UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

José Loester Sá Carneiro

Sobre Subvariedades Totalmente Reais

Fortaleza
2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

José Loester Sá Carneiro

Sobre Subvariedades Totalmente Reais

Fortaleza
2011

José Loester Sá Carneiro

Sobre Subvariedades Totalmente Reais

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Fernada Ester Camillo Camargo.

Fortaleza
2011

Carneiro, José Loester Sá
C289s Sobre subvariedades totalmente reais/ José Loester Sá Carneiro. –Fortaleza: 2011.
66f.
Orientador: Prof^{a}. Dr^{a}. Fernada Ester Camillo Camargo.
Área de concentração: Matemática
Dissertação (Mestrado)-Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departameto de Matemática, Fortaleza, 2011.

1- Geometria Diferencial. I. Camargo, Fernanda Ester Camillo Camargo (Orient.)
CDD 516.36

folha de aprovação

Dedico este trabalho a minha família e, em especial, a minha esposa Helem Geise Malcher de Oliveira Carneiro.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, por ter me conduzido a este momento da minha vida;

Aos meus pais, Maria Socorro Ribeiro Sá e Francisco Albani Carneiro, pelo imenso amor e cuidado com seus filhos;

As minhas queridas tias Maria das Graças, Esmeralda, Zélia, Leúcia que me ajudaram desde o ínicio dos estudos de Graduação;

Aos meus amigos, minha segunda família, Francisco José, Iria, Italo, Ivinah, Elton, Duda e, em especial, agradeço imensamente a Maria Bernardino (descanse em paz tia Neuzinha) pessoa mais linda que já conheci que sempre me ajudou e por muitas vezes cuidou de mim quando criança;

Agradeço a minha orientadora, professora Fernanda Ester, por todo apoio e dedicação durante a orientação para a realização deste trabalho;

Agradeço aos professores Abdênago Alves e Ezio de Araújo por participarem da banca examinadora da minha dissertação dando sugestões e correções para a melhoria deste trabalho;

Aos professores Antônio Caminha, Alexandre Fernandes e João Lucas, pelos bons cursos ministrados demonstrando grande dedicação e excelente didática;

Aos grandes amigos Francisco de Assis, Luiz Antônio e Fagner, pela boa convivência durante todo o tempo que dividimos salas de estudos;

Agradeço aos amigos, desde o ínicio da Graduação, Kiara, Jocivânia, Fernando Neres e Davi;

A todos os amigos da Pós-Graduação em Matemática da UFC: Adriano, Disson, Nazareno, Flávio França, Cícero, João, João Vítor, Tiarlos, Edno, Fabrício, Adam, Leidmar, Valdenize, Cristiane, Jânio, Jobson, Renato, Rodrigo, Alexandre, Leonardo, Rafael, Elaine e Raquel, pela amizade e momentos de descontração entre os intervalos de estudos;

Agradeço ao colégio Liceu do Conjunto Ceará e a todos os meus queridos alunos pela grande consideração que tiveram comigo durante o período que fui professor desta escola;

A Andrea Dantas, secretária da Pós-Graduação em Matemática da UFC, por toda sua competência e prontidão na assistência a todos os alunos da Pós-graduação;

Agradeço à CAPES e CNPq, pelo apoio financeiro;

“Você nunca sabe que resultados virão da sua
ação. Mas se você não fizer nada,
não existirão resultados.
Mahatma Gandhi

Resumo

Subvariedades analíticas complexas e totalmente reais são duas classes típicas dentre todas as subvariedades de uma variedade quase Hermitiana. Neste trabalho procuramos dar algumas caracterizações de subvariedades totalmente reais. Além disso algumas classificações de subvariedades totalmente reais em formas espaciais complexas são obtidas.

Palavras-chave: Subvariedades totalmente reais, Variedades Kähler, Curvatura seccional Holomorfa.

Abstract

Complex analytic submanifolds and totally real submanifolds are two typical classes among all submanifolds of an almost Hermitian manifolds. In this work, some characterizations of totally real submanifolds are given. Moreover some classifications of totally real submanifolds in complex space forms are obtained.

Keywords: Totally real submanifolds, Kähler manifolds, Holomorphic sectional curvature.

Sumário

Introdução

Dentre todas as subvariedades de uma variedade quase Hermitiana, há duas classes importantes: uma é a classe das subvariedades holomorfas e a outra é a classe das subvariedades totalmente reais. Uma subvariedade M de uma variedade quase Hermitiana $\tilde{M}$ é chamada holomorfa se cada espaço tangente de M é aplicado sobre si mesmo pela estrutura quasi-complexa de $\tilde{M}$. Por outro lado, se a estrutura quasi-complexa de $\tilde{M}$ leva cada espaço tangente de M em seu respectivo espaço normal, então M é dita totalmente real.

O estudo de subvariedades totalmente reais sobre o ponto de vista da geometria Riemanniana teve início por volta de 1970. Tais subvariedades fazem parte da classe das subvariedades Lagrangianas que aparecem naturalmente no contexto da mecânica clássica e física matemática. Por exemplo, como é citado em [3], os sistemas de equações diferenciais parciais de Hamilton-Jacobi estão relacionados com o estudo de subvariedades Lagrangianas e folheações no fibrado cotangente. Além disto, subvariedades Lagrangianas são parte de uma crescente lista de objetos, matematicamente ricos, que ocorrem naturalmente na teoria das cordas.

A proposta do trabalho é estudar algumas propriedades de subvariedades totalmente reais, investigando suas propriedades. Para isto, consideraremos subvariedades totalmente reais imersas em uma forma espacial complexa (conhecidas pelo fato de seu recobrimento universal ser isométrico ao espaço Euclidiano complexo, espaço projetivo complexo ou espaço hiperbólico complexo, dependendo do sinal da curvatura seccional holomorfa constante). Daremos também uma caracterização para superfícies totalmente reais em uma forma espacial complexa e, em seguida, provaremos alguns resultados para superfícies totalmente reais ou holomorfas, usando a teoria de funções analíticas.

O trabalho é dividido em três capítulos e consideramos sempre subvariedades imersas isometricamente. No Capítulo 1, estabelecemos alguns conceitos e ferramentas básicas da teoria, apresentando alguns detalhes da teoria de imersões isométricas, tais como: a definição da segunda forma fundamental σ e dos operadores de Weingarten associados a campos normais à subvariedade; a curvatura média H; as equações de Gauss e Codazzi; definição de tensores associados a segunda forma fundamental, bem como a norma de tais tensores a partir de um referencial móvel local adaptado à imersão. Seguindo o primeiro capítulo, definimos variedades Kähler ao longo de uma breve exposição sobre os conceitos de estrutura complexa em espaços vetoriais, estrutura quasi-complexa em variedades, variedades complexas, métrica Hermitiana e forma Kähler. Destacamos na proposição 1.5 o fato de que a estrutura quasi-complexa de uma variedade Kähler comuta com a conexão de Levi-Civita, isto é, $\nabla_X JY = J\nabla_X Y$ (onde, na variedade Kähler, ∇ é a conexão Riemanniana, J é a estrutura quase complexa e X, Y são campos vetoriais). Consequentemente, esse fato caracteriza uma variedade Kähler.

Depois, trabalhando com variedades Kähler, discutimos a expressão do tensor curvatura Riemanniana e introduzimos a definição de curvatura seccional holomorfa, observando que a curvatura seccional holomorfa determina o tensor curvatura Riemanniana. Além disto, encontramos a expressão para o mesmo em uma forma espacial complexa, isto é, no caso em que a variedade Kähler possui curvatura seccional holomorfa constante.

No capítulo 2, estaremos interessados na dedução de uma fórmula local para o cálculo do Laplaciano do quadrado da norma da segunda forma fundamental, $\|\sigma\|^2$, para subvariedades mínimas localmente simétricas. A dedução de tal fórmula segue de contas feitas usando o método do referencial móvel que foram apreciadas no trabalho da referência [5]. Ainda no segundo capítulo, deduzimos a expressão da curvatura Gaussiana de uma superfície em um sistema de coordenadas isotérmicas e enunciamos o conhecido teorema de E.Hopf. Essas duas ferramentas serão utilizadas na demonstração de alguns dos resultados apresentados sobre subvariedades totalmente reais.

Finalmente, no capítulo 3, trabalhamos com uma subvariedade totalmente real M de uma variedade Kähler $\tilde{M}$. Inicialmente, formalizamos a definição e escolhemos um referencial ortonormal local adaptado em $\tilde{M}$. Em tal referencial, obtemos as componentes do tensor curvatura Riemanniana de $\tilde{M}$ que aparecem na fórmula local para $\Delta\|\sigma\|^2$ obtidas no capítulo anterior. Daí, supondo $\tilde{M}$ uma variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante, digamos $\tilde{c}$, obtemos uma fórmula tipo-Simons apresentada na proposição 3.6. A partir de tal proposição, passamos a apreciar alguns resultados sobre subvariedades totalmente reais, dos quais destacamos:

Teorema 0.1. *Seja M uma subvariedade n-dimensional, compacta, ori-*

entável, totalmente real e mínima imersa em $\tilde{M}^n(\tilde{c})$*, com* $\tilde{c} > 0$*. Se* $\|\sigma\|^2 < \dfrac{n+1}{6}\tilde{c}$*, então* M *é totalmente geodésica.*

Teorema 0.2. *Seja* M *uma subvariedade n-dimensional mínima totalmente real imersa em* $\tilde{M}^n(\tilde{c})$*. Se a curvatura seccional de* M *é constante igual a* c*, então* $c = \frac{1}{4}\tilde{c}$ *(isto é,* M *é totalmente geodésica) ou* $c \leq 0$*.*

Logo em seguida, encerramos nosso trabalho apresentando um breve estudo sobre superfícies totalmente reais, onde definimos a noção de campo de vetores normal isoperimétrico, umbílico, livre de pontos umbílicos e geodésico associado ao operador de Weingarten. Em particular, obtemos:

Teorema 0.3. *Seja* M *uma superfície compacta totalmente real imersa em* $\tilde{M}^{1+p}(\tilde{c})$*. Se*

(i) a curvatura de Gauss de M *não muda de sinal e*

(ii) existe um campo de vetores normal unitário paralelo, livre de pontos umbílicos e isoperimétrico, então M *é flat.*

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Sobre imersões isométricas

Sejam M uma variedade diferenciável, $\tilde{M}$ uma variedade Riemanniana munida de uma métrica $\tilde{g}$ e $\phi : M \hookrightarrow \tilde{M}$ uma imersão. Dizemos que M é uma subvariedade Riemanianna imersa isometricamente em $\tilde{M}$ quando dotamos M com a métrica induzida por ϕ, ou seja, denotando por g a métrica de M, temos

$$g(X_p, Y_p) = \tilde{g}(\phi_* X_p, \phi_* Y_p), \text{ para todo } p \in M \text{ com } X_p, Y_p \in T_pM.$$

Por simplicidade, denotaremos g e $\tilde{g}$ apenas por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Para cada $p \in M$, o produto interno obtido a partir da métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $T_p\tilde{M}$ induz uma decomposição em soma direta ortogonal

$$T_p\tilde{M} = T_pM \oplus T_pM^{\perp}.$$

Denotando o espaço dos campos tangentes a $\tilde{M}$, campos tangentes a M e dos campos que são ortogonais a M, respectivamente, por $\mathfrak{X}(\tilde{M})$, $\mathfrak{X}(M)$ e

$\mathfrak{X}^{\perp}(M)$, temos que restrito a M, $\tilde{X} = (\tilde{X})^{\top} + (\tilde{X})^{\perp}$, onde $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$, $(\tilde{X})^{\perp} \in \mathfrak{X}(M)$ e $(\tilde{X})^{\perp} \in \mathfrak{X}(M)$

Sejam $\tilde{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de $\tilde{M}$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Se X_1, X_2 são extensões locais de X e Y_1, Y_2 são extensões locais de Y a $\tilde{M}$. Segue do fato de $\nabla_{X_i} Y_i(p)$ depender apenas de $X_i(p)$ e de Y_i ao longo de uma curva qualquer em $\tilde{M}$ que

$$\tilde{\nabla}_{X_1} Y_1 = \tilde{\nabla}_{X_2} Y_2.$$

Portanto, escrevendo $\tilde{\nabla}_X Y$ para denotar $\tilde{\nabla}_{X_1} Y_1$, onde X_1 e Y_2 denotam extensões locais quaisquer de X e Y a $\tilde{M}$, obtemos um campo vetorial bem definido $\tilde{\nabla}_X Y \in \mathfrak{X}(M)$. Além disto, a conexão de Levi-Civita de M pode ser reobtida da seguinte forma:

Proposição 1.1. *Sejam $\phi : M^n \hookrightarrow \tilde{M}^{n+k}$ uma imersão isométrica e ∇, $\tilde{\nabla}$ as conexões Riemaniannas de M e $\tilde{M}$, respectivamente. Para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos $\nabla_X Y = (\tilde{\nabla}_X Y)^{\top}$.*

Seja σ a segunda forma fundamental da imersão $\phi : M \hookrightarrow \tilde{M}$ dada por,

$$\sigma(X, Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, \tag{1.1}$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Para um campo $\xi \in \mathfrak{X}^{\perp}(M)$, escrevemos $\tilde{\nabla}_X \xi = -A_{\xi} X + \nabla^{\perp}_X \xi$, onde $-A_{\xi} X$ denota a componente tangente e $\nabla^{\perp}_X \xi$ denota a componente normal de $\tilde{\nabla}_X \xi$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \langle \sigma(X, Y), \xi \rangle &= \langle \tilde{\nabla}_X Y, \xi \rangle = -\langle Y, \tilde{\nabla}_X \xi \rangle \\ &= -\langle Y, -A_{\xi} X \rangle = \langle A_{\xi} X, Y \rangle. \end{aligned}$$

Como σ é bilinear e simétrica (veja por exemplo [6]), temos que, A_{ξ}, em cada ponto $p \in M$, é um operador linear simétrico, denominado o operador de

Weingerten com respeito ao campo normal ξ. Um campo $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ é dito paralelo à imersão se $\nabla^{\perp}_X \xi = 0$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Construindo um referencial ortonormal local, $\{e_1, \ldots, e_{n+k}\}$, adaptado à imersão $\phi : M \hookrightarrow \tilde{M}$, isto é, tal que restrito a uma vizinhança de M, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ forma um referencial local em M, definimos o campo

$$H = \frac{1}{n} tr\sigma = \frac{1}{n} \sum \sigma(e_i, e_i) \in \mathfrak{X}^{\perp}(M). \tag{1.2}$$

Observemos que, sendo $\sigma(e_i, e_i) = \langle \sigma(e_i, e_i), e_\alpha \rangle = \langle A_{e_\alpha} e_i, e_i \rangle e_\alpha$, também podemos escrever,

$$H = \frac{1}{n} tr(A_{e_\alpha}) e_\alpha, \text{ com } n+1 \leq \alpha \leq n+k, \tag{1.3}$$

o que mostra que H independe tanto do referencial tangente $\{e_1, \ldots, e_n\}$ quanto do referencial normal $\{e_{n+1}, \ldots, e_{n+k}\}$. Dessa forma, fica bem definido o campo $H = \frac{1}{n} tr\sigma$, conhecido como o vetor curvatura média em cada ponto de M.

Definição 1.1. *Uma subvariedade Riemanianna M imersa isometricamente em $\tilde{M}$ é dita mínima se $H = 0$.*

A curvatura de uma variedade Riemanniana qualquer, digamos N, é definida, para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$, por

$$R(X, Y) : \mathfrak{X}(N) \to \mathfrak{X}(N),$$

onde $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$.

Para a segunda forma fundamental σ e $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, definimos

$$(\nabla^{\perp}_X \sigma)(Y, Z) = \nabla^{\perp}_X \sigma(Y, Z) - \sigma(\nabla_X Y, Z) - \sigma(Y, \nabla_X Z).$$

A proposição a seguir relaciona, para campos em M, as componentes tangente e normal da curvatura Riemanianna $\tilde{R}$, de $\tilde{M}$, com a curvatura R, de M, e a segunda forma fundamental σ da imersão. As equações que se apresentam são conhecidas como as equações de Gauss e Codazzi.

Proposição 1.2. *Se $\phi : M \hookrightarrow \tilde{M}$ é uma imersão isométrica e $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, então:*

(a) $(\tilde{R}(X,Y)Z)^{\top} = R(X,Y)Z + A_{\sigma(X,Z)}Y - A_{\sigma(Y,Z)}X$. *(Gauss)*

(b) $(\tilde{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_{X}\sigma)(Y,Z) - (\nabla^{\perp}_{Y}\sigma)(X,Z)$. *(Codazzi)*

Definição 1.2. *Um r-tensor em uma variedade Riemanianna qualquer N é uma aplicação T, r-linear,*

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(N) \times \ldots \times \mathfrak{X}(N)}_{r\ fatores} \to \mathcal{D}(N),$$

onde $\mathcal{D}(N)$ denota o espaço das funções diferenciáveis em N.

Dessa forma, fixados r campos $X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{X}(N)$ e T um r-tensor, temos que $T(X_1, \ldots, X_r)$ é uma função diferenciável em M e T é linear em cada argumento, isto é,

$$T(X_1, \ldots, fX+Y, \ldots, X_r) = fT(X_1, \ldots, X, \ldots, X_r) + T(X_1, \ldots, Y, \ldots, X_r),$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$, $f \in \mathcal{D}(N)$.

Observação 1.1. *A aplicação R dada por $R(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)Z, W\rangle$ para $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(N)$ define um 4-tensor (veja em [6]) e é chamada o tensor curvatura de N.*

Definição 1.3. *A derivada covariante de um r-tensor T é um (r+1)-tensor, ∇T, dado por*

$$\nabla T(X_1, \ldots, X_r, Z) = \nabla_Z T(X_1, \ldots, X_r) =$$
$$= Z(T(X_1, \ldots, X_r)) - T(\nabla_Z X_1, \ldots, X_r) - \ldots - T(X_1, \ldots, X_{r-1}, \nabla_Z X_r).$$

Em um referencial local $\{e_i\}$, $1 \leq i \leq dimN$ sobre N, temos que as componentes de um r-tensor T, no referencial $\{e_i\}$, são as funções

$$T_{i_1 i_2 \ldots i_r} = T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}).$$

Denotamos as componentes da derivada covariante do tensor T no referencial $\{e_i\}$ por $T_{i_1 \ldots i_r; i_{(r+1)}}$. Dessa forma, para o tensor curvatura, escrevemos $R_{ijkl} = R(e_i, e_j, e_k, e_l)$ e $R_{ijkl;m} = \nabla_{e_m} R(e_i, e_j, e_k, e_l)$. Notemos que, pela linearidade do tensor curvatura e escrevendo os campos $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ no referencial $\{e_i\}$, temos

$$R(X, Y, Z, W) = \sum_{ijkl} R_{ijkl} x_i y_j z_k w_l, \tag{1.4}$$

sendo que x_i, y_j, z_k, w_l denotam, respectivamente, as componentes de X, Y, Z, W na base $\{e_i\}$, em cada ponto. Desta maneira, convém observar que, em cada ponto $p \in N$ e fixado um referencial local, $R(X, Y, Z, W)(p)$ depende apenas dos vetores $X(p), Y(p), Z(p), W(p)$. A partir do tensor curvatura, definimos o tensor de Ricci, S, e a curvatura escalar, ρ por:

$$S(X, Y) = \sum_i \langle R(e_i, X)Y, e_i \rangle \qquad \rho = \sum_j S(e_j, e_j).$$

A função $\sum_{i_1 \ldots i_r} T^2_{i_1 \ldots i_r}$ independe do referencial local fixado e, aplicada a cada pondo p, é definida como o quadrado da norma do tensor T no ponto

p. Escrevemos,

$$\|T\|^2 = \sum_{i_1 \ldots i_r} T^2_{i_1 \ldots i_r}.$$

No caso de uma imersão $\phi : M \hookrightarrow \tilde{M}$ de uma variedade Riemanianna, é conveniente estendermos a noção de tensor da seguinte maneira. Um tensor de ordem (r, l), $l \neq 0$, de uma imersão ϕ é uma aplicação T, $(r + l)$-linear,

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M)}_{r} \times \underbrace{\mathfrak{X}^{\perp}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}^{\perp}(M)}_{l} \to \mathcal{D}(M).$$

Em especial, associados a segunda forma fundamental σ, destacamos os seguintes tensores

$$\sigma(X, Y, \xi) = \langle \sigma(X, Y), \xi \rangle;$$
$$(\nabla' \sigma)(X, Y, Z, \xi) = \langle (\nabla^{\perp}_X \sigma)(Y, Z), \xi \rangle,$$

para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \mathfrak{X}^{\perp}(M)$.

Para um referencial adaptado, $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{n+k}\}$, as funções

$$\|\sigma\|^2 = \sum_{ij\alpha} \sigma^2(e_i, e_j, e_\alpha), \ \|\nabla' \sigma\|^2 = \sum_{ijk\alpha} (\nabla' \sigma)^2(e_i, e_j, e_k, e_\alpha),$$

onde $1 \leq i, j \leq n$ e $n + 1 \leq \alpha \leq n + k$, são os quadrados das normas dos tensores. Verifica-se que $\|\sigma\|^2$ e $\|\nabla' \sigma\|^2$ independem do referencial adaptado à imersão.

1.2 Definindo variedades Kähler

Aqui estamos interessados em definir variedade Kähler. Para tanto, é necessário conhecermos algumas estruturas em variedades complexas. Os resultados e definições apresentados podem ser encontrados em [1]. Também sugerimos a leitura de [11] para mais detalhes sobre variedades complexas.

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $J : V \to V$ um operador linear tal que $J^2 = -1$, onde 1 indica o operador identidade em V. Se existir tal operador J, dizemos que V admite uma estrutura complexa J.

Observação 1.2. *Note que V, munido da operação multiplicação por escalar sobre o corpo dos complexos definida por*

$$(a + ib)v = av + bJv, \text{ onde } a + ib \in \mathbb{C} \text{ e } v \in V,$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

Lema 1.1. *Um espaço vetorial real V admite uma estrutura complexa J se, e somente se, V possui dimensão par. Além disto, é possível escolhermos uma base para V da forma $\{e_1, \ldots, e_2, Je_1, \ldots, Je_n\}$, onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base de V sobre $\mathbb{C}$.*

Definição 1.4. *Se V é um espaço vetorial munido de uma estrutura complexa J, dizemos que um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ é* **Hermitiano** *se*

$$\langle Ju, Jv \rangle = \langle u, v \rangle, \;\; \forall u, v \in V.$$

Daí, dizemos que $(V, J, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é um **espaço vetorial Hermitiano**.

Lema 1.2. *Se V é um espaço vetorial Hermitiano, podemos escolher uma base ortonormal de V da forma $\{e_1, Je_1, \ldots, e_n, Je_n\}$.*

1.2.1 Variedades quasi-complexas

Definição 1.5. *Uma* **estrutura quasi-complexa** J *em uma variedade diferenciável* $2n$*-dimensional* M *é a escolha, para cada* $p \in M$*, de uma estrutura complexa* $J_p : T_pM \to T_pM$*, a qual é diferenciável no seguinte sentido: para cada* $p \in M$ *existem coordenadas locais* $(x_1, \ldots, x_{2n})$ *definidas numa vizinhança* U *de* p *em* M *e tais que a matriz de* J_p *com respeito à base coordenada* $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{2n}}\}$ *de* T_pM *tem a forma*

$$J_p\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big)_p = J_{kl}(p)\Big(\frac{\partial}{\partial x_l}\Big)_p,$$

onde $J_{kl} \in C^\infty(U)$ *para todos* $1 \leq k \leq n$ *e* $1 \leq l \leq 2n$*.*

Notemos que a estrutura quasi-complexa J está munida da propriedade de que $J^2 = -Id$. Com isto, temos a seguinte

Definição 1.6 (**Variedade quasi-complexa**)**.** *Uma variedade quasi-complexa é um par* (M, J)*, onde* M *é uma variedade diferenciável e* J *é uma estrutura quasi-complexa, ou seja, um campo tensorial tal que* $J^2 = -Id$*.*

1.2.2 Variedades complexas

Passaremos agora a definir variedades complexas. Precisamos, inicialmente, dar uma noção de função holomorfa entre abertos do espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^n$. Temos que $\mathbb{C}^n$ é naturalmente identificado com o espaço euclidiano real $\mathbb{R}^{2n}$, isto é, para $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, podemos escrever $z = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, onde $z_j = x_j + iy_j$ para todo $j \in 1, \ldots, n$. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^2$ uma função diferenciável, $f(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = (u(x_1, x_n, \ldots, x_n, y_n), v(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n))$. Pela identificação natural f pode ser vista como uma função do aberto U de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}$ e escrevemos $f = u + iv$ (vista assim, f é dita uma função complexa). Entendendo que $\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j} + i\frac{\partial v}{\partial x_j}$ e denotando $\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - i\frac{\partial f}{\partial y_j}$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + i\frac{\partial f}{\partial y_j}$ definimos:

Definição 1.7. *Seja $U \subset \mathbb{C}^n$ aberto e $f = u + iv : U \to \mathbb{C}$ uma função diferenciável em U. Dizemos que f é holomorfa em U quando $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0$ para todo $1 \leq j \leq n$.*

Observação 1.3. *Vale observar que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0$ se, e somente se, valem as equações*

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial v}{\partial y_j} \ \text{e} \ \frac{\partial u}{\partial y_j} = -\frac{\partial v}{\partial x_j},$$

para todo $1 \leq j \leq n$. Tais equações são coletivamente denominadas de **equações de Cauchy-Riemann** *para f.*

Podemos agora estender noção de holomorfia para aplicações entre abertos dos espaços euclidianos complexos.

Definição 1.8. *Seja $f = (f_1, \ldots, f_n) : U \subset \mathbb{C}^n \to V \subset \mathbb{C}^m$ uma aplicação diferenciável em U. Dizemos que f é holomorfa em U se cada f_k, com $1 \leq k \leq n$, é função holomorfa em U.*

Agora estamos em condições de definir variedades complexas.

Definição 1.9. *Uma* **variedade complexa** *M de dimensão (complexa) n é uma variedade diferenciável $2n$-dimensional (dimensão real), munida de um atlas formado por cartas $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$ satisfazendo a seguinte condição: sempre que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, a mudança de coordenadas*

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

é uma função holomorfa de n variáveis complexas.

A próxima proposição garante que o espaço tangente a todo ponto de uma variedade complexa vem munido de uma estrutura complexa canônica.

Proposição 1.3. *Sejam M uma variedade complexa de dimensão complexa n e $(z_1, \ldots, z_n)$ um sistema de coordenadas complexas para M definido em um aberto $U \subset M$. Então, para $p \in U$, o operador linear $J_p : T_pM \to T_pM$ tal que*

$$J_p\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)_p \text{ e } J_p\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)_p = -\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p \tag{1.5}$$

independe das coordenadas $z_k = x_k + iy_k$ escolhidas e define uma estrutura complexa em T_pM.

Definição 1.10. *Seja M uma variedade complexa com estrutura quasi-complexa J. Uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é dita uma* **métrica Hermitiana** *se*

$$\langle J_pX, J_pY \rangle = \langle X, Y \rangle, \tag{1.6}$$

para todo $p \in M$ e $X, Y \in T_pM$.

Observemos que sendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uma métrica em uma variedade M com estrutura quasi-complexa J, podemos definir, uma métrica Hermitiana g em M. Basta considerarmos $g(X, Y) = \langle X, Y \rangle + \langle JX, JY \rangle$, com $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Com isto, destacamos a seguinte

Proposição 1.4. *Qualquer variedade complexa admite uma métrica Hermitiana.*

Uma variedade complexa com uma métrica Hermitiana é chamada uma **variedade Hermitiana**.

Definição 1.11. *Seja M uma variedade Hermitiana. A* **forma Kähler** *associada a M é a 2-forma ω definida por*

$$\omega(X,Y) = \langle JX, Y\rangle. \tag{1.7}$$

Observemos que ω é uma 2-forma, uma vez que

$$\omega(X,Y) = \langle JX, Y\rangle = \langle J(JX), JY\rangle = -\langle X, JY\rangle = -\omega(Y,X).$$

Lema 1.3. *Se M é uma variedade Hermitiana com dimensão (complexa) n e $p \in M$, existem uma vizinhança $U \subset M$ de p e um referencial ortonormal positivo em U da forma $\{e_1, Je_1, \ldots, e_n, Je_n\}$.*

Definição 1.12. *Nas notações do lema acima, dizemos que $\{e_1, Je_1, \ldots, e_n, Je_n\}$ é um* **referencial Hermitinano** *em U. O co-referencial associado $\{\omega_1, \omega_1', \ldots, \omega_n, \omega_n'\}$ é tal que*

$$\omega_j(X) = \langle X, e_j\rangle \text{ e } \omega_j'(X) = \langle X, Je_j\rangle$$

para todos $1 \leq j \leq n$ e $X \in \mathfrak{X}(U)$.

Definição 1.13 (Variedade Kähler). *Se M é uma variedade complexa com estrutura quasi-complexa J, uma* **métrica Kähler** *em M é uma métrica Hermitiana $\langle\cdot,\cdot\rangle$ em M cuja forma Kähler é fechada. Neste caso, (M, J, g) é dita uma* **variedade Kähler**.

Exemplo 1.1. Com a estrutura quasi-complexa canônica e a métrica Euclidiana canônica, o espaço $\mathbb{C}^n$ é uma variedade Kähler, denominada o **n-espaço Euclidiano complexo**. De fato, tome $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ as coordenadas canônicas de $\mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$. Daí,

$$\Big\langle J\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big), J\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big)\Big\rangle = \Big\langle \frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial y_k}\Big\rangle = \delta_{jk} = \Big\langle \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\Big\rangle.$$

Da mesma maneira,

$$\Big\langle J\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big), J\Big(\frac{\partial}{\partial y_k}\Big)\Big\rangle = \Big\langle \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_k}\Big\rangle, \ \Big\langle J\Big(\frac{\partial}{\partial y_j}\Big), J\Big(\frac{\partial}{\partial y_k}\Big)\Big\rangle = \Big\langle \frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial y_k}\Big\rangle.$$

Assim, a métrica canônica é Hermitiana. Agora, se ω é a forma Kähler correspondente, temos

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_{j<k}\omega\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\Big)dx_j\wedge dx_k + \sum_{j<k}\omega\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_k}\Big)dx_j\wedge dy_k \\
&\quad + \sum_{j<k}\omega\Big(\frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial y_k}\Big)dy_j\wedge dy_k \\
&= \sum_{j<k}\Big\langle \frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\Big\rangle dx_j\wedge dx_k + \sum_{j<k}\Big\langle \frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial y_k}\Big\rangle dx_j\wedge dy_k \\
&\quad - \sum_{j<k}\Big\langle \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_k}\Big\rangle dy_j\wedge dy_k \\
&= \sum_{j<k}\delta_{jk}dx_j\wedge dy_k = dx_j\wedge dy_j.
\end{aligned}$$

Logo, $d\omega = d(dx_j\wedge dy_j) = 0$.

Sendo ∇ a conexão Riemanianna e J a estrutura quase-complexa de uma variedades Kähler, então $\nabla_X JY = J\nabla_X Y$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Isto caracteriza uma variedade Kähler e será destacado na proposição a seguir.

Proposição 1.5. *Seja M uma variedade Hermitiana com estrutura quasi-complexa J e conexão Riemanianna ∇. Então M é uma variedade Kähler se, e somente se, $\nabla_X J = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.*

1.3 Curvatura seccional holomorfa

Nesta seção, trabalhando com uma variedade Kähler M, definimos a expresão da curvatura seccional holomorfa e tratamos de deduzir a expressão do tensor curvatura Riemanniana de uma variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante.

Inicialmente, sejam R o tensor curvatura Riemanniana e J a estrutura quasi-complexa de M. Temos, conforme conhecido (veja por exemplo [6]), as seguintes relações

Proposição 1.6.

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = -\langle R(Y,X)Z,W\rangle = -\langle R(X,Y)W,Z\rangle, \tag{1.8}$$

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(Z,W)X,Y\rangle, \tag{1.9}$$

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle R(Z,X)Y,W\rangle + \langle R(Y,Z)Z,W\rangle = 0., \tag{1.10}$$

para todo X, Y, Z *e* $W \in \mathfrak{X}(M)$.

Além disto, obtemos

$$\langle R(JX,JY)Z,W\rangle = \langle R(X,Y)JZ,JW\rangle = \langle R(X,Y)Z,W\rangle, \tag{1.11}$$

uma vez que, vale a seguinte

Proposição 1.7. *O tensor curvatura R verifica as seguintes propriedades:*

(a) $R(X,Y)JZ = J(R(X,Y)JZ)$;

(b) $R(JX,JY)Z = R(X,Y)Z$.

Prova. Sendo M Kähler, temos $(\nabla_X J)Y = 0$, ou equivalentemente, $J\nabla_X Y = \nabla_X JY$, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Logo, para (a),

$$\begin{aligned} R(X,Y)JZ &= \nabla_X\nabla_Y JZ - \nabla_Y\nabla_X JZ - \nabla_{[X,Y]}JZ \\ &= J\nabla_X\nabla_Y Z - J\nabla_Y\nabla_X Z - J\nabla_{[X,Y]}Z \\ &= JR(X,Y)Z. \end{aligned}$$

Para (b), segue de (1.10) e do caráter Hermitiano da métrica que,

$$\begin{aligned}\langle R(JX, JY)Z, W\rangle &= \langle R(Z, W)JX, JY\rangle = J\langle R(Z, W)X, JY\rangle \\ &= \langle R(Z, W)X, Y\rangle = \langle R(X, Y)Z, W\rangle.\end{aligned}$$

□

Agora, passando a analisar R como uma aplicação quadrilinear em cada espaço vetorial tangente 2n-dimensional $V = T_pM$, escrevemos por simplicidade,

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W\rangle_p,$$

e estudamos as propriedades algébricas da aplicação R satisfazendo, (1.8), (1.9), (1.10) e (1.11).

Proposição 1.8. *Sejam R e T duas aplicações quadrilineares satisfazendo (1.8), (1.9), (1.10) e (1.11). Se*

$$R(X, JX, JX, X) = T(X, JX, JX, X),$$

para todo $X \in V$, então $R = T$.

Prova. Por abuso de notação, denotemos $R-T$ a aplicação que, devido à linearidade, satisfaz (1.8), (1.9), (1.10) e (1.11), por R. Dessa forma, devemos mostrar que $R = 0$. Para tanto, consideremos a aplicação quadrilinear G que leva $(X, Y, Z, W) \in V \times V \times V \times V$ em

$$R(X, JY, Z, JW) + R(X, JZ, Y, JW) + R(X, JW, Y, JZ).$$

Como consequência das propriedades dadas em (1.8), (1.9), (1.11) e sendo $R(X, JX, JX, X) = 0$, para todo $X \in V$, obtemos o seguinte fato algébrico:
Fato. G é simétrica e se anula quando avaliada em (X, X, X, X) para todo $X \in V$. Isto garante que $G \equiv 0$.

Com este fato, concluímos, em particular, $G(X, Y, X, Y) = 0$, ou seja,

$$2R(X, JY, X, JY) + R(X, JX, Y, JY) = 0. \tag{1.12}$$

Por outro lado, segue de (1.10),

$$R(JX, Y, X, JY) + R(Y, X, JX, JY) + R(X, JX, Y, JY) = 0$$

e, equivalentemente, por (1.8) e (1.11),

$$R(X, JX, Y, JY) - R(X, Y, X, Y) - R(X, JY, X, JY) = 0. \tag{1.13}$$

Subtraindo as igualdades em (1.12) e (1.13), temos

$$3R(X, JY, X, JY) + R(X, Y, X, Y) = 0 \tag{1.14}$$

Como a igualdade acima vale para todo X, Y, reobtemos a iguadade acima trocando Y por JY, e assim ficamos com

$$3R(X, Y, X, Y) + R(X, JY, X, JY) = 0. \tag{1.15}$$

De (1.14), (1.15), obtemos

$$R(X, Y, X, Y) = 0, \text{ para todo } X, Y \in V.$$

Logo, como conhecido (veja cap. 4, lema 3.3 de [6]), temos que $R = 0$.

□

Sendo $\langle\cdot,\cdot\rangle$, produto interno Hermitiano em V, definamos a aplicação R_0, quadrilinear em V por,

$$\begin{aligned} R_0(X,Y,Z,W) &= \frac{1}{4}\{\langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle \\ &\quad +\langle JY,Z\rangle\langle JX,W\rangle - \langle JX,Z\rangle\langle JY,W\rangle \\ &\quad +2\langle X,JY\rangle\langle JZ,W\rangle\} \end{aligned}$$

Proposição 1.9. *A aplicação quadrilinear R_0 satisfaz (1.8), (1.9), (1.10), (1.11), e as seguintes relações:*

$$R_0(X,Y,Y,X) = \tfrac{1}{4}\{\langle Y,Y\rangle\langle X,X\rangle - \langle X,Y\rangle^2 + 3\langle X,JY\rangle^2\},$$
$$R_0(X,JX,JX,X) = \langle X,X\rangle^2.$$

Prova. Temos, do caráter Hermitiano da métrica, que

$$\langle X,JY\rangle = -\langle JX,Y\rangle.$$

Atentando-se para este fato e fazendo a substituição direta nas expressões que devemos verificar, segue o resultado.

□

Seja τ um plano, isto é, um subespaço 2-dimensional, em V e seja $\{X,Y\}$ uma base ortonormal para τ. Sabe-se (cf.proposição 3.1 de [6]) que a curvatura seccional Riemanniana $K(\tau)$, definida por,

$$K(\tau) = R(X,Y,Y,X)$$

depende somente de τ e independe da escolha de uma base ortonormal para τ.

Proposição 1.10. *Seja R uma aplicação quadrilinear satisfazendo (1.8), (1.9), (1.10) e (1.11). Se $K(\tau) = c$ para todo plano τ invariante por J, isto é, $\{X, JX\}$ determinam uma base para τ, então $R = cR_0$.*

Prova. Tomando τ invariante por J, para todo vetor unitário X, $\{X, JX\}$ é uma base ortonormal para τ. Logo, por hipótese,

$$K(\tau) = R(X, JX, JX, X) = c$$

para todo vetor unitário $X \in V$.

Por linearidade, para todo $X \in V$, temos $R(X, JX, JX, X) = c\langle X, X\rangle^2 = cR_0(X, JX, JX, X)$, pela proposição 1.9. Aplicando a proposição 1.8, podemos concluir que $R = cR_0$.

$\square$

A curvatura seccional holomorfa em uma variedade Kähler é definida por,

$$K(X \wedge JX) = \frac{R(X, JX, JX, X)}{\|X\|^4}.$$

Para encerrar esta seção, façamos as seguintes observações acerca da definição de curvatura seccional holomorfa.

Observação 1.4. *A proposição 1.8 nos diz que a curvatura seccional holomorfa determina o tensor curvatura Riemanniana R em cada ponto p.*

Observação 1.5. *A proposição 1.10 nos dá a expressão do tensor curvatura Riemanniana R numa variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante, digamos c.*

Capítulo 2

Em um referencial móvel

Neste capítulo, damos importância à dedução de uma fórmula para o cálculo do Laplaciano do quadrado da norma da segunda forma fundamental em cada ponto de uma subvariedade imersa isometricamente, que é conhecida como fórmula de tipo Simons. Para tanto, precisamos de ferramentas desenvolvidas na teoria de referêncial móvel.

Seja M uma variedade Riemaniana com conexão Riemanniana ∇ e considere $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial móvel local em M.

Definição 2.1. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave em M. Definimos o Laplaciano de f por,*

$$\Delta f = e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i) f.$$

Notemos que tal definição independe do referencial local escolhido. Considerando $\{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n\}$ um outro referencial móvel local, temos, para cada i,

$\tilde{e}_i = a_{ij}e_j$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}\Delta f &= \tilde{e}_i(\tilde{e}_i(f)) - (\nabla_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_i)f = a_{ij}e_j(a_{il}e_l(f)) - (\nabla_{a_{ij}e_j}a_{il}e_l)f \\ &= a_{ij}a_{il}e_j(e_l(f)) + a_{ij}e_j(a_{il})e_l(f) - a_{ij}a_{il}(\nabla_{e_j}e_l)f - a_{ij}e_j(a_{il})e_l(f) \\ &= \delta_{jl}e_j(e_l(f)) - \delta_{jl}(\nabla_{e_j}e_l)f = e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i}e_i)f.\end{aligned}$$

2.1 Fórmula local para subvariedades mínimas

Seja M uma subvariedade Riemanniana n-dimensional imersa isometricamente em $\tilde{M}^{n+k}$. Considere $\{e_1, \ldots, e_{n+k}\}$ um referencial móvel adaptado local, ou seja, $n+k$ campos ortonormais tais que, restritos a M, os campos $e_1, \ldots, e_n$ são tangentes a M e, por consequência, os campos restantes $e_{n+1}, \ldots, e_{n+k}$ são normais a M. Utilizamos a seguinte convenção para indíces sobre os somatórios que aparecem nesta seção:

$$\begin{gathered}1 \leq A, B, C, \ldots \leq n+k, \\ 1 \leq i, j, k, l, \ldots \leq n, \\ n+1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \ldots \leq n+k.\end{gathered}$$

Com respeito ao referêncial móvel considerado, tomemos $\omega_1, \ldots, \omega_{n+k}$ o co-referencial associado. Então as equações de estrutura de $\tilde{M}$ (veja em [1]) são dadas por,

$$d\omega_A = \sum \omega_{AB} \wedge \omega_B, \quad \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0, \tag{2.1}$$

$$d\omega_{AB} = \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} + \tilde{\Omega}_{AB}, \quad \tilde{\Omega}_{AB} = \frac{1}{2}\tilde{R}_{ABCD}\omega_C \wedge \omega_D, \tag{2.2}$$

onde, $\omega_{AB}(e_C) = \langle \tilde{\nabla}_{e_C} e_A, e_B \rangle$ são as chamadas formas de conexão de $\tilde{M}$ e $\tilde{\Omega}_{AB}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \langle \tilde{R}(e_A, e_B)\tilde{X}, \tilde{Y} \rangle$ são as 2-formas de curvatura de $\tilde{M}$.

Restringindo os co-referenciais a M, temos

$$\omega_\alpha = 0, \tag{2.3}$$

pois, se $X \in \mathfrak{X}(M)$, então $\omega_\alpha(X) = \langle X, e_\alpha \rangle = 0$.

Com isto, $0 = d\omega_\alpha = \omega_{\alpha i} \wedge \omega_i$ e, pelo Lema de Cartan, (cf. lema 1 de [7]) podemos escrever,

$$\omega_{\alpha i} = h_{ij}^\alpha \omega_j, \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha. \tag{2.4}$$

Destas fórmulas temos as equações de estrutura de M e as seguintes equações associadas a imersão (tais equações são bem conhecidas e podem ser estudadas em [7]):

$$d\omega_i = \omega_{ij} \wedge \omega_j, \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \tag{2.5}$$

$$d\omega_{ij} = \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \Omega_{ij}, \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l, \tag{2.6}$$

$$R_{ijkl} = \tilde{R}_{ijkl} + (h_{il}^\alpha h_{jk}^\alpha - h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha), \tag{2.7}$$

$$d\omega_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma\alpha} + \Omega_{\alpha\beta}, \quad \Omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} R_{\alpha\beta kl} \omega_k \wedge \omega_l, \tag{2.8}$$

$$R_{\alpha\beta kl} = \tilde{R}_{\alpha\beta kl} + (h_{il}^\alpha h_{ik}^\beta - h_{ik}^\alpha h_{il}^\beta). \tag{2.9}$$

Tomando a diferencial exterior em (2.4) e definindo h_{ijk}^α por

$$h_{ijk}^\alpha \omega_k = dh_{ij}^\alpha + h_{lj}^\alpha \omega_{li} + h_{il}^\alpha \omega_{lj} - h_{ij}^\beta \omega_{\alpha,\beta} \tag{2.10}$$

temos,

$$\begin{aligned} d\omega_{\alpha i} &= dh_{ij}^\alpha \wedge \omega_j + h_{ij}^\alpha d\omega_j \\ &= h_{ijk}^\alpha \omega_k \wedge \omega_j - h_{il}^\alpha \omega_{lj} \wedge \omega_j - h_{jl}^\alpha \omega_{li} \wedge \omega_j + \\ &+ h_{ij}^\beta \omega_{\alpha\beta} \wedge \omega_j + h_{ij}^\alpha \omega_{jl} \wedge \omega_l. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Por outro lado, segue das equações de estruturas que, quando restritas a M,

$$\begin{aligned} d\omega_{\alpha i} &= \omega_{\alpha C}\wedge\omega_{Ci}+\frac{1}{2}\tilde{R}_{\alpha iCD}\omega_C\wedge\omega_D \\ &= \omega_{\alpha C}\wedge\omega_{Ci}+\frac{1}{2}\tilde{R}_{\alpha ijk}\omega_j\wedge\omega_k \\ &= \omega_{\alpha l}\wedge\omega_{li}+\omega_{\alpha\beta}\wedge\omega_{\beta i}+\frac{1}{2}\tilde{R}_{\alpha ijk}\omega_j\wedge\omega_k \\ &= h^{\alpha}_{lj}\omega_j\wedge\omega_{li}+\omega_{\alpha\beta}\wedge h^{\beta}_{ij}\omega_j+\frac{1}{2}\tilde{R}_{\alpha ijk}\omega_j\wedge\omega_k. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Igualando (2.11) e (2.12), concluímos que

$$\sum_{j,k}(h^{\alpha}_{ijk}+\frac{1}{2}\tilde{R}_{\alpha ijk})\omega_j\wedge\omega_k=0, \tag{2.13}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} &\sum_{j<k}(h^{\alpha}_{ijk}+\frac{1}{2}\tilde{R}_{\alpha ijk})\omega_j\wedge\omega_k+\sum_{k<j}(h^{\alpha}_{ijk}+\frac{1}{2}\tilde{R}_{\alpha ijk})\omega_j\wedge\omega_k= \\ =\ &\sum_{j<k}(h^{\alpha}_{ijk}-h^{\alpha}_{ikj}+\tilde{R}_{\alpha ijk})\omega_j\wedge\omega_k=0 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Agora, com o intuito de calcularmos a diferencial exterior em ambos os membros de (2.10), consideramos

$$h^{\alpha}_{ijkl}\omega_k=dh^{\alpha}_{ijk}+h^{\alpha}_{ljk}\omega_{li}+h^{\alpha}_{ilk}\omega_{lj}+h^{\alpha}_{ijl}\omega_{lk}-h^{\beta}_{ijk}\omega_{\alpha,\beta}. \tag{2.15}$$

Temos, portanto,

$$\begin{aligned} d(h^{\alpha}_{ijk}\omega_k) &= d(h^{\alpha}_{ijk})\wedge\omega_k+h^{\alpha}_{ijk}d(\omega_k) \\ &= (h^{\alpha}_{ijkl}\omega_l-h^{\alpha}_{ljk}\omega_{li}-h^{\alpha}_{ilk}\omega_{lj}-h^{\alpha}_{ijl}\omega_{lk}+h^{\beta}_{ijk}\omega_{\alpha\beta})\wedge\omega_k+h^{\alpha}_{ijk}d\omega_k \\ &= h^{\alpha}_{ijkl}\omega_l\wedge\omega_k-h^{\alpha}_{ljk}\omega_{li}\wedge\omega_k-h^{\alpha}_{ilk}\omega_{lj}\wedge\omega_k-h^{\alpha}_{ijl}\omega_{lk}\wedge\omega_k+ \\ &\quad +h^{\beta}_{ijk}\omega_{\alpha\beta}\wedge\omega_k+h^{\alpha}_{ijk}\omega_{kl}\wedge\omega_l, \end{aligned} \tag{2.16}$$

e, por outro lado, usando (2.10), (2.6) e (2.8),

$$\begin{aligned}
d(h^{\alpha}_{ijk}\omega_k) &= d(dh^{\alpha}_{ij}) + d(h^{\alpha}_{lj}\omega_{li}) + d(h^{\alpha}_{il}\omega_{lj}) - d(h^{\alpha}_{ij}\omega_{\alpha\beta}) \\
&= dh^{\alpha}_{lj}\wedge\omega_{li} + h^{\alpha}_{lj}d\omega_{li} + dh^{\alpha}_{il}\wedge\omega_{lj} + h^{\alpha}_{il}d\omega_{lj} \\
&\quad -dh^{\beta}_{ij}\wedge\omega_{\alpha\beta} - h^{\beta}_{ij}d\omega_{\alpha\beta} \\
&= (h^{\alpha}_{ilk}\omega_k - h^{\alpha}_{ml}\omega_{mi} - h^{\alpha}_{im}\omega_{ml} + h^{\beta}_{il}\omega_{\alpha\beta})\wedge\omega_{lj} \\
&\quad +(h^{\alpha}_{ljk}\omega_k - h^{\alpha}_{mj}\omega_{ml} - h^{\alpha}_{lm}\omega_{mj} - h^{\beta}_{lj}\omega_{\alpha\beta})\wedge\omega_{li} \\
&\quad -(h^{\beta}_{ijk}\omega_k - h^{\beta}_{lj}\omega_{li} - h^{\beta}_{il}\omega_{lj} + h^{\gamma}_{ij}\omega_{\beta\gamma})\wedge\omega_{\alpha\beta} \\
&\quad +h^{\alpha}_{lj}(\omega_{lm}\wedge\omega_{mi} + \frac{1}{2}R_{likm}\omega_k\wedge\omega_m) \\
&\quad +h^{\alpha}_{il}(\omega_{lm}\wedge\omega_{mj} + \frac{1}{2}R_{ljkm}\omega_k\wedge\omega_m) \\
&\quad -h^{\beta}_{ij}(\omega_{\alpha\gamma}\wedge\omega_{\gamma\beta} + \frac{1}{2}R_{\alpha\beta kl}\omega_k\wedge\omega_l) \\
&= h^{\alpha}_{ilk}\omega_k\wedge\omega_{lj} + h^{\alpha}_{ljk}\omega_k\wedge\omega_{li} - h^{\beta}_{ijk}\omega_k\wedge\omega_{\alpha\beta} \\
&\quad +\frac{1}{2}h^{\alpha}_{il}R_{ljkm}\omega_k\wedge\omega_m + \frac{1}{2}h^{\alpha}_{lj}R_{likm}\omega_k\wedge\omega_m \\
&\quad -\frac{1}{2}h^{\beta}_{ij}R_{\alpha\beta kl}\omega_k\wedge\omega_l. \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

Com a igualdade entre (2.16) e (2.17), e reorganizando os índices, obtemos

$$\sum_{k,l}(h^{\alpha}_{ijkl} + \frac{1}{2}h^{\alpha}_{mj}R_{mikl} + \frac{1}{2}h^{\alpha}_{im}R_{mjkl} - \frac{1}{2}h^{\beta}_{ij}R_{\alpha\beta kl})\omega_k\wedge\omega_l = 0, \qquad (2.18)$$

ou, equivalentemente,

$$\sum_{k<l}(h^{\alpha}_{ijkl} - h^{\alpha}_{ijlk} + h^{\alpha}_{mj}R_{mikl} + h^{\alpha}_{im}R_{mjkl} - h^{\beta}_{ij}R_{\alpha\beta kl})\omega_k\wedge\omega_l = 0. \qquad (2.19)$$

De forma similar ao que foi feito para construir as funções h^{α}_{ijk} e h^{α}_{ijkl} definimos $\tilde{R}_{\alpha ijkl}$ por,

$$\tilde{R}_{\alpha ijkl}\omega_l = d\tilde{R}_{\alpha ijk} + \tilde{R}_{\alpha mjk}\omega_{mi} + \tilde{R}_{\alpha imk}\omega_{mj} + \tilde{R}_{\alpha imk}\omega_{mk} - \tilde{R}_{\beta ijk}\omega_{\alpha\beta}. \qquad (2.20)$$

Notemos que a derivada covariante do tensor curvatura $\tilde{R}_{ABCD}$ de $\tilde{M}$, denotada aqui por $\tilde{R}_{ABCD;E}$, quando restrita a M, é dada por

$$\tilde{R}_{\alpha ijk;l} = \tilde{R}_{\alpha ijkl} + \tilde{R}_{\alpha\beta jk}h^{\beta}_{il} + \tilde{R}_{\alpha i\beta k}h^{\beta}_{jl} + \tilde{R}_{\alpha ij\beta}h^{\beta}_{kl} - \tilde{R}_{mijk}h^{\alpha}_{ml}. \tag{2.21}$$

Isto se verifica como se segue. Por definição da derivada covariante,

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{\alpha ijk;l} &= \nabla_{e_l}\langle \tilde{R}(e_\alpha, e_i)e_j, e_k\rangle \\
&= e_l(\tilde{R}_{\alpha ijk}) - \langle \tilde{R}(\tilde{\nabla}_{e_l}e_\alpha, e_i)e_j, e_k\rangle - \langle \tilde{R}(e_\alpha, \tilde{\nabla}_{e_l}e_i)e_j, e_k\rangle - \\
&\quad - \langle \tilde{R}(e_\alpha, e_i)\tilde{\nabla}_{e_l}e_j, e_k\rangle - \langle \tilde{R}(e_\alpha, e_i)e_j\tilde{\nabla}_{e_l}e_k\rangle \\
&= d\tilde{R}_{\alpha ijk}(e_l) - \langle \tilde{R}(\langle\tilde{\nabla}_{e_l}e_\alpha, e_A\rangle e_A, e_i)e_j, e_k\rangle - \\
&\quad - \langle \tilde{R}(e_\alpha, \langle\tilde{\nabla}_{e_l}e_i, e_A\rangle e_A)e_j, e_k\rangle - \langle \tilde{R}(e_\alpha, e_i)\langle\tilde{\nabla}_{e_l}e_j, e_A\rangle e_A, e_k\rangle - \\
&\quad - \langle \tilde{R}(e_\alpha, e_i)e_j, \langle\tilde{\nabla}_{e_l}e_k, e_A\rangle e_A\rangle \\
&= (d\tilde{R}_{\alpha ijk} - \tilde{R}_{Aijk}\omega_{\alpha A} - \tilde{R}_{\alpha Ajk}\omega_{iA} - \tilde{R}_{\alpha iAk}\omega_{jA} - \tilde{R}_{\alpha ijA}\omega_{kA})(e_l) \\
&= \tilde{R}_{\alpha ijkm}\omega_m - \tilde{R}_{\alpha mjk}\omega_{mi} - \tilde{R}_{\alpha imk}\omega_{mj} - \tilde{R}_{\alpha ijm}\omega_{mk} + \tilde{R}_{\beta ijk}\omega_{\alpha\beta} - \\
&\quad - \tilde{R}_{Aijk}\omega_{\alpha A} - \tilde{R}_{\alpha Ajk}\omega_{iA} - \tilde{R}_{\alpha iAk}\omega_{jA} - \tilde{R}_{\alpha ijA}\omega_{kA})(e_l) \\
&= \tilde{R}_{\alpha ijkl} + \tilde{R}_{\alpha\beta jk}h^{\beta}_{il} + \tilde{R}_{\alpha i\beta k}h^{\beta}_{jl} + \tilde{R}_{\alpha ij\beta}h^{\beta}_{kl} - \tilde{R}_{mijk}h^{\alpha}_{ml}.
\end{aligned}$$

Observação 2.1. *Nesta seção, a partir de agora, assumimos que $\tilde{M}$ é localmente simétrica, isto é, $\tilde{\nabla}\tilde{R} = 0$.*

Construindo um referencial em cada ponto $p \in M$ de modo que em p $\nabla_{e_i}e_j = 0$, $\tilde{\nabla}_{e_i}e_\alpha = 0$ para todos i, j, α, temos que o Laplaciano de cada componente da segunda forma fundamental é dado por

$$\Delta h^{\alpha}_{ij} = \sum_k h^{\alpha}_{ijkk} = e_k e_k(h^{\alpha}_{ij}). \tag{2.22}$$

De (2.14), (2.19) e (2.21), segue para todos α, i, j, k e l as equações:

$$h^\alpha_{ijk} = h^\alpha_{ikj} - \tilde{R}_{\alpha ijk}, \tag{2.23}$$

$$h^\alpha_{ijkl} = h^\alpha_{ijlk} - h^\alpha_{mj}R_{mikl} - h^\alpha_{im}R_{mjkl} + h^\alpha_{ij}R_{\alpha\beta kl}, \tag{2.24}$$

$$\tilde{R}_{\alpha ijkl} = -\tilde{R}_{\alpha\beta jk}h^\beta_{il} - \tilde{R}_{\alpha i\beta k}h^\beta_{jl} - \tilde{R}_{\alpha ij\beta}h^\beta_{kl} + \tilde{R}_{mijk}h^\alpha_{ml}. \tag{2.25}$$

Pela definição de Δh^α_{ij} e de (2.24)

$$\Delta h^\alpha_{ij} = h^\alpha_{ikjk} - \tilde{R}_{\alpha ijkk} = h^\alpha_{kijk} - \tilde{R}_{\alpha ijkk}. \tag{2.26}$$

De (2.25), obtemos

$$h^\alpha_{kijk} = h^\alpha_{kikj} - h^\alpha_{mk}R_{mijk} - h^\alpha_{im}R_{mkjk} + h^\beta_{ik}R_{\alpha\beta jk}. \tag{2.27}$$

Reescrevendo h^α_{kikj}, como ensina (2.24), na expressão acima e substituindo h^α_{kijk} em (2.26), temos

$$\begin{aligned} \Delta h^\alpha_{ij} &= (h^\alpha_{kkij} - \tilde{R}_{\alpha kikj} - \tilde{R}_{\alpha ijkk}) - \\ &\quad -(h^\alpha_{km}R_{mijk} + h^\alpha_{mi}R_{mkjk} - h^\beta_{ki}R_{\alpha\beta jk}). \end{aligned} \tag{2.28}$$

De (2.7), (2.9), (2.25) e (2.28) obtemos,

$$\begin{aligned} \Delta h^\alpha_{ij} = {} & h^\alpha_{kkij} + \tilde{R}_{\alpha\beta ik}h^\beta_{jk} + \tilde{R}_{\alpha k\beta k}h^\beta_{ij} + \tilde{R}_{\alpha ki\beta}h^\beta_{jk} \\ & - \tilde{R}_{mkik}h^\alpha_{jm} + \tilde{R}_{\alpha\beta jk}h^\beta_{ik} + \tilde{R}_{\alpha i\beta k}h^\beta_{jk} + \tilde{R}_{\alpha ij\beta}h^\beta_{kk} - \tilde{R}_{mijk}h^\alpha_{mk} \\ & - \{\tilde{R}_{mijk}h^\alpha_{mk} + \tilde{R}_{mkjk}h^\alpha_{im} - \tilde{R}_{\alpha\beta jk}h^\beta_{ik} + h^\alpha_{mk}h^\beta_{mk}h^\beta_{ij} - h^\alpha_{mk}h^\beta_{mj}h^\beta_{ik} \\ & + h^\alpha_{im}h^\beta_{mk}h^\beta_{kj} - h^\alpha_{im}h^\beta_{mj}h^\beta_{kk} - h^\beta_{ik}h^\alpha_{mk}h^\beta_{mj} + h^\beta_{ik}h^\alpha_{mj}h^\beta_{mk}\} \\ = {} & h^\alpha_{kkij} + (\tilde{R}_{\alpha ij\beta}h^\beta_{kk} + \tilde{R}_{\alpha k\beta k}h^\beta_{ij} - 2\tilde{R}_{\alpha\beta ki}h^\beta_{jk} - 2\tilde{R}_{\alpha\beta kj}h^\beta_{ik}) \\ & - (\tilde{R}_{mkjk}h^\alpha_{mi} + \tilde{R}_{mkik}h^\alpha_{mj} + 2\tilde{R}_{mijk}h^\alpha_{km}) - (h^\alpha_{mk}h^\beta_{mk}h^\beta_{ij} - h^\alpha_{mk}h^\beta_{mj}h^\beta_{ik} \\ & + h^\alpha_{im}h^\beta_{mk}h^\beta_{kj} - h^\alpha_{im}h^\beta_{mj}h^\beta_{kk} - h^\beta_{ik}h^\alpha_{mk}h^\beta_{mj} + h^\beta_{ik}h^\alpha_{mj}h^\beta_{mk}). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Agora, assumindo que M é mínima, temos que $\sum h_{kk}^{\beta} = 0$ para todo β. Sendo assim, pela expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^{\alpha} \Delta h_{ij}^{\alpha} = & -\sum_{\alpha,\beta,i,j,k} (4\tilde{R}_{\alpha\beta ki} h_{jk}^{\beta} h_{ij}^{\alpha} - \tilde{R}_{\alpha k\beta k} h_{ij}^{\beta} h_{ij}^{\alpha}) - \\ & - \sum (2\tilde{R}_{mkik} h_{mj}^{\alpha} h_{ij}^{\alpha} + 2\tilde{R}_{mijk} h_{mk}^{\alpha} h_{ij}^{\alpha}) \\ & - \sum (h_{ik}^{\alpha} h_{jk}^{\beta} - h_{jk}^{\alpha} h_{ik}^{\beta})(h_{il}^{\alpha} h_{jl}^{\beta} - h_{jl}^{\alpha} h_{il}^{\beta}) \\ & - \sum h_{ij}^{\alpha} h_{kl}^{\alpha} h_{ij}^{\beta} h_{kl}^{\beta}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Observando que o operador de Weingarten na direção e_{α}, denotado por A_{α} satisfaz, $\langle A_{\alpha} e_j, e_i \rangle = -h_{ij}^{\alpha}$, temos que a expressão em (2.30) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^{\alpha} \Delta h_{ij}^{\alpha} = & -\sum_{\alpha,\beta,i,j,k} (4\tilde{R}_{\alpha\beta ki} h_{jk}^{\beta} h_{ij}^{\alpha} - \tilde{R}_{\alpha k\beta k} h_{ij}^{\beta} h_{ij}^{\alpha}) - \\ & - \sum (2\tilde{R}_{mkik} h_{mj}^{\alpha} h_{ij}^{\alpha} + 2\tilde{R}_{mijk} h_{mk}^{\alpha} h_{ij}^{\alpha}) \\ & + \sum tr(A_{\alpha} A_{\beta} - A_{\beta} A_{\alpha})^2 - \sum (tr A_{\alpha} A_{\beta})^2. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Observação 2.2. *No referencial considerado (em p, $\nabla_{e_i} e_j = 0$, $\tilde{\nabla}_{e_i} e_{\alpha} = 0$ para todo i, j, α), temos $h_{ijk}^{\alpha} = dh_{ij}^{\alpha}(e_k)$, $h_{ijkl}^{\alpha} = dh_{ijk}^{\alpha}(e_l)$ ao longo da geodésica passando por $p \in M$ com velocidade e_k e e_l, respectivamente.*

Observação 2.3. *Para a segunda forma fundamental seguem as igualdades:*

$$\begin{aligned}
\|\sigma\|^2 &= \sum_{ij\alpha} \sigma^2(e_i, e_j, e_\alpha) = \sum_{ij\alpha} \langle A_\alpha e_i, e_j\rangle^2 = \sum_{ij\alpha} (h^\alpha_{ij})^2, \\
\|\nabla'\sigma\|^2 &= \sum_{ijk\alpha} (\nabla'\sigma)^2(e_i, e_j, e_k, e_\alpha) = \sum_{ijk\alpha} \langle \nabla^\perp_{e_k}\sigma(e_i, e_j), e_\alpha\rangle^2 \\
&= \sum_{ijk\alpha} \langle \tilde{\nabla}_{e_k}\sigma(e_i, e_j), e_\alpha\rangle^2 = \sum_{ijk\alpha} (e_k(\langle \sigma(e_i, e_j), e_\alpha\rangle))^2 \\
&= \sum_{ijk\alpha} (dh^\alpha_{ij}(e_k)) = \sum_{ijk\alpha} (h^\alpha_{ijk})^2.
\end{aligned}$$

Proposição 2.1. *Se M é uma subvariedade mínima imersa em um espaço localmente simétrico $\tilde{M}$, então*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\|\sigma\|^2 \;=\; & \|\nabla'\sigma\|^2 + \sum tr(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha)^2 - \sum (trA_\alpha A_\beta)^2 \\
& - \sum 4\tilde{R}_{\alpha\beta ki} h^\beta_{jk} h^\alpha_{ij} - \tilde{R}_{\alpha k\beta k} h^\beta_{ij} h^\alpha_{ij} + 2\tilde{R}_{ijkj} h^\alpha_{il} h^\alpha_{kl} + 2\tilde{R}_{ijkl} h^\alpha_{il} h^\alpha_{jk}.
\end{aligned}$$

Prova. De fato, dado $p \in M$, considere um referencial geodésico em $p \in M$ de modo que, em p, $\tilde{\nabla}_{e_k} e_\alpha = 0$, para todos k e α. Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\|\sigma\|^2 &= \frac{1}{2}\sum e_k e_k((h^\alpha_{ij})^2) \\
&= \sum e_k\{h^\alpha_{ij}(e_k h^\alpha_{ij})\} \\
&= \sum (e_k h^\alpha_{ij})^2 + h^\alpha_{ij}(e_k e_k h^\alpha_{ij}) \\
&= \sum (h^\alpha_{ijk})^2 + h^\alpha_{ij}\Delta h^\alpha_{ij}. \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

Daí, pelo que foi feito acima, temos o resultado.

□

Considere uma superfície M (subvariedade Riemanianna de dimensão dois) imersa isometricamente em $\tilde{M}$. Passamos agora a deduzir uma expresão para a curvatura Gaussiana $K = \langle R(e_1, e_2)e_2, e_1\rangle$ de M. Para isto, parametrizamos M com um sistema de coordenadas isotérmicas locais (x_1, x_2) no qual a métrica é dada por $g = E(dx_1^2 + dx_2^2)$, isto é, $\langle X_i, X_i\rangle = E$ e $\langle X_i, X_j\rangle = 0$ para $i, j = 1, 2$, onde X_i são os campos coordenados locais. Temos, desta maneira, que os campos $e_i = \dfrac{X_i}{\sqrt{E}}$, para $i = 1, 2$, determinam um referencial ortonormal local cujo co-referencial associado é denotado por ω_i. Como $dx_i(\dfrac{X_j}{\sqrt{E}}) = \dfrac{\delta_{ij}}{\sqrt{E}}$, concluímos que $dx_i = \dfrac{\omega_i}{\sqrt{E}}$ para $i = 1, 2$. De (2.6), temos

$$\begin{aligned} d\omega_{12}(e_1, e_2) &= \omega_{1i} \wedge \omega_{i2}(e_1, e_2) + \Omega_{12}(e_1, e_2) \\ &= \Omega_{12}(e_1, e_2) = -K, \end{aligned}$$

portanto,

$$d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2 = -KEdx_1 \wedge dx_2. \tag{2.33}$$

Por outro lado, $\omega_{12} = \omega_{12}(X_1)dx_1 + \omega_{12}(X_2)dx_2$ e

$$\begin{aligned} \omega_{12}(X_1) = \langle \nabla_{X_1} e_1, e_2\rangle &= \frac{1}{E}\langle \nabla_{X_1} X_1, X_2\rangle \\ &= -\frac{1}{E}\langle X_1, \nabla_{X_1} X_2\rangle = -\frac{1}{E}\langle X_1, \nabla_{X_2} X_1\rangle \\ &= -\frac{1}{2E} X_2(E). \end{aligned}$$

Analogamente, $\omega_{12}(X_2) = \dfrac{1}{2E}X_1(E)$. Logo, $\omega_{12} = \dfrac{1}{2}\{-\frac{X_2(E)}{E}dx_1 + \frac{X_1(E)}{E}dx_2\}$ e, assim,

$$d\omega_{12} = \frac{1}{2}\{X_2(\frac{X_2(E)}{E}) + X_1(\frac{X_1(E)}{E})\}dx_1 \wedge dx_2. \tag{2.34}$$

De (2.33) e (2.34), ficamos com

$$K = -\frac{1}{2E}\{X_2(\frac{X_2(E)}{E}) + X_1(\frac{X_1(E)}{E})\}. \tag{2.35}$$

Observando que K e E são vistas localmente como funções de x_1 e x_2, definidas em um aberto do $\mathbb{R}^2$, consideramos o Laplaciano Δ usual do $\mathbb{R}^2$ no seguinte

Lema 2.1. *Seja (x_1, x_2) um sistema de coordenadas locais isotérmicas em uma superfície M imersa isometricamente em $\tilde{M}$. Seja $E = \langle X_i, X_i \rangle$, onde X_i, $i = 1, 2$, são os campos coordenados locais de M. Então, a curvatura Gaussiana K de M satisfaz*

$$K = -\frac{1}{4E}(\Delta \log E^2).$$

Prova. De fato, temos que

$$X_2(X_2(\log E^2)) = X_2(\frac{\partial}{\partial x_2} \log E^2) = X_2(\frac{2}{E}\frac{\partial}{\partial x_2}E) = 2X_2(\frac{X_2(E)}{E})$$

e, analogamente, $X_1(X_1(\log E^2)) = 2X_1(\frac{X_1(E)}{E})$. Portanto, visto (2.35),

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4E}\Delta \log E^2 &= -\frac{1}{4E}\{X_1(X_1(\log E^2)) + X_2(X_2(\log E^2))\} \\ &= -\frac{1}{2E}\{X_2(\frac{X_2(E)}{E}) + X_1(\frac{X_1(E)}{E})\} = K. \end{aligned}$$

□

Encerramos esta seção enunciando o teorema de E.Hopf que será utilizado no próximo capítulo na demonstração de alguns resultados. A prova deste teorema pode ser vista no primeiro capítulo de [7].

Teorema 2.1. *Seja M uma variedade Riemaniana orientável, compacta e conexa. Se f é uma função suave em M com $\Delta f \geq 0$, então f é constante.*

Capítulo 3

Sobre subvariedades totalmente reais

Sejam M uma variedade Riemanniana n-dimensional e $\tilde{M}$ uma variedade Kähler de dimensão $2(n+p)$, com $p \geq 0$. Sejam também $\tilde{J}$ a estrutura quasi-complexa e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a métrica Riemanniana de $\tilde{M}$. Denominamos M uma **subvariedade totalmente real** de $\tilde{M}$ se existe uma imersão isométrica de M em $\tilde{M}$ tal que, para todo $p \in M$, $\tilde{J}(T_pM) \subset (T_pM)^{\perp}$, onde T_pM denota o espaço tangente de M em p e $(T_pM)^{\perp}$ o espaço normal em p.

Por uma seção plana entendemos um subespaço vetorial 2-dimensional de um espaço tangente. Uma seção plana τ é chamada **antiholomorfa** se $\tilde{J}\tau$ é perpendicular a τ.

Proposição 3.1. *Seja M uma subvariedade imersa em uma variedade quasi-Hermitiana $\tilde{M}$. Então M é uma subvariedade totalmente real se, e somente se, toda seção plana de M é antiholomorfa.*

Prova. Seja X um vetor arbitrário em $T_pM \backslash \{0\}$, e considere $\{e_1 = X, e_2, \ldots,$

$e_n\}$ base de T_pM. Denotaremos τ_{ij} a seção plana gerada por e_i e e_j.

Supondo que toda seção plana é antiholomorfa, temos que $\tilde{J}\tau_{1j}$ é perpendicular a τ_{ij}, para $j = 2, \cdots, n$. Portanto $\tilde{J}X$ é perpendicular a $e_1, e_2, \ldots, e_n$, donde concluímos que $\tilde{J}X \in (T_pM)^\perp$. Isto implica dizer que M é uma subvariedade totalmente real de $\tilde{M}$, uma vez que X foi tomado arbitrariamente. A recíproca segue diretamente da definição de subvariedades totalmente reais.

$\square$

Assuma que M é uma subvariedade totalmente real imersa em $\tilde{M}$. Denotaremos por ∇ (resp. $\tilde{\nabla}$), a conexão Riemanianna de M (resp. $\tilde{M}$).

Observação 3.1. *Por convenção usaremos os seguintes índices:* $A, B, C, D = 1, \ldots, (n+1), 1^*, \ldots, (n+1)^*$; $i, j, k, l, m, s = 1, \ldots, n$; $\alpha, \beta = (n+1), \ldots, (n+p), \ldots, 1^*, \ldots, (n+p)^*$; $\lambda, \mu = (n+1), \ldots, (n+p)$.

Escolhendo um referencial ortonormal local em $\tilde{M}$ da forma,

$$e_1, \cdots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{n+p}, e_{1^*} = \tilde{J}e_1 \ldots, e_{n^*} = \tilde{J}e_n,$$
$$e_{n+1^*} = \tilde{J}e_{n+1}, \ldots, e^*_{n+p} = \tilde{J}e_{n+p}$$

de maneira que, restrito a M, $e_1, \ldots, e_n$ são tangentes a M, podemos escrever as componentes de $\tilde{J}$ com respeito a tal referencial na forma

$$(\tilde{J}_{AB}) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -I_{n+p} \\ \hline I_{n+p} & 0 \end{array}\right), \; \tilde{J}_{AB} = \langle \tilde{J}e_B, e_A \rangle$$

uma vez que, a partir da observação 3.1, temos : $J_{ij} = \langle Je_j, e_i \rangle = 0$; $J_{ij^*} = \langle Je_{j^*}, e_i \rangle = \langle JJe_j, e_i \rangle = -\langle e_j, e_i \rangle = -\delta_{ij}$; $J_{i\lambda} = \langle Je_\lambda, e_i \rangle = -\langle e_\lambda, Je_i \rangle = \langle e_\lambda, e_{i^*} \rangle = 0$; $J_{\lambda\mu} = \langle Je_\mu, e_\lambda \rangle = \langle e_{\lambda^*}, e_\mu \rangle = 0$; o operador J verifica, $J_{AB} = \langle Je_B, e_A \rangle = -\langle e_B, Je_A \rangle = -J_{AB}$ para todos os índices A, B.

Com respeito ao referencial em $\tilde{M}$ escolhido acima, considere

$$\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}, \ldots, \omega_{n+p}, \ldots, \omega_{1*}, \ldots, \omega_{n*}, \omega_{(n+1)*}, \ldots, \omega_{(n+p)*}$$

o co-referencial associado. Dessa forma, temos à disposição todas as equações de estruturas dadas no capítulo preliminar e devido à estrutura quasi-complexa de $\tilde{M}$, destacamos o seguinte

Lema 3.1. *Se ω_{AB} são as formas de conexão Riemanianna em $\tilde{M}$, valem as seguintes igualdades:*

(i) $\omega_{ij} = \omega_{i^*j^*},\ \omega_{i^*j} = \omega_{j^*i}$,

(ii) $\omega_{\lambda\mu} = \omega_{\lambda^*\mu^*},\ \omega_{\lambda*\mu} = \omega_{\mu^*\lambda}$,

(iii) $\omega_{i\mu} = \omega_{i^*\mu^*},\ \omega_{i^*\mu} = \omega_{\mu i^*}$.

Prova. Verificaremos as duas primeiras igualdades e a prova das restantes segue de modo análogo. Usando a definição das formas de conexão Riemanniana, o caráter Hermitiano da métrica e o fato de $\tilde{M}$ ser Kähler, temos

$$\begin{aligned} \omega_{ij}(X) &= \langle \tilde{\nabla}_X e_i, e_j \rangle = \langle \tilde{J}\tilde{\nabla}_X e_i, \tilde{J}e_j \rangle \\ &= \langle \tilde{\nabla}_X \tilde{J}e_i, \tilde{J}e_j \rangle = \langle \tilde{\nabla}_X e_{i^*}, e_{j^*} \rangle = \omega_{i^*j^*}(X) \end{aligned}$$

e ainda,

$$\begin{aligned} \omega_{i^*j}(X) &= \langle \tilde{\nabla}_X e_i^*, e_j \rangle = \langle \tilde{\nabla}_X \tilde{J}e_i, e_j \rangle \\ &= -\langle \tilde{\nabla}_X e_i, \tilde{J}e_j \rangle = \langle \tilde{\nabla}_X \tilde{J}e_j, e_i \rangle = \omega_{j^*i}(X), \end{aligned}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Logo, valem as igualdades.

$\square$

Observação 3.2. *Segue das equações de estrutura que* $\omega_{\alpha i}(e_j) = h^{\alpha}_{ij} = h^{\alpha}_{ji}$. *Em nosso caso, para* $\alpha = k^*$, *podemos escrever,* $\omega_{k^* i}(e_j) = \omega_{i^* k}(e_j)$, *portanto,* $h^{k^*}_{ij} = h^{i^*}_{kj} = h^{j^*}_{ik}$.

3.1 Subvariedades totalmente reais imersas em uma forma espacial complexa.

Uma variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante é chamada uma **forma espacial complexa**. Seja $\tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$ uma forma espacial complexa $(n+p)$-dimensional de curvatura seccional holomorfa constante $\tilde{c}$. Temos, então, pela expressão da curvatura seccional holomorfa,

$$\begin{aligned} \tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y})\tilde{Z} &= \frac{1}{4}\tilde{c}\{\langle\tilde{Y},\tilde{Z}\rangle\tilde{X} - \langle\tilde{X},\tilde{Z}\rangle\tilde{Y} \\ &\quad + \langle\tilde{J}\tilde{Y},\tilde{Z}\rangle\tilde{J}\tilde{X} - \tilde{g}(\tilde{J}\tilde{X},\tilde{Z})\tilde{J}\tilde{Y} + 2\langle(\tilde{X},\tilde{J}\tilde{Y}\rangle\tilde{J}\tilde{Z}\}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ e $\tilde{Z}$ são campos de vetores em $\tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$. Assim, podemos obter

$$\tilde{R}_{ABCD} = \frac{1}{4}\tilde{c}\{\delta_{BC}\delta_{AD} - \delta_{AC}\delta_{BD} + \tilde{J}_{BC}\tilde{J}_{AD} - \tilde{J}_{AC}\tilde{J}_{BD} + 2\tilde{J}_{AB}\tilde{J}_{DC}\}. \tag{3.2}$$

Uma subvariedade M de $\tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$ é dita uma **subvariedade invariante** se, para cada ponto $x \in M$, o espaço tangente a M em x é invariante pelo operador curvatura, isto é, $(\tilde{R}(X,Y))T_xM \subset T_xM$, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposição 3.2. *Seja* M *uma subvariedade n-dimensional imersa em* $\tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$, *com* $\tilde{c} \neq 0$. *Então* M *é uma subvariedade holomorfa ou totalmente real de* $\tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$ *se, e somente se,* M *é uma subvariedade invariante.*

Prova. Sejam $x \in M$, X, Y campos de vetores em M e $Z \in T_xM$. De (3.2) temos,

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y)Z &= \frac{1}{4}\tilde{c}\{\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y \\ &\quad + \langle \tilde{J}Y,Z\rangle \tilde{J}X - \langle \tilde{J}X,Z\rangle \tilde{J}Y + 2\langle X,\tilde{J}Y\rangle \tilde{J}Z\}.\end{aligned}$$

Logo, se M é holomorfa ou totalmente real, vemos que todos os termos da expressão de $\tilde{R}(X,Y)Z$ acima são, em x, no caso holomorfo, vetores de T_xM e, no caso totalmente real, os termos que apresentam $\tilde{J}$ são todos nulos e os restantes pertencem à T_xM. Portanto, $\tilde{R}(X,Y)Z \in T_xM$.

Reciprocamente, suponha que $\tilde{R}(X,Y)Z \in T_xM$ para todos X, Y e Z. Fazendo $Z = X$, obtemos

$$\tilde{R}(X,Y)X = \frac{1}{4}\tilde{c}\{\langle Y,X\rangle X - \langle X,X\rangle Y + 3\langle X,\tilde{J}Y\rangle \tilde{J}X\}.$$

Como $\tilde{R}(X,Y)Z \in T_xM$, devemos ter $\langle X,\tilde{J}Y\rangle \tilde{J}X \in T_xM$. Sendo assim, pode ocorrer $\tilde{J}X \in T_xM$, para todo X, ou existe X não nulo, tal que $\tilde{J}X \notin T_xM$. Se $\tilde{J}X \in T_xM$, para todo X, temos que M é holomorfa. Se existe X não nulo, tal que $\tilde{J}X \notin T_xM$ (podemos supor $\tilde{J}X \in (T_xM)^{\perp}$), mostraremos que, para todo $Y \in T_xM$, $\tilde{J}Y \in T_x^{\perp}M$, ou seja, M é totalmente real. E assim o resultado seguirá.

Para o que falta, considere uma base ortonormal $\{X = X_1, \ldots, X_n\}$ em T_xM e suponha que exista algum X_i, da base, tal que $(\tilde{J}X_i)^{\top} \neq 0$. Dessa forma, lembrando do caráter Hermitiano da métrica e que $J^2 = -Id$, tem-se

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X_1,X_i)(JX_i)^{\top} &= \frac{1}{4}\tilde{c}\{\langle X_i,\tilde{J}X_i\rangle X - \langle X_1,\tilde{J}X_i\rangle X_i \\ &\quad + \langle \tilde{J}X_i, \tilde{J}X_i\rangle \tilde{J}X_1 - \langle \tilde{J}X_1, JX_i\rangle \tilde{J}X_i + 2\langle X,\tilde{J}X_i\rangle \tilde{J}\tilde{J}X_i\} \\ &= \frac{1}{4}\tilde{c}\langle \tilde{J}X_i,\tilde{J}X_i\rangle \tilde{J}X_1, \quad \in (T_xM)^{\perp},\end{aligned}$$

o que nos dá uma contradição, já que, pelo que estamos assumindo,

$$\tilde{R}(X_1, X_i)(JX_i)^{\top} \in T_xM.$$

Portanto deve-se ter $(\tilde{J}X_i)^{\top} = 0$, ou seja, $\tilde{J}X_i \in (T_xM)^{\perp}$, para todo i. Isto nos garante que M é totalmente real.

$\square$

Seja M uma subvariedade totalmente real imersa em $\tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$. Da equação de Gauss, temos

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z,W\rangle &= \langle \tilde{R}(X,Y)Z,W\rangle + \langle \sigma(X,W), \sigma(Y,Z)\rangle \\ &\quad - \langle \sigma(X,Z), \sigma(Y,W)\rangle \\ &= \frac{1}{4}\tilde{c}\{\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle\} \\ &\quad + \langle \sigma(X,W), \sigma(Y,Z)\rangle - \langle \sigma(X,Z), \sigma(Y,W)\rangle \\ &= \frac{1}{4}\tilde{c}\{\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle\} \\ &\quad + \sum_{\alpha}\{\langle A_\alpha X,W\rangle\langle A_\alpha Y,Z\rangle - \langle A_\alpha X,Z\rangle\langle A_\alpha Y,W\rangle\}.\end{aligned}$$

Proposição 3.3. *Seja M uma subvariedade totalmente real n-dimensional imersa em $\tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$. Se M é totalmente geodésica em $\tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$, então M é um espaço de curvatura constante ($K = \frac{1}{4}\tilde{c}$).*

Prova. De fato, temos que a curvatura seccional K de M determinada por vetores ortonormais X e Y é dada por

$$K(X,Y) = R(X,Y,Y,X) = \frac{1}{4}\tilde{c} + \sum_{\alpha}\{\langle A_\alpha X,X\rangle\langle A_\alpha Y,Y\rangle - \langle A_\alpha X,Y\rangle^2\}.$$

Portanto, como M é totalmente geodésica, a expressão acima torna-se

$$K(X,Y) = \frac{1}{4}\tilde{c}.$$

□

Agora, obtemos expressões para o tensor de Ricci e a curvatura escalar de M.

Seja S o tensor de Ricci de M. Então, temos

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= \sum_i R(e_i, X, Y, e_i) \\ &= \sum_i \frac{1}{4}\tilde{c}\{\langle e_i, e_i\rangle\langle X, Y\rangle - \langle e_i, Y\rangle\langle X, e_i\rangle\} \\ &\quad + \sum_{i,\alpha}\{\langle A_\alpha e_i, e_i\rangle\langle A_\alpha X, Y\rangle - \langle A_\alpha e_i, Y\rangle\langle A_\alpha X, e_i\rangle\} \\ &= \frac{1}{4}(n-1)\tilde{c}\langle X, Y\rangle + \sum_\alpha\{(trA_\alpha)\langle A_\alpha X, Y\rangle - \langle A_\alpha X, A_\alpha Y\rangle\} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Seja ρ a curvatura escalar de M. Então, temos que

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_j S(e_j, e_j) \\ &= \sum_j \{\frac{1}{4}(n-1)\tilde{c}\langle e_j, e_j\rangle + \sum_\alpha\{(trA_\alpha)\langle A_\alpha e_j, e_j\rangle - \langle A_\alpha e_j, A_\alpha e_j\rangle\}\} \\ &= \frac{1}{4}n(n-1)\tilde{c} + \sum_\alpha (trA_\alpha)^2 - \|\sigma\|^2. \end{aligned} \tag{3.4}$$

De posse das expressões encontradas, concluímos o seguinte resultado:

Proposição 3.4. *Seja M uma subvariedade n-dimensional totalmente real mínima imersa em $\tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$. Então*

(a) $S - \frac{1}{4}(n-1)\tilde{c}\langle\ ,\ \rangle$ *é negativa semi-definida;*

(b) $\rho \leq \frac{1}{4}n(n-1)\tilde{c}$.

Prova. De fato, para (a), sendo M mínima, temos que $trA_\alpha = 0$, para todo α. Logo, em (3.3), ficamos com

$$S(X,X) = \frac{1}{4}(n-1)\tilde{c}\langle X,X\rangle - \sum_\alpha \langle A_\alpha X, A_\alpha X\rangle.$$

Dessa forma,

$$S(X,X) - \frac{1}{4}(n-1)\tilde{c}\langle X,X\rangle = -\sum_\alpha \|A_\alpha X\|^2 \leq 0$$

o que prova (a).

Para (b), em (3.4), ficamos com

$$\rho = \frac{1}{4}n(n-1)\tilde{c} - \|\sigma\|^2 \leq \frac{1}{4}n(n-1)\tilde{c},$$

o que prova (b).

□

Proposição 3.5. *Seja M uma subvariedade n-dimensional totalmente real mínima imersa em $\tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$. Então M é totalmente geodésica se, e somente se, M satisfaz uma das seguintes equações:*

(a) $K = \frac{1}{4}\tilde{c}$,

(b) $S = \frac{1}{4}(n-1)\tilde{c}g$,

(c) $\rho = \frac{1}{4}n(n-1)\tilde{c}$.

Prova. Supondo M totalmente geodésica, temos que a segunda forma fundamental σ é identicamente nula. Daí, (a) é a proposição 3.3; (b) segue direto de 3.3, visto que $\langle A_\alpha X, A_\alpha Y\rangle = \langle \sigma(X, A_\alpha Y), e_\alpha\rangle = 0$; (c) segue direto de (3.4), uma vez que $trA_\alpha = 0$, pois M é mínima, e $\|\sigma\| = 0$.

Reciprocamente, se vale (a), temos

$$0 = \sum_{\alpha} \{ \langle A_\alpha e_i, e_i \rangle \langle A_\alpha e_j, e_j \rangle - \langle A_\alpha e_i, e_j \rangle^2 \},$$

para todos i, j. Logo, tomando a soma em i e j na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\alpha,i,j} \{ \langle A_\alpha e_i, e_i \rangle \langle A_\alpha e_j, e_j \rangle - \langle A_\alpha e_i, e_j \rangle^2 \} \\ &= \sum_{\alpha} (trA_\alpha)^2 - \|\sigma\|^2. \end{aligned}$$

Como M é mínima, ficamos com $\|\sigma\| = 0$, portanto M é totalmente geodésica.

Se vale (b), segue de (3.3),

$$0 = \sum_{\alpha} \langle A_\alpha e_i, A_\alpha e_i \rangle,$$

para todos i, visto que M é mínima. Com isto, escrevendo $A_\alpha e_i$ na base $\{e_j\}$ e substituindo na expressão acima, obtemos

$$0 = \sum_{\alpha,i,j} \langle A_\alpha e_i, e_j \rangle^2 = \|\sigma\|^2, \tag{3.5}$$

donde concluímos que M é totalmente geodésica.

Por fim, se vale (c), segue diretamente de (3.4), que $\|\sigma\|^2 = 0$, daí M é totalmente geodésica.

□

O objetivo agora é obtermos uma fórmula tipo-Simons para uma subvariedade totalmente real mínima imersa em uma forma espacial complexa.

Proposição 3.6. *Seja M uma subvariedade n-dimensional totalmente real mínima imersa em $\tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$. Então*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\|\sigma\|^2 &= \|\nabla'\sigma\|^2 + \sum tr(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha)^2 - \sum (trA_\alpha A_\beta)^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}n\tilde{c}\|\sigma\|^2 + \frac{1}{4}\tilde{c}\sum trA_{i*}^2 \\
&= \|\nabla'\sigma\|^2 + 2\sum tr(A_\alpha A_\beta)^2 - 2\ tr(\sum A_\alpha^2)^2 - \sum (trA_\alpha A_\beta)^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}n\tilde{c}\|\sigma\|^2 + \frac{1}{4}\tilde{c}\sum trA_{i*}^2.
\end{aligned}$$

Prova. Sendo M uma subvariedade mínima de $\tilde{M}_{n+p}(\tilde{c})$, obtemos, conforme a proposição 2.1,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\|\sigma\|^2 &= \|\nabla'\sigma\|^2 + \sum tr(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha)^2 - \sum(trA_\alpha A_\beta)^2 \\
&\quad - \sum(4\tilde{R}_{\alpha\beta ij}h_{ik}^\beta h_{jk}^\alpha - \tilde{R}_{\alpha k\beta k}h_{ij}^\beta h_{ij}^\alpha + 2\tilde{R}_{ijkj}h_{il}^\alpha h_{kl}^\alpha + 2\tilde{R}_{ijkl}h_{il}^\alpha h_{jk}^\alpha).
\end{aligned}$$

Segue, de (3.2), que o tensor curvatura de $\tilde{M}_{n+p}(\tilde{c})$, satisfaz (1),(2),(3) e (4):

(1)

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{\alpha\beta ij} &= \frac{1}{4}\tilde{c}\{\delta_{\alpha j}\delta_{\beta i} - \delta_{\alpha i}\delta_{\beta j} + \tilde{J}_{\alpha j}\tilde{J}_{\beta i} - \tilde{J}_{\alpha i}\tilde{J}_{\beta j} + 2\tilde{J}_{\alpha\beta}\tilde{J}_{ji}\} \\
&= \frac{1}{4}\tilde{c}\{\tilde{J}_{\alpha j}\tilde{J}_{\beta i} - \tilde{J}_{\alpha i}\tilde{J}_{\beta j}\},
\end{aligned}$$

e aqui, analisando os índices, temos

$\alpha = j^*$ e $\beta = i^*$, com $i \neq j \Longrightarrow \tilde{R}_{\alpha\beta ij} = \frac{1}{4}\tilde{c}$.

$\alpha = i^*$ e $\beta = j^*$, com $i \neq j \Longrightarrow \tilde{R}_{\alpha\beta ij} = -\frac{1}{4}\tilde{c}$.

Em qualquer outra hipótese, temos $\tilde{R}_{\alpha\beta ij} = 0$.

Logo, concluímos que

$$\begin{aligned}
\sum 4\tilde{R}_{\alpha\beta ij}h_{jk}^\beta h_{ij}^\alpha &= \tilde{c}\sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j}}(h_{jk}^{j^*}h_{ik}^{i^*} - h_{jk}^{i^*}h_{ik}^{j^*}) \qquad (3.6) \\
&= \tilde{c}\sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j}} h_{jj}^{k^*}h_{ii}^{k^*} - \tilde{c}\sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j}} h_{jk}^{i^*}h_{ik}^{j^*} = -\tilde{c}\sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j}} h_{jk}^{i^*}h_{ik}^{j^*}.
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{\alpha k\beta k} &= \frac{1}{4}\tilde{c}\{\delta_{\alpha k}\delta_{k\beta} - \delta_{\alpha\beta}\delta_{kk} + \tilde{J}_{\alpha k}\tilde{J}_{k\beta} - \tilde{J}_{\alpha\beta}\tilde{J}_{kk} + 2\tilde{J}_{\alpha k}\tilde{J}_{k\beta}\}\\ &= \frac{1}{4}\tilde{c}\{-\delta_{\alpha\beta}\delta_{kk} + \tilde{J}_{\alpha k}\tilde{J}_{k\beta} + 2\tilde{J}_{\alpha k}\tilde{J}_{k\beta}\}.\end{aligned}$$

Analisando os índices, temos

$\alpha = \beta \Longrightarrow \tilde{R}_{\alpha k\beta k} = \frac{1}{4}\tilde{c}\{-1 - 3(\tilde{J}_{\alpha k})^2\}$

Portanto, $\tilde{R}_{\alpha k\beta k} = -\tilde{c}$, se $\alpha = k^*$;e $\tilde{R}_{\alpha k\beta k} = -\frac{\tilde{c}}{4}$, se $\alpha \neq k^*$.

$\alpha \neq \beta \Longrightarrow \tilde{R}_{\alpha k\beta k} = \frac{1}{4}\tilde{c}\{3\tilde{J}_{\alpha k}\tilde{J}_{k\beta}\} = 0.$

Logo, concluímos que,

$$\sum \tilde{R}_{\alpha k\beta k}h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{\beta} = \sum_{k,i,j} -\tilde{c}h_{ij}^{k*}h_{ij}^{k*} - \sum_{\substack{\alpha,i,j,k\\ \alpha\neq k^*}} \frac{\tilde{c}}{4}h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{\alpha}. \tag{3.7}$$

(3)

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{ijkj} &= \frac{1}{4}\tilde{c}\{\delta_{ij}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jj} + \tilde{J}_{ij}\tilde{J}_{jk} - \tilde{J}_{ik}\tilde{J}_{jj} + 2\tilde{J}_{ij}\tilde{J}_{jk}\}\\ &= \frac{1}{4}\tilde{c}\{\delta_{ij}\delta_{kj} - \delta_{ik}\delta_{jj}\},\end{aligned}$$

analisando os índices, temos

$i = k \Longrightarrow \tilde{R}_{ijkj} = \frac{1}{4}\tilde{c}\{\delta_{ij}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jj}\}$

Portanto, $\tilde{R}_{ijkj} = 0$, se $i = j$; e $\tilde{R}_{ijkj} = -\frac{\tilde{c}}{4}$, se $i \neq j$.

$i \neq k \Longrightarrow \tilde{R}_{ijkj} = 0$. Logo, concluímos que

$$\sum \tilde{R}_{ijkj}h_{il}^{\alpha}h_{kl}^{\alpha} = \sum_{\substack{\alpha,i,j\\ i\neq j}} -\frac{\tilde{c}}{4}h_{il}^{\alpha}h_{il}^{\alpha}. \tag{3.8}$$

(4)

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{ijkl} &= \frac{1}{4}\tilde{c}\{\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl} + \tilde{J}_{il}\tilde{J}_{jk} - \tilde{J}_{ik}\tilde{J}_{jl} + 2\tilde{J}_{ij}\tilde{J}_{lk}\}\\ &= \frac{1}{4}\tilde{c}\{\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl}\}.\end{aligned}$$

Analisando os índices, temos

$i = l$ e $j = k \Longrightarrow \tilde{R}_{ijkl} = \frac{1}{4}\tilde{c}\{1 - \delta_{ij}\delta_{ji}\}$.

Portanto, $\tilde{R}_{ijkl} = \frac{\tilde{c}}{4}$, se for $i \neq j$; e $\tilde{R}_{ijkl} = 0$, nos demais casos.

$i = k$ e $j = l \Longrightarrow \tilde{R}_{ijkl} = \frac{1}{4}\tilde{c}\{\delta_{kl}\delta_{lk} - 1\}$.

Portanto, $\tilde{R}_{ijkl} = -\frac{\tilde{c}}{4}$, se for $k \neq l$; e $\tilde{R}_{ijkl} = 0$, nos demais casos.

Em qualquer outra hipótese diferente das duas acimas analisadas, temos $\tilde{R}_{ijkl} = 0$.

Logo, concluímos que

$$\sum \tilde{R}_{ijkj} h^{\alpha}_{il} h^{\alpha}_{kl} = \sum_{\substack{\alpha,i,j \\ i\neq j}} \frac{\tilde{c}}{4} h^{\alpha}_{ii} h^{\alpha}_{jj} - \sum_{\substack{\alpha,k,l \\ k\neq l}} \frac{\tilde{c}}{4} h^{\alpha}_{kl} h^{\alpha}_{lk}. \tag{3.9}$$

De (5.11), (5.12), (5.13) e (5.14), temos que

$$\begin{aligned}
& -\sum (4\tilde{R}_{\alpha\beta ij} h^{\beta}_{ik} h^{\alpha}_{jk} - \tilde{R}_{\alpha k\beta k} h^{\beta}_{ij} h^{\alpha}_{ij} + 2\tilde{R}_{ijkj} h^{\alpha}_{il} h^{\alpha}_{kl} + 2\tilde{R}_{ijkl} h^{\alpha}_{il} h^{\alpha}_{jk}) = \\
= \;& -(\frac{\tilde{c}}{4} \sum_{\substack{\alpha,i,j,k \\ \alpha\neq k^*}} (h^{\alpha}_{ij})^2 - \frac{\tilde{c}}{2} \sum_{\substack{\alpha,i,j,l \\ i\neq j}} (h^{\alpha}_{il})^2 + \frac{\tilde{c}}{2} \sum_{\substack{\alpha,i,j \\ i\neq j}} h^{\alpha}_{ii} h^{\alpha}_{jj} - \frac{\tilde{c}}{2} \sum_{\substack{\alpha,k,l \\ k\neq l}} (h^{\alpha}_{kl})^2) \\
= \;& -\Bigg\{ \frac{\tilde{c}}{4} \Bigg[\sum_{\alpha,i,j,k} (h^{\alpha}_{ij})^2 - \sum_{i,j,k} (h^{k^*}_{ij})^2 \Bigg] - \frac{\tilde{c}}{2} \Bigg[\sum_{\alpha,i,j,l} (h^{\alpha}_{il})^2 - \sum_{i,j,k} (h^{\alpha}_{jl})^2 \Bigg] \\
& + \frac{\tilde{c}}{2} \Bigg[\sum_{\alpha,i,j} h^{\alpha}_{ii} h^{\alpha}_{jj} - \sum_{i,\alpha} (h^{\alpha}_{ii})^2 \Bigg] - \frac{\tilde{c}}{2} \Bigg[\sum_{\alpha,i,j} (h^{\alpha}_{kl})^2 - \sum_{k,\alpha} (h^{\alpha}_{kk})^2 \Bigg] \Bigg\} \\
= \;& \frac{1}{4} n\tilde{c} \|\sigma\|^2 + \frac{1}{4}\tilde{c} \sum tr A^2_{i*}.
\end{aligned}$$

E assim, obtemos a primeira das igualdades desejadas.

Para a segunda igualdade, desenvolvemos o termo $\sum tr(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha)^2$ utilizando as propriedades do traço (traço da soma é a soma dos traços e $tr(AB) = tr(BA)$). Daí obtemos as seguintes igualdades

$$
\begin{aligned}
& \sum tr(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha)^2 = tr \sum (A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha)^2 \\
= \;& tr\left[\sum (A_\alpha A_\beta)^2 + \sum (A_\beta A_\alpha)^2 - \sum A_\alpha A_\beta A_\beta A_\alpha - \sum A_\beta A_\alpha A_\alpha A_\beta\right] \\
= \;& 2\sum tr(A_\alpha A_\beta)^2 - 2\sum tr(A_\beta^2 A_\alpha^2) \\
= \;& 2\sum tr(A_\alpha A_\beta)^2 - 2tr\sum (A_\beta^2 A_\alpha^2) \\
= \;& 2\sum tr(A_\alpha A_\beta)^2 - 2tr(\sum A_\beta^2 \sum A_\alpha^2) \\
= \;& 2\sum tr(A_\alpha A_\beta)^2 - 2tr\sum (A_\alpha^2)^2.
\end{aligned}
$$

Substituindo na primeira igualdade a expressão acima encontrada, temos demonstrado a segunda igualdade da proposição.

□

Lema 3.2. *Seja M uma subvariedade n-dimensional, totalmente real e mínima, imersa em $\tilde{M}^n(\tilde{c})$. Então*

(a) $tr(\sum {A_{i*}}^2)^2 = \sum (trA_{i*}A_{j*})^2$;

(b) $trA_{i*}A_{j*} = \dfrac{\delta_{ij}}{n}\|\sigma\|^2$, *se M é uma variedade Einstein.*

Prova. (a) Usando as propriedades do traço e a simetria do operador A_{i^*} podemos escrever as igualdades

$$
\begin{aligned}
tr\left(\sum A_{i^*}^2\right)^2 &= tr\sum A_{i^*}^2 \sum A_{j^*}^2 = tr\sum A_{i^*}^2 A_{j^*}^2 \\
&= \sum tr(A_{i^*}^2 A_{j^*}^2) = \sum \langle A_{i^*}^2 A_{j^*}^2 e_k, e_k\rangle = \sum \langle A_{j^*}^2 e_k, A_{i^*}^2 e_k\rangle \\
&= \sum \langle A_{j^*}^2 e_k, e_l\rangle\langle A_{i^*}^2 e_k, e_l\rangle = \sum \langle A_{j^*} e_k, A_{j^*} e_l\rangle\langle A_{i^*} e_k, A_{i^*} e_l\rangle \\
&= \sum \langle A_{j^*} e_k, e_m\rangle\langle A_{j^*} e_l, e_m\rangle\langle A_{i^*} e_k, e_r\rangle\langle A_{i^*} e_l, e_r\rangle.
\end{aligned}
$$

Agora observando a igualdade acima e o fato de $h^{i^*}_{jk} = h^{j*}_{ik}$ concluímos que

$$\begin{aligned} tr\left(\sum A^2_{i^*}\right)^2 &= \sum h^{j^*}_{km} h^{j^*}_{lm} h^{i^*}_{kr} h^{i^*}_{lr} = \sum h^{k^*}_{jm} h^{l^*}_{mj} h^{k^*}_{ir} h^{l^*}_{ri} \\ &= \sum \sum_{j,m} h^{k^*}_{jm} h^{l^*}_{mj} \sum_{i,r} h^{k^*}_{ir} h^{l^*}_{ri} = \sum (trA_{k^*}A_{l^*})^2. \end{aligned}$$

O que prova (a).

(b) Suponha que M é uma variedade Einstein. Então, por definição, existe uma constante real, digamos d, de modo que, $S(X,Y) = d\langle X,Y\rangle$, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Como M é uma subvariedade totalmente real e mínima de $\tilde{M}_n(\tilde{c})$, obtemos, conforme (3.3) e (3.4) que

$$\begin{aligned} &S(X,Y) = \frac{1}{4}(n-1)\tilde{c}\langle X,Y\rangle - \sum \langle A_{k^*}X, A_{k^*}Y\rangle, \\ &\rho = \frac{1}{4}n(n-1)\tilde{c} - \|\sigma\|^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$d\langle X,Y\rangle = \frac{1}{4}(n-1)\tilde{c}\langle X,Y\rangle - \langle A_{k^*}X, A_{k^*}Y\rangle, \forall X,Y,$$

e, em paticular, fixado $i \in \{1,2,\ldots,n\}$

$$d = \frac{1}{4}(n-1)\tilde{c} - \sum_k \langle A_{k^*}e_i, A_{k^*}e_i\rangle.$$

Tomando o somatório em i na igualdade acima, obtemos

$$nd = \frac{1}{4}n(n-1)\tilde{c} - \|\sigma\|^2,$$

donde concluímos que $d = \dfrac{\rho}{n}$.

Agora, sendo

$$\begin{aligned} trA_{i^*}A_{j^*} &= \sum h^{i^*}_{lk} h^{j^*}_{kl} = \sum h^{k^*}_{il} h^{k^*}_{lj} \\ &= \sum \langle A_{k^*}e_i, A_{k^*}e_j\rangle = (\frac{1}{4}(n-1)\tilde{c} - \frac{\rho}{n})\delta_{ij} \\ &= \frac{\|\sigma\|^2}{n}\delta_{ij}, \end{aligned}$$

concluímos a prova de (b).

□

Corolário 3.1. *Seja M uma subvariedade n-dimensional totalmente real, mínima imersa em $\tilde{M}^n(\tilde{c})$. Então*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\|\sigma\|^2 &= \|\nabla'\sigma\|^2 + \sum(tr(A_{i*}A_{j*} - A_{j*}A_{i*}) - \sum(trA_{i*}A_{j*})^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}(n+1)\tilde{c}\|\sigma\|^2 \\
&= \|\nabla'\sigma\|^2 + 2\sum tr(A_{i*}A_{j*})^2 - 3\ tr(\sum A_{i*}^2)^2 + \frac{1}{4}(n+1)\tilde{c}\|\sigma\|^2 \\
&= \|\nabla'\sigma\|^2 + 2\sum tr(A_{i*}A_{j*})^2 - 3\sum(trA_{i*}A_{j*})^2 + \frac{1}{4}(n+1)\tilde{c}\|\sigma\|^2.
\end{aligned}$$

Prova. A primeira igualdade é uma consequência imediata da proposição 3.6, visto que, neste caso, temos que os índices $\alpha's$ são todos da forma i^* para algum i. A segunda e a terceira igualdade seguem da segunda igualdade da proposição 3.6 e do lema 3.2(a), apenas substituindo as expressões.

□

3.2 Alguns resultados sobre subvariedades totalmente reais mínimas em uma forma espacial complexa

Para o primeiro resultado faremos uso de parte do teorema 1 de [10] que nos conta:

Lema 3.3. *Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_p$ matrizes simétricas ($p \geq 2$). Denote por $N(A) = trA^tA$ a norma de uma matriz A. Então*

$$\sum_{i,j} N(A_iA_j - A_jA_i) + \sum_{ij}(trA_iA_j)^2 \leq \frac{3}{2}(\sum_i N(A_i))^2. \tag{3.10}$$

Podemos agora enunciar e provar um dos principais resultados deste trabalho.

Teorema 3.1. *Seja M uma subvariedade n-dimensional, compacta, orientável, totalmente real e mínima imersa em $\tilde{M}^n(\tilde{c})$, com $\tilde{c} > 0$. Se $\|\sigma\|^2 < \dfrac{n+1}{6}\tilde{c}$, então M é totalmente geodésica.*

Prova. Notemos inicialmente que $tr(A_{i*}A_{j*} - A_{j*}A_{i*})^2 = -N(A_{i*}A_{j*} - A_{j*}A_{i*})$ devido a definição de N e o fato dos operadores de Weingerten A_{i^*} serem simétricos. Desta maneira, pelo corolário 3.1

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta\|\sigma\|^2 &= \|\nabla'\sigma\|^2 + \sum tr(A_{i*}A_{j*} - A_{j*}A_{i*})^2 - \sum (trA_{i*}A_{j*})^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}(n+1)\tilde{c}\|\sigma\|^2 \\ &= \|\nabla'\sigma\|^2 - \sum N(A_{i*}A_{j*} - A_{j*}A_{i*}) - \sum (trA_{i*}A_{j*})^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}(n+1)\tilde{c}\|\sigma\|^2\end{aligned}$$

utilizando o lema 3.3, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta\|\sigma\|^2 &\geq \|\nabla'\sigma\|^2 - \frac{3}{2}\|\sigma\|^4 + \frac{1}{4}(n+1)\tilde{c}\|\sigma\|^2 \\ &\geq \frac{\|\sigma\|^2}{2}(\frac{n+1}{2}\tilde{c} - 3\|\sigma\|^2).\end{aligned}$$

Portanto, se $\|\sigma\|^2 < \frac{n+1}{6}\tilde{c}$, então $\Delta\|\sigma\|^2 \geq 0$. Daí, pelo teorema de E.Hopf, concluímos que $\Delta\|\sigma\|^2 = 0$, donde, pelas desigualdades acima, temos que $\|\sigma\| = 0$. Assim, M é totalmente geodésica.

□

Corolário 3.2. *Seja M uma superfície compacta, orientável, totalmente real e mínima, imersa em $\tilde{M}^n(\tilde{c})$, $\tilde{c} > 0$. Se a curvatura Gaussiana de M é positiva, então M é totalmente geodésica.*

Prova. De fato, considerando $\{e_1, e_2\}$ um referencial ortonormal local em M, temos que a curvatura Gaussiana é dada por $\langle R(e_1, e_2)e_2, e_1\rangle$ e, portanto, a curvatura escalar $\rho = \langle R(e_1, e_2)e_2, e_1\rangle + \langle R(e_2, e_1)e_1, e_2\rangle = 2\langle R(e_1, e_2)e_2, e_1\rangle$. Logo, da hipótese, temos que $\rho > 0$. Sendo $\rho > 0$, então, por (3.4) e usando a hipótese de M ser mínima, tem-se $\|\sigma\|^2 < \frac{1}{2}\tilde{c}$. Pelo teorema anterior, fazendo $n = 2$, concluímos que M é totalmente geodésica.

□

O próximo resultado nos mostra uma caracterização para formas espaciais reais quando vistas como subvariedades totalmente reais mínimas de formas espaciais complexas.

Teorema 3.2. *Seja M uma subvariedade n-dimensional mínima totalmente real imersa em $\tilde{M}^n(\tilde{c})$. Se a curvatura seccional de M é constante igual a c, então $c = \frac{1}{4}\tilde{c}$ (isto é, M é totalmente geodésica) ou $c \leq 0$.*

Prova. Uma vez que a curvatura seccional $K = c$, podemos escrever a curvatura escalar como

$$\rho = \sum \langle R(e_i, e_j)e_j, e_i\rangle = \sum_{i \neq j} \langle R(e_i, e_j)e_j, e_i\rangle = n(n-1)c.$$

Pela proposição 3.4, temos que $\rho \leq \frac{n(n-1)}{4}\tilde{c}$. Logo, $c \leq \frac{\tilde{c}}{4}$. Além disto, sendo $R_{ijkl} = c(\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl})$, pois $K = c$, e também $R_{ijkl} = \frac{1}{4}\tilde{c}\{(\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl}) +$

$\sum(h^{\alpha}_{il}h^{\alpha}_{jk} - h^{\alpha}_{ik}h^{\alpha}_{jl})$, devido a equação de Gauus da imersão, ficamos com

$$\sum_m (h^{m^*}_{il}h^{m^*}_{jk} - h^{m^*}_{ik}h^{m^*}_{jl}) = (c - \frac{\tilde{c}}{4})(\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl}).$$

Multiplicando ambos os membros desta igualdade por $\sum_s h^{s^*}_{ik}h^{s^*}_{jl}$ e somando com respeito a i, j, k e l, obtemos

$$\sum tr(A_{m^*}A_{s^*})^2 - \sum(trA_{m^*}A_{s^*})^2 = (c - \frac{\tilde{c}}{4})\|\sigma\|^2, \tag{3.11}$$

visto que,

$$\begin{aligned}
\sum h^{m^*}_{il}h^{m^*}_{jk}h^{s^*}_{ik}h^{s^*}_{jl} &= \sum(A_{m^*}A_{s^*})_{ij}(A_{m^*}A_{s^*})_{ji} = \sum tr(A_{m^*}A_{s^*})^2, \\
\sum h^{m^*}_{ik}h^{m^*}_{jl}h^{s^*}_{ik}h^{s^*}_{jl} &= \sum(A_{m^*}A_{s^*})_{ii}(A_{m^*}A_{s^*})_{jj} = \sum(trA_{m^*}A_{s^*})^2,
\end{aligned}$$

e ainda,

$$\begin{aligned}
& \sum(c - \frac{\tilde{c}}{4})(\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl})h^{s^*}_{ik}h^{s^*}_{jl} = \\
= \; & (c - \frac{\tilde{c}}{4})\{\sum h^{s^*}_{ij}h^{s^*}_{ji} - \sum h^{s^*}_{ii}h^{s^*}_{jj}\} = (c - \frac{\tilde{c}}{4})\{\|\sigma\|^2 - \sum_s \left(\sum_i h^{s^*}_{ii}\right)^2\} \\
= \; & (c - \frac{\tilde{c}}{4})\|\sigma\|^2.
\end{aligned}$$

Nas condições do teorema, concluímos, de (3.4), que $\|\sigma\|^2 = n(n-1)(\frac{\tilde{c}}{4} - c)$. Observe que M é Einstein, por consequência de $K = c$.

Com isto, usando o corolário 3.1, (3.11) e Lema 3.2 (b), obtemos

$$\begin{aligned}
0 \; &= \; \|\nabla'\sigma\|^2 + 2\sum tr(A_{m^*}A_{s^*})^2 - 3\sum(trA_{m^*}A_{s^*})^2 + \\
& \quad + \frac{1}{4}(n+1)\tilde{c}\|\sigma\|^2 \\
&= \; \|\nabla'\sigma\|^2 + 2(c - \frac{\tilde{c}}{4})\|\sigma\|^2 - \sum(trA_{m^*}A_{s^*})^2 + \\
& \quad + \frac{1}{4}(n+1)\tilde{c}\|\sigma\|^2.
\end{aligned}$$

Donde decorre que,

$$
\begin{aligned}
0 &= \|\nabla'\sigma\|^2 + 2(c - \frac{\tilde{c}}{4})[n(n-1)(\frac{\tilde{c}}{4} - c)] - n(\frac{\|\sigma\|^2}{n})^2 + \\
&\quad + \frac{1}{4}(n+1)\tilde{c}\|\sigma\|^2 \\
&= \|\nabla'\sigma\|^2 + n(n-1)(\frac{\tilde{c}}{4} - c)(2c - \frac{2\tilde{c}}{4} - (n-1)(\frac{\tilde{c}}{4} - c) + \frac{\tilde{c}}{4}(n+1)) \\
&= \|\nabla'\sigma\|^2 + n(n-1)(\frac{\tilde{c}}{4} - c)(n+1)c.
\end{aligned}
$$

Segue que $\|\nabla'\sigma\|^2 = n(n^2-1)c(c - \frac{\tilde{c}}{4})$. Daí, como $(c - \frac{\tilde{c}}{4}) \leq 0$, devemos ter $c \leq 0$ ou $c = \frac{\tilde{c}}{4}$.

$\square$

O próximo resultado é uma consequência do teorema anterior.

Teorema 3.3. *Seja M uma subvariedade n-dimensional mínima totalmente real imersa em $\tilde{M}^n(\tilde{c})$. Se*

(1) a curvatura seccional K de M é constante;

(2) a segunda forma fundamental da imersão é paralela, então M é totalmente geodésica ($K = \frac{1}{4}\tilde{c}$), ou M é flat.

Prova. Desde que a curvatura seccional K de M é constante igual a c, temos, pelo que vimos na prova do teorema anterior, que

$$\|\nabla'\sigma\|^2 = n(n^2-1)c(c - \frac{\tilde{c}}{4}).$$

Como a segunda forma fundamental é paralela, podemos tomar um referencial geodésico numa vizinhança de cada ponto $p \in M$ e assim, em p, $\nabla'\sigma(e_i, e_j, e_k) = \nabla^{\perp}_{e_k}\sigma(e_i, e_j) = 0$. Uma vez que $\|\nabla'\sigma\|^2$ independe da escolha do referencial escolhido, temos $0 = \|\nabla'\sigma\|^2 = n(n^2-1)c(c-\frac{\tilde{c}}{4})$. Logo, concluímos que, $K = c = 0$ ou $K = \frac{\tilde{c}}{4}$, ou seja, M é flat ou totalmente geodésica.

$\square$

3.3 Superfícies totalmente reais

Nesta seção tratamos especificamente do caso de subvariedades de dimensão 2.

Seja M uma superfície imersa em uma forma espacial complexa $\tilde{M}^{1+p}(\tilde{c})$ $(1+p)$-dimensional. Assumindo, sem perda de generalidade, que M é orientável podemos cobrir M por uma família de sistemas de coordenadas locais isotérmicas. Seja (x_1, x_2) um sistema de coordenadas isotérmicas locais tal que a métrica é dada por $g = E(dx_1{}^2 + dx_2{}^2)$. Denotemos por $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ os campos coordenados e por $\sigma_{ij} = \sigma(X_i, X_j)$, para $i, j = 1, 2$, as componentes da segunda forma fundamental. Então, pela equação de Codazzi,

$$
\begin{aligned}
&(\tilde{R}(X_1,X_2)X_1)^{\perp} = (\nabla'_{X_1}\sigma)(X_2,X_1) - (\nabla'_{X_2}\sigma)(X_1,X_1)\\
=&\nabla^{\perp}_{X_1}\sigma_{21} - \sigma(\nabla_{X_1}X_2,X_1) - \sigma(X_2,\nabla_{X_1}X_1) - \nabla^{\perp}_{X_2}\sigma_{11} + 2\sigma(\nabla_{X_2}X_1,X_1)\\
=&\nabla^{\perp}_{X_1}\sigma_{21} - \nabla^{\perp}_{X_2}\sigma_{11} + \sigma(X_1,\nabla_{X_1}X_2) - \sigma(X_2,\nabla_{X_1}X_1)\\
=&\nabla^{\perp}_{X_1}\sigma_{21} - \nabla^{\perp}_{X_2}\sigma_{11} + \sigma(\frac{1}{E}(\langle\nabla_{X_1}X_2,X_1\rangle X_1 + \langle\nabla_{X_1}X_2,X_2\rangle X_2),X_1)\\
&-\sigma(X_2,\frac{1}{E}(\langle\nabla_{X_1}X_1,X_1\rangle X_1 + \langle\nabla_{X_1}X_1,X_2\rangle X_2))\\
&(\tilde{R}(X_1,X_2)X_1)^{\perp} = \nabla^{\perp}_{X_1}\sigma_{21} - \nabla^{\perp}_{X_2}\sigma_{11} + \frac{1}{E}\langle\nabla_{X_1}X_2,X_1\rangle(\sigma_{11}+\sigma_{22})\\
&+\frac{1}{2E}X_1(E)\sigma_{21} - \frac{1}{2E}X_1(E)\sigma_{21}.
\end{aligned}
$$

Daí teremos,

$$
\begin{aligned}
(\tilde{R}(X_1,X_2)X_1)^{\perp} = &\ \nabla^{\perp}_{X_1}\sigma_{21} - \nabla^{\perp}_{X_2}\sigma_{11} + \frac{1}{2E}X_2(E)2EH \\
= &\ \nabla^{\perp}_{X_1}\sigma_{21} - \nabla^{\perp}_{X_2}\sigma_{11} + \nabla^{\perp}_{X_2}EH - E\nabla^{\perp}_{X_2}H \\
= &\ \nabla^{\perp}_{X_1}\sigma_{21} - \nabla^{\perp}_{X_2}\sigma_{11} + \nabla^{\perp}_{X_2}(\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2}) - E\nabla^{\perp}_{X_2}H \\
= &\ -\nabla^{\perp}_{X_2}(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}) + \nabla^{\perp}_{X_1}\sigma_{21} - E\nabla^{\perp}_{X_2}H.
\end{aligned}
$$

Efetuando uma permutação dos índices 1 e 2 na igualdade acima, observamos que

$$
(\tilde{R}(X_1,X_2)X_2)^{\perp} = -(\tilde{R}(X_2,X_1)X_2)^{\perp} = \nabla^{\perp}_{X_1}\frac{\sigma_{22}-\sigma_{11}}{2} - \nabla^{\perp}_{X_2}\sigma_{21} + E\nabla^{\perp}_{X_1}H.
$$

ou seja, as seguintes equações são válidas

$$
\begin{cases}
(\tilde{R}(X_1,X_2)X_1)^{\perp} = \nabla^{\perp}_{X_2}(\frac{\sigma_{22}-\sigma_{11}}{2}) + \nabla^{\perp}_{X_1}\sigma_{21} - E\nabla^{\perp}_{X_2}H \\
(\tilde{R}(X_1,X_2)X_2)^{\perp} = \nabla^{\perp}_{X_1}(\frac{\sigma_{22}-\sigma_{11}}{2}) - \nabla^{\perp}_{X_2}\sigma_{21} + E\nabla^{\perp}_{X_1}H
\end{cases}
$$

Proposição 3.7. *Seja M uma superfície em $\tilde{M}^{1+p}(\tilde{c})$ com $\tilde{c} \neq 0$. Então M é uma superfície holomorfa ou totalmente real em $\tilde{M}^{1+p}(\tilde{c})$ se, e somente se, a segunda forma da imersão satisfaz as equações diferenciais*

$$
(\mathfrak{A})\begin{cases}
\nabla^{\perp}_{X_2}\dfrac{(\sigma_{11}-\sigma_{22})}{2} - \nabla^{\perp}_{X_1}\sigma_{12} + E\nabla^{\perp}_{X_2}H = 0, \\
\nabla^{\perp}_{X_1}\dfrac{(\sigma_{11}-\sigma_{22})}{2} + \nabla^{\perp}_{X_1}\sigma_{12} - E\nabla^{\perp}_{X_1}H = 0.
\end{cases}
$$

Prova. Suponhamos que M é holomorfa ou totalmente real. Pela proposição 3.2, vale que $\tilde{R}(X,Y)Z \in \mathfrak{X}(M)$, para todos X, Y *e* $Z \in \mathfrak{X}(M)$. Dessa forma, sua componente ortogonal $(\tilde{R}(X,Y)Z)^{\perp}$ é nula e, em particular,

$$
(\tilde{R}(X_1,X_2)X_1)^{\perp} = (\tilde{R}(X_1,X_2)X_2)^{\perp} = 0,
$$

para X_1, X_2, o que mostra que a segunda forma fundamental verifica as equações em $(\mathfrak{A})$.

Reciprocamente, se as equações em $(\mathfrak{A})$ são satisfeitas, observamos, pela linearidade de $\tilde{R}$ e escrevendo X, Y e Z na base $\{X_1, X_2\}$, que $(\tilde{R}(X,Y)Z)^{\perp} = 0$, para todos X, Y e $Z \in \mathfrak{X}(M)$. Portanto,

$$(\tilde{R}(X,Y)Z) = (\tilde{R}(X,Y)Z)^{\top} + (\tilde{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\tilde{R}(X,Y)Z)^{\top} \in \mathfrak{X}(M),$$

para todos X, Y e $Z \in \mathfrak{X}(M)$ e, novamente pela proposição 3.2, segue que M é holomorfa ou totalmente real.

$\square$

Para concluirmos este trabalho, caracterizamos um campo normal ξ de acordo com certas propriedades do seu operador de Weingarten associado.

Um campo vetorial normal unitário ξ é chamado:

(1) isoperimétrico, se trA_{ξ} é constante

(2) umbílico, se A_{ξ} é múltiplo do operador Id,

(3) livre de pontos umbílicos, se A_{ξ}, em todo ponto de M, não é um múltiplo do operador Id.

(4) geodésico, se $A_{\xi} = 0$.

Proposição 3.8. *Seja M uma supefície holomorfa ou totalmente real imersa em $\tilde{M}^{1+p}(\tilde{c})$. Se ξ é paralelo e isoperimétrico, então a função*

$$\phi_{\xi} = \frac{1}{2}\langle \sigma_{11} - \sigma_{22}, \xi\rangle - i\langle \sigma_{12}, \xi\rangle$$

é analítica em $z = x_1 + ix_2$, onde (x_1, x_2) é um sistema de coordenadas isotérmicas local.

Prova. Desde que M é holomorfa ou totalmente real, obtemos da primeira equação de $(\mathfrak{A})$ na proposição 3.7, através de um produto escalar por ξ, que

$$\langle\nabla^{\perp}_{X_2}\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2},\xi\rangle - \langle\nabla^{\perp}_{X_1}\sigma_{12},\xi\rangle + E\langle\nabla^{\perp}_{X_2}\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2E},\xi\rangle = 0. \tag{3.12}$$

Mas $\langle\nabla^{\perp}_{X_2}\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2E},\xi\rangle = X_2(\langle\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2E},\xi\rangle) - \langle\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2E},\nabla^{\perp}\xi\rangle$ e como ξ é paralelo e isoperimétrico, segue que $\langle\nabla^{\perp}_{X_2}\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2E},\xi\rangle = 0$. Logo, por (3.12), obtemos que

$$X_2(\langle\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2},\xi\rangle) = \langle\nabla^{\perp}_{X_2}\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2},\xi\rangle = \langle\nabla^{\perp}_{X_1}\sigma_{12},\xi,\rangle = X_1(\langle\sigma_{12},\xi\rangle),$$

onde a primeira e a última igualdades se devem ao fato de ξ ser paralelo.

De forma análoga, verificamos a igualdade

$$X_1(\langle\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2},\xi\rangle) = -X_2(\langle\sigma_{12},\xi\rangle),$$

a partir da segunda equação em $(\mathfrak{A})$. Mas estas são exatamente as equações de Cauchy-Riemann para a função ϕ_ξ, ou seja, ϕ_ξ é analítica.

□

Finalmente, a seguir provamos um resultado desta teoria envolvendo a curvatura Gaussiana da superfície.

Teorema 3.4. *Seja M uma superfície compacta totalmente real imersa em $\tilde{M}^{1+p}(\tilde{c})$. Se*

(i) a curvatura de Gauss de M não muda de sinal,

(ii) existe um campo de vetores normal unitário paralelo, livre de pontos umbílicos e isoperimétrico, então M é flat.

Prova. Pela proposição 3.8, a função ϕ_ξ é analítica. Das propriedades de função analíticas devemos ter que, se $|\phi_\xi| > 0$, $\log|\phi_\xi|^2$ é harmônica, isto é, $\Delta \log|\phi_\xi|^2 = 0$, onde Δ denota o laplaciano da função com respeito a métrica. Sendo,

$$\begin{aligned} |\phi_\xi|^2 &= (\frac{1}{2}\langle \sigma_{11} - \sigma_{22}, \xi\rangle)^2 + \langle \sigma_{12}, \xi\rangle^2 \\ &= \frac{1}{4}(\langle \sigma_{11}, \xi\rangle + \langle \sigma_{22}, \xi\rangle)^2 - (\langle \sigma_{11}, \xi\rangle\langle \sigma_{22}, \xi\rangle - \langle \sigma_{12}, \xi\rangle^2) \\ &= E^2(\frac{1}{4}(trA_\xi)^2 - detA_\xi), \end{aligned}$$

e observando que $(\frac{1}{4}(trA_\xi)^2 - detA_\xi) > 0$, já que ξ é livre de pontos umbílico, obtemos $|\phi_\xi|^2 > 0$. Com isto, podemos escrever

$$0 = \Delta \log|\phi_\xi|^2 = \Delta \log E^2 + \Delta \log(\frac{1}{4}(trA_\xi)^2 - detA_\xi)$$

e assim,

$$\Delta \log E^2 = -\Delta \log(\frac{1}{4}(trA_\xi)^2 - detA_\xi).$$

Sendo a curvatura Gaussiana K de M dada por $K = -\frac{1}{4E}\Delta \log E^2$, ficamos com,

$$K = \frac{1}{4E}\Delta \log(\frac{1}{4}(trA_\xi)^2 - detA_\xi).$$

Portanto, como K não muda de sinal, $\Delta \log(\frac{1}{4}trA_\xi - detA_\xi)$ é sempre não negativa ou não positiva. Em qualquer caso, aplicando o teorema de E.Hopf a função $\log(\frac{1}{4}(trA_\xi)^2 - detA_\xi)$ (ou $-\log(\frac{1}{4}(trA_\xi)^2 - detA_\xi)$), concluímos que $K = 0$. Logo M é flat.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] CAMINHA, A. Introdução à geometria das aplicações harmônicas. In: *XVI Escola de Geometria Diferencial*. São Paulo: USP, 2010.p.

[2] _______. *Tópicos de geometria diferencial*. (Preprint).

[3] CHEN, B-Y. Riemannian geometry of Lagrangian submanifolds. *Taiwanese Journal of Mathematics*, v. 5, n. 4, p. 681-723, 2001.

[4] CHEN, B-Y.; OGIUE, K. On Totally Real Submanifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, v.193, p.257-266, 1974.

[5] CHERN S. S.; CARMO, M. do; KOBAYASHI, S. Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental of constant length. In *Functional analysis and related fields*: proceedings of a conference in honor of Professor Marshall Stone. New York: Springer -Verlag, 1970.

[6] CARMO, M. P. do. *Geometria Riemanniana*. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. (Projeto Euclides)

[7] _______. *O Método do Referencial Móvel*. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. (Publicações Matemáticas)

[8] KOBAYASHI, S.; NOMIZU, K. *Foundations of differential geometry.* New York: John Wiley, 1969. v.2

[9] LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds.* New York: Springer-Verlag, 2003.

[10] AN-MIN, Li; JIMIN, Li. An intrisic rigidity theorem for minimal submanifolds in a sphere. *Arch. Math.*, v. 58, p. 582-594, 1992.

[11] MATSUSHIMA, Y. *Differentiable manifolds.* New York: Marcel Dekker, 1972.