UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FRANCISCO EMMANOEL ANDRADE DE SOUZA

SUPERPARTÍCULA DE BRINK-SCHWARZ

FORTALEZA

2015

FRANCISCO EMMANOEL ANDRADE DE SOUZA

SUPERPARTÍCULA DE BRINK-SCHWARZ

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho

Coorientador: Prof. Dr. Ricardo Renan Landin de Carvalho

FORTALEZA

2015

FRANCISCO EMMANOEL ANDRADE DE SOUZA

SUPERPARTÍCULA DE BRINK-SCHWARZ

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 30/01/2015

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Ricardo Renan Landin de Carvalho
(Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Célio Rodrigues Muniz
Universidade Estadual do Ceará (FECLI/IGUATU)

Prof. Dr. Makarius Oliveira Tahim
Universidade Estadual do Ceará
(FECLESC/QUIXADÁ)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Física

S715s Souza, F. E. A..

Superpartícula de Brink-Schwarz / Francisco Emmanoel Andrade de Souza. – Fortaleza, 2015.

40 f.:il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Física, Fortaleza, 2015.

Área de Concentração: Física da Matéria Condensada

Orientação: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho

1. Vínculos. 2. Variáveis de Grassmann. 3. Quantização. 4. Supersimetria. I. Título.

CDD:539.725

Aos meus pais,
Sônia e Francisco,
ao meu irmão,
Alexandre, e minha
namorada, Gabriela.

AGRADECIMENTOS

A minha mãe, Sônia Maria, por todo amor e esforço em me educar e ensinar muito sobre a vida;

A meu pai, Francisco, por todo amor, apoio e momentos de descontração;

Ao meu irmão, Alexandre, por toda a ajuda, apoio e pelas brincadeiras;

A minha namorada, Gabriela, por todo amor, apoio e paciência;

A minha avó de coração, Dona Mazé "Bezé"por todo o amor e carinho;

Aos amigos da família Aristóteles e Daniel por toda a ajuda e apoio dado;

Aos amigos da sala 14, Rivânia, Márcio e Naiara, por todo apoio e momentos de descontração;

Aos amigos do grupo, Wendel, Samuel, Wendell e Raul, por todo apoio, ajuda e momentos de alegria;

Ao professor Geová, pela orientação e amizade e ter acreditado no meu potencial;

Ao professor Renan por toda ajuda e excelentes aulas que muito contribuíram;

Aos professores Célio e Makarius por aceitarem participar da banca;

Ao apoio finaceiro do CNPq.

RESUMO

Neste trabalho, a formulação pseudo-clássica da superpartícula de Brinck-Schwarz relativística e não-relativística é apresentada. Tal formulação possui uma parte representada por variáveis de Grassmann que descrevem os graus de liberdade de spin. Durante a formulação da teoria, utilizou-se a teoria dos vínculos para possibilitar a quantização do sistema e foi construída também uma Lagrangeana que represente sistemas Grassmannianos. Tal sistema é invariante sob supersimetria e reparametrização. A equação de Dirac surge como um vínculo da teoria.

Palavras-chave: Vínculos Variáveis de Grassmann Quantização Supersimetria

ABSTRACT

In this work, the pseudo-classical formulation of relativistic and non-relativistic Brinck-Schwarz superparticle is presented. Such a formulation has a portion represented by Grassmann variables that describe the degrees of freedom of spin. During the formulation of the theory, we use the theory of constraints to allow quantization of the system and also we constructed a Lagrangian representing Grassmannian systems. Such a system is invariant under supersymmetry and reparameterizations. The Dirac equation appears as a constrainst of theory.

Keywords: Constraints. Grassmann Variables. Quantization. Supersymmetries. .

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, numerosos modelos relativísticos de partículas e superpartículas foram estudados intensamente. O interesse inicial desses modelos foi de relacioná-los com teoria de cordas, mas está claro que este problema tem um importante significado para o entendimento mais profundo da estrutura da teoria quântica. Um dos modelos mais simples é o que descreve partículas fermiônicas de spin $\frac{1}{2}$ [1]. Sistemas fermiônicos não possuem análogos clássicos, entretanto, isso não significa que estes não possuam teorias no limite $\hbar \to 0$, mas simplesmente nesse limite eles não são descritos por um sistema clássico convencional [2], e sim por sistemas de mecânica pseudo-clássica, pois envolvem variáveis grasmmaniannas para os graus de liberdade de spin além das variáveis c-número.

Em mecânica clássica, essencialmente, todas as variáveis dinâmicas são bosônicas, uma vez que são representadas por variáveis que comutam. Por outro lado, na teoria moderna de partículas elementares, somos tentados a especular que todas as partículas fundamentais da natureza são férmions, inclusive na composição dos bósons. Campos quânticos anticomutantes não possuem um limite clássico em termos de c-números, mas sim em termos de variáveis de Grassmann [3].

Supersimetria representa a menor rota entre estas duas situações extremas que apresenta uma completa equivalência entre variáveis fermiônicas e bosônicas. Isto requer que a supersimetria possua operadores que conectam estes dois tipos de variáveis, umas vez que todas elas são fermiônicas [3].

Neste trabalho será estudada a superpartícula de Brinck-Schwarz, que recebe o nome pelo fato do sistema apresentar uma supersimetria, ou seja, uma simetria que relaciona férmions e bósons [4]. A superpartícula recebe esse nome devido o trabalho de Brinck e Schwarz, de 1981, no qual eles analizam a mecânica quântica de uma superpartícula [5].

A possibilidade de utilizar variáveis de Grassmann em mecânica quântica foi apontada por vários outros autores, como Casalbuoni [6] e Berezin, que introduzem graus de liberdade de spin no nível clássico. No caso da superpartícula, será introduzida a variável fermiônica $\psi^{\mu}(\tau)$ e o seu super-parceiro, a variável posição $\phi^{\mu}(\tau)$. A variável $\psi^{\mu}(\tau)$ é uma variável de Grassmann e é tomada como o grau de liberdade de spin, τ é um parâmetro ao longo da linha mundo da partícula e μ, um índice de Lorentz. O movimento da superpartícula é descrito por uma ação que é invariante por reparametrização e transformações de supersimetria local. A invariância sob reparametrizações de τ é necessária para que a escolha de qualquer parâmetro não altere a física do sistema [7], enquanto que a invariância por transformações de supersimetria local são necessárias para evitar que normas negativas, devido a componente temporal de ψ^{μ}, não apareçam no espectro físico.A teoria quântica do sistema pode ser construída impondo as relações de comutação de Dirac. [8]

Nesta dissertação será apresentado um estudo sobre a superpartícula de Brink-Schwarz não massiva. Diferente da abordagem convencional nesta dissertação a ação de spin $\frac{1}{2}$ será construida sem utilizar teoria de campos. Este estudo foi efetuado ao longo de 5 capítulos.

No Capítulo 2 foi estudada a teoria dos vínculos, que explora sistemas hamiltonianos com vínculos nas equações de movimento, que tem como consequência uma extensão dos parenteses de Poisson, também conhecidos como parentes de Dirac. Neste capítulo, ainda, foi introduzida a quantização canônica.

No capítulo 3, tratamos a partícula relativística de modo a obter uma ação na forma polinomial que nos permita extender a teoria para o caso não massivo, tratando a ação como uma teoria de relatividade geral em uma dimensão.

No capítulo 4 tratamos as variáveis de Grassmann, definindo as relações de derivação, integração e a mecânica Grassmanniana. Também construímos uma ação Grassmanianna clássica e sua extensão relativística e também como quantizamos a teoria.

Por fim, no capítulo 5, contruímos a ação da superpartícula de Brinck-Schwarz na forma de supercampos, quantizamos a teoria, como também calculamos os autovalores de spin. Foi feito o acoplamento mínimo para construírmos a ação eletromagnética

2 TEORIA DOS VÍNCULOS

Para alguns sistemas é possível passar diretamente da Lagrangeana para a teoria quântica, porém são limitadas aos casos onde a Lagrangeana é quadrática nas velocidades. Para evitar esta limitação, vamos obter um método geral para Lagrangeanas mais gerais que esta [7].

2.1 Sistemas Vinculados

Seja um sistema descrito pela Lagrangeana $L(q, \dot{q}, t)$ num espaço de configurações N-dimensional, com coordenadas generalizadas $q_i(t)$, onde $i = 1, 2, ..., N$ e suas respectivas velocidades generalizadas $\dot{q}_i(t)$. A ação do sistema é

$$S = \int_{t_2}^{t_1} dt L(q, \dot{q}, t). \tag{2.1}$$

As equações de movimento clássicas obtidas ao variarmos (2.1) são dadas por

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right), \tag{2.2}$$

que pode ser também escritas na forma $(\partial^2 L/\partial\dot{q}^i\partial\dot{q}^j)\ddot{q}^j = \partial L/\partial q^i - (\partial^2 L/\partial\dot{q}^i\partial q^j)\dot{q}^j$, Em que o termo

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^i\partial\dot{q}^j} \tag{2.3}$$

é chamado *matriz Hessiana*. Se o determinante dessa matriz é nulo, diz-se que o sistema possui vínculos e não podemos determinar unicamente a aceleração do sistema em termos das coordenadas e velocidades generalizadas. Neste caso, teremos diferentes evoluções temporais para uma mesma condição inicial [9]. A transição para o formalismo Hamiltoniano é feito, inicialmente, pela introdução dos momentos canônicos, $p_i = \partial L/\partial\dot{q}^i$. No caso de sistemas não vinculados, q^i e p^i são variáveis independentes. Para o caso de sistemas vinculados, as equações do momnto canônico levam a vínculos denotados por

$$\Phi_m(q,p) \equiv p_m - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} = 0,\; m = 1, 2, ..., M \leq N, \tag{2.4}$$

Esses vínculos, oriundos diretamente da definição do momento, são chamados *vínculos primários*. Outros podem existir, que não surgem de (2.4), e são chamados *vínculos secundários* [10].

Vamos considerar a quantidade $p^i\dot{q}_i - L$. Ao fazermos variações em termos das variáveis q^i e $\dot{q}^i$ teremos, $\delta(p^i\dot{q}_i - L) = \delta p^i\dot{q}_i - \dot{p}^i\delta q_i$. Então vemos que a variação de $(p^i\dot{q}_i - L)$ envolve somente variações dos $q^{i\prime}s$ e $p^{i\prime}s$. Essa quantidade é bem conhecida e leva o nome de Hamiltoniana, H.

Entretanto, quando o sistema possui vínculos essa Hamiltoniana não é unicamente determinada e podemos adicionar combinações lineares dos Φ, que são nulos. Assim, ficaremos com a Hamiltoniana

$$H_T = H + c^m\Phi_m, \tag{2.5}$$

onde os coeficientes c^m podem ser funções dos $q^{i\prime}s$ e dos $p^{i\prime}s$. Ao variarmos H_T obtemos as seguintes equações de movimento

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p^i} + u^m\frac{\partial \Phi_m}{\partial p^i} \tag{2.6}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} - u^m\frac{\partial \Phi_m}{\partial q^i}, \tag{2.7}$$

onde os u_m são coeficientes desconhecidos.

É conveniente introduzir um formalismo que nos permita escrever estas equações de uma forma mais simples, para tal, usaremos o parêntese de Poisson. Se temos duas funções dos $q_i^\prime s$ e dos $p_i^\prime s$, por exemplo $f(q,p)$ e $g(q,p)$, então o parêntese de Poisson, $\{f,g\}$, é definido por $\{f,g\} = (\partial f/\partial q^i)(\partial g/\partial p_i) - (\partial f/\partial p^i)(\partial g/\partial q_i)$. Os parênteses de Poisson possuem algumas propriedades que vêm de sua definição, que são anti-simetria, linearidade, regra do produto e identidade de Jacobi, dadas, respectivamente, por $\{f,g\} = -\{g,f\}$, $\{f_1+f_2,g\} = \{f_1,g\}+\{f_2,g\}$, $\{f_1f_2,g\} = f_1\{f_2,g\}+\{f_1,g\}f_2$ e $\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\} = 0$.

Com o auxílio do parêntese de Poisson, podemos reescrever as equações de movimento. Seja uma função $g(q,p)$, temos

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial g}{\partial p^i}\dot{p}^i. \tag{2.8}$$

Então, com as equações (2.6) e (2.7) a equação (2.8) toma a forma

$$\dot{g} = \{g, H\} + u^m \{g, \Phi_m\}. \tag{2.9}$$

Os parênteses de Poisson de duas funções f e g possuem significado somente se estas puderem ser expressas em termos das variáveis q e p. Para o caso de uma função que não possa ser expressa em termos dos $q's$ e $p's$, esta não possuirá parêntese de Poisson com qualquer outra função. Portanto, vamos extender o significado do parêntese de Poisson e dizer que ele existe para quaisquer duas funções e satisfazem as suas propriedades, mas por outro lado serão ditas indeterminadas se estas não são funções dos $q's$ e $p's$. Desta forma, podemos escrever (2.9) na forma

$$\dot{g} = \{g, H + u^m \Phi_m\}. \tag{2.10}$$

Aqui, vemos os coeficientes u^m aparecendo em um dos membros de (2.10), mas estes não são funções dos $q's$ e $p's$, então não podemos determinar o parêntese de Poisson (2.10). Entretanto, podemos usar as propriedades dos parênteses de Poisson. Utilizando a propriedade da soma, obtemos $\dot{g} = \{g, H\} + \{g, u^m \Phi_m\}$. Agora aplicando a propriedade do produto no segundo membro da equação acima, teremos:

$$\{g, u^m \Phi_m\} = \{g, u^m\}\Phi_m + u^m \{g, \Phi_m\}. \tag{2.11}$$

O último membro em (2.11) é bem definido, pois g e Φ_m são, ambos, funções dos $q's$ e $p's$, enquanto que o termo $\{g, u^m\}$ é indefinido, mas é multiplicado por um termo nulo, Φ_m, e desta forma o primeiro termo do lado direito de (2.11) se anula e assim chegamos à $\{g, H + u^m \Phi_m\} = \{g, H\} + u^m \{g, \Phi_m\}$ e assim (2.10) concorda com (2.9).

Devemos ser cuidadosos acerca do formalismo do parênteses de Poisson, pois no caso dos vínculos, (2.4), nenhuma aplicação foi feita com os mesmos, por isso vamos representá-los por $\Phi_m \approx 0$, onde o sinal "$\approx$" indica "fracamente nulo", pois os parênteses de Poisson de Φ com alguma variável canônica pode ser não nulo. Então a equação (2.10) pode ser escrita na forma $\dot{g} \approx \{g, H_T\}$.

Portanto, as equações de movimento (2.6), (2.7) e (2.9) tomam a forma

$$\dot{q}_i \approx \frac{\partial H}{\partial p_i} + u^m \frac{\partial \Phi_m}{\partial p_i} \tag{2.12}$$

$$\dot{p}_i \approx -\frac{\partial H}{\partial q_i} - u^m \frac{\partial \Phi_m}{\partial q_i} \tag{2.13}$$

$$\dot{g} \approx \{g, H\} + u^m \{g, \Phi_m\}. \tag{2.14}$$

Vamos assumir que os vínculos sejam constantes no tempo, então tomando a equação (2.14) para $g = \Phi_n$ obtemos as seguintes relações de consistência

$$\dot{\Phi}_n \approx 0 \rightarrow \{\Phi_n, H\} + u^m\{\Phi_n, \Phi_m\} \approx 0, \tag{2.15}$$

que nos dá três possibilidades [7]:

1. as equações reduzem-se a $0 = 0$, ou seja, ela é identicamente satisfeita;
2. as equações reduzem-se a equações independentes dos $u's$, envolvendo somente as variáveis $q's$ e $p's$ que são chamadas *vínculos secundários*, Φ_n, $(n = 1, 2, ..., K \leq N - M)$ e devem ser feitas as relações de consistência com estes até que não surjam mais vínculos;
3. as equações determinan os coeficientes u^m.

A definição de vínculos primários e secundários é simplesmente pra diferenciar os vínculos que surgem da definição de momento daqueles que surgem das relações de consistência e é apenas por questão de organização, pois na aplicação do método de quantização canônica ambos tem a mesma importância. Nesse contexto, uma classificação útil é separar os vínculos que possuem parêntese de Poisson fracamente nulo, chamados *vínculos de primeira classe* dos demais, que são chamados *vínculos de segunda classe.* A existência de vínculos de primeira classe significa que a teoria possui simetrias [10].

2.2 Parêntese de Dirac

Seja uma certa quantidade dinâmica $A(q, p, t)$, sua evolução temporal será dada por $dA/dt = (\partial A/\partial q_i)\dot{q}_i + (\partial A/\partial p_i)\dot{p}_i + \partial A/\partial t$ e utilizando as equações (2.12) e (2.13), obtemos,

$$\frac{dA}{dt} \approx \{A, H\} + u^m\{A, \Phi_m\} + \frac{\partial A}{\partial t}, \tag{2.16}$$

com m variando de $m = 1, 2, ..., M + K$, uma vez que os vínculos secundários devem ser incluídos em H_T.

Voltando a equação (2.15) e definindo $C_{nm} = \{\Phi_n, \Phi_m\}$ uma matriz n x m, ficaremos com

$$\{\Phi_n, H\} + u^m C_{nm} \approx 0 \Rightarrow u^p \approx -(C^{-1})^{pn}\{\Phi_n, H\}. \tag{2.17}$$

Substituindo a equação acima em (2.16), teremos

$$\frac{dA}{dt} \approx \{A, H\} - \{A, \Phi_m\}(C^{-1})^{mn}\{\Phi_n, H\} + \frac{\partial A}{\partial t} \approx \{A, H\}_D + \frac{\partial A}{\partial t} \tag{2.18}$$

onde definimos,

$$\{A, H\}_D = \{A, H\} - \{A, \Phi_m\}(C^{-1})^{mn}\{\Phi_n, H\} \tag{2.19}$$

chamado *parênteses de Dirac* entre A e H.

A relação básica de quantização canônica é dada por

$$\{A, B\} \to \frac{1}{i\hbar}[A, B], \tag{2.20}$$

para sistemas que não possuam vínculos. O resultado (2.18) leva a crer que no caso de sistemas vinculados, a ponte com a Mecânica Quântica se faça através dos parênteses de Dirac,

$$\{A, B\}_D \to \frac{1}{i\hbar}[A, B], \tag{2.21}$$

onde o significado de $\{A, B\}_D$, da definição (2.19), é

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \Phi_m\}(C^{-1})^{mn}\{\Phi_n, B\}. \tag{2.22}$$

3 PARTÍCULA RELATIVÍSTICA

Classicamente, podemos escrever a ação da partícula relativística numa forma alternativa que tem duas vantagens em relação a forma original. A primeira é que a ação não contém raiz quadrada, o que nos fornece simples equações de movimento e a segunda é que nos permite escrever a ação para o caso da partícula não massiva. Essas vantagens nos custam o preço de uma variável auxilar extra que não introduz um grau de liberdade extra [11].

3.1 Partícula Pontual sem Spin

Seja uma partícula livre relativística de massa m movendo-se num espaço-tempo de Minkowsky D-dimensional, a ação é simplesmente o comprimento da sua linha-mundo

$$S = -m \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \sqrt{\dot{\phi}^2}, \tag{3.1}$$

onde τ é um parâmetro arbitrário ao longo da linha-mundo e $\phi_\mu(\tau)$, $\mu = 0, 1, 2, ..., D-1$, uma função real no espaço-tempo de Minkowsky, no qual usaremos a métrica $\eta_{\mu\nu} = diag(+1, -1, ..., -1)$. A ação (3.1) é invariante sob transformações na forma

$$\tau \to \tau' = f(\tau), \tag{3.2}$$

com f uma função arbitrária de τ. A Lagrangeana do sistema é dada por

$$L = -m\sqrt{\dot{\phi}^2} \tag{3.3}$$

com $\dot{\phi}^2 = \eta_{\mu\nu}\dot{\phi}^\mu\dot{\phi}^\nu$. A equação de movimento da partícula é dada por $(d/d\tau)(\partial L/\partial\dot{\phi}^\mu) = 0$, com a qual obtemos $(d/d\tau)p_\mu = (dd\tau)(m\dot{\phi}_\mu/\sqrt{\dot{\phi}^2}) = 0$ [11]. A matriz Hessiana para a Lagrangeana da partícula relativística possui autovalores nulos, o que leva a seguinte equação de vínculo que vem da definição do momento canônico, $p_\mu = \partial L/\partial\dot{\phi}^\mu$,

$$\Phi_1 \equiv p^2 - m^2 = 0. \tag{3.4}$$

Se trabalharmos no gauge do tempo próprio $\dot{\phi}^2 = 1$ o momento conjugado toma a forma $p^\mu = m\dot{\phi}^\mu$ e a equação de movimento fica $\ddot{\phi}^\mu = 0$, cuja solução é $\phi^\mu = q^\mu + (p^\mu/m\tau)$ e o vínculo (3.4) fica na forma $\dot{\phi}^2 = 1$.

Então, para podermos escrever nossa Lagrangiana (3.3) de uma forma alternativa e, claro, respeitando as equações de movimento e os vínculos do sistema podemos trabalhar a nossa teoria como uma teoria de relatividade geral do campo escalar em uma dimensão uma vez que devemos ter a invariância geral (3.2).

3.2 Partícula como Campo Escalar

Vamos considerar a Lagrangeana como a de Klein-Gordon no tempo, sem dimensões espaciais e vamos tratar ϕ como um campo escalar. A Lagrangeana de Klein-Gordon pode ser construída de forma a ser covariante ao introduzirmos a métrica $g_{\mu\nu}$ ou, de forma equivalente, o campo vierbein e_μ^m onde m é o índice flat e μ o índice curvo [8].

Para iniciar, vamos tomar a ação do campo escalar D-dimensional, na ausência de gravidade, é dada por

$$S[\phi] = \int d^D x [\frac{1}{2}\partial_m \phi \partial^m \phi - V(\phi)], \tag{3.5}$$

onde $V(\phi)$ é a densidade potencial e vamos assumí-la constante e igual a $-1/2m^2$ e $\partial^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu$. Então, da ação acima obtemos a Lagrangeana $L = 1/2\,(\partial_m\phi\partial^m\phi + m^2)$, e o elemento de volume $d^D x = dx^0 dx^1 ... dx^{D-1}$.

O princípio da equivalência nos diz que para representarmos o campo escalar em um campo gravitacional devemos dar outra interpretação a x^μ e adotar um sistema de coordenadas em queda livre, tal que possamos fazer a identificação $\{x^\mu\} \to \{\xi^m\}, m = 0, 1, ..., D-1$, como um sistema de coordenadas flat em que o elemento de linha é dado por $ds^2 = \eta_{mn} d\xi^m d\xi^n$, e a métrica η_{mn} é a mesma definida no capítulo anterior.

Podemos expressar ξ^m como função local de um sistema de coordenadas não inercial x^μ,

$$d\xi^m = \frac{\partial \xi^m}{\partial x^\mu} dx^\mu. \tag{3.6}$$

A nova Lagrangeana, portanto, passa a ser $L \to 1/2\,(\eta^{mn}\partial_m\phi\partial_n\phi + m^2)$, com $\partial_m \equiv \partial/\partial\xi^m$. Uma vez que estamos lidando com o campo escalar não é necessário fazer mudanças em sua descrição. Na nossa nova descrição o elemento de volume é o do sistema de coordenadas flat, $d^D x \to d\xi^0 d\xi^1 ... d\xi^{D-1}$ e a ação generalizada para incluir os efeitos da gravidade, passa a ser

$$S[\phi] = \frac{1}{2}\int d^D\xi[\eta^{mn}\partial_m\phi\partial_n\phi + m^2]. \tag{3.7}$$

Na equação (3.6), definimos a matrix de transformação entre os sistemas flat e curvo que recebe o nome de *tetrada*, dada por $e^m_\mu \equiv \partial\xi^m/\partial x^\mu$. A operação inversa é definida como $e^\mu_m = \partial x^\mu/\partial\xi^m$ e obedecem a relação $d\xi^m = e^m_\mu dx^\mu = e^m_\mu e^\mu_n d\xi^n$, que nos permite deduzir que $e^m_\mu e^\mu_n = \delta^m_n$ e $e^\mu_m e^m_\nu = \delta^\mu_\nu$.

Em um sistema de coordenadas arbitrário, podemos expressar os operadores derivadas em termos das tetradas, ficando $\partial/\partial\xi^m = e^\mu_m\partial_\mu$, desta forma, a ação generalizada (3.7) pode ser escrita em termos do sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$, tomando a forma $S[\phi] = 1/2\int d^D\xi\left(\eta^{mn}e^\mu_m e^\nu_n\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + m^2\right)$ onde indentificamos a métrica inversa no sistema de coordenadas arbitrário $g^{\mu\nu} = \eta^{mn}e^\mu_m e^\nu_n$.

O elemento de volume pode ser expresso em termos de um sistema de coordenadas arbitrário pela relação $d^D\xi = J(\xi, x)d^Dx$, onde $J(\xi, x)$ é o Jacobiano da transformação. Podemos, da definição do tensor métrico encontrar uma relação entre o determinante da matriz $g_{\mu\nu}$ e o Jacobiano. A transformação de $g_{\mu\nu}$ é dada por $g_{\mu\nu} = (\partial\xi^m/\partial x^\mu)(\partial\xi^n/\partial x^\nu)\eta_{mn}$, se definirmos g como o determinante de $g_{\mu\nu}$, obtemos $g = |\partial\xi/\partial x|^2(-1)^{D-1}$, então $J(\xi, x) \equiv |\partial\xi/\partial x| = \sqrt{(-1)^{D-1}g}$. Uma outra forma é tomarmos o determinante da equação $g^{\mu\nu} = \eta^{mn}e^\mu_m e^\nu_n$, com a qual obtemos $g = (-1)^{D-1}e^2$, onde e é o determinante da tetrada. Portanto, teremos a relação$\sqrt{(-1)^{D-1}g} = e$ e a matriz Jacobiana será $J(\xi, x) = e$. Finalmente podemos construir uma ação que é invariante sob transformações gerais de coordenadas [12],

$$S = \frac{1}{2}\int d^Dx\, e\left(\eta^{mn}e^\mu_m e^\nu_n\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + m^2\right). \tag{3.8}$$

3.3 Ação Polinomial

Num espaço-tempo D-dimensional temos que a nossa Lagrangeana, via (3.8),

$$L = \frac{1}{2}e\left(\eta^{mn}e^\mu_m e^\nu_n\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + m^2\right) \tag{3.9}$$

é invariante sob uma transformação geral de coordenadas $x \to x' = x - f(x)$, portanto, teremos $e^m_\mu(x) = (\partial x'^\lambda/\partial x^\mu)e^m_\lambda(x) = e'^m_\mu(x) - f^\lambda\partial_\lambda e^m_\mu - \partial_\mu f^\lambda e^m_\lambda$, e daí

$$\delta e^m_\mu = f^\lambda\partial_\lambda e^m_\mu + \partial_\mu f^\lambda e^m_\lambda\,, \quad \delta\phi = f^\lambda\partial_\lambda\phi. \tag{3.10}$$

Como foi dito na seção (3.2), vamos tratar o caso para a partícula somente na dimensão tempo, ou seja, vamos aplicar a redução ao ponto, que significa tomar as variáveis de espaço nulas, então $e_\mu^m = e_0^0 \equiv e$ e $e_m^\mu = e_0^0 \equiv e^{-1}$ e as equações (3.10) ficam $\delta e = f\dot{e} + \dot{f}e$ e $\delta\phi = f\dot{\phi}$. Desta maneira, a ação fica

$$S = \frac{1}{2}\int d\tau e\left(\frac{\dot{\phi}^2}{e^2} + m^2\right). \tag{3.11}$$

A ação (3.11) é diferente da ação (3.1), onde temos agora dois campos variando independentemente, e e ϕ.

É direto a verificação da equivalência entre as Lagrangeanas por meio das equações de Euler-Lagrange para e e a substituindo em (3.11). De (3.11), obtemos a equação de movimento $(d/d\tau)(\dot{\phi}/e) = 0$ e a equação de vínculo para o vierbein $\dot{\phi}^2 = m^2e^2$. Daí, o gauge do tempo próprio corrensponde a escolha $e = -\frac{1}{m}$, com o qual recuperamos as equações de movimento $\ddot{\phi} = 0$ e o vínculo $\dot{\phi}^2 = 1$.

Como foi comentado no início do capítulo, é interessante notarmos que no limite $m \to 0$ a ação (3.1) é singular, enquanto que (3.11) não o é. Isto significa que para uma partícula não massiva, não é possível eliminar o campo vierbein para escrever a ação somente com $\phi^\mu(\tau)$ [8].

4 VARIÁVEIS DE GRASSMANN

Partículas observadas na natureza não são necessariamente patículas Bose ou bosônivas, cujos operadores obedecem a relação de comutação $[\phi, p] = i$. Existem partículas chamadas férmions, cujos operadores satisfazem relações de anti-comutação. Uma descrição clássica de férmions requer variáveis anti-comutantes, chamadas variáveis de Grassmann. Para distinguir variáveis de Grassmann de variáveis reais ou complexas que comutam, este último será chamado de "c-número", onde c sigfinica comutar [13].

4.1 Definições Básicas

Se $\{\psi_i\}$, $i = 1, 2, ..., N$, é um conjunto de variáveis de Grassmann real que vamos designar por $\mathcal{G}_N$, estas satisfazem as seguintes relações de anti-comutação

$$\psi_i\psi_j + \psi_j\psi_i \equiv \{\psi_i, \psi_j\} = 0, \tag{4.1}$$

para todos os possíveis valores de i e j, sendo imediato das relações de comutação acima que $\psi_i^2 = 0$. Entretando, assume-se que um c-número, ϕ, real ou complexo comuta com variáveis de Grassmann, dando $\phi\psi_i = \psi_i\phi$.

Para um sistema de N variáveis de Grassmann é possível escrever um produto arbitrário de N variáveis de Grassmann como $\psi_{a_1}\psi_{a_2}\ldots\psi_{a_N} = \varepsilon_{a_1 a_2 \ldots a_N}\psi_1\psi_2\ldots\psi_N$, onde $\varepsilon^{a_1 a_2 \ldots a_N}$ é o símbolo de Levi-Civita em ordem N, definido por

$$\varepsilon_{a_1 \ldots a_N} = \begin{cases} +1 & se \quad \{a_1 \ldots a_N\} \quad é \quad uma \quad permutação \quad par \quad de \quad \{1, \ldots N\} \\ -1 & se \quad \{a_1 \ldots a_N\} \quad é \quad uma \quad permutação \quad ímpar \quad de \quad \{1, \ldots N\} \\ 0 & caso \quad contrario. \end{cases}$$

Segue-se a partir de (4.1) que $\mathcal{G}_N$, como um espaço linear possui dimensão 2^N. É conveniente considerar como bases de $\mathcal{G}_N$, os monômios $1; \psi_1, \ldots, \psi_N; \psi_1\psi_2, \ldots, \psi_{N-1}\psi_N; \ldots; \psi_1\psi_2\ldots\psi_N$. O monômio $\psi_{a_{i_1}}\ldots\psi_{a_{i_p}}$ é chamado monômio de grau p.

Toda função $f(\psi)$ de $\mathcal{G}_\mathcal{N}$ é representada na forma de uma combinação linear dos monômios:

$$f(\psi) = f_0 + \sum_a \psi_a f_1(a) + \sum_{a_i} \psi_{a_1}\psi_{a_2} f_2(a_1, a_2) + \ldots + \sum_{a_i} \psi_{a_1} \ldots \psi_{a_N} f_N(a_1, \ldots, a_N). \quad (4.2)$$

Um elemento da forma $\sum_{a_i} \psi_{a_1} \ldots \psi_{a_p} f_p(a_1, \ldots, a_p)$ é chamado *elemento homogêneo de grau p*. É importante notar que a forma de escrever a função, em geral, não é única. É simples provar que a unicidade é alcançada se tomarmos os coeficientes, não arbitrários, mas funções anti-simétricas, isto é, o sinal muda com a permutação de quaisquer par de argumentos. Portanto, quando uma função f é escrita na forma (4.2), a não ser que outra forma seja especificada, é assumido que os coeficientes $f_p(a_1 \ldots a_p)$ são anti-simétricos.

É possível construir um método para escrever (4.2) de forma única por este método. Por fim, podemos tomar as funções dos coeficientes satisfazendo a condição de $f_p(a_1 \ldots a_p) = 0$ se $a_i \geq a_j$ para quaisquer par de índices $i < j$. Neste caso o elemento homogêneo de grau p é escrito na forma $\sum_{a_1 < a_2 < \ldots < a_p} \psi_{a_1} \ldots \psi_{a_p} f_p(a_1 \ldots a_p)$.

Consideremos que o conjunto $\mathcal{G}''_\mathcal{N}$ de elementos em $\mathcal{G}_\mathcal{N}$ que são representados pela combinação linear dos elementos homogêneos de grau par, $f'' = f_0 + \sum_{a_i} \psi_{a_1}\psi_{a_2} f_2(a_1, a_2) + \ldots$, são chamados *par* e comutam com quaisquer elementos de $\mathcal{G}_\mathcal{N}$, ou seja, são equivalentes a c-números. O conjunto $\mathcal{G}'_\mathcal{N}$ de todos os elementos que são combinações lineares de elementos homogêneos de grau ímpar, $f' = \sum_a \psi_a f_1(a) + \sum_{a_i} \psi_{a_1}\psi_{a_2}\psi_{a_3} f_3(a_1, a_2, a_3) + \ldots$, são chamados *ímpar* e anti-comutam com quaisquer outro elemento ímpar. Evidentemente, todo elemento de $\mathcal{G}_\mathcal{N}$ é unicamente representado na forma $f = f' + f''$, $f' \in \mathcal{G}'_\mathcal{N}$, $f'' \in \mathcal{G}''_\mathcal{N}$ [15].

Se tomarmos $f(\phi, \psi)$ uma função da variável c-número x e de $\psi \in \mathcal{G}_\mathcal{N}$, então a forma da expansão polinomial de $f(\phi, \psi)$ é

$$\begin{aligned} f(\phi, \psi) &= f_0(\phi) + \sum_a \psi_a f_1(\phi, a) + \sum_{a_i} \psi_{a_1}\psi_{a_2} f_2(\phi, a_1, a_2) + \ldots \\ &\quad + \sum_{a_i} \psi_{a_1} \ldots \psi_{a_N} f_N(\phi, a_1, \ldots, a_N). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Devido a conexão, tais funções possuem uma supersimetria, elas são conhecidas como superfunções e esta combinação entre ϕ e ψ é conhecida como super-espaço [14].

4.2 Derivação

Define-se derivada a esquerda e a direita de uma função $f(\psi)$ das variáveis de Grassmann como $(\partial/\partial\psi_j)f$ e $f(\partial/\partial\psi_j)$, respectivamente, de uma função $f(\psi)$ de $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$. Ambas as derivadas são operações lineares em $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}$. Sobre os elementos da base (**??**) as derivadas são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\psi_p}\psi_{i_1}\psi_{i_2}\ldots\psi_{i_s} &= \delta_{i_1p}\psi_{i_2}\ldots\psi_{i_s} \\ &- \delta_{i_2p}\psi_{i_1}\psi_{i_3}\ldots\psi_{i_s} + \ldots + (-1)^{s-1}\delta_{i_sp}\psi_{i_1}\ldots\psi_{i_{s-1}}, \\ \psi_{i_1}\psi_{i_2}\ldots\psi_{i_s}\frac{\partial}{\partial\psi_p} &= \delta_{i_sp}\psi_{i_1}\ldots\psi_{i_{s-1}} \\ &- \delta_{i_{s-1}p}\psi_{i_1}\ldots\psi_{i_{s-2}}\psi_{i_s} + \ldots + (-1)^{s-1}\delta_{i_1p}\psi_{i_2}\ldots\psi_{i_s}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Em outras palavras, para calcular a derivada a esquerda de $\psi_{i_1}\ldots\psi_{i_p}$ em relação a ψ_p, devemos permutar ψ_p até o primeiro lugar no monômio por meio de (4.1) e então derivamos; para calcular a derivada a esquerda devemos permutar ψ_p até o último lugar e então derivar. Obviamente, se o monômio não possuir ψ_p, então ambas as derivadas são nulas [15].

É interessante notar que a diferenciação $\partial/\partial\psi_j$ é nilpotente, ou seja, $\frac{\partial^2}{\partial{\psi_j}^2} = 0$. Alguns exemplos simples podem ser tratados a partir dessa relação, como por exemplo a regra de Leibnitz que, para duas variáveis de Grassmann toma a forma $(\partial/\partial\psi_k)(\psi_i\psi_j) = (\partial\psi_i/\partial\psi_k)\psi_j - (\partial\psi_j/\partial\psi_k)\psi_i = \delta_{ik}\psi_j - \delta_{jk}\psi_i$, com a qual podemos mostrar que $\{\partial/\partial\psi_i, \partial/\partial\psi_j\} = 0$ [13].

4.3 Integração

Para definir a integração para variáveis de Grassmann, as propriedades da diferencial de uma variável de Grassmann deve ser determinada. Para um sistema de N variáveis de Grassmann o operador diferencial irá ser assumido para tomar a mesma forma como um c-número, $d = d\psi_i\frac{\partial}{\partial\psi_i}$, desta definição, fica claro que $d\psi_i$ é uma variável de Grassmann, portanto, $\{\psi_i, d\psi_j\} = \{d\psi_i, d\psi_j\} = 0$ [14]

Definimos as integrais simples como [15]:

$$\int d\psi_i = 0, \qquad \int d\psi_i\psi_i = 1. \tag{4.5}$$

Uma propriedade interessante das integrais acima é a invariância por translação.[14]

Integrais múltiplas deverão ser entendidas como integrais iteradas. Assim, usando o fato de $d\psi_i$ e ψ_j comutarem e a definição (4.5) mostra-se que a integral $\int d\psi_{a_N} \ldots d\psi_{a_1} f(\psi)$ para todos os monômios é dada por $\int d\psi_{a_N} \ldots d\psi_{a_1} f(\psi) = N! f_N(1, \ldots, N)$, para um elemento arbitrário. As integrais (4.5) são chamadas *integrais de Berezin* [15].

Uma "função"que merece destaque é a distribuição delta de Dirac, que pode ser definida para variáveis de Grassmann de uma maneira bem simples. Por analogia do caso dos c-número, a delta de Dirac para uma simples variável de Grassmann deve satisfazer $\int d\psi \delta(\psi - \psi') f(\psi) = f(\psi')$, onde ψ e ψ' são ambas variáveis de Grassmann. É direto, usando (4.5) e a representação polinomial de f, para mostrar que $\delta(\psi - \psi') = \psi - \psi'$.

4.4 Mecânica Clássica

Vamos aqui, formular a mecânica clássica no caso de variáveis de Grassmann e o resultado obtido, obviamente, possui uma forma diferente da usual, porém os conceitos de ação e Hamiltoniana sobrevivem à transição. Os parênteses de Poisson podem ser adaptados à variáveis de Grassmann afim de permitir a definição de uma mecânica quântica Grassmanniana.

Para construírmos a ação Grassmanniana, vamos inicialmente considerar um espaço N-dimensional e parametrizar a variável real ψ_i de forma que possamos representar a "posição"da partícula num determinado instante t, então $\psi_i \equiv \psi_i(t)$. Da equação (4.1), temos que $\{\psi_i(t), \psi_j(t')\} = 0$, e como nosso ψ_i é função de t, é possível termos uma derivada temporal, $\dot{\psi}_i(t)$, onde, ao derivarmos $\{\psi_i(t), \psi_j(t')\} = 0$ em relação ao tempo t, teremos $\{\psi_i(t), \dot{\psi}_i(t')\} = 0$, que nos mostra que a derivada em relação ao tempo de uma variável de Grassmann, também é uma variável de Grassmann [14]. Assim, uma possível ação para um sistema é

$$S = \frac{i}{2} \int dt \psi_i \dot{\psi}_i. \tag{4.6}$$

Ao aplicarmos o princípio de Hamilton na ação acima, obtemos

$$\delta S = \int dt \left(\frac{i}{2} \psi_i \delta \dot{\psi}_i + \frac{i}{2} \delta \psi_i \dot{\psi}_i \right) = -i \int dt \dot{\psi}_i \delta \psi_i = 0,$$

foi aplicada integração por partes no primeiro termo depois da igualdade. A equação de movimento obtida é [4]

$$\dot{\psi}_i = 0. \tag{4.7}$$

Equações de movimento de Hamilton podem ser construídas de forma similar a contruída com c-números. Vamos definir π_i, o momento conjugado a variável de Grassmann ψ_i, portanto a Lagrangeana em termos da Hamiltoniana tem a forma $L(\psi, \dot{\psi}) = \pi_i \dot{\psi}_i - H(\pi, \psi)$, é importante respeitar a ordem do produto. Ao variarmos a ação e aplicando o princípio de Hamilton, obtemos $\delta S = \int dt \left[\delta\pi_i \left(\dot{\psi}_i - \partial H/\partial\pi_i\right) + \delta\psi_i \left(\dot{\pi}_i - \partial H/\partial\psi_i\right)\right] = 0$, e daí as equações de Hamilton são

$$\dot{\pi}_i = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \quad \dot{\psi}_i = \frac{\partial H}{\partial \pi_i}. \tag{4.8}$$

O sinal diferente entre as equações de Hamilton para um sistema Grassmanniano e para um sistema bosônico vem do fato de π_i e $\dot{\psi}_i$ anti-comutarem. Segue da definição da Larangeana que [14]

$$\pi_i = -\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_i}. \tag{4.9}$$

O parênteses de Poisson para variáveis de Grassmann é definido por $\{A, B\}_+ \equiv (\partial A/\partial\psi_i)(\partial B/\partial\pi_i) + (\partial A/\partial\pi_i)(\partial B/\partial\psi_i)$, que é chamado *anti-pararênteses de Poisson*. É simples ver que o anti-pararênteses de Poisson de ψ_i e π_j é dado por [14]

$$\{\psi_i, \pi_j\}_+ = \delta_{ij}. \tag{4.10}$$

4.5 Quantização Canônica

Para quantizarmos a teoria devemos, primeiramente, calcular o momento canônico associado a variável ψ_i que foi definido em (4.9). A Lagrangeana do sistema pode ser obtida de (4.6). É interessante notar que a matriz Hessiana do sistema possui autovalores nulos, o que configura vínculos primários $\partial^2 L/(\partial\dot{\psi}_i \partial\dot{\psi}_j) = 0$.

Sem perda de generalidade, podemos definir o anti-parêntese de Dirac a partir da definição (2.22)

$$\{A, B\}_{D+} = \{A, B\}_+ - \{A, \Phi_m\}_+ C^{-1}_{mn} \{\Phi_n, B\}_+, \tag{4.11}$$

onde A, B e Φ_m são, agora, variáveis de Grassmann.

Agora, vamos calcular os vínculos da teoria, definidos em (2.4). Para tal, vamos utilizar a definição (4.9) e, desta forma, obtemos os vínculos

$$\Phi_m = \pi_m - \frac{i}{2}\psi_m. \tag{4.12}$$

Para calcularmos as relações de consistência (2.15), precisamos calcular a Hamiltoniana do sistema, que é dada por $H(\pi, \psi) = \pi_i \dot{\psi}_i - L(\psi, \dot{\psi})$, que ao substituírmos a Lagrangeana $L = (i/2)\psi_i \dot{\psi}_i$ e o momento $\pi_m = (i/2)\psi_m$ obtemos que a Hamiltoniana é nula. As relações de consistência ficam $\dot{\Phi}_n \approx 0 \rightarrow \{\Phi_n, H\}_+ + u_m\{\Phi_n, \Phi_m\}_+ \approx 0$, mas como $H = 0$, obtemos $u_m\{\Phi_n, \Phi_m\}_+ \approx 0$, resolvendo o antiparênteses de Poisson entre Φ_n e Φ_m chegamos à $\{\Phi_n, \Phi_m\}_+ = (-i)\delta_{mn}$, o que nos dá a solução para os coeficientes, $u_n \approx 0$. Da equação de consistência fica claro que nenhum vínculo de segunda classe surge, então podemos calcular o anti-parênteses de Dirac entre ψ_i e π_j, assim

$$\{\psi_i, \pi_j\}_{D+} = \{\psi_i, \pi_j\}_+ - \{\psi_i, \Phi_m\}_+ C^{-1}_{mn}\{\Phi_n, \pi_j\}_+, \tag{4.13}$$

onde definimos a matriz $C_{mn} \equiv \{\Phi_m, \Phi_n\} = -i\delta_{mn}$. Por fim, obtemos

$$\{\psi_i, \pi_j\}_{D+} = \frac{1}{2}\delta_{ij}. \tag{4.14}$$

A relação de quantização canônica equivalente a (2.21) é $\{A, B\}_{D+} \rightarrow (1/i\hbar)[A, B]_+$, onde $[A, B]_+$ é o anti-comutador e é definido por $[A, B]_+ = AB + BA$, portanto, obtemos as relações de anti-comutação

$$[\psi_i, \pi_j]_+ = \frac{i\hbar}{2}\delta_{ij}\,, \quad [\psi_i, \psi_j]_+ = \hbar\delta_{ij}, \tag{4.15}$$

onde usamos a definição do momento canônico na segunda relação de anti-comutação.

É interessante notar que se tomarmos a dinâmica da variável $\psi(t)$, obteremos, via (2.14), $\dot{\psi}_i \approx \{\psi_i, H\} + u_m\{\psi_i, \Phi_m\}_+$, onde $\dot{\psi}_i = d\psi_i/dt$, refere-se a um tempo absoluto, ou seja, as equações de movimento de Hamilton não são manifestamente relativísticas. No entanto, o que ocorre é que $H = 0$, então a dinâmica de $\psi(t)$ fica $\dot{\psi}_i \approx u_m\{\psi_i, \Phi_m\}_+$. Como os coeficientes u_m são arbitrários, podemos multiplicar os $d\psi_i/dt's$ por um fator qualquer, que representa uma diferente escala temporal, ou seja, temos equações de movimento em que a escala de tempo é arbitrária. Assim, podemos introduzir uma outra variável temporal τ ao invés de t, que nos dá as equações de movimento

$$\frac{d\psi_i}{d\tau} \approx u'_m\{\psi_i, \Phi_m\}_+, \tag{4.16}$$

que são equações de movimento onde a variável temporal não é absoluta. Se olharmos a ação (4.6) podemos notar que a mesma é invariante por reparametrizações de t. Sendo assim, podemos concluir que esta ação pode representar muito bem o sistema relativístico e para tal devemos apenas inluir a invariância de Lorentz, assim temos que a ação relativística para variáveis de Grassmann tem a forma [7]

$$L = \frac{i}{2}\eta_{\mu\nu}\psi^\mu\dot{\psi}^\nu. \tag{4.17}$$

5 A SUPERPARTÍCULA

O movimento de partículas com spin pode ser descrito em termos da posição $\phi^\mu(\tau)$ e variáveis de Grassmann $\psi^\mu(\tau)$, que são quadri-vetores no espaço de Minkowski. O sistema é invariante sobre transformações gerais de coordenadas $\tau \to f(\tau)$ o que nos vai proporcionar uma relatividade geral em uma dimensão. Existe também uma invariância local, que corresponde a uma supersimetria, quando o sistema é escrito de forma a ser manifestamente covariante. Iremos tratar aqui o caso mais simples, quando a partícula é não massiva [23].

Para tratarmos o caso não-relativístico tomaremos o limite da ação massiva com $c \to \infty$, com o qual obteremos a ação em três dimensões dependentes do tempo, tal ação será invariante por translações no tempo e transformações de supersimetria locais [4].

5.1 Ação relativística para a superpartícula de Brink-Schwarz não massiva

A ação para a superpartícula de Brink-Schwarz não massiva é dada pela associação da ação da partícula relativística polinomial não massiva juntamente com a ação relativística Grassmanniana (3.11) e (4.17), respectivamente, que nos dá a ação

$$S = \frac{1}{2}\int d\tau \left(\dot{\phi}^2 e^{-1} - \eta_{\mu\nu}\psi^\mu\dot{\psi}^\nu\right), \tag{5.1}$$

cuja Lagrangeana pode ser escrita como uma derivada total, que implica numa invariância da ação. É possível que, devido a componente temporal de ψ^μ normas negativas apareçam no espectro físico assim como acontece com a partícula relativística. Para evitar este problema é necessário adicionar uma invariância adicional que sane o possível problema e nos dê uma invariância por supersimetria. Daí, introduzimos um super-parceiro, χ, ao campo vierbein. A Lagrangeana fica, então, na forma

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{\phi}^2 e^{-1} - \eta_{\mu\nu}\psi^\mu\dot{\psi}^\nu - \eta_{\mu\nu} i e^{-1}\chi\dot{\phi}^\mu\psi^\nu\right), \tag{5.2}$$

que é invariante por reparametrização se χ transforma-se como

$$\delta\chi = \dot{f}\chi + f\dot{\chi}, \tag{5.3}$$

A transformação por reparametrização é dada por

$$\begin{aligned}
\delta L &= \frac{1}{2}\Big[2e^{-1}\dot{\phi}^\mu\delta\dot{\phi}_\mu - \dot{\phi}^2 e^{-2}\delta e - i\psi^\mu\delta\psi_\mu - i\delta\psi^\mu\dot{\psi}_\mu + ie^{-2}\chi\dot{\phi}^\mu\psi_\mu\delta e - ie^{-1}\delta\chi\dot{\phi}^\mu\psi_\mu \\
&\quad -ie^{-1}\chi\delta\dot{\phi}^\mu\psi_\mu - ie^{-1}\dot{\phi}^\mu\delta\psi_\mu\Big] = \frac{1}{2}\Big[2\dot{\phi}^\mu(\dot{f}\dot{\phi}_\mu + f\ddot{\phi}_\mu) - \dot{\phi}^2 e^{-2}(f\dot{e} + \dot{f}e) \\
&\quad -i\psi^\mu(f\dot{\psi}_\mu + f\ddot{\psi}_\mu) - if\dot{\psi}^2 + ie^{-2}\chi\dot{\phi}^\mu\psi_\mu(f\dot{e} + \dot{f}e) - ie^{-1}(f\dot{\chi} + \dot{f}\chi)\dot{\phi}^\mu\psi_\mu \\
&\quad -ie^{-1}\chi(\dot{f}\dot{\phi}^\mu + f\ddot{\phi}^\mu)\psi_\mu - ie^{-1}\chi f\dot{\phi}^\mu\dot{\psi}_\mu\Big] = \frac{d}{d\tau}(fL),
\end{aligned} \tag{5.4}$$

a variação da Lagrangeana é uma derivada total, que implina na invariância por reparametrização.

Se escolhermos as seguintes transformações de supersimetria local,

$$\begin{aligned}
\delta\phi &= i\alpha\psi, \qquad \delta\psi = \alpha\left(\dot{\phi}e^{-1} - \frac{i}{2}e^{-1}\chi\psi\right); \\
\delta e &= i\alpha\chi, \qquad \delta\chi = 2\dot{\alpha},
\end{aligned} \tag{5.5}$$

teremos uma invariância por transformações de supersimetria local. A variável de Grassmann α é uma função arbitrária de τ e sob as transformações (5.5), a variação da ação é

$$\begin{aligned}
\delta L &= \frac{1}{2}\Big[2e^{-1}\dot{\phi}^\mu\delta\dot{\phi}_\mu - \dot{\phi}^2 e^{-2}\delta e - i\psi^\mu\delta\psi_\mu - i\delta\psi^\mu\dot{\psi}_\mu + ie^{-2}\chi\dot{\phi}^\mu\psi_\mu\delta e - ie^{-1}\delta\chi\dot{\phi}^\mu\psi_\mu \\
&\quad -ie^{-1}\chi\delta\dot{\phi}^\mu\psi_\mu - ie^{-1}\dot{\phi}^\mu\delta\psi_\mu\Big] = \frac{1}{2}\Big\{2ie^{-1}\dot{\phi}^\mu(\dot{\alpha}\psi_\mu + \alpha\dot{\psi}_\mu - ie^{-2}\dot{\phi}^2\alpha\chi \\
&\quad -i\alpha\left(e^{-1}\dot{\phi}^\mu - \frac{i}{2}e^{-1}\chi\psi^\mu\right)\dot{\psi}_\mu - i\psi^\mu\Big[\dot{\alpha}\left(e^{-1}\dot{\phi}_\mu - \frac{i}{2}e^{-1}\chi\psi_\mu\right) \\
&\quad +\alpha\left(e^{-1}\ddot{\phi}_\mu - e^{-2}\dot{e}\dot{\phi}_\mu + \frac{i}{2}e^{-2}\dot{e}\chi\psi_\mu - \frac{i}{2}e^{-1}\dot{\chi}\psi_\mu - \frac{i}{2}e^{-1}\chi\dot{\psi}_\mu\right)\Big] \\
&\quad -e^{-2}\alpha\chi^2\dot{\phi}^\mu\psi_\mu - 2ie^{-1}\dot{\alpha}\dot{\phi}^\mu\psi_\mu - ie^{-1}\chi(i\alpha\dot{\psi}^\mu + i\dot{\alpha}\psi^\mu)\psi_\mu \\
&\quad -ie^{-1}\chi\dot{\psi}^\mu\alpha\left(\dot{\phi}_\mu - \frac{i}{2}\chi\psi_\mu\right)\Big\} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}(\alpha e^{-1}\psi^\mu\dot{\phi}_\mu)
\end{aligned} \tag{5.6}$$

e assim nosso sistema tem as invariâncias requeridas [8]. Se tomarmos o comutador entre duas transformações de supersimetria e atuarmos sobre os campos, encontraremos

$$\begin{aligned}
[\delta_\beta, \delta_\alpha]e &= f\dot{e} + \dot{f}e + i\alpha'\chi \qquad [\delta_\beta, \delta_\alpha]\chi = f\dot{\chi} + \dot{f}\chi + 2\alpha', \\
[\delta_\beta, \delta_\alpha]\phi &= f\dot{\phi} + i\alpha'\psi \qquad [\delta_\beta, \delta_\alpha]\psi = f\dot{\psi} + \alpha'\left(\dot{\psi}e^{-1} - \frac{i}{2}e^{-1}\chi\psi\right),
\end{aligned}$$

onde $f(\tau) = \frac{2i\alpha\beta}{e}$ e $\alpha' = \frac{1}{2}f(\tau)\chi$ [23]. Então vemos que o comutador de suas transformações de supersimetria gera uma reparametrização adicionada de uma transformação de supersimetria. Essas relações nos mostram também que não há uma estrutura simples para o grupo na ação, pois não observamos constantes de estrutura.

As equações de movimento em relação a ϕ e ψ pela aplicação das equações de Euler-Lagrange sob a ação (5.2) são

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_\mu}\right) = \frac{\partial L}{\partial \phi_\mu} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\tau}(2e^{-1}\dot{\phi}^\mu - i\chi e^{-1}\psi^\mu) = 0\,,$$
$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_\mu}\right) = \frac{\partial L}{\partial \psi_\mu} \quad \Rightarrow \quad 2\dot{\psi}^\mu - \chi e^{-1}\dot{\phi}^\mu = 0.$$

Os campos e e χ não possuem dinâmica, então aplicando a equação de Euler-Lagrange obteremos as seguintes equações de vínculos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \chi}\right) &= \frac{\partial L}{\partial \chi} \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi}^\mu \psi_\mu = 0 \\ \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial e}\right) &= \frac{\partial L}{\partial e} \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi}^2 = i\chi\dot{\phi}^\mu\psi_\mu = 0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

5.1.1 Quantização no gauge do tempo próprio

A Lagrangeana (5.2) possui uma invariância de gauge o que nos permite escolher $e = 1$ e sua variação, que está em (5.5) nos leva a $\delta e = 0 \Rightarrow \chi = 0$ e isto corresponde ao gauge do tempo próprio e as equações de movimento tornam-se $\ddot{\phi}^\mu = \dot{\psi}^\mu = 0$, cujas soluções são

$$\phi^\mu = q^\mu + p^\mu \tau\,, \quad \psi^\mu = \xi^\mu\,, \tag{5.8}$$

com ξ^μ um 4-vetor Grassmanniano costante. As equações de vínculo (5.7) continuam válidas e correspondem a ortogonalidade spin-velocidade e condição de massa, respectivamente. As equações de movimento podem ser obtidas da Lagrangeana linearizada

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 - i\psi^\mu\dot{\psi}_\mu), \tag{5.9}$$

que agora é invariante apenas por translações de τ e transformações de supersimetria. Para quantizar a teoria, vamos calcular o parêntese e o anti-parêntese de Poisson, e podemos obter assim as relações quânticas de comutação e anti-comutação. Para a relação de anti-comutação, há um problema devido a um vínculo primário, pois a matriz Hessiana da Lagrangeana (5.9), possui autovalores nulos. Assim, precisamos utilizar o método de

Dirac tratado nos capítulo (2) e seção (4.5) e obtemos

$$[\phi_\mu, p_\nu] = i\eta_{\mu\nu}\,, \quad [\psi_\mu, \psi_\nu]_+ = \eta_{\mu\nu}\,, \tag{5.10}$$

onde $p_\mu = \dot{\phi}_\nu$. Uma solução para a relação de anti-comutação é dada por $\psi_\mu = \sqrt{\frac{1}{2}}\gamma_\mu$, que leva a álgebra de Grassmann para a álgebra de Dirac-Clifford, no regime quântico. Os auto estados do momento da teoria são dados por $|\psi\rangle = |p\rangle\, u(p)$, onde $|p\rangle = e^{-ip^\mu \phi_\mu}\,|0\rangle$, em que p^μ são os autovalores do operador momento [8] e $|0\rangle$ é o fundamental do operador momento que é gerado atuando o operador destruição $a(p)$ sucessivamente. Um estado de uma partícula, por exemplo, é gerado atuando o operador de criação $a^\dagger(p)$ no operador do estado fundamental e $u(p)$ é um spinor de Dirac [25]. Os vínculos (5.7) são impostos sobre esses estados e encontramos

$$p^2\,|\tilde{\psi}\rangle = \gamma^\mu p_\mu\,|\tilde{\psi}\rangle = 0, \tag{5.11}$$

em que os $|\tilde{\psi}\rangle$ são estados físicos aceitáveis. A realização das relações de comutação descrevem uma partícula de Dirac não massiva com a equação de Dirac surgindo como resultado dos vínculos da teoria.

Podemos satisfazer a relaçao de anti-comutação (5.10) em termos de operadores de construção e destruição

$$\psi_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(b^+_\mu + b_\mu), \tag{5.12}$$

que satisfazem as relações de anti-comutação

$$\begin{aligned} [b_\mu, b^+_\mu]_+ &= \eta_{\mu\nu}\,, \\ [b_\mu, b_\mu]_+ &= [b^+_\mu, b^+_\mu]_+ = 0, \end{aligned} \tag{5.13}$$

estas relações podem ser vistas com mais detalhes em [26, 27]. O estado fundamental é dado por

$$|0, p\rangle = e^{-ip^\mu \hat{\phi_\mu}}\,|0\rangle\,, \tag{5.14}$$

que é um estado escalar de momento p com os quais podem ser gerados estados adicionais através da atuação de operadores de construção

$$\begin{aligned} &b^{+\mu}\,|0, p\rangle\,, \quad b^{+\mu}b^{+\nu}\,|0, p\rangle\,, \\ &b^{+\nu}b^{+\nu}b^{+\rho}\,|0, p\rangle\,, \quad b^{+\mu}b^{+\nu}b^{+\rho}b^{+\sigma}\,|0, p\rangle\,. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Ao impormos os vínculos

$$p^2\,|\tilde{\psi}\rangle = 0 \quad p^\mu b_\mu\,|\tilde{\psi}\rangle = 0, \tag{5.16}$$

estes nos dizem que os estados são não-massivos e transversos. O 4-vetor momento que satisfaz o primeiro vínculo é do tipo luz, então podemos tomá-lo como sendo $p^\mu = (p^0, 0, 0, p^0)$ e o operador destruição tem a forma $b_\mu = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ e apenas as compontes b_1 e b_2 satisfazem a segunda restrição, o que restringe o número de estados para quatro, como no caso fermiônico e obtemos o seguinte espectro [8]

$$
\begin{aligned}
&|0,p\rangle \qquad \text{particula de spin } 0\,, \\
&b_i^+\,|0,p\rangle \qquad \text{particula tipo luz (i} = 1,2)\,, \\
&(b_1^+ b_2^+ - b_2^+ b_1^+)\,|0,p\rangle \qquad \text{tensor antisimétrico.}
\end{aligned} \tag{5.17}
$$

5.1.2 Carga conservada numa transformação de Lorentz infinitesimal e autovalores de Spin

Vamos tratar o caso de simetria do grupo de Lorentz e encontrar a carga conservada para a ação cuja Lagrangeana é dada por (5.9), para tal vamos considerar uma transformação de Lorentz infinitesimal $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \varepsilon m^\mu{}_\nu$, com a propriedade $m^\mu{}_\nu = -m_\nu{}^\mu$, uma vez que deve satisfazer $\Lambda^\mu{}_\rho \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}$. Com isto, obtemos que uma variação em ϕ^μ e em ψ^μ devem ter a forma, $\delta\phi^\mu = \varepsilon m^\mu{}_\nu \phi^\nu$ e $\delta\psi^\mu = \varepsilon m^\mu{}_\nu \psi^\nu$, respectivamente. Ao variarmos a ação, obtemos $\delta S = \int d\tau\, \varepsilon \left[2m_\mu{}^\nu \dot{\phi}^\mu \dot{\phi}_\nu - (i/2)\left(m^\nu{}_\mu \psi^\mu \dot{\psi}_\nu + m_\mu{}^\nu \psi^\mu \dot{\psi}_\nu\right)\right] = 0$, desta forma, para encontrarmos a carga conservada basta tratarmos o parâmetro da transformação como dependente de τ. Fazendo isto, obtemos $\delta S = (1/2)\int d\tau\, \dot{m}_\mu{}^\nu \Big[\Big(\phi_\nu \dot{\phi}^\mu$ $-\phi^\mu \dot{\phi}_\nu\Big) + (i/2)\left(\psi_\nu \psi^\mu - \psi^\mu \psi_\nu\right)\Big] = 0$, assim a corrente conservada J^μ_ν é dada por

$$
J^\mu_\nu = \left(\phi_\nu \dot{\phi}^\mu - \phi^\mu \dot{\phi}_\nu\right) + \frac{i}{2}\left(\psi_\nu \psi^\mu - \psi^\mu \psi_\nu\right), \tag{5.18}
$$

onde vê-se de forma simples que $\dot{J}^\mu_\nu = 0$.

Se escolhermos um referencial cuja origem seja a própria partícula e que esta esteja em repouso (em relação as coordenadas espaciais), obtemos que o primeiro termo da equação (5.18) se anula, enquanto que o segundo termo permanece inalterado, uma explicação para isso é admitir que este termo representa uma quantidade intrínseca a partícula, ou seja, o spin.

Ao tomarmos a equação (5.18) nas condições definiddas no parágrafo anterior, nossa carga conservada será dada por $J^\mu_\nu = (i/2)\left(\psi_\nu \psi^\mu - \psi^\mu \psi_\nu\right)$, onde podemos escolher o gauge $\psi^0 = 0$, nos fornecendo, então $J^i_j = (i/2)\left(\psi_j \psi^i - \psi^i \psi_j\right)$. Utilizando da relação de anti-comutação (5.10), obtemos a relação de autovalores

$$J^2 \left|\tilde{\psi}\right\rangle = \frac{3}{4} \left|\tilde{\psi}\right\rangle, \tag{5.19}$$

que nos mostra que o spin da partícula é 1/2, como esperado.

5.1.3 Interação com o campo eletromagnético

Para introduzirmos campos externos, é interessante reescrevermos a Lagrangeana linearizada (5.9) em termos de supercampos, que foram abordados em (A), sendo assim, temos

$$S = -\frac{i}{2} \int d\tau d\kappa \dot{X}^\mu D X_\mu. \tag{5.20}$$

Os vínculos do sistema são dados, on-shell, por

$$\dot{X}^\mu D X_\mu = 0, \tag{5.21}$$

e ao aplicarmos a equação de Euler-Lagrange obtemos as equações de movimento

$$\frac{d}{d\tau} D X_\mu = 0. \tag{5.22}$$

O acoplamento da nossa superpartícula com o eletromagnético é feita pelo acoplamento mínimo do campo elétrico para as super-coordenadas X^μ no gauge do tempo fazendo a substituição $X^\mu \to X^\mu + eA^\mu$, onde $A^\mu = A^\mu(\tau, \kappa)$ é o super-potencial vetor. A densidade Lagrangeana, então fica

$$\mathcal{L} = -\frac{i}{2} \dot{X}^\mu D X_\mu - \frac{ie}{2} A^\mu D X_\mu, \tag{5.23}$$

onde o super-potencial vetor em forma explícita pode ser obtido expandindo A^μ em série de Taylor em torno de $\kappa_0 = 0$ e obtemos

$$A^\mu(\tau, \kappa) = A^\mu(\tau) + i\kappa \psi^\nu(\tau) \partial_\nu A^\mu(\tau). \tag{5.24}$$

Então, a Lagrangeana do sistema é dada por

$$L = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \kappa}\right|_{\kappa=0} = \frac{1}{2} \left(\dot{\phi}^2 - i\psi^\mu \dot{\psi}_\mu + eA^\mu \dot{\phi}_\mu + \frac{e}{4} i F_{\mu\nu} [\psi^\mu, \psi^\nu] \right). \tag{5.25}$$

Se tomarmos apenas a componente de interação da ação

$$S_{e.m} = -\frac{ie}{2} \int d\tau d\kappa A^\mu D X_\mu, \tag{5.26}$$

podemos reescrevê-lo

$$S_{e.m} = -\frac{ie}{2}\int d^DX \int d\tau d\kappa \delta^D(X-Y)DY^\mu A_\mu = \int d^DXJ^\mu(X)A_\mu(X), \tag{5.27}$$

onde

$$J^\mu(X) = \int d\tau d\kappa \delta^D(X-Y)DY^\mu \tag{5.28}$$

é a super-densidade de corrente.

Ao aplicarmos a equação de Euler-Lagrange, obtemos a equação de movimento [3, 8]

$$D\dot{X}_\mu = \frac{e}{2}F_{\mu\nu}(X)DX^\nu \tag{5.29}$$

5.2 Ação não-relativística para a superpartícula de Brink-Schwarz massiva

Para a partícula de Brink-Schwarz massiva e não relativística, podemos tomar o limite $c \to \infty$ da ação relativística $S = -m\int d\tau \sqrt{\dot{\phi}^2} - (1/2)\int d\tau \psi^\mu \dot{\psi}_\mu$, com a qual obtemos, de forma simples

$$S_{nr} = \frac{1}{2}\int dt\left(m\dot{\phi}(t)^2 - \psi(t)^i\dot{\psi}(t)_i\right). \tag{5.30}$$

Inicialmente, vamos obter as equações de movimento e, posteriormente, tratar as simetrias da ação. Ao variar a ação (5.30), obtemos $\delta S = \int dt\left(\ddot{\phi}^i\delta\phi_i + i\delta\psi^i\dot{\psi}_i\right) = 0$, uma vez que ϕ e ψ são independentes, chegamos as seguintes equações de movimento

$$\ddot{\phi}^i = 0\,, \quad \dot{\psi}^i = 0, \tag{5.31}$$

o que era de se esperar, uma vez que a ação representa uma partícula livre. Se fizermos as variações de ϕ e ψ da forma $\delta\phi^i = (i/m)\alpha\psi^i$ e $\delta\psi^i = \alpha\dot{\phi}^i$, α é uma variável de Grassmann. Ao variarmos a ação e substituindo estas variações obtemos $\delta S = 0$ que implica numa transformação de supersimetria [4].

5.2.1 Carga conservada para uma transformação de supersimetria

Como foi dito anteriormente, as transformações de supersimetria, $\delta\phi^i = (i/m)\alpha\psi^i$ e $\delta\psi^i = \alpha\dot{\phi}^i$, deixam invariante a ação (5.30), o que implica numa carga conservada no sistema. Para obtê-la vamos usar o método de Noether tratado em (B). Ao variarmos a Lagrangeana $L = (1/2)\left(m\dot{\phi}(t)^2 - \psi(t)^i\dot{\psi}(t)_i\right)$, obtemos $\dot{K} = (d/dt)[(i/2)\dot{\phi}^i\psi_i] \Rightarrow K = (i/2)\dot{\phi}^i\psi_i$. O outro termo que completa a carga conservada (B.3) é dado por $\Delta\zeta^i(\partial L/\partial\dot{\zeta}^i) = (3/2)i\dot{\phi}^i\psi_i$. Desta forma a carga conservada para trasformações de supersimetria é dada por [4]

$$M = i\dot{\phi}^i\psi_i \tag{5.32}$$

5.2.2 Carga conservada para uma rotação infinitesimal e autovalores de Spin

Seja ζ^i um vetor arbitrária que pode ser c-número ou grassmanniana, cuja rotação infinitesimal em primeira ordem em termos do parâmetro infinitesimal ε é dada pela relação $\zeta'^i = (\delta^i_j - \varepsilon\omega^i{}_j)\zeta^j \Rightarrow \delta\zeta^i = \varepsilon\omega^i{}_j\zeta^j$, pois deve satisfazer a relação $\zeta^i\zeta_i = \zeta'^i\zeta'_i$ que implica na invariância na magnitude do vetor. Desta forma, as variações de ϕ^i e ψ^i são $\delta\phi^i = \varepsilon\omega^i{}_j\phi^j$ e $\delta\psi^i = \varepsilon\omega^i{}_j^j$, respectivamente. Ao variarmos a ação e substituirmos tais variações, obtemos $\delta S = 0$, o que implica que existe uma simetria e por sua vez uma carga conservada.

Vamos agora obter a carga conservada dada por (B.3). Ao variarmos a ação a fim de obter K, enconstramos $\delta L = 0$, o que implica que $\dot{K} = 0 \Rightarrow K = c$, onde c é uma constante. O outro termo que complementa a carga conservada é dado por $\Delta\zeta^i(\partial L/\partial\dot{\zeta}^i) = m\omega^i{}_j\phi^j\dot{\phi}_i + (i/2)\omega^i{}_j\psi^j\psi_i$ que pode ser reescrito na forma $\Delta\zeta^i(\partial L/\partial\dot{\zeta}^i) = \omega^{ij}[(i/2)\psi_i\psi_j + m\phi_i\dot{\phi}_j]$. Desta maneira, a carga conservada fica $J_{ij} = (i/2)\psi_i\psi_j + m\phi_i\dot{\phi}_j$ que ao ser reorganizada pode ser escrita na forma

$$\vec{J} = \vec{\phi}\times\vec{p} + \frac{i}{2}\vec{\psi}\times\vec{\psi} \equiv \vec{L} + \vec{S}\,, \quad \vec{p} = m\dot{\vec{\phi}}. \tag{5.33}$$

De forma semelhante ao que ocorreu no caso relativístico, se a partícula estiver em repouso em um dado referencial, o momento angular $\vec{L}$ será nulo porém a carga conservada não se anula devido ao termo $\vec{S}$ que pode ser entendido como uma quantidade intrínseca a partícula, ou seja, representa o spin! Então temos a representação clássica não-relativística do spin. Para calcularmos o valor do spin, vamos quantizar o sistema, que já foi tratada ne seção (4.5). Sendo assim, ao calcularmos o valor de S^2 obteremos a relação de autovalores

$$S^2\,|\tilde{\psi}\rangle = \frac{3}{4}\,|\tilde{\psi}\rangle\,, \tag{5.34}$$

que, como era de se esperar, representa uma partícula de spin $\frac{1}{2}$ [4, 7].

6 CONCLUSÃO

É muito interessante entender a origem da forma simples da supersimetria em que podemos encontrar o super-parceiro para a teoria de Dirac. Uma consistente descrição dos graus de liberdade de spin pode ser formada com a mais simples combinação de variáveis de Grassmann. A dinâmica da supersimetria é uma expressão da possibilidade para coordenadas da posição da superpartícula variar ao longo das direções do spin [3].

Supersimetria se mostrou um formalismo eficiente não somente por determinar a interação de partículas clássicas, mas também clarifica o estatus da equação de Dirac em mecânica quântica relativística. O limite correto $\hbar \to 0$ envolve uma transição da álgebra de Clifford para álgebra de Grassmann para a representação da teoria num limite clássico [28].

Neste trabalho foi apresentado um estudo sobre a superpartícula de Brink-Schwarz não massiva no regime relativístico e massiva no regime não relativístico. Neste estudo foi mostrado a possibilidade de escrever uma teoria fermiônica de spin $\frac{1}{2}$ sem a utilização de teoria de campos, com a equação de Dirac surgindo como vínculo da teoria.

Para perspectivas futuras, tem a de extender a Lagrangeana para o caso massivo no regime relativístico e também para uma representação de uma corda relativística através da construção de uma Lagrangeana de Nambu-Goto, na qual a Lagrangeana estudada possibilita.

APÊNDICE A – Supersimetria

Supersimetria é uma simetria que relaciona bósons e férmions[4]. A ideia pincipal da supersimetria está em associar a todo ponto do espaço-tempo a coordenada usual $\phi^\mu(\tau)$ junto com uma coordenada anti-comutante $\psi^\mu(\tau)$[6]. Nesse sentido, vamos introduzir a super-posição $X^\mu(\tau,\kappa)$, onde κ é um parâmetro grassmanniano que é necessário para descrever o desenvolvimento dinâmico do sistema. Ao expandirmos $X^\mu(\tau,\kappa)$ em série de Taylor, esta irá conter as variáveis espaço-tempo e as variáveis de Grassmann, como foi definido em (4.3)

$$X^\mu(\tau,\kappa) = \phi^\mu(\tau) + i\kappa\psi^\mu(\tau). \tag{A.1}$$

As transformções de supersimetria são introduzidas pelas transformações

$$\tau \to \tau - i\alpha\kappa, \qquad \kappa \to \kappa + \alpha, \tag{A.2}$$

que dão $\delta X^\mu = \alpha(-i\kappa\dot{\phi}^\mu + i\psi^\mu)$, obtemos, assim, as transformações de supersimetria para as variáveis ϕ^μ e ψ^μ:

$$\phi^\mu \to \phi^\mu + i\alpha\psi^\mu, \qquad \psi^\mu \to \psi^\mu + \alpha\dot{\phi}^\mu. \tag{A.3}$$

Podemos também definir um operador sob a tranformação da super-posição

$$\delta_Q X^\mu = -i\alpha Q X^\mu\,, \quad Q = \kappa\frac{\partial}{\partial\tau} + i\frac{\partial}{\partial\kappa}, \tag{A.4}$$

onde Q é chamado *gerador de supersimetria.*

Então, uma integração sobre o elemento de volume do espaço supersimétrico $d\tau d\kappa$ de uma função $F \equiv F(X)$ é definida $\int d\tau d\kappa\, F(X)$ e é chamada superintegração e é supersimétrica, pois

$$\begin{aligned}\int d\tau d\kappa\, \delta_Q F(X) &= -i\alpha \int d\tau d\kappa \left(\kappa\frac{\partial}{\partial\tau} + i\frac{\partial}{\partial\kappa}\right) F(X) \\ &= -i\alpha \int d\tau \frac{\partial}{\partial\kappa}\left[\left(\kappa\frac{\partial}{\partial\tau} + i\frac{\partial}{\partial\kappa}\right) F(X)\right]_{\kappa=0} \\ &= -i\alpha \int d\tau \left[\frac{\partial}{\partial\tau}F(X) + i\left(\frac{\partial}{\partial\kappa}\right)^2 F(X)\right]_{\kappa=0} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{A.5}$$

onde a integração em relação à $d\kappa$ são as integrais de Berezin, definidas em (4.5). É útil, então, definirmos uma derivada covariante

$$D = \kappa\frac{\partial}{\partial\tau} - i\frac{\partial}{\partial\kappa} \tag{A.6}$$

cujo anti-parêntese de Poisson com o gerador de supersimetria é nulo, $\{Q, D\} = 0$, que nos permite construir superintegrais mais gerais, como por exemplo a superintegração $\int d\tau d\kappa\, F(X)DG(X)$, que também é supersimmétrica, vejamos

$$\int d\tau d\kappa\, \delta_Q(F(X)DG(X)) = -i\alpha \int d\tau d\kappa\, Q(F(X)DG(X)) = 0, \tag{A.7}$$

pois

$$\begin{aligned}\delta_Q(F(X)DG(X)) &= \delta_Q F(X)DG(X) + F(X)D\delta_Q G(X) \\ &= -i\alpha(QF(X)DG(X) - F(X)DQG(X)) \\ &= -i\alpha(QF(X)DG(X) + F(X)QDG(X)) \\ &= -i\alpha Q(F(X)DG(X)). \end{aligned} \tag{A.8}$$

Ao tomarmos o anti-parêntese de Poisson entre geradores de supersimetria, obtemos $\{Q, Q\} = 2i\frac{\partial}{\partial\tau} = 2P$, onde P é o *operador de translação temporal*. As transformações de translação temporal são dadas por

$$\tau \to \tau - i\epsilon, \qquad \kappa \to \kappa, \tag{A.9}$$

com ϵ sendo um c-número, que dão $\delta X = -i\epsilon(\dot{\phi}^\mu + i\kappa\dot{\psi}^\mu)$. As tansformações de translação no tempo para as variáveis ϕ^μ e ψ^μ são

$$\phi^\mu \to \phi^\mu - i\epsilon\dot{\phi}^\mu, \qquad \psi^\mu \to \psi^\mu - i\epsilon\dot{\psi}^\mu. \tag{A.10}$$

De forma análoga a (A.4), podemos definir um operador de transformação por translação [3],

$$\delta_P X^\mu = -\epsilon P X^\mu. \tag{A.11}$$

.

A ação supersimétrica é escrita na forma $S = \int d\tau d\kappa \mathcal{L} = \int d\tau L$, com a super-Lagrangeana $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(X, \dot{X}, DX)$, em geral. A equação de Euler-Lagrange para tal ação é feita de forma análoga ao método clássico que é extremizando a mesma. Desta maneira, obtemos

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}\right) + D\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D X^\mu}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\mu}. \tag{A.12}$$

APÊNDICE B – Teorema de Noether

Umas das mais importantes conquistas desse formalismo é a possibilidade de, a partir das simetrias da ação, obtermos princípios de conservação [24], onde é possível construir uma corrente conservada para toda simetria global da ação [17].

Para um dado sistema a equação de Euler-Lagrange é definida por $(d/dt)(\partial L/\partial\dot{\zeta}^i) = \partial L/\partial\zeta^i$, onde $L \equiv L(\zeta,\dot{\zeta})$ é a lagrangeana do sistema e a ação é definida por $S = \int dt\, L$. Iremos definir uma transformação infinitesimal de simetria para a variável $\zeta^i(t)$, definida por

$$\delta\zeta^i(t) \equiv \epsilon\Delta\zeta^i(t), \tag{B.1}$$

onde os ϵ são parâmetros constantes. Se (B.1) é uma simetria do sistema, esta leva a uma invariância da ação e a variação da Lagrangeana é uma derivada total, que, com o auxílio da equação de Euler-Lagrange obtemos

$$\delta L \equiv \epsilon\left(\dot{\Delta}\zeta^i\frac{\partial L}{\partial\dot{\zeta}^i} + \Delta\zeta^i\frac{\partial L}{\partial\zeta^i}\right) = \epsilon\dot{K}\,, \quad \dot{\Delta}\zeta^i \equiv \frac{d}{dt}\Delta\zeta^i. \tag{B.2}$$

Com o auxílio da equação de Euler-Lagrange, obtemos a equação $(d/dt)J = 0$, onde J é a carga conservada de Noether, definida por

$$J = \Delta\zeta^i\frac{\partial L}{\partial\dot{\zeta}^i} - K. \tag{B.3}$$

O primeiro termo de (B.3) é obtido ao substituir a equação de Euler-Lagrange no termo anterior a igualdade. A equação acima é uma carga conservada, uma vez que $\dot{J} = 0$. Vamos assumir temporariamente que os parâmetros de simetria são funções arbitrárias de t, $\epsilon \equiv \varepsilon(t)$. Ao variarmos a ação, obtemos $\delta S = -\int dt\dot{\epsilon}J$. A utilização dos parâmetros ϵ variando no tempo é uma maneira bastante eficiente para se obter a carga conservada de Noether [17].

Esta definição do Teorema de Noether é válida tanto para Lagrangeanas que são funções de c-números, variáveis de Grassmann e ambos, porém no caso onde se tratar variáveis de Grassmann é necessário bastante atenção na ordem dos termos.

REFERÊNCIAS

[1] Gitman, D. M., Saa, A. V., *Quantization of Spinning Particle with Anomalous Magnetic Momentum*, Class.Quant.Grav.10:1447-1460, (1993).

[2] Casalbuoni R., *on quantization of systems with anticommuting variables*, Nuovo Cimento 33A, 115-25 (1976).

[3] F. Ravndal, *Supersymmetric Dirac Particles in external Fields*, Phys.Rev. D21 2823 (1980)

[4] Nauta, Lodewijk, *Supersymetric Quantum Mechanics*, University of Amsterdan, Bacharelor Project Physics and Astronomy, (1983).

[5] Brink, L. and Schwarz, J. H., *Quantum Superspace*, Phys. Lett. B100 310-312, (1981).

[6] R. Casalbuoni, *Relativity and supersymmetries*, Phys. Lett. 62B, 49 (1976); Nuovo Cimento 33A, 389 (1976); A. Barducci, B. Casalbuoni and L.Lusanna, NuovoCimento 35A, 377 (1976).

[7] Dirac, P. A. M., *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, (1964).

[8] L. Brink, P. di Vecchia, P. Howe, *A Lagrangian Formulation of the Classical and Quantum Dynamics of Spinning Particles*, Nucl. Phys., B118 76 (1977).

[9] Frederico, João Eduardo, *Quantização BRST de Teorias com Simetria de Gauge Sp(2,R)*, Tese de Doutorado, Instituto de Física da USP, (2009).

[10] Barcelos Neto, João, *Matemática para Físicos com Aplicações: Tratamentos Clássico e Quântico, Volume II*, Editora Livraria da Física, (2011).

[11] Blumenhagen, R., Lüst, D. and Theisen, S., *Basic Concepts of String Theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2013).

[12] Ramond, P., *Field theory : a modern primer*, Addison-Wesley, (1990)

[13] Nakahara, M., *Geometry, Topology and Physics*, Institute of Physics Publishing, (2003).

[14] Swanson, Mark S., *Path Integrals and Quantum Processes*, Academic Press, Inc., (1992).

[15] Berezin, F. A., *The Method of Second Quantization*, Academic Press, Inc., (1966).

[16] Snoeck, Michiel, *Group Theory Part I, Discrete Groups*, University of Amsterdan, Department of Physics and Astronomy, (2012).

[17] Freedman, D.Z. and Van Proeyen, A., *Supergravity* , Cambridge University Press, (2012).

[18] Siegel, Warren, *Fields*, C. N. Yang Institute for Theoretical Physics, (2005).

[19] Tung, Wu-Ki, *Group Theory in Physics*, World Scientific Publishing Co Pte Ltd, (1985).

[20] Georgi, Howard, *Lie Algebras in Particle Physics*, Westview Press, (1999).

[21] Snoeck, Michiel, *Group Theory Part II, Lie Groups and Lie Algebras*, University of Amsterdan, Department of Physics and Astronomy, (2012).

[22] Tong, David, *Quantum Field Theory*, University of Cambridge Part III Mathematical Tripos, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, (2006).

[23] L. Brink, S. Deser and B. Zumino, P. Di Vecchia and P. Howe, *Local Supersymmetry for Spinning Particles*, L. Brink, S. Deser, B. Zumino, P. Di Vecchia, and P. Howe, Phys. Lett. 64B, 435 (1976); L. Brink, P. Di Vecchia, and P. Howe, Nucl. Phys. B118, 76 (1977).

[24] Kaku, Michio, *Quantum Field Theory*, Oxford University Press, (1993).

[25] Lahiri, Amitabha, *A First Book of Quantum Field Theory*, Oxford University Press, (2005).

[26] Mendes, Wendel Macedo, *Localização de Férmions em D dimensões*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Física da UFC, (2013).

[27] Polchinski, J. G., *String Theory*, Cambridge University Press, vol. 1, (1999).

[28] Rumpf, Helmut, *Supersymmetric Dirac Particles in Riemann-Cartan Space-Time*, Gen. Rel. and Grav. vol. 14, num. 09, (1982)