UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ERNANI DE SOUSA RIBEIRO JÚNIOR

A GEOMETRIA DAS MÉTRICAS TIPO-EINSTEIN

FORTALEZA

2011

ERNANI DE SOUSA RIBEIRO JÚNIOR

A GEOMETRIA DAS MÉTRICAS TIPO-EINSTEIN

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: Geometria Diferencial

Orientador: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros

FORTALEZA

2011

Ribeiro Jr., Ernani de Sousa

R369g A geometria de métricas tipo-Einstein / Ernani de Sousa Ribeiro Júnior - Fortaleza, 2011.

90 f.

Orientador: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros

Tese(Doutorado) - Universidade Federal do Ceará,

Depto de Matemática, Fortaleza, 2011.

1 - Geometria Diferencial

CDD 516.36

Ao meu grande exemplo, Sr. Ernani Ribeiro (Papai).

Agradecimentos

Inicialmente, agradeço a Deus por ter aberto tantas portas durante minha vida, ter me dado oportunidade, que não necessariamente eu teria, ter me dado motivos para sempre confiar na sua existência, mostrando-me que os seus filhos, mesmo que distante, são agraciados com sua bondade e sua misericórdia, fazendo com que todo esforço seja sempre recompensado.

Agradeço ao senhor Ernani Ribeiro, meu pai, amigo e um grande exemplo. Por mais que eu escreva, é impossível descrever o quanto o senhor é importante para mim, pai, obrigado por tudo. Agradeço também minha mãe, dona Fátima, minha amiga, confidente, cúmplice e tudo para mim. Agradeço a minha irmã Cristielle e ao Herbert pela grande amizade e inúmeras orações. Bem como à todos da minha família.

Agradeço de forma muito especial minha amada Carlene Matias, minha princesa, que sempre me apoiou e me deu força para sempre se erguer nos momentos mais difíceis, tendo paciência e contribuindo para realização deste sonho.

Agradeço ao prof Abdênago Barros, meu orientador e um grande amigo, que vem me orientando desde o mestrado, tendo total paciência com meus problemas de saúde. Confesso que algumas vezes cobrava mais do que eu era capaz, mas sempre me indicava uma direção a seguir. Obrigado pelas palavras de apoio e incentivo nos momentos difíceis do Mestrado e do Doutorado. Por toda confiança e de modo especial pela parceria nos cinco artigos que escrevemos.

Agradeço ainda aos professores Antônio Caminha, Jorge Herbert, João Lucas, Aldir Brasil, Fábio Montenegro, Pacelli Bessa, Fernanda Camargo, João Xavier (UFPI) e Levi Lima pelo apoio durante o Doutorado e Mestrado.

Agradeço especialmente aos professores Renato Tribuzy, Paolo Piccione, Jorge Herbert e Pacelli Bessa por aceitarem participar da minha banca de Doutorado.

Não posso deixar de agradecer aos meus grandes amigos Rondinelle, Kelton, Wilson, Halyson, Manoel, Nazareno, Tiago, João, Luís, Isaías, Cícero, Damião, Wesley, Edno e tantos outros que me ajudaram muito durante toda essa etapa, obrigado a todos.

À Andrea e Catarina pela prestatividade, competência e agilidade.

Ao CNPq e a CAPES pelo apoio financeiro.

O temor do Senhor é o princípio do conhecimento; mas os insensatos desprezam a sabedoria e a instrução.
(Prov.1:7).

Resumo

O objetivo desde trabalho é estudar a geometria das métricas tipo-Einstein (solitons de Ricci, quase solitons de Ricci e métricas quasi-Einstein). Mais especificamente, vamos obter equações de estrutura, exemplos, fórmulas integrais e estimativas que permitirão caracterizar estas classes de métricas.

Palavras-chave: Solitons de Ricci, Quase solitons de Ricci, métricas quasi-Einstein.

Abstract

The purpose of this work is study the geometric of the like-Einstein metrics (Ricci soliton, almost Ricci solitons and quasi-Einstein metrics). More specifically, we obtain structure equations, examples, integral formulae and estimates that will enable characterize these classes of metrics.

Keywords: Ricci solitons, Almost Ricci soliton, quasi-Einstein metrics.

Conteúdo

Introdução

O estudo das métricas tipo-Einstein tem sido de grande relevância nos últimos anos, podemos citar, como por exemplo, os solitons de Ricci, quase solitons de Ricci e métricas quasi-Einstein. Os solitons de Ricci representam os pontos estacionários do fluxo de Ricci, que foi intruzido por Hamilton [19] na década de 80. Eles mudam apenas por scale da métrica e por difeomorfismos. Indicamos como leitura básica sobre solitons de Ricci um recente artigo escrito por H.D. Cao [11]. Em [29], Perelman provou que todo soliton de Ricci compacto contrátil é gradiente. Nessas condições solucionaremos o primeiro problema proposto por [17] com o seguinte teorema.

Teorema 0.1 *Seja* $\big(M^n, g, X\big)$ *um soliton de Ricci compacto. Então o potencial do Perelman é igual ao potencial do Hodge-de Rham, a menos de uma constante.*

Além disso vamos caracterizar os solitons de Ricci cujo o campo associado é um campo conforme. Mais especificamente, vamos provar o seguinte teorema.

Teorema 0.2 *Para um soliton de Ricci conforme* $\big(M^n, g, X\big)$ *com* $n > 2$*, as seguintes sentenças ocorrem.*

1. *Se* M^n *é compacta, então* X *é um campo de Killing. E portanto é trivial.*

2. *Se* M^n *é um soliton gradiente não compacto, então o soliton é gaussiano ou* X *é um campo de Killing.*

Em 2010, Pigola-Rigoli-Rimoldi-Setti [32] propusaram uma generalização para as métricas Einstein, tal generalização também particulariza a definição de soliton de Ricci. No artigo supracitado os autores provaram alguns teoremas de rigidez e mostraram condições para a existência de exemplos para tal classe de métricas. No capítulo 3 iremos provar uma série de equações básicas para o estudo de quase solitons de Ricci e exemplos no caso compacto e não compacto.

Considerando que o campo associado ao quase soliton de Ricci é um campo conforme, provaremos o seguinte resultado.

Teorema 0.3 *Seja $\big(M^n,\, g,\, X, \lambda\big)$ um quase soliton de Ricci compacto com $n > 2$. Se X é um campo conforme não trivial, então M^n é isométrico a uma esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n$.*

Além disso, na direção de obter outras caracterizações para os quase solitons de Ricci compactos, obteremos a seguinte fórmula integral.

Teorema 0.4 *Seja $\big(M^n,\, g,\, \nabla f, \lambda\big)$ um quase soliton de Ricci gradiente compacto. Então temos que:*

$$\int_M |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 dM = \frac{n-2}{2n} \int_M \langle \nabla R, \nabla f \rangle dM.$$

Como consequência da fórmula integral obtida, vamos provar o seguinte corolário, que é o resultado central de [3].

Corolário 0.1 *Um quase soliton de Ricci gradiente compacto, não-trivial, é isometrico a esfera Euclidiana, se uma das seguintes concições ocorre.*

1. *M^n tem curvatura escalar constante.*
2. $\int_M \big(Ric(\nabla f, \nabla f) + (n-1)\langle \nabla \lambda, \nabla f \rangle\big) dM \leq 0.$
3. *M^n é uma variedade homogênea.*

Na sequência vamos caracterizar os quase solitons de Ricci não compactos com a hipótese do campo associado ser conforme. Além disso, vamos obter um série de equações fundamentais que permitem caracterizar os quase solitons de Ricci usando princípios do máximo. Finalizaremos o capítulo 3 sobre quase soliton de Ricci, provando o seguinte teorema tipo-Myers.

Teorema 0.5 *Seja $\big(M^n,\, g,\, X, \lambda\big)$ um quase soliton de Ricci. Se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \geq k > 0$ e $|X|$ é limitada, então M^n é compacta. Em particular, o seu grupo fundamental é finito.*

No capítulo 4 iremos estudar a geometria das métricas quasi-Einstein. Tal classe de métrica foi introduzida por Case-Shu-Wei em [13], nesse artigo eles provaram que tais métricas geram os produtos warped Einstein. Além disso, eles provaram alguns teoremas de rigidez e de trivialidade para métricas quasi-Einstein. No capítulo 4 iremos provar um série de equações de estrutura para as métricas quasi-Einstein, em especial, iremos obter uma equação para o laplaciano da curvatura escalar, dada pelo seguinte teorema.

Teorema 0.6 *Seja* $\big(M^n,\, g,\, \nabla f\big)$ *uma métrica quasi-Einstein. Então temos*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta_f R &= -|\nabla^2 f - \frac{(\Delta f)}{n}g|^2 - \frac{(\Delta f)^2}{n} + \lambda\Delta f + \frac{1}{2}\langle\nabla f, \nabla R\rangle + \frac{1}{2}\langle\nabla f, \nabla\Delta f\rangle\\ &+ \frac{1}{m}\mathrm{div}\big(\nabla_{\nabla f}\nabla f - \Delta f\nabla f\big).\end{aligned}$$

Como consequência do supracitado teorema, obteremos as seguintes fórmulas integrais.

Corolário 0.2 *Seja* $\big(M^n,\, g,\, \nabla f\big)$ *uma métrica quasi-Einstein compacta. Então:*

1. $\int_M |\nabla^2 f - \frac{(\Delta f)}{n}g|^2 \mathrm{dM} = \int_M \langle\nabla f, \nabla R\rangle \mathrm{dM} + \frac{n+2}{2n}\int_M \langle\nabla f, \nabla\Delta f\rangle \mathrm{dM}.$

2. $\int_M |\nabla^2 f - \frac{(\Delta f)}{n}g|^2 \mathrm{dM} + \frac{n+2}{2n}\int_M (\Delta f)^2 \mathrm{dM} = \int_M \langle\nabla f, \nabla R\rangle \mathrm{dM}.$

3. $\int_M Ric(\nabla f, \nabla f)\mathrm{dM} + \int_M \langle\nabla f, \nabla R\rangle \mathrm{dM} = \frac{3}{2}\int_M (\Delta f)^2 \mathrm{dM}.$

4. *M^n é uma variedade de Einstein, se* $\int_M \langle\nabla R, \nabla f\rangle \mathrm{dM} \leq 0.$

5. *Suponha que f é não constante e exista $\mu : M^n \to \mathbb{R}$ solução da equação $\frac{n+2}{2n}\Delta f + R = \mu$, tal que $\mu \perp \Delta f$, no produto interno do L^2. Então M^n é conformemente equivalente a uma esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n$, mas não isométrica.*

Ainda no capítulo 4, obteremos um gama de resultados que garante a trivialidade e rigidez de métricas quasi-Einstein. Finalizaremos o capítulo com um teorema de caracterização para métricas quasi-Einstein com m finito. Para tanto, sendo m finito, consideraremos uma função auxiliar $u : M^n \to \mathbb{R}$ dada por $u = e^{-\frac{f}{m}}$, nessas condições obtemos o seguinte teorema.

Teorema 0.7 *Uma variedade quasi-Einstein compacta não-trivial* $\big(M^n,\, g,\, \nabla f\big)$, *com* $n > 2$, *é isométrica a uma esfera* $\mathbb{S}^n$, *se uma das seguintes condições ocorre.*

1. ∇u *é um campo conforme.*

2. $\int_M Ric(\nabla u, \nabla u)\mathrm{dM} \geq \frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}} \int_{\mathrm{M}} (\Delta \mathrm{u})^2 \mathrm{dM}.$

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, iremos apresentar uma série de resultados de geometria Riemanniana que serão utilizados no decorrer do texto. Indicamos como leitura complementar [7], [16] e [9].

1.1 Alguns conceitos sobre tensores

A estrutura de produto interno sobre os espaços tangentes a uma variedade Riemanniana torna possível visualizar tensores de diferentes maneiras. Veremos isso com o tensor Hessiano e o tensor de Ricci. Mas a observação fundamental é que uma aplicação bilinear pode ser interpretada como uma aplicação linear quando se tem uma estrutura de produto interno, como ensina o seguinte lema.

Lema 1.1 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Existe um isomorfismo entre o espaço dos $(l+1,k)-$tensor $T_k^{l+1}(V)$ e o espaço das aplicações multilineares*

$$\underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to V.$$

Demonstração: Denotando por $\mathcal{A}(V)$ o espaço vetorial das aplicações multilineares

$$\underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to V.$$

Definindo $\Phi : \mathcal{A} \to T_k^{l+1}(V)$ que associa cada $A \in \mathcal{A}(V)$ ao $(l+1,k)-$tensor $\Phi A\,(\omega, \omega_1, \ldots, \omega_l, X_1, \ldots, X_k) = \omega(A(\omega_1, \ldots, \omega_l, X_1, \ldots, X_k))$. É fácil ver que esta aplicação é linear, note também que Φ é injetiva, pois dados $\omega, \omega_1, \ldots,$ $\omega_l \in V^*$ e $X_1, \ldots, X_k \in V$ quaisquer, se

$$\Phi A\,(\omega, \omega_1, \ldots, \omega_l, X_1, \ldots, X_k) = 0$$

então

$$\omega(A(\omega_1, \ldots, \omega_l, X_1, \ldots, X_k)) = 0.$$

Como os vetores e covetores são arbitrários, segue que

$$A(\omega_1, \ldots, \omega_l, X_1, \ldots, X_k) = 0,$$

donde $A = 0$. Além disso, $\mathrm{dim}\mathcal{A} = \mathrm{dimT^{l+1}_k(V)}$, logo Φ é o isomorfismo procurado. $\square$

Assim, em todo este trabalho sempre que falarmos $(l+1, k)-$tensor, iremos trabalhar com este na forma de uma aplicação multilinear como vimos no lema anterior. Além disso, em todo o texto usaremos a convenção de Einstein para soma, que consiste em omitir o sinal do somatório quando temos índices cruzados repetidos, por exemplo

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} x_i^j E_j$$

é equivalente a $y_i = x_i^j E_j$.

Se (M, g) é uma variedade Riemanniana, dado um $(s,t)-$tensor T em M podemos tornar T um $(s-k, t+k)-$tensor para qualquer $k \in \mathbb{Z}$ tal que $s-k$ e $t+k$ sejam não negativos. Abstratamente, isto é feito da seguinte forma. Dada uma variedade Riemanniana (M, g) e seja $\mathfrak{X}(M)$ o espaço dos campos diferenciáveis sobre M, então existe um isomorfismo natural entre $\mathfrak{X}(M)$ e $\mathfrak{X}^*(M)$; este isomorfismo é dado pela aplicação que associa cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ a aplicação linear $(W \mapsto g(X, W)) \in \mathfrak{X}^*(M)$. Usando este isomorfismo, podemos substituir $\mathfrak{X}(M)$ por $\mathfrak{X}^*(M)$ ou vice-versa, e assim mudar o tipo de tensor.

Vejamos como mudar o tipo de um tensor. Seja $\{E_1, \ldots, E_n\}$ um referencial em $\mathfrak{X}(M)$ e $\{\sigma^1, \ldots, \sigma^n\} \subset \mathfrak{X}^*(M)$ sua base dual, i.e., $\sigma^i(E_j) = \delta^i_j$. Os vetores e os covetores podem ser escritos como

$$\begin{aligned} v &= v^i E_i = \sigma^i(v) E_i, \\ \omega &= \alpha_j \sigma^j = \omega(E_j)\sigma^j. \end{aligned}$$

O tensor T pode agora ser escrito como

$$T = T^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_t} \sigma^{j_1} \otimes \cdots \otimes \sigma^{j_t} \otimes E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_s},$$

onde $T^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_t} = T(\sigma^{j_1}, \cdots, \sigma^{j_t}, E_{i_1}, \cdots, E_{i_s})$.

Agora vejamos como podemos mudar E_i num covetor e σ^j em um vetor. Lembre que o dual de E_i é o covetor $w \mapsto g(E_i, w)$, que pode ser escrito como

$$g(E_i, w) = g(E_i, E_j)\sigma^j(w) = g_{ij}\sigma^j(w).$$

Por outro lado, temos que encontrar o vetor v correspondente ao covetor σ^j. A propriedade que o define é

$$g(v, w) = \sigma^j(w).$$

Assim, temos

$$g(v, E_i) = \delta^j_i.$$

Escrevendo $v = v^k E_k$, temos que

$$g_{ki} v^k = \delta^j_i.$$

Sendo (g^{ij}) a inversa de (g_{ij}), temos portanto

$$v = v^i E_i = g^{ij} E_i.$$

Assim,

$$E_i \to g_{ij}\sigma^j,$$

$$\sigma^j \to g^{ij} E_i.$$

Para exemplificar, provemos que na forma de $(1,1)-$tensor, o tensor métrico g é igual a aplicação identidade $I : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$. Com efeito, escrevendo o tensor g na forma de $(1,1)-$tensor

$$g(E_i) = g^j_i E_j,$$

e

$$g = g^i_j E_i \otimes \sigma^j.$$

Assim na forma de $(0,2)-$tensor teremos

$$g = g_{kj}\sigma^k \otimes \sigma^j = g^i_j g_{ik}\sigma^k \otimes \sigma^j,$$

e na forma de $(2,0)-$tensor temos que

$$g = g^{ik} E_i \otimes E_k = g^i_j g^{kj} E_i \otimes E_k,$$

assim

$$\begin{aligned} g^i_j g_{ik} &= g_{kj} \\ g^i_j g^{kj} &= g^{ik}, \end{aligned}$$

daí

$$\begin{aligned} g^i_j g_{ik} g^i_j g^{kj} &= g_{kj} g^{ik} \\ g^i_j \delta^j_i g^i_j &= \delta^i_j \\ g^i_j &= \delta^i_j, \end{aligned}$$

implicando que $g^i_j = 0$ se $i \neq j$ e $g^j_j = 1$. Logo $g(E_i) = E_i$.

Definição 1.1 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e $L : V \to V$ um $(1,1)-$tensor, definimos a norma do tensor L por*

$$|L| = \sqrt{\operatorname{tr}(L^* \circ L)} = \sqrt{\operatorname{tr}(L \circ L^*)},$$

onde $L^* : V \to V$ é a adjunta de L.

Note que, V tem dimensão finita n e $L : V \to V$ é auto-adjunto então existe uma base de autovetores tais que $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ são seus autovalores contados com suas respectivas multiplicidades, donde $|L| = \sqrt{\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2}$.

1.2 Operadores diferenciais e curvaturas

Em tudo o que segue (M, g) denotará uma variedade Riemannnina n-dimensional com métrica g e conexão de Levi-Civita ∇. O anel comutativo das funções diferenciáveis (ou de classe $\mathcal{C}^\infty$) sobre M será denotado por $\mathcal{C}^\infty(M)$.

Definição 1.2 *Definamos a* ***derivada covariante*** *de um* $(1,r)-$*tensor* S, *como sendo o* $(1,r+1)-$*tensor* $\nabla S : \mathfrak{X}(M)^{r+1} \to \mathfrak{X}(M)$ *dado por*

$$\begin{aligned}\nabla S(X, Y_1, .., Y_r) &= (\nabla_X S)(Y_1, \dots, Y_r)\\ &= \nabla_X(S(Y_1, \dots, Y_r)) - \sum_{i=1}^{r} S(Y_1, \dots, \nabla_X Y_i, \dots, Y_r).\end{aligned}$$

Dizemos que um tensor S é **paralelo** se $\nabla S \equiv 0$. Observe que uma métrica Riemanniana g é um tensor paralelo, pois

$$(\nabla g)(X, Y_1, Y_2) = \nabla_X(g(Y_1, Y_2)) - g(\nabla_X Y_1, Y_2) - g(Y_1, \nabla_X Y_2) = 0,$$

para quaisquer $X, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 1.3 *Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável. O* ***gradiente*** *de* f *é o campo diferenciável* ∇f*, definido sobre* M *por*

$$g(\nabla f, X) = D_X f = df(X),$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposição 1.1 *Sejam* $f, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$*, então*

(1) $\nabla(f + h) = \nabla f + \nabla h$.

(2) $\nabla(fh) = h\nabla f + f\nabla h$.

Além disso, temos a seguinte proposição.

Proposição 1.2 *Seja* $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$*. Dados* $p \in M$ *e* $v \in T_pM$*, seja* $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ *uma curva diferenciável tal que* $\gamma(0) = p$ *e* $\gamma'(0) = v$*. Então*

$$g(\nabla f, v)(p) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\Big|_{t=0}. \tag{1.1}$$

Em particular, se p *é um ponto de máximo ou de mínimo local para* f*, então* $\nabla f(p) = 0$.

Demonstração: Para a primeira parte basta observar que, sendo X uma extensão local de γ', temos

$$g(\nabla f, v)(p) = D_X f(p) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\Big|_{t=0}.$$

Suponha agora que p é ponto de máximo local para f (o outro caso é análogo). Então existe $U \subset M$ uma vizinhança aberta de p tal que $f(p) \geq f(q)$ para todo $q \in U$. Se $v \in T_pM$ e $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ é como no enunciado da proposição, então $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ tem um máximo local em 0, donde

$$g(\nabla f, v)(p) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\Big|_{t=0} = 0.$$

Como a igualdade anterior é válida para todo $v \in T_pM$, então $\nabla f(p) = 0$. □

Corolário 1.1 *Se $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então*

$$\nabla(\phi \circ f) = \phi'(f)\nabla f. \tag{1.2}$$

Demonstração: Se $p \in M$, $v \in T_pM$ e $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é uma curva diferenciável tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, então segue da proposição anterior que

$$\begin{aligned} g(\nabla(\phi \circ f), v) &= \frac{d}{dt}(\phi \circ f \circ \gamma)(t)\Big|_{t=0} \\ &= \phi'(f(p))\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\Big|_{t=0} \\ &= (\phi' \circ f)g(\nabla f, v)(p). \end{aligned}$$

□

Definição 1.4 *Dada uma função diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$, dizemos que $p \in M$ é* ***um ponto crítico*** *de f se $\nabla f(p) = 0$. Em particular, segue da Proposição 1.2 que todo ponto de máximo ou de mínimo local de f é um ponto crítico de f.*

Corolário 1.2 *Seja M uma variedade Riemanniana conexa e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $\nabla f = 0$ em M, então f é constante em M.*

Demonstração: Fixe $p \in M$ e seja $A = \{q \in M; f(q) = f(p)\}$. A continuidade de f garante que A é fechado em M. Como $A \neq \emptyset$ (pois $p \in M$), se mostrarmos que A é aberto em M seguirá da conexidade de M que $A = M$, i.e., f será constante. Seja então $q \in A$ e $U \subset M$ uma vizinhança coordenada conexa de q. Para todo $q' \in U$, existe uma curva diferenciável $\gamma : [0, 1] \to U$ com $\gamma(0) = q$ e $\gamma(1) = q'$. Segue da Proposição 1.2 que

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = g\Big(\nabla f, \frac{d\gamma}{dt}\Big)(\gamma(t)) = 0,$$

e daí a função $t \mapsto (f \circ \gamma)(t)$ é constante em $[0,1]$. Em particular,

$$f(p) = f(q) = (f \circ \gamma)(0) = (f \circ \gamma)(1) = f(q'),$$

donde $q' \in A$. Sendo $q' \in U$ arbitrário, concluímos que $U \subset A$, ou seja, A é aberto em M. $\square$

Proposição 1.3 *Se $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e $U \subset M$ é uma vizinhança coordenada, com campos coordenadas $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$, então o gradiente de f é dado em U por*

$$\nabla f = g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Em particular,

$$|\nabla f|^2 = g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial f}{\partial x^l}.$$

Demonstração: Se $\nabla f = a^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, então

$$\frac{\partial f}{\partial x^l} = g\Big(\nabla f, \frac{\partial}{\partial x^l}\Big) = a^j g\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l}\Big),$$

de maneira que

$$g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x^l} = a^j g^{kl} g_{jl} = a^j \delta_{kj} = a^k.$$

Para o que falta, temos

$$\begin{aligned} |\nabla f|^2 &= g\Big(g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial x^k}, g^{mj} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^m}\Big) \\ &= g^{kl} g^{mj} g_{km} \frac{\partial f}{\partial x^l} \frac{\partial f}{\partial x^j} \\ &= g^{kl} \delta_{jk} \frac{\partial f}{\partial x^l} \frac{\partial f}{\partial x^j} \\ &= g^{jl} \frac{\partial f}{\partial x^l} \frac{\partial f}{\partial x^j}. \end{aligned}$$

$\square$

Definição 1.5 *Seja X um campo vetorial diferenciável em M. A* ***divergência*** *de X é uma função diferenciável $\operatorname{div} X : M \to \mathbb{R}$, dada para $p \in M$ por*

$$(\operatorname{div} X)(p) = \operatorname{tr}\{v \mapsto (\nabla_v X)(p)\}, \tag{1.3}$$

onde $v \in T_pM$ e tr denota o traço do operador linear entre chaves.

De maneira similar a definição anterior, podemos definir a divergência de um $(1,r)-$tensor S como sendo o $(0,r)-$tensor

$$\begin{aligned}(\operatorname{div} S)(v_1,\ldots,v_r) &= \operatorname{tr}\{w \mapsto (\nabla_w S)(v_1,\ldots,v_r)\}\\ &= \sum_{i=1}^{n} g\Big((\nabla_{e_i} S)(v_1,\ldots,v_r), e_i\Big),\end{aligned}$$

onde $\{e_i\}$ é uma base ortonormal de T_pM. Lembre que um referencial ortonormal $\{E_1,\ldots,E_n\}$ em um aberto $U \subset M$ é **geodésico** em $p \in U$ se $(\nabla_{E_i}E_j)(p) = 0$ para todo $1 \leq i,j \leq n$. Para a construção de um referencial geodésico em uma vizinhança de p, veja Capítulo 3 de [9].

Definição 1.6 *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O **Laplaciano** de f é a função $\Delta f : M \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f). \tag{1.4}$$

Definição 1.7 *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O **Hessiano** de f é o campo de operadores lineares $(\operatorname{Hess} f)_p : T_pM \to T_pM$, definido para $v \in T_pM$ por*

$$(\operatorname{Hess} f)_p(v) = \nabla_v \nabla f.$$

Segue da definição da conexão Riemanniana que se X é qualquer extensão de v a uma vizinhança de $p \in M$, então

$$(\operatorname{Hess} f)_p(X) = \nabla_X \nabla f.$$

Proposição 1.4 *Se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $p \in M$, então $(\operatorname{Hess} f)_p : T_pM \to T_pM$ é um operador linear auto-adjunto.*

Demonstração: Se $v, w \in T_pM$ e V, W denotam respectivamente extensões de v, w a campos definidos em uma vizinhança de $p \in M$, então

$$\begin{aligned}
g((\mathrm{Hess}\, f)_p(v), w)(p) &= g(\nabla_V \nabla f, W)(p) \\
&= D_V g(\nabla f, W)(p) - g(\nabla f, \nabla_V W)(p) \\
&= (D_V(D_W f))(p) - g(\nabla f, \nabla_W V + [V, W])(p) \\
&= (D_W(D_V f))(p) + (D_{[V,W]} f)(p) \\
&\quad -g(\nabla f, \nabla_W V)(p) + g(\nabla f, [V, W])(p) \\
&= (D_W(D_V f))(p) - g(\nabla f, \nabla_W V)(p) \\
&= D_W g(\nabla f, V)(p) - g(\nabla f, \nabla_W V)(p) \\
&= g(\nabla_W \nabla f, V)(p) \\
&= g((\mathrm{Hess}\, f)_p(w), v)(p).
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.5 *Se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então*

$$\Delta f = \mathrm{tr}\,(\mathrm{Hess}\, f). \tag{1.5}$$

Demonstração: É suficiente provar a igualdade do enunciado em cada $p \in M$. Para tanto, seja $U \subset M$ uma vizinhança de p onde esteja definido um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Então

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,(\mathrm{Hess}\, f)_p &= \sum_{i=1}^{n} g((\mathrm{Hess}\, f)_p(e_i), e_i)(p) = \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i} \nabla f, e_i)(p) \\
&= \mathrm{div}\,(\nabla f)(p) = \Delta f(p).
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.6 *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.*

(a) Se $p \in M$ é ponto crítico de f, $v \in T_pM$ e $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é uma curva diferenciável tal que $c(0) = p$ e $c'(0) = v$, então

$$(\mathrm{Hess}\, f)_p(v, v) = \frac{d^2}{dt^2}(f \circ c)(t)\Big|_{t=0}. \tag{1.6}$$

(b) Se $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ *é uma geodésica de* M*, então*

$$(\text{Hess}\, f)_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) = \frac{d^2}{dt^2}(f \circ \gamma)(t). \tag{1.7}$$

Demonstração: Façamos a prova de (a), sendo a prova de (b) análoga. Basta ver que

$$\begin{aligned}
(\text{Hess}\, f)_p(v, v) &= g(\nabla_{\frac{dc}{dt}} \nabla f, c')(p) \\
&= \frac{d}{dt} g(\nabla f, c')\Big|_{t=0} - g\Big(\nabla f, \frac{Dc'}{dt}\Big)(p) \\
&= \frac{d}{dt} g\Big(\nabla f, \frac{dc}{dt}\Big)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d^2}{dt^2}(f \circ c)(t)\Big|_{t=0}.
\end{aligned}$$

$\square$

Agora observe que podemos definir o *Hessiano* como o $(1,1)-$tensor $\nabla(\nabla f) = \nabla^2 f$ dado por $\nabla^2 f(X) = \nabla_X \nabla f$, a Proposição 1.4 sugere uma definição na forma de um $(0,2)-$tensor simétrico Hess $f(X, Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y)$, tal que

$$g(\nabla^2 f(X), Y) = g(\nabla^2 f(Y), X).$$

Diremos que $\nabla^2 f \geq k (\leq k)$, se todos os seus autovalores forem $\geq k (\leq k)$.

Definição 1.8 *Seja* (M, g) *uma variedade Riemannina. O **tensor curvatura de Riemann** é o* $(1,3)-$*tensor* $\text{Rm} : \mathfrak{X}(M)^3 \to \mathfrak{X}(M)$ *dado por*

$$\begin{aligned}
\text{Rm}\,(X, Y)Z &= \nabla^2_{X,Y} Z - \nabla^2_{Y,Z} Z \\
&= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,
\end{aligned}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Usando o tensor métrico podemos interpretar o tensor Rm como um $(0,4)-$tensor, definido por $\text{Rm} : \mathfrak{X}(M)^4 \to \mathcal{C}^\infty(M)$

$$\text{Rm}\,(X, Y, Z, W) = g(\text{Rm}\,(X, Y)Z, W).$$

Proposição 1.7 *O tensor curvatura de Riemann satisfaz as seguintes propriedades*

(1) $\mathrm{Rm}\,(X,Y,Z,W) = -\mathrm{Rm}\,(Y,X,Z,W) = \mathrm{Rm}\,(Y,X,W,Z)$.

(2) $\mathrm{Rm}\,(X,Y,Z,W) = \mathrm{Rm}\,(Z,W,X,Y)$.

(3) *Primeira identidade de Bianchi*

$$\mathrm{Rm}\,(X,Y)Z + \mathrm{Rm}\,(Y,Z)X + \mathrm{Rm}\,(Z,X)Y = 0.$$

(4) *Segunda identidade de Bianchi*

$$(\nabla_Z \mathrm{Rm})(X,Y,W) + (\nabla_X \mathrm{Rm})(Y,Z,W + (\nabla_Y \mathrm{Rm})(Z,X,W = 0.$$

Para uma prova veja Capítulo 3 de [30].

Definição 1.9 *Seja $P \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente. A* ***curvatura seccional*** *de P em p é dada por*

$$\sec\,(X,Y) = \frac{g(\mathrm{Rm}\,(X,Y)Y,X)}{|X|^2|Y|^2 - g(X,Y)^2},$$

onde $X,Y \in P$ são dois vetores linearmente independentes de T_pM. Lembre que esta definição não depende da escolha dos vetores (veja Capítulo 4 de [9]).

Observe que, se $\{e_1,e_2\}$ é uma base ortonormal de P, então

$$\sec\,(e_1,e_2) = g(\mathrm{Rm}\,(e_1,e_2)e_2,e_1).$$

Definição 1.10 *Definimos o* ***tensor curvatura de Ricci*** $\mathrm{Ric} : \mathfrak{X}(M)^2 \to \mathcal{C}^\infty(M)$ *como sendo o traço do tensor curvatura de Riemann, i.e.,*

$$\mathrm{Ric}\,(Y,Z) = \mathrm{tr}\,\{X \mapsto \mathrm{Rm}\,(X,Y)Z\},$$

onde $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Se $\{e_1,\ldots,e_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM, então

$$\mathrm{Ric}\,(v,w) = \sum_{i=1}^n g(\mathrm{Rm}\,(e_i,v)w,e_i) = \sum_{i=1}^n g(\mathrm{Rm}\,(e_i,w)v,e_i).$$

Assim Ric é uma forma bilinear simétrica, donde também pode ser definido como o $(1,1)-$tensor simétrico

$$\mathrm{Ric}\,(v) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Rm}\,(v, e_i)e_i.$$

Se (M, g) satisfaz $\mathrm{Ric}\,(v) = kv$, ou equivalentemente, $\mathrm{Ric}\,(v, v) = kg(v, v)$ onde $k : M^n \to \mathbb{R}$ é uma função em M, então (M, g) é dita uma **variedade de Einstein**.

Definição 1.11 *A* ***curvatura escalar*** *de uma variedade é a função* $\mathrm{R} : M \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\mathrm{R} = \mathrm{tr}\,\mathrm{Ric}.$$

Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM, então

$$\begin{aligned} \mathrm{R} &= \mathrm{tr}\,\mathrm{Ric} \\ &= \sum_{j=1}^{n} g(\mathrm{Ric}\,(e_j), e_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} g(\mathrm{Rm}\,(e_i, e_j)e_j, e_i) \\ &= 2\sum_{i<j} g(\mathrm{Rm}\,(e_i, e_j)e_j, e_i) \\ &= 2\sum_{i<j} \sec\,(e_i, e_j). \end{aligned}$$

Proposição 1.8 *(Segunda Identidade de Bianchi contraida- 2 vezes)*

$$\mathrm{dR} = 2\mathrm{div}\,\mathrm{Ric}.$$

Demonstração: Dado um referencial geodésico $\{E_i\}_{i=1}^n$ em uma vizinhança de

$p \in M$ qualquer, $X \in \mathfrak{X}(M)$, usando a segunda identidade de Bianchi, temos que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dR}\,(X) &= D_X\mathrm{R} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}(\nabla_X\mathrm{Rm})(E_i,E_j,E_j,E_i) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}(\nabla_{E_j}\mathrm{Rm})(E_i,X,E_j,E_i) \\
&\quad -\sum_{i,j=1}^{n}(\nabla_{E_i}\mathrm{Rm})(E_j,X,E_j,E_i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\sum_{i,j=1}^{n}(\nabla_{E_j}\mathrm{Rm})(E_i,X,E_j,E_i) \\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n}(\nabla_{E_j}\mathrm{Rm})(E_j,E_i,E_i,X) \\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n}\nabla_{E_j}(\mathrm{Rm}\,(E_j,E_i,E_i,X)) \\
&= 2\sum_{j=1}^{n}\nabla_{E_j}g(\mathrm{Ric}\,(E_j),X) \\
&= 2\sum_{j=1}^{n}g((\nabla_{E_j}\mathrm{Ric})(X),E_j).
\end{aligned}
$$

Usando a definição 1.5 concluimos que

$$\mathrm{dR}\,(X) = 2\mathrm{div}\,\mathrm{Ric}\,(X),$$

como queriamos provar. $\square$

1.3 Campos de Killing

Lembre que um campo de vetores X é dito **completo** se houver um grupo a $1-$parâmetro de difeomorfismos $\{\varphi_t\}$ gerado por X.

Definição 1.12 *Seja α um tensor e X um campo completo (esta definição estender-se ao caso em que X não é completo e somente define um grupo a*

1−parâmetro de difeomorfismos locais), a ***derivada de Lie*** *de α com respeito a X é dada por*

$$\mathcal{L}_{\mathrm{X}}\alpha = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\varphi_t^*\alpha - \alpha) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\varphi_t^*\alpha,$$

onde φ_t^* é o difeomorfismo induzido pelo φ_t.

Proposição 1.9 *A derivada de Lie com respeito a $X \in \mathfrak{X}(M)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(1) *Se $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, então $\mathcal{L}_X f = D_X f$.*

(2) *Se $Y \in \mathfrak{X}(M)$, então $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.*

(3) *Sejam α e β tensores, então $\mathcal{L}_X(\alpha\otimes\beta) = (\mathcal{L}_X\alpha)\otimes\beta + \alpha\otimes(\mathcal{L}_X\beta)$.*

(4) *Se α é um $(0, r)-$tensor, então para quaisquer $Y_1, \ldots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$*

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X\alpha)(Y_1,\ldots,Y_r) &= D_X\alpha(Y_1,\ldots,Y_r)\\ &\quad -\sum_{i=1}^{r}\alpha(Y_1,\ldots,Y_{i-1},[X,Y_i],Y_{i+1},\ldots,Y_r)\\ &= (\nabla_X\alpha)(Y_1,\ldots,Y_r)\\ &\quad +\sum_{i=1}^{r}\alpha(Y_1,\ldots,Y_{i-1},\nabla_{Y_i}X,Y_{i+1},\ldots,Y_r).\end{aligned}$$

Para uma prova veja Capítulo 13 de [22].

Agora note que da proposição acima, e do fato que $\nabla g \equiv 0$ temos que

$$(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X), \tag{1.8}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Além disso, se $X = \nabla f$ para alguma $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, teremos

$$(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = 2\mathrm{Hess}\, f(Y, Z). \tag{1.9}$$

Observação 1.1 Se $\varphi : M \to M$ é um difeomorfismo , α um tensor e $X \in \mathfrak{X}(M)$ temos

$$\varphi^*(\mathcal{L}_X\alpha) = \mathcal{L}_{\varphi^*X}(\varphi^*\alpha).$$

Se $f : M \to \mathbb{R}$, então

$$\varphi^*(\mathrm{grad}_g f) = \mathrm{grad}_{\varphi^*g}(f \circ \varphi).$$

Se $\varphi(t) : M \to M$ é uma família a $1-$parâmetro de difeomorfismos e α é um tensor, então

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi(t)^*\alpha) = \mathcal{L}_{X(t)}\varphi(t)^*\alpha,$$

onde

$$X(t_0) \doteqdot \frac{\partial}{\partial t}\Big(\varphi(t_0)^{-1} \circ \varphi(t)\Big)\Big|_{t=t_0} = \Big(\varphi(t_0)^{-1}\Big)_* \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t)\Big|_{t=t_0}.$$

Definição 1.13 *Um difeomorfismo $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ diz-se uma **isometria**, se $\varphi^*h = g$. Se para cada $p \in M$ existe uma vizinhança U de p tal que $\varphi_{|U} : U \to \varphi(U)$ é uma isometria, então este será uma **isometria local**.*

Proposição 1.10 *Se $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ é uma isometria, então $d\varphi(\nabla_X Y) = \nabla_{d\varphi(X)}(d\varphi(Y))$, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.*

Para uma prova veja Capítulo 3 de [28].

Com este resultado, podemos verificar alguns resultados que usaremos posteriormente.

Lema 1.2 *Seja $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ isometria. Então*

(1) $d\varphi(\mathrm{Rm}_1\,(X,Y)Z) = \mathrm{Rm}_2\,(d\varphi(X), d\varphi(Y))(d\varphi(Z))$.

(2) $\varphi^*(\mathrm{R_N}) = \mathrm{R_M}$, *isto é,* $\mathrm{R_N} \circ \varphi = \mathrm{R_M}$.

(3) $\varphi^*(\mathrm{Ric_N}) = \mathrm{Ric_M}$,

onde Rm_1 *e* Rm_2 *são os tensores curvatura de Riemann de M e N respectivamente,* $\mathrm{Ric_M}$ *e* $\mathrm{Ric_N}$ *seus tensores Ricci e* $\mathrm{R_M}$ *e* $\mathrm{R_N}$ *suas curvaturas escalar.*

Demonstração: Para (1), note que dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ quaisquer

$$\begin{aligned} d\varphi(\mathrm{Rm}_1\,(X,Y)Z) &= d\varphi(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z) \\ &= d\varphi(\nabla_X\nabla_Y Z) - d\varphi(\nabla_Y\nabla_X Z) - d\varphi(\nabla_{[X,Y]}Z). \end{aligned}$$

da proposição anterior e usando o fato que $[d\varphi(X), d\varphi(Y)] = d\varphi([X,Y])$, obtemos

$$\begin{aligned} d\varphi(\mathrm{Rm}_1\,(X,Y)Z) &= \nabla_{d\varphi(X)}\nabla_{d\varphi(Y)}d\varphi(Z) - \nabla_{d\varphi(Y)}\nabla_{d\varphi(X)}d\varphi(Z) \\ &\quad -\nabla_{[d\varphi(X),d\varphi(Y)]}d\varphi(Z) \\ &= \mathrm{Rm}_2\,(d\varphi(X), d\varphi(Y))d\varphi(Z). \end{aligned}$$

Para (2), veja que dados $\{e_1, e_2\}$ base ortonormal de $P \subset T_pM$, então

$$\begin{aligned} \sec\,(d\varphi(e_1), d\varphi(e_2)) &= g_N(\mathrm{Rm}_2\,(d\varphi(e_1), d\varphi(e_2))d\varphi(e_2), d\varphi(e_1)) \\ &= g_N(d\varphi(\mathrm{Rm}_1\,(e_1,e_2)e_2), d\varphi(e_1)) \\ &= g_M(\mathrm{Rm}_1\,(e_1,e_2)e_2, e_1). \end{aligned}$$

Assim $\mathrm{R_N} \circ \varphi = \mathrm{R_M}$. Um racíocinio análogo leva a (3). $\square$

Definição 1.14 *Dizemos que um campo X de vetores diferenciável sobre (M,g) é de **Killing** se $\mathcal{L}_X g = 0$. Se X é um campo de Killing completo, então o grupo a $1-$parâmetro de difeomorfismos φ_t que são gerados por X é um grupo a $1-$parâmetro de isometrias de (M,g).*

Proposição 1.11 *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana completa, se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo de Killing, então X é completo.*

Para uma prova veja Capítulo 9 de [28].

1.4 Definições e fórmulas em solitons de Ricci

Definição 1.15 *Seja M uma variedade Riemanniana, um **soliton de Ricci** (M,g,X,λ) é uma métrica Riemanniana junto com um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ e uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que,*

$$\mathrm{Ric} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g. \tag{1.10}$$

Este é chamado de expansivo se $\lambda < 0$, estável quando $\lambda = 0$ e contrátil se $\lambda > 0$. Quando $X = \nabla f$, onde $f \in C^\infty(M)$, pela igualdade (1.9) podemos reescrever a equação (1.10)

$$\text{Ric} + \text{Hess}\, f = \lambda g, \tag{1.11}$$

e este é chamado ***soliton de Ricci gradiente****, ou simplesmente* ***soliton gradiente****.*

Observação 1.2 *Note que tomando o traço em* (1.11) *obtemos pela Proposição 1.5*

$$\text{R} + \Delta f = \lambda n. \tag{1.12}$$

O estudo dos solitons de Ricci está contido na teoria dos Fluxos de Ricci, teoria esta utilizada por Grigori Perelman para demonstrar a conjectura de Poincaré, neste trabalho não trataremos diretamente de sua conexão com a teoria dos Fluxos de Ricci. Esta conexão fica evidenciada pelo

Teorema 1.1 *Se $(M, g_0, f_0, \frac{-\lambda}{2})$ é um soliton gradiente com $\text{grad}_{g_0} f_0$ completo, então existe uma solução $g(t)$ do fluxo de Ricci, isto é,*

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2\text{Ric}(g(t)),$$

com $g(0) = g_0$, difeomorfismos $\phi(t)$ com $\phi(0) = Id_M$, funções $f(t)$ com $f(0) = f_0$, definido para todo t, tal que $\tau(t) = \lambda t + 1 > 0$, sastifazendo:

(1) *$\phi(t) : M \to M$ é uma família a 1 parâmetro de difeomorfismos gerados por $X(t) = \frac{1}{\tau(t)}\text{grad}_{g_0} f_0$, isto é,*

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(t)(x) = \frac{1}{\tau(t)}(\text{grad}_{g_0} f_0)(\phi(t)(x));$$

(2)

$$g(t) = \tau(t)\phi(t)^* g_0;$$

(3)

$$f(t) = f_0 \circ \phi(t) = \phi(t)^*(f_0);$$

(4)
$$\mathrm{Ric}(g(t)) + \nabla^{g(t)}\nabla^{g(t)} f(t) + \frac{\lambda}{2\tau(t)} g(t) = 0,$$
onde $\mathrm{grad}_{g(t)} f(t)$, *é o gradiente de* $f(t)$ *com a métrica* $g(t)$.

Demonstração: Defina $\tau(t) = \lambda t + 1$. Já que o campo $\mathrm{grad}_{g_0} f_0$ é completo, existe uma família a $1-$parâmetro de difeomorfismos $\phi(t) : M \to M$ gerados pelo campo $\frac{1}{\tau(t)}\mathrm{grad}_{g_0} f_0$ definido para todo $\tau(t) > 0$. Então defina $f(t) = f_0 \circ \phi(t)$ e $g(t) = \tau(t)\phi(t)^* g_0$. Assim
$$\frac{\partial g(t)}{\partial t}\Big|_{t=t_0} = \frac{\lambda}{\tau(t_0)} g(t_0) + \tau(t_0)\frac{\partial(\phi(t)^* g_0)}{\partial t}\Big|_{t=t_0}.$$
Usando a observação 1.1, temos que
$$\begin{aligned} \tau(t_0)\frac{\partial(\phi(t)^* g_0)}{\partial t}\Big|_{t=t_0} &= \tau(t_0)\mathcal{L}_{(\phi(t_0)^{-1})_* \frac{\partial}{\partial t}|_{t=t_0}\phi(t)}\phi(t_0)^* g_0 \\ &= \mathcal{L}_{\mathrm{grad}_{g(t_0)} f(t_0)} g(t_0), \end{aligned}$$
já que
$$\frac{\partial \phi(t)}{\partial t}\Big|_{t=t_0} = \frac{1}{\tau(t_0)}\mathrm{grad}_{g_0} f_0 = \phi(t)_*(\mathrm{grad}_{g(t_0)} f(t_0)).$$
Consequentemente
$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\tau(t)} g(t) + \mathcal{L}_{\mathrm{grad}_{g(t)} f(t)} g(t).$$
Agora usando a observação 1.1, teremos
$$\begin{aligned} -2\mathrm{Ric}(g(t)) &= \phi(t)^*(-2\mathrm{Ric}(g_0)) \\ &= \phi(t)^*(\lambda g_0 + \mathcal{L}_{\mathrm{grad}_{g_0} f_0} g_0) \\ &= \frac{\lambda}{\tau(t)} g(t) + \mathcal{L}_{\mathrm{grad}_{g(t)} f(t)} g(t), \end{aligned}$$
isto é,
$$\mathrm{Ric}(g(t)) + \nabla^{g(t)}\nabla^{g(t)} f(t) + \frac{\lambda}{2\tau(t)} g(t) = 0.$$
Portanto
$$\begin{aligned} \frac{\partial g(t)}{\partial t} &= \frac{\lambda}{\tau(t)} g(t) + \mathcal{L}_{\mathrm{grad}_{g(t)} f(t)} g(t) \\ &= -2\mathrm{Ric}(g(t)). \end{aligned}$$

□

O teorema acima, diz que dado um soliton gradiente com ∇f completo, existe uma solução do Fluxo de Ricci que é igual ao soliton gradiente em algum instante e mais ainda, a solução é ainda um soliton gradiente para todo t do intervalo de definição da solução.

Agora exibiremos alguns exemplos clássicos de solitons gradiente.

1. *Solitons de Einstein.* Se M é uma variedade de Einstein com constante de Einstein λ, tomando $f : M \to \mathbb{R}$ constante temos que $\operatorname{Hess} f = 0$, assim
$$\operatorname{Ric} + \operatorname{Hess} f = \lambda g.$$
Portanto, $(M, g, \nabla f, \lambda)$ é um soliton gradientes.

2. *Soliton Gaussiano.* Seja $(\mathbb{R}^n, g, \nabla f, \lambda)$ onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dado por $f = \frac{\lambda}{2}|x|^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e g é a métrica canônica do $\mathbb{R}^n$. Assim o tensor curvatura $\operatorname{Rm} \equiv 0 \quad \Rightarrow \operatorname{Ric}(g) = 0$. Além disso seja $\{E_i\}_i$ base canônica do $\mathbb{R}^n$, isto é, $g(E_i, E_j) = \delta_{ij}$ e $\nabla_{E_i} E_j = 0$, então
$$\operatorname{Hess} f(E_i, E_j) = E_i(E_j(f)) - g(\nabla f, \nabla_{E_i} E_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$
Logo, $\operatorname{Hess} f(E_i, E_j) = 0$ se $i \neq j$ e $\operatorname{Hess} f(E_i, E_i) = \lambda$, daí
$$\operatorname{Ric}_{ij} + \operatorname{Hess} f_{ij} = \lambda g_{ij}.$$
Portanto, $(\mathbb{R}^n, g, \nabla f, \lambda)$ é um soliton gradiente chamado soliton Gaussiano.

3. *Soliton de Hamilton.* Seja $(\mathbb{R}^2, g_\Sigma)$ uma superfície Riemanniana, com
$$g_\Sigma := \frac{g}{1 + x^2 + y^2},$$
onde g é a métrica canônica do $\mathbb{R}^2$. Afirmamos que
$$g_\Sigma(t) = \frac{g}{e^{4t} + x^2 + y^2}$$
é uma solução de
$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2\operatorname{Ric}(g(t)).$$

Para ver isto lembre que, se (M^2, h) é uma superfície Riemanniana e $g = uh$, onde $u : M \to \mathbb{R}$, então

$$\mathrm{R}_g = u^{-1}(\mathrm{R}_h - \Delta_h \ln u)$$

(para uma prova deste fato veja Capítulo 2 de [16]), e $\mathrm{Ric}_{ij} = \frac{\mathrm{R}}{2} g_{ij}$ quando $n = 2$, assim $g(t) = u(t)h$ é uma solução da equação do fluxo de Ricci se, e somente se,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_h \ln u - \mathrm{R}_h.$$

Verifiquemos a condição suficiente,

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = \frac{\partial u(t)h}{\partial t} = (\Delta_h \ln u(t) - \mathrm{R}_h)h,$$

assim

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -\mathrm{R}_{g(t)} u(t)h = -\mathrm{R}_{g(t)} g(t) = -2\mathrm{Ric}(g(t)).$$

Então, como $g_\Sigma(t) = u(t)g$ onde

$$u(t) = (e^{4t} + x^2 + y^2)^{-1},$$

basta mostrar que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_g \ln u - \mathrm{R}_g = \Delta_g \log u.$$

Para isto, veja que

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = -4e^{4t}(e^{4t} + x^2 + y^2)^{-2},$$

e

$$\frac{\partial \ln u(t)}{\partial x} = \frac{-2x}{(e^{4t} + x^2 + y^2)}.$$

Assim

$$\frac{\partial^2 \ln u(t)}{\partial x^2} = \frac{-2(e^{4t} + x^2 + y^2) + 4x^2}{(e^{4t} + x^2 + y^2)^2},$$

analogamente obtemos

$$\frac{\partial^2 \ln u(t)}{\partial y^2} = \frac{-2(e^{4t} + x^2 + y^2) + 4y^2}{(e^{4t} + x^2 + y^2)^2}.$$

Logo

$$\Delta_g \ln u = \frac{-4e^{4t}}{(e^{4t} + x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial u(t)}{\partial t}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(g_\Sigma) &= -\frac{1}{2}\frac{\partial g(t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = -\frac{1}{2}\frac{-4}{(e^0+x^2+y^2)^2}g\\ &= \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}g.\end{aligned}$$

Seja $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ definido por $Y = -2(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y})$. Mostremos que

$$\mathcal{L}_Y g_\Sigma = \frac{-4}{(1+x^2+y^2)^2}g.$$

Com efeito, como $g_\Sigma = ug$ onde $u = (1+x^2+y^2)^{-1}$, então

$$\mathcal{L}_Y g_\Sigma = \mathcal{L}_Y(ug) = (\mathcal{L}_Y u)g + u\mathcal{L}_Y g.$$

Sendo

$$\mathcal{L}_Y u = D_Y u = -2x\frac{\partial u}{\partial x} - 2y\frac{\partial u}{\partial y},$$

onde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(u\circ Id^{-1})}{\partial x}$$

e Id^{-1} é identidade do $\mathbb{R}^2$(analogamente para $\frac{\partial u}{\partial y}$), então

$$\begin{aligned}D_Y u &= -2x\frac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2} - 2y\frac{-2y}{(1+x^2+y^2)^2}\\ &= \frac{4x^2+4y^2}{(1+x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

Em coordenadas locais $\{x^i\}_{i=1}^2$, observe que

$$\mathcal{L}_Y dx^i = d(\mathcal{L}_Y x^i) = d(D_Y x^i) = dY^i,$$

assim

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Y g &= \mathcal{L}_Y(g_{ij}dx^i\otimes dx^j)\\ &= \mathcal{L}_Y g_{ij}dx^i\otimes dx^j + g_{ij}(\mathcal{L}_Y dx^i)\otimes dx^j + g_{ij}dx^i\otimes(\mathcal{L}_Y dx^j)\\ &= D_Y g_{ij}dx^i\otimes dx^j + g_{ij}dY^i\otimes dx^j + g_{ij}dx^i\otimes dY^j\\ &= (D_Y g_{ij} + g_{kj}\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + g_{ik}\frac{\partial Y^k}{\partial x^j})dx^i\otimes dx^j.\end{aligned}$$

Daí

$$(\mathcal{L}_Y g)\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = D_Y g_{ij} + g_{kj}\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + g_{ik}\frac{\partial Y^k}{\partial x^j},$$

tomando $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1}^2$ como a base canônica do $\mathbb{R}^2$, então

$$(\mathcal{L}_Y g)\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = 0$$

e

$$(\mathcal{L}_Y g)\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big) = 2\frac{\partial Y^i}{\partial x^i}.$$

Como

$$Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} = -2(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}),$$

então

$$(\mathcal{L}_Y g)\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big) = -4.$$

Donde

$$\mathcal{L}_Y g = -4g,$$

e portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y g_\Sigma &= \frac{4x^2 + 4y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} g + \frac{-4}{1 + x^2 + y^2} g \\ &= \frac{-4}{(1 + x^2 + y^2)^2} g. \end{aligned}$$

Logo

$$\mathrm{Ric}(g_\Sigma) + \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g_\Sigma = 0,$$

isto é, $(\mathbb{R}^2, g_\Sigma, 0)$ é um soliton de Ricci estável. Note ainda que $Y = \nabla f$, onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x, y) = -\ln(1 + x^2 + y^2)$. Com efeito, basta notar que

$$\begin{aligned} g_\Sigma(\nabla f, \frac{\partial}{\partial x}) &= \frac{g(\nabla f, \frac{\partial}{\partial x})}{1 + x^2 + y^2} \\ &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{1 + x^2 + y^2} \\ &= -2x, \end{aligned}$$

analogamente para $g_\Sigma(\nabla f, \frac{\partial}{\partial y})$. Assim na métrica g_Σ

$$\nabla f = -2x\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Portanto $(\mathbb{R}^2, g_\Sigma, \nabla f, 0)$ é um soliton gradiente estável.

1.5 Fómula de Bochner generalizada

Agora estabeleceremos uma fórmula geral que conduz às fórmulas de Bochner para campos de Killing e campos gradiente.

Lema 1.3 *Sejam M uma variedade Riemanniana e $X \in \mathfrak{X}(M)$ qualquer, então*

$$\operatorname{div}(\mathcal{L}_X g)(X) = \frac{1}{2}\Delta|X|^2 - |\nabla X|^2 + \operatorname{Ric}(X,X) + D_X \operatorname{div} X. \tag{1.13}$$

Quando $X = \nabla f$ é um campo gradiente e $Z \in \mathfrak{X}(M)$, então

$$(\operatorname{div}\mathcal{L}_X g)(Z) = 2\operatorname{Ric}(Z,X) + 2D_Z \operatorname{div} X \tag{1.14}$$

ou na notação de $(1,1)-$tensor

$$\operatorname{div}(\nabla\nabla f) = \operatorname{Ric}(\nabla f) + \nabla\Delta f. \tag{1.15}$$

Demonstração: *Dado um referencial geodésico $\{E_i\}_{i=1}^n$ em vizinhança de $p \in M$ qualquer e $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos que*

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}\mathcal{L}_X g)(X) &= \sum_{i=1}^n (\nabla_{E_i}\mathcal{L}_X g)(E_i, X)\\
&= \sum_{i=1}^n \nabla_{E_i}(\mathcal{L}_X g(E_i,X)) - \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_X g(\nabla_{E_i}E_i, X)\\
&\quad - \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_X g(E_i, \nabla_{E_i}X)\\
&= \sum_{i=1}^n \nabla_{E_i}(g(\nabla_{E_i}X, X) + g(E_i, \nabla_X X))\\
&\quad - \sum_{i=1}^n g(\nabla_{E_i}X, \nabla_{E_i}X) - \sum_{i=1}^n g(E_i, \nabla_{\nabla_{E_i}X}X)\\
&= \sum_{i=1}^n \nabla_{E_i}(g(\nabla_{E_i}X, X)) + \sum_{i=1}^n \nabla_{E_i}(g(E_i, \nabla_X X))\\
&\quad - \sum_{i=1}^n g(\nabla_{E_i}X, \nabla_{E_i}X) - \sum_{i=1}^n g(E_i, \nabla_{\nabla_{E_i}X}X).
\end{aligned}$$

Agora note que, sendo $\nabla\frac{1}{2}|X|^2 = \alpha^j E_j$ temos

$$\begin{aligned}
\alpha^j &= g(\nabla\frac{1}{2}|X|^2, E_j)\\
&= D_{E_j}(\frac{1}{2}|X|^2)\\
&= g(\nabla_{E_j}X, X).
\end{aligned}$$

Assim

$$\nabla\frac{1}{2}|X|^2 = \sum_{j=1}^{n} g(\nabla_{E_j}X, X)E_j,$$

donde

$$\begin{aligned}\Delta\frac{1}{2}|X|^2 &= \operatorname{div}(\nabla(\frac{1}{2}|X|^2))\\ &= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i}\nabla\frac{1}{2}|X|^2, E_i).\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\nabla_{E_i}\nabla\frac{1}{2}|X|^2 &= \nabla_{E_i}(\sum_{j=1}^{n} g(\nabla_{E_j}X, X)E_j)\\ &= \sum_{j=1}^{n} g(\nabla_{E_j}X, X)\nabla_{E_i}E_j + \sum_{j=1}^{n}\nabla_{E_i}(g(\nabla_{E_j}X, X))E_j\\ &= \sum_{j=1}^{n}\nabla_{E_i}(g(\nabla_{E_j}X, X))E_j.\end{aligned}$$

Daí,

$$\Delta\frac{1}{2}|X|^2 = \sum_{i=1}^{n}\nabla_{E_i}(g(\nabla_{E_i}X, X)).$$

Agora lembre que $\nabla X = \sum_{i=1}^{n}\nabla_{E_i}X \Rightarrow |\nabla X|^2 = \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i}X, \nabla_{E_i}X)$. *Então*

$$\begin{aligned}(\operatorname{div}\mathcal{L}_X g)(X) &= \Delta\frac{1}{2}|X|^2 + \sum_{i=1}^{n}\nabla_{E_i}(g(E_i, \nabla_X X))\\ &\quad -|\nabla X|^2 - \sum_{i=1}^{n} g(E_i, \nabla_{\nabla_{E_i}X}X)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \Delta\frac{1}{2}|X|^2 - |\nabla X|^2 + \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i}E_i, \nabla_X X)\\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} g(E_i, \nabla_{E_i}\nabla_X X) - \sum_{i=1}^{n} g(E_i, \nabla_{\nabla_{E_i}X}X)\\ &= \Delta\frac{1}{2}|X|^2 - |\nabla X|^2 + \sum_{i=1}^{n} g(E_i, \nabla^2_{E_i,X}X).\end{aligned}$$

Note ainda que,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}\,(X,X) &= \sum_{i=1}^{n} g(\mathrm{Rm}\,(E_i,X)X,E_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla^2_{E_i,X}X - \nabla^2_{X,E_i}X, E_i),\end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned}(\mathrm{div}\,\mathcal{L}_X g)(X) &= \Delta\frac{1}{2}|X|^2 - |\nabla X|^2 + \mathrm{Ric}(X,X)\\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} g(\nabla^2_{X,E_i}X, E_i).\end{aligned}$$

Usando que $X = x^j E_j \;\Rightarrow\; \nabla_X E_i = x^j \nabla_{E_j} E_i = 0$, *calculemos* $D_X \mathrm{div}\, X$

$$\begin{aligned}D_X \mathrm{div}\, X &= \sum_{i=1}^{n} \nabla_X (g(\nabla_{E_i}X, E_i))\\ &= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_X \nabla_{E_i} X, E_i) + \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i} X, \nabla_X E_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla^2_{X,E_i} X, E_i) + \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{\nabla_X E_i} X, E_i)\\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i} X, \nabla_X E_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla^2_{X,E_i} X, E_i).\end{aligned}$$

Logo,

$$(\mathrm{div}\,\mathcal{L}_X g)(X) = \frac{1}{2}\Delta|X|^2 - |\nabla X|^2 + \mathrm{Ric}\,(X,X) + D_X \mathrm{div}\, X.$$

Quando $X = \nabla f$, *então para todo* $Z, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$g(\nabla_Z X, Y) = \mathrm{Hess}\, f(Z,Y) = \mathrm{Hess}\, f(Y,Z) = g(Z, \nabla_Y X),$$

assim

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}\mathcal{L}_X g)(Z) &= \sum_{i=1}^{n} \nabla_{E_i}(g(\nabla_{E_i}X, Z) + g(E_i, \nabla_Z X)) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i}X, \nabla_{E_i}Z) - \sum_{i=1}^{n} g(E_i, \nabla_{\nabla_{E_i}Z}X) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \nabla_{E_i}(g(\nabla_Z X, E_i) + g(E_i, \nabla_Z X)) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{\nabla_{E_i}Z}X, E_i) - \sum_{i=1}^{n} g(E_i, \nabla_{\nabla_{E_i}Z}X) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i}\nabla_Z X, E_i) + 2\sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i}E_i, \nabla_Z X) \\
&\quad -2\sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{\nabla_{E_i Z}}X, E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} 2g(\nabla^2_{E_i,Z}X, E_i) \\
&= 2\mathrm{Ric}\,(Z, X) + 2g(\nabla^2_{Z,E_i}X, E_i).
\end{aligned}$$

Logo,

$$(\operatorname{div}\mathcal{L}_X g)(Z) = 2\mathrm{Ric}\,(Z, X) + 2D_Z \operatorname{div} X.$$

Como $\frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \nabla\nabla f$, *então na forma de* $(1,1)-$*tensor teremos*

$$\operatorname{div}\nabla\nabla f = \mathrm{Ric}\,(\nabla f) + \nabla\Delta f.$$

Observação 1.3 *Dado um referencial geodésico* $\{E_i\}_{i=1}^n$ *numa vizinhança de* $p \in M$ *qualquer, temos que:*

$$\operatorname{tr}\mathcal{L}_X g = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_X g(E_i, E_i) = 2\sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{Ei}X, E_i) = 2\operatorname{div} X. \tag{1.16}$$

Corolário 1.3 *Se* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *é um campo de Killing sobre uma variedade Riemanniana, então*

$$\Delta\frac{1}{2}|X|^2 = |\nabla X|^2 - \mathrm{Ric}\,(X, X). \tag{1.17}$$

Demonstração: *Como* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *é um campo de Killing, então* $\mathcal{L}_X g = 0$ *e da igualdade* (1.16) *temos que* $\operatorname{div} X = 0$, *além disso da igualdade* (4.2) *obtemos*

$$\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = |\nabla X|^2 - \mathrm{Ric}\,(X, X).$$

Corolário 1.4 *Se* $X = \nabla f$ *com* $f \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$*, então*

$$\Delta\frac{1}{2}|X|^2 = |\nabla X|^2 + D_X \mathrm{div}\, X + \mathrm{Ric}\,(X,X). \tag{1.18}$$

Demonstração: *Basta fazer* $Z = X$ *em* (1.14) *e igualar a* (4.2)*, para obtermos*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|X|^2 &= 2\mathrm{Ric}\,(X,X) + 2D_X\mathrm{div}\, X \\ &\quad +|\nabla X|^2 - \mathrm{Ric}\,(X,X) - D_X\mathrm{div}\, X \\ &= |\nabla X|^2 + D_X\mathrm{div}\, X + \mathrm{Ric}\,(X,X).\end{aligned}$$

As igualdades (1.17) e (1.18), constituem às fórmulas de Bochner mencionadas anteriormente.

1.6 Um lema de geometria Riemanniana

Inicialmente, para cada $p \in M$ defina

$$\tau_p = sup\{\mathrm{Ric}_y(v,v)\,:\, y \in B(p,1),\ \|v\| = 1\}$$

e

$$H_p = max\{0, \tau_p\}.$$

Nessas condições, nos trabalhos de Hamilton [19] e Perelman [29] foi utilizado o seguinte lema.

Lema 1.4 *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana completa, seja* $p, q \in M$ *tal que* $d(p,q) > 1$ *e seja* γ *uma geodésica minimizante ligando* p *a* q *parametrizada pelo comprimento de arco, então*

$$\int_0^{d(p,q)} Ric(\gamma'(s), \gamma'(s))\mathrm{dM} \leq 2(\mathrm{n}-1) + \mathrm{H_q} + \mathrm{H_p}.$$

Demonstração: De fato, pela fórmula da segunda variação, para qualquer função diferenciável por partes φ com $\varphi(0) = \varphi(d(p,q)) = 0$,

$$0 \leq \int_0^{d(p,q)} \{(n-1)(\varphi'(s))^2 - \varphi^2(s)Ric(\gamma'(s),\gamma'(s))\}\mathrm{ds}. \tag{1.19}$$

Seja φ tal que

$$\varphi(s) = \begin{cases} s, & 0 \leq s \leq 1 \\ 1, & 1 \leq s \leq d(p,q) - 1 \\ d(p,q) - s, & d(p,q) - 1 \leq d(s,q) \end{cases}$$

Então, sendo $\varphi(s) = 1$ e $\varphi^{'}(s) = 0$ para $1 \leq s \leq d(p,q) - 1$, assim a equação (1.19) implica

$$\begin{aligned} 0 \ \leq \ & \int_0^1 \{(n-1)(\varphi^{'}(s))^2\}\mathrm{ds} + \int_{\mathrm{d(p,q)-1}}^{\mathrm{d(p,q)}} \{(\mathrm{n}-1)(\varphi^{'}(\mathrm{s}))^2\}\mathrm{ds} \\ & - \int_0^1 \{\varphi^2(s)Ric(\gamma^{'}(s), \gamma^{'}(s))\}\mathrm{ds} - \int_{\mathrm{d(p,q)-1}}^{\mathrm{r}} \{\varphi^2(\mathrm{s})\mathrm{Ric}(\gamma^{'}(\mathrm{s}), \gamma^{'}(\mathrm{s}))\}\mathrm{ds} \\ & - \int_1^{r-1} Ric(\gamma^{'}(s), \gamma^{'}(s))\}\mathrm{ds}. \end{aligned}$$

Adicionando $\int_0^{d(p,q)} (\gamma^{'}(s), \gamma^{'}(s))\mathrm{ds}$ em ambos os lados da equação temos

$$\begin{aligned} \int_0^{d(p,q)} Ric(\gamma^{'}(s), \gamma^{'}(s))\mathrm{ds} \ \leq \ & \int_0^1 \{(n-1)(\varphi^{'}(s))^2\}\mathrm{ds} + \int_{\mathrm{d(p,q)-1}}^{\mathrm{d(p,q)}} \{(\mathrm{n}-1)(\varphi^{'}(\mathrm{s}))^2\}\mathrm{ds} \\ & + \int_0^1 \{(1-\varphi^2(s))Ric(\gamma^{'}(s), \gamma^{'}(s))\}\mathrm{ds} \\ & + \int_{d(p,q)-1}^{d(p,q)} \{(1-\varphi^2(s))(\gamma^{'}(s), \gamma^{'}(s))\}\mathrm{ds}. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Agora, levando em conta que $|\varphi^{'}(s)| = 1$ para $0 \leq s \leq 1$ e $d(p,q) \leq s \leq r$ temos

$$\int_0^1 \{(n-1)(\varphi^{'}(s))^2\}\mathrm{ds} + \int_{\mathrm{d(p,q)-1}}^{\mathrm{d(p,q)}} \{(\mathrm{n}-1)(\varphi^{'}(\mathrm{s}))^2\}\mathrm{ds} = 2(\mathrm{n}-1). \tag{1.21}$$

Além disso, $0 \leq \varphi \leq 1$ e $Ric(\gamma^{'}(s), \gamma^{'}(s)) \leq H_p$ para $0 \leq s \leq 1$, portanto

$$\int_0^1 \{(1-\varphi^2(s))Ric(\gamma^{'}(s), \gamma^{'}(s))\}\mathrm{ds} \leq \mathrm{H_p}. \tag{1.22}$$

Analogamente, sendo $Ric(\gamma^{'}(s), \gamma^{'}(s)) \leq H_p$ para $d(p,q) - 1 \leq s \leq r$, temos

$$\int_{d(p,q)-1}^{d(p,q)} \{(1-\varphi^2(s))Ric(\gamma^{'}(s), \gamma^{'}(s))\}\mathrm{ds} \leq \mathrm{H_q}. \tag{1.23}$$

Portanto, combinando as equações (1.20), (1.21), (1.22) e (1.23) concluímos a prova do lema. □

Capítulo 2

Solitons de Ricci

Neste capítulo iremos apresentar alguns resultados obtidos em [1] pelo autor em parceria com Barros e Aquino para solitons de Ricci. Em particular, vamos provar que o potencial de Perelman é igual ao potencial de Hodge-de Rham. Além disso, vamos encontrar uma fórmula integral para solitons de Ricci compacto, e por fim, iremos caracterizar os solitons de Ricci conforme.

2.1 Definição e equações de estrutura

Os solitons de Ricci desepenham um papel importante no estudo do fluxo de Ricci. Eles apareceram primeiramente nos trabalhos de Hamilton sobre fluxo de Ricci e representam soluções auto-similares do fluxo de Ricci. Mais precisamente, representam os pontos estacionários do fluxo e mudam apenas por homotetia e scaling da métrica.

Definição 2.1 *Um soliton de Ricci é uma variedade Riemanniana* (M^n, g) *e um campo de vetores* X *que satisfaz*

$$Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g, \tag{2.1}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$*. Onde* $\mathcal{L}_X g$ *representa a derivada de Lie da métrica* g *com respeito a* X*.*

Se X é o gradiente de uma função f em M^n, então a variedade será chamada soliton de Ricci gradiente. E neste caso a equação fundamental pode ser escrita como

$$Ric + \nabla^2 f = \lambda g, \tag{2.2}$$

onde $\nabla^2 f$ representa o hessiano de f.

Como comentado anteriormente nas preliminares, o soliton de Ricci $\big(M^n,\, g,\, X\big)$ será chamado expansivo, estável ou contrátil se $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ ou $\lambda > 0$, respectivamente.

Definição 2.2 *Dizemos que um soliton de Ricci* $\big(M^n,\, g,\, \nabla f\big)$ *é* trivial *se o potencial f for constante. Caso contrário, dizemos que o soliton de Ricci é não-trivial.*

Para um soliton de Ricci gradiente Hamilton provou em [19] o seguinte resultado.

Proposição 2.1 (Hamilton [19]) *Seja* $\big(M^n,\, g,\, \nabla f\big)$ *um soliton de Ricci gradiente. Então as seguintes equações ocorrem:*

1. $R + \Delta f = n\lambda$.
2. $\nabla R = 2Ric(\nabla f)$.
3. $R + |\nabla f|^2 - 2\lambda f = C$, *onde C é uma constante.*

Em particular, para qualquer vector $Z \in \mathfrak{X}(M^n)$, temos pela equação (3) que

$$Z(R) + 2\langle \nabla_Z \nabla f, \nabla f\rangle = 2\lambda Z(f). \tag{2.3}$$

Tais equações são conhecidas como equações de Hamilton, e serão utilizadas no decorrer do capítulo sem maiores detalhes. Para vermos uma prova, basta considerarmos λ constante na Proposição 3.1 do próximo capítulo.

2.2 Decomposição de Hodge-de Rham para Ricci solitons

Em [29], Perelman provou que um soliton de Ricci compacto é sempre gradiente. Mais precisamente, provou que existe uma função diferenciável f :

$M^n \to \mathbb{R}$ tal que o campo que define o soliton pode ser dado pelo gradiente de f. Esta função é conhecida com potencial de Perelman. Por completude iremos apresentar a prova do Perelman.

Teorema 2.1 (Perelman [29]) *Todo soliton de Ricci contrátil compacto é gradiente.*

Demonstração: Podemos considerar a equação do soliton da seguinte forma

$$R_{ij} + \nabla_i \omega_j + \nabla_j \omega_i = \lambda g_{ij}, \tag{2.4}$$

onde ω é a 1-foma associada ao campo X, isto é, $\omega(.) = \langle ., X \rangle = X^\flat$.

Façamos um cálculo independente para uma função $f : M^n \to \mathbb{R}$ genérica,

$$\begin{aligned} g^{jk}\nabla_k\{2(R_{ij} + \nabla^2_{ij}f - \lambda g_{ij})e^{-f}\} &= g^{jk}\{2\nabla_k R_{ij} + 2\nabla_k\nabla_i\nabla_j f\}e^{-f} \\ &\quad + g^{jk}\{2(R_{ij} + \nabla^2_{ij}f - \lambda g_{ij})\}\nabla_k(e^{-f}) \\ &= \{2g^{jk}\nabla_k R_{ij} + 2g^{jk}\nabla_k\nabla_i\nabla_j f\}e^{-f} \\ &\quad - \{2g^{jk}R_{ij}\nabla_k(f) + 2g^{jk}\nabla^2_{ij}f\nabla_k(f) \\ &\quad - 2\lambda g^{jk}g_{ij}\nabla_k f\}e^{-f}. \end{aligned}$$

Usando a identidade de Ricci, obtemos

$$\begin{aligned} g^{jk}\nabla_k\{2(R_{ij}\nabla^2_{ij}f - \lambda g_{ij})e^{-f}\} &= \{\nabla_i R + 2g^{jk}\nabla_i\nabla_k\nabla_j f + 2R_{is}\nabla^s f\}e^{-f} \\ &\quad - \{2R_{ik}\nabla^k f + 2g^{jk}\nabla_{ij}f\nabla_k f - 2\lambda\nabla_i f\}e^{-f} \\ &= \nabla_i\{R + 2\Delta f - |\nabla f|^2 + 2\lambda f\}e^{-f}. \end{aligned}$$

Podemos considerar a existência de uma função $f : M^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$R + 2\Delta f - |\nabla f|^2 + 2\lambda f = C,$$

onde C é uma constante. Tal existência é garantida pela minimização do funcional de Perelman $\mathcal{W}$ definida em [29], juntamente com uma estimativa de Sobolev, para maiores detalhes veja [17].

Portanto, podemos garantir que

$$\mathrm{div}\{(\mathrm{R_{ij}} + \nabla^2\mathrm{f} - \lambda\mathrm{g})\mathrm{e^{-f}}\} = 0.$$

Dessa forma, se considerarmos a 1 forma

$$T = (\nabla_k f - \omega_k) g^{kj}(R_{ij} + \nabla^2_{ij} f - \lambda g_{ij}) e^{-f},$$

temos

$$\begin{aligned} \mathrm{divT} &= (\nabla_l \nabla_k f - \nabla_l \omega_k) g^{kj} g^{li} (R_{ij} + \nabla^2_{ij} f - \lambda g_{ij}) e^{-f} \\ &= (2\nabla_l \nabla_k f - \nabla_l \omega_k - \nabla_k \omega_l) g^{kj} g^{li} (R_{ij} + \nabla^2_{ij} f - \lambda g_{ij}) \frac{e^{-f}}{2}, \end{aligned}$$

usando a equação (2.4), obtemos

$$\begin{aligned} \mathrm{divT} &= (2\nabla_l \nabla_k f + 2R_{lk} - 2\lambda g_{lk}) g^{kj} g^{li} (R_{ij} + \nabla^2_{ij} f - \lambda g_{ij}) \frac{e^{-f}}{2} \\ &= |R_{ij} + \nabla^2_{ij} f - \lambda g_{ij}|^2 e^{-f}. \end{aligned}$$

Portanto, $0 \leq |Ric + \nabla^2 f - \lambda g|^2 e^{-f} = \mathrm{divT}$. Para alguma 1-forma T. Integrando $|Ric + \nabla^2 f - \lambda g|^2 e^{-f}$, obtemos que

$$Ric + \nabla^2 f = \lambda g.$$

Logo $(M, g, \nabla f, \lambda)$ é um soliton gradiente com potencial f. □

Observe que no enunciado do Teorema 2.1 colocamos a hipótese *contrátil*, necessária durante a prova devido aos argumentos utilizados na estimativa de Sobolev. Porém, esta hipótese poderá ser removida em virtude do seguinte resultado.

Proposição 2.2 (Hamilton [19]) *Todo soliton de Ricci compacto expansivo ou estável é Einstein.*

Em [17] foi proposto o seguinte problema.

Problema 2.1 *É possível provar o Teorema 2.1 mostrando diretamente que a forma ω é exata?*

Para solucionarmos esse problema, utilizamos em [1] o Teorema de decomposição de Hodge-de Rham e provamos o seguinte teorema.

Teorema 2.2 *Seja $\big(M^n,\, g,\, X\big)$ um soliton de Ricci compacto. Então o potencial de Perelman é igual ao potencial de Hodge-de Rham, a menos de constante.*

Demonstração: De fato, seja X um campo de vetores em uma variedade compacta M^n, o Teorema de decomposição de Hodge-de Rham, veja [35], mostra que é possível decompor o campo X como a soma de um campo Y de divergente nulo e o gradiente de uma função h, ou seja

$$X = Y + \nabla h,$$

onde $divY = 0$ e h é uma função conhecida como potencial de Hodge-de Rham.

Para tanto, basta considerarmos a 1-forma $X^\flat$. Aplicando o Teorema de Hodge-de Rham, podemos decompor $X^\flat$ da seguinte forma

$$X^\flat = d\alpha + \delta\beta + \gamma, \tag{2.5}$$

onde γ é uma 1-forma harmônica e a decomposição é única. Agora, consideremos $Y = (\delta\beta + \gamma)^\sharp$ e $(d\alpha)^\sharp = \nabla h$ para obtermos a afirmação inicial.

Sendo $\big(M^n,\, g,\, X\big)$ um soliton de Ricci compacto, então o traço da equação fundamental (2.1) implica

$$R + divX = \lambda n.$$

Mas, pela decomposição descrita acima, na equação (2.5), temos que $divX = \Delta h$, assim, obtemos

$$R = \lambda n - \Delta h. \tag{2.6}$$

Por outro lado, usando o Teorema 2.1 e considerando o traço da equação fundamental (2.1), temos

$$R = \lambda n - \Delta f, \tag{2.7}$$

onde f é o potencial de Perelman.

Portanto, comparando as duas últimas equações, obtemos $\Delta(f - h) = 0$. Aplicando o Teorema de de Hopf, concluímos que $f = h + c$, onde c é uma constante, o que finaliza a prova do teorema. $\square$

Com a decomposição de Hodge-de Rham e o teorema anterior obtemos o seguinte corolário.

Corolário 2.1 *Seja* $\big(M^n,\, g,\, X\big)$ *soliton de Ricci compacto. Se*

$$\int_M \langle X, \nabla h\rangle \leq 0,$$

onde h *é o potencial Hodge-de Rham, então o soliton é trivial.*

Demonstração: Para provarmos o corolário basta lembramos que a decomposição de Hodge-de Rham é ortogonal em $L_2(M^n)$. Assim, temos que

$$\int_M \langle X, \nabla h\rangle dM = \int_M |\nabla h|^2 dM = \int_M |\nabla f|^2 dM.$$

Portanto, se $\int_M \langle X, \nabla h\rangle dM \leq 0$, vamos obter que f é constante, e portanto o soliton é trivial. □

Uma observação importante, é que no caso não-compacto, existem solitons de Ricci não-gradiente, veja Baird e Danielo [2] e Lott [24]. Além disso, solitons contráteis não-compactos são gradientes, veja Naber [25]. Existem exemplos de solitons de Ricci compacto não-triviais, veja uma recente publicação de Cao [11] e algumas de suas referências.

Agora, vamos provar uma fórmula integral para soliton de Ricci compacto. Usando a simetria do Hessiano, podemos escrever a equação (2.3) da seguinte forma

$$\langle \nabla R, Z\rangle + 2\langle \nabla_{\nabla f}\nabla f, Z\rangle = 2\lambda\langle \nabla f, Z\rangle. \tag{2.8}$$

Mas, a equação (2.2) implica $Ric(\nabla f, Z) + \nabla^2(\nabla f, Z) = \lambda\langle \nabla f, Z\rangle$ para qualquer vetor $Z \in \mathfrak{X}(M^n)$. Então, usando a equação (2.8) obtemos

$$Ric(\nabla f, Z) = \frac{1}{2}\langle \nabla R, Z\rangle. \tag{2.9}$$

Em particular

$$Ric(\nabla f, \nabla f) = \frac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla f\rangle \tag{2.10}$$

e

$$Ric(\nabla f, \nabla R) = \frac{1}{2}|\nabla R|^2. \tag{2.11}$$

Agora, usando a fórmula de Bochner temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 &= Ric(\nabla f, \nabla f) + |\nabla^2 f|^2 + \langle \nabla f, \nabla \Delta f\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle \nabla f, \nabla R\rangle + |\nabla^2 f|^2 - \langle \nabla f, \nabla R\rangle \\ &= |\nabla^2 f|^2 - \frac{1}{2}\langle \nabla f, \nabla R\rangle.\end{aligned}$$

Usando a equação (3) da Proposição 2.1 obtemos $\Delta|\nabla f|^2 = 2\lambda\Delta f - \Delta R$. Em particular concluímos que

$$\Delta R = 2\lambda\Delta f + \langle \nabla f, \nabla R\rangle - 2|\nabla^2 f|^2. \tag{2.12}$$

Portanto, vamos obter uma fórmula alternativa para o laplaciano da curvatura escalar apresentada em [17]

Lema 2.1 *Seja $\big(M^n,\, g,\, \nabla f\big)$ um soliton de Ricci gradiente. Então*

$$\Delta R + 2|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 = \langle \nabla f, \nabla R\rangle + \frac{2}{n} R\Delta f.$$

Demonstração: De fato, usando a equação (2.12) temos

$$\begin{aligned}\Delta R &= 2\lambda\Delta f - 2|\nabla^2 f|2 + \langle \nabla R, \nabla f\rangle \\ &= 2\lambda\Delta f - 2|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 - 2\frac{(\Delta f)^2}{n} + \langle \nabla R, \nabla f\rangle \\ &= 2\Delta f\big(\lambda - \frac{\Delta f}{n}\big) - 2|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 + \langle \nabla R, \nabla f\rangle \\ &= \frac{2}{n} R\Delta f - 2|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 + \langle \nabla R, \nabla f\rangle,\end{aligned}$$

o que conclui a prova do Lema. □

Usando uma fórmula similar e o Princípio do Máximo, foi mostrado em [17] que um soliton de Ricci contrátil compacto não-trivial tem curvatura escalar estritamente positiva.

Como consequência do Lema 2.1 temos o seguinte teorema.

Teorema 2.3 *Seja $\big(M^n,\, g,\, X\big)$ um soliton de Ricci compacto. Então*

$$\int_M |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 dM = \frac{(n-2)}{2n}\int_M (\Delta f)^2 dM.$$

Demonstração: Para obtermos o Teorema 2.3 basta integrarmos a equação obtida no Lema 3.2. De fato, integrando obtemos que

$$\begin{aligned} 2\int_M |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 dM &= \int_M \langle \nabla f, \nabla R\rangle dM + \frac{2}{n}\int_M R\Delta f dM \\ &= \int_M \langle \nabla f, \nabla R\rangle dM - \frac{2}{n}\int_M \langle \nabla f, \nabla R\rangle dM \\ &= \frac{n-2}{n}\int_M \langle \nabla f, \nabla R\rangle dM \\ &= -\frac{n-2}{n}\int_M \langle \nabla f, \nabla \Delta f\rangle dM \\ &= \frac{(n-2)}{2n}\int_M (\Delta f)^2 dM, \end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade usamos a identidade (1) da Proposição 2.1, o que finaliza a prova do teorema.

Como uma consequência deste teorema temos o seguinte corolário.

Corolário 2.2 *Para um soliton de Ricci compacto* $\big(M^n,\, g,\, X\big)$ *temos*

$$\lambda(n+2)\int_M |\nabla h|^2 = \int_M (\Delta h)^2 + \int_M R|\nabla h|^2.$$

Demonstração: De fato, relembre da fórmula do lema 2.1

$$\Delta R + 2|\Phi_h|^2 = \langle \nabla R, \nabla h\rangle + \frac{2}{n} R\Delta h,$$

onde $\Phi_h = \nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n} g$. Integrando esta identidade e utilizando o Teorema da divergência, obtemos

$$2\int_M |\Phi_h|^2 dM = \int_M (\Delta h)^2 dM + \frac{2}{n}\int_M h\Delta R dM. \tag{2.13}$$

Agora vamos substituir $\Delta R = 2\lambda\Delta h - \Delta|\nabla h|^2$ na equação (2.13) para concluirmos

$$\begin{aligned}
2\int_M |\Phi_h|^2 dM &= \int_M (\Delta h)^2 dM + \frac{2}{n}\int_M h\big(2\lambda\Delta h - \Delta|\nabla h|^2\big)dM \\
&= \int_M (\Delta h)^2 dM + \frac{4\lambda}{n}\int_M h\Delta h dM \\
&\quad -\frac{2}{n}\int_M |\nabla h|^2\Delta h dM \\
&= \int_M (\Delta h)^2 dM + \frac{4\lambda}{n}\int_M h\Delta h dM \\
&\quad -\frac{2}{n}\int_M |\nabla h|^2\big(\lambda n - R\big)dM \\
&= \int_M (\Delta h)^2 dM - \big(2\lambda + \frac{4\lambda}{n}\big)\int_M |\nabla h|^2 dM \\
&\quad +\frac{2}{n}\int_M R|\nabla h|^2 dM.
\end{aligned}$$

Agora vamos usar o Teorema 2.3 para obter

$$\lambda(n+2)\int_M |\nabla h|^2 dM = \int_M (\Delta h)^2 dM + \int_M R|\nabla h|^2 dM,$$

o que finaliza a prova do corolário. □

Corolário 2.3 *Seja $\big(M^2, g, X\big)$ um soliton de Ricci compacto. Então ou soliton é trivial ou M^2 é conformemente equivalente a uma esfera $\mathbb{S}^2$.*

Demonstração: Sendo $n = 2$ podemos usar o Teorema 2.3 para concluir que $\int_M |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{2} g|^2 dM = 0$. Se f for constante, então o soliton é trivial. Caso contrário, $\nabla^2 f = \frac{\Delta f}{2} g$. Assim, podemos usar um teorema de Ishihara e Tashiro [20] para concluir que M^2 é conformemente equivalente a $\mathbb{S}^2$. Uma observação importante é que um soliton de Ricci compacto contrátil de dimensão dois é isométrico a um esfera, veja [14].

2.3 Soliton de Ricci conforme

Primeiramente, vamos relembrar que um campo de vetores é chamado conforme se exite uma função diferenciável $\rho : M^n \to \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{L}_X g = 2\rho g$. Nesse sentido, vamos dizer que um soliton de Ricci é conforme se o campo X associado for um campo conforme. Além disso, relembre que um soliton gaussiano, dado pelo espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ com métrica padrão $||\,.\,||$ e função potencial $f(x) = \frac{\lambda}{2}||x||^2$, é conforme, veja [31].

Por outro lado, Tashiro [33] mostrou em seu Teorema 2 que uma variedade Riemanniana (M^n, g) é isométrica ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ se existe um função diferenciável não-trivial $f : M^n \to \mathbb{R}$ satisfazendo $\nabla^2 f = \nu g$ para alguma constante ν. Aplicando este resultado, obtemos o seguinte teorema.

Teorema 2.4 *Para um soliton de Ricci conforme* $\big(M^n, g, X\big)$ *com* $n \geq 3$, *as seguintes sentenças ocorrem.*

1. *Se M^n é compacta, então X é um campo de Killing. E portanto é trivial.*
2. *Se M^n um soliton gradiente não-compacto, então o soliton é Gaussiano ou X é um campo de Killing.*

Demonstração: Sendo X um campo conforme, temos $\mathcal{L}_X g = 2\rho g$. Pela equação fundamental (2.1), obtemos

$$Ric = (\lambda - \rho)g. \tag{2.14}$$

Portanto M^n é uma variedade de Einstein. Sendo $n \geq 3$ e λ constante, temos que ρ é constante.

Agora, suponha que M^n é compacta e $\rho \neq 0$. Sendo $divX = n\rho$, temos pela fórmula de Stokes que

$$0 = \int_M divX dM = n\rho vol(M),$$

que mostra que $\rho \equiv 0$. Então, temos $\mathcal{L}_X g = 0$, o que prova o primeiro item.

Por outro lado, se $X = \nabla f$, então $\mathcal{L}_{\nabla f} g = 2\nabla^2 f$, assim

$$\nabla^2 f = \rho g,$$

com ρ constante. Se $\rho \neq 0$ podemos usar o teorema de Tashiro [T, Teorema 2] para concluir que M^n é isométrico ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, implicando que o soliton é Gaussiano. Caso contrário, $\rho \equiv 0$, assim X é um campo de Killing, o que finaliza a prova do teorema. $\square$

Agora, dado um soliton de Ricci conforme, apresentaremos uma estimativa para o primeiro autovalor do Laplaciano. Mais precisamente, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.5 *Dado $\left(M^n,\, g,\, X\right)$ um soliton de Ricci conforme. Se $n \geq 3$, então o primeiro autovalor do Laplaciano satisfaz $\lambda_1 \geq \frac{n}{n-1}\lambda$. Além disso, a igualdade ocorre, se e somente se, M^n é isométrica a esfera $\mathbb{S}^n(r)$.*

Demonstração: Sendo M^n compacta temos pelo Teorema 2.4 que X é um campo de Killing. Então $Ric = \lambda g$, podemos usar um resultado clássico de Lichnerowicz [23] que diz que se a curvatura de Ricci é maior ou igual a k, então o primeiro autovalor do Laplaciano λ_1 satisfaz $\lambda_1 \geq \frac{k}{n-1}n$. Então concluímos que

$$\lambda_1 \geq \frac{\lambda}{n-1}n.$$

Além disso, aplicando o teorema de Obata [27] a igualdade ocorre, se, e somente se, M^n é isométrica a esfera $\mathbb{S}^n(r)$, o que finaliza a prova do teorema. $\square$

Capítulo 3

Quase solitons de Ricci

Neste capítulo, iremos apresentar uma série de resultados obtidos em dois artigos devido ao autor em parceria com Barros, tais resultados permitirá entender a geometria dos quase solitons de Ricci, veja [3] e [6].

Primeiramente, vamos mostrar alguns exemplos de quase solitons de Ricci, além disso, vamos provar algumas equações de estrutura para este tipo de variedades. Como consequência dessas equações, vamos obter fórmulas integrais para o caso compacto e assim vamos caracterizar os quase solitons de Ricci compactos, para isto indicamos como leitura complementar [3]. Na sequência, iremos provar uma equação para o laplaciano da curvatura de Ricci e como consequência desta, vamos obter uma equação para o laplaciano da curvatura escalar. Logo após iremos apresentar uma caracterização para quase soliton de Ricci não necessariamente compacto. Para finalizar, iremos calcular o grupo fundamental de um quase soliton de Ricci, para essa parte final indicamos como leitura [6].

3.1 Definição de quase soliton de Ricci

O estudo de quase soliton de Ricci foi introduzido num recente artigo devido a Pigola et al. [32], onde essencialmente eles modificaram a definição de soliton de Ricci adicionando a condição do parâmetro λ ser uma função diferenciável, mais precisamente, dizemos que a variedade Riemanniana (M^n, g) é um *quase soliton de Ricci* se existe a campo X e uma função soliton $\lambda : M^n \to \mathbb{R}$

satisfazendo

$$Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g, \tag{3.1}$$

onde Ric e $\mathcal{L}$ representam, respectivamente, tensor de Ricci e derivada de Lie. Vamos nos referir a esta equação como equação fundamental. Na equação fundamental consideramos um campo X não necessariamente gradiente, diferentemente do caso considerado por Pigola et al. [32], onde definem o quase soliton de Ricci apenas para campos gradientes. Um quase soliton de Ricci será chamado de *expansivo*, *estável* ou *contrátil*, respectivamente, se $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ ou $\lambda > 0$. Caso contrário, o quase soliton de Ricci será chamado de *indefinido*. Além disso, quando o campo que define o quase soliton de Ricci for o gradiente de uma função diferenciável $f : M^n \to \mathbb{R}$, a variedade será chamanda *quase soliton de Ricci gradiente*, neste caso a equação fundamental é escrita da seguinte forma:

$$Ric + \nabla^2 f = \lambda g, \tag{3.2}$$

onde $\nabla^2 f$ é o Hessiano da função f. Neste caso, f é dita função potencial.

Algumas vezes, é mais conveniente escrevermos a equação fundamental para um *quase soliton de Ricci gradiente* da seguinte forma

$$R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f = \lambda g_{ij}. \tag{3.3}$$

Definição 3.1 *Se o campo X é trivial ou a função potencial f é constante, o quase soliton de Ricci é chamado* trivial.

Quando $n > 2$ e X é um campo de Killing o quase soliton de Ricci será simplesmente uma variedade de Einstein com λ constante.

Considerando que λ é não necessariamente constante, obteremos uma certa modifição em relação a teoria de soliton de Ricci, indicamos com referência [32] para ver algumas dessas mudanças. Em [15], Catino provou que um quase soliton de Ricci gradiente localmente conformemente flat, em torno de qualquer ponto regular de f, é localmente um produto warped de fibras $(n-1)$-dimensional de curvatura seccional constante.

3.2 Exemplos

Nesta seção vamos mostrar dois exemplos de quase solitons de Ricci com função soliton λ não constante, estes exemplos foram obtidos pelo autor em [3] e [6].

Exemplo 3.1 (caso compacto) *Por exemplo, vamos considerar a esfera Euclidiana com métrica canônica g_0, X um campo dado pela projeção de um campo constante não-nulo $\widetilde{V}$ em $\mathbb{R}^{n+1}$ sobre $\mathbb{S}^n$ e $\lambda = \frac{1}{n}(\mathrm{divX} + \mathrm{R})$. Então X é um campo conforme sobre $\mathbb{S}^n$ onde o subgrupo a 1-parâmetro φ_t é dado por transformações conformes, mas não isometrias. Assim, $\big(\mathbb{S}^n,\, g_0,\, X,\, \lambda\big)$ é um quase soliton de Ricci.*

É bem conhecido que um soliton de Ricci compacto de dimensão dois é trivial, é possível provar este fato usando a identidade de Pohozaev. Porém, vamos mostrar com um contra-exemplo que existe um quase soliton de Riccci compacto de dimensão dois não trivial. O que iremos fazer é basicamente esclarecer os comentários do exemplo anterior.

Observação 3.1 *Considere $E_3 = (0, 0, 1)$ o campo de vetores em $\mathbb{R}^3$. Defina um campo de vetores X na esfera como sendo a projeção ortogonal de E_3 sobre o espaço tangente à esfera $\mathbb{S}^2$. De fato, temos que para qualquer vetor tangente $v = (x, y, z)$ e reta $\alpha(t) = E_3 + tv$, ocorre*

$$0 = \langle \alpha(t), v\rangle = \langle E_3, v\rangle + t\langle v, v\rangle.$$

Portanto, $X(x, y, z) = (-xz, -yz, 1 - z^2)$. Além disso, sendo

$$d(X \lrcorner \Omega_{\mathbb{S}^2}) = \mathrm{divX}\Omega_{\mathbb{S}^2},$$

onde $\Omega_{\mathbb{S}^2}$ é o elemento de volume da esfera $\mathbb{S}^2$. Portanto, temos que

$$d(X \lrcorner \Omega_{\mathbb{S}^2}) = -2z\Omega_{\mathbb{S}^2},$$

e assim $\mathrm{divX} = -2\mathrm{z}$.

Observe ainda, que nas notações acima é possível provar que o subgrupo a 1-parâmetro gerado por X é dado por

$$\varphi_t(x, y, z) = \frac{1}{\cosh t + z \sinh}(x, y, \sinh t + z \cosh t).$$

Com isso, temos que

$$\varphi_t^* g = \frac{1}{(\cosh t + z \sinh t)^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Portanto, X é um campo conforme. Observe que se considerarmos a função altura para um vetor fixo a do $\mathbb{R}^3$ dada por $l_a(w) = \langle w, a\rangle$ para todo vetor w, temos que para todo Y tangente ocorre

$$Y(l_a) = \langle Y, a^\top\rangle,$$

portanto, o campo X é o gradiente da função altura. Nessas condições, se consideramos a esfera $\mathbb{S}^2$ com métrica canônica g_0, o campo X comentando acima e a função $\lambda = \frac{1}{2}(1 - 2z)$, então $\big(\mathbb{S}^2,\, g_0,\, X,\, \lambda\big)$ é um quase soliton de Ricci gradiente compacto, não trivial e com função λ não constante.

Para o caso não compacto, temos o seguinte exemplo de quase soliton de Ricci com função soliton λ não constante.

Exemplo 3.2 (caso não compacto) *Considere $M^{n+1} = \mathbb{R} \times_{\cosh(t)} \mathbb{S}^n$ com $g = dt^2 + \cosh^2 t g_0$, onde g_0 é a métrica padrão de $\mathbb{S}^n$. Escolhendo $\big(M^{n+1}, g, \nabla f, \lambda\big)$, onde $f(x,t) = \sinh(t)$ e $\lambda(x,t) = \sinh(t) + n$, portanto, usando o Lema 1.1 devido a Pigola et. al. [32], concluímos que $\big(M^{n+1}, g, \nabla f, \lambda\big)$ é um quase soliton de Ricci.*

3.3 Equações básicas

Nesta subseção iremos apresentar alguns resultados preliminares que irão servir de base para o resultados principais desta seção. Primeiramente, vamos deduzir para um quase soliton de Ricci algumas fórmulas clássicas para soliton de Ricci. Esta primeira proposição pode ser encontrada em [17] para um soliton de Ricci.

Proposição 3.1 *Num quase soliton de Ricci $\big(M^n,\, g,\, \nabla f,\, \lambda\big)$ as seguintes fórmulas ocorrem:*

1. $\mathrm{R} + \Delta \mathrm{f} = \mathrm{n}\lambda.$

2. $\nabla_i R = 2R_{ij}\nabla^j f + 2(n-1)\nabla_i \lambda$.

3. $\nabla_j R_{ik} - \nabla_i R_{jk} - R_{ijks}\nabla^s f = (\nabla_j \lambda) g_{ik} - (\nabla_i \lambda) g_{jk}$.

4. $\nabla(R + |\nabla f|^2 - 2(n-1)\lambda) = 2\lambda\nabla f$.

Demonstração: Para provarmos o item (1) basta tomarmos o traço da equação fundamental (3.2).
Para o segundo item recordemos da identidade de Bianchi (contraída 2 vezes) $2\mathrm{divRic} = dR$, portanto, usando-a juntamente com a equação (3.3) e a identidade de Ricci, temos seguinte expessão

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\nabla_i R = \mathrm{divRic}_i &= g^{jk}\nabla_k R_{ij}\\ &= -g^{jk}\nabla_k\nabla_i\nabla_j f + g^{jk}(\nabla_k\lambda)g_{ij}\\ &= -g^{jk}\nabla_i\nabla_k\nabla_j f - g^{jk}R_{kijs}\nabla^s f + g^{jk}(\nabla_k\lambda)g_{ij}\\ &= -\nabla_i(\Delta f) - R_{is}\nabla^s f + (\nabla_i\lambda)\\ &= (1-n)\nabla_i\lambda + \nabla_i R - R_{is}\nabla^s f;\end{aligned}$$

donde a identidade segue.
Agora vamos provar o tereceiro item. Pela equação (3.3) vamos obter que

$$\nabla_j R_{ik} + \nabla_j\nabla_i\nabla_k f = (\nabla_j\lambda)g_{ik}.$$

Portanto, aplicando a identidade de Ricci obtemos o terceiro item.
Finalmente, usando a segunda identidade e a equação fundamental vista como $(1,1)$-tensor, obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\nabla(R + |\nabla f|^2) &= \frac{1}{2}\nabla R + \frac{1}{2}\nabla|\nabla f|^2\\ &= \mathrm{Ric}(\nabla f) + (n-1)\nabla\lambda + \nabla_{\nabla f}\nabla f\\ &= \lambda\nabla f + (n-1)\nabla\lambda,\end{aligned}$$

o que finiliza a prova da proposição. □

O segundo item da proposição anterior permite concluir que para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ temos

$$g(\nabla R, Z) = 2\mathrm{Ric}(\nabla f, Z) + 2(n-1)g(\nabla\lambda, Z). \tag{3.4}$$

Para o que segue, vamos enunciar o Lemma 2.1 provado em [31], cuja prova encontra-se nas preliminares deste trabalho, veja o Lema 1.3.

Lema 3.1 *Dado um campo X numa variedade Riemanniana (M^n, g) temos*

$$\mathrm{div}\mathcal{L}_X g(X) = \frac{1}{2}\Delta|X|^2 - |\nabla X|^2 + \mathrm{Ric}(X,X) + D_X \mathrm{div} X.$$

Quando $X = \nabla f$ é um campo gradiente e Z é um campo qualquer

$$\mathrm{div}\mathcal{L}_{\nabla f} g(Z) = 2\mathrm{Ric}(Z, \nabla f) + 2D_Z \mathrm{div}\nabla f,$$

ou em notação $(1,1)$-tensor

$$\mathrm{div}\nabla\nabla f = \mathrm{Ric}(\nabla f) + \nabla\Delta f.$$

Levando em conta que div(λI)(X) $= g(\nabla\lambda, X)$, onde λ é uma função em M^n e $X \in \mathfrak{X}(M)$, vamos usar o Lema 3.1 para generalizar para um quase soliton de Ricci o Lema (2.4) de [31] para um Ricci soliton.

Lema 3.2 *Um quase soliton de Ricci $\big(M^n, g, X, \lambda\big)$ satisfaz:*

1. $\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = |\nabla X|^2 - \mathrm{Ric}(X,X) - (n-2)g(\nabla\lambda, X)$,

2. $\frac{1}{2}(\Delta - D_X)|X|^2 = |\nabla X|^2 - \lambda|X|^2 - (n-2)g(\nabla\lambda, X)$.

Demonstração: Primeiramente vamos observar que pela equação fundamental temos que

$$2\mathrm{div}\,\mathrm{Ric} + \mathrm{div}(\mathcal{L}_X g) = 2\nabla\lambda. \tag{3.5}$$

Além disso, sendo $R + \mathrm{div}X = n\lambda$, para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$D_Z R + D_Z \mathrm{div} X = n D_Z(\lambda).$$

Por outro lado, usando a segunda identidade de Bianchi (contraída 2 vezes) obtemos

$$2\mathrm{div}\,\mathrm{Ric}(Z) = D_Z R.$$

Considerando $Z = X$, usando o lema 3.1 e a equação (3.5) deduzimos

$$\begin{aligned}
D_X \mathrm{div} X &= ng(\nabla\lambda, X) - D_X R \\
&= ng(\nabla\lambda, X) - 2\mathrm{divRic}(X) \\
&= ng(\nabla\lambda, X) + \mathrm{div}(\mathcal{L}_X g)(X) - 2g(\nabla\lambda, X) \\
&= (n-2)g(\nabla\lambda, X) + (\frac{1}{2}\Delta|X|^2 - |\nabla X|^2 + \mathrm{Ric}(X,X) + D_X \mathrm{div} X).
\end{aligned}$$

Portando

$$\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = |\nabla X|^2 - \mathrm{Ric}(X,X) - (n-2)g(\nabla\lambda, X),$$

que finaliza a prova do primeiro item. Pela equação fundamental podemos escrever $Ric(X,X) = \lambda|X|^2 - \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g(X,X)$, assim, usando o item anterior obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|X|^2 &= |\nabla X|^2 + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g(X,X) - \lambda|X|^2 - (n-2)g(\nabla\lambda, X) \\ &= |\nabla X|^2 + \frac{1}{2}D_X|X|^2 - \lambda|X|^2 - (n-2)g(\nabla\lambda, X), \end{aligned}$$

o que completa a prova do lema. □

Considere o operador difusão $\Delta_X = \Delta - D_X$. Em particular, se $X = \nabla f$ temos que $\Delta_f = \Delta - D_{\nabla f}$. Nessa notação, usando o item (2) do lema anterior obteremos o seguinte corolário.

Corolário 3.1 *Um quase soliton de Ricci gradiente* $\big(M^n,\, g,\, \nabla f,\, \lambda\big)$ *satisfaz*

$$\frac{1}{2}\Delta_f|\nabla f|^2 = |\nabla^2 f|^2 - \lambda|\nabla f|^2 - (n-2)g(\nabla\lambda, \nabla f). \tag{3.6}$$

3.4 Um Teorema de Rigidez

No estudo de métricas tipo-Einstein é importante entender sob que condições esta métrica é Einstein. Para tanto, iremos provar um teorema de rigidez para quase soliton de Ricci, o qual generaliza o Teorema 1.1 obtido em [31] para Ricci soliton.

Teorema 3.1 *seja* $\big(M^n,\, g,\, X,\, \lambda\big)$ *um quase soliton de Ricci compacto. Suponha que*

$$\int_M \big(\mathrm{Ric}(X,X) + (n-2)g(\nabla\lambda, X)\big)dM \leq 0,$$

então (M^n, g) *é Einstein.*

Demonstração: Para provarmos o teorema é suficiente considerarmos a equação (1) do Lemma 3.2. De fato, Integrando a identidade (1) e levando em conta o fato de M^n ser compacta, obtemos

$$\int_M |\nabla X|^2 dM = \int_M \big(\mathrm{Ric}(X,X) + (n-2)\langle \nabla\lambda, X\rangle\big) dM.$$

Assumindo que o lado direito da igualdade é menor ou igual a zero, temos que $\nabla X = 0$. Portanto, temos que $\mathcal{L}_X g = 0$ que implica X ser um campo de Killing. Logo M^n é uma variedade de Einstein, o que conclui a prova do teorema. $\square$

3.5 Um Teorema de Caracterização para o caso compacto

Primeiramente, vamos chamar a atenção para seguinte observação, onde tal fato pode ser observado no exemplo do tipo compacto comentado anteriormente.

Observação 3.2 *Usando o princípio do máximo de Hopf e o traço da equação fundamental é fácil provar que um soliton de Ricci compacto de dimensão maior que dois é Einstein se, e somente se, é trival. Mas esse resultado não é verdade no caso dos quase soliton de Ricci, podemos ter quase soliton de Ricci do tipo Einstein, porém não trivial, isso pode ser visto no exemplo comentado anteriormente. De fato, observe que o Teorema de Hopf não poderá ser aplicado quando λ for indefinido.*

Agora vamos apresentar um teorema de caracterização para os quase solitons de Ricci compactos com campo confome não trivial.

Teorema 3.2 *Seja $\big(M^n, g, X, \lambda\big)$ um quase soliton de Ricci compacto com $n > 2$. Se X é campo conforme não trivial, então M^n é isométrico a uma esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n$.*

Demonstração: Sendo X um campo conforme não trivial, então $\mathcal{L}_X g = 2\Psi g$ com $\Psi \neq 0$. Portanto, obtemos $Ric = \big(\lambda - \Psi\big)g$, o que implica $R = n\big(\lambda - \Psi\big)$.

Sendo $n > 2$ temos que a curvatura escalar R é constante, afinal $\lambda - \Psi$ é constante. Além disso, podemos usar o Lemma 2.3 (p. 52 do Yano [36]) para concluir que $R \neq 0$, caso contrário $\Psi = 0$. Por outro lado, sendo $\lambda - \Psi$ constante, temos que

$$\mathcal{L}_X Ric = 2\big(\lambda - \Psi\big)\Psi g.$$

Aplicando o Teorema 4.2 $-$ $p.54$ de [36], concluímos que M^n é isométrica a uma esfera Euclidiana, o que finaliza a prova do teorema. □

3.6 Fórmulas Integrais e Aplicações

Nesta subseção, iremos apresentar uma fórmula integral para os quase solitons de Ricci que é uma generalização de um fórmula obtida pelo autor em [1]. Esta fórmula integral será utilizada para caracterizar os quase solitons de Ricci compacto.

Teorema 3.3 *Seja $\big(M^n,\, g,\, \nabla f,\, \lambda\big)$ um quase soliton de Ricci gradiente compacto. Então temos que:*

1. $\int_M |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 dM = \frac{(n-2)}{2n} \int_M \langle \nabla R, \nabla f\rangle dM.$
2. $\int_M |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 dM = \frac{(n-2)}{n} \int_M \big(\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) + (n-1)\langle \nabla\lambda, \nabla f\rangle\big) dM.$

Demonstração: Primeiramente, vamos considerar o divergente da equação (4) da Proposição 3.1 para obtermos a seguinte relação

$$\Delta R + \Delta|\nabla f|^2 = 2(n-1)\Delta\lambda + 2\lambda\Delta f + 2\langle\nabla\lambda, \nabla f\rangle. \tag{3.7}$$

Usando a fórmula de Bochner, podemos escrever a equação (3.7) da seguinte forma

$$\frac{1}{2}\Delta R + |\nabla^2 f|^2 + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle = (n-1)\Delta\lambda + \lambda\Delta f + \langle\nabla\lambda, \nabla f\rangle. \tag{3.8}$$

Lembre que

$$\Delta f = n\lambda - R$$

e

$$2\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) = \langle \nabla R, \nabla f\rangle - 2(n-1)\langle \nabla \lambda, \nabla f\rangle,$$

assim, o lado esquerdo da equação (3.8) pode ser escrito como

$$\frac{1}{2}\Delta R + |\nabla^2 f|^2 - \frac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla f\rangle + \langle \nabla \lambda, \nabla f\rangle.$$

Portanto, temos que

$$\frac{1}{2}\Delta R + |\nabla^2 f|^2 = (n-1)\Delta\lambda + \lambda\Delta f + \frac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla f\rangle.$$

Sendo $|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 = |\nabla^2 f|^2 - \frac{(\Delta f)^2}{n}$ vamos deduzir pela última equação a seguinte relação

$$\frac{1}{2}\Delta R + |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 = (n-1)\Delta\lambda + \Delta f\big(\lambda - \frac{\Delta f}{n}\big) + \frac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla f\rangle.$$

Portanto, usando a equação fundamental de um quase soliton de Ricci, obteremos a seguinte equação

$$\frac{1}{2}\Delta R + |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 = (n-1)\Delta\lambda + \frac{1}{n}R\Delta f + \frac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla f\rangle. \tag{3.9}$$

Pela compacidade de M^n temos

$$\int_M |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 dM = \frac{n-2}{2n}\int_M \langle \nabla R, \nabla f\rangle dM, \tag{3.10}$$

Sendo $\int_M R\Delta f dM = -\int_M \langle \nabla R, \nabla f\rangle dM$. Assim, obtemos o primeiro item. Para o que segue, basta utilizarmos a equação (3.4) para escrevermos

$$\frac{1}{2}\int_M \langle \nabla R, \nabla f\rangle dM = \int_M \big(\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) + (n-1)g(\nabla\lambda, \nabla f)\big)dM.$$

Comparando esta última equação com a equação (3.10) completamos a prova do teorema. □

Em [33] Tashiro provou que uma variedade Riemanniana completa M^n, $n \geq 2$, é conformemente equivalente a uma esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n$ se admite um campo conforme não trivial, solução da seguinte EDP $\nabla^2\rho = \frac{1}{n}\Delta\rho g$. Utililizando este teorema devido a Tashiro e a fórmula integral obtida no Teorema 3.3, iremos provar o seguinte corolário.

Corolário 3.2 *Um quase soliton de Ricci compacto não trivial* $\big(M^n,\, g,\, \nabla f,\, \lambda\big)$ *é isométrico a uma esfera Euclidiana* $\mathbb{S}^n(r)$*, se uma das seguintes condições ocorre.*

1. M^n *tem curvatura escalar constante.*
2. $\int_M \big(\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) + (n-1)g(\nabla\lambda, \nabla f)\big)dM \leq 0.$
3. M^n *é uma variedade homogênea.*

Demonstração: Note que qualquer uma das hipóteses do corolário, implicará

$$\int_M |\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g|^2 dM = 0, \tag{3.11}$$

sendo f não trivial, concluímos pelo Teorema 1 [33] que (M^n, g) é conformemente equivalente a uma esfera Euclidiana.

Por outro lado, usando a equação fundamental temos que

$$Ric - \frac{R}{n} g = -\nabla^2 f + \big(\lambda - \frac{R}{n}\big) g = -\nabla^2 f + \frac{\Delta f}{n} g. \tag{3.12}$$

Portanto comparando a equação anterior com a equação (3.11), obtemos que $Ric = \frac{R}{n} g$. Utilzando novamente a equação fundamental, temos que ∇f é um campo conforme não trivial. Para $n > 2$ podemos aplicar o Teorema 3.2 para concluir que M^n é isométrica a uma esfera Euclidiana, o que finaliza a prova do corolário. □

3.7 Laplaciano da curvatura de Ricci e da curvatura escalar

Agora, vamos provar uma equação para o laplaciano da curvatura de Ricci e, como consequência desta equação, obteremos uma equação para o laplaciano da curvatura escalar.

Proposição 3.2 *Seja* $\big(M^n,\, g,\, \nabla f,\, \lambda\big)$ *um quase soliton de Ricci gradiente. Então:*

$$\Delta R_{ik} = \langle \nabla R_{ik}, \nabla f\rangle + \lambda R_{ik} - 2R_{ijks}R^{js} + R_{is}R^s_k + \frac{1}{2}\nabla_k\nabla_i R - \nabla_k R_{si}\nabla^s f + \Delta\lambda g_{ik} - \nabla_k\nabla_i\lambda. \tag{3.13}$$

Demonstração: De fato, sendo $\Delta R_{ik} = g^{jk}\nabla_k\nabla_j R_{ik} = \nabla^j\nabla_j R_{ik}$ temos

$$
\begin{aligned}
\Delta R_{ik} &= \nabla^j(\nabla_i R_{jk} + R_{ijks}\nabla^s f + \nabla_j\lambda g_{ik} - \nabla_i\lambda g_{jk}) \\
&= \nabla^j\nabla_i R_{jk} + \nabla^j R_{ijks}\nabla^s f + R_{ijks}\nabla^j\nabla^s f + \Delta\lambda g_{ik} - g^{js}\nabla_s\nabla_i\lambda g_{jk} \\
&= \nabla^j\nabla_i R_{jk} + \nabla R_{ijks}\nabla^j\nabla^s f + \Delta\lambda g_{ik} - \nabla_k\nabla_i\lambda \\
&= \nabla_i\nabla^j R_{jk} + R^j_{ijs}R^s_k + R^j_{iks}R^s_j - \nabla_k R_{si}\nabla^s f + \nabla_s R_{ki}\nabla^s f \\
&\quad + R_{ijks}\nabla^j\nabla^s f + \Delta g_{ik} - \nabla_k\nabla_i\lambda \\
&= \nabla_i\nabla^j R_{jk} + R_{is}R^s_k + R^j_{iks}R^s_j - \nabla_k R_{si}\nabla^s f + \nabla_s R_{ki}\nabla^s f \\
&\quad + R_{ijks}\nabla^j\nabla^s f + \Delta\lambda g_{ik} - \nabla_k\nabla_i\lambda \\
&= \frac{1}{2}\nabla_i\nabla k R + R_{is}R^s_k + R^j_{iks}R^s_j - \nabla_k R_{si}\nabla^s f + \langle\nabla R_{ik}, \nabla f\rangle \\
&\quad - R_{ijks}R^{js} + \lambda R_{ik} + \Delta\lambda g_{ik} - \nabla_k\nabla_i\lambda \\
&= \langle\nabla R_{ik}, \nabla f\rangle + \lambda R_{ik} - 2R_{ijks}R^{js} + R_{is}R^s_k + \frac{1}{2}\nabla_k\nabla_i R \\
&\quad - \nabla_k R_{si}\nabla^s f + \Delta\lambda g_{ik} - \nabla_k\nabla_i\lambda,
\end{aligned}
$$

o que finaliza a prova do Lema. □

Utilizando a proposição anterior obtemos o seguinte Lema.

Lema 3.3 *Para um quase soliton de Ricci gradiente* $\big(M^n,\, g,\, \nabla f,\, \lambda\big)$ *a seguinte fórmula ocorre:*

$$\Delta \mathrm{R_{ij}} = \langle\nabla \mathrm{R_{ij}}, \nabla \mathrm{f}\rangle + 2\lambda \mathrm{R_{ij}} - 2\mathrm{R_{ikjs}}\mathrm{R^{ks}} + (\mathrm{n}-2)\nabla_{\mathrm{j}}\nabla_{\mathrm{i}}\lambda + \Delta\lambda \mathrm{g_{ik}}.$$

Demonstração: Usando a equação (1) da Proposição 3.1, temos

$$0 = \frac{1}{2}\nabla_k(\nabla_i R - 2R_{is}\nabla^s f - 2(n-1)\nabla_i\lambda),$$

portanto

$$\frac{1}{2}\nabla_k\nabla_i R - \nabla_k R_{is}\nabla^s f = (n-1)\nabla_k\nabla_i\lambda + R_{is}\nabla^s\nabla_k f.$$

Assim, usando a equação (3.13), obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta R_{ik} &= \langle \nabla R_{ik}, \nabla f\rangle + \lambda R_{ik} - 2R_{ijks}R^{js} + R_{is}R_k^s \\
&\quad + R_{is}\nabla^s\nabla_k f + (n-1)\nabla_k\nabla_i\lambda + \Delta\lambda g_{ik} - \nabla_k\nabla_i\lambda \\
&= \langle \nabla R_{ik}, \nabla f\rangle + \lambda R_{ik} - 2R_{ijks}R^{js} + R_{is}R_k^s \\
&\quad + R_{is}g^{sj}\nabla_j\nabla_k f + (n-1)\nabla_k\nabla_i\lambda + \Delta\lambda g_{ik} - \nabla_k\nabla_i\lambda \\
&= \langle \nabla R_{ik}, \nabla f\rangle + \lambda R_{ik} - 2R_{ijks}R^{js} + R_{is}R_k^s + \lambda R_{is} \\
&\quad - R_{is}R_k^s + (n-1)\nabla_k\nabla_i\lambda + \Delta\lambda g_{ik} - \nabla_k\nabla_i\lambda \\
&= \langle \nabla R_{ik}, \nabla f\rangle + 2\lambda R_{ik} - 2R_{ijks}R^{js} \\
&\quad + (n-2)\nabla_k\nabla_i\lambda + \Delta\lambda g_{ik}.
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\Delta R_{ij} = \langle \nabla R_{ij}, \nabla f\rangle + 2\lambda R_{ij} - 2R_{ikjs}R^{ks} + (n-2)\nabla_j\nabla_i\lambda + \Delta\lambda g_{ik},$$

o que finaliza a prova da Lema. □

Em particular, tomando o traço na identida do Lema anterior, temos

$$\Delta R = \langle \nabla R, \nabla f\rangle + 2\lambda R - 2|\mathrm{Ric}|^2 + 2(n-1)\Delta\lambda. \tag{3.14}$$

Esta equação apareceu em [32], mas por um argumento diferente.

Corolário 3.3 *Seja $\big(M^n,\, g,\, \nabla f,\, \lambda\big)$ um quase soliton de Ricci gradiente. Se*

$$\lambda R + (n-1)\Delta\lambda \geq |\mathrm{Ric}|^2,$$

então R é constante na vizinhança de qualquer máximo local.

Demonstração: De fato, usando a hipótese na equação (3.14), obtemos

$$\frac{1}{2}\Delta_f R \geq 0,$$

onde $\Delta_f R = \Delta R - \langle \nabla f, \nabla R\rangle$ é o operador difusão. Portanto, pelo princípio do máximo para EDP's Elípticas, obtemos que R é constante na vizinhança de qualquer máximo local. □

Em [4] provamos que um quase soliton de Ricci gradiente satisfaz a seguinte equação

$$\frac{1}{2}\Delta R + |\mathrm{Ric} - \frac{R}{n}g|^2 = (n-1)\Delta\lambda + \frac{R}{n}\Delta f + \frac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla f\rangle,$$

para maiores detalhes, veja a equação 3.9. Considerando a equação (1) da Proposição 3.1 e o operador difusão, podemos reescrever a equação da seguinte forma:

$$\frac{1}{2}\Delta_f R = (n-1)\Delta\lambda + \big(\lambda - \frac{R}{n}\big)R - |\mathrm{Ric} - \frac{R}{n}g|^2. \qquad (3.15)$$

Usando a equação (3.15) podemos enunciar a seguinte proposição.

Proposição 3.3 *Todo quase soliton de Ricci estável cuja curvatura escalar atinge seu mínimo é Ricci flat.*

Demonstração: De fato, em um ponto de mínimo de R, podemos usar a equação (3.15) para concluir

$$0 \leq \Delta_f R = -\frac{R^2}{n} - |\mathrm{Ric} - \frac{R}{n}g|^2 \leq 0.$$

Assim $R = 0$ e $Ric = 0$, portanto (M^n, g) é Ricci flat. □

3.8 Um Teorema de Caracterização para o caso gradiente

Inicialmente, consideremos um quase soliton de Ricci gradiente não necessariamente compacto, nessas condições obtemos o seguinte teorema de caracterização.

Teorema 3.4 *Seja $\big(M^n,\, g,\, \nabla f,\, \lambda\big), n \geq 3$, um quase soliton de Ricci gradiente. Se ∇f é um campo conforme não trivial, então M^n é isométrica a $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{S}^n$.*

Demonstração: Relembre que para um quase soliton de Ricci $\big(M^n,\, g,\, \nabla f,\, \lambda\big)$ temos

$$R + \Delta f = n\lambda. \qquad (3.16)$$

Se ∇f é um campo conforme não trivial, temos que $\mathcal{L}_{\nabla f} g = 2\Psi g$, onde $\Psi \neq 0$. Sendo $\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\nabla f}\mathrm{g} = \frac{\Delta \mathrm{f}}{\mathrm{n}}\mathrm{g}$ temos que $\Delta f \neq 0$. Agora, usando que ∇f é um campo conforme, vamos deduzir $Ric = \big(\lambda - \Psi\big)\mathrm{g}$. Em particular, o Lema de Schur nos diz que $(\lambda - \Psi)$ é constante, como tal $R = n\big(\lambda - \Psi\big)$ é também contante.

Supondo $R = 0$ obtemos que (M^n, g) é Ricci flat e usando o Teorema 2 devido a Tashiro [33] (M^n, g) é isométrico a $\mathbb{R}^n$. Por outro lado, se $R \neq 0$, podemos usar o Teorema 1 devido a Nagano-Yano [26] para concluir que (M^n, g) é isométrica a esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n$, o que finaliza a prova do teorema. $\square$

3.9 O grupo fundamental de um quase soliton de Ricci

Nesta seção iremos calcular o grupo fundamental de um quase soliton de Ricci. Primeiramente, para cada $p \in M$ considere

$$\tau_p = sup\{\mathrm{Ric}_y(v, v) \,:\, y \in B(p, 1),\, \|v\| = 1\}$$

e

$$H_p = max\{0, \tau_p\}.$$

Nessas notações obtemos o seguinte lema.

Lema 3.4 *Seja $\big(M^n,\, g,\, X,\, \lambda\big)$ um quase soliton de Ricci. Se existe $\kappa \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \geq \kappa > 0$, então para qualquer $p, q \in M$,*

$$d(p, q) \leq max\big\{1, \frac{1}{\kappa}\big(2(n-1) + H_p + H_q + \|X_p\| + \|X_q\|\big)\big\}.$$

Demonstração: Primeiramente, vamos assumir que $d(p, q) > 1$ e seja γ uma geodésica minimizante partindo de p na direção de q. Aplicando o Lema 1.4, obtemos

$$\int_0^r \mathrm{Ric}(\gamma'(s), \gamma'(s))\mathrm{ds} \leq 2(n-1) + H_p + H_q, \tag{3.17}$$

onde $r = d(p, q)$. Agora vamos afirmar que

$$\int_0^r \mathrm{Ric}(\gamma'(s), \gamma'(s))\mathrm{ds} \geq \kappa\, d(p, q) - \|X_p\| - \|X_q\|. \tag{3.18}$$

De fato, pela equação fundamental temos

$$\begin{aligned}
\int_0^r \mathrm{Ric}(\gamma'(s), \gamma'(s))\mathrm{ds} &= \int_0^r \lambda g(\gamma'(s), \gamma'(s))\mathrm{ds} - \frac{1}{2}\int_0^r \mathcal{L}_X g(\gamma'(s), \gamma'(s))\mathrm{ds} \\
&= \int_0^r \lambda g(\gamma'(s), \gamma'(s))\mathrm{ds} - \int_0^r \frac{d}{ds} g(X, \gamma'(s))\mathrm{ds} \\
&= \int_0^r \lambda|\gamma'(s)|^2\mathrm{ds} + g(X, \gamma'(0))_p - g(X, \gamma'(r))_q \\
&\geq \kappa\, d(p, q) - \|X_p\| - \|X_q\|.
\end{aligned}$$

Portanto, combinando a desigualdade anterior e a desigualdade (3.17), concluímos

$$2(n-1) + H_p + H_q + \|X_p\| + \|X_q\| \geq \kappa\, d(p,q),$$

o que finaliza a prova do lema. $\square$

Como consequência direta do Lema 3.4, vamos apresentar o resultado principal desta seção, tal resultado é um generalização para os resultados de [18], [5] e [34].

Consideremos que a norma do campo que define o quase soliton de Ricci seja finita. Com isso temos o seguinte teorema.

Teorema 3.5 *Seja $\big(M^n,\, g,\, X,\, \lambda\big)$ um quase soliton de Ricci. Se existe $\kappa \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \geq \kappa > 0$, então seu grupo fundamental é finito.*

Demonstração: De fato, basta observarmos que $\big(\overline{M},\, \overline{g},\, \overline{X},\, \lambda\big)$, onde $\overline{M}$, $\overline{g}$ e $\overline{X}$, representam o recobrimento universal de M, a métrica dada pelo pullback de g e o campo dado pelo pullback de X, respectivamente, satisfazem a equação fundamental de um quase soliton de Ricci. Portanto, se fixarmos um ponto $p \in \overline{M}$ e considerar $\psi \in \pi_1(M)$ como uma transformação de recobrimento em $\overline{M}$, então $B(p,1)$ e $B(\psi(p),1)$ são isométricas, assim $H_p = H_{\psi(p)}$. Além disso, vamos ter que $\|\overline{X}_p\| = \|\overline{X}_{\psi(p)}\|$, nessas condições podemos aplicar o Lema 3.4 para concluir que

$$d(p,\psi(p)) \leq max\Big\{1, \frac{2}{\kappa}\big((n-1) + H_p + \|\overline{X}_p\|\big)\Big\}, \tag{3.19}$$

para todo $\psi \in \pi_1(M)$.

Portanto, como o lado direito da inequação acima independe de ψ, então $\overline{M}$ é compacta, assim, o número de folhas de recobrimento é finito; como este é o número de elementos do grupo fundamental $\pi_1(M)$ de M, temos que $\pi_1(M)$ é finito, portanto, concluímos a prova do teorema. $\square$

Capítulo 4

Métricas quasi-Einstein

Este capítulo irá tratar das métricas quasi-Einstein, essas métricas são generalizações das métricas de Einstein e Ricci soliton, elas tem uma relação direta com os produtos warped. Os resultados apresentados neste capítulo são alguns dos resultados obtidos em dois artigos escritos pelo autor em parceria com Barros, veja [4] e [5].

4.1 Definição

A principal motivação do estudo de métricas quasi-Einstein em variedades Riemannianas (M^n, g) é a relação direta com as métricas Einstein, solitons de Ricci e produtos warped. Em [13] e [12] os autores estudaram as métricas quasi-Einstein, onde provaram alguns teoremas de rigidez e de existência, recomendamos as supracitadas referências para maiores detalhes.

No estudo de métricas quasi-Einstein o tensor m-Bakry-Emery aparece naturalmente. Este tensor é dado por

$$Ric_f^m = Ric + \nabla^2 f - \frac{1}{m} df \otimes df, \tag{4.1}$$

onde $0 < m \leq \infty$, enquanto Ric e $\nabla^2 f$ representam o tensor de Ricci e o Hessiano de f, respectivamente. Uma extensão natural do tensor anterior é considerar um campo X ao invés do gradiente de uma função diferenciável f, mais precisamente, vamos definir $\mathrm{Ric}_{\mathrm{X}}^{\mathrm{m}}$ como segue

$$Ric_X^m = Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g - \frac{1}{m} X^\flat \otimes X^\flat, \tag{4.2}$$

onde $X \in \mathfrak{X}(M)$, $X^\flat$ é a 1-forma associada a X, enquanto $\mathcal{L}_X g$ representa a derivada de Lie do campo X.

Definição 4.1 *Uma métrica g numa variedade Riemanniana (M^n, X) será dita uma métrica m-quasi-Einstein, ou simplesmente uma métrica quasi-Einstein, se a relação*

$$Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X \mathrm{g} - \frac{1}{\mathrm{m}}\mathrm{X}^\flat \otimes \mathrm{X}^\flat = \lambda \mathrm{g}, \tag{4.3}$$

ocorre para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Em particular, temos que

$$Ric(X,X) + \langle \nabla_X X, X\rangle = \frac{1}{m}|X|^4 + \lambda |X|^2. \tag{4.4}$$

Além disso, tomando o traço da equação (4.3) obtemos

$$R + divX - \frac{1}{m}|X|^2 = \lambda n. \tag{4.5}$$

Observe que se $m = \infty$ na equação (4.3), obtemos a equação fundamental de um soliton de Ricci, além disso, se m é um inteiro positivo e X é um campo gradiente, obtemos métricas produto warped Einstein, para maiores detalhes veja [13]. Seguindo a mesma terminologia dos solitons de Ricci, dizemos que uma métrica quasi-Einstein g numa variedade Riemanniana M^n será dita *expansivo*, *estável* ou *contrátil*, respectivamente, se $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ ou $\lambda > 0$.

Definição 4.2 *Uma métrica quasi-Einstein será chamada trivial se $X \equiv 0$.*

A definição de trivialidade é equivalente a dizer que M^n é uma variedade de Einstein. Por outro lado, é conhecido que uma variedade compacta numa métrica ∞-quasi-Einstein com $\lambda \leq 0$ é trivial, veja [17]. O mesmo resultado foi provado anteriormente em [21] para métricas quasi-Einstein em variedades compactas com m finito. Ademais, é conhecido que um soliton de Ricci contrátil compacto tem curvatura escalar positiva, veja [17]. Uma extensão desse resultado para métricas quasi-Einstein com X campo gradiente e $1 \leq m < \infty$ foi obtida em [13].

Observe que se $X = \nabla f$ é um campo gradiente na equação (4.5) temos

$$R + \Delta f = \frac{1}{m}|\nabla f|^2 + \lambda n. \tag{4.6}$$

Assim vamos obter

$$\langle \nabla f, \nabla R\rangle + \langle \nabla f, \nabla \Delta f\rangle = \frac{2}{m}\langle \nabla_{\nabla f}\nabla f, \nabla f\rangle. \tag{4.7}$$

4.2 Equações de estrutura

Nesta seção, iremos apresentar alguns resultados preliminares que serão utilizados para provar os resultados principais deste capítulo.

Primeiramente, usando a definição do operador difusão e o Lema 3.1 provado em [31], obteremos o seguinte lema:

Lema 4.1 *Seja $(M^n,\, g,\, X)$ uma variedade Riemanniana tal que $Ric_X^m = \lambda g$. Então temos:*

1. $\frac{1}{2}\Delta|X|^2 = |\nabla X|^2 - Ric(X,X) + \frac{2}{m}|X|^2 divX.$
2. $\frac{1}{2}\Delta_X|X|^2 = |\nabla X|^2 - \lambda|X|^2 + \frac{1}{m}|X|^2(2divX - |X|^2).$
3. *Se M^n é compacta e $\nabla X = 0$, então $X = 0$.*

Demonstração: Sendo $\operatorname{div} g = 0$, temos que

$$\operatorname{div}Ric + \frac{1}{2}\operatorname{div}\mathcal{L}_X g - \frac{1}{m}\operatorname{div}(X^\flat \otimes X^\flat) = 0.$$

Usando a identidade de Bianchi (contraída 2 vezes), $\nabla R = 2\operatorname{div}Ric$, vamos deduzir

$$\nabla R + \operatorname{div}\mathcal{L}_X g - \frac{2}{m}\operatorname{div}X X^\flat - \frac{2}{m}(\nabla|X|^2)^\flat = 0.$$

Em particular, para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ temos

$$\langle \nabla R, Z\rangle + \operatorname{div}(\mathcal{L}_X g)(Z) - \frac{2}{m}X^\flat(Z)\operatorname{div}X - \frac{1}{m}(\nabla|X|^2)^\flat(Z) = 0.$$

Portanto, fazendo $Z = X$ obtemos

$$\operatorname{div}(\mathcal{L}_X g)(X) = -\langle \nabla R, X\rangle + \frac{2}{m}\operatorname{div}X X^\flat(X) + \frac{1}{m}\mathcal{L}_X g(X,X). \tag{4.8}$$

Agora vamos usar a relação $\nabla R + \nabla \operatorname{div}X = \frac{1}{m}\nabla|X|^2$, juntamente com o Lema 1.3 e a equação (4.8) para obter

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|X|^2 &= |\nabla X|^2 - Ric(X,X) - D_X\mathrm{div}X + \frac{1}{m}\mathcal{L}_X g(X,X) + D_X\mathrm{div}X \\
&- \frac{1}{m}X(|X|^2) + \frac{2}{m}\mathrm{div}X X^\flat(X).
\end{aligned}
$$

Usando o Lema 3.1 concluímos o primeiro item do lema.

Observe que o segundo item do lema, segue imediatamente do primeiro item e a equação fundamental (4.4).

Para provarmos o terceiro item, vamos supor que $\nabla X = 0$, assim temos que $|X|$ é constante, além disso $\mathrm{div}X = 0$. Usando o primeiro item do lema, obtemos que $Ric(X,X) = 0$. Usando a equação (4.4) deduzimos

$$
\frac{1}{m}|X|^4 + \lambda|X|^2 = 0. \tag{4.9}
$$

Se λ é não negativo obtemos o resultado. Caso contrário, assuma por contradição que $X \neq 0$. De fato, a equação (4.9) implica $\lambda = -\frac{1}{m}|X|^2$. Assim obtemos

$$
Ric(X,Y) = \frac{1}{m}X^\flat(X)X^\flat(Y) - \frac{1}{m}|X|^2 g(X,Y) = 0, \tag{4.10}
$$

para qualquer Y. Assim, vamos concluir que M^n é Ricci flat. Por outro lado, se consideramos Y um vetor não nulo ortogonal a X obtemos que

$$
Ric(Y,Y) = \frac{1}{m}\big(\langle X,Y\rangle^2 - |X|^2|Y|^2\big) = -\frac{1}{m}|X|^2|Y|^2 < 0,
$$

o que é uma contradição. Então, $\lambda < 0$, também implicará $X = 0$, finalizando a prova do lema. $\square$

Considerando $X = \nabla f$ no Lema anteriori e fazendo $\Delta_f = \Delta_{\nabla f}$, vamos obter o seguinte corolário.

Corolário 4.1 *Sob as condições do Lemma 4.1, se considerarmos $X = \nabla f$, então as seguintes equações ocorrem:*

1. $\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |\nabla\nabla f|^2 - Ric(\nabla f, \nabla f) + \frac{2}{m}|\nabla f|^2\Delta f$.

2. $\frac{1}{2}\Delta_f|\nabla f|^2 = |\nabla\nabla f|^2 - \lambda|\nabla f|^2 + \frac{1}{m}|\nabla f|^2(2\Delta f - |\nabla f|^2)$.

Escrevendo a equação principal (4.3) em notação tensorial:

$$R_{ij} + \nabla_i\nabla_j f - \frac{1}{m}(df \otimes df)_{ij} = \lambda g_{ij}, \tag{4.11}$$

temos o seguinte Lema.

Lema 4.2 *Seja $(M^n,\, g,\, \nabla f)$ uma variedade Riemanniana satisfazendo $Ric^m_{\nabla f} = \lambda g$. Então as seguintes equações ocorrem:*

1. $\frac{1}{2}\nabla_i R = \frac{m-1}{m} R_{ij}\nabla^j f + \frac{1}{m}(R-(n-1)\lambda)\nabla_i f.$
2. $\nabla_k R_{ij} - \nabla_j R_{ik} = R_{ijks}\nabla^s f + \frac{1}{m}(R_{ij}\nabla_k f - R_{ik}\nabla_j f) - \frac{\lambda}{m}(g_{ij}\nabla_k f - g_{ik}\nabla_j f).$
3. $\nabla(R+|\nabla f|^2 - 2\lambda f) = \frac{2}{m}\{\nabla_{\nabla f}\nabla f + (|\nabla f|^2 - \Delta f)\nabla f\}$

Demonstração: Para a provarmos o primeiro item basta usarmos a fórmula (3.12) do Lema 3.2 de [13], por completude irei apresentar uma prova para este item. Para obtermos o item (1), fazemos o uso da segunda identidade de Bianchi (contraída 2 vezes), equação (4.11) e a identidade de Ricci. De fato, a partir desses dados temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\nabla_{\mathrm{i}}\mathrm{R} = \mathrm{divRic}_i &= g^{jk}\nabla_k R_{ij}\\
&= -g^{jk}\nabla_k\nabla_i\nabla_j f + \frac{1}{m}g^{jk}\nabla_k[(df\otimes df)_{ij}]\\
&= -g^{jk}\nabla_i\nabla_k\nabla_j f - g^{jk}R_{kijs}\nabla^s f + \frac{1}{m}g^{jk}\nabla_k[(df\otimes df)_{ij}]\\
&= -\nabla_i\Delta f - R_{is}\nabla^s f + \frac{1}{m}\Delta f\nabla_i f + \frac{1}{m}\nabla_{\nabla f}\nabla f\\
&= -R_{is}\nabla^s f - \nabla_i(-R+\lambda n + \frac{1}{m}|\nabla f|^2) + \frac{1}{m}\Delta f\nabla_i f + \frac{1}{m}\nabla_{\nabla f}\nabla f\\
&= -R_{is}\nabla^s f + \nabla_i R - \frac{1}{m}\nabla_i|\nabla f|^2 + \frac{1}{m}\Delta f\nabla_i f + \frac{1}{m}\nabla_{\nabla f}\nabla f.
\end{aligned}$$

Assim

$$\frac{1}{2}\nabla_{\mathrm{i}}\mathrm{R} = \mathrm{R_{ij}}\nabla^{\mathrm{j}}\mathrm{f} - \frac{1}{\mathrm{m}}\Delta\mathrm{f}\nabla_{\mathrm{i}}\mathrm{f} + \frac{1}{\mathrm{m}}\nabla_{\nabla\mathrm{f}}\nabla\mathrm{f}. \tag{4.12}$$

Por outro lado, usando a equação (4.11) na notação de $(1,1)$-tensor, temos

$$\mathrm{Ric}(\nabla\mathrm{f}) + \nabla^2\mathrm{f}(\nabla\mathrm{f}) - \frac{1}{\mathrm{m}}|\nabla\mathrm{f}|^2\nabla\mathrm{f} = \lambda\nabla\mathrm{f}, \tag{4.13}$$

e

$$\nabla_{\nabla\mathrm{f}}\nabla\mathrm{f} = \lambda\nabla\mathrm{f} + \frac{1}{\mathrm{m}}|\nabla\mathrm{f}|^2\nabla\mathrm{f} - \mathrm{Ric}(\nabla\mathrm{f}). \tag{4.14}$$

Agora, as equações (4.12), (4.13) e (4.14), nos permitem concluir

$$\frac{1}{2}\nabla_{\mathrm{i}}\mathrm{R} = \mathrm{R}_{\mathrm{ij}}\nabla^{\mathrm{j}}\mathrm{f} - \frac{1}{\mathrm{m}}\Delta\mathrm{f}\nabla_{\mathrm{i}}\mathrm{f} + \frac{1}{\mathrm{m}}(\lambda\nabla\mathrm{f} + \frac{1}{\mathrm{m}}|\nabla\mathrm{f}|^2\nabla\mathrm{f} - \mathrm{Ric}(\nabla\mathrm{f})). \tag{4.15}$$

Agora vamos usar o traço da equação fundamental e a equação (4.15) para obtermos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\nabla_i R &= \frac{m-1}{m}R_{ij}\nabla^j f + \frac{1}{m}(R - \frac{1}{m}|\nabla f|^2 - \lambda n)\nabla_i f \\ &+ \frac{1}{m}\lambda\nabla_i f + \frac{1}{m^2}|\nabla f|^2\nabla_i f, \end{aligned}$$

o que prova o item (1).

Provemos agora o item (2). Usando a equação (4.11) obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_k R_{ij} - \nabla_j R_{ik} &= -(\nabla_k\nabla_j\nabla_i f - \nabla_j\nabla_k\nabla_i f) \\ &+ \frac{1}{m}(\nabla_k\nabla_i f\nabla_j f + \nabla_k\nabla_j f\nabla_i f - \nabla_j\nabla_i f\nabla_k f - \nabla_j\nabla_k f\nabla_i f) \\ &= R_{ijks}\nabla^s f + \frac{1}{m}(R_{ij}\nabla_k f - R_{ik}\nabla_j f) - \frac{\lambda}{m}(g_{ij}\nabla_k f - g_{ik}\nabla_j f), \end{aligned}$$

onde usamos a identidade de Ricci na última igualdade para obtermos a equação (2).

Finalmente, vamos provar o último item do lema. De fato, pelo item (1) e (4.11) vamos deduzir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\nabla(R + |\nabla f|^2) &= \frac{m-1}{m}Ric(\nabla f) + \frac{1}{m}(R - (n-1)\lambda)\nabla f + \nabla_{\nabla f}\nabla f \\ &= Ric(\nabla f) + \nabla_{\nabla f}\nabla f - \frac{1}{m}Ric(\nabla f) + \frac{1}{m}(R - (n-1)\lambda)\nabla f \\ &= \frac{1}{m}|\nabla f|^2\nabla f + \lambda\nabla f - \frac{1}{m}Ric(\nabla f) + \frac{1}{m}(R - (n-1)\lambda)\nabla f. \end{aligned}$$

Assim, usando que $R - n\lambda = \frac{1}{m}|\nabla f|^2 - \Delta f$ obtemos

$$\begin{aligned} \nabla(R + |\nabla f|^2 - 2\lambda f) &= \frac{2}{m}\{\big(|\nabla f|^2 + R - n\lambda + \lambda\big)\nabla f - Ric(\nabla f)\} \\ &= \frac{2}{m}\{(|\nabla f|^2 + \frac{1}{m}|\nabla f|^2 - \Delta f + \lambda)\nabla f - Ric(\nabla f)\} \\ &= \frac{2}{m}\{(|\nabla f|^2 - \Delta f)\nabla f + \frac{1}{m}|\nabla f|^2\nabla f + \lambda\nabla f - Ric(\nabla f)\} \\ &= \frac{2}{m}\{(|\nabla f|^2 - \Delta f)\nabla f + \nabla_{\nabla f}\nabla f\}, \end{aligned}$$

o que conclui a prova do lema. $\square$

É importante observar que se $m=\infty$ no terceiro item do Lema anterior, obtemos uma identidade clássica conhecida como equação de Hamilton [19] para solitons de Ricci:

$$R+|\nabla f|^2-2\lambda f=C, \tag{4.16}$$

onde C é uma constante.

Como consequência do Lema anterior temos o seguinte corolário.

Corolário 4.2 *Seja* $(M^n,\, g,\, \nabla f)$ *uma variedade Riemanniana satisfazendo* $Ric^m_{\nabla f}=\lambda g$. *Então as seguintes fórmulas ocorrem:*

1. $\frac{1}{2}\langle\nabla R,\nabla f\rangle=\frac{m-1}{m}Ric(\nabla f,\nabla f)+\frac{1}{m}(R-(n-1)\lambda)|\nabla f|^2$.

2. $\frac{1}{2}|\nabla R|^2=\frac{m-1}{m}Ric(\nabla f,\nabla R)+\frac{1}{m}(R-(n-1)\lambda)\langle\nabla f,\nabla R\rangle$.

Demonstração: Escolha $Z\in\mathfrak{X}(M)$ no item (1) do lema anterior para deduzirmos

$$\frac{1}{2}\langle\nabla R,Z\rangle=\frac{m-1}{m}Ric(\nabla f,Z)+\frac{1}{m}(R-(n-1)\lambda)\langle\nabla f,Z\rangle, \tag{4.17}$$

portanto, o corolário segue. $\square$

Agora iremos provar o Lema principal desta seção.

Lema 4.3 *Seja* $\big(M^n,\, g,\, \nabla f\big)$ *uma variedade Riemanniana satisfazendo* $Ric^m_{\nabla f}=\lambda g$. *Então*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta R \;=\; -&\quad Ric(\nabla f,\nabla f)-|\nabla^2 f-\frac{(\Delta f)}{n}g|^2-\frac{(\Delta f)^2}{n}+\lambda\Delta f+\langle\nabla R,\nabla f\rangle\\ +&\quad \frac{1}{m}\Big\{|\nabla f|^2\Delta f+div(\nabla_{\nabla f}\nabla f-\nabla f\Delta f)\Big\}.\end{aligned} \tag{4.18}$$

Demonstração: Inicialmente vamos calcular o divergente da identidade (3) do Lema 4.2 para obtermos

$$\Delta R+\Delta|\nabla f|^2-2\lambda\Delta f=\frac{2}{m}\Big\{\langle\nabla(|\nabla f|^2-\Delta f),\nabla f\rangle+(|\nabla f|^2-\Delta f)\Delta f+\mathrm{div}(\nabla_{\nabla f}\nabla f)\Big\}.$$

Usando a fórmula de Bochner: $\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2=Ric(\nabla f,\nabla f)+|\nabla^2 f|^2+\langle\nabla f,\nabla\Delta f\rangle$, e escrevendo $|\nabla f|^2=|\nabla f-\frac{(\Delta f)}{n}g|^2-\frac{1}{n}(\Delta f)^2$ temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta R &= -\mathrm{Ric}(\nabla f,\nabla f)-|\nabla^2 f-\frac{\Delta f}{n}g|^2-\frac{(\Delta f)^2}{n}+\lambda\Delta f-\langle\nabla\Delta f,\nabla f\rangle\\ &+ \frac{2}{m}\langle\nabla_{\nabla f}\nabla f,\nabla f\rangle+\frac{1}{m}\Big\{(|\nabla f|^2-\Delta f)\Delta f-\langle\nabla\Delta f,\nabla f\rangle+\mathrm{div}(\nabla_{\nabla f}\nabla f)\Big\}.\end{aligned}$$

Prosseguindo, vamos usar a equação (4.6) para escrever

$$\langle\nabla\Delta f,\nabla f\rangle=\langle\nabla\big(n\lambda+\frac{1}{m}|\nabla f|^2-R\big),\nabla f\rangle=\frac{2}{m}\langle\nabla_{\nabla f}\nabla f,\nabla f\rangle-\langle\nabla R,\nabla f\rangle.$$

Então, a última relação para $\frac{1}{2}\Delta R$, torna-se

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta R &= -Ric(\nabla f,\nabla f)-|\nabla^2 f-\frac{\Delta f}{n}g|^2-\frac{(\Delta f)^2}{n}+\lambda\Delta f+\langle\nabla R,\nabla f\rangle\\ &+ \frac{1}{m}\Big\{(|\nabla f|^2-\Delta f)\Delta f-\langle\nabla\Delta f,\nabla f\rangle+\mathrm{div}(\nabla_{\nabla f}\nabla f)\Big\}.\end{aligned}$$

Agora vamos usar que $\mathrm{div}(\nabla f\Delta f)=(\Delta f)^2+\langle\nabla\Delta f,\nabla f\rangle$ para obtermos a identidade do lema, o que finaliza a prova do lema.

4.3 Teoremas de rigidez

O primeiro teorema desta seção é uma generalização de resultados obtidos em [31] e [1] para solitons de Ricci.

Teorema 4.1 *Seja* $\big(M^n,\, g,\, X\big)$, $n\geq 3$, *uma variedade Riemanniana compacta satisfazendo* $Ric_X^m=\lambda g$. *Então* (M^n,g) *é uma variedade de Einstein se uma das seguintes condições ocorre:*

1. $\int_M Ric(X,X)\mathrm{dM}\leq\frac{2}{m}\int_M|X|^2\mathrm{div}X\mathrm{dM}$.
2. *X for um campo conforme e* $\int_M Ric(X,X)dM\leq 0$.
3. $|X|$ *é constate e* $\int_M Ric(X,X)\mathrm{dM}\leq 0$.

Demonstração: Primeiramente vamos integrar a equação (1) do Lema 4.1 para deduzir

$$\frac{1}{2}\int_M\Delta|X|^2dM=\int_M|\nabla X|^2dM-\int_M Ric(X,X)dM+\frac{2}{m}\int_M|X|^2divXdM.$$

Isso implica

$$\int_M |\nabla X|^2 dM = \int_M Ric(X,X)dM - \frac{2}{m}\int_M |X|^2 \mathrm{div} X dM. \tag{4.19}$$

Uma vez que estamos supondo que o lado direito da equação (4.19) é menor ou igual a zero, obtemos $\nabla X = 0$. Assim, a afirmação (3) do Lema 4.1 nos permite concluir o primeiro item.

Prosseguindo, existe ρ em M, para a qual

$$\mathcal{L}_X g = 2\rho g. \tag{4.20}$$

Em particular, $\langle \nabla_X X, X\rangle = \rho |X|^2$. Além disso, tomando o traço em ambos os membros da equação 4.20 vamos obter que

$$\mathrm{div}\,\mathrm{X} = n\rho. \tag{4.21}$$

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(\mathrm{X}|\mathrm{X}|^2) &= |X|^2 \mathrm{divX} + 2\langle \nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{X}, \mathrm{X}\rangle \\ &= (n+2)\rho |X|^2. \end{aligned}$$

Sendo M^n compacta, usamos a fórmula de Stokes para concluir

$$\int_M \rho |X|^2 \mathrm{dM} = 0. \tag{4.22}$$

Assim, usando este resultado juntamente com a equação (4.19), concluímos que $\nabla X = 0$, uma vez que estamos assumindo que $\int_M Ric(X,X)dM \leq 0$. Portando, usando a afirmação (3) do Lema 4.1, vamos concluir que M^n é uma variedade de Einstein.

Finalmente, se $|X|$ é constante, podemos aplicar a fórmula de Stokes a equação (4.19) para deduzir

$$\int_M |\nabla X|^2 \mathrm{dM} = \int_M Ric(X,X)\mathrm{dM}. \tag{4.23}$$

O que conclui a prova do teorema.

□

Observação 4.1 *Observe que para $n = 2$, podemos escrever a equação (4.19) da seguinte forma*

$$\int_M |\nabla X|^2 \mathrm{dM} = \frac{1}{2}\int_M K|X|^2 \mathrm{dM} - \frac{2}{m}\int_M |X|^2 \mathrm{div} X \mathrm{dM}, \tag{4.24}$$

onde K é a curvatura Gaussiana. Em particular, temos:

- *If $|X|$ é uma constante não nula, então M^2 tem gênero zero ou um.*
- *If X é um campo conforme não trivial e K é constante, então M^2 é isométrica a $\mathbb{S}^2(r)$.*

Para provarmos o próximo teorema relembre de um resultado devido a Yau [37], que é uma generalização do Teorema de Hopf: uma função subharmônica $f : M^n \to \mathbb{R}$ definida em uma variedade Riemanniana não compacta é constante, se o seu gradiente pertence a $\mathrm{L}^1(M^n)$. Recentemente este resultado foi extendido por Camargo et al. [10] para um campo X. Tal generalização é dada pela seguinte proposição.

Proposição 4.1 *Seja X um campo de vetores em uma variedade Riemanniana completa, não compacta e orientada M^n, tal que o $\mathrm{div}\, X$ não mude de sinal em M. Se $|X| \in \mathcal{L}^1(M)$, então $\mathrm{div}\, X = 0$ em M.*

Usando esta generalização provaremos o seguinte teorema.

Teorema 4.2 *Seja $\big(M^n,\, g,\, X\big)$ uma variedade Riemanniana completa não compacta satisfazendo $Ric_X^m = \lambda g$. Se $n\lambda \geq R$ e $|X| \in \mathrm{L}^1(M^n)$, então M^n é uma variedade de Einstein.*

Demonstração: Levando em conta que $Ric_X^m = \lambda g$, então pela equação (4.5) obtemos

$$m\mathrm{div} X = |X|^2 + m(n\lambda - R). \tag{4.25}$$

Assim, se $(n\lambda - R) \geq 0$, então temos $m\mathrm{div}X \geq 0$. Por outro lado, se $|X| \in L^1(M)$, vamos usar a Proposição 1 em [10] para concluir que $\mathrm{div}X = 0$. Prosseguindo, podemos usar a equação (4.25) para concluir que $X \equiv 0$ bem como $n\lambda = R$. Portanto, (M^n, g) é uma varidade de Einstein e assim finalizamos a prova do teorema. $\square$

4.4 Fórmulas integrais e aplicações

Nesta seção vamos provar algumas fórmulas integrais para variedades quasi-Einstein compacta. Em particular, essas fórmulas integrais no caso m infinito (soliton de Ricci) foram obtidas pelo autor em [1]. Essas fórmulas permitirão concluir alguns resultados de rigidez para tal classe de variedades.

Teorema 4.3 *Seja* $\big(M^n,\, g,\, \nabla f\big)$ *uma variedade Riemanniana satisfazendo* $Ric_{\nabla f}^m = \lambda g$*. Então temos*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta_f R &= -|\nabla^2 f - \frac{(\Delta f)}{n}g|^2 - \frac{(\Delta f)^2}{n} + \lambda\Delta f + \frac{1}{2}\langle\nabla f, \nabla R\rangle + \frac{1}{2}\langle\nabla f, \nabla\Delta f\rangle \\ &+ \frac{1}{m}\mathrm{div}\big(\nabla_{\nabla f}\nabla f - \Delta f\nabla f\big).\end{aligned}$$

Demonstração: Primeiramente vamos usar o Lema 4.3 para deduzir a seguinte equação

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta R - \frac{1}{2}\langle\nabla R, \nabla f\rangle = -\ & Ric(\nabla f, \nabla f) - |\nabla^2 f - \frac{(\Delta f)}{n}g|^2 - \frac{(\Delta f)^2}{n} + \lambda\Delta f \\ & + \frac{1}{2}\langle\nabla R, \nabla f\rangle + \frac{1}{m}|\nabla f|^2\Delta f \\ & + \frac{1}{m}\mathrm{div}(\nabla_{\nabla f}\nabla f - \nabla f\Delta f). \qquad (4.26)\end{aligned}$$

Agora, usando a definição do operador difusão e substituindo a identidade (1) do Corolário 4.2 na equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta_f R = -\ & Ric(\nabla f, \nabla f) - |\nabla^2 f - \frac{(\Delta f)}{n}g|^2 - \frac{(\Delta f)^2}{n} + \lambda\Delta f \\ + \ & \frac{m-1}{m}Ric(\nabla f, \nabla f) + \frac{1}{m}(R - (n-1)\lambda)|\nabla f|^2 + \frac{1}{m}|\nabla f|^2\Delta f \\ + \ & \frac{1}{m}\mathrm{div}(\nabla_{\nabla f}\nabla f - \nabla f\Delta f).\end{aligned}$$

Por isto vamos deduzir

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta_f R &= -|\nabla^2 f - \frac{(\Delta f)}{n}g|^2 - \frac{(\Delta f)^2}{n} + \lambda\Delta f - \frac{1}{m}Ric(\nabla f, \nabla f) \\ &+ \frac{1}{m}(R + \Delta f - n\lambda)|\nabla f|^2 + \frac{1}{m}\lambda|\nabla f|^2 + \frac{1}{m}\mathrm{div}(\nabla_{\nabla f}\nabla f - \nabla f\Delta f).\end{aligned}$$

Assim, usando $R + \Delta f - n\lambda = \frac{1}{m}|\nabla f|^2$, vamos obter

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta_f R &= -|\nabla^2 f - \frac{(\Delta f)}{n}g|^2 - \frac{(\Delta f)^2}{n} + \lambda\Delta f \\ &+ \frac{1}{m}\Big\{ - Ric(\nabla f, \nabla f) + \frac{1}{m}|\nabla f|^4 + \lambda|\nabla f|^2 + \mathrm{div}(\nabla_{\nabla f}\nabla f - \nabla f\Delta f)\Big\}.\end{aligned}$$

Por outro lado, usando a equação (4.4) com $X = \nabla f$, temos

$$-Ric(\nabla f,\nabla f)+\frac{1}{m}|\nabla f|^4+\lambda|\nabla f|^2 = \langle \nabla_{\nabla f}\nabla f,\nabla f\rangle = \frac{m}{2}\big(\langle \nabla f,\nabla R\rangle+\langle \nabla f,\nabla f\rangle\big), \tag{4.27}$$

na última igualdade usamos a equação (4.7). Substituindo isso na fórmula acima para $\Delta_f R$, obtemos a expressão procurada, assim, concluímos a prova do teorema. □

Como uma consequêcia do teorema anterior, temos as seguintes fórmulas integrais.

Corolário 4.3 *Seja $\big(M^n,\, g,\, \nabla f\big)$ uma variedade Riemanniana compacta satisfazendo $Ric^m_{\nabla f} = \lambda g$. Então:*

1. $\int_M |\nabla^2 f - \frac{(\Delta f)}{n}g|^2 \mathrm{dM} = \int_M \langle \nabla f,\nabla R\rangle \mathrm{dM} + \frac{n+2}{2n}\int_M \langle \nabla f,\nabla\Delta f\rangle \mathrm{dM}.$
2. $\int_M |\nabla^2 f - \frac{(\Delta f)}{n}g|^2 \mathrm{dM} + \frac{n+2}{2n}\int_M (\Delta f)^2 \mathrm{dM} = \int_M \langle \nabla f,\nabla R\rangle \mathrm{dM}.$
3. $\int_M Ric(\nabla f,\nabla f)\mathrm{dM} + \int_M \langle \nabla f,\nabla R\rangle \mathrm{dM} = \frac{3}{2}\int_M (\Delta f)^2 \mathrm{dM}.$
4. *M^n é uma variedade de Einstein, se $\int_M \langle \nabla R,\nabla f\rangle \mathrm{dM} \le 0$.*
5. *Suponha que f é não constante e exista $\mu : M^n \to \mathbb{R}$ solução da equação $\frac{n+2}{2n}\Delta f + R = \mu$, tal que $\mu \perp \Delta f$, no produto interno do L^2. Então M^n é conformemente equivalente a uma esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n$, mas não isométrica.*

Demonstração: Sendo M^n compacta, podemos o usar o Teorema 4.3 e fórmula de Stokes para obtermos

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla^2 f - \frac{(\Delta f)}{n}g|^2 \mathrm{dM} &= \int_M \big(\lambda - \frac{\Delta f}{n}\big)\Delta f \mathrm{dM} + \int_M \langle \nabla f,\nabla R\rangle \mathrm{dM}\\ &+ \frac{1}{2}\int_M \langle \nabla f,\nabla(R+\Delta f)\rangle \mathrm{dM}.\end{aligned}$$

Prosseguindo, usamos a relação (4.6) para escrever

$$\int_M \big(\lambda - \frac{\Delta f}{n}\big)\Delta f \mathrm{dM} = \frac{1}{n}\int_M \big(R - \frac{1}{m}|\nabla f|^2\big)\Delta f \mathrm{dM}.$$

Então, a fórmula de Stokes nos permite concluir que

$$\frac{1}{n}\int_M \big(R-\frac{1}{m}|\nabla f|^2\big)\Delta f\mathrm{dM}=-\frac{1}{n}\int_M\langle\nabla f,\nabla R\rangle\mathrm{dM}+\frac{1}{nm}\int_M\langle\nabla f,\nabla|\nabla f|^2\rangle\mathrm{dM}.$$

Por outro lado, observe que a equação (4.6) implica $\nabla\big(R+\Delta f\big)=\frac{1}{m}\nabla\big(|\nabla f|^2\big)$. Usando a equação anterior, obtemos

$$\int_M|\nabla^2 f-\frac{(\Delta f)}{n}g|^2\mathrm{dM}=\int_M\langle\nabla f,\nabla R\rangle\mathrm{dM}+\frac{n+2}{2n}\int_M\langle\nabla f,\nabla\Delta f\rangle\mathrm{dM}, \quad (4.28)$$

o que prova o primeiro item.

Agora, sendo $\int_M\langle\nabla f,\nabla\Delta f\rangle\mathrm{dM}=-\int_M(\Delta f)^2\mathrm{dM}$, obtemos da equação (4.28) que

$$\int_M|\nabla^2 f-\frac{(\Delta f)}{n}g|^2\mathrm{dM}=\int_M\langle\nabla f,\nabla R\rangle\mathrm{dM}-\frac{n+2}{2n}\int_M(\Delta f)^2\mathrm{dM}, \quad (4.29)$$

o que prova o segundo item.

Prosseguindo, vamos integrar a fórmula de Bochner para deduzir:

$$\int_M Ric(\nabla f,\nabla f)\mathrm{dM}+\int_M|\nabla^2 f|^2\mathrm{dM}+\int_M\langle\nabla f,\nabla\Delta f\rangle\mathrm{dM}=0. \quad (4.30)$$

Sendo $\int_M|\nabla^2 f-\frac{(\Delta f)}{n}g|^2\mathrm{dM}=\int_M|\nabla^2 f|^2\mathrm{dM}-\frac{1}{n}\int_M(\Delta f)^2\mathrm{dM}$, usando novamente a fórmula de Stokes temos

$$\int_M Ric(\nabla f,\nabla f)\mathrm{dM}+\int_M|\nabla^2 f-\frac{(\Delta f)}{n}g|^2\mathrm{dM}=\frac{n-1}{n}\int_M(\Delta f)^2\mathrm{dM}. \quad (4.31)$$

Agora, comparando a equação (4.31) com o segundo item, obtemos

$$\int_M\{Ric(\nabla f,\nabla f)+\langle\nabla f,\nabla R\rangle\}\mathrm{dM}=\frac{3}{2}\int_M(\Delta f)^2\mathrm{dM},$$

como procurado.

Por outro lado, se $\int_M\langle\nabla R,\nabla f\rangle\mathrm{dM}\le 0$, em particular, isso ocorre se R for constante, vamos deduzir, pelo segundo item, que

$$\int_M\langle\nabla R,\nabla f\rangle\mathrm{dM}=0 \quad (4.32)$$

e

$$\int_M|\nabla^2 f-\frac{(\Delta f)}{n}g|^2\mathrm{dM}+\frac{n+2}{2n}\int_M(\Delta f)^2\mathrm{dM}=0. \quad (4.33)$$

Isto implica $\nabla^2 f = \frac{1}{n}(\Delta f)g$ e $\Delta f = 0$. Assim, podemos aplicar o Teorema de Hopf para concluir que f é constante, o que implica (M^n, g) ser uma variedade de Einstein.

Finalmente, observe que $\int_M |\nabla^2 f - \frac{(\Delta f)}{n} g|^2 \mathrm{dM} = \int_M \langle \nabla f, \nabla\big(\frac{n+2}{2n}\Delta f + R\big)\rangle \mathrm{dM}$. Assim, se $\frac{n+2}{2n}\Delta f + R = \mu$, com $\int_M \mu\Delta f \mathrm{dM} = 0$, temos $\nabla^2 f = \frac{1}{n}(\Delta f)g$. Sendo f não constante, podemos aplicar o Teorema 2 devido a Tashiro [33], para concluir que M^n é conformemente equivalente a esfera unitária $\mathbb{S}^n$. Além disso, se tivermos uma isometria entre M^n e $\mathbb{S}^n$, então sua curvatura escalar R será constante. Pela pirmeira identidade deste corolário, vamos concluir que $\int_M |\nabla^2 f - \frac{(\Delta f)}{n} g|^2 \mathrm{dM} + \frac{n+2}{2n}\int_M (\Delta f)^2 \mathrm{dM} = 0$. Então, pela afimação anterior teríamos f constante, o que é uma contradição. Assim, completamos a prova do corolário.

Como uma consequência deste corolário, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 4.4 *Seja $\big(M^n,\, g,\, \nabla f\big)$ uma variedade Riemanniana compacta satisfazendo $Ric^m_{\nabla f} = \lambda g$. Então ∇f não pode ser um campo conforme não trivial.*

Demonstração: Suponha que ∇f é um campo conforme não trivial, i.e. $\mathcal{L}_{\nabla f} g = 2\rho g$ com ρ não constante. Portanto, podemos aplicar o Teorema $II.9$ de [8] para deduzir que

$$\int_M \mathcal{L}_{\nabla f} R \mathrm{dM} = \int_M \langle \nabla f, \nabla R\rangle \mathrm{dM} = 0. \tag{4.34}$$

Então, o corolário anterior nos permite concluir a prova.

Observação 4.2 *É importante comentar que $\int_M \langle\nabla f, \nabla R\rangle dM = 0$ em dimensão dois para m finito é sempre válida. De fato, sendo $\nabla(e^{-\frac{f}{m}})$ um campo conforme e a integral de Dirichlet é um invariante conforme, a afirmação segue do Teorema $II.9$ em [8]. Portanto, se $\big(M^2,\, g,\, \nabla f\big)$ é uma variedade quasi-Einstein compacta, então é trivial pelo corolário 4.3, veja também [13] e [21].*

4.5 Um Teorema de Caracterização

Para esta seção, considere $\big(M^n,\, g,\, \nabla f\big)$ uma variedade Riemanniana compacta satisfazendo $Ric^m_{\nabla f} = \lambda g$ com m finito, assim podemos considerar a função positiva $u : M^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$u = e^{-\frac{f}{m}}.$$

Nessas condições, obtemos o seguinte teorema.

Teorema 4.4 *Uma variedade quasi-Einstein compacta não-trivial* $\big(M^n,\, g,\, \nabla f\big)$, *com* $n > 2$, *é isométrica a uma esfera* $\mathbb{S}^n$, *se uma das seguintes condições ocorre.*

1. ∇u *é um campo conforme.*
2. $\int_M Ric(\nabla u, \nabla u)\mathrm{dM} \geq \frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}} \int_{\mathrm{M}} (\Delta \mathrm{u})^2 \mathrm{dM}.$

Demonstração: De fato, note que $u = e^{-\frac{f}{m}}$, então

$$\nabla u = -\frac{1}{m} e^{-\frac{f}{m}} \nabla f$$

e

$$Hessf - \frac{1}{m} df \otimes df = -\frac{m}{u} Hessu.$$

Portanto, sendo f não constante, temos que ∇u é um campo conforme não-trivial. Assim, podemos escrever $\mathcal{L}_{\nabla u} g = 2\frac{\Delta u}{n} g$. Usando a equação fundamental (4.3) temos que

$$Ric = (\lambda + m\frac{\Delta u}{nu})g.$$

Portanto, M^n é uma variedade de Einstein. Além disso, sendo $n > 2$, temos pelo Lema de Schur que $R = n\lambda + m\frac{\Delta u}{u}$ é constante. Por outro lado, a fórmula (5.38), (p.26 de [36]), nos diz que

$$n\mathcal{L}_{\nabla u} R = -2(n-1)\Delta(\Delta u) - 2R\Delta u,$$

se supusermos que $R = 0$, obtemos que u é constante, o que é uma contradição. Portanto, $R \neq 0$. Agora, podemos aplicar o Teorema (6.1) (p.27 de [36]) para concluir que M^n é isométrica a esfera $\mathbb{S}^n$, o que prova o primeiro item.

Agora, levando em conta novamente que M^n é compacta, podemos integrar a fórmula de Bochner e obtermos

$$\int_M |\nabla^2 u - \frac{\Delta u}{n} g|^2 \mathrm{dM} = \frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}} \int_{\mathrm{M}} (\Delta \mathrm{u})^2 \mathrm{dM} - \int_{\mathrm{M}} \mathrm{Ric}(\nabla \mathrm{u}, \nabla \mathrm{u}) \mathrm{dM}.$$

Portanto, temos que $\int_M |\nabla^2 u - \frac{\Delta u}{n} g|^2 \mathrm{dM} = 0$.

Observe ainda que

$$Ric - \frac{R}{n} g = \frac{m}{u} (\nabla^2 - \frac{\Delta u}{n} g), \tag{4.35}$$

assim, $Ric = \frac{R}{n} g$ e ∇u é um campo conforme não-trivial. Portanto, estamos nas condições da prova do item anterior, o que nos permite concluir que M^n é isométrica a esfera $\mathbb{S}^n$, o que finaliza a prova do teorema. $\square$

Bibliografia

[1] AQUINO, C.; BARROS, A.; RIBEIRO JR., E. Some applications of the Hodge-de Rham decomposition to Ricci solitons. *Results in Mathematics*, v.60, n. 1-4, p.235-246, 2011.

[2] BARD, P.; DANIELO, L. Three-dimensional Ricci solitons which project to surfaces. *J. Reine Angew. Math.*, v. 608, p. 65-71, 2007.

[3] BARROS, A.; RIBEIRO JR, E. Some characterizations for compact almost Ricci solitons. *Proc. of the American Mathematical Society*, DOI: 10.1090/S0002-9939-2011-11029-3, 2011.

[4] BARROS, A.; RIBEIRO JR, E. Integral formulae for quasi-Einstein manifolds and applications. *To appear on Glasgow Mathematical Journal*, 2011.

[5] BARROS, A.; RIBEIRO JR, E. Rigidity of generalized m-quasi-Einstein manifolds. Submitted, 2011.

[6] BARROS, A.; RIBEIRO JR, E. Rigidity and compactness on almost Ricci soliton. Submitted, 2011.

[7] BATISTA, M. Rigidez de solitons gradiente. 2010, 74 f. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Ceará, Pós-graduação em Matemática, Fortaleza, 2010.

[8] BOURGUIGNON, J.P.; EZIN, J.P. Scalar curvature functions in a conformal class of metrics and conformal transformations. *Transctions of AMS*, v. 301 , p. 723-736, 1987.

[9] CARMO, M. P. do. *Geometria Riemanniana.* 3° ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. (Projeto Euclides).

[10] CAMARGO, F; CAMINHA, A.; SOUZA, P. Complete foliations of space forms by hypersurfaces. *Bull. Braz. Math Soc.*, v. 41, p. 339-353, 2010 .

[11] CAO, H.-D. Recent progress on Ricci soliton. Preprint, arXiv:0908.2006, 2009.

[12] CASE, J. On the nonexistence of quasi-Einstein metrics. *Pacif J. Math.* v. 248, p. 227-284, 2010.

[13] CASE, J.; SHU, Y.; WEI, G. Rigity of quasi-Einstein metrics. *Diff. Geo. and its Applications*, v. 29, p. 93-100, 2010.

[14] CHEN, X.; LU, P.; TIAN, G. A note on uniformization of Riemannian surfaces by Ricci flow. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 134, p. 3391-3393, 2006.

[15] CATINO, G. Generalized quasi-Einstein manifolds with harmonic weyl tensor. arXiv: 1012.5405v1. *To appear on Math. Z.* 2011.

[16] CHOW, B.; KNOPF, D. *The Ricci flow*: an introduction. Providence, RI, American Mathematical Society, 2004. (Mathematical survey and monographs, v.110.)

[17] EMINENTI, M.; LA NAVE, G.; MANTEGAZZA, C. Ricci solitons-The equation point of view. *Manuscripta math.*, v. 127, p. 345-367, 2008.

[18] FERNANDEZ-LOPEZ, M.; GARCIA-RIO, E. A remark on compact Ricci solitons. *Math. Ann.*, v.340, p. 893-896, 2008.

[19] HAMILTON, R.S. The formation of singularities in the Ricci flow, *Surveys in Differential Geometry.* Combridge, MA. International Press, 1995, v. 2, p. 7-136.

[20] ISHIHARA, S.; TASHIRO, Y. On Riemannian manifolds admitting a concircular transformation. *Math. J. Okayama Univ.*, v. 9, p. 19-47, 1959.

[21] KIM, D. S.; KIM, Y. H. Compact Einstein warped product spaces with nonpositive scalar curvature. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 131, p. 2573-2576, 2003.

[22] LEE, J. M. *Introduction to smooth manifolds*. New York, Springer-Verlag, , 2002. (New Yourk Graduate Texts in Mathematics. v. 218.)

[23] LICHNEROWICZ, A. *Géométrie des groupes de transformations*. Paris: Dunod, 1958.

[24] LOTT, J. On the long time behavior of type-III Ricci flow solutions. *Mathematische Annalen.*, v. 339, n. 3, p. 627-666, 2007.

[25] NABER, A. Noncompact shrinking 4-solitons with nonnegative curvature. Preprint, arXiv 0710.5579, 2007.

[26] NAGANA, T.; YANO, K. Einstein spaces admitting a one-parameter group of conformal transformations. *Ann. Math.*, v. 69, p. 55-64, 1959.

[27] OBATA, M. Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric to the sphere. *J. Math. Soc. Japan*, v. 14, p. 333-340, 1962.

[28] O'NEILL, B. *Semi-Riemannian geometry with applications to general relativity*. New York: Academic Press, 1983.

[29] PERELMAN, G. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. Prerpint, arXiv math/0211159, 2002.

[30] PETERSEN, P. *Riemannian geometry*. New York: Springer-Verlag, 1998. (Graduate texts in mathematics, V. 171.)

[31] PETERSEN, P.; WYLIE, W. Rigidity of gradient Ricci solitons. *Pacific J. of Math.*, v. 241, n. 2, p. 329-345, 2009.

[32] PIGOLA, S.; RIGOLI, M.; RIMOLDI, M.; SETTI, A. Ricci Almost Solitons, *To appear on Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa.* arXiv:1003.2945v1 [mathDG], 2010.

[33] TASHIRO, Y. Complete Riemannian manifolds and some vector fields. *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 117, p. 251-275, 1965.

[34] WYLIE, W. Complete shrinking Ricci solitons have finite fundamental group. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 136, p. 1803-1806, 2008.

[35] WARNER, F. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.* New York: Springer-Verlag, 1983.

[36] YANO, K. *Integral formulas in Riemannian geometry.* New York: Marcel Dekker, 1970.

[37] YAU, S.T. Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry. *Indiana Univ. Math.J.*, v. 25, p. 659-670, 1976.