UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ – UFC
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

UMA ABORDAGEM SOBRE SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

ADRIANO CARNEIRO TAVARES

FORTALEZA
2014

ADRIANO CARNEIRO TAVARES

UMA ABORDAGEM SOBRE SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como, requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientação: Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes.

FORTALEZA
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

T228a Tavares, Adriano Carneiro
Uma abordagem sobre sistemas de numeração / Adriano Carneiro Tavares. – 2014.
40 f. : enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2014.
Área de Concentração: Ensino de Matemática
Orientação: Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes.

1. Teoria dos números. 2. Jogos no ensino da matemática. 3. Inovação. I. Título.

CDD 512.7

ADRIANO CARNEIRO TAVARES

UMA ABORDAGEM SOBRE SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 27 / 06 / 2014.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Luiz Antonio Caetano Monte
Universidade de Fortaleza (UNIFOR)

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus que me deu saúde durante esta caminhada.

Aos meus pais, Sr. João Batista Brito Tavares e Sra. Maria Marlene Carneiro Tavares. A minha esposa Leidiana Feliciano Tavares pela dedicação e os ensinamentos nos momentos difíceis em que estive ausente e pelos exemplos de vida.

Ao prof. Dr. Dr. José Othon Dantas Lopes, que ensinou com paciência disponibilizando seu tempo para orientações e correções.

Ao prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo pelo incentivo em concluir esse curso e por nos motivar a inserir as novas idéias do curso de matemática na escola.

Aos alunos deste curso que se disponibilizaram a sugerir algumas idéias para a confecção desse trabalho.

“ O importante não é que o professor já esteja preparado, mas que tenha a disposição de se preparar“.

Nilson José Mac

RESUMO

O presente trabalho apresenta os sistemas de numeração, seus critérios e aplicações para o ensino da matemática básica. Estudamos problemas envolvendo os sistemas de numeração e suas operações. Tivemos como foco os estudantes do Ensino Médio da rede estadual de ensino. Apresentamos de forma simples e resumida, algumas técnicas para solucionar problemas com as operações da aritmética. Essa abordagem é feita através de jogos e curiosidade da matemática. Citamos aqui a tabuada russa de multiplicação. Temos por base teórica as ideias de Henri Wallon que presa à afetividade e o dinamismo mediante o dialogo professor-aluno ou aluno-aluno. Esse dinamismo é feito na aplicação de atividades lúdicas como jogos matemáticos que envolvem desenho, mágica e adivinhação. Apresentamos também os critérios de divisibilidade, a ideia de máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, bem como a utilização dos conceitos da teoria dos conjuntos.

Palavras-chave: Teoria dos números. Sistemas de numeração. Inovação. Jogos.

ABSTRACT

This paper presents the numbering systems, their criteria and applications for teaching basic mathematics. We study problems involving number systems and operations. We focus on the high school students from state schools. We present a simple and brief, a few techniques for solving problems with the operations of arithmetic. This approach is done through games and curiosity of mathematics. We cite the Russian multiplication table. We have a theoretical basis the ideas of Henri Wallon that prey upon affectivity and dynamism by the teacher-student dialogue and student-student. This dynamism is made in the implementation of recreational activities such as math games that involve drawing, magic and divination. We also present the criteria for divisibility, the idea of greatest common divisor and least common multiple, and the use of the concepts of set theory.

Keywords: Number theory. Number system. Innovation. Games.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As nossas primeiras concepções de número e forma datam de tempos tão remotos como a inicial da idade da pedra, a era paleolítica. Durante as centenas de milhares de anos (ou mais) deste período, os homens viviam em cavernas, em condições pouco diferentes das dos animais e as suas principais energias eram orientadas para o processo elementar de recolher alimentos onde fosse possível encontrá-los. Eles faziam instrumentos para caçar e pescar e desenvolveram linguagem para comunicação uns com os outros e enfeitavam suas habitações com certas formas de arte criativa.

Em um sistema de numeração deve-se:

- Dar a cada número representado uma única descrição (ou pelo menos uma representação padrão);
- Refletir as estruturas algébricas e aritméticas dos números.

Durante o neolítico ou início da sedentarização e surgimento da agricultura, existia uma atividade comercial considerável entre as diversas povoações promovendo a formação de linguagens matemáticas através dos algarismos. As palavras dessas linguagens exprimiam coisas muito concretas e pouquíssimas abstrações.

Apesar da grande facilidade de fazer operações com números, pouco progresso se fez no conhecimento de valores numéricos e de relações entre grandezas até a transição da mera coleta de alimentos para a sua produção; desde caçar e pescar para a agricultura. A utilização das operações com números e as relações entre as grandezas trouxeram uma transformação fundamental para o homem, pois através dessa atitude o homem tornou-se ativo perante a natureza.
A importância de uma aula mais lúdica.

Utilizando como motivação o ensino da matemática através de atividades lúdicas promovendo o diálogo e a interação entre professor-aluno e aluno-aluno, propomos a construção de significados e o gosto pela matemática ao explicarmos os procedimentos dos jogos e desafios para os alunos. Seguindo a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDBEN, queremos provocar um avanço na forma de como os alunos vivenciam a linguagem matemática, buscando dar novos estímulos à aprendizagem desta disciplina, através do convívio entre professor aluno e da justificativa da matéria. A própria LDBEN indica, dentre outros aspectos, em seu artigo 35 as finalidades do Ensino Médio:

> *I – a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;*
>
> *II – a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;*
>
> *III – o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;*

Uma das ferramentas de aprendizagem utilizada neste trabalho é o lado afetivo proposto por Henri Wallon. O mesmo relata sobre a formação de um aluno crítico, capaz de compreender pensamentos conceituais e equaciona-lós para uma aplicação futura isso ocorre através de um processo assistemático e contínuo, em que a criança oscila entre a afetividade e a inteligência.

O atual estado da educação brasileira apresenta um grande déficit no que diz respeito ao crescimento do desempenho dos alunos, de modo especial nas ciências da natureza, matemática e suas tecnologias, pois é grande o número de professores que não conseguem relacionar o conteúdo das disciplinas com o cotidiano dos alunos e ainda não possuem a preparação adequada para usufruir de aparatos do laboratório de matemática.

Por fim, sabemos da importância do assunto ***sistemas de numeração*** no currículo das escolas do ensino médio brasileiro. A tendência de trazer uma matemática mais lúdica é oportuna devido a grande evasão nas escolas do ensino público. Percebemos um índice assustador de analfabetismo em linguagem matemática, porém criamos um ambiente onde as atividades propostas são de caráter construtivista.

2 SISTEMA DE NUMERAÇÃO

A numeração escrita nasceu, nas épocas mais primitivas, do desejo de manter registros de gado ou outros bens, com marcas ou traços em paus, pedras, etc., aplicando o princípio da correspondência biunívoca.

Os sistemas de escrita numérica mais antigos que se conhecem são os dos egípcios e dos babilônios, que datam aproximadamente do ano 3500 a.C..

No sistema de numeração atual também utilizamos as letras e os números para nos comunicar na linguagem matemática. No entanto, é necessário aprendermos a diferença entre número e numeral, pois muita gente faz essa troca, mas para sermos claro, número dá ideia de quantidade e numeral é o símbolo que descreve essa quantidade. Atualmente utilizamos os algarismos indo-arábicos, que foram criados pelos hindus, e difundido pelos árabes para a Europa Ocidental.

2.1 Sistema de numeração posicional

O método de numeração de quantidades ao qual estamos acostumados utiliza um sistema de numeração posicional. Isto significa que a posição ocupada por cada algarismo em um número altera seu valor de uma potência de 10 (na base 10) para cada casa à esquerda.

Por exemplo: No sistema decimal (base 10), no número 125 o algarismo 1 representa 100 (uma centena ou 10^2), o 2 representa 20 (duas dezenas ou $2 \text{ x } 10^1$), o 5 representa 5 mesmo (5 unidades ou $5\text{x}10^0$).

Assim, em nossa notação: $125 = 1\times10^2 + 2\times10^1 + 5\times10^0$

2.2 Base de um sistema de numeração

A base de um sistema é a quantidade de algarismos disponíveis para sua representação. A base 10 é hoje a mais usualmente empregada, embora não seja a única utilizada. No comércio pedimos uma dúzia de rosas (base 12) e marcamos o tempo em minutos e segundos (base 60).

Quando lidamos com computadores, é muito comum e conveniente o uso de outras bases, as mais importantes são a binária (base 2), octal (base 8) e hexadecimal (base 16).

TEOREMA:

Seja b um inteiro positivo maior que 1. Então todo inteiro positivo n pode ser representado de maneira única da seguinte forma:

$$n = a_k.b^k + a_{k-1}.b^{k-1} + ... + a_1.b + a_0,$$

onde $k \geq 0$, $a_k \neq 0$ e $0 \leq a_i \leq b$, $i = 0, 1, 2, ..., k$.

Demonstração: Iniciamos pela divisão de n por b obtendo quociente q_0 e resto a_0. Em seguida dividimos q_0 por b obtendo quociente q_1 e resto a_1, e , prosseguindo desta forma, obtemos a seguinte sequência de igualdades:

$$n = bq_0 + a_0$$

$$q_0 = bq_1 + a_1$$

$$q_1 = bq_2 + a_2$$

$$q_2 = bq_3 + a_3$$

....

$$q_{k-2} = bq_{k-1} + a_{k-1}$$

$$q_{k-1} = b.0 + a_k,$$

onde $0 \leq a_j \leq b$, $j = 0, 1, 2, ..., k$.

Agora, na primeira destas equações, substituímos o valor de q_0 dado na segunda. Em seguida substituímos, nesta expressão, o valor de q_1 dado na terceira, e assim sucessivamente, obtendo:

$$n = bq_0 + a_0$$

$$n = b(bq_1 + a_1) + a_0$$

$$n = b^2q_1 + a_1b + a_0$$

$$n = b^2(bq_2 + a_2) + a_1b + a_0$$

$$n = b^3q_2 + a_2b^2 + a_1b + a_0$$

$$n = b^3(bq_3 + a_3) + a_2b^2 + a_1b + a_0$$

$$n = b^4q_3 + a_3b^3 + a_2b^2 + a_1b + a_0$$

...

$$n = b^kq_{k-1} + a_{k-1}b^{k-1} + ... + a_2b^2 + a_1b + a_0$$

$$n = a_kb^k + a_{k-1}b^{k-1} + ... + a_2b^2 + a_1b + a_0.$$

Resta-nos mostrar a unicidade desta representação.

Vamos denotar por $d_b(n)$ o número de representações de n na base b. Queremos, portanto, mostrar que $d_b(n)$ é sempre igual a 1. Como alguns dos coeficientes a_j podem ser nulos podemos supor, excluindo tais termos, que n possa ser representado na forma

$$n = a_kb^k + a_{k-1}b^{k-1} + ... + a_sb^s$$

onde a_k e a_s são não nulos. Logo

$$n - 1 = a_kb^k + a_{k-1}b^{k-1} + ... + a_sb^s - 1$$

$$n - 1 = a_kb^k + a_{k-1}b^{k-1} + ... +(a_s - 1)b^s + b^s - 1$$

$$n - 1 = a_kb^k + a_{k-1}b^{k-1} + ... + (a_s - 1)b^s + (b-1)\sum_{j=0}^{s-1} b^j,$$

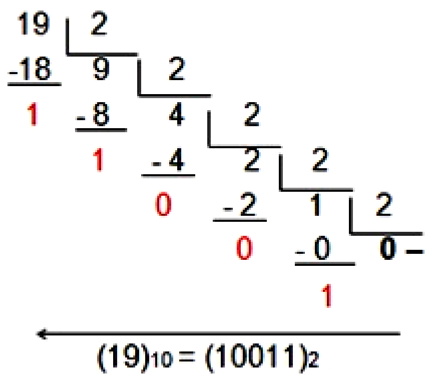
uma vez que $b^s - 1 = (b-1)\sum_{j=0}^{s-1} b^j$.

Isto nos diz que para cada representação de n na base b é possível encontrar uma representação, na base b, para $n - 1$. Logo $d_b(n) \leq d_b(n-1)$. Esta desigualdade nos diz que para $m \geq n$, temos

$$d_b(m) \leq d_b(m-1) \leq d_b(m-2) \leq \ldots \leq d_b(n+1) \leq d_b(n).$$

Logo, como $n > 1$ e $d_b(n) \geq 1$, obtemos $1 \leq d_b(n) \leq d_b(1) = 1$. Esta última série de desigualdades nos garante que $d_b(n) = 1$, o que conclui a demonstração.

Agora vamos explicar uma técnica de **divisões sucessivas** que é utilizada para conversão de números inteiros em qualquer base. Esta técnica utiliza o teorema acima e consiste em dividir o número original pela base 2, o resto da divisão será um dígito e o resultado da divisão é novamente dividido por 2. Esta última etapa se repete até que o resultado da divisão seja zero. Para melhor compreensão do método, a imagem ao lado mostra um exemplo de conversão do número decimal 19 para binário.



Como mostra o exemplo, após as sucessivas divisões, os dígitos (resto da divisão) são ordenados a partir da esquerda para direita, formando assim o código binário. Esse processo se aplica à conversão de qualquer base. Assim, dados quaisquer números N e p $\neq 1$, divide-se inexatamente N por p, toma-se o resto a título de primeiro algarismo (a contar da direita) da representação de N no sistema de base p, e divide-se inexatamente o quociente por p. O resto desta última divisão será o segundo algarismo da representação de N no sistema de base p, o quociente se empregando para a determinação do terceiro algarismo, etc. O processo se interrompe ao se anular um dos quocientes, o respectivo resto fornecendo o algarismo à extrema esquerda da representação.

2.3 Sistema decimal

O estatuto privilegiado do número dez não se pode explicar pelo fato de serem simples as operações que o envolvem, dado que, como mostram as nossas considerações, estas se simplificam justamente graças à escolha do dez como base do sistema de numeração. As razões da preponderância do sistema decimal se situam fora da matemática e podem ser sugeridas pelo fato do dispositivo primordial de cálculo, as mãos, totalizam dez dedos. Resta, a fim de criar o sistema posicional, fazer um passo essencial que consiste em, esgotados os dez dedos, encarar o dez como uma unidade de ordem superior, dez vezes dez, como unidade de ordem seguinte, etc.

2.4 Números binários

O sistema binário ou de base dois é um sistema de numeração posicional em que todas as quantidades se representam com base em dois números, ou seja, zero e um (0 e 1). Os números binários possuem uma grande aplicação na computação e na Álgebra Booleana, pois toda a eletrônica digital e computação estão baseadas nesse sistema binário e na lógica de Boole.

Diante da criação do sistema binário, o homem conseguiu representar os circuitos eletrônicos digitais por meio de números. Isso propiciou a realização das operações lógicas e aritméticas. Os programas de computadores são fabricados e codificados na forma binária e as operações são armazenadas nas mídias (memórias, discos, teclados, etc).

Em seu sistema, uns e zeros também representam conceitos como verdadeiro e falso, ligado e desligado, válido e inválido. Levou mais de um século para que George Boole publicasse a álgebra booleana (em 1854), com um sistema completo que permitia a construção de modelos matemáticos para o processamento computacional. Em 1801 apareceu o tear controlado por cartão perfurado, invenção de Joseph Marie Jacquard, no qual buracos indicavam os uns, e áreas não furadas indicavam os zeros. O sistema está longe de ser um computador, mas ilustrou que as máquinas poderiam ser controladas pelo sistema binário.

Esclarecendo sobre a base de um número qualquer, podemos afirmar que em um sistema de numeração, como a base é um número inteiro, o número de dígitos requerido para formar números dessa base é sempre igual ao valor da base.

Por exemplo, o sistema binário (base 2) possui dois dígitos (0 e 1), enquanto que o decimal (base 10) possui 10 dígitos (de 0 a 9). Segue abaixo alguns números binários utilizados neste trabalho.

a) $42_{10} = (101010)_2$

b) $54_{10} = (110110)_2$

c) $146_{10} = (10010010)_2$

d) $1024_{10} = (10000000000)_2$

Da ideia de algarismos e bases de numeração que foi exposta acima temos como foco principal do presente trabalho promover uma aprendizagem que desperte no aluno a busca pelo conhecimento através de técnicas e curiosidades matemáticas que abordem a teoria dos números.

2.5 Algarismos romanos

Historicamente, Roma foi o centro de uma das mais notáveis civilizações da Antiguidade, período que se manteve entre os anos 753 a.C. (data atribuída à sua fundação) e 1453 (data atribuída à queda do Império Romano do Oriente). Sabe-se muito pouco a respeito da origem da notação romana para números. Os romanos nunca usaram as letras sucessivas de seu alfabeto para propósitos de numeração, como faziam algumas outras civilizações antigas.

Os Romanos utilizaram letras do seu alfabeto para representar números. O sistema de numeração é composto por sete letras: I, V, X, L, C, D e M. A posição das letras interferre na formação dos números, bem como a repetição das letras. Por exemplo: XX = 10 + 10 = 20.

O valor de cada letra está apresentado na tabela abaixo:

I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1.000

Com a utilização das letras da tabela acima, podemos formar todos os números obedecendo às seguintes regras:

I só se coloca à esquerda de V ou de X;

X só se coloca à esquerda de L ou de C;

C só se coloca à esquerda de D ou de M;

Para representar outros números, são escritos alguns algarismos, começando-se do algarismo de maior valor e seguindo a seguinte regra:

- Algarismos de menor ou igual valor à direita são somados ao algarismo de maior valor;
- Algarismos de menor valor à esquerda são subtraídos do algarismo de maior valor.

Assim, XI representa 10 + 1 = 11, enquanto XC representa 100 – 10 = 90. Há ainda a regra adicional de que um algarismo não pode ser repetido lado a lado por mais de três vezes. Portanto, para representar 300, podemos usar CCC; para representar 400, entretanto, precisamos escrever CD.

Os símbolos V, L e D não se repetem. Vejam alguns números formados com a mudança de posição e a repetição entre as letras.

II	2
XX	20
CCC	300
MM	2.000
VII	5 + 2 = 7
LV	50 + 5
MC	1.000 + 100 = 1100

IV	5 – 1 = 4
IX	10 – 1 = 9
XL	50 – 10 = 40
CD	500 – 100 = 400
CM	1000 – 100 = 900

Como visto na tabela acima se repetimos cada símbolo duas ou três vezes (nunca mais que três) o número fica duas ou três vezes maior. Já os números acima de mil vamos representar por uma barra. Logo cada barra sobreposta a uma letra ou a um grupo de letras multiplica o seu valor por mil. Portanto, teremos:

$\overline{V}$	5000
$\overline{XV}$	15000
$\overline{\overline{IV}}$	4000000
$\overline{L}$	50000

Segue abaixo um resumo dos algarismos romanos mais usados.

SISTEMA DE NUMERAÇAO ROMANO							
1	I	10	X	100	C	900	CM
2	II	20	XX	200	C	1000	M
3	III	30	XX	300	CC	3000	MMM
4	IV	40	XL	352	CCCLII	4000	$\overline{IV}$
5	V	50	L	400	CD	5000	$\overline{V}$
6	VI	60	LX	500	D	5700	$\overline{V}$ DCC
7	VII	70	LXX	600	DC	10000	$\overline{X}$
8	VIII	80	LXXX	700	DCC	16500	$\overline{XVI}$ D
9	IX	90	XC	800	DCCC	1000000	$\overline{M}$

3 APLICAÇÕES

Neste capítulo abordaremos os temas: multiplicação, divisão, potência de dois e divisibilidade por nove, bem como as propriedades da teoria de conjuntos através dos números binários e da aplicação dos exercícios.

3.1 Multiplicação russa

Antigamente, quando os camponeses da Rússia precisavam multiplicar um número eles utilizavam um processo curioso de multiplicação, pois calculavam apenas dobros e metades. Diante da dificuldade dos alunos sobre as operações da aritmética e com o intuito de facilitar os cálculos e apresentar uma nova maneira para multiplicar dois números, propomos neste capítulo a multiplicação feita pelos camponeses russos, segundo alguns matemáticos.

Situação problema

Imaginemos que um camponês vendeu 27 animais a 42 rublos cada um. Quanto realizou na venda?

Solução: O número 27 era dividido por 2 ignorando o resto e o 42 era duplicado.
- Continuando a dividir o número do lado esquerdo até obtermos 1 e a duplicar os números do lado direito, temos a tabela abaixo.

27	X	42
13		84
6		168
3		336
1		672

Agora fica a pergunta: como é que chegamos ao resultado? Onde entram as potências de base dois?

O resultado obtém-se somando os números do lado direito que correspondem no lado esquerdo a números ímpares. Vejamos:

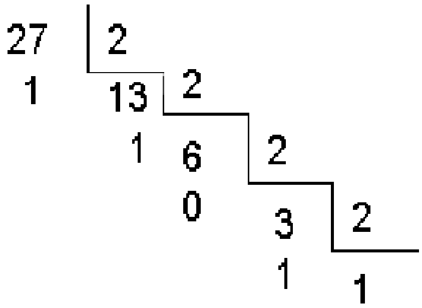
$$27 \times 42 = 42 + 84 + 336 + 672 = 1\,134$$

Utilizando uma calculadora rapidamente verificamos o resultado.

Vamos responder à segunda pergunta: “Onde entram as potências de base dois?”

- na coluna da esquerda, quando dividimos sucessivamente por dois(2) estamos a escrever o número 27 na base dois (2) ou seja:

$27 \equiv 11011_{(2)}$, ou seja, se dividirmos 27 e os quocientes obtidos sucessivamente por 2 até obtermos quociente 1 teremos 27 na base 2:



Tal como os números na base 10, também é possível decompor nas suas ordens os números escritos em qualquer base. Assim: $11011_{(2)} = 1x2^4 + 1x2^3 + 0x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0$

ou $11011_{(2)} = 2^4 + 2^3 + 2^1 + 1$

Se efetuarmos as operações obteremos 27 que é o número original na base 10. Do lado direito, o número 42 foi duplicado e seguidamente foram sendo feitas duplicações, o que corresponde a multiplicar o número 42 sucessivamente por 2, 2^2, 2^3, 2^4. Com um pequeno raciocínio chegamos à seguinte conclusão:

$$27 \times 42 = (2^4 + 2^3 + 2^1 + 1) \times 42$$

$$27 \times 42 = 2^4 \times 42 + 2^3 \times 42 + 2^1 \times 42 + 1 \times 42 \text{ ou}$$

$$27 \times 42 = 16 \times 42 + 8 \times 42 + 2 \times 42 + 1 \times 42 \text{ ou}$$

$$27 \times 42 = 672 + 336 + 84 + 42$$

– os números da segunda coluna correspondentes aos números ímpares da primeira coluna, apresentados na ordem inversa, tendo em atenção as potências de base dois que foram crescendo.

Próximo exemplo!

Para resolvermos, 103 x 211, pelo método camponês, primeiramente devemos criar uma coluna onde serão colocadas as metades a partir de 103:

103 x 211
51
25
12
6
3
1

Após os processos de obter o dobro e a metade, riscamos as linhas cujo os números da coluna da esquerda são pares. Desta forma teremos a tabela abaixo.

103	X	211
51		422
25		844
~~12~~		~~1688~~
~~6~~		~~3376~~
3		6752
1		13504

Somando os números restantes da coluna da direita, encontramos: 211 + 422 + 844 + 6752 + 13504 = 21733.

Usando a ideia russa, vamos praticar o método através do produto dos números 36 e 13.

Escrevemos os dois fatores (36 e 13), um ao lado do outro:
36 --------- 13

Determinamos a metade do primeiro e o dobro do segundo, escrevendo os resultados abaixo dos fatores correspondentes:
36 -------- 13
18 -------- 26

Procedemos do mesmo modo com os resultados obtidos:

36 --------13
18 -------- 26
9 --------- 52

Novamente, repetimos a operação. Como chegamos a um número ímpar (que no caso é 9), devemos subtrair uma unidade e tomar a metade do resultado. De 9, subtraindo 1 ficamos com 8, cuja metade é 4. Procedemos desta forma até chegarmos ao termo igual a 1 na coluna à esquerda. Temos, portanto:

36 ------- 13
18 ------- 26
9 ----- 52 (X)
4 ------ 104
2 -------208
1 ------ 416 (X)

Somando os números da coluna à direita que correspondem aos números ímpares da coluna à esquerda (ou seja, os que marcamos com um X), teremos: 52 + 416 = 468

O resultado obtido (468) será o produto do número 36 por 13.

Apesar da aparente dificuldade dos alunos de decorar a tabuada, temos de levar em conta a capacidade humana de desenvolver métodos para resolução de problemas. Vale resaltar que os camponeses não praticavam a matemática abstrata, mas sim a prática, voltada para seus trabalhos diários e o método de multiplicação proposto acima estava muito bem adaptado às suas necessidades.

3.2 Eletrônica básica e as leis de Morgan

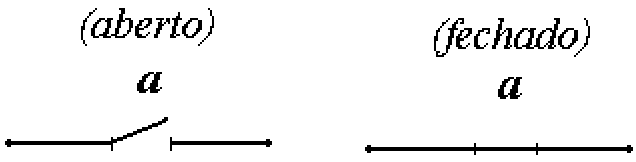
A proposta deste tema é fazer um elo entre os algarismos da base binária e a eletrônica básica para que através desta analogia buscássemos facilitar à aprendizagem dos alunos e demonstrar a tão conhecida e utilizada **Lei de Morgan** da teoria dos conjuntos.

Inicialmente iremos introduzir alguns conceitos básicos que temos no cotidiano escolar. Por exemplo, a ideia de interruptores e os conceitos de circuitos elétricos com associações em série e paralelo.

INTERRUPTORES

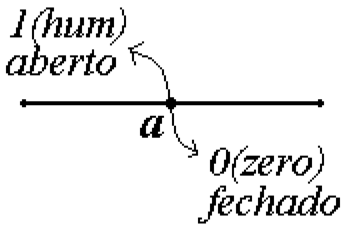
O **interruptor** é um dispositivo simples, usado para abrir ou fechar circuitos elétricos. São utilizados na abertura de redes, em tomadas e entradas de aparelhos eletrônicos, basicamente na maioria das situações que envolvem o ligamento ou desligamento de energia elétrica.

Iremos representar os interruptores como na figura abaixo e indicaremos por ***"a"*** e ***"b"***



Como ilustramos na figura abaixo vamos associar o número 0 (zero) ao circuito fechado e o número 1 (hum) ao circuito aberto.

Ideia Matemática



ASSOCIAÇÕES ENTRE INTERRUPTORES NOS CIRCUITOS ELÉTRICOS

Os sinais de "+" e "**.**" serão no contexto matemático as operações de união e intersecção, isto é, se dois interruptores estão em *paralelo* (veja figura 1) escreveremos $a + b \ ou \ a \cup b$.

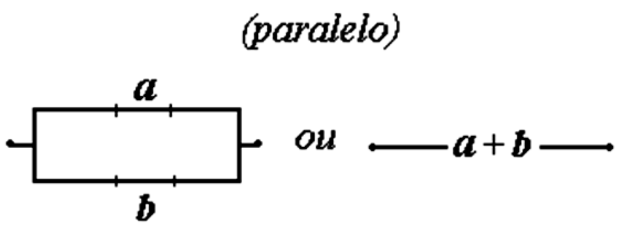


Figura (1)

Caso a associação esteja em série (veja figura 2), vamos denotar por $a.b$ ou $a \cap b$.

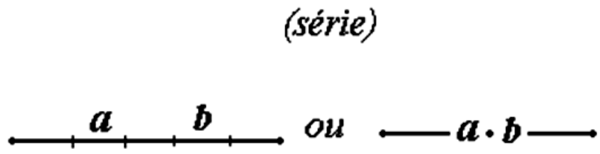


Figura (2)

TABELA VERDADE

Diante da nomenclatura apresentada acima vamos construir uma tabela-verdade usando a União e a Intersecção entre conjuntos. Usaremos ***a* + *b*** para associação em paralelo e ***a* . *b*** para associação em série.

a) Tabela Verdade com a operação da União entre conjuntos.

a	b	$a + b$
1	0	1
0	1	1
1	1	1
0	0	0

b) Tabela Verdade com a operação da Intersecção entre conjuntos.

a	b	$a . b$
1	0	0
0	1	0
1	1	1
0	0	0

A exposição das operações de conjuntos "união e interseção" através das tabelas acima facilitam a demonstração de algumas propriedades tais como, $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$.

Inicialmente vamos apresentar o método tradicional que usa a ideia de está contido e os símbolos da pertinência e demonstra o teorema:

Teorema: Sejam A, B e C três conjuntos quaisquer. Então tem-se:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Demonstração.

Comecemos por provar que $(A\cup(B\cap C)) \subset ((A\cup B)\cap(A\cup C))$.

Seja x um elemento de $A \cup (B \cap C)$. Então $x \in A \vee x \in (B \cap C)$ e portanto $x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$.

Recordando que as proposições $p \vee (q \wedge r)$ e $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ têm o mesmo valor lógico, vem $(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$.

Passando para a linguagem da teoria dos conjuntos temos $x \in ((A \cup B) \cap (A \cup C))$.

A implicação em sentido inverso prova-se de forma análoga. Queremos mostrar que $(A\cup B)\cap(A\cup C)$ está contido em $A \cup (B \cap C)$. Seja x um elemento de $(A \cup B) \cap (A \cup C)$:

$$(x \in (A \cup B)) \wedge (x \in (A \cup C))$$

$$(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$$

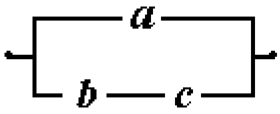
$$x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$$

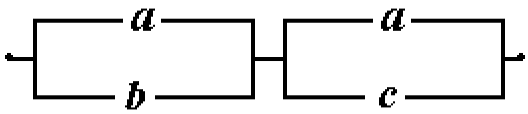
Na linguagem da teoria dos conjuntos obtemos $x \in (A \cup (B \cap C))$.

EQUAÇÃO ALGÉBRICA NO CIRCUITO

Agora vamos construir duas equações da forma $x = a + bc$ e $y = (a + b).(a + c)$

I) $\boldsymbol{x = a + bc}$ II) $\boldsymbol{y = (a + b).(a + c)}$





Nosso objetivo está na proposição a seguir.

"x = y se e somente, se a + bc = (a + b).(a + c)"

a	*b*	*c*	*bc*	*a + b*	*a + c*	*(a + b).(a + c)*	*a + bc*
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Agora que provamos a proposição ***a + bc = (a + b).(a + c)***, podemos fazer a substituição dos símbolos de união e intersecção e verificar as ***leis de Morgan*** da Teoria de conjuntos.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Teorema: Sejam A, B e C três conjuntos quaisquer. Então tem-se:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Demonstração. Por meio da linguagem de circuito usada neste capítulo, podemos reescrever a identidade acima usando o sinal indicativo de intersecção "." ou circuito em série.

(a . b) . c = a . (b . c)

a	*b*	*c*	*a . b*	*b . c*	*(a . b) . c*	*a . (b . c)*
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0

0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Exercícios

Prove as igualdades abaixo usando as tabelas.

a) $A \cap A = A$

b) $A \cup B = B \cup A$

c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3.3 Critérios de divisibilidade

Em algumas situações precisamos apenas saber se um número natural é divisível por outro número natural, sem a necessidade de obter o resultado da divisão. Neste caso utilizamos as regras conhecidas como critérios de divisibilidade. Apresentamos as regras de divisibilidade por 2, 3, 5 e 9.

1. De acordo com o critério de divisibilidade por 3, um número será divisível por 3 se a soma dos seus algarismos decimais o for. A justificativa desse critério não apresenta dificuldade. Ele se baseia no fato das unidades de qualquer ordem (isto é, os números 1. 10, 100, 1000, etc.) deixarem, divididos por 3, o resto 1. Logo, o número decimal $(a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, a_0)_{10}$, isto é, o número A = $a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \ldots + a_1.\ 10 + a_0$, será igual a $(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) + B$, onde B é divisível por 3. Daqui resulta que A será divisível por 3 se, e somente se, o número $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ o for.

Assim, se dividirá por 3 o número decimal 257802, pois a soma 2 + 5 + 7 + 8 + 0 + 2 = 24 dos seus algarismos é um múltiplo de três, e não se dividirá o número 125831, já que a respectiva soma 1 + 2 + 5 + 8 + 3 + 1 = 20 não é um múltiplo de três.

2. O critério de divisibilidade por 5 estipula que será divisível por 5 o número decimal que terminar por 5 ou 0 (isto é, se for divisível por 5 o número de unidades da última casa decimal).

O critério de divisibilidade por 5 resulta do fato da base 10 do sistema se dividir por 5, quer dizer, de se dividirem por 5 as unidades de qualquer ordem salvo, eventualmente a de ordem zero.

Note que:

Considerando que 5 divide N, com N = $a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_1.\ 10 + a_0.$ Então todos os termos de N devem ser divisíveis por 5. Como 5 já divide os termos $a_n.10^n, a_{n-1}.10^{n-1}, ... ,a_1.10,$ pois 5 divide 10. Logo, resta que 5 divida o termo a_0 para isso ocorrer temos que a_0 só poder ser 0 ou 5.

3. Semelhante ao precedente, o critério de divisibilidade por 2 diz que 2 dividirá um número decimal desde que dividir o ultimo dos seus algarismos.

Assumindo que 2 divide N, com N = $a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_1.\ 10 + a_0.$ Temos que todos os termos de N devem ser divisíveis por 2. Como 2 já divide os termos $a_n.10^n, a_{n-1}.10^{n-1}, ... ,a_1.10,$ pois 2 divide 10. Logo, resta que 2 divida o termo a_0 para isso ocorrer temos que a_0 só poder ser 0, 2, 4, 6 ou 8.

4. O critério de divisibilidade por 9 é idêntico ao critério do número três, pois afirma que um número se dividirá por 9, se a soma dos seus algarismos decimais for divisível por 9.

Primeiramente vamos usar o fato que as unidades de qualquer ordem (isto é, os números 1. 10, 100, 1000, etc.) quando divididos por 9, o resto será 1. Portanto, o número decimal denotado por $(a_n\, a_{n-1} ... a_1\, a_0)_{10}$, isto é, o número da forma A = $a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_1.\ 10 + a_0$, será igual a $(a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0) + B$, onde B é divisível por 9. Isto resulta que A será divisível por 9 se, e somente se, o número $a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$ o for.

Usando a regra acima, concluímos que o número decimal 206802 será divisível por 9, pois a soma 2 + 0 + 6 + 8 + 0 + 2 = 18 dos seus algarismos é um múltiplo de nove. Pelo contrário, temos que 24573 não será divisível por 9, já que a soma 2 + 4 + 5 + 7 + 3 = 21 não é um múltiplo de nove.

3.4 O jogo de Euclides

Com o intuito de desenvolver a ideia de múltiplo de um número bem como o raciocínio do cálculo do máximo divisor comum (MDC) destaquei o jogo do matemático EUCLIDES. Este jogo é assim chamado por utilizar o algoritmo de Euclides e consiste em dois jogadores que devem escolher secretamente um número natural não nulo, vamos chamá-los de *a* e *b,* sendo *a* > *b.*

Inicialmente um dos jogadores é sorteado para iniciar o jogo. Ele receberá o número escolhido pelo colega e deverá subtrair do maior número "*a*" um múltiplo não nulo do menor, por exemplo, *k.b.* O segundo jogador receberá o par de números (*a e a – kb*) e repetirá o processo, depois o primeiro receberá os números que o segundo obteve e repetirá o processo, isso acontecerá até quando um jogador obtiver o primeiro zero. Ou seja, isso acaba o jogo e este jogador será o vencedor.

Teorema: Seja *a* e *b* números naturais não nulos escolhidos nessa ordem e com *a* ≥ *b*. O primeiro jogador poderá criar uma estratégia em que ele sempre ganhara se e somente se a razão *a* por *b* for maior que r (número áureo). Para $\frac{a}{b} < r$ ganhara o segundo jogador se soube a estratégia vitoriosa.

Nomenclatura

Dado um par *(a, b)*, com *a* > *b*, os pares *(a – b, b), (a – 2b, b), ... , (a – qb, b),* com *a – qb ≥ 0,* chamam-se pares derivados de *(a, b)*. Assim, *(24, 7), (17, 7), (10, 7), (3, 7)* são os pares derivados de *(31, 7).* É possível provar que, se um jogador receber um par de números *(a, b),* com $1 < \frac{a}{b} < r$ naquela jogada ele não poderá ganhar o jogo e terá como única opção devolver o par *(a – b, b)* que tem razão $\frac{b}{a-b} > r$.

Portanto, é sempre vantajoso para um jogador escolher aquele par cuja razão é menor do que dois e passá-lo ao adversário. Por outro lado, se um jogador receber um par (a, b) com $\frac{a}{b} > 2 > r$, ele terá uma estratégia que lhe garantirá a vitória, pois poderá sempre impedir que o adversário ganhe o jogo no lance seguinte.

Agora vamos ver um exemplo da utilização deste jogo.

- Imagine que os jogadores escolheram os números 31 e 7.

O primeiro jogador deverá devolver para o colega os seguintes números:

7 e (31 – 7) = 24;

7 e (31 – 14) = 17;

7 e (31 – 21) = 10 ou

7 e (31 – 28) = 3.

Suponhamos que ele devolva o par 7 e 10.

Nesse caso, o segundo jogador só terá uma alternativa: responder com o par de números 7 e 3.

Será a vez, novamente, do primeiro jogador, poderá escolher: 3 e 4 ou 3 e 1.

Se jogar {3, 1}, o segundo jogador {1, 0} e será o vencedor.

Se jogar {3, 4}, o segundo jogador será obrigado a jogar {3, 1} e, na jogada seguinte, o primeiro jogador ganhará o jogo.

Exercício: Caso os números escolhidos sejam 26 e 3. Explique quem ganha o jogo.

3.5 Mágicas e adivinhações.

Um processo de fácil interpretação que promove o fascínio a qualquer pessoa é a mágica e a adivinhação. Propomos agora a inserção de algumas curiosidades matemáticas, que através de jogos atraem os alunos e fazem-nos buscar conhecimento. Essa ferramenta “jogos” promove o despertar dos discentes para as operações da aritmética e os critérios de divisibilidade por dois e nove.

Neste trabalho apresentaremos como nosso objetivo o desenvolvimento da teoria dos números através da adivinhação que usa a *divisibilidade por nove*. Este consiste em pensar em um número e descobrir o número oculto. Outro jogo será por meio de uma “mágica” para advinha a idade de qualquer pessoa usando as potências de dois, este último, é chamado de Adivinho Indiscreto.

- Divisibilidade por nove.

Neste jogo usamos o seguinte fato

> ***“Dado um número (N) e a soma de seus algarismos (S), podemos provar que a soma dos algarismos da diferença N – S é sempre um múltiplo de nove”.***

Iniciamos com alguém pensando em um número de vários algarismos. Depois pedimos para a pessoa soma os algarismos do número pensado. Em seguida pede-se que a pessoa subtraia o número pensado pela a soma dos algarismos. Na segunda etapa a pessoa deve ocultar um algarismo da diferença obtida e informar o valor da soma dos algarismos restantes. Usando o critério de divisibilidade por 9 e as operações mencionada a pessoa que propôs a brincadeira adivinha o número ocultado.

Exemplo 1

Considere N = 7.563.145 o número pensado. Teremos que a soma S dos algarismos é 31. Vamos fazer a diferença N – S.

N – S = 7.563.145 – (7 + 5 + 6 + 3 + 1 + 4 + 5)

N – S = 7.563.145 – 31

N – S = 7.563.114

A pessoa oculta, por exemplo, o algarismo cinco e fornece a soma dos algarismos restantes, que é 7 + 6 + 3 +1 + 1 + 4 = 22.

$$\begin{array}{r} 7\,563\,145 \\ -\quad\quad 31 \\ \hline 7\,\cancel{5}63\,114 \end{array}$$

Logo a pessoa adivinha que o número ocultado é o cinco. O segredo é que a soma de todos os algarismos do número (restante da diferença) deve ser divisível por 9, já que 22 + 5 = 27.

Proposição: Seja **N** um número natural formado pelos algarismos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ... , a_k, com *k* inteiro e diferente de um. Se $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ... + a_k$, então N – S é um múltiplo de 9.

Demonstração: Considere a representação decimal do número N:

$$\boldsymbol{N = 10^{n-1}a_1 + 10^{n-2}a_2 + 10^{n-3}a_3 + ... + 10^2a_{n-2} + 10a_{n-1} + a_n}$$

Vamos toma a diferença de $N - S$ e usar o fato de todo número da forma $10^p - 1$, com $p \geq 1$.

$N - S = 10^{n-1}a_1 + 10^{n-2}a_2 + 10^{n-3}a_3 + ... + 10^2a_{n-2} + 10a_{n-1} + a_n$

$- (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n)$

$N - S = (10^{n-1} - 1)a_1 + (10^{n-2} - 1)a_2 + 9a_{n-1}$**,** que é um múltiplo de nove.

Exemplo 2

Imagine que alguém fez a brincadeira do jogo de divisibilidade por 9. Mesmo que uma pessoa não tenha o conhecimento de quem pensou no número ela poderá acertar o número ocultado sabendo apenas a soma. Pergunta-se

“Qual é o número ocultado se a soma foi 29?”

Solução:

A resposta será a diferença do menor múltiplo de 9 maior que 29. Portanto 36 – 29 = 7.

Diante dos exemplos citados acima, verificamos que a brincadeira desperta curiosidade dos alunos e apresenta uma maneira de descobrir quem está com déficit nas operações de somar e subtrair. Também traz a ideia de múltiplos e divisores de um número natural.

No decorrer da brincadeira. Eis a pergunta:

“O que é um múltiplo?”

Resposta de um aluno: é todo número que pode ser dividido por algum número. Exemplo: 4 é múltiplo de 2, pois 4 dividido por 2 é 2. Já 7 não é múltiplo de 3, pois 7 dividido por 3 não é um número inteiro.

Neste momento, a participação está em alta, pois provocamos nos discentes a motivação em descobrir algo sobre matemática. Deste modo, buscamos apresentar a representação de um número decimal, mostramos a fatoração de um número com o intuito de falar de números primos e assim a aula vai tendo um tempo prazeroso onde todos pratica o jogo de adivinhar. Desta forma a justificativa da matéria vai sendo associada ao ato de praticar as adivinhações. Mesmo que um aluno erre nas operações ele repete o raciocínio e tenta até acertar, pois ele deseja participar da brincadeira.

- Potências de dois.

Esta "mágica" pode ser apresentada a estudantes de qualquer nível, porém torna-se mais fácil de explicar o porquê da brincadeira dar certo para alunos que já tem um conhecimento de potência. Chamamos potência de um número todos os números da forma $\boldsymbol{a^b}$, onde $\boldsymbol{a}$ é chamado de base da potência e $\boldsymbol{b}$ o expoente, isto é, o número de vezes que a base vai se expor. Vamos exercitar aqui as potências de dois.

Exemplo:

$2^0 = 1$

$2^1 = 2$

$2^2 = 2 \times 2 = 4$

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

$2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$ ...

Pois bem, agora vamos para o **"Adivinho Indiscreto"**. Inicialmente, construiremos seis listas com números de 1 a 63. Como as listas tem no máximo o número 63, só podemos adivinhar a idade de pessoas com até 63 anos.

Lista 1		Lista 2		Lista 3		Lista 4		Lista 5		Lista 6	
1	33	2	34	4	36	8	40	16	48	32	48
3	35	3	35	5	37	9	41	17	49	33	49
5	37	6	38	6	38	10	42	18	50	34	50
7	39	7	39	7	39	11	43	19	51	35	51
9	41	10	42	12	44	12	44	20	52	36	52
11	43	11	43	13	45	13	45	21	53	37	53
13	45	14	46	14	46	14	46	22	54	38	54
15	47	15	47	15	47	15	47	23	55	39	55

17	49	18	50	20	52	24	56	24	56	40	56
19	51	19	51	21	53	25	57	25	57	41	57
21	53	22	54	22	54	26	58	26	58	42	58
23	55	23	55	23	55	27	59	27	59	43	59
25	57	26	58	28	60	28	60	28	60	44	60
27	59	27	59	29	61	29	61	29	61	45	61
29	61	30	62	30	62	30	62	30	62	46	62
31	63	31	63	31	63	31	63	31	63	47	63

Regras

- O participante apresenta se para o teste e recebe as seis listas conforme mostrado acima:
- Após uma análise dos números o participante deve dizer ao aluno “Adivinho” em qual (quais) das listas sua idade aparece.
- O participante indica, por exemplo, as listas 2, 4 e 6.
- Agora o garoto “Adivinho” basta somar os primeiros números das listas que o participante indicou.

Exemplo 1:

Se o participante indicou as listas 2, 4 e 6, devemos somar os números 2 + 8 + 32 = 42. Logo a idade do participante é 42 anos. Note que:

$42 = 32 + 10$

$42 = 32 + (8 + 2)$

$42 = 2^5 + 2^3 + 2^1$

$42 = 1\times2^5 + 0\times2^4 + 1\times2^3 + 0\times2^2 + 1\times2^1 + 0\times2^0$.

$42 = (101010)_2$. Essa representação do número 42 na base binária nos dar exatamente a quantidade de números que devemos somar. Como apareceu 3 vezes o número 1, temos que somar o primeiro números da primeira coluna das listas 2, 4 e 6.

Uma proposta interessante é só apresentar as listas com os números de 1 a 31e sugerir aos participantes que completem as listas com os números de 33 a 63

Exemplo 2:

Suponha que você não tenha a lista, mas deseja saber a idade da pessoa e as listas em que aparece a idade dela. Como descobrir se o número binário $(110110)_2$ representa a idade dessa pessoa.

Solução: Note que o número $(110110)_2$ pode ser escrito na base dez da seguinte forma.

$(110110)_2 = 1\times2^5 + 1\times2^4 + 0\times2^3 + 1\times2^2 + 1\times2^1 + 0\times2^0 = 32 + 16 + 4 + 2 = 54$

Logo a idade da pessoa é 54 anos e as listas em que estão esta idade são as listas 6, 5, 3 e 2.

3.6 Um jogo chinês.

O jogo consiste de dois parceiros envolve três montículos de pedras, cada jogada consiste em retirar qualquer parte não vazia das pedras de um dos montes e ganha o jogador que recolher a última pedra.

A ideia principal deste jogo consiste em determinar a estratégia mais apropriada para cada um dos jogadores de tal forma que o torne vencedor. Como a aplicação da representação binária facilita a estratégia.

Suponhamos a, b e c representando o número de palitos nos montes, que

$$a = a_m.2^m + a_{m-1}.2^{m-1} + ... + a_1.2 + a_0,$$

$$b = b_m.2^m + b_{m-1}.2^{m-1} + ... + b_1.2 + b_0,$$

$$c = c_m.2^m + c_{m-1}.2^{m-1} + ... + c_1.2 + c_0,$$

É importante admitir que o número que somarmos em cada uma dessas representações é o mesmo, à condição de não se excluir a eventualidade de ser zero qualquer um dos algarismos a_0, b_0, c_0, ..., a_m, b_m, c_m. Pode-se ademais, supor que pelo menos um dos algarismos, a_m, b_m, c_m é distinto do zero. As jogadas conduzirão a substituição de um dos números a, b, c por um número menor. Desta forma, ao se retirar uma parte das pedras do primeiro monte, se modificarão alguns dos algarismos a_0, a_1, a_2, ... , a_m, se modificando certos dos b_0, ..., b_m, ou c_0, ..., c_m, ao se recolherem pedras do segundo ou do terceiro montes, respectivamente.

Consideremos a sequência das somas

$$a_m + b_m + c_m, a_{m-1} + b_{m-1} + c_{m-1}, \dots , a_0 + b_0 + c_0, (*)$$

cada uma das quais pode assumir apenas um dos valores 0, 1, 2 ou 3. Acontece que o jogador que se vir diante de uma sequência (*) compreendendo pelo menos um termo ímpar (que dizer igual a 1 ou 3) poderá assegurar a vitória. De fato, seja, nestas condições, $a_k + b_k + c_k$ a primeira (a contar da esquerda) soma ímpar em (*). Pelo menos um dos respectivos somandos, digamos a_k, deverá, portanto ser um. A tática a empregar consiste então em retirar a quantidade de palitos do primeiro monte que, sem modificar os coeficientes a_m, ..., a_{k+1}, torne a_k no zero e os algarismos a_{k-1}, ..., a_0 em algarismos para os quais cada uma das somas $a_{k-1} + b_{k-1} + c_{k-1}, \dots , a_0 + b_0 + c_0$ é par. Assim, o jogador pode transformar uma sequência (*) contendo termos ímpares numa sequência (*) constituída apenas de números pares. Por outro lado, qualquer jogada modificando necessariamente a paridade de pelo menos um termo de (*), o jogador que, confrontado com uma sequência (*) que inclui termos ímpares, tiver transformando (*) numa sequência de pares, se encontrará após a jogada do adversário, uma vez mais diante de uma sequência (*) incluindo termos ímpares. Logo, o jogador que, uma vez confrontado com uma sequência (*) compreendendo termos ímpares, empregar a tática indicada, se verá sempre diante de uma sequência (*) incluindo termos ímpares e ganhará, a sequência (*) do fim do jogo estando composta de zeros. É óbvio que a omissão da tática por um dos jogadores permite ao adversário de ganhar empregando esta mesma tática. Resumindo, se ambos procurarem empregar a tática, ganhará o jogador que se vir o primeiro diante de uma sequência (*) com um termo ímpar pelo menos, isto é, ganhará o jogador que começa, se a sequência (*) inicial gozar desta propriedade, e ganhará o seu adversário em caso contrário.

Convém observar que são muito mais frequentes as combinações dos números a, b e c que favorecem o jogador que começa. Assim, por exemplo, dos oitos modos possíveis de se arranjar 10 palitos ($a + b + c = 10$) em três montes, sete são propícios a este jogador.

3.7 Uma propriedade notável do sistema ternário.

É importante e razoável caracterizar a capacidade ou o grau de economia de um sistema de numeração pela quantidade de números consecutivos cada um dos quais se expressa por meio de certos caracteres disponíveis.

Assim, se poderá, dispondo de 30 algarismos decimais, escrever qualquer um dos mil números indo do 0 a 999, ao passo que uma reserva de 30 algarismos binários (dois para cada uma das possíveis quinze casas) permitirá expressar qualquer número inferior a 2^{15}. Logo, a capacidade do sistema binário é, uma vez que $2^{15} > 1000$, superior a do sistema decimal.

A fim de determinar que sistema é o mais econômico, comparemos as respectivas capacidades, fixando, para simplificar, o número de símbolos disponíveis a 60. Tal reserva de símbolos permite escrever qualquer número binário de 30 casas, isto é, cada número binário até 2^{30}; qualquer número quaternário de quinze casas, isto é, qualquer número quaternário inferior a 4^{15}, etc. Se poderá, em particular, escrever qualquer número decimal de seis casas, ou seja, qualquer número decimal inferior a 10^6, ou número sexagesimal de uma casa, isto é, qualquer número sexagesimal inferior a 60. O problema se resume, assim, à comparação dos números 2^{30}, 3^{20}, 4^{15}, 5^{12}, 6^{10}, 10^6, 12^5, 15^4, 20^3, 30^2, 60. Verifica-se que o maior deles é 3^{20}. Dado que $2^{30} = (2^3)^{10} = 8^{10}$ e que $3^{20} = (3^2)^{10} = 9^{10}$, a desigualdade $2^{30} < 3^{20}$ decorre da relação óbvia $8^{10} < 9^{10}$. Ademais, se tendo $4^{15} = (2^2)^{15} = 2^{30}$, resulta $3^{20} > 4^{15}$. Não apresenta dificuldade a verificação da cadeia de desigualdades $4^{15} > 5^{12} > 6^{10} > 10^6 > 12^5 > 15^4 > 20^3 > 30^2 > 60$.

O sistema ternário resulta, assim, o mais econômico, seguido neste sentido pelos sistemas binário e quaternário que são equivalentes entre si e sobre passam os demais.

A escolha do número se símbolos disponíveis igual a 60 não influi no resultado e se explica pela comodidade que proporciona a variedade dos seus divisores.

Em geral, n símbolos disponíveis permitirão expressar, num sistema de base x, qualquer número de n/x casas, isto é, qualquer número inferior a $x^{n/x}$. É fácil verificar(*) que a função do argumento real x definida por esta relação assume o seu máximo no ponto e cuja representação aproximada é 2,718281828459045...

Uma ideia do comportamento das funções da família $y = x^{n/x}$, se dá pelo gráfico da figura abaixo (na qual as escalas dos eixos x e y se distinguem).

O inteiro mais próximo do e, isto é, o número três, serve, assim, de base do sistema de enumeração mais econômico. Este fato motivou a criação de dispositivos eletrônicos para a elaboração de números ternários, apesar da complicação que provém do emprego de circuitos com três estados.

A derivada de uma função *y(x)* devendo se anular no ponto em que esta assume um valor extremo e para $y(x) = x^{n/x}$ se tendo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-n}{x^2} x^{n/x} \ln x + \frac{n}{x} x^{n/x-1} = nx^{n/x-2}(1 - \ln x),$$

se acha $\ln x = 1,$ quer dizer, $x = e$.

A derivada $\frac{dy}{dx}$ passando, em $x = e$, de positiva à negativa, a função em apreço assume um máximo neste ponto.

4 CONCLUSÃO

No presente trabalho sobre sistemas de numeração foi possível colocar de forma simples e objetiva a linguagem matemática. As aplicações através dos jogos foram muito úteis para resolver problemas envolvendo divisibilidade e sistemas de numeração. Essa aprendizagem certamente será utilizada pelos alunos no decorrer do ano letivo. Concluímos que a pesquisa sobre os temas abordados nas bibliografias da internet proporcionaram a organização e o desenvolvimento dos tópicos de forma segura e clara, isso promoveu a formação dos alunos quanto à pesquisa.

Observa-se, que a proposta deste trabalho foi construtivista, pois promoveu algo bem diferente do que é feito nas escolas e do que é apresentado em livros didáticos da Educação Básica. O jogo de adivinhação foi uma das partes mais importantes de todo o trabalho, pois estimulou a participação dos discentes. Concluímos que as atividades promoveram a aprendizagem por se tratar de algo organizado e diferente do cotidiano do aluno. As atividades foram aplicadas com caráter prático e contribuiu de forma positiva, para melhorar o ensino da matemática na escola.

A partir do pensamento curricular e das competências e habilidades do ensino de matemática, observou-se uma melhora na fixação do conhecimento adquirido por meio de sua aplicabilidade. Este conhecimento adquirido foi avaliado no envolvimento dos alunos em sala de aula.

Na aplicação dos exercícios de multiplicação russa e adivinhações destacamos que a inserção dos mesmos foi de grande importância para os alunos, pois a modificação do ambiente de sala de aula e principalmente a mudança da prática pedagógica despertaram o prazer e a motivação dos participantes para a realização das atividades propostas como o uso de palitos para formar algarismos romanos, a aplicação da eletricidade na teoria de conjuntos e da álgebra booleana.

Finalizando, queremos ressaltar que as linguagens expostas nas atividades, atuaram em sua totalidade, em busca da construção de um ambiente prazeroso e adequado, para que os alunos tiveram condições estruturais básicas para entender a matematização dos fenômenos que os cercam. Desejamos que o presente trabalho seja bem compreendido e que possa ser utilizado como mais uma ferramenta na melhoria da prática do professor em sala de aula, possibilitando que seus estudantes tornem-se grandes pesquisadores para melhoria da educação brasileira, desta forma, melhorando o ensino da disciplina de matemática no Brasil.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo. *Cálculo das funções de uma variável*. 7ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008. v. 1.

DRUCK, Suely (Org.). *Explorando o ensino da matemática*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de educação básica, 2004.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas, SP: Unicamp, 2004.

FOMIN, S. *Sistema de numeração*. Moscou, Rússia: Mir, 1984.

LIMA, Elon Lages. *Um curso de análise*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.v. 1 (Projeto Euclides)

MORGADO, Augusto César et all. *A matemática do ensino médio*. 6ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. v. 1.

MEYER, P. L. *Probabilidade*: aplicações à estatística. 2ª ed. Rio de Janeiro : Livros técnicos e Científicos 1983.

SANTOS, José Plínio de Oliveira**.** *Introdução à teoria dos números*. Rio de Janeiro: IMPA, 2007