tag{3.7}$$

a primeira asserção no Teorema 3 verifica-se. A demonstração é então completada com um argumento adicional que trata o caso em que vale a igualdade. Para verificar a monotonicidade de (3.5) ao longo de (3.6), precisamos determinar como os invariantes geométricos de uma hipersurperfícies variam ao longo de tais fluxos, o que faremos na próxima seção.

3.2 As integrais de curvatura via fluxos geométricos

Daqui em diante denotaremos por $M(t)$, $t \geqslant 0$, uma solução de um fluxo geométrico do tipo

$$\frac{\partial X}{\partial t} = H\nu, \tag{3.8}$$

onde $H = H(\kappa)$, e como antes, $\kappa = (\kappa_1, \cdots, \kappa_n)$ é o vetor das curvaturas principais de M. Assim, se

$$H = \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k},$$

recuperamos o fluxo (3.6).

A proposição a seguir determina como os invariantes geométricos das hipersuperfícies do fluxo variam ao longo do tempo.

Proposição 9. *Sob o fluxo (3.8), temos as seguintes equações de evolução:*

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = 2Hh_{ij}, \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} g^{ij} = -2Hh^{ij}, \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nu = -\tilde{\nabla} H, \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (d\mu_g) = H\sigma_1 d\mu_g, \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} h_{ij} = -\tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_j H + H(h^2)_{ij}, \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} h_i^j = -\tilde{\nabla}^i \tilde{\nabla}_j H - H(h^2)_i^j, \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma_m = -\tilde{\nabla}_j([T_{m-1}]_j^i \tilde{\nabla}_i H) - H\frac{\partial \sigma_m}{\partial h_j^i}(h^2)_j^i, \tag{3.15}$$

onde o tensor simétrico g_{ij} *é a métrica induzida,* $d\mu_g$ *é seu elemento de volume,* h_{ij} *é a segunda forma fundamental da hipersuperfície,* $\tilde{\nabla}$ *é o gradiente intrínseco da hipersuperfície,*

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial h^i_j}(h^2)^i_j := \operatorname{tr}(A^2 T_{m-1}),$$

onde $A^i_j := h^i_j = g^{ik}h_{kj}$ *é o tensor de Weingarten,*

$$(h^2)^i_j := g^{is}g^{kl}h_{sk}h_{lj},$$

$[T_l]^i_j$ *é o* l*-ésimo tensor de Newton associado a* A *e, finalmente,*

$$(h^2)_{ij} := g^{kl}h_{ik}h_{lj}.$$

Demonstração. Para demonstrar a primeira relação, note que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}g_{ij} &= \frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial X}{\partial x^i}, \frac{\partial X}{\partial x^j}\right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial X}{\partial x^i}, \frac{\partial X}{\partial x^j}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial X}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial X}{\partial x^j}\right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial X}{\partial t}, \frac{\partial X}{\partial x^j}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial X}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial X}{\partial t}\right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}(H\nu), \frac{\partial X}{\partial x^j}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial X}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}(H\nu)\right\rangle \\
&= \left\langle H\frac{\partial \nu}{\partial x^i}, \frac{\partial X}{\partial x^j}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial X}{\partial x^i}, H\frac{\partial \nu}{\partial x^j}\right\rangle \\
&= 2H\left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x^i}, \frac{\partial X}{\partial x^j}\right\rangle \\
&= 2Hh_{ij}.
\end{aligned}$$

Agora, como $\delta^i_k = g^{is}g_{sk}$, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial t}(g^{is}g_{sk}) && (3.16)\\
&= \frac{\partial g^{is}}{\partial t}g_{sk} + g^{is}\frac{\partial g_{sk}}{\partial t} && (3.17)\\
&\overset{(3.9)}{=} \frac{\partial g^{is}}{\partial t}g_{sk} + g^{is}2Hh_{sk}, && (3.18)
\end{aligned}$$

donde

$$\frac{\partial g^{is}}{\partial t}g_{sk} = -2Hg^{is}h_{sk},$$

que multiplicado por g^{kj} nos fornece

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial t} = \frac{\partial g^{is}}{\partial t}\delta_s^j = \frac{\partial g^{is}}{\partial t} g_{sk} g^{kj} = -2Hg^{is}h_{sk}g^{kj} = -2Hh_k^i g^{kj} = -2Hh^{ij},$$

e (3.10) segue.

Para (3.11), notemos que, como ν é um unitário, sua derivada com respeito a qualquer campo resulta em um vetor tangente à hipersuperfície, o que nos fornece $\partial\nu/\partial t = c^k \partial X/\partial x^k$. Para determinar os c^k's, observe que

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\nu, \frac{\partial X}{\partial x^i} \right\rangle &= c^k \left\langle \frac{\partial X}{\partial x^k}, \frac{\partial X}{\partial x^i} \right\rangle \\
&= c^k g_{ki},
\end{aligned}$$

nos dá

$$\begin{aligned}
c^l &= c^k g_{ki} g^{li} \\
&= \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\nu, \frac{\partial X}{\partial x^i} \right\rangle g^{li},
\end{aligned}$$

donde resulta que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\nu &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\nu, \frac{\partial X}{\partial x^i} \right\rangle g^{ki} \frac{\partial X}{\partial x^k} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \nu, \frac{\partial X}{\partial x^i} \right\rangle - \left\langle \nu, \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial X}{\partial t} \right\rangle \right) g^{ki} \frac{\partial X}{\partial x^k} \\
&= -\left\langle \nu, \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial X}{\partial t} \right\rangle g^{ki} \frac{\partial X}{\partial x^k} \\
&= -\left\langle \nu, \frac{\partial}{\partial x^i}(H\nu) \right\rangle g^{ki} \frac{\partial X}{\partial x^k} \\
&= -\frac{\partial H}{\partial x^i} \langle \nu, \nu \rangle g^{ik} \frac{\partial X}{\partial x^k} \\
&= -\frac{\partial H}{\partial x^i} g^{ik} \frac{\partial X}{\partial x^k} \\
&= -\tilde{\nabla} H,
\end{aligned}$$

onde $\tilde{\nabla} H$ é o gradiente de H.

Uma vez que, fixado j, tem-se

$$\det M = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{ij} \det M_{ij},$$

onde M_{ij} é a matriz obtida a partir de M pela omissão da i-ésima linha e da j-ésima coluna, resulta que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial m_{ij}}\det M &= (-1)^{i+j}\det M_{ij}\\ &= (\operatorname{Adj} M)_{ji} \qquad (3.19)\\ &= \det M M^{ji}\end{aligned}$$

onde $\operatorname{Adj} M$ é a matriz adjunta de M. Note agora que como $d\mu_g = \sqrt{\det(g_{ij})}\,dx$, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}d\mu_g &= \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ij})}}\frac{\partial}{\partial t}\det(g_{ij})dx\\ &= \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ij})}}\left(\frac{\partial\det(g_{ij})}{\partial g_{jk}}\right)\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial t}\right)dx\\ &\overset{(3.19)}{=} \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ij})}}\left(\det(g_{ij})g^{jk}\right)\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial t}\right)dx\\ &\overset{(3.9)}{=} \frac{1}{2}\sqrt{\det(g_{ij})}g^{jk}2Hh_{jk}\,dx\\ &= Hg^{jk}h_{jk}\sqrt{\det(g_{ij})}\,dx\\ &= H\sigma_1\sqrt{\det(g_{ij})}\,dx\\ &= H\sigma_1 d\mu_g,\end{aligned}$$

e isto demonstra (3.12).

Para verificar (3.13), notemos que como $\partial\nu/\partial x^j = c_j^k\partial X/\partial x^k$, e os c_j^k's satisfazem

$$h_{jm} = \left\langle\frac{\partial\nu}{\partial x^j},\frac{\partial X}{\partial x^m}\right\rangle = c_j^k\left\langle\frac{\partial X}{\partial x^k},\frac{\partial X}{\partial x^m}\right\rangle = c_j^k g_{km},$$

temos

$$c_j^l = c_j^k\delta_k^l = c_j^k g_{km}g^{ml} = h_{jm}g^{ml} = h_j^l,$$

donde, $\partial\nu/\partial x^j = h_j^k\partial X/\partial x^k$ e consequentemente

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\partial^2\nu}{\partial x^i\partial x^j},\nu\right\rangle &= \left\langle\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial\nu}{\partial x^j},\nu\right\rangle =\\ &= \left\langle\frac{\partial}{\partial x^i}\left(h_j^l\frac{\partial X}{\partial x_l}\right),\nu\right\rangle\\ &= \left\langle\frac{\partial}{\partial x^i}\left(h_j^l\right)\frac{\partial X}{\partial x_l},\nu\right\rangle + \left\langle\left(h_j^l\right)\frac{\partial^2 X}{\partial x^i x_l},\nu\right\rangle\\ &= \frac{\partial}{\partial x^i}h_j^l\left\langle\frac{\partial X}{\partial x_l},\nu\right\rangle + h_j^l\left\langle\frac{\partial^2 X}{\partial x^i x_l},\nu\right\rangle\\ &= -h_j^l h_{il}.\end{aligned}$$

Disto e de (3.11) decorre que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}h_{ij} &= -\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j}, \nu \right\rangle \\
&= -\left\langle \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}(H\nu), \nu \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j}, \frac{\partial \nu}{\partial t} \right\rangle \\
&= -\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial (H\nu)}{\partial x^j}, \nu \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j}, \frac{\partial \nu}{\partial t} \right\rangle \\
&= -\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial H}{\partial x^j}\nu + H\frac{\partial \nu}{\partial x^j}\right), \nu \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j}, \frac{\partial \nu}{\partial t} \right\rangle \\
&= -\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial H}{\partial x^j}\nu + H\frac{\partial \nu}{\partial x^j}\right), \nu \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j}, -\tilde{\nabla} H \right\rangle \\
&= -\left\langle \frac{\partial^2 H}{\partial x^i \partial x^j}\nu, \nu \right\rangle - \left\langle \frac{\partial H}{\partial x^j}\frac{\partial \nu}{\partial x^i}, \nu \right\rangle - \left\langle \frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{\partial \nu}{\partial x^j}, \nu \right\rangle - \left\langle H\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^i \partial x^j}, \nu \right\rangle + \\
&\quad + \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j}, \tilde{\nabla} H \right\rangle \\
&= -\frac{\partial^2 H}{\partial x^i \partial x^j}\langle \nu, \nu \rangle - \frac{\partial H}{\partial x^j}\left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x^i}, \nu \right\rangle - \frac{\partial H}{\partial x^i}\left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x^j}, \nu \right\rangle - H\left\langle \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^i \partial x^j}, \nu \right\rangle + \\
&\quad + \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j}, \tilde{\nabla} H \right\rangle \\
&= -\frac{\partial^2 H}{\partial x^i \partial x^j} - H\left\langle \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^i \partial x^j}, \nu \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j}, \tilde{\nabla} H \right\rangle
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}h_{ij} &= -\frac{\partial^2 H}{\partial x^i \partial x^j} + H h_j^l h_{il} + \Gamma_{ij}^k \left\langle \frac{\partial X}{\partial x^k}, \tilde{\nabla} H \right\rangle \\
&= -\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial H}{\partial x^k}\right) + H g^{lm} h_{mj} h_{il} \\
&= -\tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_j H + H(h^2)_{ij},
\end{aligned}
$$

onde

$$
\Gamma_{ij}^k = g^{kl}\left\langle \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial X}{\partial x^j}, \frac{\partial X}{\partial x_l} \right\rangle
$$

são os símbolos de Christoffel da hipersuperfície.

Para (3.14), observe que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}h^i_j &= \frac{\partial}{\partial t}(g^{ik}h_{kj}) \\
&= \frac{\partial g^{ik}}{\partial t}h_{kj} + g^{ik}\frac{\partial h_{jk}}{\partial t} \\
&\overset{(3.10),(3.13)}{=} -2Hh^{ik}h_{kj} + g^{ik}(-\tilde{\nabla}_k\tilde{\nabla}_j H + H(h^2)_{kj}) \\
&= -g^{ik}\tilde{\nabla}_k\tilde{\nabla}_j H + Hg^{ik}(h^2)_{kj} - 2Hg^{il}h^k_l h_{kj} \\
&= -g^{ik}\tilde{\nabla}_k\tilde{\nabla}_j H + Hg^{ik}(h^2)_{kj} - 2Hg^{il}g^{km}h_{ml}h_{kj} \\
&= -g^{ik}\tilde{\nabla}_k\tilde{\nabla}_j H + Hg^{ik}(h^2)_{kj} - 2Hg^{il}(h^2)_{lj} \\
&= -\tilde{\nabla}^i\tilde{\nabla}_j H + H(h^2)^i_j - 2H(h^2)^i_j \\
&= -\tilde{\nabla}^i\tilde{\nabla}_j H - H(h^2)^i_j,
\end{aligned}
$$

como desejado. Finalmente, pela regra da cadeia,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\sigma_m &= \frac{\partial \sigma_m}{\partial h^i_j}\frac{\partial h^i_j}{\partial t} \\
&\overset{(3.14)}{=} \frac{\partial \sigma_m}{\partial h^i_j}\left(-\tilde{\nabla}^i\tilde{\nabla}_j H - H(h^2)^i_j\right) \\
&= -\frac{\partial \sigma_m}{\partial h^i_j}\tilde{\nabla}^i\tilde{\nabla}_j H - H\frac{\partial \sigma_m}{\partial h^i_j}(h^2)^i_j \\
&= -[T_{m-1}]^i_j\tilde{\nabla}^i\tilde{\nabla}_j H - H\frac{\partial \sigma_m}{\partial h^i_j}(h^2)^i_j \\
&= -\tilde{\nabla}_j([T_{m-1}]^i_j\tilde{\nabla}_i H) - H\frac{\partial \sigma_m}{\partial h^i_j}(h^2)^i_j,
\end{aligned}
$$

onde usamos, na última igualdade, o fato que T_{m-1} possui divergência nula; (veja [31]), o que demonstra (3.15). Na verdade, pela Proposição 12, podemos reescrever

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\sigma_m &= -\tilde{\nabla}_j([T_{m-1}]^i_j\tilde{\nabla}_i H) - H\operatorname{tr}(A^2T_{m-1}) \\
&= -\tilde{\nabla}_j([T_{m-1}]^i_j\tilde{\nabla}_i H) - H(\sigma_1\sigma_m - (m+1)\sigma_{m+1}).
\end{aligned}
$$

O que conclui a demonstração do teorema. □

Determinemos agora como as integrais de curvatura variam ao longo do fluxo (3.6).

Proposição 10. *Sob o fluxo (3.6), as integrais de curvatura evoluem de acordo com*

$$
\frac{d}{dt}\int_M \sigma_l d\mu_g = (l+1)\int_M \frac{\sigma_{l+1}\sigma_{k-1}}{\sigma_k}d\mu_g. \tag{3.20}
$$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_M \sigma_l d\mu_g &= \int_M \left(\frac{d}{dt}\sigma_l d\mu_g + \sigma_l \frac{d}{dt}(d\mu_g)\right) \\
&= \int_M \Bigg(-\tilde{\nabla}_j([T_{l-1}]^i_j \tilde{\nabla}_i(\frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k})) - \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k}(\sigma_1\sigma_l - (l+1)\sigma_{l+1}) \\
&\qquad + \sigma_l \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k}\sigma_1\Bigg) d\mu_g \\
&= -\int_M \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k}\left(\sigma_1\sigma_l + (l+1)\sigma_{l+1} - \sigma_l\sigma_1\right) d\mu_g \\
&= (l+1)\int_M \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k}\sigma_{l+1} d\mu_g,
\end{aligned}$$

conforme queríamos. □

Estamos agora em condições de demonstrar o Teorema 3. Conforme já mencionamos, a idéia consiste em verificar que o quociente isoperimétrico (3.5) é não-decrescente ao longo do fluxo (3.6). Comecemos considerando o caso em que Ω é *estritamente* k-convexo e seja $X(\cdot, t)$, $t > 0$, uma solução global do fluxo (3.6) com dado inicial descrevendo a fronteira de Ω. Como sabemos, a existência de tal solução é garantida pelo Teorema 1. Definamos então

$$\tilde{X}(\cdot, t) = e^{-\int_0^t r(s)\,ds} X(\cdot, t), \quad t > 0,$$

onde

$$r(t) = \frac{\int_M \frac{\sigma_{k-1}\sigma_{k+1}}{\sigma_k} d\mu_g}{C_{n,k+1}\int_M \sigma_k d\mu_g}. \tag{3.21}$$

Denotemos por $\tilde{\Omega}_t$ o domínio limitado por $\tilde{X}(\cdot, t)$. Como, novamente pelo Teorema 1, $X(\cdot, t)$ converge, a menos de homotetias, para uma esfera, precisamos mostrar que $I_k(\tilde{\Omega}_t)$ é não-decrescente. Usando a Proposição 10 e (3.3), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{A}_k(\tilde{\Omega}_t)}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(C_{n,k+1} e^{-(n-k)\int_0^t r(s)\,ds}\int_M \sigma_k d\mu_g\right) \\
&= P(k,n,t)\left(\int_M \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k}\sigma_{k+1} d\mu_g - r C_{n,k+1}\int_M \sigma_k d\mu_g\right) \\
&= P(k,n,t)\left(\int_M \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k}\sigma_{k+1} d\mu_g - \frac{\int_M \frac{\sigma_{k-1}\sigma_{k+1}}{\sigma_k} d\mu_g d}{C_{n,k+1}\int_M \sigma_k d\mu_g} C_{n,k+1}\int_M \sigma_k d\mu_g\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde

$$P(k,n,t) := (k+1) C_{n,k+1} e^{-(n-k)\int_0^t r(s)\,ds}.$$

De modo similar,

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{A}_{k-1}(\tilde{\Omega}_t)}{dt} &= \frac{d}{dt}(C_{n,k+1}e^{-(n-(k-1))\int_0^t r(s)ds}\int_M \sigma_{k-1}d\mu_g) \\
&= P(k-1,n,t)\left(\int_M \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k}\sigma_k d\mu_g - rC_{n,k}\int_M \sigma_{k-1}d\mu_g\right) \\
&= P(k-1,n,t)\int_M \left(1 - \frac{\int_M \frac{\sigma_{k-1}\sigma_{k+1}}{\sigma_k}d\mu_g}{C_{n,k+1}\int_M \sigma_k d\mu_g}C_{n,k}\right)\sigma_{k-1}d\mu_g \\
&\geqslant P(k-1,n,t)\int_M \left(1 - \frac{\int_M \frac{\sigma_{k-1}(I)\sigma_{k+1}(I)}{\sigma_k^2(I)}\sigma_k d\mu_g}{C_{n,k+1}\int_M \sigma_k d\mu_g}C_{n,k}\right)\sigma_{k-1}d\mu_g \\
&= P(k-1,n,t)\int_M \left(1 - \frac{\sigma_{k-1}(I)\sigma_{k+1}(I)}{\sigma_k^2(I)}\frac{C_{n,k}}{C_{n,k+1}}\right)\sigma_{k-1}d\mu_g \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Newton-Maclaurin, a saber,

$$\frac{\sigma_{k-1}\sigma_{k+1}}{\sigma_{k-1}(I)\sigma_{k+1}(I)} \leqslant \frac{\sigma_k^2}{\sigma_k^2(I)} \tag{3.22}$$

na desigualdade acima; (veja [19], página 52). Note ainda que na última igualdade usamos o fato que

$$\frac{\sigma_{k-1}(I)\sigma_{k+1}(I)}{\sigma_k^2(I)}\cdot\frac{C_{n,k}}{C_{n,k+1}} = \frac{\sigma_{k-1}(I)\sigma_{k+1}(I)}{\sigma_k^2(I)}\cdot\frac{\sigma_k(I)}{\sigma_{k-1}(I)}\cdot\frac{\sigma_k(I)}{\sigma_{k+1}(I)} = 1.$$

Isto mostra então que

$$\frac{d}{dt}I_k(\tilde{\Omega}) \geqslant 0,$$

o que demonstra (3.4) neste caso.

Para analisar o caso da igualdade em (3.4), ainda supondo que Ω é estritamente k-convexo, observe que se este é o caso então devemos necessariamente ter

$$\frac{d\mathcal{A}_{k-1}(\tilde{\Omega}_t)}{dt} = 0.$$

Assim, a igualdade vale em (3.22), ou seja, as curvaturas principais de M coincidem em todos os pontos de M, o que obviamente implica que M é uma esfera redonda para $t \geqslant 0$. Em particular, M_0 é uma esfera.

No caso em que Ω é k-convexo, podemos aproximá-lo na topologia C^∞ por domínios estritamente k-convexos, de modo que a desigualdade (3.4) continua valendo nesta situação geral.

Tratemos agora o caso da igualdade. Em primeiro lugar, a existência de pelo menos um ponto elíptico numa hipersuperfície compacta mergulhada em $\mathbb{R}^{n+1}$ implica que, em algum ponto de M, σ_k e σ_{k-1} são positivas e assim a hipótese de k-convexidade assegura que essas funções permanecem não negativas, o que acarreta a positividade das integrais de curvatura $\int_M \sigma_k d\mu_g$ e $\int_M \sigma_{k-1} d\mu_g$.

Suponhamos então que Ω é um domínio estrelado k-convexo e que vale a igualdade em (3.4). Seja $M_+ = \{x \in M; \sigma_k(\kappa(x)) > 0\}$, de modo que M_+ é aberto e não-vazio. Completaremos a demonstração do Teorema 3 verificando que M_+ é também fechado, donde $M_+ = M$. De fato, basta lembrar que se $\Gamma^+(\sigma_k)$ é a componente conexa de $\{x \in \mathbb{R}^n; \sigma_k(\kappa(x)) > 0\}$ contendo $I = (1, \cdots, 1)$, demonstra-se; (veja [7], [20]), que $\Gamma^+(\sigma_k) = \Gamma_k$, ou seja, Ω de fato é estritamente k-convexo, de modo que o resultado segue do caso já analisado.

Mostremos então que M_+ é fechado. Sejam $\xi \in C_0^2(M_+)$, com suporte compacto em M_+ e M_s a hipersuperfície parametrizada por $X^{(s)} = X + s\xi\nu$, onde X é uma parametrização de M e ν é o normal unitário exterior a M. Seja Ω_s o domínio limitado por M_s. Obviamente, M_s é k-convexo e estrelado para todo s suficientemente pequeno. Portanto, para tais valores de s,

$$I_k(\Omega_s) - I_k(\Omega) = I_k(\Omega_s) - I_k(B) \leqslant 0,$$

pelos resultados já estabelecidos, de forma que, em particular,

$$\frac{d}{ds} I_k(\Omega_s)|_{s=0} = 0. \tag{3.23}$$

Veja ainda que $\partial X^{(s)}/\partial s = \xi\nu$, de modo que usando (3.12) e (3.15) com $H = \xi$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\int_{M_s} \sigma_l(\kappa_s) d\mu_{g_s}|_{s=0} &= \int_M \left(-\tilde{\nabla}_j([T_{l-1}]^i_j \tilde{\nabla}_i \xi) - \xi \mathrm{tr}\,(A^2 T_{m-1}) + \sigma_l \xi \sigma_1\right) d\mu_g \\
&= \int_M (-\xi(\sigma_1\sigma_l - (l+1))\sigma_{l+1} + \sigma_l \xi \sigma_1)\, d\mu_g \\
&= (l+1)\int_M \sigma_{l+1} d\mu_g,
\end{aligned}$$

e assim, por (3.23), obteremos, após alguns cálculos, que

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{ds}\left((\mathcal{A}_{k-1}(\Omega_s)^{\frac{1}{n-k+1}})\cdot(\mathcal{A}_k(\Omega_s)^{-\frac{1}{n-k}})\right)|_{s=0} \\
&= \frac{1}{n-k+1}\mathcal{A}_{k-1}^{-\frac{n-k}{n-k+1}}C_{n,k}k\int_M \sigma_k\xi d\mu_g \mathcal{A}_k^{-\frac{1}{n-k}} \\
&\quad -\mathcal{A}_{k-1}^{\frac{1}{n-k+1}}\frac{1}{n-k}\mathcal{A}_{k-1}^{\frac{-1-n+k}{n-k}}C_{n,k+1}(k+1)\int_M \sigma_{k+1}\xi d\mu_g \\
&= \frac{1}{n-k+1}\left(C_{n,k}\int_M \sigma_{k-1}d\mu_g\right)^{-\frac{n-k}{n-k+1}}C_{n,k}k\int_M \sigma_k\xi d\mu_g \\
&\quad \cdot\left(C_{n,k+1}\int_M \sigma_k d\mu_g\right)^{-\frac{1}{n-k}} - \left(C_{n,k}\int_M \sigma_{k-1}d\mu_g\right)^{\frac{1}{n-k+1}} \\
&\quad \cdot\frac{1}{n-k}\left(C_{n,k+1}\int_M \sigma_k d\mu_g\right)^{\frac{-1-n+k}{n-k}}C_{n,k+1}(k+1)\int_M \sigma_{k+1}\xi d\mu_g \\
&= \frac{C_{n,k}^{\frac{1}{n-k+1}}}{C_{n,k+1}^{\frac{1}{n-k}}}\left\{\frac{(\int_M \sigma_{k-1}d\mu_g)^{-\frac{n-k}{n-k+1}}d\mu_g k\int_M \sigma_k\xi d\mu_g\int_M(\sigma_k d\mu_g)^{-\frac{1}{n-k}}d\mu_g}{n-k+1}\right. \\
&\quad \left.-\frac{(\int_M \sigma_{k-1}d\mu_g)^{\frac{1}{n-k+1}}(\int_M \sigma_k d\mu_g)^{\frac{-1-n-k}{n-k}}(k+1)\int_M \sigma_{k+1}\xi d\mu_g}{n-k}\right\} \\
&= \frac{C_{n,k}^{\frac{1}{n-k+1}}}{C_{n,k+1}^{\frac{1}{n-k}}}\left\{\frac{k}{n-k+1}\left(\int_M \sigma_{k-1}d\mu_g\right)^{-\frac{n-k}{n-k+1}}\left(\int_M \sigma_k d\mu_g\right)^{-\frac{1}{n-k}}\int_M \sigma_k\xi d\mu_g\right. \\
&\quad \left.-\frac{k+1}{n-k}\left(\int_M \sigma_{k-1}d\mu_g\right)^{\frac{1}{n-k+1}}\left(\int_M \sigma_k d\mu_g\right)^{\frac{-1-n-k}{n-k}}\int_M \sigma_{k+1}\xi d\mu_g\right\} \\
&= \frac{C_{n,k}^{\frac{1}{n-k+1}}}{C_{n,k+1}^{\frac{1}{n-k}}}\left(\int_M \sigma_{k-1}d\mu_g\right)^{\frac{1}{n-k+1}}\left(\int_M \sigma_k d\mu_g\right)^{-\frac{1}{n-k}} \\
&\quad \cdot\left\{\frac{k}{n-k+1}\frac{\int_M \sigma_k\xi d\mu_g}{\int_M \sigma_{k-1}d\mu_g} - \frac{k+1}{n-k}\frac{\int_M \sigma_{k+1}\xi}{\int_M \sigma_k d\mu_g}\right\} \\
&= I_k(B)\left\{\frac{k}{n-k+1}\frac{\int_M \sigma_k\xi d\mu_g}{\int_M \sigma_{k-1}d\mu_g} - \frac{k+1}{n-k}\frac{\int_M \sigma_{k+1}\xi d\mu_g}{\int_M \sigma_k}d\mu_g\right\} \\
&= C_2\left(\int_M (C_1\sigma_k - \sigma_{k+1})\xi d\mu_g\right),
\end{aligned}
$$

para qualquer $\xi \in C_0^2(M_+)$, onde

$$C_2 = \frac{k+1}{n-k}\frac{I_k(B)}{\int_M \sigma_k d\mu_g}$$

e

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \frac{k(n-k)}{(n-k+1)(k+1)} \frac{\int_M \sigma_k d\mu_g}{\int_M \sigma_{k-1} d\mu_g} \\
&= \frac{k(n-k)}{(k+1)(n-k+1)} \frac{C_{n,k}}{C_{n,k+1}^{\frac{n-k+1}{n-k}}} \frac{1}{I_k(B)^{n-k+1}(\int_M \sigma_k d\mu_g)^{\frac{1}{n-k}}},
\end{aligned}
$$

donde

$$\sigma_{k+1}(\kappa(x)) = c_1 \sigma_k(\kappa(x)), \quad \forall\, x \in M_+. \tag{3.24}$$

Por outro lado, pela desigualdade de Newton-Maclaurin existe uma constante $\tilde{C}_{k,n} > 0$ tal que

$$\sigma_{k+1}(\kappa(x)) \leqslant \tilde{C}_{k,n} \sigma_k^{1+1/k}(\kappa(x)), \quad x \in M_+, \tag{3.25}$$

donde resulta que

$$\sigma_k(\kappa(x)) \geqslant c_2 > 0, \quad \forall\, x \ \in M_+, \tag{3.26}$$

onde $c_2 = (c_1/\tilde{C}_{k,n})^k$ depende somente de n, k e Ω. De (3.26) segue obviamente que M_+ é fechado e isto conclui a demonstração do Teorema 3.

Capítulo 4

Apêndice

Neste capítulo, recordamos alguns fatos sobre tensores de Newton, funções simétricas elementares e ainda definimos alguns espaços de funções utilizados ao longo deste trabalho.

4.1 Tensores de Newton e funções simétricas elementares

Para cada inteiro $r = 1, 2, \cdots, n$, seja $\sigma_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a r-ésima função simétrica elementar definida por

$$\sigma_r = \sigma_r(\kappa) = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_r}.$$

Por convenção, poremos ainda $\sigma_0 \equiv 1$ e $\sigma_r \equiv 0$ para $r > n$. O teorema a seguir lista algumas propriedades elementares destes invariantes.

Proposição 11. *Se, para $i = 1, \cdots, n$, $\sigma_{r;i}$ denota a soma dos termos em σ_r que não contém o fator κ_i, então valem as seguintes identidades:.*

$$\frac{\partial \sigma_{r+1}}{\partial \kappa_i} = \sigma_{r;i}, \tag{4.1}$$

$$\sigma_{r+1} = \sigma_{r+1;i} + \kappa_i \sigma_{r;i}, \tag{4.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \kappa_i \sigma_{r;i} = (r+1)\sigma_{r+1}, \tag{4.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_{r;i} = (n-r)\sigma_r, \tag{4.4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \kappa_i^2 \sigma_{r;i} = \sigma_1 \sigma_{r+1} - (r+2)\sigma_{r+2}, \tag{4.5}$$

Demonstração. A primeira relação é óbvia. Quanto à segunda, note que

$$\begin{aligned}
\sigma_{r+1;i} + \kappa_i \sigma_{r;i} &= \sum_{i_1<\cdots<i_{r+1}, i_j \neq i} \kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_{r+1}} + \kappa_i \sum_{i_1<\cdots<i_r, i_j \neq i} \kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_1} \\
&= \sum_{i_1<\cdots<i_r} \kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_{r+1}} \\
&= \sigma_{r+1}
\end{aligned}$$

Por outro lado, (4.1) e o Teorema de Euler para funções homogêneas nos fornecem

$$\sum_{i=1}^{n} \kappa_i \sigma_{r;i} = \sum \kappa_i \frac{\partial \sigma_{r+1}}{\partial \kappa_i} = (r+1)\sigma_{r+1},$$

o que demonstra (4.3). Trocando $r+1$ por r em (4.2), obtemos

$$\sigma_r = \sigma_{r;i} + \kappa_i \sigma_{r-1;i}, \tag{4.6}$$

e somando em i,

$$\begin{aligned}
n\sigma_r &= \sum_i \sigma_{r;i} + \sum_i \kappa_i \sigma_{r-1;i} \\
&\overset{(4.3)}{=} \sum_i \sigma_{r;i} + r\sigma_r,
\end{aligned}$$

donde resulta (4.4). Finalmente, por (4.2),

$$\begin{aligned}
\sigma_{r+2} - \sigma_{r+2;i} &= \kappa_i \sigma_{r+1;i} \\
&= \kappa_i(\sigma_{r+1} - \kappa_i \sigma_{r;i}) \\
&= \kappa_i \sigma_{r+1} - \kappa_i^2 \sigma_{r;i},
\end{aligned}$$

e somando em i,

$$n\sigma_{r+2} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{r+2;i} + \sum_{i=1}^{n} \kappa_i \sigma_{r+1} - \sum_{i=1}^{n} {\kappa_i}^2 \sigma_{r;i}.$$

Assim, por (4.4),

$$n\sigma_{r+2} = (n-r-2)\sigma_{r+2} + \sum_{i=1}^{n} \kappa_i \sigma_{r+1} - \sum_{i=1}^{n} \kappa_i^2 \sigma_{r;i},$$

donde,

$$\sum_{i=1}^{n} \kappa_i^2 \sigma_{r;i} = \sigma_1 \sigma_{r+1} - (r+2)\sigma_{r+2},$$

Isto conclui a demonstração da proposição. □

Estreitamente relacionados às funções simétricas elementares estão os tensores de Newton, que passamos a definir. Dados um espaço vetorial real n-dimensional V e uma transformação linear simétrica $A : V \to V$, para cada $0 \leqslant r \leqslant n$, definimos o r-ésimo tensor de Newton $T_r(A)$ associado a A, por

$$T_r(A) = \sigma_r(A)I - \sigma_{r-1}(A)A + \cdots + (-1)^r A^r, \tag{4.7}$$

ou, indutivamente,

$$T_0 = I_n, \quad T_r = \sigma_r I_n - AT_{r-1}, \tag{4.8}$$

onde $\sigma_r(A)$ é a r-ésima função simétrica elementar dos autovalores de A. Resulta do teorema de Cayley-Hamilton que $T_n = 0$.

Cada tensor de Newton, sendo polinomial em A, é auto-adjunto e comuta com A, e portanto tem os mesmos autovetores que A, mas não necessariamente os mesmos autovalores, conforme veremos no teorema abaixo. Para tanto, seja $\{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base ortonormal de autovetores de A com respectivos autovalores $\kappa_1, \cdots, \kappa_n$. É imediato que tal base diagonaliza simultaneamente A e T_r. Representemos por A_i a restrição de A ao subespaço ortogonal a e_i e por $\sigma_r(A_i)$ a r-ésima função simétrica elementar associada a A_i, ou seja, $\sigma_r(A_i)$=$\sigma_{r;i}$. O teorema seguir resume as propriedades básicas dos tensores de Newton.

Proposição 12. *Para cada* $1 \leqslant r \leqslant n$*, valem:*

1. $T_r(e_i) = \sigma_r(A_i)e_i$;
2. $\operatorname{tr} T_r = \sum_{i=1}^{n} \sigma_r(A_i) = (n - r)\sigma_r$;
3. $\operatorname{tr}(AT_r) = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i \sigma_r(A_i) = (r + 1)\sigma_{r+1}$;
4. $\operatorname{tr}(A^2 T_r) = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i^2 \sigma_r(A_i) = \sigma_1\sigma_r - (r + 2)\sigma_{r+2}$;

Demonstração. A demonstração de 1. e das primeiras identidades em 2., 3. e 4. podem ser encontradas em [5]. As demais identidades foram verificadas no Proposição (11). □

4.2 Alguns espaços de funções

Listaremos agora alguns espaços de funções que foram usados ao longo do texto. Dados um natural k e $\alpha \in (0, 1]$, definimos:

1. $C^k(S^n)$ é o espaço de Banach das funções reais em S^n que são k vezes continuamente diferenciáveis, com a norma

$$\|u\|_{C^k(S^n)} = \sum_{|\beta| \leqslant k} \sup_{S^n} |\nabla^\beta u|;$$

2. $C^{k,\alpha}(S^n)$ é o espaço das funções em $C^k(S^n)$ tais que a norma

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(S^n)} = \|u\|_{C^k(S^n)} + \sup_{|\beta|=k}\left\{\sup_{\substack{x,y\in S^n\\ x\neq y}}\left(\frac{|\nabla^\beta u(x)-\nabla^\beta u(y)|}{|x-y|^\alpha}\right)\right\}$$

é finita. Aqui $|x-y|$ representa a distância entre x e y em S^n;

3. Em $S^n\times I$, $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$, denotamos por $\tilde{C}(S^n\times I)$ o espaço das funções a valores reais em $S^n\times I$ que são k vezes continuamente diferenciáveis com respeito a x e $k/2$ vezes continumente diferenciáveis com respeito a t tais que a norma

$$\|u\|_{\tilde{C}^k(S^n\times I)} = \sum_{|\beta|+2r\leqslant k}\sup_{S^n\times I}|\nabla^\beta\partial_t^r u|$$

é finita;

4. $\tilde{C}^{k,\alpha}(S^n\times I)$ é o espaço das funções em $\tilde{C}^k(S^n\times I)$ tais que a norma

$$\|u\|_{\tilde{C}^{k,\alpha}(S^n\times I)} = \|u\|_{\tilde{C}^k(S^n\times I)} + \sup_{|\beta|+2r=k}\sup_{\substack{(x,s),(y,t)\in S^n\times I\\ (x,s)\neq(y,s)}}\left(\frac{\nabla^\beta\partial_t^r u(x,s)-\nabla^\beta\partial_t^r u(y,t)}{(|x-y|+|s-t|)^{\alpha/2}}\right)$$

é finita.

No caso em que Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$, os espaços $C^k(\Omega)$, $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\tilde{C}^k(\overline{\Omega}\times I)$ e $\tilde{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega}\times I)$, são definidos analogamente.

Referências Bibliográficas

[1] ALEXANDROV, A. D. Zur theorie der gemischten volumina von konvexen k$\ddot{o}$rpen, II. Neue Ungleichungen zwischen den gemischten Volumina und Anwendungen. *Mat. Sb. (N. S.)*, v. 2, p. 1205-1238, 1934.

[2] ______. Zur theorie der gemischten volumina von konvex k$\ddot{o}$rpen, III. Die Erweiterung zweeier Lehrsatze Minkowskis über die konvex Polyeder auf beliebige konvexen Flachen. *Mat. Sb. (N. S.)*, v. 3, p. 27-46, 1938.

[3] ANDREWS, B.; HOPPER, C. *The Ricci flow in Riemannian geometry:* a complete proof of the differentiable 1/4-Pinching Sphere Theorem. Heidelberg: Springer, 2010 (Lectures notes in mathematics, 2011)

[4] AUBIN, T. *Nonlinear analysis on manifolds, Monge-Ampère equations*. New York: Springer, 1982.

[5] BARBOSA, J. L. M.; COLARES, A. G. Stability of hypersurfaces with constant r- mean curvature. *Annals Global Analysis and Geometry*, v. 15, p. 277–297, 1997.

[6] BURAGO, Y. D.; ZALGALLER, V. A, *Geometric inequalities*. Berlin: Springer, 1988.

[7] CAFFARELLI, L.; NIREMBERG, L.; SPRUCK, J. The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations, III: Functions of the eigenvalues of the Hessian. *Acta Math.*, v. 155, p. 261-301, 1985.

[8] ______. Nonlinear second order elliptic equations IV: Starshaped compact Weigarten hypersurfaces. In: Ohya, Y.; Kasahara, K,; Shimakura, N. (eds). *Current topics in partial differential equations*. Tokyo: Kinokunize, p. 1-26, 1985.

[9] CHOW, B.; LU, P.; NI., L. Hamilton's Ricci flow. Providence: American Mathematical Society, 2005.

[10] GAGE, M.; HAMILTON, R. S. The heat equation shrinking convex plane curves. *Journal of Differential Geometry*, v. 23, p. 69-96, 1986.

[11] GARDING L. An inequality for hyperbolic polynomials. *J. Math. Mech.*, v. 8, p. 957-965, 1959.

[12] GERHARDT, G. M. Flow of nonconvex hypersufaces into spheres. *Journal of Differential Geometry*, v. 32, p. 299-314, 1990.

[13] GIBBONS, G. M. Collapsing shells and the isoperimetric inequality for black holes. *Classical Quantum Gravity*, v. 14, p. 2905-2915, 1997.

[14] GUAN, P.; WANG, G. A fully nonlinear conformal flow on locally conformally flat manifolds. *J. Reine Angew.*, v. 557, p. 219-238, 2001.

[15] ______. Geometric inequalities on locally conformally flat manifolds. *Duke Math. J.*, v. 557, p. 177-212, 2004.

[16] GUA N, P.; LI, J. The quermassintegral inequalities for k-convex starshaped domains. *Advances in Mathematics*, v. 221, p. 1725-1732, 2009.

[17] HAMILTON, R. S. Three-manifolds with positive curvature operator. Journal of Differential Geometry, v. 17, p. 255-302, 1982.

[18] ______. Four-manifolds with positive curvature operator. Journal of Differential Geometry, v. 4, p. 143-179, 1986.

[19] HARDY, G. H.; LITTLEWOOD, J. E.; PÓLYA, G. *Inequalities*. Cambridge: Cambridge University Press, 1934.

[20] HÖRMANDER, L. *Notions of convexity*, Birkhäusen, 1994. (Progress in Mathematics, 127)

[21] HUISKEN, G. Convexity estimates for mean curvature flow and singularities of mean convex surfaces. *Acta Math.*, v. 183, p. 45-70, 1999.

[22] ______. Flow by mean murvature of convex curfaces into spheres. *Journal of Differential Geometry*, v. 20, p. 237-266, 1984.

[23] ______. On the expansion of convex hipersurfaces by the inverse of symmetric curvature functions. (to appear)

[24] KRYLOV, N. V. *Nonlinear elliptic equations of second order*. Dordrecht: Reidel, 1987.

[25] KRYLOV, N. V.; SAFONOV, M. V. *A certain property of solutions of parabolic equations with measureable coefficients*. *Izvestia Akad. Nauk*, v. 40, p. 161-175, 1980.

[26] LADYZHENSKAYA, O. A.; SOLONNIKOV, V. A.; URAL'TSEVA, N. N. Linear and quasilinear equations of parabolic type. Providence: American Mathematical Society, 1968. (Translations of mathematical monographs, v. 23)

[27] LIEBERMAN, G. *Second order parabolic partial differential equations*. Singapore: World Scientific, 1996.

[28] LIMA, E. L. *Álgebra linear*. 7. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2004. (Coleção Matemática Universitária)

[29] MARCUS, M.; LOPES, L. Inequalities for symmetric functions and Hermitian matrices. *Canadian Journal of Mathematics*, v. 9, p. 305-312, 1957.

[30] MITRINOVIC, D. S. *Analytic inequalities*. Berlim: Heidelberg, 1970.

[31] REILLY, R. C. On the Hessian of a function and the curvature of its graphs. *Michigan Math. J.*, v. 20, p. 373-383, 1973.

[32] SCHNEIDER, R. *Convex bodies:* The Brunn Minkowski theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. (Encyclopedia of mathematics and its applications; v. 44)

[33] SCHNÜRER, O. C. *Geometric evolutions equations.* (Notas de aula)

[34] SPRUCK, J. *Geometric aspects of the theory of fully nonlinear elliptic equations.* (Notas de aula)

[35] TRUDINGER, N. Isoperimetric inequalities for quermassintegrals. *Annales de L'Institut Henri Poincaré: Analyse non linéaire,* v. 11, p. 411-425, 1994.

[36] URBAS, J. On the expansion of starshaped hypersurfaces by symmetric functions of their principal curvatures. *Math. Z.*, v. 205, p. 355-372, 1990.

[37] ———. On the expansion of convex hypersurfaces by symmetric functions of their principal radii of curvatures. *Journal of Differential Geometry*, 1990.