



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

*Entropia e Informação de Sistemas
Quânticos Amortecidos*

Vanderley Aguiar de Lima Júnior

Fortaleza-CE, Brasil

Julho de 2014

Vanderley Aguiar de Lima Júnior

***Entropia e Informação de Sistemas
Quânticos Amortecidos***

Dissertação de mestrado apresentada à Coordenação
do Curso de Pós-Graduação em Física da
Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial
para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador:
Prof. Dr. Ilde Guedes da Silva

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Fortaleza-CE, Brasil

Julho de 2014

Vanderley Aguiar de Lima Júnior

***Entropia e Informação de Sistemas
Quânticos Amortecidos***

Dissertação de mestrado apresentada à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Aprovada em 17 de Julho de 2014.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ilde Guedes da Silva

Departamento de Física – UFC

Orientador

Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho

Departamento de Física – UFC

Prof. Dr. Aércio Ferreira de Lima

Departamento de Física - UFCG

Aos meus pais, à minha noiva e
aos meus irmãos e sobrinha.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, quero agradecer aos meus pais Vanderlei Aguiar de lima e Cícera de Fátima de Sousa Lima, pelo apoio que eles sempre me deram e pelo cuidado de sempre, assim como aos meus irmãos e todos os outros familiares que me ajudaram a chegar hoje aonde cheguei. Agradeço também à minha noiva Angélica Samara Gonçalves Abreu por todo o apoio que ela sempre me deu e por todas as alegrias que compartilhamos.

Agradeço ao professor Ilde Guedes da Silva, que foi fundamental para a realização deste trabalho como orientador, sempre presente desde a minha graduação. Agradeço aos amigos que fiz durante o curso, que muito me ajudaram, dentre eles Augusto Plácido Caixa D'água, Demó crito Sobreira, Deric Albuquerque, Yuri Cruz, Vagner Loiola, Paulo Victor Soares, Fabio Eduardo, Diego Félix, Gabriel Preguiça Oliveira, João Paulo Nogueira, Luan de Castro, Duarte José FC, André Borba, Rivania Teixeira, Francisco Emmanuel e todos os outros não citados aqui (que são muitos). Ao professor do Departamento de Física da UFC, Josué Mendes Filho, que sempre está à disposição quando necessário. À professora do Departamento de Química Mary Anne Sousa Lima e à Diretora do Centro de Ciências da UFC, professora Simone da Silveira Sá Borges, que foram muito prestativas ao me ajudarem a resolver uma última pendência na minha graduação. Agradeço a todos os funcionários do Departamento de Física da UFC, em especial à Dona Creusa e à Rejane Ramos e ao CNPq pelo apoio financeiro. E acima de tudo, a Deus. Em especial, gostaria de agradecer à minha avó Maria do Carmo Rodrigues de Sousa (Vó Peta), que infelizmente já nos deixou, mas que sempre se fez presente na minha vida e contribuiu enormemente para que eu me tornasse quem eu sou hoje em dia.

"A emoção mais antiga e mais forte da humanidade é o medo, e o mais antigo e mais forte de todos os medos é o medo do desconhecido."

H. P. Lovecraft.

Resumo

Neste trabalho analisamos as soluções para a equação de movimento para os osciladores de Lane-Emden, onde a massa é dada por $m(t) = t^\alpha$, onde $\alpha > 0$. Os osciladores de Lane-Emden são osciladores harmônicos amortecidos, onde o fator de amortecimento depende do tempo, $\gamma(t) = \frac{\alpha}{t}$. Obtivemos as expressões analíticas de $q(t)$, $\dot{q}(t)$, and $p(t) = m(t)\dot{q}$ para $\alpha = 2$ e $\alpha = 4$. Discutimos as diferenças entre as expressões da hamiltoniana e da energia para sistemas dependentes do tempo. Também, comparamos nossos resultados com aqueles do oscilador de Caldirola-Kanai.

Usamos o método dos invariantes quânticos e uma transformação unitária para obter a função de onda exata de Schrödinger, $\psi_n(q, t)$, e calcular para $n = 0$ a entropia conjunta (entropia de Leipnik) dependente do tempo e as informações Fisher para posição (F_q) e para o momento (F_p) para duas classes de osciladores harmônicos quânticos amortecidos. Observamos que a entropia de Leipnik não varia no tempo para o oscilador Caldirola-Kanai, enquanto diminui e tende a um valor constante ($\ln\left(\frac{e}{2}\right)$) para tempos assintóticos para o oscilador de Lane-Emden. Isto é devido ao fato de que, para este último, o fator de amortecimento diminui à medida que o tempo aumenta. Os resultados mostram que a dependência do tempo da entropia de Leipnik é bastante complexa e não obedece a uma tendência geral de aumento monotonicamente com o tempo e que F_q aumenta enquanto F_p diminui com o aumento do tempo. Além disso, $F_q F_p$ aumenta e tende a um valor constante ($\frac{4}{\hbar^2}$) no limite em que $t \rightarrow \infty$. Nós comparamos os resultados com os do bem conhecido oscilador de Caldirola-Kanai.

Palavras-chave: Invariantes quânticos. Oscilador harmônico amortecido. Entropia de Leipnik. Informação de Fisher.

Abstract

In this work we analyze the solutions of the equations of motions for two Lane-Emden-type Caldirola-Kanai oscillators. For these oscillators the mass varies as $m(t) = t^\alpha$, where $\alpha > 0$. We obtain the analytical expression of $q(t)$, $\dot{q}(t)$, and $p(t) = m(t)\dot{q}$ for $\alpha = 2$ and $\alpha = 4$. These are damped-like harmonic oscillators with a time-dependent damping factor given by $\gamma(t) = \frac{\alpha}{t}$. We discuss the differences between the expressions for the hamiltonian and the mechanical energy for time-dependent systems. We also compared our results to those of the well-known Caldirola-Kanai oscillators.

We use the quantum invariant method and a unitary transformation to obtain the exact Schrödinger wave function, $\psi_n(q, t)$, and calculate for $n = 0$ the time-dependent joint entropy (Leipnik's entropy) and the position (F_q) and momentum (F_p) Fisher information for two classes of quantum damped harmonic oscillators. We observe that the joint entropy does not vary in time for the Caldirola-Kanai oscillator, while it decreases and tends to a constant value ($\ln\left(\frac{e}{2}\right)$) for asymptotic times for the Lane-Emden ones. This is due to the fact that for the latter, the damping factor decreases as time increases. The results show that the time dependence of the joint entropy is quite complex and does not obey a general trend of monotonously increase with time and that F_q increases while F_p decreases with increasing time. Also, $F_q F_p$ increases and tends to a constant value ($\frac{4}{\hbar^2}$) in the limit $t \rightarrow \infty$. We compare the results with those of the well-known Caldirola-Kanai oscillator.

Keywords: Quantum invariant. Damped harmonic oscillator. Leipnik's entropy. Fisher information.

Sumário

| | |
|---|-----------|
| 1. Introdução | 10 |
| 2. Osciladores harmônicos dependentes do tempo – Soluções clássicas | 15 |
| 2.1 Considerações iniciais | 15 |
| 2.2 Soluções clássicas | 17 |
| 2.2.1 Oscilador de Caldirola-Kanai: $m(t) = m_0 e^{\gamma t}$ e $\omega(t) = \omega_0$ | 17 |
| 2.2.2 Oscilador de Lane-Emden, com $\alpha = 2$: $m(t) = t^2$ e $\omega(t) = \omega_0$..... | 19 |
| 2.2.3 Oscilador de Lane-Emden, com $\alpha = 4$: $m(t) = t^4$ e $\omega(t) = \omega_0$..... | 21 |
| 3. Osciladores harmônicos dependentes do tempo – Soluções quânticas, entropia de Leipnik e informação de Fisher | 28 |
| 3.1 Considerações iniciais | 28 |
| 3.2 Teoria quântica de invariantes dependentes do tempo | 28 |
| 3.3 Entropia de Leipnik | 39 |
| 3.4 Informação de Fisher | 44 |
| 4. Conclusões | 52 |
| Apêndice A | 55 |
| Apêndice B | 59 |
| Apêndice C | 62 |
| Referências | 63 |

1. Introdução

Em 1927, Heisenberg formulou um dos mais importantes alicerces da mecânica quântica, o princípio da incerteza [1], que nos diz que quanto maior a precisão na medida da posição de uma partícula, maior será a incerteza na medida do momento, e *vice-versa*. O princípio da incerteza é a razão do caráter probabilístico da mecânica quântica. Quantitativamente, temos que $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$, onde Δx e Δp são os desvios padrão da posição e do momento (incertezas), respectivamente. O princípio da incerteza de Heisenberg impõe um limite inferior para o produto das incertezas da posição e do momento, o que não implica que o observador não tenha habilidade o suficiente para medir simultaneamente com precisão a posição e o momento de uma partícula, mas sim a impossibilidade natural de tal medição ser realizada.

Dada essa consequência necessária e de extrema importância para a mecânica quântica, diversos autores propuseram novas relações de incerteza além da relação com base nos desvios padrão. E é nesse âmbito que a teoria da informação se mostra especialmente útil, por exemplo, novas relações de incerteza em termos das entropias de Shannon, Rényi e Tsallis [2-4], e em termos da informação de Fisher [5-8] foram propostas nos últimos anos.

O termo “informação” é demasiado amplo para ser expresso por uma só definição, mas para qualquer distribuição de probabilidades, podemos definir uma grandeza denominada entropia. Em 1948, C. Shannon introduziu na literatura uma medida conhecida como entropia de Shannon [9], transformando o conceito de entropia numa medida da informação do sistema.

Em 1959, R. Leipnik [10] introduziu, com base na teoria da informação de Shannon, o conceito que ficou conhecido como entropia de Leipnik, uma eficaz ferramenta para se calcular a perda de informação associada à evolução temporal de estados quânticos puros. Sabemos que quanto maior for a entropia menor será a informação sobre o sistema e vice-versa. Na Ref. [10], Leipnik demonstrou que o princípio mínimo é obtido através da soma das entropias de duas distribuições relacionadas como o quadrado absoluto da Transformada de Fourier de um par gaussiano. E mostrou também como esta entropia se relaciona com o princípio da incerteza.

Em 2005, Dunkel e Trigger [11] calcularam a entropia de Leipnik de três modelos quânticos analiticamente solúveis: o caso simples de um pacote de onda gaussiano livre, a evolução de pacotes de ondas gaussianos interagindo com um campo elétrico senoidal e o tunelamento de pacotes de onda gaussianos através de uma barreira δ . Eles usaram como condições iniciais estados clássicos máximos (*MACS, maximal classical states*), que minimizam tanto o princípio da incerteza quanto a entropia. Eles descobriram que a entropia de Leipnik cresce monotonicamente com o tempo, e baseados nos resultados da Ref. [12], propuseram que tal dependência, pelo menos assintoticamente, pode ser uma propriedade geral dos sistemas quânticos.

No entanto, Garbaczewski [13], forneceu dois exemplos específicos indicando a complexidade da evolução quântica. Ele mostrou que, na presença de um potencial harmônico confinante, a entropia de Leipnik é uma função não crescente no tempo, mesmo para os MACS. Ele também mostrou que uma outra escolha de dados iniciais leva a uma variação senoidal da entropia de Leipnik.

Nas Refs. [14] e [15], Özcan, Aktürk e Sever estudaram a entropia de Leipnik de osciladores harmônicos dependentes do tempo usando funções de onda obtidas pelo método da integral de trajetória de Feynman. Na Ref. [14], eles descobriram que a entropia de Leipnik do oscilador harmônico amortecido (Caldirola-Kanai) ($m(t) = m_0 e^{\gamma t}$ e $\omega(t) = \omega_0$) mostra descontinuidades notáveis com o tempo, contrariando a proposta de Dunkel e Trigger [11]. Na Ref. [15] eles estudaram sistemas com massa oscilante ($m(t) = m_0 \operatorname{sen}^2(\nu t)$ e $\omega(t) = \omega_0$) e frequência variando com o inverso do quadrado do tempo ($m(t) = m_0$ e $\omega(t) = \frac{\omega_0}{t^2}$). Para a primeira, a entropia de Leipnik varia periodicamente no tempo, enquanto que para a segunda, aumenta monotonicamente com o tempo.

O oscilador harmônico amortecido ($m(t) = m_0 e^{\gamma t}$ e $\omega(t) = \omega_0$), conhecido como oscilador de Caldirola-Kanai (CK) [16, 17] foi introduzido na literatura como um protótipo para descrever sistemas quânticos dissipativos. Para osciladores CK o fator de amortecimento, γ , é constante. Existe uma outra classe de osciladores amortecidos, chamada osciladores de Lane-Emden (LE) ($m(t) = t^\alpha$ e $\omega(t) = \omega_0$), onde o fator de amortecimento é agora uma função do tempo. Estes osciladores foram estudados por Özeren [18], que estudou classicamente o movimento e investigou a evolução no tempo dos estados coerentes, considerando os casos onde $\alpha = 2$ e $\alpha = 4$.

Recentemente, Bessa e Guedes [19] utilizaram o método de Lewis e Riesenfeld (LR) [20] para obter as funções de onda exatas dos osciladores de LE, também para $\alpha = 2$ e $\alpha = 4$, e calcularam o produto da incerteza, a probabilidade de transição entre os estados quânticos e o valor esperado da energia. O produto da incerteza dos osciladores de LE diminui com o tempo, enquanto que se mantém constante para o oscilador de CK. Os resultados obtidos evidenciam que o oscilador CK é mais amortecido do que o oscilador LE, devido ao fato de o fator de amortecimento do oscilador de LE diminuir com o tempo.

Embora muito conhecida e com uma alta aplicabilidade em diversas áreas da ciência, a teoria da informação de Shannon não é única, e diversos outros cientistas propuseram outras maneiras de medir a quantidade de informação que um sistema carrega. Em especial, um conceito que não só surgiu mais de vinte anos antes da entropia de Shannon, mas que também se mostra uma ferramenta útil e poderosa na área da mecânica quântica, a informação de Fisher. Introduzida por R. A. Fisher [21] em 1925 como uma medida de “precisão intrínseca” em teoria estatística, a informação de Fisher é uma forma de medir a quantidade de informação que um certo observável X carrega em relação a um determinado parâmetro θ para o qual a probabilidade de X varia, isto é, para uma dada densidade de probabilidade $p(X; \theta)$, e também é uma forma de entropia (grau de desordem) de um sistema ou fenômeno.

Diversas leis da física podem ser derivadas e interpretadas tendo como base a informação de Fisher. B. Roy Frieden, a partir do princípio da mínima informação de Fisher (MIF), derivou a equação de Schrödinger [22, 23], a equação de Klein-Gordon (para o caso particular de campos nulos), interpretou a segunda lei da Termodinâmica, derivou a equação de onda de Helmholtz e a lei de Maxwell-Boltzmann [22], as equações de Maxwell para a eletrodinâmica [24], entre outras. Para Frieden, o MIF tem potencial para ser um princípio unificador da física [24].

Nos últimos anos, vários autores estudaram as aplicações da informação de Fisher em diversas áreas da ciência, como por exemplo, física dos buracos negros [25]. Além disso, muitos estudos recentes também relacionam a informação Fisher com a mecânica quântica [26-30], em particular, a direta relação com o princípio da incerteza de Heisenberg [5-8].

Em 2000, Hall [31] estudou as propriedades quânticas da informação de Fisher clássica em função da posição e do momento não-clássicos. Ele definiu o momento não-clássico como $p_{nc} = p - p_{cl}$, onde p denota o momento conjugado a x , e p_{cl} é o operador momento clássico correspondente ao estado ψ_n . Similarmente, a posição não-clássica foi definida por ele como $x_{nc} = x - x_{cl}$, onde x_{cl} é o operador posição correspondente ao mesmo estado ψ_n .

A informação de Fisher para sistemas de uma partícula sujeitos a potenciais centrais foi calculada por E. Romera et al. [5]. Eles verificaram que a quantidade de informação pode ser expressa por meio de uma forma simples e fechada dos valores esperados radiais ($\langle r^{-2} \rangle, \langle p^2 \rangle$) no espaço das posições, e ($\langle r^2 \rangle, \langle p^{-2} \rangle$) no espaço dos momenta. Eles aplicaram este resultado em sistemas como o átomo de Hidrogênio e o oscilador harmônico isotrópico, e propuseram que uma nova relação de incerteza que envolve a informação de Fisher nos dois espaços complementares está no mesmo nível que a incerteza em função das variâncias, proposta por Heisenberg [1].

Em 2010, P. Sánchez-Moreno et al. [8] mostraram que para uma função de onda $\psi(\mathbf{x})$ definida em um espaço de configuração D-dimensional e sua respectiva função de onda no espaço dos momenta $\phi(\mathbf{p})$, o produto dos funcionais de Fisher satisfazem a relação de incerteza $F_x F_p \geq 4D^2$ quando $\psi(\mathbf{x})$ ou $\phi(\mathbf{p})$ são reais. Eles mostraram também que para funções de onda complexas e arbitrárias, o produto de incerteza $F_x F_p$ não admite um limite inferior trivial.

Em 2011, Choi et al [32] calcularam a informação de Fisher para dois osciladores quânticos: um com frequência dependente do tempo e outros com uma massa fortemente pulsante. Eles observaram que a informação de Fisher para a primeira oscila com o tempo, enquanto que a segunda atinge picos muito altos nos pontos em que a massa se aproxima de zero.

Neste trabalho calcularemos a entropia de Leipnik e a informação de Fisher dos osciladores de Caldirola-Kanai (CK) e Lane-Emden (LE) e mostraremos algumas das relações de incerteza com base nessas grandezas. Este trabalho segue-se da seguinte maneira. No Capítulo 2, mostramos as soluções clássicas dos conhecidos osciladores CK e LE. No Capítulo 3, utilizamos a teoria quântica de invariantes de LR para calcularmos as funções de onda do oscilador com massa e frequência dependentes do

tempo, a fim de calcularmos sua entropia de Leipnik e a sua informação de Fisher, e usamos este resultado para calcularmos essas grandezas para os mesmos osciladores estudados no Capítulo 2. E no final deste trabalho, apresentamos as conclusões e considerações finais.

2. Osciladores harmônicos dependentes do tempo – Soluções clássicas

2.1 Considerações iniciais

Dentre todos os sistemas físicos caracterizados por algum tipo de oscilação, o oscilador harmônico simples (OHS) é, sem dúvida, o caso mais estudado, pois em primeira aproximação, considerando pequenas amplitudes de oscilação, todo sistema oscilatório pode ser aproximado por um OHS. Porém, sabemos que todo sistema físico real é dissipativo.

Para incluirmos a dissipação em nosso sistema procedemos da seguinte forma. Considere novamente o movimento de uma partícula clássica de massa m_0 movendo-se em uma dimensão com momento $p = m_0\dot{q}$ sobre a influência não apenas de uma força conservativa $-\frac{\partial V}{\partial q}$ mas, também, de uma força de atrito, $F_{at} = -\gamma m_0\dot{q}$, onde γ é o parâmetro de amortecimento. Assim, a equação de movimento e a taxa de variação temporal da energia $E(t)$ para o OHA são agora dadas por:

$$\dot{p} + \gamma p + \frac{\partial V}{\partial q} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{dE}{dt} = -m_0\gamma\dot{q}^2, \quad (2.2)$$

respectivamente. A Eq. (2.2) indica que a taxa instantânea de dissipação da energia mecânica do oscilador é igual ao produto da força de atrito pela velocidade.

Entretanto, no presente caso a Eq. (2.1) não pode ser obtida através de uma função hamiltoniana, $H(q, p) = T(p) + V(q, p)$, onde $T(p)$ é a energia cinética e $V(q, p)$ é a energia potencial dependente de q e p . Isto porque a força de atrito, $F_{at} = -\gamma m_0\dot{q}$, não pode ser derivada da expressão $F = -\frac{\partial V}{\partial q} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}}\right)$.

Mas, será que não existe alguma maneira de escrevermos uma função hamiltoniana que forneça, mediante a aplicação das equações de Hamilton, a equação de movimento dada pela Eq. (2.1)?

A resposta a esta questão foi dada por Bateman [33] ao considerar a seguinte função lagrangiana dependente do tempo

$$L(q, \dot{q}, t) = e^{\gamma t} \left[\frac{1}{2} m_0 \dot{q}^2 - V(q) \right], \quad (2.3)$$

A partir desta função lagrangiana, Caldriola [16] e Kanai [17] construíram a seguinte função hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m_0} e^{-\gamma t} + V e^{\gamma t}, \quad (2.4)$$

onde, agora, $p = m_0 e^{\gamma t} \dot{q}$ é o momento canônico.

A Eq. (2.4) é chamada de hamiltoniana de Caldriola-Kanai, que nada mais é que a hamiltoniana de um oscilador harmônico com frequência constante, ω_0 , e massa crescente exponencialmente com o tempo, $m(t) = m_0 e^{\gamma t}$. A aplicação das equações de Hamilton leva a equação de movimento dada pela Eq. (2.1). A dissipação surge naturalmente devido a variação temporal de $m(t)$. Para que a Eq. (2.2) seja satisfeita, definimos a energia mecânica do sistema (soma das energias cinética e potencial) como

$$E(t) = H(t) e^{-\gamma t}. \quad (2.5)$$

A hamiltoniana de Caldriola-Kanai também tem sido estudada no contexto da Mecânica Quântica como um modelo alternativo na descrição de sistemas dissipativos. Por exemplo, na Ref. [34] os autores obtiveram a solução da equação de Schrödinger para um oscilador de Caldriola-Kanai com e sem um potencial singular, enquanto que os osciladores de Caldriola-Kanai forçados e invertidos foram investigados nas Ref. [35, 36], respectivamente.

Neste Capítulo, revisitamos o oscilador CK e os osciladores LE, investigados previamente por Özeren [18], Bessa e Guedes [19]. Além das soluções das equações de movimento, calculamos como evoluem no tempo a velocidade, o momento canônico e os respectivos diagramas de fase. Mostramos que a energia tende a zero para tempos assintóticos, e não para um valor constante como anteriormente determinado por Özeren [18]. Em todas as análises comparamos os resultados com aqueles obtidos a partir do modelo de Caldriola-Kanai.

2.2 Soluções clássicas

Nesta seção apresentamos as soluções clássicas dos osciladores CK e LE e estudamos o comportamento de $q(t)$, $\dot{q}(t)$, $p(t) = m(t)\dot{q}$, e seus espaços de fase e de suas energias.

2.2.1 Oscilador de Caldirola-Kanai: $m(t) = m_0 e^{\gamma t}$ e $\omega(t) = \omega_0$

Para este oscilador, temos que a equação clássica do movimento [veja a Eq. (3.29)] é

$$\ddot{q} + \gamma \dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (2.6)$$

que dependendo dos valores de γ e ω_0 , tem três soluções distintas que correspondem aos seguintes casos de amortecimento: (i) subcrítico $\left(\frac{\gamma}{2} < \omega_0\right)$; (ii) supercrítico $\left(\frac{\gamma}{2} > \omega_0\right)$; e (iii) crítico $\left(\frac{\gamma}{2} = \omega_0\right)$. Neste texto consideraremos apenas o amortecimento subcrítico, pois é o único que fornece uma solução que oscila com amplitude decrescente.

Assim, a solução geral da Eq. (2.6) para o caso (i) é dada por:

$$q(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left[q_0 \cos(\Omega t) + \left(\frac{\nu_0}{\Omega} + \frac{\gamma q_0}{2\Omega} \right) \sin(\Omega t) \right], \quad (2.7)$$

onde $\Omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$ e $\dot{q}(t = 0) = \nu_0$.

Usando as condições iniciais $q(0) = 1$ e $\dot{q}(0) = 0$, a Eq. (2.7) fica

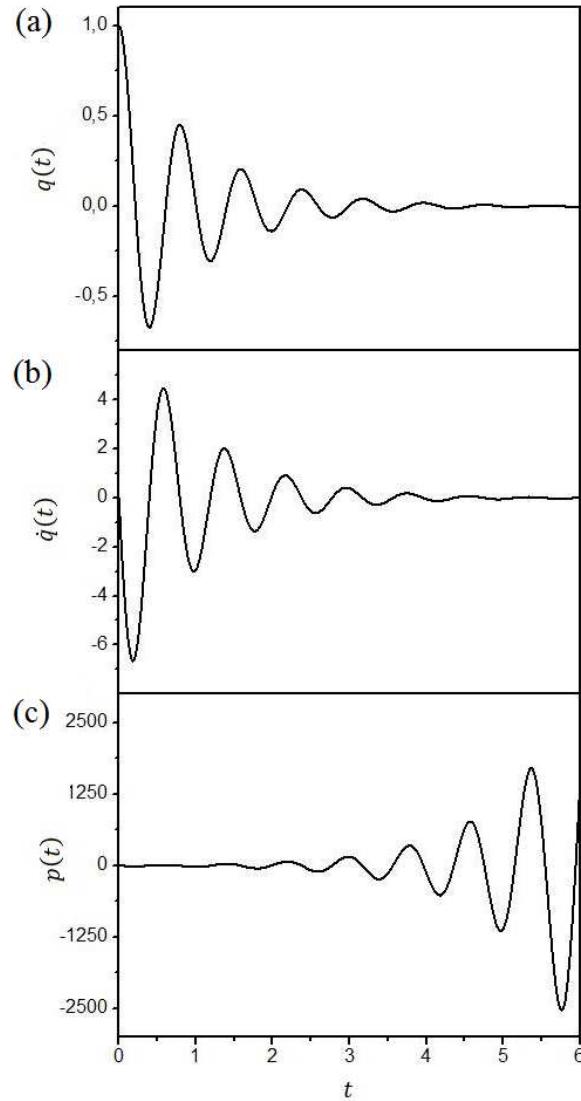
$$q(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left[\cos(\Omega t) + \frac{\gamma}{2\Omega} \sin(\Omega t) \right]. \quad (2.8)$$

A velocidade $\dot{q}(t)$ e o momento canônico $p(t)$ são dados, respectivamente, por:

$$\dot{q}(t) = -\frac{\gamma^2 + 4\Omega^2}{4\Omega} e^{-\frac{\gamma t}{2}} \sin(\Omega t), \quad (2.9)$$

$$p(t) = -m_0 \frac{\gamma^2 + 4\Omega^2}{4\Omega} e^{\frac{\gamma t}{2}} \sin(\Omega t). \quad (2.10)$$

Nas Figs. 1(a)-(c) mostramos o comportamento de $q(t)$, $\dot{q}(t)$, $p(t) = m(t)\dot{q}$. Consideramos $q_0 = 1$, $v_0 = 0$, $\gamma = 2$, $m_0 = 1$ e $\omega_0 = 8$.



Figuras 1 (a)-(c). (a) Variação no tempo da posição $q(t)$, (b) da velocidade $\dot{q}(t)$, e (c) do momento $p(t)$ para o oscilador CK.

Observamos que tanto $q(t)$ quanto $\dot{q}(t)$ oscilam com amplitude decrescente e tendem a zero para tempos assintóticos. Entretanto, observamos que $p(t)$ aumenta com o passar do tempo, devido ao crescimento exponencial da massa. Note que, à medida que $q(t)$ diminui, $p(t)$ aumenta. Mas, como veremos, é a energia e não a hamiltoniana que vai a zero para tempos assintóticos como esperado para sistemas dissipativos. Devido a isto, o diagrama de fase para sistemas cujo hamiltoniano

depende do tempo deve ser $q(t)x\dot{q}(t)$. As Figs. 2 (a)-(b) mostram a diferença entre $q(t)x\dot{q}(t)$ e $q(t)xp(t)$.

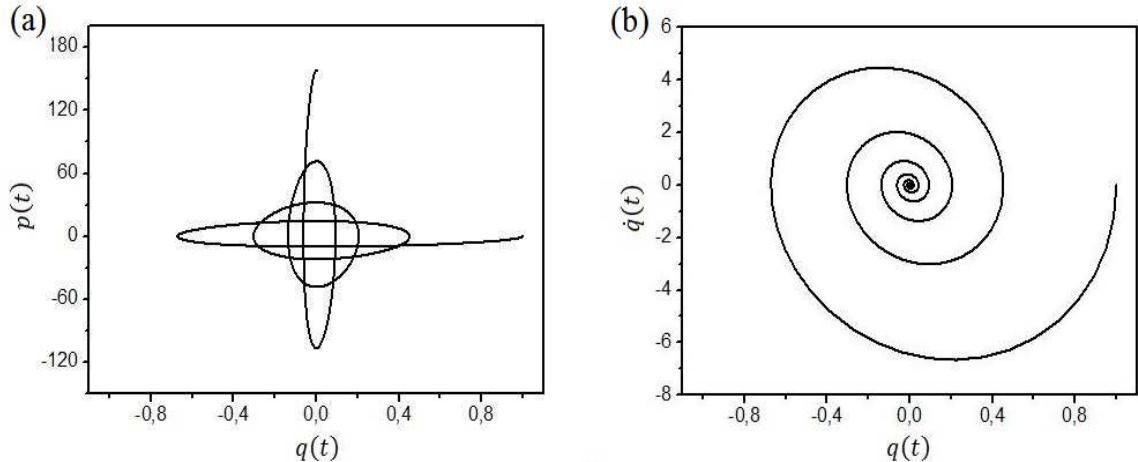


Figura 2 (a)-(b). (a) Diagrama de fase $q(t)xp(t)$ para o oscilador CK, (b) diagrama de fase $q(t)x\dot{q}(t)$.

2.2.2 Oscilador de Lane-Emden, com $\alpha = 2$: $m(t) = t^2$ e $\omega(t) = \omega_0$

A equação clássica do movimento [veja a Eq. (3.29)] para este oscilador é

$$\ddot{q} + \frac{2}{t}\dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (2.11)$$

cuja solução geral é dada por [37]

$$q(t) = \frac{C_0}{t} \cos(\omega_0 t) + \frac{C_1}{\omega_0 t} \sin(\omega_0 t), \quad (2.12)$$

onde C_0 e C_1 são constantes a serem determinadas.

Usando as condições iniciais $q(0) = 1$ e $\dot{q}(0) = 0$, a Eq. (2.12) torna-se (vide apêndice A)

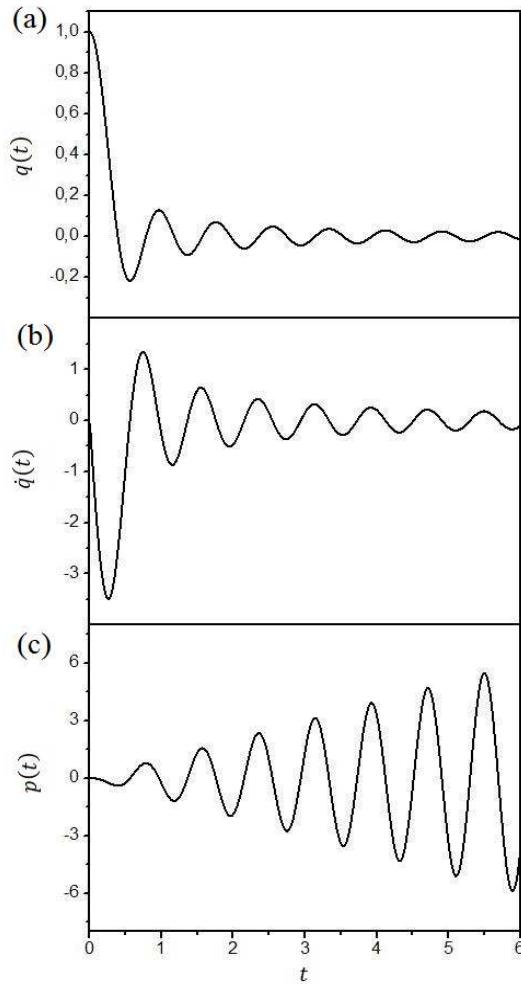
$$q(t) = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t}, \quad (2.13)$$

a velocidade $\dot{q}(t)$ e o momento canônico $p(t)$ são dados, respectivamente, por:

$$\dot{q}(t) = \frac{\omega_0 t \cos(\omega_0 t) - \sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t^2}, \quad (2.14)$$

$$p(t) = \frac{\omega_0 t \cos(\omega_0 t) - \sin(\omega_0 t)}{\omega_0}. \quad (2.15)$$

Nas Figs. 3 (a)-(c) mostramos, respectivamente, o comportamento de $q(t)$, $\dot{q}(t)$ e $p(t) = m(t)\dot{q}$ para o oscilador LE com $\alpha = 2$. Observamos novamente que tanto $q(t)$ quanto $\dot{q}(t)$ oscilam com amplitude decrescente, enquanto $p(t)$ oscila com amplitude crescente. Observe que a amplitude tanto de $q(t)$ quanto de $\dot{q}(t)$ decai de forma mais lenta em comparação aos seus valores no oscilador CK. Isto se deve ao fato que, para o oscilador LE, o termo de amortecimento diminui à medida que o tempo passa. Na Fig. 4 mostramos o diagrama de fase $q(t) \times \dot{q}(t)$ para o oscilador LE para $\alpha = 2$. Nestas figuras consideramos mais uma vez $\omega_0 = 8$.



Figuras 3 (a)-(c). (a) Variação no tempo da posição $q(t)$, (b) da velocidade $\dot{q}(t)$, e (c) do momento $p(t)$ para o oscilador LE com $\alpha = 2$.

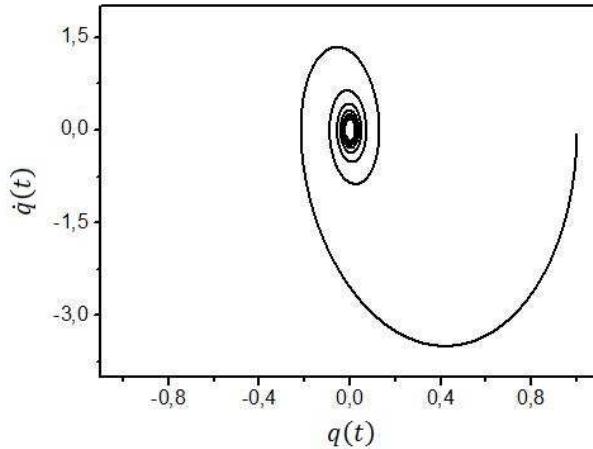


Figura 4. Diagrama de fase $q(t) \times \dot{q}(t)$ para o oscilador LE para $\alpha = 2$.

Comparando as Figs. 4 e 2 (b), observamos que para instantes de tempo iniciais ($0 < t < 1$) uma partícula no oscilador LE com $\alpha = 2$ é mais amortecida que no oscilador CK devido ao fato que para tempos iniciais, o parâmetro de amortecimento $\gamma(t) = \frac{\alpha}{t} > 2$. À medida que t aumenta, $\gamma(t)$ diminui fazendo com que a dissipação diminua. Mas, como é um sistema dissipativo, tanto $q(t)$ quanto de $\dot{q}(t)$ tendem a zero quando $t \rightarrow \infty$.

2.2.3 Oscilador de Lane-Emden, com $\alpha = 4$: $\mathbf{m}(t) = t^4$ e $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_0$

Para este caso a equação clássica do movimento [veja a Eq. (3.29)] é dada por

$$\ddot{q} + \frac{4}{t} \dot{q} + \omega_0^2 q = 0 = 0, \quad (2.16)$$

e a sua solução geral é na forma [37]

$$q(t) = \frac{3A_0}{\omega_0^2 t^2} \left[\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t} - \cos(\omega_0 t) \right] + \frac{\omega_0 B_0}{t^2} \left[\sin(\omega_0 t) + \frac{\cos(\omega_0 t)}{\omega_0 t} \right], \quad (2.17)$$

onde A_0 e B_0 são constantes.

Aplicando as condições iniciais $q(0) = 1$ e $\dot{q}(0) = 0$, a Eq. (2.17) torna-se (vide apêndice A)

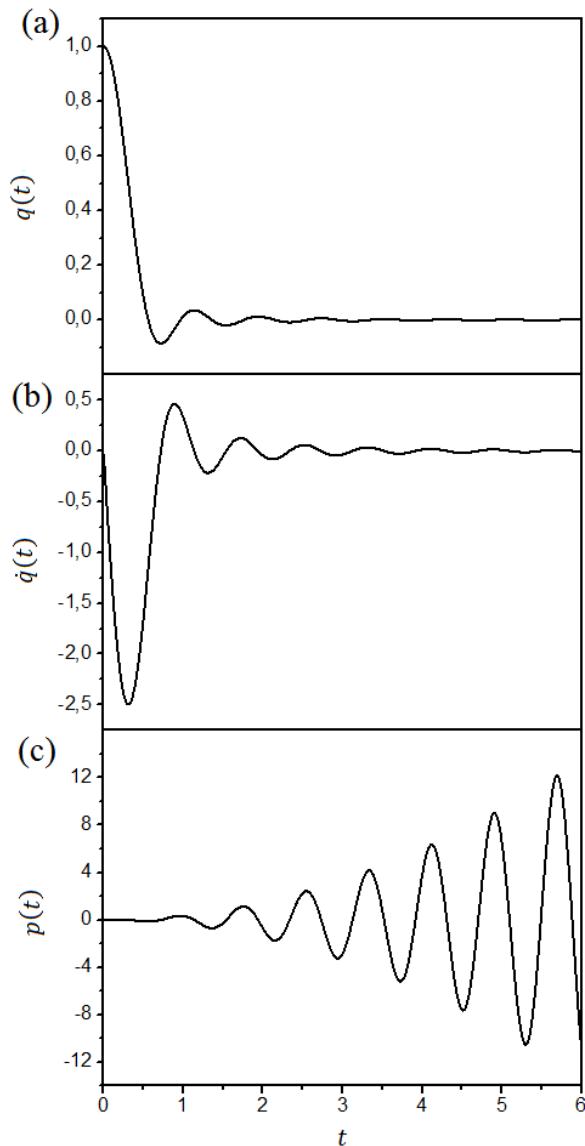
$$q(t) = \frac{3}{\omega_0^2 t^2} \left[\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t} - \cos(\omega_0 t) \right], \quad (2.18)$$

a velocidade $\dot{q}(t)$ e o momento canônico $p(t)$ são dados, respectivamente, por:

$$\dot{q}(t) = \frac{3(\omega_0^2 t^2 - 3)\sin(\omega_0 t) + 9\omega_0 t \cos(\omega_0 t)}{\omega_0^3 t^4}, \quad (2.19)$$

$$p(t) = \frac{3(\omega_0^2 t^2 - 3)\sin(\omega_0 t) + 9\omega_0 t \cos(\omega_0 t)}{\omega_0^3}. \quad (2.20)$$

Nas Figs. 5 (a)-(c) mostramos o comportamento de $q(t)$, $\dot{q}(t)$, $p(t) = m(t)\dot{q}$ para o oscilador LE com $\alpha = 4$. Observamos novamente que tanto $q(t)$ quanto $\dot{q}(t)$ oscilam com amplitude decrescente, enquanto $p(t)$ oscila com amplitude crescente. Observe que a amplitude tanto de $q(t)$ quanto de $\dot{q}(t)$ decai de forma mais rápida em comparação aos seus valores no oscilador LE para $\alpha = 2$. Isto se deve ao fato que para o oscilador LE com $\alpha = 4$, o termo de amortecimento é maior que aquele no caso $\alpha = 2$. Isto fica claro na Fig. 6 onde mostramos o diagrama de fase $q(t) \times \dot{q}(t)$. Nestas figuras consideramos mais uma vez $\omega_0 = 8$.



Figuras 5 (a)-(c). (a) Variação no tempo da posição $q(t)$, (b) da velocidade $\dot{q}(t)$, e (c) do momento $p(t)$ para o oscilador LE com $\alpha = 4$.

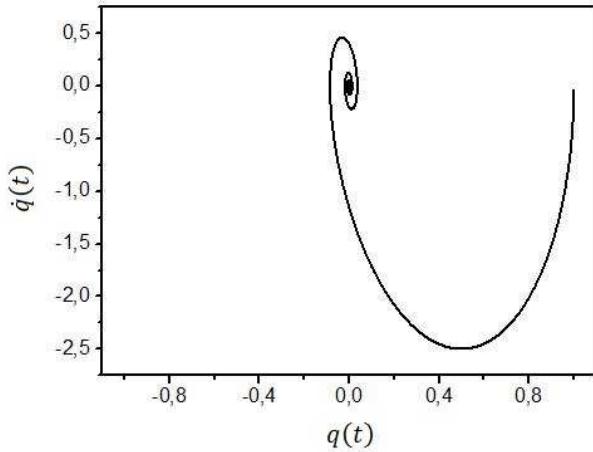


Figura 6. Diagrama de fase $x(t)$ x $\dot{x}(t)$ para o oscilador LE para $\alpha = 4$.

Agora, vamos discutir como variam a energia ($E(t)$) e a hamiltoniana ($H(t)$) em cada caso. Como vimos na Seção 2.1, da lagrangiana de Bateman [33] dada pela Eq. (2.3), Caldirola [16] e Kanai [17] construíram a função hamiltoniana dada pela Eq. (2.4). Generalizando o resultado de Caldirola e Kanai não é difícil mostrar que se $m(t) = m_0 f(t)$, então a energia é dada por:

$$E = f(t)^{-1} H(t). \quad (2.21)$$

Para o oscilador CK, $f(t) = e^{\gamma t}$ e a hamiltoniana não mais é igual à energia do sistema. Elas são dadas por

$$E(t) = \frac{m_0 \omega_0^2}{2\Omega^2} e^{-\gamma t} \left[\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} \cos(2\Omega t) + \frac{\gamma\omega}{2} \sin(2\Omega t) \right], \quad (2.22)$$

$$H(t) = \frac{m_0 \omega_0^2}{2\Omega^2} \left[\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} \cos(2\Omega t) + \frac{\gamma\omega}{2} \sin(2\Omega t) \right]. \quad (2.23)$$

Observamos nas Figs. 7 (a)-(b) abaixo que a hamiltoniana oscila em torno de um valor médio, enquanto que a energia vai a zero.

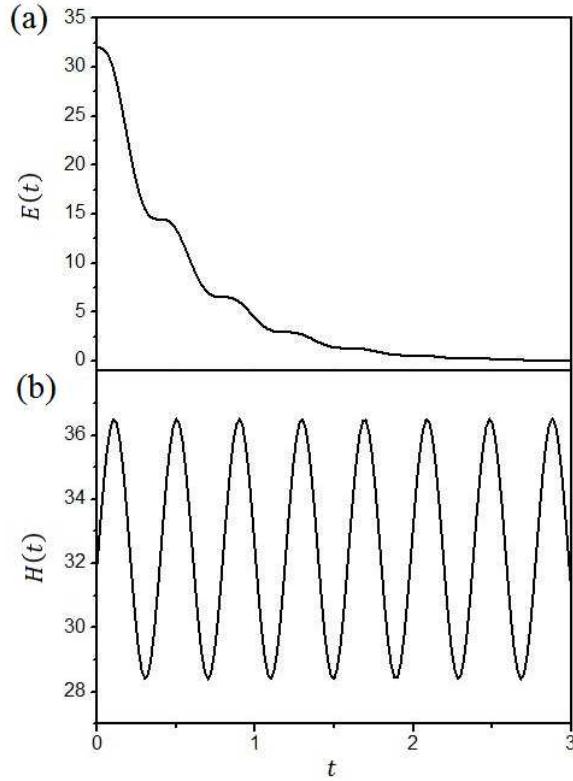


Figura 7 (a)-(b). (a) Comportamento de $E(t)$ e (b) comportamento de $H(t)$. Nestas figuras usamos $\omega_0 = 8$ e $m_0 = 1$.

Isto demonstra o fato que em sistemas com massa dependentes do tempo (dissipativos) as expressões para a hamiltoniana e a energia são diferentes. A expressão para $E(t)$ é a energia mecânica do sistema, que não se conserva.

Para o oscilador LE com $\alpha = 2$, $f(t) = t^2$ as expressões para a energia e a hamiltoniana do sistema são, respectivamente, dadas por:

$$E(t) = \frac{1}{2t^2} \left[1 - \frac{\operatorname{sen}(2\omega_0 t)}{\omega_0 t} + \frac{\operatorname{sen}^2(\omega_0 t)}{\omega_0^2 t^2} \right], \quad (2.22)$$

$$H(t) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\operatorname{sen}(2\omega_0 t)}{\omega_0 t} + \frac{\operatorname{sen}^2(\omega_0 t)}{\omega_0^2 t^2} \right], \quad (2.23)$$

cujos comportamentos são mostrados nas Figs. 8 (a)-(b) abaixo.

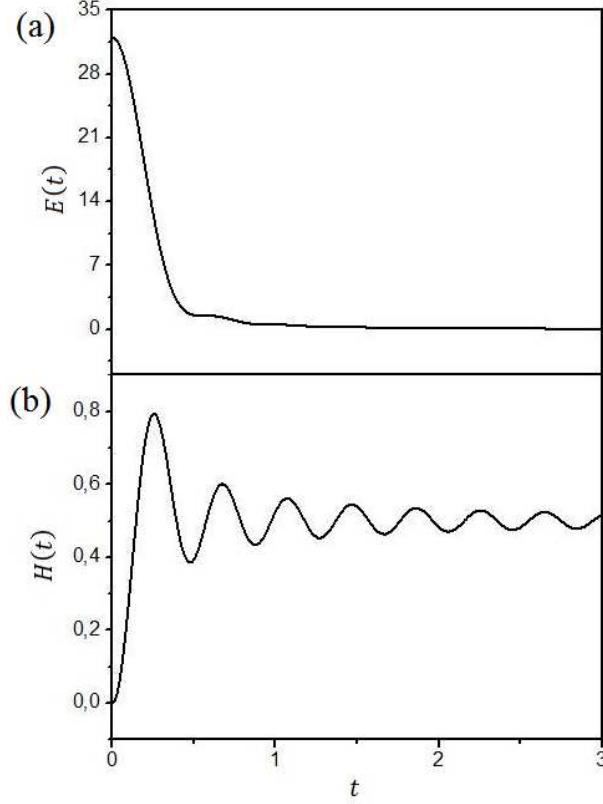


Figura 8 (a)-(b). (a) Comportamento de $E(t)$ e (b) $H(t)$ para o oscilador LE com $\alpha = 2$. Nestas figuras usamos $\omega_0 = 8$.

De acordo com Özeren [18], $E(t) \rightarrow 0.5$ quando $t \rightarrow \infty$. Entretanto, observamos que $E(t) \rightarrow 0$ e $H(t) \rightarrow 0.5$ quando $t \rightarrow \infty$. O equívoco cometido por Özeren foi considerar que para sistemas dependentes do tempo, as expressões para a energia e a hamiltoniana do sistema são iguais.

De maneira análoga, para $\alpha = 4$, temos $f(t) = t^4$, e $E(t)$ e $H(t)$ são, respectivamente, dadas por:

$$E(t) = \frac{9}{2t^4} \left[\frac{1}{\omega_0^2} - \frac{6\sin^2(\omega_0 t)}{\omega_0^4 t^2} + \frac{3\sin(2\omega_0 t)}{\omega_0^4 t^2} - \frac{9\sin(2\omega_0 t)}{\omega_0^6 t^4} + \frac{81}{\omega_0^6 t^4} + \frac{\sin^2(\omega_0 t)}{\omega_0^4 t^2} - \frac{\sin(2\omega_0 t)}{\omega_0^3 t} \right], \quad (2.24)$$

$$H(t) = \frac{9}{2} \left[\frac{1}{\omega_0^2} - \frac{6\sin^2(\omega_0 t)}{\omega_0^4 t^2} + \frac{3\sin(2\omega_0 t)}{\omega_0^4 t^2} - \frac{9\sin(2\omega_0 t)}{\omega_0^6 t^4} + \frac{81}{\omega_0^6 t^4} + \frac{\sin^2(\omega_0 t)}{\omega_0^4 t^2} - \frac{\sin(2\omega_0 t)}{\omega_0^3 t} \right], \quad (2.25)$$

cujos comportamentos são mostrados nas Figs.9 (a)-(b) abaixo.

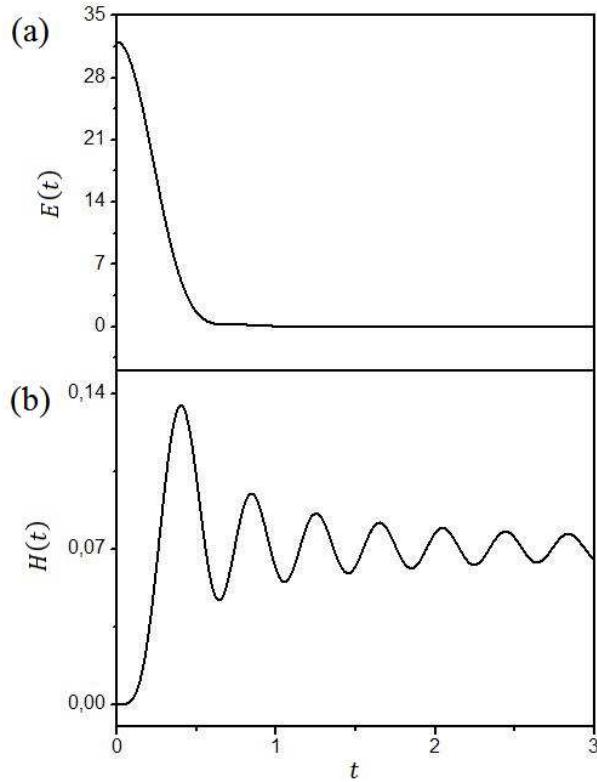


Figura 9 (a)-(b). (a) Comportamento de $E(t)$ e (b) $H(t)$ para o oscilador LE com $\alpha = 4$. Nestas figuras usamos $\omega_0 = 8$.

As Figuras 7, 8 e 9 mostram a diferença entre as definições de hamiltoniana e energia mecânica para sistemas dependentes do tempo. A relação entre elas é dada pela Eq. (2.21). Para sistemas independentes do tempo, a hamiltoniana é igual à energia mecânica do sistema. Nos casos dos osciladores de Lane-Endem e Caldirola-Kanai, elas são diferentes. Enquanto a energia tende a zero para tempos assintóticos como deve ocorrer em sistemas dissipativos, a hamiltoniana tende a valores constantes diferentes de zero, não tendo assim nenhuma relação com a energia do sistema. Estes resultados explicam os equívocos cometidos por Özeren [18] na análise da variação da energia mostrado em seu trabalho.

3. Osciladores harmônicos dependentes do tempo – Soluções quânticas, entropia de Leipnik e informação de Fisher

3.1 Considerações iniciais

Neste Capítulo calcularemos a entropia de Leipnik $S_j(t)$, e a informação de Fisher para a posição e para o momento, $F_q(t)$ e $F_p(t)$, respectivamente, no caso geral de um oscilador quântico com massa e frequência dependentes do tempo. Para isso, precisamos primeiro encontrar a função de onda deste sistema. Como sua hamiltoniana depende explicitamente do tempo, utilizaremos o método de Lewis e Riesenfeld (LR) [20]. Na próxima seção, introduzimos a teoria quântica de invariantes desenvolvida por LR para encontrar a função de onda e utilizá-la para calcularmos a entropia de Leipnik e a informação de Fisher para esse sistema.

3.2 Teoria quântica de invariantes dependentes do tempo

Vamos analisar o caso de um sistema quântico descrito por uma hamiltoniana explicitamente dependente do tempo $H(t)$. Para este sistema a equação de Schrödinger dependente do tempo é dada por

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = H(t)\psi(t). \quad (3.1)$$

Vamos agora supor que existe um operador hermitiano que seja explicitamente dependente do tempo e invariante, ou seja,

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I, H] = 0, \quad (3.2)$$

e

$$I = I^\dagger. \quad (3.3)$$

Aplicando a Eq. (3.2) no estado $\psi(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} \psi(t) &= \frac{\partial I}{\partial t} \psi(t) + \frac{1}{i\hbar} [I, H] \psi(t) = 0 \\ &= \frac{\partial I}{\partial t} \psi(t) + \frac{1}{i\hbar} IH\psi(t) - \frac{1}{i\hbar} HI\psi(t), \end{aligned}$$

usando a Eq. (3.1), podemos escrever

$$i\hbar \frac{\partial [I\psi(t)]}{\partial t} = H(t)[I\psi(t)]. \quad (3.4)$$

Podemos ver que $I\psi(t)$ é também uma solução da equação de Schrödinger, resultado esse válido para qualquer que seja o invariante. Vamos supor a partir de agora

que o invariante $I(t)$ não contém operadores com derivadas temporais, pois isto facilita a escolha das fases dos autoestados de $I(t)$, sendo então solução da equação de Schrödinger estes autoestados multiplicados por um fator de fase arbitrário e dependente do tempo.

Agora, admitindo que o invariante $I(t)$ seja um operador de um conjunto completo de observáveis comutam, existe um conjunto completo de autoestados ortonormais $|\lambda, k; t\rangle$ de $I(t)$, ou seja

$$I(t)|\lambda, k; t\rangle = \lambda|\lambda, k; t\rangle, \quad (3.5)$$

$$\langle \lambda', k'; t|\lambda, k; t\rangle = \delta_{\lambda' \lambda} \delta_{k' k}, \quad (3.6)$$

onde λ são os autovalores do invariante e k representa os números quânticos necessários para especificar os autoestados $|\lambda, k; t\rangle$.

O fato de $I(t)$ ser Hermitiano implica que seus autovalores λ são reais. Podemos também mostrar que eles são independentes do tempo. Para isso, derivemos a Eq. (3.5) em relação ao tempo, obtendo

$$\frac{\partial I}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle + I \frac{\partial}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle + \lambda \frac{\partial}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle. \quad (3.7)$$

Ao aplicarmos a Eq. (3.2) sobre o autoestado $|\lambda, k; t\rangle$, resulta

$$i\hbar \frac{\partial I}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle + IH|\lambda, k; t\rangle - HI|\lambda, k; t\rangle = 0,$$

e usando a Eq. (3.5), podemos escrever

$$i\hbar \frac{\partial I}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle + IH|\lambda, k; t\rangle - \lambda H|\lambda, k; t\rangle = 0. \quad (3.8)$$

Calculando o produto escalar da Eq. (3.8) com $|\lambda', k'; t\rangle$, ficamos com

$$i\hbar \langle \lambda', k'; t| \frac{\partial I}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle + \langle \lambda', k'; t|IH|\lambda, k; t\rangle - \lambda \langle \lambda', k'; t|H|\lambda, k; t\rangle = 0,$$

da Eq. (3.5)

$$i\hbar \langle \lambda', k'; t| \frac{\partial I}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle + (\lambda' - \lambda) \langle \lambda', k'; t|H|\lambda, k; t\rangle = 0. \quad (3.9)$$

Para $\lambda = \lambda'$, a Eq. (3.9) torna-se

$$i\hbar \langle \lambda, k'; t| \frac{\partial I}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle = 0. \quad (3.10)$$

Tomando agora o produto escalar da Eq. (3.7) com $|\lambda, k; t\rangle$, obtemos

$$\langle \lambda, k; t | \frac{\partial I}{\partial t} | \lambda, k; t \rangle + \langle \lambda, k; t | I \frac{\partial}{\partial t} | \lambda, k; t \rangle = \langle \lambda, k; t | \frac{\partial \lambda}{\partial t} | \lambda, k; t \rangle + \lambda \langle \lambda, k; t | \frac{\partial}{\partial t} | \lambda, k; t \rangle,$$

e, novamente utilizando a Eq. (3.5), obtemos

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \langle \lambda, k; t | \frac{\partial I}{\partial t} | \lambda, k; t \rangle. \quad (3.11)$$

Podemos ver então, das Eqs. (3.10) e (3.11), que

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0. \quad (3.12)$$

Vamos agora investigar como os autoestados de $I(t)$ se relacionam com as soluções da equação de Schrödinger. Para isso, vamos primeiro rescrever a Eq. (3.7) utilizando o resultado encontrado na Eq. (3.12), de modo que

$$(\lambda - I) \frac{\partial}{\partial t} | \lambda, k; t \rangle = \frac{\partial I}{\partial t} | \lambda, k; t \rangle. \quad (3.13)$$

Tomando agora o produto escalar da Eq. (3.13) com $|\lambda', k'; t\rangle$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \lambda', k'; t | \frac{\partial I}{\partial t} | \lambda, k; t \rangle &= \lambda \langle \lambda', k'; t | \frac{\partial}{\partial t} | \lambda, k; t \rangle - \langle \lambda', k'; t | I \frac{\partial}{\partial t} | \lambda, k; t \rangle, \\ &= (\lambda - \lambda') \langle \lambda', k'; t | \frac{\partial}{\partial t} | \lambda, k; t \rangle. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Desse modo, usando a Eq. (3.9), a Eq. (3.14) torna-se

$$i\hbar(\lambda - \lambda') \langle \lambda', k'; t | \frac{\partial}{\partial t} | \lambda, k; t \rangle = (\lambda - \lambda') \langle \lambda', k'; t | H | \lambda, k; t \rangle, \quad (3.15)$$

que para $\lambda \neq \lambda'$, se reduz a

$$i\hbar \langle \lambda', k'; t | \frac{\partial}{\partial t} | \lambda, k; t \rangle = \langle \lambda', k'; t | H | \lambda, k; t \rangle. \quad (3.16)$$

A Eq. (3.15) não permanece válida para $\lambda = \lambda'$, se o fosse, poderíamos afirmar que o estado $|\lambda, k; t\rangle$ satisfaz a equação de Schrödinger. Porém, ainda não fixamos a fase do estado $|\lambda, k; t\rangle$, ou seja, ainda estamos livres para multiplicar o estado $|\lambda, k; t\rangle$ por um fator de fase dependente do tempo. Sendo assim, definimos um novo conjunto de autoestados de $I(t)$, que evoluem no tempo de acordo com a equação de Schrödinger, os quais estão relacionados com os antigos estados $|\lambda, k; t\rangle$ através de uma transformação de calibre

$$\psi_{\lambda k}(t) = e^{i\theta_{\lambda k}(t)} | \lambda, k; t \rangle, \quad (3.17)$$

onde $\theta_{\lambda k}(t)$ são funções reais dependentes do tempo.

Os estados $\psi_{\lambda k}(t)$ serão autoestados ortonormais de $I(t)$ desde que, como supomos anteriormente, o invariante não possua operadores com derivadas temporais. Assim, em termos dos novos autoestados, a equação de autovalores para $I(t)$ é

$$I(t)\psi_{\lambda k}(t) = \lambda\psi_{\lambda k}(t). \quad (3.18)$$

A Eq. (3.15) com $\lambda \neq \lambda'$ continua válida para estes novos autoestados. Sendo assim, se escolhermos as fases de modo que a Eq. (3.15) também continue válida para $\lambda = \lambda'$, os novos autoestados também serão soluções da equação de Schrödinger. Então, usando os novos autoestados e a Eq. (3.13), obtemos

$$(\lambda - I) \left[\frac{\partial}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle + i \frac{d\theta_{\lambda k}}{dt} |\lambda, k; t\rangle \right] = \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle \quad (3.19)$$

Calculando o produto da escalar da Eq. (3.19) com $|\lambda', k'; t\rangle$, e utilizando as Eqs. (3.5) e (3.9), obtemos

$$\hbar(\lambda' - \lambda)\delta_{\lambda' \lambda}\delta_{k' k} \frac{d\theta_{\lambda k}}{dt} = (\lambda' - \lambda)\langle\lambda', k'; t| i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H |\lambda, k; t\rangle, \quad (3.20)$$

que para $\lambda = \lambda'$, reduz-se a

$$\hbar\delta_{k' k} \frac{d\theta_{\lambda k}}{dt} = \langle\lambda, k'; t| i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H |\lambda, k; t\rangle. \quad (3.21)$$

Devemos escolher os estados $|\lambda, k; t\rangle$ de tal forma que o lado direito da Eq. (3.21) seja nula para $k' \neq k$ para que a equação seja satisfeita. Como o operador $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H$ é hermitiano, essa diagonalização é sempre possível. Assim, para que os autoestados $\psi_{\lambda k}(t)$ satisfaçam a equação de Schrödinger, as fases devem satisfazer

$$\hbar \frac{d\theta_{\lambda k}}{dt} = \langle\lambda, k; t| i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H |\lambda, k; t\rangle. \quad (3.22)$$

Desse modo, como cada autoestado $\psi_{\lambda k}(t)$ satisfaz a equação de Schrödinger, podemos escrever a solução geral como uma combinação linear das soluções, na forma

$$\psi(t) = \sum_{\lambda, k} C_{\lambda k} e^{i\theta_{\lambda k}(t)} |\lambda, k; t\rangle, \quad (3.23)$$

onde os $C_{\lambda k}$ são coeficientes independentes do tempo.

Vamos agora aplicar esta teoria para o caso de um oscilador harmônico onde massa e frequência sejam dependentes do tempo. Para este caso, a hamiltoniana do sistema é dada por

$$H(t) = \frac{p^2}{2m(t)} + \frac{m(t)\omega^2(t)q^2}{2}, \quad (3.24)$$

onde $m(t)$ e $\omega(t)$ são, respectivamente, a massa e a frequência do oscilador, e q e p são as varáveis canonicamente conjugadas que satisfazem

$$[q, p] = i\hbar. \quad (3.25)$$

Escrevendo as equações de Heisenberg para este sistema, encontramos que

$$\dot{q} = \frac{p}{m(t)}, \quad (3.26a)$$

$$\dot{p} = -m(t)\omega^2(t)q^2, \quad (3.26b)$$

das Eqs. (3.26) obtemos a equação do movimento

$$\ddot{q} + \gamma(t)\dot{q} + \omega^2(t)q = 0, \quad (3.27)$$

onde

$$\gamma(t) = \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}. \quad (3.28)$$

A equação do movimento clássica para a mesma Hamiltoniana (3.24) é análoga à Eq. (3.27)

$$\ddot{q}_{cl} + \gamma(t)\dot{q}_{cl} + \omega^2(t)q_{cl} = 0, \quad (3.29)$$

onde o subscrito *cl* indica que a variável é clássica.

Para encontrar as soluções quânticas exatas para sistemas com Hamiltonianas explicitamente dependentes do tempo, Lewis e Riesenfeld [20] deduziram um operador invariante para um sistema com massa constante e frequência $\omega = \omega(t)$. Seguindo o mesmo procedimento, Pedrosa [38] construiu um operador invariante para a Hamiltoniana dada pela Eq. (3.24). Na Ref. [34], Pedrosa, Serra e Guedes utilizando o operador invariante obtido na Ref. [38] obtiveram função de onda exata do oscilador harmônico com massa e frequência dependentes do tempo com e sem uma perturbação singular.

O invariante construído por Lewis e Riesenfeld [20] tem a forma

$$I(t) = \frac{1}{2}[\alpha(t)q^2 + \beta(t)p^2 + \zeta(t)\{q, p\}], \quad (3.30)$$

onde $\alpha(t)$, $\beta(t)$ e $\zeta(t)$ são funções reais dependentes do tempo, e $\{q, p\}$ é a notação usual do anticomutador de q e p .

Derivando a Eq. (3.30) em relação ao tempo, obtemos

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{2}[\dot{\alpha}q^2 + \dot{\beta}p^2 + \dot{\zeta}\{q, p\} + 2(q\dot{q}\alpha + p\dot{p}\beta) + \zeta(\dot{q}p + p\dot{q} + \dot{p}q + q\dot{p})], \quad (3.31)$$

e usando as Eqs. (3.2), (3.26a) e (3.26b), chegamos nas seguintes relações

$$\dot{\alpha} - 2m(t)\omega^2(t)\zeta = 0, \quad (3.32a)$$

$$\dot{\beta} + \frac{2\zeta}{m(t)} = 0, \quad (3.32b)$$

$$\frac{\alpha}{m(t)} - \beta m(t)\omega^2(t) + \dot{\zeta} = 0. \quad (3.32c)$$

Vamos agora organizar estas últimas três equações de modo a obter uma única equação diferencial, chamada de equação auxiliar do invariante do sistema. Para isto, primeiro vamos fazer a substituição

$$\beta(t) = \sigma^2(t), \quad (3.33)$$

feito isso, a Eq. (3.32b) torna-se

$$\zeta = -m(t)\sigma\dot{\sigma}. \quad (3.34)$$

Agora, das Eqs. (3.33) e (3.34), podemos escrever a Eq. (3.32c) como

$$\alpha = m^2\omega^2\sigma^2 + \dot{m}m\sigma\dot{\sigma} + m^2\dot{\sigma}^2 + m^2\sigma\ddot{\sigma}, \quad (3.35)$$

utilizando agora as Eqs. (3.32a), (3.34) e (3.35), obtemos

$$\frac{d}{dt}(m^2\omega^2\sigma^2 + \dot{m}m\sigma\dot{\sigma} + m^2\dot{\sigma}^2 + m^2\sigma\ddot{\sigma}) + 2m^2\omega^2\sigma\dot{\sigma} = 0, \quad (3.36)$$

ou ainda

$$3m\dot{m}\dot{\sigma}^2 + 2\dot{\sigma}\ddot{\sigma}m^2 + 3m\dot{m}\sigma\ddot{\sigma} + m^2\dot{\sigma}\ddot{\sigma} + m^2\dot{\sigma}\ddot{\sigma} + 2m\dot{m}\sigma^2\omega^2 + 4m^2\sigma^2\omega\dot{\omega} + 2m^2\omega^2\sigma\dot{\sigma} + \dot{m}^2\sigma\dot{\sigma} + m\ddot{m}\sigma\dot{\sigma} = 0. \quad (3.37)$$

Dividindo a Eq. (3.37) por m^2 e colocando σ em evidência, encontramos

$$\sigma \left(3\frac{\dot{m}}{m}\ddot{\sigma} + 4\dot{\sigma}\omega^2 + \ddot{\sigma} + 2\frac{\dot{m}}{m}\sigma\omega^2 + 2\sigma\omega\dot{\omega} + \frac{\dot{m}^2}{m^2}\dot{\sigma} + \frac{\ddot{m}}{m}\dot{\sigma} \right) + 3\left(\frac{\dot{m}}{m}\dot{\sigma}^2 + \dot{\sigma}\ddot{\sigma}\right) = 0. \quad (3.38)$$

Vamos reescrever a Eq. (3.38) na forma

$$\sigma \left(\frac{\dot{m}}{m}\ddot{\sigma} + \dot{\sigma}\omega^2 + \ddot{\sigma} + 2\sigma\omega\dot{\omega} - \frac{\dot{m}^2}{m^2}\dot{\sigma} + \frac{\ddot{m}}{m}\dot{\sigma} \right) + \left(3\dot{\sigma} + 2\frac{\dot{m}}{m}\sigma \right) \left(\ddot{\sigma} + \frac{\dot{m}}{m}\dot{\sigma} + \omega^2\sigma \right) = 0. \quad (3.39)$$

Agora, note que

$$\frac{\dot{m}}{m}\ddot{\sigma} + \dot{\sigma}\omega^2 + \ddot{\sigma} + 2\sigma\omega\dot{\omega} - \frac{\dot{m}^2}{m^2}\dot{\sigma} + \frac{\ddot{m}}{m}\dot{\sigma} = \frac{d}{dt} \left(\ddot{\sigma} + \frac{\dot{m}}{m}\dot{\sigma} + \omega^2\sigma \right), \quad (3.40)$$

então, multiplicando a Eq. (3.39) por $m^2\sigma^2$ e usando a Eq. (3.40), obtemos

$$m^2\sigma^3 \frac{d}{dt} \left(\ddot{\sigma} + \frac{\dot{m}}{m} \dot{\sigma} + \omega^2 \sigma \right) + (3\dot{\sigma}\sigma^2 m^2 + 2m\dot{m}\sigma^3) \left(\ddot{\sigma} + \frac{\dot{m}}{m} \dot{\sigma} + \omega^2 \sigma \right) = 0, \quad (3.41)$$

sabendo que

$$\frac{d}{dt} (m^2\sigma^3) = 3\dot{\sigma}\sigma^2 m^2 + 2m\dot{m}\sigma^3, \quad (3.42)$$

da Eq. (3.41) podemos escrever

$$\frac{d}{dt} \left[m^2\sigma^3 \left(\ddot{\sigma} + \frac{\dot{m}}{m} \dot{\sigma} + \omega^2 \sigma \right) \right] = 0. \quad (3.43)$$

Integrando a Eq. (3.43), obtemos

$$\ddot{\sigma} + \frac{\dot{m}}{m} \dot{\sigma} + \omega^2 \sigma = \frac{C^2}{m^2\sigma^3}, \quad (3.44)$$

onde C^2 é uma constante de integração arbitrária.

Agora, das Eqs. (3.33), (3.34), (3.35) e (3.44), podemos expressar o invariante dado pela Eq. (3.30) na forma

$$I(t) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{Cq}{\sigma} \right)^2 + (\sigma p - m\dot{\sigma}q)^2 \right], \quad (3.45)$$

onde $\sigma(t)$ satisfaz a equação auxiliar (3.44). Fazendo a mudança de escala $\sigma(t) = C^{\frac{1}{2}}\rho(t)$ e inserindo-a na Eq. (3.45) e fazendo $C = 1$, obtemos

$$I(t) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{q}{\rho} \right)^2 + (\rho p - m\dot{\rho}q)^2 \right], \quad (3.46)$$

e a nova equação auxiliar

$$\ddot{\rho} + \frac{\dot{m}}{m} \dot{\rho} + \omega^2 \rho = \frac{1}{m^2 \rho^3}, \quad (3.47)$$

que é a conhecida equação de Milne-Pinney [39, 40] generalizada.

Desse modo, qualquer solução particular da Eq. (3.47) pode ser usada para construir um operador invariante dado pela Eq. (3.46).

Observamos aqui, que as Eqs. (3.27) e (3.47) e o invariante (3.46), constituem um sistema de Ermakov [41, 42] para a hamiltoniana dada pela Eq. (3.24). O invariante dado pela Eq. (3.46) foi deduzido por Ermakov [43] e Lewis [44], é conhecido na literatura como o invariante de Ermakov-Lewis.

Construído o operador invariante $I(t)$, precisamos determinar os seus autoestados e autovalores. Para isto, vamos definir dois operadores dependentes do tempo, $a(t)$ e $a^\dagger(t)$, dados pelas relações

$$a = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{q}{\rho}\right) + i(\rho p - m\dot{p}q) \right], \quad (3.48a)$$

$$a^\dagger = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{q}{\rho}\right) - i(\rho p - m\dot{p}q) \right], \quad (3.48b)$$

as quais satisfazem a relação de comutação

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (3.49)$$

Vamos escrever q e p em função de a e a^\dagger , utilizando as Eqs. (3.48). Assim, obtemos que

$$q = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2} \rho(a + a^\dagger), \quad (3.50a)$$

$$p = i\left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{1}{\rho} - im\dot{p}\right) a^\dagger - \left(\frac{1}{\rho} + im\dot{p}\right) a \right]. \quad (3.50b)$$

Inserindo as Eqs. (3.50) na Eq. (3.46), obtemos

$$I(t) = \hbar \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (3.51)$$

Vamos introduzir um novo operador, na forma

$$N = N^\dagger = a^\dagger a, \quad (3.52)$$

assim, a Eq. (3.51) pode ser escrita como

$$I(t) = \hbar \left(N + \frac{1}{2} \right). \quad (3.53)$$

Notemos que, por causa da simples relação entre os operadores $I(t)$ e $N(t)$, os autoestados normalizados de $I(t)$ também são autoestados de $N(t)$, ou seja, os $|n, t\rangle$ são autoestados simultâneos de $I(t)$ e $N(t)$, isto é

$$N|n, t\rangle = n|n, t\rangle, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (3.54)$$

e

$$I|n, t\rangle = \lambda_n|n, t\rangle. \quad (3.55)$$

Inserindo a Eq. (3.53) na Eq. (3.55), obtemos

$$\hbar \left(N|n, t\rangle + \frac{1}{2}|n, t\rangle \right) = \lambda_n|n, t\rangle,$$

usando a Eq. (3.54), obtemos que o espectro de autovalores de $I(t)$ é dado por

$$\lambda_n = \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (3.56)$$

Além disso, temos que

$$a|n, t\rangle = n^{1/2}|n-1, t\rangle, \quad (3.57a)$$

$$a^\dagger|n, t\rangle = (n+1)^{1/2}|n+1, t\rangle, \quad (3.57b)$$

$$\langle n', t|n, t\rangle = \delta_{n'n}. \quad (3.57c)$$

Note que os operadores a , a^\dagger e N obedecem a mesma álgebra dos operadores de abaixamento, levantamento e número que são utilizados para diagonalizar o operador hamiltoniano do oscilador harmônico quântico independente do tempo.

Agora, vamos calcular as funções de onda exatas para o invariante $I(t)$. Considere a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(q, t) = H(t) \psi(q, t), \quad (3.58)$$

com

$$H(t) = -\frac{\hbar^2}{2m(t)} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{m(t)\omega^2(t)q^2}{2}, \quad (3.59)$$

onde a função de onda $\psi(q, t) \equiv \langle q|\psi(t)\rangle$ está expressa na representação de coordenadas.

Nessa representação, o invariante (3.46) satisfaz a Eq. (3.2) e sua equação de autovalor [veja as Eqs. (3.5) e (3.55)] é dada por

$$I\varphi_n(q, t) = \lambda_n \varphi_n(q, t), \quad (3.60)$$

onde as autofunções φ_n satisfazem a relação $\langle \varphi'_n | \varphi_n \rangle = \delta_{n'n}$, e os autovalores λ_n são constantes. Assim, podemos relacionar as soluções da equação de Schrödinger com as autofunções $\varphi_n(q, t)$ de $I(t)$, de modo que,

$$\psi_n(q, t) = e^{i\theta_n(t)} \varphi_n(q, t), \quad (3.61)$$

onde as fases $\theta_n(t)$ [vide Eq. (3.22)] são dadas por

$$\hbar \frac{d\theta_n(t)}{dt} = \left\langle \varphi_n(q, t) \left| i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t) \right| \varphi_n(q, t) \right\rangle. \quad (3.62)$$

Desse modo, podemos escrever a solução geral da equação de Schrödinger (3.58) na forma

$$\psi(q, t) = \sum_n C_n e^{i\theta_n(t)} \varphi_n(q, t), \quad (3.63)$$

onde C_n são constantes.

Agora, para calcularmos as funções de onda do oscilador descrito pela Hamiltoniana (3.59), utilizaremos a transformação unitária [38, 42]

$$\varphi'_n(q, t) = U\varphi_n(q, t), \quad (3.64)$$

onde

$$U = \exp \left[-\frac{im(t)\dot{\rho}}{2\hbar\rho} q^2 \right]. \quad (3.65)$$

A partir desta transformação, podemos reescrever a Eq. (3.60) na forma

$$I'\varphi'_n(q, t) = \lambda_n\varphi'_n(q, t), \quad (3.66)$$

onde

$$I' = UIU^\dagger. \quad (3.67)$$

E, utilizando as Eqs. (3.60), (3.65) e (3.67), não é difícil mostrar que

$$I' = -\frac{\hbar^2}{2}\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{q^2}{2\rho^2}. \quad (3.68)$$

Inserindo a Eq. (3.68) na Eq. (3.66), e fazendo a substituição de variável $\sigma = q/\rho$, obtemos

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \frac{\sigma^2}{2} \right) \Phi_n(\sigma) = \lambda_n \Phi_n(\sigma), \quad (3.69)$$

onde

$$\varphi'_n(q, t) = \frac{1}{\rho^{1/2}} \Phi_n(\sigma) = \frac{1}{\rho^{1/2}} \Phi_n(q/\rho). \quad (3.70)$$

Introduzimos o fator $1/\rho^{1/2}$ na Eq. (70) para que a condição de normalização

$$\int \varphi_n^{*'} \varphi'_n dq = \int \Phi_n^* \Phi_n d\sigma = 1 \quad (3.71)$$

seja satisfeita.

Note agora que a Eq. (3.69) representa uma equação de Schrödinger de um oscilador harmônico unidimensional independente do tempo, cuja solução é a bem conhecida

$$\Phi_n(\sigma) = \left(\frac{1}{\pi^{1/2} \hbar^{1/2} n! 2^n} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{\sigma^2}{2\hbar} \right) \times H_n \left[\left(\frac{1}{\hbar} \right)^{1/2} \sigma \right], \quad (3.72)$$

com

$$\lambda_n = \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (3.73)$$

e H_n é o polinômio de Hermite de ordem n . Assim, utilizando as Eqs. (3.64), (3.65), (3.70) e (3.72), obtemos

$$\begin{aligned} \varphi_n(q, t) &= \left[\frac{1}{\pi^{1/2} \hbar^{1/2} n! 2^n \rho} \right]^{1/2} \exp \left[\frac{im(t)}{2\hbar} \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i}{m(t)\rho^2(t)} \right) q^2 \right] \\ &\times H_n \left[\left(\frac{1}{\hbar} \right)^{1/2} \left(\frac{q}{\rho} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Agora só nos falta encontrar as fases $\theta_n(t)$ que satisfazem a Eq. (3.62) para obtermos as soluções exatas da equação de Schrödinger (3.58). Para calculá-las, procederemos da seguinte maneira. Vamos inserir as Eqs. (3.59) e (3.64) na Eq. (3.62), obtendo

$$\hbar \frac{d\theta_n}{dt} = \left\langle \varphi'_n \left| i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar \frac{\dot{\rho}}{\rho} q \frac{\partial}{\partial q} + i\hbar \frac{\dot{\rho}}{2\rho} - \frac{I'}{m(t)\rho^2} \right| \varphi'_n \right\rangle. \quad (3.75)$$

Agora, substituindo a Eq. (3.70) na Eq. (3.75), encontramos

$$\hbar \frac{d\theta_n}{dt} = \left\langle \Phi_n \left| -\frac{I'}{m(t)\rho^2} \right| \Phi_n \right\rangle = \frac{\lambda_n}{m(t)\rho^2} \langle \Phi_n | \Phi_n \rangle, \quad (3.76)$$

utilizando a Eq. (3.73), a normalização de Φ_n e integrando a Eq. (3.76), obtemos

$$\theta_n(t) = - \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_0^t \frac{1}{m(t')\rho^2} dt'. \quad (3.77)$$

Assim, podemos escrever a solução exata da equação de Schrödinger (3.58) para o oscilador harmônico com massa e frequência dependentes do tempo, utilizando as Eqs. (3.61) e (3.74), ou seja

$$\begin{aligned} \psi_n(q, t) &= \exp[i\theta_n(t)] \left[\frac{1}{\pi^{1/2} \hbar^{1/2} n! 2^n \rho} \right]^{1/2} \exp \left[\frac{im(t)}{2\hbar} \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i}{m(t)\rho^2(t)} \right) q^2 \right] \\ &\times H_n \left[\left(\frac{1}{\hbar} \right)^{1/2} \left(\frac{q}{\rho} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.78)$$

onde as fases $\theta_n(t)$ são dadas pela Eq. (3.77). Para se obter a solução geral da equação de Schrödinger (3.58), basta inserir as Eqs. (3.74) e (3.77) na Eq. (3.63).

Nas próximas seções, utilizaremos este resultado para calcular a entropia conjunta e a informação de Fisher de osciladores dependentes do tempo.

3.3 Entropia de Leipnik

É bem conhecido que a entropia de Gibbs-Shannon (adimensional) é definida por

$$S(t) = -\frac{1}{N!} \int f \ln(f h^d) dq dp, \quad (3.79)$$

onde $d = DN$ é o número de graus de liberdade do sistema, N o número de partículas, D o número de dimensões espaciais, $f(t, q, p) = f(t, q_1, \dots, q_d, p_1, \dots, p_d)$ a função densidade normalizada não-negativa no espaço de fase do sistema, e $h = 2\pi\hbar$ é a constante de Planck.

Para levar em conta a perda de informação associada a evolução de estados quânticos puros, Leipnik [10] propôs considerar $f(t, q, p)$ como o produto das densidades de probabilidades quânticas do espaço das posições ($|\psi(q, t)|^2$) e dos momenta ($|\phi(p, t)|^2$), de modo que a função densidade dependente do tempo é dada por

$$f(t, q, p) = |\psi(q, t)|^2 |\phi(p, t)|^2 \geq 0, \quad (3.80)$$

onde $\phi(p, t)$ é obtido através da transformada de Fourier de $\psi(q, t)$

$$\phi(p, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{d}{2}}} \int e^{-\frac{ipq}{\hbar}} \psi(q, t) dq, \quad (3.81)$$

e $\psi(q, t)$ satisfaz a equação de Schrödinger dependente do tempo (3.58).

Substituindo a Eq. (3.80) na Eq. (3.79), a entropia conjunta dependente do tempo de estados quânticos puros, que denominamos por $S_j(t)$, é dada por

$$S_j(t) = - \int |\psi(q, t)|^2 \ln |\psi(q, t)|^2 dq - \int |\phi(p, t)|^2 \ln |\phi(p, t)|^2 dp - \ln h^d. \quad (3.82)$$

Leipnik mostrou que para uma função de onda arbitrária unidimensional de uma partícula, é válida a seguinte relação

$$S_j(t) \geq \ln\left(\frac{e}{2}\right). \quad (3.83)$$

Podemos também relacionar $S_j(t)$ com o produto da incerteza, na também chamada relação de incerteza entrópica [2], dada por

$$\Delta q \Delta p \geq \frac{1}{2\pi e} \exp(S_j(t) + \ln h^d) \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (3.84)$$

Para calcular a entropia de Leipnik de osciladores dependentes do tempo, vamos utilizar os resultados obtidos na seção anterior, onde obtivemos a função de onda exata de um oscilador unidimensional com massa e frequência dependentes do tempo

utilizando o método de Lewis e Riesenfeld (LR). Como o produto da incerteza é mínimo para o estado fundamental, vamos considerar apenas a função de onda (3.78) com $n = 0$, ou seja

$$\psi_0(q, t) = \left[\left(\frac{1}{\pi\hbar} \right) \frac{1}{\rho} \right]^{1/2} e^{i\Theta_0(t)} \exp \left[-\frac{1}{2\hbar} \left(\frac{1 - im(t)\rho\dot{\rho}}{\rho^2} \right) q^2 \right], \quad (3.85)$$

onde $\Theta_0(t)$ é dado pela Eq. (3.77), com $n = 0$.

Calculando a transformada de Fourier da Eq. (3.85), obtemos

$$\phi_0(p, t) = \left[\left(\frac{1}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\rho} \right]^{\frac{1}{2}} g(t) [\rho^2 \nu(t)]^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{p^2 \rho^2}{2\hbar} \nu(t) \right], \quad (3.86)$$

onde

$$g(t) = \exp \left(-\frac{i}{2} \int_0^t \frac{1}{m(t')\rho^2} dt' \right), \quad (3.87)$$

e

$$\nu(t) = \frac{1 + im(t)\rho\dot{\rho}}{1 + m^2(t)\rho^2\dot{\rho}^2}. \quad (3.88)$$

Assim, das Eqs. (3.82), (3.85) e (3.86), a entropia de Leipnik de um sistema unidimensional de uma partícula descrito pela Hamiltoniana (3.59), no estado fundamental, é dada por

$$S_j(t) = \ln \left[\left(\frac{e}{2} \right) (1 + m^2(t)\rho^2\dot{\rho}^2)^{1/2} \right], \quad (3.89)$$

e das Eqs. (3.84) e (3.89), obtemos que o produto da incerteza será na forma

$$\Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} (1 + m^2(t)\rho^2\dot{\rho}^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.90)$$

Agora, para qualquer que seja o oscilador dependente do tempo, se conseguirmos calcular a função auxiliar $\rho(t)$, que satisfaz a equação de Milne-Pinney (3.47), encontramos a sua entropia de Leipnik, dada pela Eq. (3.89). Assim, utilizando estes resultados, vamos calcular a entropia de Leipnik dos conhecidos osciladores CK e LE.

Para os osciladores CK, $m(t) = m_0 e^{\gamma t}$ e $\omega(t) = \omega_0$, e a equação (3.47) fica

$$\ddot{\rho} + \gamma\dot{\rho} + \omega_0^2\rho = \frac{e^{-2\gamma t}}{m_0^2\rho^3}. \quad (3.91)$$

Na referência [34], Pedrosa, Serra e Guedes encontraram a seguinte solução da equação de Milne-Pinney para o oscilador de CK

$$\rho(t) = \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}t}}{\sqrt{m_0\Omega}}, \quad (3.92)$$

onde $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$. Então, das Eqs. (3.79), (3.89) e (3.90), a função de onda e a entropia de Leipnik para o oscilador de CK, no estado fundamental, são dadas por

$$\psi_0(q, t) = \left[\frac{(m_0\Omega)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\hbar}} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[\left(\frac{\gamma}{4} - \frac{i\Omega}{2} \right) t \right] \exp \left[-\frac{m_0}{2\hbar} \left(\Omega + \frac{i\gamma}{2} \right) e^{\gamma t} q^2 \right], \quad (3.93)$$

$$S_j(t) = \ln \left[\left(\frac{e}{2} \right) \left(1 + \frac{\gamma^2}{4\Omega^2} \right)^{1/2} \right], \quad (3.94)$$

que é independente do tempo para quaisquer que sejam os valores de γ e ω_0 .

Já para os osciladores LE, $m(t) = t^\alpha$ e $\omega(t) = \omega_0$, e sua respectiva equação de Milne-Pinney é

$$\ddot{\rho} + \frac{\alpha}{t} \dot{\rho} + \omega_0^2 \rho = \frac{1}{t^{2\alpha} \rho^3}. \quad (3.95)$$

Para o caso em que $\alpha = 2$, a Eq. (3.95) torna-se

$$\ddot{\rho} + \frac{2}{t} \dot{\rho} + \omega_0^2 \rho = \frac{1}{t^4 \rho^3}, \quad (3.96)$$

obtendo como uma solução da Eq. (3.96) (vide apêndice B)

$$\rho = \frac{t^{-1}}{\sqrt{\omega_0}}, \quad (3.97)$$

e das Eqs. (3.79), (3.89) e (3.97), a função de onda e a entropia de Leipnik do oscilador LE com $\alpha = 2$, no estado fundamental, são dadas por

$$\psi_0(q, t) = \left[\left(\frac{\omega_0}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} t \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{i\omega_0 t}{2} \right) \exp \left[-\frac{t}{2\hbar} (i + \omega_0 t) q^2 \right], \quad (3.98)$$

$$S_j(t) = \ln \left[\left(\frac{e}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{\omega_0^2 t^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (3.99)$$

E para o caso em que $\alpha = 4$, a equação de Milne-Pinney que devemos resolver é

$$\ddot{\rho} + \frac{4}{t} \dot{\rho} + \omega_0^2 \rho = \frac{1}{t^8 \rho^3}, \quad (3.100)$$

com uma solução sendo (vide apêndice C)

$$\rho = \frac{t^{-2}}{\sqrt{\omega_0}} \left(1 + \frac{1}{\omega_0^2 t^2} \right)^{1/2}, \quad (3.101)$$

e das Eqs. (3.79), (3.89) e (3.101), a função de onda e a entropia de Leipnik do oscilador LE com $\alpha = 4$, no estado fundamental, são dadas por

$$\begin{aligned} \psi_0(q, t) = & \left[\left(\frac{\omega_0}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\omega_0 t^3}{(\omega_0^2 t^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{i \omega_0 t}{2} \right) \exp \left\{ -\frac{t^4}{2 \hbar (\omega_0^2 t^2 + 1)} \left[\frac{(2 \omega_0^2 t^2 + 3) i}{t} \right. \right. \\ & \left. \left. + \omega_0^3 t^2 \right] q^2 \right\}, \end{aligned} \quad (3.102)$$

$$S_j(t) = \ln \left\{ \left(\frac{e}{2} \right) \left[1 + \left(\frac{2 \omega_0^2 t^2 + 3}{\omega_0^3 t^3} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}. \quad (3.103)$$

As densidades de probabilidades, $|\psi_0(q, t)|^2$, para CK ($\gamma = 2$) e LE ($\alpha = 2$ e $\alpha = 4$) são, respectivamente, dadas por

$$|\psi_0(q, t)|^2 = e^t \left(\frac{m_0 \Omega}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{m_0 \Omega}{\hbar} e^{2t} q^2 \right), \quad (3.104a)$$

$$|\psi_0(q, t)|^2 = t \left(\frac{\omega_0}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{\omega_0}{\hbar} t^2 q^2 \right), \quad (3.104b)$$

$$|\psi_0(q, t)|^2 = \left(\frac{\omega_0}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\omega_0 t^3}{(\omega_0^2 t^2 + 1)^{1/2}} \exp \left[-\frac{\omega_0^3 t^6}{\hbar (\omega_0^2 t^2 + 1)} q^2 \right], \quad (3.104c)$$

e os seus gráficos em três dimensões são mostrados nas Figs. 10 (a)-(c).

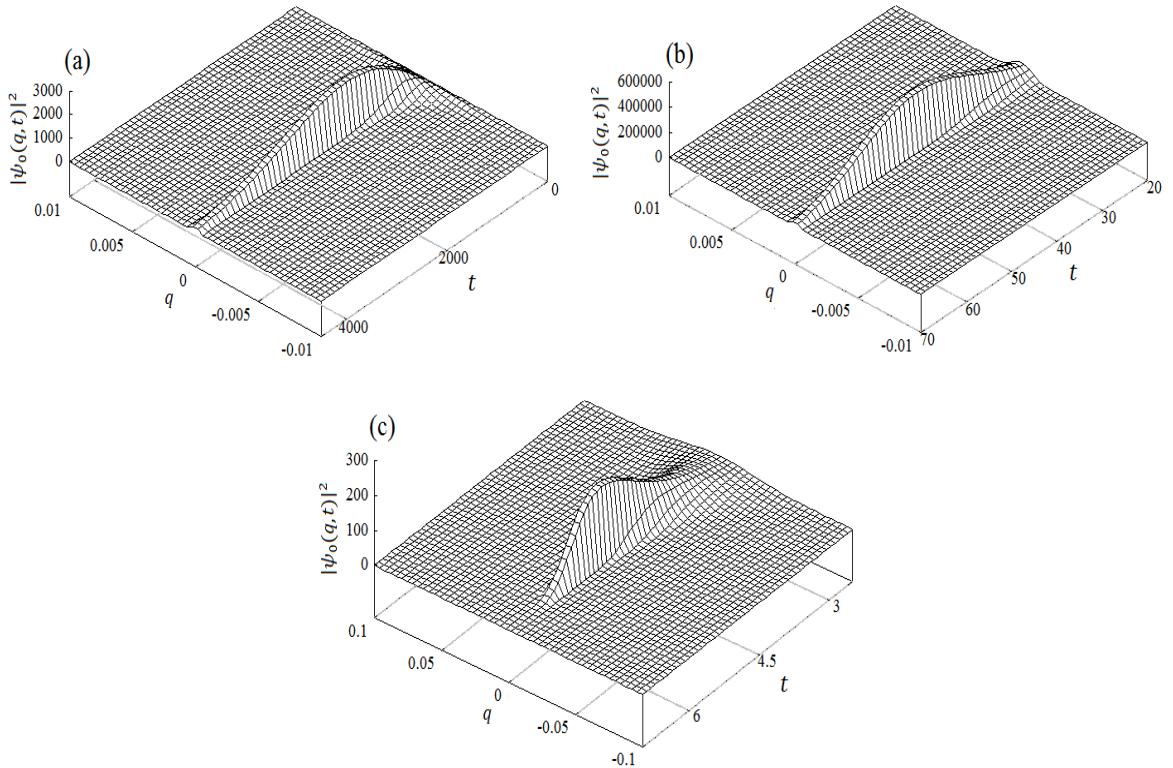
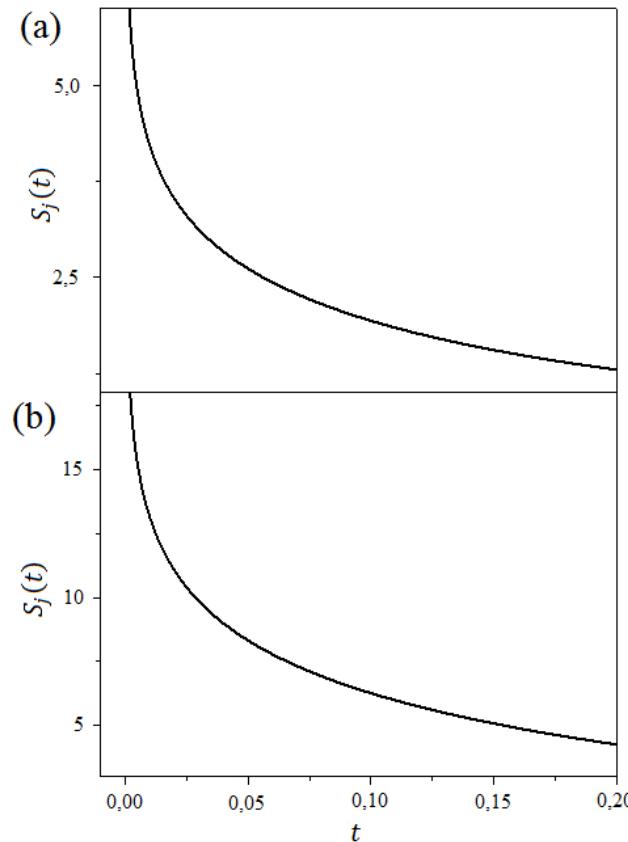


Figura 10 (a)-(c). Densidades de probabilidades $|\psi_0(q, t)|^2$ dos osciladores (a) LE ($\alpha = 2$) e (b) LE ($\alpha = 4$) e (c) CK ($\gamma = 2$), com $\omega_0 = 5$.

Observamos que para $\gamma \neq 0$, a Eq. (3.94) satisfaz a desigualdade de Leipnik [veja a Eq. (3.83)] mas não varia com o tempo, como foi observado na Ref. [14]. Para $\gamma = 0$, obtemos $S_j(t) = \ln\left(\frac{e}{2}\right)$, que é o resultado esperado para o oscilador harmônico simples ($\rho = \frac{1}{\sqrt{m_0\omega_0}} = \text{constante}$). Lembremos que, neste caso, as soluções da equação de Schrödinger são os também chamados estados coerentes (*MACS* considerados por Dunkel e Trigger [11]) que não se propagam no tempo e minimizam tanto o princípio da incerteza quanto a entropia de Leipnik. Se γ aumenta, S_j também aumenta, desde que a desigualdade $\Omega > 0$ seja respeitada, indicando que a entropia (ou a perda de informação) aumenta com o aumento da dissipação.

Nas Figs. 11 (a)-(b), mostramos a dependência temporal da entropia de Leipnik $S_j(t)$ dos osciladores LE com $\alpha = 2$ e $\alpha = 4$. Observamos que tanto para o oscilador com $\alpha = 2$ quanto para o oscilador LE $\alpha = 4$, no estado fundamental, a entropia conjunta diminui com o tempo, tendendo para o valor constante $\ln\left(\frac{e}{2}\right)$ no limite que $t \rightarrow \infty$. Para este oscilador, o fator de amortecimento vai a zero quando

$t \rightarrow \infty$, recaindo no usual oscilador harmônico simples (independente do tempo e não amortecido). Já para o oscilador CK, a entropia de Leipnik é constante.



Figuras 11 (a)-(b). Entropia de Leipnik $S_j(t)$ dos osciladores (a) LE ($\alpha = 2$) e (b) LE ($\alpha = 4$).

Estes resultados e os resultados das Refs. [13-15] demonstram que a evolução temporal de $S_j(t)$ é bastante complexa, dependendo fortemente da natureza do sistema quântico investigado.

3.4 Informação de Fisher

A informação de Fisher de um observável unidimensional X com uma densidade de probabilidade $\wp(x)$ é dada por [21-32]

$$F_X = \int \wp(x) \left[\frac{d \ln \wp(x)}{dx} \right]^2 dx > 0. \quad (3.105)$$

Agora, considerando um sistema quântico descrito pela função de onda $\psi_n(q, t)$, cuja densidade de probabilidade no espaço das posições é $\wp(q, t) = |\psi_n(q, t)|^2$, a sua informação de Fisher, dada pela Eq. (3.105) será

$$F_q = \int |\psi_n(q, t)|^2 \left[\frac{d |\psi_n(q, t)|^2}{dq} \right]^2 dq = \int \psi_n^*(q, t) \psi_n(q, t) \left[\frac{d \psi_n^*(q, t) \psi_n(q, t)}{dq} \right]^2 dq,$$

assim, a informação de Fisher para a posição é dada por

$$F_q = 4 \int \psi_n^{*'}(q, t) \psi_n'(q, t) dq + \int \left[\frac{\psi_n'(q, t)}{\psi_n(q, t)} - \frac{\psi_n^{*'}(q, t)}{\psi_n^*(q, t)} \right]^2 |\psi_n(q, t)|^2 dq. \quad (3.106)$$

Para a função de onda de um oscilador harmônico com massa e frequência dependentes do tempo dada pela Eq. (3.79), com $n = 0$, a informação de Fisher para a posição dada pela Eq. (3.106) será na forma

$$F_q(t) = \frac{2}{\hbar \rho^2}. \quad (3.107)$$

De maneira análoga, a informação de Fisher para o momento é dada por

$$F_p = 4 \int \phi_n^{*'}(p, t) \phi_n'(p, t) dp + \int \left[\frac{\phi_n'(p, t)}{\phi_n(p, t)} - \frac{\phi_n^{*'}(p, t)}{\phi_n^*(p, t)} \right]^2 |\phi_n(p, t)|^2 dp, \quad (3.108)$$

onde $\phi_n(p, t)$ é a função de onda no espaço dos momenta [vide Eq. (3.81)].

Assim, para a função de onda dada pela Eq. (3.79) com $n = 0$, da Eq. (3.108) obtemos que a informação de Fisher para o momento é dada por

$$F_p(t) = \frac{2\rho^2}{\hbar} \left(\frac{1}{1 + m^2(t)\rho^2\dot{\rho}^2} \right). \quad (3.109)$$

E o produto $F_q F_p$ tem a forma

$$F_q(t) F_p(t) = \frac{4}{\hbar^2} \left(\frac{1}{1 + m^2(t)\rho^2\dot{\rho}^2} \right). \quad (3.110)$$

Novamente, basta obter a solução da equação de Milne-Pinney para obtermos $F_q(t)$ e $F_p(t)$.

Para os osciladores CK, obtemos das Eqs. (3.92), (3.107), (3.109) e (3.110)

$$F_q(t) = 2m_0\Omega e^{\gamma t}, \quad (3.111a)$$

$$F_p(t) = \frac{2e^{-\gamma t}}{m_0} \left(\frac{4\Omega}{4\Omega^2 + \gamma^2} \right), \quad (3.111b)$$

$$F_q(t)F_p(t) = 4 \left(\frac{4\Omega^2}{4\Omega^2 + \gamma^2} \right). \quad (3.111c)$$

Já para os osciladores LE com $\alpha = 2$, obtemos das Eqs. (3.96), (3.107), (3.109) e (3.110)

$$F_q(t) = 2\omega_0 t^2, \quad (3.112a)$$

$$F_p(t) = \frac{2}{\omega_0 t^2} \left(\frac{\omega_0^2 t^2}{\omega_0^2 t^2 + 1} \right), \quad (3.112b)$$

$$F_q(t)F_p(t) = 4 \left(\frac{\omega_0^2 t^2}{\omega_0^2 t^2 + 1} \right). \quad (3.112c)$$

Por fim, para os osciladores LE com $\alpha = 4$, obtemos das Eqs. (3.101), (3.107), (3.109) e (3.110)

$$F_q(t) = 2\omega_0 t^4 \left(1 + \frac{1}{\omega_0^2 t^2} \right)^{-1}, \quad (3.113a)$$

$$F_p(t) = \left(\frac{2}{\omega_0 t^4} \right) \left(1 + \frac{1}{\omega_0^2 t^2} \right) \frac{\omega_0^6 t^6}{\omega_0^6 t^6 + (2\omega_0^2 t^2 + 3)^2}, \quad (3.113b)$$

$$F_q(t)F_p(t) = 4 \left[\frac{\omega_0^6 t^6}{\omega_0^6 t^6 + (2\omega_0^2 t^2 + 3)^2} \right]. \quad (3.113c)$$

Para o oscilador CK, vemos que $F_q(t)$ cresce enquanto $F_p(t)$ decresce com o tempo. Os gráficos de $F_q(t)$ e $F_p(t)$ contra o tempo são mostrados na Fig. 12 (a)-(b). Como foi mostrado na Fig. 10 (c), $P(q, t) = |\psi_n(q, t)|^2$ diminui à medida que o tempo aumenta, indicando que a precisão em prever a posição aumenta. Entretanto, o produto $F_q(t)F_p(t)$ não varia com o tempo. Para $\gamma = 0$, temos que $F_q(t)F_p(t) = 4$, que é o resultado esperado para o oscilador harmônico independente do tempo. Com o aumento de γ , $F_q(t)F_p(t)$ decresce (veja a Fig. 12 (c)) indicando que o produto das informações de Fisher decresce com o aumento da dissipação.

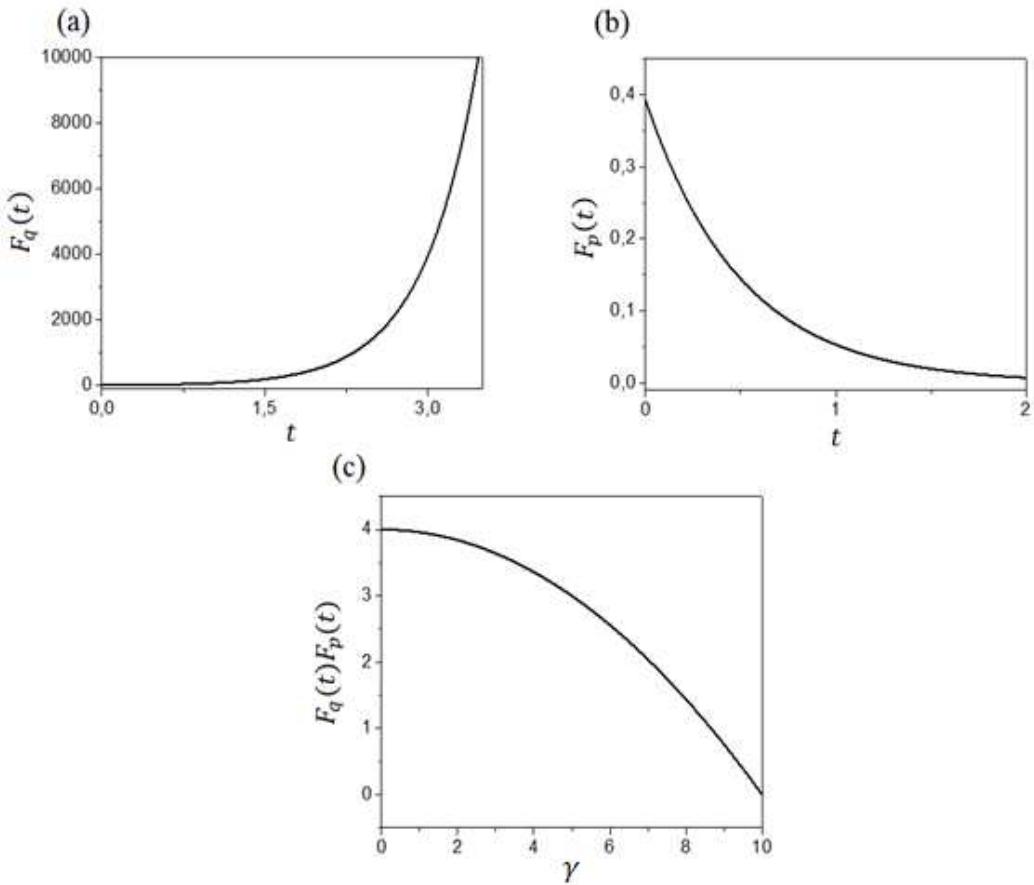


Figura 12. Dependência temporal de (a) $F_q(t)$ e (b) $F_p(t)$ para o oscilador CK com $\gamma = 2$. (c) Variação de $F_q(t)F_p(t)$ com γ . Nestas figuras usamos $\omega_0 = 5$.

Os gráficos de $F_q(t)$, $F_p(t)$ e $F_q(t)F_p(t)$ para os osciladores LE com $\alpha = 2$ e $\alpha = 4$ são mostrados nas Figs. 13 (a)-(c) e 14 (a)-(c), respectivamente. Observamos que $F_q(t)$ aumenta com o tempo. Este aumento indica que $P(q, t) = |\psi_n(q, t)|^2$ se torna cada vez mais localizada, indicando que a precisão em prever a posição da aumenta (veja as Figs. 10 (a)-(b)). Por outro lado, $F_p(t)$ decresce com o aumento do tempo, indicando que a precisão em prever o momento da partícula diminui. Como mostra as Figs. 13 (c) e 14 (c), os valores de $F_q(t)F_p(t)$ são inicialmente zero e tendem para 4 para tempos assintóticos. Isto se deve ao fato de que para os osciladores tipo LE, o fator de amortecimento diminui com o tempo e vai a zero para $t \rightarrow \infty$. E neste caso, o oscilador LE recai no usual oscilador harmônico simples (independente do tempo e não amortecido).

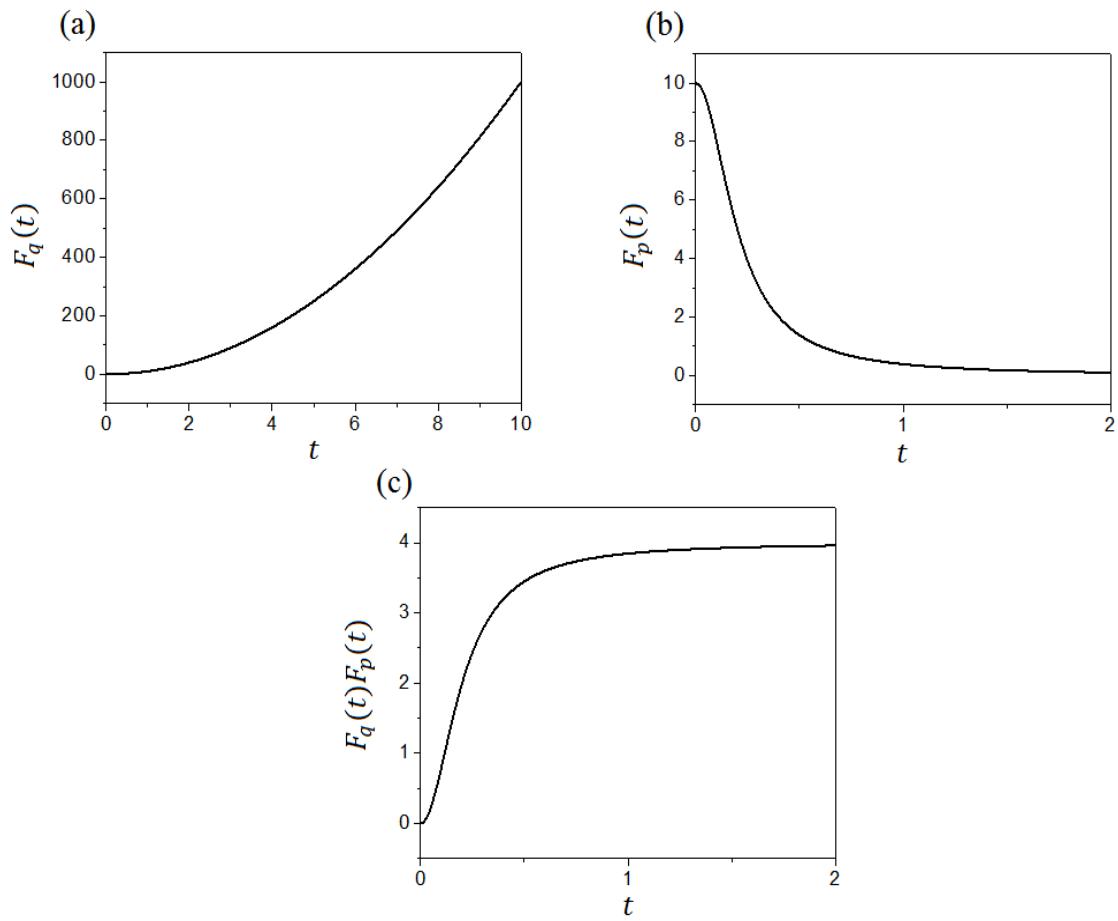


Figura 13. Dependência temporal de (a) $F_q(t)$, (b) $F_p(t)$, e (c) $F_q(t)F_p(t)$ para o oscilador LE com $\alpha = 2$. Nestas figuras usamos $\omega_0 = 5$.

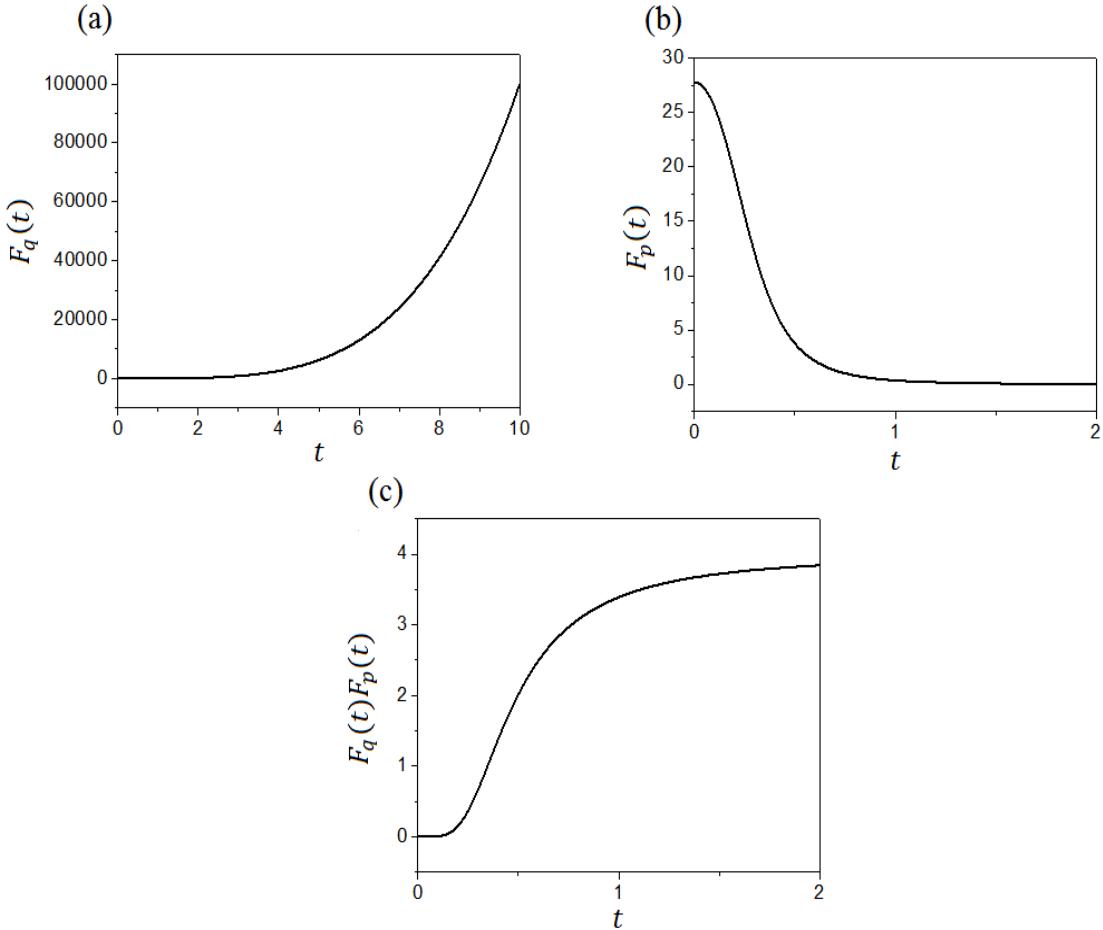


Figura 14. Dependência temporal de (a) $F_q(t)$, (b) $F_p(t)$, e (c) $F_q(t)F_p(t)$ para o oscilador LE com $\alpha = 4$. Nestas figuras usamos $\omega_0 = 5$.

Podemos reescrever a entropia conjunta $S_j(t)$ de osciladores harmônicos dependentes do tempo em termos do produto $F_q(t)F_p(t)$ dos mesmos, usando as Eqs. (3.84) e (3.110), com $\hbar = \pi = 1$, como

$$S_j(t) = 1 - \frac{1}{2} \ln[F_q(t)F_p(t)], \quad (3.114)$$

indicando que $S_j(t)$ decresce quando $F_q(t)F_p(t)$ aumenta e *vice-versa*. A Eq. (3.114) é satisfeita para qualquer oscilador harmônico descrito pela hamiltoniana (3.24), no estado fundamental.

Agora, vamos obter as relações entre nossos resultados e as desigualdades de Stam [45, 46] e Cramer-Rao [47, 48], dadas, respectivamente, por

$$F_q \leq 4\langle p^2 \rangle, \quad F_p \leq 4\langle q^2 \rangle, \quad (3.115)$$

e

$$F_q \geq \frac{1}{\langle q^2 \rangle}, \quad F_p \geq \frac{1}{\langle p^2 \rangle}. \quad (3.116)$$

Utilizando as Eqs. (3.50) e as Eqs. (3.57), podemos escrever os valores esperados de q , q^2 , p e p^2 , e, consequentemente o produto das incertezas, como

$$\langle q \rangle = \langle p \rangle = 0, \quad (3.117)$$

$$\langle q^2 \rangle = \hbar \rho^2 \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (3.118)$$

$$\langle p^2 \rangle = \frac{\hbar}{\rho^2} (1 + m^2(t) \rho^2 \dot{\rho}^2) \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (3.119)$$

$$\Delta q \Delta p = \hbar (1 + m^2(t) \rho^2 \dot{\rho}^2)^{\frac{1}{2}} \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (3.120)$$

Note que o produto das incertezas será mínimo para $\rho = \text{constante}$ e $n = 0$.

Das Eqs. (3.107), (3.109) com $n = 0$, e as Eqs. (3.118) e (3.119), observamos que as desigualdades de Stam são satisfeitas, e para as desigualdades de Cramer-Rao obtemos $F_q = \frac{1}{\langle q^2 \rangle}$ and $F_p = \frac{1}{\langle p^2 \rangle}$, ou usando as Eq. (3.110) e a Eq. (3.120) com $n = 0$, podemos escrever a relação de incerteza de Heisenberg como

$$\Delta q \Delta p = (F_q F_p)^{-1/2}. \quad (3.121)$$

Na Ref. [8], Sánchez-Moreno, Plastino e Dehesa provaram que os funcionais de Fisher associados obedecem a relação $F_x F_p \geq 4D^2$ (onde D é a dimensão do espaço) quando $\psi(\mathbf{x})$ ou $\phi(\mathbf{p})$ são reais. A partir de cálculos numéricos eles observaram que existem muitas funções de onda complexas que obedecem também a desigualdade acima. Eles também mostraram através de dois exemplos específicos de funções de onda complexas – combinação linear de um número finito de funções de

onda de Hermite e pacotes de onda Gaussianos dependentes do tempo – que $F_x F_p \leq 4$.

Para estes últimos, eles obtiveram $F_x F_p = 4(1 + \frac{t^2}{\Delta^4})^{-1}$, que é igual a 4 para $t = 0, < 4$ para $t > 0$ e tende a 0 quando $t \rightarrow \infty$.

Para os osciladores LE ($\alpha = 2$ e $\alpha = 4$) e CK, $F_q F_p \leq 4$. Como já foi dito antes e mostrado nas Figs. 13(c) e 14(c), $F_q F_p = 0$ para $t = 0$ e $F_q F_p$ tende a 4 (limite superior) para $t \rightarrow \infty$. Para os osciladores CK, $F_q F_p = 4$ para $\gamma = 0$ (limite superior). Estes resultados e os relatados na Ref. [8] revelam que pode não ser possível obter uma relação de incerteza universal escrita como um limite inferior para o produto $F_q F_p$.

4. Conclusões

Neste trabalho estudamos clássica e quanticamente dois tipos de osciladores harmônicos dependentes do tempo: o oscilador de LE, onde $m(t) = t^\alpha$ e $\omega = \omega_0$ e o oscilador CK, onde $m(t) = m_0 e^{\gamma t}$ e $\omega = \omega_0$. Resolvemos suas equações de movimento clássicas e, para o caso quântico, utilizando o método de LR, calculamos as suas funções de onda exatas e as utilizamos para calcular a entropia de Leipnik e a informação de Fisher para esses sistemas.

No Capítulo 2 observamos que um termo de dissipação surge naturalmente devido ao fato da massa variar com o tempo. Encontramos a solução da equação de movimento para os osciladores CK e LE e mostramos a variação com o tempo de $q(t)$, $\dot{q}(t)$ e $p(t) = m(t)\dot{q}$. Notamos que o momento canônico é dado agora por $p(t) = m(t)\dot{q}$. Isto faz com que $p(t)$ aumente com o tempo. Mas, o sistema é dissipativo, e, como observado tanto $q(t)$ quanto $\dot{q}(t)$ tendem a zero para tempos assintóticos. Neste caso, é melhor observarmos o diagrama de fase $q(t) \times \dot{q}(t)$.

Para encontrarmos a solução da equação de movimento para o oscilador LE utilizamos o método de Frobenius (vide Apêndice A), que é uma solução por séries de potências. Analisamos o comportamento de $q(t)$, $\dot{q}(t)$ e $p(t) = m(t)\dot{q}$ para $\alpha = 2$ e $\alpha = 4$. Ao compararmos os resultados do oscilador LE com $\alpha = 2$ com o oscilador CK para $\gamma = 2$, observamos para tempos assintóticos que o primeiro é menos amortecido, uma vez que o parâmetro de dissipação diminui à medida que o tempo aumenta.

Discutimos a diferença que ocorre entre as definições de hamiltoniana e energia mecânica para sistemas dependentes do tempo. A relação entre elas é dada pela Eq. (2.21). Para sistemas independentes do tempo, a hamiltoniana é igual à energia mecânica do sistema. Nos casos aqui estudados, osciladores LE e CK, elas são diferentes. Enquanto a energia tende a zero para tempos assintóticos, como deve ocorrer em sistemas dissipativos, a hamiltoniana tende a valores constantes diferentes de zero, não tendo assim nenhuma relação com a energia do sistema. Estes resultados explicam os equívocos cometidos por Özeren [18] na análise da variação da energia mostrado em seu trabalho.

No Capítulo 3 utilizamos a teoria quântica de invariante de LR para calcular a função de onda exata de um oscilador harmônico com massa e frequência

dependentes do tempo. Usando essa função de onda, obtivemos a entropia de Leipnik, $S_j(t)$, para o estado fundamental ($n = 0$) como uma função de $\rho(t)$, que satisfaz a equação de Milne-Pinney (3.47). Feito isso, calculamos para os osciladores de CK e LE com $\alpha = 2$ e $\alpha = 4$ as soluções das suas equações de Milne-Pinney [Eqs. (3.91), (3.96) e (3.100), respectivamente] e utilizando-as, calculamos as entropias de Leipnik para esses três osciladores.

Observamos que para o oscilador CK, $S_j(t)$ não varia com o tempo enquanto que para os osciladores LE, $S_j(t)$ decresce com o tempo tendendo a $\ln\left(\frac{e}{2}\right)$ no limite que $t \rightarrow \infty$. Em nenhum dos três casos que analisamos $S_j(t)$ cresce monotonicamente com o tempo. Estes resultados junto com as observações de Garbaczewski [13] mostram que a perda de informação (entropia de Leipnik) associada com a evolução temporal de estados quânticos puros não possui uma propriedade geral compartilhada por sistemas quânticos arbitrários (abertos ou fechados).

Também para o estado fundamental, calculamos as informações de Fisher para a posição, $F_q(t)$, e para o momento, $F_p(t)$, dos osciladores CK e LE. Observamos que para os três osciladores estudados $F_q(t)$ cresce com o tempo, enquanto $F_p(t)$ decresce. O aumento de $F_q(t)$ (diminuição de $F_p(t)$) indica que a precisão em prever a posição (o momento) da partícula aumenta (diminui). Para o oscilador CK, o produto $F_q(t)F_p(t)$ é constante, enquanto para os osciladores LE o produto é inicialmente zero e tende a 4 quando $t \rightarrow \infty$. A dependência temporal de $F_q(t)F_p(t)$ dos osciladores LE resulta do fato do fator de amortecimento $\gamma(t)$ ser uma função tempo, no caso $\sim \frac{1}{t}$. Para tempos assintóticos, o fator de amortecimento vai a zero e o oscilador LE torna-se o usual oscilador harmônico independente do tempo.

Obtemos uma expressão que relaciona o produto $F_q(t)F_p(t)$ com a entropia de Leipnik, $S_j(t)$, veja a Eq.(3.114). Esta equação é satisfeita para os osciladores CK e LE estudados aqui. E indica que a entropia diminui (aumenta) quando a informação aumenta (diminui).

Verificamos também que as desigualdades de Stam são satisfeitas para os osciladores CK e LE, enquanto que para as de Cramer-Rao não temos mais desigualdades. De fato, obtemos $F_q(t) = \frac{1}{\langle q^2 \rangle}$ e $F_p(t) = \frac{1}{\langle p^2 \rangle}$, o que leva a igualdade

entre a informação de Fisher e a relação de incerteza de Heisenberg mostrada na Eq. (3.121), que também pode ser escrita como $F_q F_p \leq 4$. Isto indica que a desigualdade $F_q F_p \geq 4$ não é uma propriedade geral de sistemas quânticos descrito por quaisquer funções de onda reais ou complexas.

Por fim, gostaríamos de salientar que o procedimento utilizado aqui para um valor específico de n permite obter a entropia de Leipnik, a informação Fisher e suas relações com outras quantidades, de qualquer sistema dependente do tempo, cuja hamiltoniana é dada pela Eq. (3.24) e que uma solução real da Eq. (3.47) seja possível.

Apêndice A

Neste apêndice mostraremos como obter as soluções das Eqs. (2.11) e (2.16). Para isso, vamos utilizar o método de Frobenius [49], que é um método para resolver equações diferenciais por série de potências. Desse modo, consideraremos que a solução da Eq. (2.11) tenha a forma

$$q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^{n+s}, \quad (\text{A.1})$$

calculando as expressões para $\dot{q}(t)$ e $\ddot{q}(t)$ e substituindo-as juntamente com a Eq. (A.1) na Eq.(2.11), obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n [(n+s)(n+s-1) + 2(n+s)]t^{n+s-2} + \omega_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^{n+s} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^{n+s} = \sum_{n=2}^{\infty} C_{n-2} t^{n+s-2}$, a Eq. (A.2) pode ser escrita na forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+s)(n+s+1)t^{n+s-2} + \omega_0^2 \sum_{n=2}^{\infty} C_{n-2} t^{n+s-2} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Considerando os dois primeiros termos do primeiro somatório, obtemos

$$\begin{aligned} & C_0 s(s+1)t^{s-2} + C_1(s+1)(s+2)t^{s-1} + \sum_{n=2}^{\infty} [C_n (n+s)(n+s+1) \\ & + \omega_0^2 C_{n-2}] t^{n+s-2} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Agora, para que a identidade seja estabelecida é necessário que todos os coeficientes de potências diferentes de t sejam zero, assim, escolhendo $C_0 \neq 0$, temos

$$s(s+1) = 0, \quad (\text{A.5})$$

que é a chamada equação indicial, aquela que fornece os possíveis valores de s para Eq. (A.1). Da Eq. (A.5) encontramos $s_1 = 0$ e $s_2 = -1$. Para $s = s_1 = 0$, o segundo termo da Eq. (A.4) só será zero se $C_1 = 0$, e para todos os outros valores possíveis de n , a última condição a ser satisfeita é expressa por

$$C_n = -\frac{\omega_0^2 C_{n-2}}{n(n+1)}, \quad (\text{A.6})$$

que é uma fórmula de recorrência.

Agora, utilizando as Eqs. (A.1) e (A.6), obtemos

$$q_1(t) = \frac{C_0}{\omega_0 t} \left(\omega_0 t - \frac{\omega_0^3 t^3}{3!} + \frac{\omega_0^5 t^5}{5!} - \dots \right) = C_0 \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t}. \quad (\text{A.7})$$

Para $s = s_2 = -1$, o coeficiente C_1 não precisa ser necessariamente zero, e a nova fórmula de recorrência será dada por

$$C'_n = -\frac{\omega_0^2 C'_{n-2}}{n(n-1)}. \quad (\text{A.8})$$

Utilizando as Eq. (A.1) e (A.8), obtemos

$$q_2(t) = \frac{C'_0}{t} \left(1 - \frac{\omega_0^2 t^2}{2!} + \frac{\omega_0^4 t^4}{4!} - \dots \right) + \frac{C'_1}{\omega_0 t} \left(\omega_0 t - \frac{\omega_0^3 t^3}{3!} + \frac{\omega_0^5 t^5}{5!} - \dots \right). \quad (\text{A.9})$$

Como a Eq. (A.9) possui duas constantes arbitrárias, ela será a solução geral da equação (2.11). Neste caso, $q_1(t)$ é uma solução particular de $q_2(t)$. Sabendo que os termos entre parênteses são, respectivamente, as séries de Taylor das funções cosseno e seno em torno de $t = 0$, temos que

$$q(t) = \frac{C'_0}{t} \cos(\omega_0 t) + \frac{C'_1}{\omega_0 t} \sin(\omega_0 t). \quad (\text{A.10})$$

Utilizando as mesmas condições iniciais usadas por Özeren [18], $q(0) = 1$ e $\dot{q}(0) = 0$, a Eq. (A.10) torna-se

$$q(t) = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t}. \quad (\text{A.11})$$

Agora vamos obter a solução da Eq. (2.16). Da Eq. (A.1) e usando a mesma relação que usamos no caso anterior $\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^{n+s} = \sum_{n=2}^{\infty} C_{n-2} t^{n+s-2}$, podemos escrever a Eq. (2.16) como

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n [(n+s)(n+s+3)] t^{n+s-2} + \omega_0^2 \sum_{n=2}^{\infty} C_{n-2} t^{n+s-2} = 0. \quad (\text{A.12})$$

Novamente, calculando os dois primeiros termos do primeiro somatório obtemos

$$C_0 s(s+3)t^{s-2} + C_1(s+1)(s+4)t^{s-1} + \sum_{n=2}^{\infty} [C_n(n+s)(n+s+3) + \omega_0^2 C_{n-2}] t^{n+s-2} = 0. \quad (A.13)$$

A equação indicial é agora dada por $s(s+3) = 0$, que resulta em $s_1 = 0$ ou $s_2 = -3$. Para $s = s_1 = 0$, temos $C_1 = 0$, e a relação de recorrência é dada por

$$C_n = -\frac{\omega_0^2 C_{n-2}}{n(n+3)}. \quad (A.14)$$

Das Eqs. (A.1) e (A.14), obtemos

$$q_1(t) = C_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2 t^2}{2 \cdot 5} + \frac{\omega_0^4 t^4}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{\omega_0^6 t^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots \right). \quad (A.15)$$

Usando a identidade

$$\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t} - \cos(\omega_0 t) = \frac{\omega_0^2 t^2}{3} \left(1 - \frac{\omega_0^2 t^2}{2 \cdot 5} + \frac{\omega_0^4 t^4}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7} - \dots \right), \quad (A.16)$$

obtemos a seguinte expressão para $q_1(t)$

$$q_1(t) = \frac{3C_0}{\omega_0^2 t^2} \left[\frac{\sin t}{\omega_0 t} - \cos(\omega_0 t) \right]. \quad (A.17)$$

Para $s = s_2 = -3$, temos $C_1 = 0$, e a relação de recorrência escreve-se

$$C'_n = -\frac{\omega_0^2 C'_{n-2}}{n(n-3)}. \quad (A.18)$$

Utilizando as Eqs. (A.1) e (A.18) obtemos

$$q_2(t) = C'_0 \left[\frac{1}{t^3} + \frac{\omega_0^2}{2 \cdot t} - \frac{\omega_0^4 t}{2 \cdot 4} + \dots \right], \quad (A.19)$$

que utilizando a identidade

$$\sin(\omega_0 t) + \frac{\cos(\omega_0 t)}{\omega_0 t} = \frac{t^2}{\omega_0} \left[\frac{1}{t^3} + \frac{\omega_0^2}{2 \cdot t} - \frac{\omega_0^4 t}{2 \cdot 4} + \dots \right], \quad (A.20)$$

torna-se

$$q_2(t) = C'_0 \frac{\omega_0}{t^2} \left[\sin(\omega_0 t) + \frac{\cos(\omega_0 t)}{\omega_0 t} \right]. \quad (A.21)$$

Assim, a solução geral da Eq. (2.16) será dada por uma combinação linear das Eqs. (A.17) e (A.21), ou seja

$$q(t) = \frac{3A_0}{\omega_0^2 t^2} \left[\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t} - \cos(\omega_0 t) \right] + \frac{\omega_0 B_0}{t^2} \left[\sin(\omega_0 t) + \frac{\cos(\omega_0 t)}{\omega_0 t} \right], \quad (A.22)$$

onde A_0 e B_0 são constantes.

Utilizando as condições iniciais usadas por Özeren [18] a Eq. (A.22) torna-se

$$q(t) = \frac{3}{\omega_0^2 t^2} \left[\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t} - \cos(\omega_0 t) \right]. \quad (A.23)$$

Apêndice B

No Capítulo 3 vimos que para calcularmos a função de onda de um oscilador harmônico dependente do tempo, precisamos resolver a respectiva equação de Milne-Pinney (3.47). Neste apêndice mostraremos como obter a solução da equação de Milne-Pinney para o oscilador LE com $\alpha = 2$ (3.96) dada pela Eq. (3.97). Para isso, primeiro vamos fazer a seguinte substituição de variável

$$\rho = \frac{1}{t} y, \quad (B.1)$$

desse modo, a Eq. (3.96) torna-se

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \frac{1}{y^3}. \quad (B.2)$$

Multiplicando a Eq. (B.2) por \dot{y} , obtemos

$$\ddot{y}\dot{y} + \omega_0^2 y\dot{y} - \frac{\dot{y}}{y^3} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\dot{y}^2) + \frac{\omega_0^2}{2} \frac{d}{dt}(y^2) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(y^{-2}) = 0. \quad (B.3)$$

Reorganizando os termos, a Eq. (B.3) pode ser escrita na forma

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{y}^2 + \omega_0^2 y^2 + \frac{1}{y^2} \right) = 0, \quad (B.4)$$

o que implica que o termo entre parênteses deve ser uma constante, ou seja

$$\dot{y}^2 + \omega_0^2 y^2 + \frac{1}{y^2} = a^2. \quad (B.5)$$

Vamos resolver a Eq. (B.5) por separação de variáveis, reescrevendo-a na forma

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(y^2 a^2 - \omega_0^2 y^4 - 1)^{1/2}}{y}, \quad (B.6)$$

separando as variáveis e integrando, a Eq. (B.6) torna-se

$$\int \frac{y dy}{(y^2 a^2 - \omega_0^2 y^4 - 1)^{1/2}} = \int dt. \quad (B.7)$$

Fazendo a substituição de variável $u = y^2$ e integrando o lado direito da Eq. (B.7), obtemos

$$\int \frac{du}{2i(1 + \omega_0^2 u^2 - ua^2)^{1/2}} = t + \delta, \quad (\text{B.8})$$

onde δ é uma constante de integração e i é a unidade imaginária.

Como

$$(1 + \omega_0^2 u^2 - ua^2) = \left(\omega_0 u - \frac{a^2}{2\omega_0} \right)^2 + 1 - \frac{a^4}{4\omega_0^2}, \quad (\text{B.9})$$

a Eq. (B.8) pode ser escrita como

$$\int \frac{du}{2i \left[\left(\omega_0 u - \frac{a^2}{2\omega_0} \right)^2 + b^2 \right]^{1/2}} = t + \delta, \quad (\text{B.10})$$

$$\text{onde } b^2 = 1 - \frac{a^4}{4\omega_0^2}.$$

Fazendo uma nova mudança de variável, $v = \frac{1}{b} \left(\omega_0 u - \frac{a^2}{2\omega_0} \right)$, a Eq. (B.10)

torna-se

$$\int \frac{dv}{(v^2 + 1)^{1/2}} = 2\omega_0 i(t + \delta). \quad (\text{B.11})$$

Note que obtemos uma integral simples com uma solução já conhecida. Integrando o lado esquerdo e voltando para a variável u , ficamos com

$$u = \frac{ib}{\omega_0} \operatorname{sen} \left[\frac{2\omega_0(t + \delta)}{b} \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\omega_0} \right)^2. \quad (\text{B.12})$$

Como $u = y^2$, podemos escrever a solução da Eq. (B.2) na forma

$$y = \sqrt{\frac{ib}{\omega_0} \operatorname{sen} \left[\frac{2\omega_0(t + \delta)}{b} \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\omega_0} \right)^2}, \quad (\text{B.13})$$

e da Eq. (B.1), a solução da Eq. (3.96) será

$$\rho = \frac{1}{t} \sqrt{\frac{ib}{\omega_0} \operatorname{sen} \left[\frac{2\omega_0(t+\delta)}{b} \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\omega_0} \right)^2}, \quad (\text{B.14})$$

mas como $I(t)$ é hermitiano, $\rho(t)$ deve ser real, e portanto $b = 0$. Desse modo, a Eq. (B.14) torna-se

$$\rho = \frac{1}{t} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{a}{\omega_0} \right)^2}, \quad (\text{B.15})$$

e como $b^2 = 1 - \frac{a^4}{4\omega_0^2}$, para $b = 0$, temos que

$$\rho = \frac{t^{-1}}{\sqrt{\omega_0}}. \quad (\text{B.16})$$

Apêndice C

Neste apêndice mostraremos como obter a Eq. (3.101), que é a solução da equação de Milne-Pinney do oscilador LE com $\alpha = 4$ [Eq. (3.100)]. Para isso, vamos seguir o procedimento descrito nas Refs. [50-52], usando a mudança de variável

$$\rho = \frac{y}{t^2}, \quad (C.1)$$

que transforma a Eq. (3.100) em

$$\ddot{y} + \left(\omega_0^2 - \frac{2}{t} \right) y = \frac{1}{y^3}, \quad (C.2)$$

cujas soluções estão relacionadas com as soluções ($f_{1,2}$) da equação homogênia associada

$$\ddot{f}_{1,2} + \left(\omega_0^2 - \frac{2}{t} \right) f_{1,2} = 0, \quad (C.3)$$

por meio da equação

$$y = \frac{\sqrt{2}}{|W|} \sqrt{c_1 f_1^2 + c_2 f_2^2 \pm (4c_1 c_2 - k|W|^2)^{1/5} f_1 f_2}, \quad (C.4)$$

onde W é o wronskiano das soluções $f_{1,2}$. Note que a Eq. (C.3) também pode ser obtida se fizermos a substituição $q(t) = \frac{f_{1,2}}{t^2}$ na Eq. (2.16), ou seja, duas soluções linearmente independentes da Eq. (C.3) são (veja apêndice A)

$$f_1 = \frac{\cos(\omega_0 t)}{\omega_0 t} + \sin(\omega_0 t), \quad (C.5)$$

e

$$f_2 = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t} - \cos(\omega_0 t). \quad (C.6)$$

Para estas duas soluções, o wronskiano será $W = \omega_0$, e das Eqs. (C.4) e (C.1), obtemos

$$\rho = \frac{t^{-2}}{\sqrt{\omega_0}} \left(1 + \frac{1}{\omega_0^2 t^2} \right)^{1/2}. \quad (C.7)$$

Referências

- [1] W. Heisenberg, *Z. Phys.* **43**, 172 (1927).
- [2] I. Bialynicki-Birula e J. Mycielski, *Commun. Math. Phys.* **44**, 129 (1975).
- [3] I. Bialynicki-Birula, *Phys. Rev. A* **74**, 052101 (2006).
- [4] A. K. Rajagopal, *Phys. Lett. A* **205**, 32 (1995).
- [5] E. Romera, P. Sánchez-Moreno J. S. e Dehesa, *Chem. Phys. Lett.* **414**, 468 (2005).
- [6] J. S. Dehesa, R. González-Férez e P. Sánchez-Moreno, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, 1845 (2007).
- [7] E. Romera, P. Sánchez-Moreno e J. S. Dehesa, *J. Math. Phys.* **47**, 103504 (2006).
- [8] P. Sánchez-Moreno, A. R. Plastino e J. S. Dehesa, *J. Phys. A: Math. Theor.* **44**, 065301 (2011).
- [9] C. Shannon, W. Weaver, *A Mathematical Theory of Communication*, *Urbana* (1949).
- [10] R. Leipnik, *Information and Control* **2**, 64 (1959).
- [11] J. Dunkel e S. A. Trigger, *Phys. Rev. A* **71**, 052102 (2005).
- [12] S. A. Trigger, *Bull. Lebedev Phys. Int.* **9**, 44 (2004).
- [13] P. Garbaczewski, *Phys. Rev. A* **72**, 056101 (2005).
- [14] Ö. Özcan, E. Aktürk e R. Sever, *Int. J. of Theor. Phys.* **47**, 3207 (2008).
- [15] E. Aktürk, Ö. Özcan e R. Sever, *Int. J. Modern Phys. B* **23**, 2449 (2009).
- [16] P. Caldirola, *Nuovo Cimento* **18**, 393 (1941).
- [17] E. Kanai, *Progress on Theoretical Physics* **3**, 440 (1948).
- [18] S. F. Özeren, *J. Math. Phys.* **50**, 012902 (2009).
- [19] V. H. L. Bessa e I. Guedes, *J. Math. Phys.* **53**, 122104 (2012).
- [20] H. R. Lewis, Jr. e W. B. Riesenfeld, *J. Math. Phys.* **10**, 1458 (1969).
- [21] R. A. Fisher, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **22**, 700 (1925).
- [22] B.R. Frieden, *Phys. Rev. A* **41**, 4265 (1990).

- [23] B.R. Frieden, *Am. J. Phys.* **57**, 1004 (1989).
- [24] B.R. Frieden, *Phys. A* **180**, 359 (1992).
- [25] B. R. Frieden e B. H. Soffer, *Phys. Lett. A* **304**, 1(2002).
- [26] M. Casas, A. Plastino e A. Puente, *Phys. Lett. A* **248**, 161 (1998).
- [27] A. Puente, A. R. Plastino, M. Casas, F. Garcias e A. Plastino, *Phys. A* **277**, 146 (2000).
- [28] K. Berrada, S. Abdel-Khalek, e A.-S. F. Obada, *Phys. Lett. A* **376** (2012).
- [29] J. S. Dehesa, A. R. Plastino, P. Sánchez-Moreno e C. Vignat, *Appl. Math. Lett.* **25** (2012).
- [30] I. Hornyák e Á. Nagy, *Chem. Phys. Lett.* **437** (2007).
- [31] M. J. W. Hall, *Phys. Rev. A* **62**, 012107 (2000).
- [32] J. R. Choi, M. –S. Kim, D. Kim, M. Maamache, S. Menouar, I. H. Nahm, *Ann. Phys. (N.Y.)* **326**, 1381 (2011).
- [33] H. Bateman, *Phys. Rev.* **38**, 815 (1931).
- [34] I. A. Pedrosa, G. P. Serra e I. Guedes, *Phys. Rev. A*, **56**, 4300 (1997).
- [35] J. R. Choi, *Pramana* **61**, 7 (2003).
- [36] I. A. Pedrosa e I. Guedes, *Mod. Phys. Lett. B* **16**, 637 (2002).
- [37] V. Aguiar e I. Guedes, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **34**, 4311 (2013).
- [38] I. A. Pedrosa, *Phys. Rev. A* **55**, 3219 (1997).
- [39] W. E. Milne, *J. Res. Natl. Bur. Stand.*, Vol. **43**, No. 6, p. 537 (1949).
- [40] E. Pinney, *Proc. of the American Math. Soc.* **1**, 681 (1950).
- [41] I. A. Pedrosa, *J. Math. Phys.* **28**, 2662 (1987).
- [42] J. G. Hartley e J. R. Ray, *Phys. Rev. A* **24**, 2837 (1981).
- [43] V. P. Ermakov, *Univ. Izv. Kiev* **20**, (9), 1 (1880).
- [44] H. R. Lewis, Jr., *Phys. Rev. Lett.* **27**, 510 (1967); *J. Math. Phys.* **9**, 1976 (1968).
- [45] A. J. Stam, *Information and Control* **2**, 101 (1959).
- [46] E. Romera, J. Angulo e J. S. Dehesa, *Phys. Rev. A* **59**, 4064 (1999).
- [47] T. Cover, J. Thomas, *Elements of Information Theory*, Wiley, New York (1991).

- [48] A. Dembo, T.M. Cover e J.A. Thomas, *IEEE Trans. Inform. Theory* **37**, 1501 (1991).
- [49] E. Butkov. Física matemática. Rio de Janeiro: LTC, 1998.
- [50] José F. Cariñena e Javier de Lucas, *Phys. Lett. A* **372**, 5385(2008).
- [51] José F. Cariñena e Javier de Lucas, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **6**, 683 (2009).
- [52] M. Lutzky, *Phys. Lett. A* **68**, 3 (1978).

Este projeto de dissertação deu origem aos seguintes trabalhos científicos:

1. V. Aguiar e I. Guedes, *Osciladores harmônicos amortecidos dependentes do tempo*, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **34**, 4311 (2013);
2. V. Aguiar e I. Guedes, *Joint entropy of quantum damped harmonic oscillators*, *Phys. A* **401**, 159 (2014);
3. V. Aguiar e I. Guedes, *Fisher information of quantum damped harmonic oscillators* (submetido à publicação) (2014).
4. V. Aguiar e I. Guedes, *Shannon entropy, Fisher information and uncertainty relations for log-periodic oscillators* (submetido à publicação) (2014).