



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

Francisco Adevaldo Gonçalves da Silveira

*Aspectos quânticos da gravitação de
Chern-Simons não-comutativa*

Fortaleza - CE

Setembro/ 2014

Francisco Adevaldo Gonçalves da Silveira

*Aspectos quânticos da gravitação de
Chern-Simons não-comutativa*

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante

Co-orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida

MESTRADO EM FÍSICA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CENTRO DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

Fortaleza - CE

Setembro / 2014

Dedicatória

*Aos meus pais,
Antonio Genivaldo da Silveira e
Maria Raimunda Gonçalves da Silveira, e
Jeniffer Moraes Silva,
que estiveram comigo
em todos os momentos.*

Agradecimentos

Quero agradecer à todos que contribuíram para essa dissertação. Em especial:

- A Deus e minha família, primeiramente;
- Ao Prof. Roberto Vinhares Maluf Cavalcante, pela orientação, incentivo e confiança em mim em todos os momentos;
- Ao Prof. Carlos Alberto Santos de Almeida, pela confiança depositada;
- Aos todos meus amigos do LASSCO, pois tiveram um papel fundamental na minha vida acadêmica;
- Ao Departamento de Física da UFC e seus funcionários;
- Ao CNPq pelo financiamento dessa pesquisa.

Resumo

Neste trabalho vamos investigar quais as modificações que o potencial gravitacional com termo de Chern-Simons sofre com a adição da teoria não comutativa no espaço-tempo. Faremos isto em dois casos: o primeiro utilizando somente a teoria de Einstein-Hilbert e no segundo caso acrescentando o termo de gravidade topológica tipo Chern-Simons. As modificações que estamos investigando ocorrem em um espalhamento de dois bósons vetoriais trocando um gráviton. Até podermos chegar a uma conclusão de como a não comutatividade altera o potencial gravitacional, iremos iniciar nosso estudo com um modelo de gravidade em baixas dimensões. Após apreender como calcular o propagador do gráviton para teoria quadráticas da gravidade, expandimos os conceitos para uma gravidade topologicamente massiva. Revisaremos tópicos importantes da teoria não-comutativa no espaço-tempo. Por fim analisando a interação com campo do gráviton com matéria escreveremos o vértice da teoria e encontraremos as modificações oriundas da não comutatividade dos dois casos citados acima. Verificamos que a não-comutatividade altera a forma do potencial gravitacional tanto na origem, deixando-o bem comportado, quanto no infinito.

Palavras-Chave: gravidade topológica, não-comutatividade, potencial gravitacional.

Abstract

In this paper we investigate what changes the gravitational potential with Chern-Simons term suffers from the addition of the non-commutative theory in space-time. We do this in two cases: the first using only the theory of Einstein-Hilbert and in the second case, adding the term topological Chern-Simons gravity type. The changes that occur are investigating on a scattering of two vector bosons exchanging a graviton. Until we reach a conclusion as the noncommutativity changes the gravitational potential, we will begin our study with a gravity model in low dimensions. After learning how to calculate the graviton propagator for quadratic theory of gravity, we expanded the concepts for a topologically massive gravity. We will review important topics of non-commutative theory in space-time. Finally analyzing the interaction with the graviton field with matter, write the vertex of the theory and find the changes arising from the noncommutativity of the two cases cited above. We found that the non-commutativity alters the shape of the gravitational potential both in origin, leaving him well behaved, as at infinity.

Key Words: topological gravity, non-commutative, gravitational potential.

Sumário

Introdução	p. 8
1 Teoria da gravidade quadrática em D-dimensões.	p. 11
1.1 Determinação da lagrangiana para a gravitação	p. 11
1.2 Obtenção da lagrangiana bilinear em $h_{\mu\nu}$	p. 12
2 Cálculo do propagador para teorias gravitacionais de altas derivadas.	p. 19
2.1 Cálculo do propagador em D-dimensões para teorias gravitacionais com altas derivadas	p. 19
2.2 Cálculo do propagador em D-dimensões para teorias gravitacionais quadrática	p. 23
2.2.1 Simetrização da Lagrangiana	p. 23
3 Cálculo do propagador para teoria de gravidade topologicamente massiva de Chern-Simons.	p. 29
3.1 Teoria de Chern-Simons	p. 29
3.2 Linearização da Lagrangiana com termo de Chern-Simons	p. 31
4 Teoria quântica de campos não-comutativa	p. 35
4.1 Histórico	p. 35
4.2 Quatização de Weyl	p. 37
4.3 Produto estrela	p. 38
4.4 Regras de Feynman e quantização para teorias de campos não-comutativas	p. 41
4.5 Acoplamento com a matéria	p. 43

4.5.1	Cálculo do vértice.	p. 44
4.5.2	Vértice na teoria não-comutativa	p. 47
4.5.3	Potencial não-relativístico.	p. 49
5	Potencial gravitacional da teoria de Chern-Simons não-comutativa.	p. 55
5.1	Lagrangiana de Einstein-Hilbert-Chern-Simons.	p. 55
5.2	Matriz de espalhamento \mathcal{M}	p. 56
5.3	Deformação do potencial gravitacional.	p. 59
	Conclusão	p. 62
	Referências	p. 63

Introdução

As equações de Einstein para a gravitação foram formuladas para serem utilizadas no espaço-tempo quadridimensional, elas podem também ser utilizadas no espaço-tempo tridimensional. No entanto, a natureza da gravitação difere daquela do espaço-tempo quadridimensional[1]. A relatividade geral é dinamicamente trivial em três dimensões no espaço-tempo: fora das fontes o espaço-tempo é plano [2]; todos os efeitos das fontes localizadas manifestam-se na geometria global[3]. Consequentemente, não existem grávitons, e as forças não são mediadas pelas trocas gravitônicas; na verdade elas são de natureza geométrica/topológica, e tem sua origem em propriedades globais do espaço-tempo, que não é Minkowskiano em sua totalidade, mesmo quando ele é localmente plano[4, 5].

Pode-se ressaltar outra dúvida da gravitação em $(2 + 1)D$, a de não possuir um limite Newtoniano: implicando haver em uma quebra na correspondência que se esperava ter entre ela e a teoria de Newton [1]. Varias investigações exaustivas das propriedades gravitacionais em baixa dimensionalidade tem sido realizadas nos últimos anos[1, 2, 3, 4, 5, 6], demonstrando um grande interesse dos físicos em melhorar à compreensão da relatividade geral quadridimensional via o estudo de teorias gravitacionais em dimensões mais baixas, as quais, espera-se serem renormalizáveis.

A fim de ter uma teoria de gravitação em $(2+1)$ dimensões que não seja dinamicamente trivial, com potencial relativístico bem comportado e que possa ser renormalizável, podemos imaginar a inclusão de termos com derivadas quadráticas $\int R_{\mu\nu}^2 \sqrt{g} d^3x$ e $\int R^2 \sqrt{g} d^3x$ na ação tridimensional de Einstein[7].

Outro grande problema que preocupa os físicos teóricos é o fato da teoria da relatividade geral de Einstein ser não- renormalizável em quatro dimensões no espaço-tempo, apresentando divergências ultravioletas que não podem ser eliminadas pelos mecanismos usuais. Tal fato está diretamente relacionado com o produto dos operadores de campos no mesmo ponto, que a principio não está bem definido. Em uma tentativa de driblar esse impasse, Heisenberg [9] propôs a existência de uma célula mínima, que implicaria num princípio de incerteza para medidas dos comprimentos e eliminava o conceito de ponto ($\Delta x^\mu \Delta x^\nu = \Theta^{\mu\nu}$). Essas ideias, então deram origem ao conceito de espaço-tempo não

comutativo, no qual as coordenadas passam a obedecer à relação de comutação:

$$[x^\mu, x^\nu] = \Theta^{\mu\nu},$$

e foram inicialmente utilizadas por Snyder [10] como forma de suavizar o comportamento ultravioleta em teoria quântica de campos. Tais ideias foram esquecidas por um longo período em virtude do enorme sucesso do processo de renormalização. O interesse pela não comutatividade foi retomado por volta dos anos 90, devido a descoberta de que a teoria de Yang-Mills não-comutativa poderia ser obtida como um limite de baixas energias da teoria de cordas na presença de um campo magnético de fundo [8]. Outra razão para considerarmos a ideia da quantização do espaço-tempo, pode ser concebida por argumentos envolvendo a teoria da relatividade geral, quando consideramos distâncias próximas ao comprimento de Planck $l_p = \sqrt{G\hbar/c^3} \cong 10^{-33} \text{cm}$, o campo gravitacional se torna tão intenso que nem a luz ou outro sinal são capazes de transmitir informação de modo que medidas de coordenadas perdem o significado [11]. Contudo, ainda que tenha ocorrido bons resultados relacionados à não-comutatividade e à teoria de cordas, surgiram alguns problemas. O primeiro relacionado ao comportamento ultravioleta dos diagramas de Feynman na presença da não-comutatividade chamaram atenção. O exemplo mais notável é conhecido como mistura UV/IR, que consiste na conversão de parte das divergências ultravioletas (UV) da teoria comutativa em singularidades infravermelhas (IR) que podem impossibilitar o tratamento perturbativo usual [12, 13, 14]. Outro ponto de destaque é a violação da unitariedade em modelos envolvendo a não comutatividade entre espaço e tempo [15].

Este trabalho foi desenvolvido, a fim de buscarmos conhecimentos mais profundos sobre teorias gravitacionais em baixas dimensões e analisar as contribuições oriundas de uma teoria não-comutativa no espaço-tempo. No primeiro capítulo foi analisada qual a forma da Lagrangiana que deveremos utilizar para o cálculo do propagador da teoria. O segundo capítulo, apresentamos um estudo detalhado para o cômputo do propagador, generalizando o cálculo para D-dimensões

No terceiro capítulo, introduzimos um termo de Chern-Simons na Lagrangiana. Seguimos os passos realizados no capítulo dois, para obtenção do propagador. Com o propagador da teoria de Einstein-Hilbert-Chern-Simons calculado, fui motivado a realizar um estudo sobre modificações no potencial gravitacional em um espalhamento da teoria em questão, mas no cenário da não-comutatividade. No capítulo quatro existe uma breve revisão de não-comutatividade e como pode ser calculado o vértice do espalhamento, ainda não adicionado o termo de Chern-Simons.

No último capítulo aplicaremos todos os conhecimentos dos quatro primeiros para analisar o vértice do espalhamento da teoria Einstein-Hilbert-Chern-Simons no cenário não comutativo. Encerrando o trabalho com as conclusões e perspectiva para trabalhos posteriores.

1 Teoria da gravidade quadrática em D -dimensões.

Neste capítulo desenvolveremos todos os passos para obter a forma apropriada para ação de gravitação quadrática em D dimensões, que posteriormente será utilizada para o cálculo do propagador referente à teoria. Em posse de uma ação genérica para a dinâmica dos campos gravitacionais sem torção faremos uma aproximação de campo gravitacional fraco, mantendo apenas os termos da perturbação de ordem quadrática.

1.1 Determinação da lagrangiana para a gravitação

A ação da gravidade quadrática em D -dimensões do espaço-tempo de forma mais geral, é dada por;

$$I = \int d^D x \sqrt{(-1)^{D-1} g} \left[\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 + \frac{\gamma}{2} R_{\mu\nu\rho\sigma}^2 + \frac{\delta}{2} \square R \right]. \quad (1.1)$$

onde α, β, γ e δ são parâmetros com dimensões de L^{D-4} , já o termo κ^2 é uma constante que tem dimensão de L^{D-2} . Em quatro dimensões temos $\kappa = 32\pi G$, sendo G a constante de Newton. O termo escrito como $\square R^2$, representa $\partial_\nu \partial^\nu R^2$, e pode ser descartado da Lagrangiana (1.1). De fato, utilizando o teorema da divergência:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{v}) d\tau = \oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}, \quad (1.2)$$

adotando $\mathbf{v} = \partial_\nu R^2$, e lembrando que a ação é integrada em todo o espaço. E no infinito os campos devem ser nulos. Ficamos então com a seguinte ação:

$$L_{EH} = \sqrt{(-1)^{D-1} g} \left[\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 + \frac{\gamma}{2} R_{\mu\nu\rho\sigma}^2 \right]. \quad (1.3)$$

Analisando o espaço unidimensional ($D=1$), os tensores R , $R_{\mu\nu}$ e $R_{\mu\nu\rho\sigma}^2$ são identicamente nulos. Logo para que possamos observar algum tipo de dinâmica a gravitação

quadrática só terá sentido para dimensões $D \geq 2$.

Analisando o caso bidimensional $D = 2$. Podemos escrever o tensor de Riemann e o tensor de Ricci em função do escalar de curvatura, respectivamente:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}R [g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}], \quad (1.4)$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (1.5)$$

Substituindo as duas expressões acima na equação (1.3):

$$\begin{aligned} L_{EH} &= \sqrt{(-1)^{D-1}g} \left[\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{\alpha}{2}R^2 + \frac{\beta}{2}R_{\mu\nu}^2 + \frac{\gamma}{2}R_{\mu\nu\rho\sigma}^2 \right] \\ &= \sqrt{-g} \left[\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{\alpha}{2}R^2 + \frac{\beta}{2} \frac{R^2}{2} + \frac{\gamma}{2}R^2 \right] \\ &= \sqrt{-g} \left[\frac{2R}{\kappa^2} + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{4} + \frac{\gamma}{2} \right) R^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Para o cálculo do propagador concernente da gravitação quadrática em $D=2$ a Lagrangiana se reduz a forma:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[\frac{2R}{\kappa} + \frac{\alpha}{2}R^2 \right] \quad (1.7)$$

Não é do intuito deste trabalho abordar a teoria em 2D-dimensões. Ficaremos trabalhando com a Lagrangiana da equação (1.3).

$$L_{EH} = \sqrt{(-1)^{D-1}g} \left[\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{\alpha}{2}R^2 + \frac{\beta}{2}R_{\mu\nu}^2 + \frac{\gamma}{2}R_{\mu\nu\rho\sigma}^2 \right].$$

1.2 Obtenção da lagrangiana bilinear em $h_{\mu\nu}$

O primeiro passo que devemos dar antes do cálculo do propagador do gráviton é escrever a Lagrangiana em função de um campo h , para isso iremos decompor a métrica em termos de,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + kh_{\mu\nu}, \quad (1.8)$$

e sua inversa:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu}. \quad (1.9)$$

onde o termo $\eta_{\mu\nu}$ e a métrica de Minkowski, κ é constante e o $h_{\mu\nu}$ é campo do gráviton. Deveremos colecionar até segunda ordem para obter o propagador da teoria mais adiante.

A equação (1.3), contém um fator multiplicativo g , que é o determinante da métrica de Minkowski, logo deverá ser escrito em função da equação (1.8). Reescrevendo o termo que contém g :

$$\sqrt{(-1)^{D-1}g} = \sqrt{(-1)^{D-1} \det g_{\mu\nu}} \quad (1.10)$$

Utilizando a definição (1.8), vamos utilizar o traço da métrica como $\eta_{\mu\nu} = (+ - \dots -)$, desta forma podemos escrever:

$$\begin{aligned} \sqrt{(-1)^{D-1}g} &= \left((-1)^{D-1} \det [\eta_{\mu\nu} + kh_{\mu\nu}] \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left((-1)^{D-1} \det [\eta_{\mu\alpha} (\delta_{\nu}^{\alpha} + kh_{\nu}^{\alpha})] \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left((-1)^{D-1} \det(\eta_{\mu\alpha}) \det(\delta_{\nu}^{\alpha} + kh_{\nu}^{\alpha}) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\det(\delta_{\nu}^{\alpha} + kh_{\nu}^{\alpha}) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\cong \sqrt{1 + kh_{\alpha}^{\alpha}} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Expandindo a função 1.11, em torno do campo h , até segunda ordem, obtemos a seguinte;

$$\sqrt{(-1)^{D-1}g} = 1 + \frac{1}{2}kh_{\alpha}^{\alpha} \quad (1.12)$$

Note que o resultado final independe da dimensão que esteja sendo estudada, isto ocorre por conta da forma do $\eta_{\mu\nu}$, que tem seu determinante positivo em dimensões ímpares e negativo em dimensões pares, mais tal propriedade é balanceada pelo termo $(-1)^{D-1}$, que quando a dimensão é ímpar o resultado positivo, e quando a dimensão for par o resultado é negativo.

Resta-nos ainda, analisar os outros termos formadores da equação (1.3). Para melhor compreensão dos resultados obtidos pela perturbação da métrica, detalharemos explicitamente alguns passos tomados.

Os termos R , $R_{\mu\nu}$ e $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ escritos em função da métrica $g_{\mu\nu}$, apresentam uma estrutura conhecida como conexão afim, ou símbolo de Christoffel, que tem sua definição:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} [\partial_{\mu}g_{\nu\alpha} + \partial_{\nu}g_{\mu\alpha} - \partial_{\alpha}g_{\mu\nu}]. \quad (1.13)$$

Aplicando (1.8) e (1.9), na equação acima encontraremos a conexão afim em função

do campo h ;

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} &= \frac{1}{2} (\eta^{\alpha\beta} - kh^{\alpha\beta}) [\partial_{\mu} (\eta_{\nu\alpha} + kh_{\nu\alpha}) + \partial_{\nu} (\eta_{\mu\alpha} + kh_{\mu\alpha}) - \partial_{\alpha} (\eta_{\mu\nu} + kh_{\mu\nu})] \\
&= \frac{k}{2} (\eta^{\alpha\beta} [\partial_{\mu} h_{\nu\alpha} + \partial_{\nu} h_{\mu\alpha} - \partial_{\alpha} h_{\mu\nu}] - kh^{\alpha\beta} [\partial_{\mu} h_{\nu\alpha} + \partial_{\nu} h_{\mu\alpha} - \partial_{\alpha} h_{\mu\nu}]) \\
\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} &= \frac{k}{2} (\eta^{\alpha\beta} \partial_{\mu} h_{\nu\alpha} + \eta^{\alpha\beta} \partial_{\nu} h_{\mu\alpha} - \eta^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} h_{\mu\nu}) \\
&\quad - \frac{k^2}{2} (h^{\alpha\beta} \partial_{\mu} h_{\nu\alpha} + h^{\alpha\beta} \partial_{\nu} h_{\mu\alpha} - h^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} h_{\mu\nu}). \tag{1.14}
\end{aligned}$$

Podemos notar que a conexão apresenta dois termos: um com dependência linear em h , e o outro com dependência quadrática em h . Este fato servirá para nos auxiliar mais adiante no cálculo do propagador, pois para o cômputo do propagador do gráviton iremos colecionar todos os termos com dependência do tipo h^2 . O tratamento feito da equação (1.13) para (1.14) será feito diversas vezes, devido a estrutura do escalar de curvatura, tensor de Ricci e tensor de Riemann.

Da definição o tensor de Riemann, tem-se:

$$R_{\mu\sigma\nu\rho} = \underbrace{\partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} - \partial_{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}_{R_{\mu\sigma\nu\rho}^{(1)}} + \underbrace{\Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda}\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} - \Gamma_{\sigma\lambda}^{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}_{R_{\mu\sigma\nu\rho}^{(2)}} \tag{1.15}$$

Foi separado o tensor de Riemann em dois termos: um dependente em primeira ordem de h e algumas parcelas dependente de h^2 , e o outro depende de $h^2 + O(h)^3 + \dots$. Podemos afirmar que a parte dependente de h^2 no primeiro termo irá desaparecer devido aos termos da segunda parte do tensor. Olhando para a Lagrangiana (1.3), percebemos que precisamos do tensor de Riemann elevado a segunda potência $(R_{\mu\sigma\nu\rho})^2$. Então para este termo será levado em consideração somente o termo nomeado $R_{\mu\sigma\nu\rho}^{(1)}$, pois os outros termos contribuirá com termos de ordem superiores em $h_{\mu\nu}$. Podemos estender tal argumentação para o tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = \underbrace{\partial_{\rho}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\rho}^{\rho}}_{R_{\mu\nu}^{(1)}} + \underbrace{\Gamma_{\rho\lambda}^{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \Gamma_{\rho\nu}^{\lambda}\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}}_{R_{\mu\nu}^{(2)}}. \tag{1.16}$$

Da mesma forma realizada no tensor de Riemann, serão utilizados no tensor de Ricci somente a primeiro termo, pois ele também se encontra elevado à segunda potencia na Lagrangiana adotada. Devo ressaltar que mesmo o segundo termo não contribuindo, deverá ser calculado, pois o escalar de curvatura fará uso deste termo. O escalar de

curvatura tem sua definição como:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.17)$$

Pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ &= (\eta^{\mu\nu} - kh^{\mu\nu})(R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)}) \\ &= \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(1)} + \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(2)} - kh^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(1)} - h^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(1)}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Conservaremos todos os termos de (1.18), embora não apresente dependência quadrática em h . É importante lembrar que todas as estruturas acima mencionadas, tensor de Riemann, Ricci e o próprio escalar de curvatura estão multiplicados por $\sqrt{-g}$.

De posse de todas as definições podemos obter os termos que formam a Lagrangiana (1.3). Escrevendo primeiramente o tensor de Ricci, pois ele contém termos usados para obtenção do escalar de curvatura. A primeira parte do tensor de Ricci fica definida como:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{k}{2}(\square h_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu h_\alpha^\alpha - \partial_\alpha \partial_\nu h_\mu^\alpha - \partial_\alpha \partial_\mu h_\nu^\alpha). \quad (1.19)$$

O segundo termo que contribuirá com o escalar de curvatura deve ficar da seguinte forma:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(2)} &= \frac{k^2}{4}[\partial_\alpha h \partial_\mu h_\nu^\alpha + \partial_\alpha h \partial_\nu h_\mu^\alpha - \partial_\alpha h \partial^\alpha h_{\mu\nu} \\ &\quad - \partial_\alpha h_\nu^\beta \partial_\mu h_\beta^\alpha - \partial_\alpha h_\nu^\beta \partial_\beta h_\mu^\alpha + \partial_\alpha h_\nu^\beta \partial^\alpha h_{\mu\beta} \\ &\quad - \partial_\nu h_\alpha^\beta \partial_\mu h_\beta^\alpha - \partial_\nu h_\alpha^\beta \partial_\beta h_\mu^\alpha + \partial_\nu h_\alpha^\beta \partial^\alpha h_{\mu\beta} \\ &\quad + \partial^\beta h_{\nu\alpha} \partial_\mu h_\beta^\alpha + \partial^\beta h_{\nu\alpha} \partial_\beta h_\mu^\alpha - \partial^\beta h_{\nu\alpha} \partial^\alpha h_{\mu\beta}]. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Utilizando o resultado encontrado em (1.18) e multiplicando por $\sqrt{-g}$, serão feitas algumas simplificações, integração por partes, e os termos de superfície serão ignorados, pois os campos vão a zero no infinito.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \sqrt{-g} \left[\frac{2R}{k^2} \right] \\ &= \frac{2}{k^2} \left[\eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(2)} - kh^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(1)} + \frac{k}{2} h_\nu^\mu \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(1)} \right] \\ \mathcal{L}_1 &= \left[-\frac{1}{2} h^{\mu\nu} \square h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} h_\mu^\mu \square h_\alpha^\alpha - h_\mu^\mu \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} + h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\alpha h_\nu^\alpha \right]. \end{aligned} \quad (1.21)$$

A fim de deixar a notação mais compacta podemos definir $A^\mu \equiv \partial_\nu h^{\mu\nu}$ e $\phi \equiv h^{\alpha\alpha}$, deste modo a equação 1.2 fica no seguinte formato:

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{2} [h^{\mu\nu} \square h_{\mu\nu} + A_\nu^2 + (A_\nu - \partial_\nu \phi)^2]. \quad (1.22)$$

Esta forma mais compactada irá servir mais à frente para realizar com maior facilidade uma simplificação nos termos da equação (1.3).

Analisando o segundo termo da Lagrangiana (1.3), o escalar de curvatura ao quadrado, chamaremos este termo de \mathcal{L}_2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= \frac{\alpha}{2} R^2 \\ &= \frac{\alpha}{2} k^2 (\square h_\mu^\mu - \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu}) (\square h_\alpha^\alpha - \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta}) \\ &= \frac{\alpha}{2} k^2 (h_\mu^\mu \square^2 h_\alpha^\alpha - 2h_\mu^\mu \square \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} + h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta}). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Utilizando as mesmas definições usadas para obter a equação (1.22), podemos reescrever a equação (1.23):

$$\mathcal{L}_2 = \frac{\alpha k^2}{2} (\partial^\alpha A_\alpha - \square \phi)^2. \quad (1.24)$$

O próximo termo a ser analisado será do tensor de Ricci ao quadrado, chamando esta parcela de \mathcal{L}_3 . Onde, por motivos já explicados anteriormente, consideramos apenas a primeira parte do tensor.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 &= \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 \\ &= \frac{\beta}{2} \frac{k^2}{4} (\square h^{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu h_\alpha^\alpha - \partial_\mu \partial_\alpha h_\nu^\alpha - \partial_\nu \partial_\alpha h_\mu^\alpha) \\ &\quad \times (\square h_{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu h_\beta^\beta - \partial^\mu \partial_\beta h^{\nu\beta} - \partial^\nu \partial_\beta h^{\mu\beta}) \\ \mathcal{L}_3 &= \frac{\beta}{2} \frac{k^2}{4} (h^{\mu\nu} \square^2 h_{\mu\nu} + h_\mu^\mu \square^2 h_\alpha^\alpha - 2\square h_\mu^\mu \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} - 2h_\beta^\mu \square \partial_\mu \partial_\alpha h^{\alpha\beta} \\ &\quad + 2h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta}). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Olhando com atenção para a equação 1.25, percebemos que nela existem termos semelhantes contidos na equação 1.23, com uma diferença na constante multiplicativa. Então se adicionarmos as definições $b = \frac{\beta h^2}{2}$, $F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$, onde $A_{\mu,\nu} = \partial_\nu A_\mu$. Podemos fazer um cálculo análogo, encontrando facilmente:

$$\mathcal{L}_3 = \frac{b}{4} (h^{\mu\nu} \square^2 h_{\mu\nu} - (A_{,\mu}^\mu)^2 - F_{\mu\nu}^2 + (\partial^\alpha A_\alpha - \square \phi)^2). \quad (1.26)$$

Por fim vamos analisar o tensor de Riemann, este cálculo é muito parecido com os cálculos do tensor de Ricci, para esta contribuição foi nomeada de \mathcal{L}_4 :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_4 &= \frac{\gamma}{2} R_{\mu\beta\nu\alpha} R^{\mu\beta\nu\alpha} = \frac{\gamma}{2} R_{\mu\beta\nu\alpha}^2 \\
&= \frac{\gamma k^2}{2} \frac{1}{4} (\partial_\mu \partial_\nu h_\beta^\alpha - \partial_\nu \partial^\alpha h_{\mu\beta} - \partial_\beta \partial_\mu h_\nu^\alpha + \partial_\beta \partial^\alpha h_{\mu\nu}) \\
&\quad \times (\partial^\mu \partial^\nu h_\alpha^\beta - \partial^\nu \partial_\alpha h^{\mu\beta} - \partial^\beta \partial^\mu h_\alpha^\nu + \partial^\beta \partial_\alpha h^{\mu\nu}) \\
&= \frac{\gamma k^2}{2} (h^{\mu\nu} \square^2 h_{\mu\nu} - 2h_\beta^\mu \square \partial_\alpha \partial_\mu h^{\alpha\beta} + h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta}). \tag{1.27}
\end{aligned}$$

Realizando os mesmos passos adotados nas equações acima, para encontrar uma forma compactada, onde $d = \frac{\gamma k^2}{2}$, a equação 1.27 fica na forma:

$$\mathcal{L}_4 = d(h^{\mu\nu} \square^2 h_{\mu\nu} - (A_{,\mu}^\mu)^2 - F_{\mu\nu}^2). \tag{1.28}$$

Em posse dos resultados (1.22),(1.24),(1.26) e (1.28), somos capazes de escrever a Lagrangiana (1.3) completa, em função dos termos bilineares de $h_{\mu\nu}$. Chamaremos a Lagrangiana completa de $\mathcal{L}_{1,2,3,4} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4$, fazendo um pouco de manipulação algébrica podemos escrever o lagrangiano (1.3) no seguinte formato:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{1,2,3,4} &= \left(\frac{b}{4} + d \right) \left[h^{\mu\nu} \square^2 h_{\mu\nu} - (A_{,\mu}^\mu)^2 - F_{\mu\nu}^2 + \frac{(b/4)(1+4c)}{(b/4)+d} (\partial^\alpha A_\alpha - \square\phi)^2 \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} [h^{\mu\nu} \square h_{\mu\nu} + A_\nu^2 + (A_\nu - \partial_\nu \phi)^2]. \tag{1.29}
\end{aligned}$$

Anteriormente foi mencionado que na equação (1.27), encontramos termos semelhantes ao da expressão (1.25), por isso podemos fazer uma pequena análise, em vez de adotar o $\mathcal{L}_{1,2,3,4}$, vamos escrever o termo $\mathcal{L}_{1,2,3} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3$;

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{1,2,3} &= \frac{b}{4} [h^{\mu\nu} \square^2 h_{\mu\nu} - (A_{,\mu}^\mu)^2 - F_{\mu\nu}^2 + (1+4c)(\partial^\alpha A_\alpha - \square\phi)^2] \\
&\quad - \frac{1}{2} [h^{\mu\nu} \square h_{\mu\nu} + A_\nu^2 + (A_\nu - \partial_\nu \phi)^2], \tag{1.30}
\end{aligned}$$

nas duas equações acima fizemos $c = \alpha/\beta$.

As equações (1.29) e (1.30) são diferentes apenas devido às constantes multiplicativas, como as constantes são arbitrárias podemos adotar um conjunto de constantes onde as duas equações fiquem idênticas. Então, podemos desprezar a contribuição do termo \mathcal{L}_4 , que equivale a desprezar o termo $R_{\mu\beta\nu\alpha}^2$ na Lagrangiana inicial da teoria.

O Lagrangiano (1.30) será o ponto de partida para as discussões nos próximos capítulos, quando for desenvolvido o cálculo dos propagadores do modelo de gravitação em

$D > 2$.

Encontrado o Lagrangiano bilinear (1.30), deve ser ressaltado que ele é invariante sob uma transformação infinitesimal de coordenadas $x^\mu \rightarrow x^\mu + \kappa \xi^\mu$, onde ξ^μ é um campo vetorial arbitrário infinitesimal, esta transformação deve ser infinitesimal para evitar inconsistência com a expressão (1.8). Usando a transformação em (1.8) obtemos:

$$h_{\mu\nu}(x) \longrightarrow h_{\mu\nu}(x) - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}. \quad (1.31)$$

A presença de uma simetria local na equação acima, nos exige adicionar um termo de fixação de gauge \mathcal{L}_{gf} , a escolha comum da literatura, é uma combinação linear de A_μ e ϕ . Vamos adotar também outra combinação linear entre $F_{\mu\nu}$ e $(A_{,\mu}^\mu - \square\phi)$, por conta que estes termo aparecem no expressão do lagrangiano (1.30), fazemos assim, pois o fixador de gauge ficará o mais geral possível:

$$\mathcal{L}_{gf} = \lambda_1 (A_\nu - \lambda \partial_\nu \phi)^2 + \frac{b}{4} [\lambda_2 (A_{,\mu}^\mu - \square\phi)^2 - \lambda_3 F_{\mu\nu}]. \quad (1.32)$$

os fatores λ , λ_1 , λ_2 e λ_3 são parâmetros ajustáveis para cada caso estudado.

Analisando diversos trabalhos podemos listar três fixadores de gauge mais utilizados [7, 16, 17], ambos formados por estruturas oriundas da equação.

Posteriormente poderemos adotar algum gauge específico para o nosso trabalho.

Exemplo 1 *Jolve-Tonin gauge* ($\lambda = 0$)

$$L_{gf} = \lambda_1 A_\nu + \frac{b}{4} [\lambda_2 (A_{,\mu}^\mu - \square\phi)^2 - \lambda_3 F_{\mu\nu}]. \quad (1.33)$$

Exemplo 2 *de Donger gauge* ($\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda = \frac{1}{2}$)

$$L_{gf} = \lambda_1 (A_\nu - \frac{1}{2} \partial_\nu \phi)^2. \quad (1.34)$$

Exemplo 3 *Feynman gauge* ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda = \frac{1}{2}$)

$$L_{gf} = (A_\nu - \frac{1}{2} \partial_\nu \phi)^2. \quad (1.35)$$

2 *Cálculo do propagador para teorias gravitacionais de altas derivadas.*

Encontrado a lagrangiana apropriada e adicionando um fixador de gauge, podemos dar continuidade à busca da obtenção do propagador em teorias gravitacionais com termos de derivadas superiores, para dimensão $D > 2$. A busca de encontrar o propagador de uma teoria é bastante relevante, pois, podemos analisar a estrutura da teoria, se a teoria é unitária e a presença ou não de modos de propagação não físicos. Neste capítulo, usaremos as definições dos operadores de spin de Barnes-Rivers, para auxiliar na inversão do operador da teoria que é extraído diretamente da lagrangiana, como resultado terá o propagador do gráviton.

2.1 Cálculo do propagador em D-dimensões para teorias gravitacionais com altas derivadas

Adotando \mathcal{L} como sendo um lagrangiano de uma teoria gravitacional. Para o cálculo do propagador do gráviton deveremos encontrar a forma bilinear deste lagrangiano, através da decomposição da métrica (1.8), substituindo no lagrangiano e coletando somente os termos de ordem quadrática em $h_{\mu\nu}$, encontraremos \mathcal{L}_0 . Se a teoria envolvida for invariante de gauge, deverá ser adicionado um fixador de gauge \mathcal{L}_{gf} . A lagrangiana resultante será $\mathcal{L} = \mathcal{L}_t + \mathcal{L}_{fg}$. Poderá ser escrita da seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \mathcal{O}_{\mu\nu,\alpha\beta} h^{\alpha\beta}, \quad (2.1)$$

onde o termo $\mathcal{O}_{\mu\nu,\alpha\beta}$, é um operador tensorial. A vírgula nos índices do operador vetorial é para indicar que ele é simétrico nos índices. Como dito no início deste capítulo o propagador será obtido depois da inversão deste operador.

A fim de facilitar este procedimento vamos utilizar as definições dos operadores ten-

soriais de Barnes-Rivers. O conjunto completo desses operadores em D-dimensões é dado [7]:

$$\begin{aligned}
 P_{\mu\nu,\alpha\beta}^1 &= \frac{1}{2}(\theta_{\mu\alpha}\omega_{\nu\beta} + \theta_{\mu\beta}\omega_{\nu\alpha} + \theta_{\nu\alpha}\omega_{\mu\beta} + \theta_{\nu\beta}\omega_{\mu\alpha}), \\
 P_{\mu\nu,\alpha\beta}^2 &= \frac{1}{2}(\theta_{\mu\alpha}\theta_{\nu\beta} + \theta_{\mu\beta}\theta_{\nu\alpha}) - \frac{1}{D-1}\theta_{\mu\nu}\theta_{\alpha\beta}, \\
 P_{\mu\nu,\alpha\beta}^0 &= \frac{1}{D-1}\theta_{\mu\nu}\theta_{\alpha\beta}, \\
 \bar{P}_{\mu\nu,\alpha\beta}^0 &= \omega_{\mu\nu}\omega_{\alpha\beta}, \\
 \overline{\overline{P}}_{\mu\nu,\alpha\beta}^0 &= \theta_{\mu\nu}\omega_{\alpha\beta} + \omega_{\mu\nu}\theta_{\alpha\beta}.
 \end{aligned}$$

Os termos $\theta_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu}$, são as projeções dos operadores vetoriais transversal e longitudinal respectivamente.

$$\begin{aligned}
 \theta_{\mu\nu} &\equiv \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \\
 \omega_{\mu\nu} &\equiv \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}.
 \end{aligned}$$

o termo k_μ é o momentum do gráviton e $k^2 \equiv k_\mu k^\mu$.

As relações entre as projeções podem ser listadas como:

$$\theta_{\mu\beta}\theta_\nu^\beta = \theta_{\mu\nu}, \omega_{\mu\beta}\omega_\nu^\beta = \omega_{\mu\nu}, \theta_{\mu\beta}\omega_\nu^\beta = 0.$$

Os operadores de Barnes-Rivers formam uma base fechada e satisfazem a relação de completude:

$$[P^2 + P^1 + P^0 + \bar{P}^0]_{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}) \equiv I_{\mu\nu,\alpha\beta},$$

onde $I_{\mu\nu,\alpha\beta}$ é a matriz identidade para os tensores de quatro índices.

Os operadores P^2, P^1, P^0, \bar{P}^0 , representam as projeções dos spin-1, spin-2 e dois spin-0. O operador $\overline{\overline{P}}^0$, é a soma dos operadores de transferência.

$$\overline{\overline{P}}_{\mu\nu,\alpha\beta}^0 \equiv [P^{\theta\omega} + P^{\omega\theta}]_{\mu\nu,\alpha\beta}.$$

Utilizando as definições dos projetores transversais $\theta_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu}$, para reescrever o operador $\overline{\overline{P}}^0$, teremos:

$$P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{\theta\omega} \equiv \theta_{\mu\nu}\omega_{\alpha\beta}, P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{\omega\theta} \equiv \omega_{\mu\nu}\theta_{\alpha\beta}.$$

Os produtos os operadores são fundamentais para obter o propagador. É bem razoável

que produtos de projeções de spin diferentes sejam nulos, então podemos escrever:

$$\overline{\overline{P}}^0 P^1 = \overline{\overline{P}}^0 P^1 = P^2 \overline{\overline{P}}^0 = P^2 \overline{\overline{P}}^0 = O.$$

Outro resultado bem esperado são os produtos dos projetores de spin iguais:

$$P^{(1)}_{\mu\nu,\lambda\gamma} P^{(1)\lambda\gamma}_{,\alpha\beta} = P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta},$$

$$P^{(2)}_{\mu\nu,\lambda\gamma} P^{(2)\lambda\gamma}_{,\alpha\beta} = P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta},$$

$$P^{(0)}_{\mu\nu,\lambda\gamma} P^{(0)\lambda\gamma}_{,\alpha\beta} = P^{(0)}_{\mu\nu,\alpha\beta},$$

$$\overline{\overline{P}}^0_{\mu\nu,\lambda\gamma} \overline{\overline{P}}^{0\lambda\gamma}_{,\alpha\beta} = \overline{\overline{P}}^0_{\mu\nu,\alpha\beta}.$$

A diferença está no termo $\overline{\overline{P}}^0$, como foi mencionado, ele é uma soma dos dois projetores de spin-0

$$(\overline{\overline{P}})^2 = (D - 1)(P^0 + \overline{\overline{P}}^0),$$

$$P^0 \overline{\overline{P}}^0 = \overline{\overline{P}}^0 P^0 = P^{\theta\omega},$$

$$\overline{\overline{P}}^0 \overline{\overline{P}}^0 = \overline{\overline{P}}^0 P^0 = P^{\omega\theta}.$$

Após deixar o lagrangiano na forma da equação (2.1), o operador $\mathcal{O}_{\mu\nu,\alpha\beta}$ deverá ser expandido em termos dos operadores de spin de Barnes-Rivers $P^2, P^1, P^0, \overline{\overline{P}}^0, \overline{\overline{P}}^0$. Para auxiliar neste trabalho, pode-se usar algumas identidades tensoriais:

$$\frac{1}{2}(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}) = [P^2 + P^1 + P^0 + \overline{\overline{P}}^0]_{\mu\nu,\alpha\beta},$$

$$\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} = [(D - 1)P^0 + \overline{\overline{P}}^0]_{\mu\nu,\alpha\beta},$$

$$\frac{1}{k^2}(\eta_{\mu\alpha}k_\nu k_\beta + \eta_{\mu\beta}k_\nu k_\alpha + \eta_{\nu\alpha}k_\mu k_\beta + \eta_{\nu\beta}k_\mu k_\alpha) = [2P^1 + 4\overline{\overline{P}}^0]_{\mu\nu,\alpha\beta},$$

$$\frac{1}{k^2}(\eta_{\mu\nu}k_\alpha k_\beta + \eta_{\alpha\beta}k_\mu k_\nu) = [\overline{\overline{P}}^0 + 2\overline{\overline{P}}^0]_{\mu\nu,\alpha\beta}, \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{k^4}(k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta) = \overline{\overline{P}}^0_{\mu\nu,\alpha\beta},$$

$$P^2_{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}) - \frac{1}{D - 1}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} - \left[P^1 + \frac{D - 2}{D - 1}\overline{\overline{P}}^0 - \frac{1}{D - 1}\overline{\overline{P}}^0 \right]_{\mu\nu,\alpha\beta},$$

$$P = \frac{1}{D - 1}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{D - 1}[\overline{\overline{P}}^0 + \overline{\overline{P}}^0]_{\mu\nu,\alpha\beta},$$

as identidades acima listadas podem ser facilmente conferidas, basta aplicar a definição dos operadores de Barnes-Rivers.

Encontrando o operador tensorial $\mathcal{O}_{\mu\nu,\alpha\beta}$, basta aplicar as identidades tensoriais, que

conseguimos expandir na base os $P^2, P^1, P^0, \bar{P}^0, \overline{\bar{P}}^0$, de maneira mais geral, o operador ficará na forma:

$$\mathcal{O} = x_1 P^1 + x_2 P^2 + x_0 P^0 + \bar{x}_0 \bar{P}^0 + \overline{\bar{x}}_0 \overline{\bar{P}}^0. \quad (2.3)$$

O objetivo principal desse capítulo é encontrar o propagador do gráviton, então em posse do operador expandido (2.2), deve ser invertido, utilizando identidade $\mathcal{O}\mathcal{O}^{-1} = I$, podemos escrever o operador inverso como:

$$\mathcal{O}^{-1} = y_1 P^1 + y_2 P^2 + y_0 P^0 + \bar{y}_0 \bar{P}^0 + \overline{\bar{y}}_0 \overline{\bar{P}}^0.$$

Observando a relação da identidade escrita acima, junto com aquela do início do capítulo:

$$[P^2 + P^1 + P^0 + \bar{P}^0]_{\mu\nu, \alpha\beta} = I_{\mu\nu, \alpha\beta},$$

facilmente chegaremos em um conjunto de equações, que após resolver teremos a forma exata do propagador.

Para não nos atrapalharmos escreveremos termo a termo, já que os termos cruzados que não são nulos serão somente de spin-0.

$$\begin{aligned} I &= \mathcal{O}\mathcal{O}^{-1} \\ I &= (x_1 P^1 + x_2 P^2 + x_0 P^0 + \bar{x}_0 \bar{P}^0 + \overline{\bar{x}}_0 \overline{\bar{P}}^0) \times (y_1 P^1 + y_2 P^2 + y_0 P^0 + \bar{y}_0 \bar{P}^0 + \overline{\bar{y}}_0 \overline{\bar{P}}^0) \\ I &= x_1 y_1 (P^1)^2 + x_2 y_2 (P^2)^2 + x_0 y_0 (P^0)^2 + x_0 P^0 \bar{y}_0 \bar{P}^0 \\ &\quad + \bar{x}_0 \bar{y}_0 (\bar{P}^0)^2 + \bar{x}_0 \overline{\bar{y}}_0 \bar{P}^0 \overline{\bar{P}}^0 + \overline{\bar{x}}_0 \overline{\bar{y}}_0 y_0 P^0 + \overline{\bar{x}}_0 \overline{\bar{P}}^0 \bar{y}_0 \bar{P}^0 + \overline{\bar{x}}_0 \overline{\bar{P}}^0 \overline{\bar{y}}_0 \overline{\bar{P}}^0 \\ I &= x_1 y_1 P^1 + x_2 y_2 P^2 + x_0 y_0 P^0 + x_0 \bar{y}_0 P^{\omega\theta} \\ &\quad + \bar{x}_0 \bar{y}_0 \bar{P}^0 + \bar{x}_0 \overline{\bar{y}}_0 P^{\theta\omega} + \overline{\bar{x}}_0 y_0 P^{\theta\omega} + \overline{\bar{x}}_0 \bar{y}_0 P^{\omega\theta} + \overline{\bar{x}}_0 \overline{\bar{y}}_0 (D-1)(P^0 + \bar{P}^0). \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes do resultado anterior com a identidade dos operadores de Bernes-Rivers, podemos escrever diretamente um conjunto de equações simultâneas:

$$\begin{aligned} x_1 y_1 &= 1, \\ x_2 y_2 &= 1, \\ x_0 y_0 + (D-1) \overline{\bar{x}}_0 \overline{\bar{y}}_0 &= 1, \\ \bar{x}_0 \bar{y}_0 + (D-1) \overline{\bar{x}}_0 \overline{\bar{y}}_0 &= 1, \\ x_0 \overline{\bar{y}}_0 + \bar{x}_0 \overline{\bar{y}}_0 &= 0, \end{aligned}$$

$$\bar{\bar{x}}_0 y_0 \bar{\bar{x}}_0 \bar{y}_0 = 0.$$

Desta forma pode-se escrever todos os coeficientes do propagador \mathcal{O}^{-1} :

$$\mathcal{O}^{-1} = \frac{1}{x_1} P^1 + \frac{1}{x_2} P^2 + \frac{1}{x_0 \bar{x}_0 - (D-1) \bar{\bar{x}}_0^2} [\bar{x}_0 P^0 + x_0 \bar{P}^0 - \bar{\bar{x}}_0 \bar{\bar{P}}_0]. \quad (2.4)$$

Com este resultado somos capazes de calcular a forma de o propagador partir de uma lagrangiana qualquer, tomando o cuidado, pois em determinadas ocasiões deve-se fixar o gauge.

2.2 Cálculo do propagador em D -dimensões para teorias gravitacionais quadrática

Na seção anterior vimos os passos para encontrar o propagador do gráviton de uma teoria qualquer. Nesta seção vamos realizar basicamente os passos da seção anterior, mas com um lagrangiano da equação (1.30). Primeiramente devemos simetrizar o lagrangiano a fim de deixar da forma (2.1).

2.2.1 Simetrização da Lagrangiana

O lagrangiano que vamos analisar nesta seção é encontrado na equação (1.30) e adicionado um fixador de gauge. Usaremos o mais geral.

Relembrando que o lagrangiano adotado é da forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3$, vamos analisar separadamente, pois julgo ser uma abordagem mais simples e mais organizada, para o acompanhamento das simetrizações de cada parte.

Começando pela a equação (1.21), mais o termo de fixação de gauge, este último irei escrever substituindo as definições de A_μ e ϕ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_{gf} = & - \left[\frac{1}{2} h^{\mu\nu} \square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h_\mu^\mu \square h_\alpha^\alpha + h_\mu^\mu \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} - h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\alpha h_\nu^\alpha \right] \\ & + \frac{1}{2} \lambda_1 (2h_\mu^\mu \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} - 2\lambda h^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\alpha h_\mu^\alpha - 2\lambda^2 h_\mu^\mu \square h_\alpha^\alpha) \\ & + \frac{b}{4} (\lambda_2 [h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} - 2\lambda h_\mu^\mu \square \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} + \lambda^2 h_\mu^\mu \square^2 h_\alpha^\alpha \\ & + \lambda_3 [2h_\beta^\mu \square \partial_\mu \partial_\alpha h^{\alpha\beta} - 2h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \partial_\alpha \partial_\beta]). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Rescrevendo agora no formato $L_1 + L_{gf} = \frac{1}{2}h^{\mu\nu}\mathcal{O}_{\mu\nu,\alpha\beta}h^{\alpha\beta}$, temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_{gf} &= \frac{1}{2}h^{\mu\nu}(\square\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} - \eta_{\mu\nu}\square\eta_{\alpha\beta} + 2\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta - 2\partial_\mu\partial_\alpha\eta_{\nu\beta} \\ &\quad + \lambda_1[2\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta - 2\lambda\partial_\nu\partial_\alpha\eta_{\mu\beta} - 2\lambda^2\eta_{\mu\nu}\square\eta_{\alpha\beta}] \\ &\quad + \frac{b}{2}(\lambda_2[\partial_\mu\partial_\nu\partial_\alpha\partial_\beta - 2\lambda\eta_{\mu\nu}\square\partial_\alpha\partial_\beta + \lambda^2\square\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}] \\ &\quad + \lambda_3[2\eta_{\nu\beta}\square\partial_\mu\partial_\alpha - 2\partial_\mu\partial_\nu\partial_\alpha\partial_\beta])h^{\alpha\beta}.\end{aligned}\quad (2.6)$$

Depois que obtemos o resultado acima, devemos observar que alguns termos não apresentam simetria nos índices, troca de $\mu \rightarrow \nu$ e $\alpha \rightarrow \beta$, pois isto é uma característica que devemos buscar, para encontrar o propagador. Após simetrizar a equação (2.6), encontraremos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_{gf} &= \frac{1}{2}h^{\mu\nu}(\square[\frac{1}{2}(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}) - \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}] - (\partial_\alpha\partial_\beta\eta_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\nu\eta_{\alpha\beta}) \\ &\quad + \frac{1}{2}[\partial_\mu\partial_\alpha\eta_{\nu\beta} + \partial_\mu\partial_\beta\eta_{\nu\alpha} + \partial_\nu\partial_\alpha\eta_{\mu\beta} + \partial_\nu\partial_\beta\eta_{\mu\alpha}] \\ &\quad + \lambda_1[(\partial_\alpha\partial_\beta\eta_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\nu\eta_{\alpha\beta}) - \lambda[\partial_\mu\partial_\alpha\eta_{\nu\beta} + \partial_\mu\partial_\beta\eta_{\nu\alpha} + \partial_\nu\partial_\alpha\eta_{\mu\beta} \\ &\quad + \partial_\nu\partial_\beta\eta_{\mu\alpha}] - 2\square\lambda^2\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}] \\ &\quad + \frac{b}{2}(\lambda_2[\partial_\mu\partial_\nu\partial_\alpha\partial_\beta - \frac{\lambda\square}{2}(\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta + \eta_{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\nu) + \lambda^2\square^2\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}] \\ &\quad + \lambda_3[\frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\alpha\eta_{\nu\beta} + \partial_\mu\partial_\beta\eta_{\nu\alpha} + \partial_\nu\partial_\alpha\eta_{\mu\beta} + \partial_\nu\partial_\beta\eta_{\mu\alpha}) \\ &\quad - 2\partial_\mu\partial_\nu\partial_\alpha\partial_\beta])h^{\alpha\beta}.\end{aligned}\quad (2.7)$$

Usando as relações tensoriais (2.2), poderemos reescrever a equação acima (2.7), em função dos projetores de Barnes-Rivers:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_{gf} &= \frac{1}{2}h^{\mu\nu}([\frac{b\lambda_3k^4}{2}]P^1 + [k^2]P^2 \\ &\quad + [2(D-1)k^2\lambda_1\lambda^2 - k^2(D-2) + \frac{b\lambda_2\lambda^2k^4[D-1]}{2}]P^0 \\ &\quad + \left[2k^2\lambda_1 - 4k^2\lambda\lambda_1 + 2k^2\lambda_1\lambda^2 + \frac{b\lambda_2k^4}{2} - 2\frac{b\lambda_2\lambda k^4}{2} + \frac{b\lambda_2\lambda^2k^4}{2}\right]\overline{P}^0 \\ &\quad + [2k^2\lambda_1\lambda^2 - 2k^2\lambda\lambda_1 - \frac{b\lambda_2\lambda k^4}{2} + \frac{b\lambda_2\lambda^2k^4}{2}]\overline{\overline{P}}^0)h^{\alpha\beta}.\end{aligned}\quad (2.8)$$

O processo executado acima será feito nas duas partes restantes do lagrangiano adotado. Para a parcela proporcional ao escalar de curvatura ao quadrado teremos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 &= \frac{\alpha}{2}\kappa^2(h_\mu^\mu\Box^2 h_\alpha^\alpha - 2h_\mu^\mu\Box\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} + h^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta}) \\
&= \frac{1}{2}h^{\mu\nu}(\alpha\kappa^2[\Box^2\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} - 2\Box\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta + \partial_\mu\partial_\nu\partial_\alpha\partial_\beta])h^{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Após simetrizar ficamos com:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 &= \frac{1}{2}h^{\mu\nu}(\alpha\kappa^2[\Box^2(\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}) - \Box(\partial_\alpha\partial_\beta\eta_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\nu\eta_{\alpha\beta}) \\
&\quad + \partial_\mu\partial_\nu\partial_\alpha\partial_\beta])h^{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Reescrevendo em função dos projetores:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}h^{\mu\nu}(\alpha\kappa^2[k^4(D-1)P^0])h^{\alpha\beta}. \tag{2.11}$$

Finalmente, com o último fator o tensor de Riemann:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_3 &= \frac{b}{4}(h^{\mu\nu}\Box^2 h_{\mu\nu} + h_\mu^\mu\Box^2 h_\alpha^\alpha - 2\Box h_\mu^\mu\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} - 2h_\beta^\mu\Box\partial_\mu\partial_\alpha h^{\alpha\beta} \\
&\quad + 2h^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta})
\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}h^{\mu\nu}\left(\frac{b}{2}[\Box^2[\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}] - 2\Box[\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta + \eta_{\nu\beta}\partial_\mu\partial_\alpha] \right. \\
&\quad \left. + 2[\partial_\mu\partial_\nu\partial_\alpha\partial_\beta])\right)h^{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Simetrizando:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_3 &= \frac{1}{2}h^{\mu\nu}\frac{b}{2}(\Box^2[\frac{1}{2}(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}) + \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}] - \Box[(\partial_\alpha\partial_\beta\eta_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\nu\eta_{\alpha\beta}) \\
&\quad + \frac{1}{2}[\partial_\mu\partial_\alpha\eta_{\nu\beta} + \partial_\mu\partial_\beta\eta_{\nu\alpha} + \partial_\nu\partial_\alpha\eta_{\mu\beta} + \partial_\nu\partial_\beta\eta_{\mu\alpha}] + 2[\partial_\mu\partial_\nu\partial_\alpha\partial_\beta])h^{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Escrevendo em função dos projetores:

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{2}h^{\mu\nu}\frac{b}{2}k^4(P^2 + DP^0)h^{\alpha\beta}. \tag{2.15}$$

Unindo todos os termos calculados, $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_{gf}$, \mathcal{L}_2 , \mathcal{L}_3 . Podemos montar o lagrangiano

em termos dos projetores de spin:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 \\
&= \frac{1}{2}h^{\mu\nu} \left\{ \frac{b}{2} \left[\lambda_3 k^4 + \frac{2\lambda_1 k^2}{b} \right] P^1 + \frac{b}{2} \left[k^4 + \frac{2k^2}{b} \right] P^2 \right. \\
&\quad + \frac{b}{2} \left[Dk^4 - \frac{2k^2(D-2)}{b} + 4(D-1)k^4 c + (D-1)k^4 \lambda_2 \lambda^2 + \frac{4k^2(D-1)\lambda_1 \lambda^2}{b} \right] P^0 \\
&\quad + \frac{b}{2} \left[k^4 \lambda_2 - 2k^4 \lambda \lambda_2 + \frac{4k^2 \lambda_1}{b} - \frac{8k^2 \lambda \lambda_1 + k^4 \lambda_2 \lambda^2}{b} + \frac{4k^2 \lambda_1 \lambda^2}{b} \right] \bar{P}^0 \\
&\quad \left. + \frac{b}{2} [4k^2 \lambda_1 \lambda^2 + k^4 \lambda_2 \lambda^2 - k^4 \lambda_2 \lambda - 4k^2 \lambda \lambda_1] \bar{\bar{P}}^0 \right\} h^{\alpha\beta}. \tag{2.16}
\end{aligned}$$

Conseguimos encontrar o lagrangiano em função dos projetores em D-dimensões, ainda não tomamos nenhum fixador de gauge específico, o calculo realizado acima foi realizado de maneira que fique o mais geral possível. O termo entre parênteses da equação (2.16) é o operador vetorial que devemos inverter para obter o propagador. Para cumprir esta tarefa, seguiremos os passos da seção anterior, começando por escrever o operador vetorial:

$$\mathcal{O} = x_1 P^1 + x_2 P^2 + x_0 P^0 + \bar{x}_0 \bar{P}^0 + \bar{\bar{x}}_0 \bar{\bar{P}}^0$$

Substituindo com os valores que acabamos de encontrar

$$\begin{aligned}
\mathcal{O} &= \frac{b}{2} \left[\lambda_3 k^4 + \frac{2\lambda_1 k^2}{b} \right] P^1 + \frac{b}{2} \left[k^4 + \frac{2k^2}{b} \right] P^2 \\
&\quad + \frac{b}{2} \left[Dk^4 - \frac{2k^2(D-2)}{b} + 4(D-1)k^4 c + (D-1)k^4 \lambda_2 \lambda^2 + \frac{4k^2(D-1)\lambda_1 \lambda^2}{b} \right] P^0 \\
&\quad + \frac{b}{2} \left[k^4 \lambda_2 - 2k^4 \lambda \lambda_2 + \frac{4k^2 \lambda_1}{b} - \frac{8k^2 \lambda \lambda_1 + k^4 \lambda_2 \lambda^2}{b} + \frac{4k^2 \lambda_1 \lambda^2}{b} \right] \bar{P}^0 \\
&\quad + \frac{b}{2} \left[\frac{4k^2 \lambda_1 \lambda^2}{b} + k^4 \lambda_2 \lambda^2 - k^4 \lambda_2 \lambda - \frac{4k^2 \lambda \lambda_1}{b} \right] \bar{\bar{P}}^0. \tag{2.17}
\end{aligned}$$

Este é o operador vetorial em D-dimensão e sem um gauge específico, ele é a base para obter os propagadores qualquer dimensão com $D > 2$, e com fixador de gauge da forma descrito anteriormente:

$$\mathcal{L}_{gf} = \lambda_1 (A_\nu - \lambda \partial_\nu \phi)^2 + \frac{b}{4} [\lambda_2 (A_{,\mu}^\mu - \square \phi)^2 - \lambda_3 F_{\mu\nu}].$$

Escolhendo o gauge de *Julve-Tonin*, $\lambda = 0$, podemos encontrar:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^{-1} &= \frac{b}{2}[\lambda_3 k^4 + \frac{2\lambda_1 k^2}{b}]P^1 + \frac{b}{2}[k^4 + \frac{2k^2}{b}]P^2 \\
&+ \frac{b}{2}[Dk^4 - \frac{2k^2(D-2)}{b} + 4(D-1)k^4 c]P^0 \\
&+ \frac{b}{2}\left[k^4 \lambda_2 + \frac{4k^2 \lambda_1}{b}\right]\bar{P}^0.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Olhando a forma do operador vetorial acima, podemos comparar com o operador da equação (2.3), e mapear os coeficientes. Assim, encontraremos o formato do propagador do gráviton para teoria de altas derivadas com o gauge especificado, via equação (2.4). Fazendo algumas manipulações algébricas chegamos ao resultado:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^{-1} &= \frac{m_1^2}{k^2(m_1^2 \lambda_1 - \lambda_3 k^2)}P^1 + \frac{m_1^2}{k^2(m_1^2 - k^2)}P^2 + \frac{m_0^2}{2k^2[k^2 - [(D-1)/2]m_1^2]}P^0 \\
&+ \left[\frac{m_1^2}{(2m_1^2 \lambda_1 - \lambda_2 k^2)k^2}\right]\bar{P}^0,
\end{aligned} \tag{2.19}$$

onde foram introduzidas duas constantes, afim de facilitar os cálculos:

$$m_0^2 \equiv \frac{2}{D\beta\kappa^2/4 + (D-1)\kappa^2\alpha}, \tag{2.20}$$

$$m_1^2 \equiv -\frac{4}{\beta\kappa^2}. \tag{2.21}$$

Para o gauge de *Donder*, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ e $\lambda = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O} &= \frac{b}{2}[\lambda_3 k^4 + \frac{2\lambda_1 k^2}{b}]P^1 + \frac{b}{2}[k^4 + \frac{2k^2}{b}]P^2 \\
&+ \frac{b}{2}[Dk^4 - \frac{2k^2(D-2)}{b} + 4(D-1)k^4 c + (D-1)k^4 \lambda_2 \lambda^2 + \frac{4k^2(D-1)\lambda_1 \lambda^2}{b}]P^0 \\
&+ \frac{b}{2}\left[k^4 \lambda_2 - 2k^4 \lambda \lambda_2 + \frac{4k^2 \lambda_1}{b} - \frac{8k^2 \lambda \lambda_1}{b} + k^4 \lambda_2 \lambda^2 + \frac{4k^2 \lambda_1 \lambda^2}{b}\right]\bar{P}^0 \\
&+ \frac{b}{2}\left[\frac{4k^2 \lambda_1 \lambda^2}{b} + k^4 \lambda_2 \lambda^2 - k^4 \lambda_2 \lambda - \frac{4k^2 \lambda \lambda_1}{b}\right]\bar{\bar{P}}^0.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Por fim, para o gauge de *Feynman* $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_1 = 1$ e $\lambda = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O} &= \frac{b}{2} \left[\frac{2k^2}{b} \right] P^1 + \frac{b}{2} \left[k^4 + \frac{2k^2}{b} \right] P^2 \\
&+ \frac{b}{2} \left[Dk^4 - \frac{2k^2(D-2)}{b} + 4(D-1)k^4 c + \frac{k^2(D-1)}{b} \right] P^0 \\
&+ \frac{b}{2} \left[+\frac{4k^2}{b} - \frac{4k^2}{b} + \frac{k^2}{b} \right] \overline{P}^0 + \frac{b}{2} \left[\frac{k^2}{b} - \frac{2k^2}{b} \right] \overline{\overline{P}}^0.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

3 *Cálculo do propagador para teoria de gravidade topologicamente massiva de Chern-Simons.*

3.1 Teoria de Chern-Simons

Sabemos que a lagrangiana de Maxwell escrita em termos do campo de calibre $A_\mu = (A_0, \vec{A})$, sendo A_0 o potencial escalar e o \vec{A} o potencial vetor, é dada por:

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu J^\mu. \quad (3.1)$$

Sendo expressa por meio do tensor do campo eletromagnético (pode ser também entendido como o análogo a curvatura em contexto de gravitação) $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ e por uma corrente de matéria J^μ , que é conservada $\partial_\mu J^\mu = 0$.

Esta lagrangiana é invariável sob a transformação $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$, e suas equações de movimento também não serão afetadas. A teoria de Maxwell pode ser definida em espaços de dimensões arbitrárias, modificando somente os índices do campo A_μ , $\mu = 0, 1, 2, \dots, D - 1$. As mudanças que ocorrem em trabalhar num espaço-tempo em D-dimensões, não são refletidas na lagrangiana, nem nas equações de movimento, será notado somente nas quantidades de campos para definir o espaço-tempo.

Existe algo notável de $(2 + 1)$ dimensões, é que ao invés de considerar a forma "reduzida" da teoria de Maxwell, podemos definir um tipo completamente diferente de teoria de calibre: a teoria de Chern-Simons. Satisfazendo os critérios usuais para uma teoria de calibre - invariante de Lorentz, invariante de gauge. O lagrangiano de Chern-Simons é:

$$\mathcal{L}_{C.S.} = \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda - A_\mu J^\mu, \quad (3.2)$$

onde κ é uma constante da teoria e o símbolo $\epsilon^{\mu\nu\lambda}$ o tensor totalmente antissimétrico de

Levi-Civita:

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda} = \begin{cases} 1, & \text{para permutações pares de } 0, 1, 2, \\ -1, & \text{para permutações ímpares de } 0, 1, 2, \\ 0, & \text{para qualquer outra.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Existem vários comentários a fazer sobre este lagrangiano de Chern-Simons. Em primeiro lugar, ele não parece ser invariante de gauge, pois envolve o campo de calibre A_μ , ao invés de apenas o termo (invariante de gauge) de intensidade do campo $F_{\mu\nu}$. Porém, sob uma transformação de calibre, a lagrangiana (3.2) muda somente por uma derivada total, ou seja, podem ser ignorados os termos de superfície, tornando a ação de Chern-Simons invariante de gauge[34].

Uma característica importante da lagrangiana Chern-Simons (3.2) é ser de primeira ordem em derivadas do espaço-tempo. Isso faz com que a estrutura canônica desta teoria seja significativamente diferente daquela da teoria de Maxwell. Uma propriedade relacionada é que o lagrangiano Chern-Simons é especial para $(2 + 1)$ dimensões, no sentido de que não se pode escrever um termo igual em $(3 + 1)$ dimensões, os índices simplesmente não combinam. Na verdade, é possível descrever a teoria de Chern-Simons em qualquer dimensão espaço-tempo, mas apenas em $(2 + 1)$ dimensões que a lagrangiana é quadrática no campo gauge. Por exemplo, o lagrangiano Chern-Simons em cinco dimensões do espaço-tempo é $\mathcal{L} = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\alpha \partial_\beta A_\lambda$.

A teoria de Chern-Simons pura tem soluções triviais, pois as equações de movimento longe da fonte se reduzem a $F_{\mu\nu} = 0$. No entanto, a teoria de Chern-Simons pode ficar interessante e não trivial quando se faz sua abordagem conjunta com outras teorias, por exemplo:

- Acoplamento de campos de matéria dinâmicos (escalares ou fermiônicos).
- Acoplamento de um termo Maxwell.
- Tomar o espaço-tempo para ter topologia não trivial
- Acoplamento com campos de calibre não-abeliano.
- Acoplamento com a gravidade.

3.2 Linearização da Lagrangiana com termo de Chern-Simons

Nosso intuito desde o início é trabalhar a gravidade em baixas dimensões. E a teoria de Chern-Simons pode contribuir de maneira interessante. Desta forma vamos adicionar ao modelo trabalhado no capítulo anterior um termo tipo Chern-Simons.

Podemos escrever a lagrangiana da gravidade topológica de Chern-Simons como sendo

$$\mathcal{L}_{C.S.} = \frac{1}{2\mu} \epsilon^{\lambda\mu\nu} \Gamma_{\sigma\lambda}^{\rho} \left(\partial_{\mu} \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} + \frac{2}{3} \Gamma_{\omega\mu}^{\sigma} \Gamma_{\nu\rho}^{\omega} \right). \quad (3.4)$$

O próximo passo, será expandir esta lagrangiana de acordo com a equação (1.8) e (1.9). Sabemos que o segundo termo não nos interessa, pois só terá contribuições de ordens superiores à h^2 , após a expansão, ficamos com apenas:

$$\mathcal{L}_{C.S.} = \frac{1}{2\mu} \epsilon^{\lambda\mu\nu} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} (\partial_{\mu} \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma}). \quad (3.5)$$

Realizando o mesmo trabalho do primeiro capítulo com as conexões, e coletando todos os termos até segunda ordem de h , o termo acima pode ser reescrito como:

$$\mathcal{L}_{C.S.} = \frac{1}{2\mu} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \frac{\kappa^2}{4} (\partial_{\lambda} h_{\sigma}^{\rho} + \partial_{\sigma} h_{\lambda}^{\rho} - \partial^{\rho} h_{\sigma\lambda}) (\partial_{\mu} \partial_{\rho} h_{\nu}^{\sigma} + \partial_{\mu} \partial_{\nu} h_{\rho}^{\sigma} - \partial_{\mu} \partial^{\sigma} h_{\rho\nu}). \quad (3.6)$$

Com um pouco de cuidado, pois os termos estão multiplicados pelo o símbolo de Levi-Civita, fazendo as multiplicações e cancelamento devido chegará:

$$\mathcal{L}_{C.S.} = \frac{1}{2\mu} \frac{\kappa^2}{2} (\epsilon^{\mu\nu\lambda} h_{\lambda}^{\alpha} \square \partial_{\mu} h_{\alpha\nu} - \epsilon^{\mu\nu\lambda} h_{\lambda}^{\alpha} \partial_{\mu} \partial_{\nu} \partial_{\alpha} h^{\gamma\nu}). \quad (3.7)$$

Realizando o processo de simetrização, o mesmo feito no capítulo anterior, obtemos neste processo:

$$\mathcal{L}_{C.S.} = \frac{1}{2M} h^{\mu\nu} P_{\mu\nu,\alpha\beta} h^{\alpha\beta}. \quad (3.8)$$

Foi adotado na equação acima, $M = \mu/\kappa$ e foi introduzido um novo operador P , que tem sua forma:

$$P_{\mu\nu,\alpha\beta} \equiv \frac{\square \partial^{\lambda}}{4} [\epsilon_{\mu\lambda\alpha} \theta_{\nu\beta} + \epsilon_{\mu\lambda\beta} \theta_{\nu\alpha} + \epsilon_{\nu\lambda\alpha} \theta_{\mu\beta} + \epsilon_{\nu\lambda\beta} \theta_{\mu\alpha}]. \quad (3.9)$$

Observando o lagrangiano (3.5) percebemos que ele está definido três dimensões. No capítulo anterior fizemos um estudo para obtenção do propagador em D-dimensões. A mudança ocorrerá nas multiplicações do operador adicional dividido a inclusão do termo de

Chern-Simons, logo então o propagador sofrerá modificações. No capítulo anterior foram estudados alguns dos principais resultados de produtos dos projetores em D-dimensões. Seria interessante apresentar todas as possibilidades de multiplicação agora incluindo os projetores $P^1, P^2, P^0, \bar{P}^0, \overline{\bar{P}}^0$ o novo projetor P , oriundo do termo de Chern-Simons. Construindo uma tabela com todas as possibilidades dos produtos dos projetores em três dimensões:

	P^1	P^2	P^0	\bar{P}^0	$\overline{\bar{P}}^0$	P
P^1	P^1	0	0	0	0	0
P^2	0	P^2	0	0	0	P
P^0	0	0	P^0	0	$P^{\theta\omega}$	0
\bar{P}^0	0	0	0	\bar{P}^0	$P^{\omega\theta}$	0
$\overline{\bar{P}}^0$	0	0	$P^{\omega\theta}$	$P^{\theta\omega}$	$2(P^0 + \bar{P}^0)$	0
P	0	P	0	0	0	$-k^6 P^2$

Tabela 1: Produtos dos operadores $P^1, P^2, P^0, \bar{P}^0, \overline{\bar{P}}^0$ e P .

O nosso operador \mathcal{O} , deverá sofrer uma pequena mudança, devido à adição do termo de Chern-Simons que foi definido em $D = 3$. Vamos fazer o cálculo olhando mais para o operador P , pois o resto já foi encontrado e deverá mudar só por conta da dimensão modificada.

Como foi falado anteriormente para obter o propagador devemos inverter o operador de forma que $\mathcal{O}\mathcal{O}^{-1} = I$. A forma geral do operador e do seu inverso expandida:

$$\mathcal{O} = x_1 P^1 + x_2 P^2 + x_0 P^0 + \bar{x}_0 \bar{P}^0 + \overline{\bar{x}}_0 \overline{\bar{P}}^0 + pP$$

$$\mathcal{O}^{-1} = y_1 P^1 + y_2 P^2 + y_0 P^0 + \bar{y}_0 \bar{P}^0 + \overline{\bar{y}}_0 \overline{\bar{P}}^0 + p'P$$

Fazendo o produto com auxilio da tabela multiplicativa encontraremos os seguintes valores para os coeficientes do \mathcal{O}^{-1}

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{x_1} \\ y_2 &= \frac{x_2}{(x_2^2 - p^2 k^6)} \\ y_0 &= \frac{\bar{x}_0}{(x_0 \bar{x}_0 - 2\overline{\bar{x}}_0^2)} \\ \bar{y}_0 &= \frac{x_0}{(x_0 \bar{x}_0 - 2\overline{\bar{x}}_0^2)} \\ \overline{\bar{y}}_0 &= -\overline{\bar{x}}_0 (x_0 \bar{x}_0 - 2\overline{\bar{x}}_0^2) \\ q' &= \frac{-p}{(x_2^2 - p^2 k^6)} \end{aligned}$$

O termo que sofreu mudança foi o coeficiente de P^2 e foi adicionado um novo coeficiente, podemos escrever a forma mais geral do propagador com o termo de Chern-Simons

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{-1} = & \frac{1}{x_1} P^1 + \frac{x_2}{(x_2^2 - p^2 k^6)} P^2 + \frac{\bar{x}_0}{(x_0 \bar{x}_0 - 2\bar{x}_0^2)} P^0 + \frac{x_0}{(x_0 \bar{x}_0 - 2\bar{x}_0^2)} \bar{P}^0 \\ & - \frac{\bar{x}_0}{(x_0 \bar{x}_0 - 2\bar{x}_0^2)} \bar{P}^0 - \frac{p}{(x_2^2 - p^2 k^6)} P. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Para não nos perdemos, o operador vetorial que estamos trabalhando deverá ser obtido do lagrangiano com altas derivadas adicionado o termos de Chern-Simons.

$$\mathcal{L}_t = \sqrt{g} \left[-\frac{2R}{\kappa^2} + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 \right] + \frac{1}{2\mu} \epsilon^{\lambda\mu\nu} \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho \left(\partial_\mu \Gamma_{\rho\nu}^\sigma + \frac{2}{3} \Gamma_{\omega\mu}^\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\omega \right) \quad (3.11)$$

O sinal negativo para o termo de Einstein-Hilbert é posto para realizar a redução da lagrangiana para o modelo de Pauli-Fierz, esta redução é possível para três dimensões mostrado em [4].

Sua forma expandida já adicionada do *Julve-Tonin* gauge, ($\lambda = 0$), em função dos projetores fica:

$$\begin{aligned} L_t = & \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \mathcal{O}_{\mu\nu, \alpha\beta} h^{\alpha\beta} \\ = & \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \left(-k^2 \left[\lambda_1 + \frac{\lambda_3 b k^2}{2} \right] P^1 + k^2 \left[k^2 \frac{b}{2} - 1 \right] P^2 \right. \\ & \left. - k^2 + b k^4 \left(\frac{3}{2} + 4c \right) P^0 \right. \\ & \left. - k^2 \left[\frac{b}{2} \lambda_2 k^2 + 2\lambda_1 \right] \bar{P}^0 \right. \\ & \left. + \frac{P}{M} \right) h^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Na forma que foi escrito fica fácil escrever o operador \mathcal{O} :

$$\begin{aligned} \mathcal{O} = & -k^2 \left[\lambda_1 + \frac{\lambda_3 b k^2}{2} \right] P^1 + k^2 \left[k^2 \frac{b}{2} - 1 \right] P^2 \\ & - k^2 + b k^4 \left(\frac{3}{2} + 4c \right) P^0 \\ & - k^2 \left[\frac{b}{2} \lambda_2 k^2 + 2\lambda_1 \right] \bar{P}^0 \\ & + \frac{P}{M}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Note que a equação (3.13) é muito parecida com (2.18), Pois o acréscimo do termo de Chern-Simons acarreta um termo adicional ao operador vetorial. A grande diferença irá

ocorrer no resultado final propagador, pois olhando a tabela de produtos dos operadores em três dimensões o termo proporcional a P^2 , irá sofrer uma pequena mudança.

Seguindo os passos da equação (2.4), podemos escrever o propagador do gráviton para a teoria com altas derivada adicionada de um termo de Chern-Simons com um fixador de Julve-Tonin

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{-1} = & -\frac{2}{2k^2\lambda_1 + bk^4\lambda_3}P^1 + \frac{2(-2 + bk^2)M^2}{-4k^4 + k^2(-2 + bk^2)^2M^2}P^2 + \frac{1}{bk^2(\frac{3}{2} + 4c) + k^2}P^0 \\ & -\frac{2}{4k^2\lambda_1 + bk^4\lambda_2}\bar{P}^0 - \frac{4M}{-4k^5 + k^4(-2 + bk^2)^2M^2}P. \end{aligned} \quad (3.14)$$

4 Teoria quântica de campos não-comutativa

Este capítulo é dedicado a uma pequena revisão sobre a formulação da teoria quântica de campos no espaço-tempo não-comutativo baseado na correspondência Weyl-Moyal.

4.1 Histórico

Não é recente a investigação de teorias de campos em espaço-tempo não-comutativos. A não-comutatividade é um conceito fundamental utilizado para expressar as relações de incertezas na mecânica quântica [12]. A não-comutatividade na mecânica quântica é aplicada aos observáveis posição e momento. Neste contexto trabalhamos com funções $f(x)$, definidas em um espaço comutativo, onde as coordenadas satisfazem a seguinte relação de comutação:

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = 0; \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4.1)$$

Na mecânica quântica para expressar as relações de incertezas usamos um espaço de fase discreto, diferente no caso da mecânica clássica que o espaço é contínuo. Esta troca de configuração ocorre depois que fazemos as trocas das variáveis canônicas espaço e momento, x^i e p^j , por operadores hermitianos \hat{x}^i e \hat{p}^j , que por sua vez obedecem a relação de incerteza de Heisenberg:

$$[\hat{x}^i, \hat{p}^j] = i\hbar\delta^{ij}. \quad (4.2)$$

A constante \hbar passa a definir um passo mínimo do espaço de fase, conhecida como célula de Planck. Se tomarmos o limite de $\hbar \rightarrow 0$, recuperamos o caso clássico.

Podemos pensar em outro tipo de discretização envolvendo apenas operadores de posição do sistema. Agora, as coordenadas x^μ (do espaço-tempo) serão mapeadas por

operadores hermitianos de uma álgebra não-comutativa, \hat{x}^μ , definidos por funções formuladas em um espaço-tempo comutativo. Assim, as coordenadas do espaço-tempo não irão comutar e passam a obedecer a seguinte relação:

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu} \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (4.3)$$

O parâmetro $\theta^{\mu\nu}$, é uma matriz antissimétrica constante, com dimensão de massa $[\theta] = -2$. A não-comutatividade das coordenadas do sistema também implicará em uma célula mínima que acarretará na incompatibilidade de observáveis. Uma consequência não trivial é o efeito de mistura entre as divergências ultravioletas (UV) e infravermelhas (IR), conhecido na literatura como mistura UV/IR.

A equação (5.3), traz uma serie de implicações físicas bastantes interessantes mais também traz vários aspectos delicados, que fizeram esta teoria não ser estudada com tanta motivação até bem pouco tempo atrás, um dos fatos mais desmotivadores para se trabalhar nesta teoria criada pelos matemáticos Connes e Riefel em 1987, é que ter relação de incerteza entre coordenadas espaciais, levaria a uma teoria não local onde as propriedades não são tão conhecidas.

A não-comutatividade, surge como uma boa consideração no argumento heurístico em [12]. Se aplicarmos o princípio da incerteza de Heisenberg na gravitação clássica, teríamos medidas das coordenadas de posição bem pequenas e uma incerteza no momento, perturbando o campo gravitacional na região.

Vamos fazer a seguinte análise do fato citado acima; Segundo a equação de Einstein (4.4), uma indeterminação no momento seria transmitida ao sistema uma energia por meio do tensor energia-momento.

$$R_{\mu\nu} - Rg_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (4.4)$$

Que implicará em uma alteração no campo gravitacional. Existe uma proporcionalidade entre os campos gravitacionais e os espaços dos momentos, ficando a seguinte relação enquanto maior a precisão da medida nas coordenadas maior será a perturbação no campo gravitacional no local da medida, ou seja, o processo de medida altera o campo gravitacional local. Se forem feitas medidas de ordem da escala de Planck, o campo gravitacional poderá impedir que qualquer sinal saia da região. Este argumento traz consigo a ideia de

que na gravitação quântica a geometria do espaço deve ser alterada próxima a escala de Planck, assim se encaminhará para uma descrição não local.

Um dado interessante que a teoria quântica de campos, com não-comutatividade na coordenadas no espaço-tempo surgiu no final da década de 1940 [13, 14]. A ideia era utilizar a não-comutatividade em altos momentos afim de controlar a divergência ultravioleta.

Atualmente verificou-se que a dinâmica de uma corda aberta presente ao um campo antissimétrico, pode ser descrita em termo de teorias de calibres não-comutativas [21].

Nas próximas seções abordarei temas voltados para aplicação futuras.

4.2 Quatização de Weyl

A formulação não-comutatividade espaço-temporal é fortemente inspirada nas ideias da mecânica quântica usual. Uma destas ideias é associar uma coordenada x^i , do espaço comutativo a um operador \hat{x}^i definido em um espaço não-comutativo, estes operadores obedecem as relação (5.3). Supondo que os campos da teoria analisada sejam descritos através de funções temos uma associação entre as funções de campos clássicos comutativo $\Phi(x)$, que obedecem a regra de multiplicação não-comutativa e os operadores $\hat{\Phi}(\hat{x})$, este procedimento é conhecido como correspondência Weyl-Moyal $\Phi(x) \longrightarrow \hat{\Phi}(x)$. Pode se representar os operadores $\hat{\Phi}(\hat{x})$, como sendo uma serie de Fourier

$$\hat{\Phi}(\hat{x}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int T(k)\phi(k)d^4k. \quad (4.5)$$

Na equação acima foi definido $T(k) \equiv e^{ik_\mu \hat{x}^\mu}$, e k_μ , é o números e o termo ϕ representa a transformada de Fourier dos campos clássicos.

$$\phi(x) = \int e^{ik_\mu x^\mu} \Phi(x)d^4x. \quad (4.6)$$

Escrevendo explicitamente a forma de (5.5), teremos:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(\hat{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \int e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} e^{ik_\mu x^\mu} \Phi(x)d^4x d^4k \\ \hat{\Phi}(\hat{x}) &= \int \hat{\Delta}(x)\Phi(x)d^4x. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Foi usada a definição:

$$\hat{\Delta}(x) \equiv \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} e^{ik_\mu x^\mu} d^4k. \quad (4.8)$$

O termo $\hat{\Delta}$ faz o mapeamento $\hat{\Phi}(\hat{x}) \longrightarrow \Phi(x)$, e se fizermos $\Theta = 0$ a equação acima se torna simplesmente a função delta de Dirac $\delta(\hat{x} - x)$. Podemos introduzir uma outra operação, o traço Tr , fazendo isto na equação (5.7), teremos

$$Tr\hat{\Phi}(\hat{x}) = \int Tr\hat{\Delta}(x)\Phi(x)d^4x. \quad (4.9)$$

Vamos escolher a normalização $Tr\hat{\Delta}(x) = 1$, desta forma teremos a seguinte expressão;

$$Tr\hat{\Phi}(\hat{x}) = \int \Phi(x)d^4x. \quad (4.10)$$

Com este resultado temos que, o traço dos campos não-comutativos é uma integração dos campos no espaço comutativo.

4.3 Produto estrela

Na seção anterior foi discutido como ocorre o mapeamento dos campos definidos em espaços comutativos para uma descrição não-comutativa.

Nesta seção vamos investigar como ocorre o produto de dois campos no espaço não-comutativo. Este procedimento é conhecido como produto *Gronewald-Moyal*, também conhecido como produto estrela.

Utilizando a equação (5.5), o produto de dois campos em um espaço não-comutativo segue

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_1(\hat{x})\hat{\Phi}_2(\hat{x}) &= \int \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} T(k)T(q)\phi_1(k)\phi_2(q) \\ &= \int \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} T(k+q)e^{-\frac{i}{2}k_\mu\Theta^{\mu\nu}q_\nu}\phi_1(k)\phi_2(q) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Na equação acima foi utilizada a seguinte relação, que facilmente pode ser demonstrada

utilizando a formula de Baker-Campbell-Hausdorf: $e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]}$,

$$T(k)T(q) = T(k+q)e^{-\frac{i}{2}k_\mu\Theta^{\mu\nu}q_\nu}. \quad (4.12)$$

Vamos multiplicar pela a direita $T^\dagger(p)$, na equação (5.11),

$$\hat{\Phi}_1(\hat{x})\hat{\Phi}_2(\hat{x})T^\dagger(p) = \int \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} T(k+q)T^\dagger(p)e^{-\frac{i}{2}k_\mu\Theta^{\mu\nu}q_\nu} \phi_1(k)\phi_2(q). \quad (4.13)$$

Podemos relacionar $T^\dagger(p)$ com $T(p)$, da seguinte forma: $T^\dagger(p) = T(-p)$, uma vez que $(\hat{x}^\dagger = \hat{x})$.

$$\hat{\Phi}_1(\hat{x})\hat{\Phi}_2(\hat{x})T^\dagger(p) = \int \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} T(k+q-p)e^{\frac{i}{2}(k+q)_\mu\Theta^{\mu\nu}p_\nu} e^{-\frac{i}{2}k_\mu\Theta^{\mu\nu}q_\nu} \phi_1(k)\phi_2(q). \quad (4.14)$$

Vamos tomar o traço da equação acima, mas primeiro vamos analisar,

$$TrT(k) = \int d^4x \langle x|e^{k_\mu\hat{x}^\mu}|x\rangle = \int d^4x e^{k_\mu x^\mu} = (2\pi)^4 \delta^4(k). \quad (4.15)$$

Tomando o traço em (5.14) e utilizando a equação (2.15), teremos,

$$\begin{aligned} Tr \left[\hat{\Phi}_1(\hat{x})\hat{\Phi}_2(\hat{x})T^\dagger(p) \right] &= \int \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k+q-p) e^{\frac{i}{2}(k+q)_\mu\Theta^{\mu\nu}p_\nu} e^{-\frac{i}{2}k_\mu\Theta^{\mu\nu}q_\nu} \phi_1(k)\phi_2(q) \\ &= \int \int \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} d^4y e^{i(k+q-p)_\mu y^\mu} e^{-\frac{i}{2}k_\mu\Theta^{\mu\nu}q_\nu} \phi_1(k)\phi_2(q) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Podemos inverter a equação acima

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu x^\mu} \text{Tr} \left[\hat{\Phi}_1(\hat{x}) \hat{\Phi}_2(\hat{x}) T^\dagger(p) \right] & (4.17) \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} d^4 y \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu x^\mu} \phi_1(k) e^{ik_\mu y^\mu} e^{-ip_\mu y^\mu} e^{-\frac{i}{2} k_\mu \Theta^{\mu\nu} q_\nu} \phi_2(q) e^{iq_\mu y^\mu} \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} d^4 y \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu (x^\mu - y^\mu)} \phi_1(k) e^{ik_\mu y^\mu} e^{-\frac{i}{2} k_\mu \Theta^{\mu\nu} q_\nu} \phi_2(q) e^{iq_\mu y^\mu} \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} d^4 y \delta^4(x - y) \phi_1(k) e^{ik_\mu y^\mu} e^{-\frac{i}{2} k_\mu \Theta^{\mu\nu} q_\nu} \phi_2(q) e^{iq_\mu y^\mu} \\
&= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \phi_1(k) e^{ik_\mu x^\mu} e^{-\frac{i}{2} k_\mu \Theta^{\mu\nu} q_\nu} \phi_2(q) e^{iq_\mu y^\mu} \\
&= \Phi_1(k) e^{-\frac{i}{2} k_\mu \Theta^{\mu\nu} q_\nu} \Phi_2(q). & (4.18)
\end{aligned}$$

Expandindo a exponencial $e^{-\frac{i}{2} k_\mu \Theta^{\mu\nu} q_\nu}$, encontraremos $1 + \frac{-i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \Theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu + \dots$.

Desta forma já podemos definir o produto Moyal ou produto estrela(\star);

$$\begin{aligned}
\Phi_1(x) \star \Phi_2(x) &\equiv \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu x^\mu} \text{Tr} \left[\hat{\Phi}_1(\hat{x}) \hat{\Phi}_2(\hat{x}) T^\dagger(p) \right] \\
&= \Phi_1(x) e^{-\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \Theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu} \Phi_2(x) = \\
\Phi_1(x) \Phi_2(x) + \Sigma \left(\frac{1}{2} \right)^n \frac{1}{n!} & [\partial_{\mu_1} + \dots + \partial_{\mu_n} \Phi_1(x)] \Theta^{\mu_1 \nu_1} \dots \Theta^{\mu_n \nu_n} [\partial_{\nu_1} + \dots + \partial_{\nu_n} \Phi_2(x)] & (4.19)
\end{aligned}$$

A equação acima é não-comutativa e se torna um produto ordinário quando se tem funções onde o $\Theta = 0$. Usando $T^\dagger(0) = 1$, e integrando ambos os lados em x , encontraremos;

$$\begin{aligned}
\int d^4 x \Phi_1(x) \star \Phi_2(x) &= \int d^4 x \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu x^\mu} \text{Tr} \left[\hat{\Phi}_1(\hat{x}) \hat{\Phi}_2(\hat{x}) T^\dagger(p) \right] \\
&= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(p) \text{Tr} \left[\hat{\Phi}_1(\hat{x}) \hat{\Phi}_2(\hat{x}) T^\dagger(p) \right] \\
&= \text{Tr} \left[\hat{\Phi}_1(\hat{x}) \hat{\Phi}_2(\hat{x}) T^\dagger(0) \right] \\
&= \text{Tr} \left[\hat{\Phi}_1(\hat{x}) \hat{\Phi}_2(\hat{x}) \right]. & (4.20)
\end{aligned}$$

Desta forma podemos reescrever este produto para varias funções;

$$\int d^4 x \Phi_1(x) \star \dots \star \Phi_n(x) = \text{Tr} \left[\hat{\Phi}_1(\hat{x}) \dots \hat{\Phi}_n(\hat{x}) \right]. \quad (4.21)$$

A integral acima é invariante por permutações cíclicas, tal afirmativa pode ser garantida por conta da propriedade de ciclicidade do traço.

Um dos resultados de maior relevância que podemos frisar aqui é uma propriedade que conseguimos ao utilizar as equações (5.11) e (5.20) em um produto estrela entre dois campos;

$$\begin{aligned}
\int d^4x \Phi_1(x) \star \Phi_2(x) &= \text{Tr} \left[\hat{\Phi}_1(\hat{x}) \hat{\Phi}_2(\hat{x}) \right] \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \text{Tr} [T(k+q)] e^{-\frac{i}{2}k_\mu \Theta^{\mu\nu} q_\nu} \phi_1(k) \phi_2(q) \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(k+q) e^{-\frac{i}{2}k_\mu \Theta^{\mu\nu} q_\nu} \phi_1(k) \phi_2(q) \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \phi_1(k) \phi_2(-k) \\
&= \int d^4x \Phi_1(x) \Phi_2(x). \tag{4.22}
\end{aligned}$$

O resultado acima implica que, em qualquer parte de uma ação quadrática não-comutativa, se resume ao caso ordinário. A álgebra de dois operadores não-comutativos é equivalente a álgebra de funções deformadas pelo o produto Moyal.

4.4 Regras de Feynman e quantização para teorias de campos não-comutativas

O que nós estudamos até agora em teorias não-comutativas é que basta substituir o produto casual pelo o produto estrela(\star). Quando há teoria de calibre envolvida é necessário modificar a estrutura do grupo de simetria, caso este que não discutiremos neste trabalho. Analisando o caso do campo real $\lambda\phi^4$, podemos escrever a sua ação não-comutativa da seguinte forma:

$$S[\Phi] = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \star \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi \star \Phi - \frac{\lambda}{4!} \Phi \star \Phi \star \Phi \star \Phi \right]. \tag{4.23}$$

Fundamentado na equação (4.22), podemos afirmar que para uma teoria livre não existirá nenhuma alteração no propagador de Feynman, a única mudança será no termo de interação, de acordo com (4.5) e (4.21), escrevemos o produto estrela do termo de

interação no espaço dos momentos:

$$\begin{aligned}
S_{int} &= -\frac{\lambda}{4!} \Phi \star \Phi \star \Phi \star \Phi \\
&= -\frac{\lambda}{4!} \int \left[\prod \frac{d^4 x_i}{(2\pi)} \right] Tr[T(k_1)T(k_2)T(k_3)T(k_4)] \\
&\quad \times \phi(x_1)\phi(k_2)\phi(k_3)\phi(k_4).
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Utilizando as propriedades já mencionadas do traço podemos reescrever o traço da equação acima, como:

$$\begin{aligned}
Tr[T(k_1)T(k_2)T(k_3)T(k_4)] &= Tr[T(k_1 + k_2)T(k_3 + k_4)]e^{-i(k_1 \wedge k_2 + k_3 \wedge k_4)} \\
&= Tr[T(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)]e^{-i[k_1 \wedge k_2 + k_3 \wedge k_4 + (k_1 + k_2) \wedge (k_3 + k_4)]} \\
&= (2\pi)^4 \delta^4(\sum k_i) e^{-i[k_1 \wedge k_2 + k_3 \wedge k_4 + (k_1 + k_2) \wedge (k_3 + k_4)]}.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Note que foi utilizada uma definição da forma bilinear antissimétrica $k_i \wedge k_j$, na equação acima, podemos escrever a seguinte relação para este termo;

$$k_i \wedge k_j = k_{i\mu} k_{j\nu} \Theta^{\mu\nu} = -k_j \wedge k_i. \tag{4.26}$$

Podemos escrever um resultado para um produto estrela de 4 campos de acordo com os resultados acima,

$$\begin{aligned}
&\int d^4 x \Phi_1(x) \star \Phi_2(x) \star \Phi_3(x) \star \Phi_4(x) = \\
&\int \left[\prod_{i=1}^4 \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4} \right] (2\pi)^4 \delta^4\left(\sum_{i=1}^4 k_i\right) V(k_1, \dots, k_4) \phi_1(k_1), \dots, \phi_1(k_1).
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Onde,

$$V(k_1, k_2, k_3, k_4) = \exp\left(-\frac{i}{2} \sum_{i < j=1}^4 k_i \wedge k_j\right). \tag{4.28}$$

Podemos então concluir que a principal alteração da não-comutatividade em teorias de campos, é modificar o termo de interação, acrescentando um fator de fase dependente dos

momentos. Em decorrência a estes fatores oscilatórios, é de se esperar um comportamento mais aceitável nas regiões de ultravioleta da teoria. Podemos nos aprofundar e ver que, os diagramas de Feynman podem ser separados em dois termos: planar e não planar. A parte planar é semelhante ao caso comutativo, já a parte não planar fica multiplicada pelo o fator de fase. Não é de fato interesse deste trabalho tal discursarão para uma visão mais detalhada deste assunto pode ser encontrada em [20].

4.5 Acoplamento com a matéria

Nesta seção faremos a primeira aplicação do método descrito nas seções anteriores, mas ainda no espaço comutativo. A lagrangiana que será usada para descrevê-la a interação com a matéria é da teoria de Klein-Gordon;

$$\mathcal{L}_{KG} = \sqrt{g}(\partial_\mu \phi g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2). \quad (4.29)$$

Agora aplicando as equações (1.8), (1.9) e (1.10) na equação acima, deve-se encontrar,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{KG} &= (1 + \frac{1}{2} \kappa h_\alpha^\alpha) (\partial_\mu \phi (\eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu}) \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2) \\ &= (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2 - \kappa h^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) \\ &\quad + \frac{1}{2} \kappa h_\alpha^\alpha (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2 - \kappa h^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) \end{aligned} \quad (4.30)$$

O resultado esperado é de primeira ordem em $h_{\mu\nu}$, desta forma a equação acima se conduz a:

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} \kappa h_\alpha^\alpha (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) - \kappa h^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi. \quad (4.31)$$

A partir da equação (4.31), podemos encontrar a expressão para o vértice da teoria. Este tipo de interação descrito pela a equação acima é de um gráviton com dois campos escalares, o vértice desta interação pode ser facilmente calculado e terá como resultado:

$$V(p, p') = -\frac{ik}{2} [p^\nu \cdot p'^\mu + p^\mu \cdot p'^\nu - \eta^{\mu\nu} \{(p \cdot p') - m^2\}]. \quad (4.32)$$

Este vértice tem a sua representação gráfica na seguinte maneira:

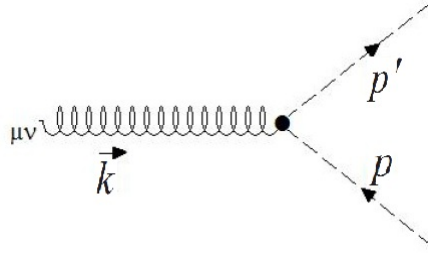


Figura 1: Forma diagramática do vértice interação de 1 gráviton com 2 campos escalares.

4.5.1 Cálculo do vértice.

A equação que descreve a interação do campo do gráviton com a matéria é (4.31), que pode ser reescrita como:

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}\kappa h_{\alpha}^{\alpha}(|\partial_{\mu}\phi|^2 - m^2\phi^2) - \frac{1}{2}\kappa h^{\mu\nu}(\partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi^* + \partial_{\mu}\phi^*\partial_{\nu}\phi). \quad (4.33)$$

O segundo termo da equação (4.33), foi obtido pela soma das partes simétrica da equação (4.31).

A expressão dos vértices nos espaços dos momentos pode ser encontrada utilizando a equação (4.28), ou uma forma mais explicita dada por [22].

$$\begin{aligned} \Theta_{\mu_1\nu_1 \cdots \mu_m\nu_m} &= i \int d^4x_1 \cdots d^4x_m d^4y_1 \cdots d^4y_n e^{i[p_1x_1 + \cdots + p_mx_m + q_1y_1 + \cdots + q_ny_n]} \\ &\times \frac{\delta}{\delta\phi_1(x_1)} \times \cdots \times \frac{\delta}{\delta\phi_m(x_m)} \times \frac{\delta}{\delta H_1^{\mu_1\nu_1}(y_1)} \times \cdots \times \frac{\delta}{\delta H_n^{\mu_n\nu_n}(y_n)} \\ &\times \frac{\delta}{\delta A_1^{\mu_1\nu_1}(y_1)} \times \cdots \times \frac{\delta}{\delta A_n^{\mu_n\nu_n}(y_n)} \\ &\times L_{int}(\phi_1, \cdots, \phi_m, H_1, \cdots, H_n, A_1, \cdots, A_n)(x), \end{aligned} \quad (4.34)$$

onde, \mathcal{L}_{int} representa a lagrangiana de interação, ϕ_1, \cdots, ϕ_m , representam os campos escalares, $H_1^{\mu_1\nu_1}(y_1), \cdots, H_n^{\mu_n\nu_n}(y_n)$, representam os campos gravitacionais, $A_1^{\mu_1\nu_1}(y_1), \cdots, A_n^{\mu_n\nu_n}(y_n)$, representam os campos de gauge e as grandezas p_1, \cdots, p_n e q_1, \cdots, q_n , representam os momentos externos dos campos escalares e dos campos de gauge e gravitacional, respectivamente.

Substituindo a equação (4.33), na equação (4.34), teremos que o vértice poderá ser escrito como:

$$\begin{aligned} \Theta^{\mu\nu}(p, p') &= i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 e^{i[p x_1 - p' x_2 + q x_3]} \frac{\delta}{\delta\phi(x_1)} \frac{\delta}{\delta\phi(x_2)} \frac{\delta}{\delta H_{\mu\nu}(x_3)} \\ &\times \left\{ \frac{1}{2} \kappa h_\alpha^\alpha (|\partial_\mu \phi|^2 - m^2 \phi^2) - \frac{1}{2} \kappa h^{\mu\nu} (\partial^\mu \phi \partial^\nu \phi^* + \partial^\mu \phi^* \partial^\nu \phi) \right\}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Agora, aplicando os deltas na equação (4.35) tem-se:

$$\begin{aligned} \Theta^{\mu\nu}(p, p') &= i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 e^{i[p x_1 - p' x_2 + q x_3]} \frac{\delta}{\delta\phi(x_1)} \frac{\delta}{\delta\phi(x_2)} \\ &\times \left\{ \frac{1}{2} \kappa \eta^{\mu\nu} \delta(x - x_3) (|\partial_\mu \phi|^2 - m^2 \phi^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \kappa \delta(x - x_3) (\partial^\mu \phi \partial^\nu \phi^* + \partial^\mu \phi^* \partial^\nu \phi) \right\} \\ &= i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 e^{i[p x_1 - p' x_2 + q x_3]} \frac{\delta}{\delta\phi(x_1)} \\ &\times \left\{ \frac{1}{2} \kappa \eta^{\mu\nu} \delta(x - x_3) (\partial_\mu \phi \partial^\mu \delta(x - x_2) - m^2 \phi \delta(x - x_2)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \kappa \delta(x - x_3) (\partial^\mu \phi \partial^\nu \delta(x - x_2) + \partial^\mu \delta(x - x_2) \partial^\nu \phi) \right\} \\ &= i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 e^{i[p x_1 - p' x_2 + q x_3]} \\ &\times \left\{ \frac{1}{2} \kappa \eta^{\mu\nu} \delta(x - x_3) (\partial_\mu \delta(x - x_1) \partial^\mu \delta(x - x_2) \right. \\ &\quad - m^2 \delta(x - x_1) \delta(x - x_2)) \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \kappa \delta(x - x_3) (\partial^\mu \delta(x - x_1) \partial^\nu \delta(x - x_2) \right. \\ &\quad \left. + \partial^\mu \delta(x - x_2) \partial^\nu \delta(x - x_1)) \right\}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Usando os seguintes resultados das definições da função $\delta(x)$, no espaço dos momentos:

$$\delta(x - x_1) = \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} e^{i p_1 (x - x_1)}, \quad (4.37)$$

$$\delta(x - x_2) = \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} e^{i p_2 (x - x_2)}, \quad (4.38)$$

$$\int d^4 x_3 e^{i q x_3} \delta(x - x_3) = e^{i q x}, \quad (4.39)$$

na equação (4.36);

$$\begin{aligned}
\Theta^{\mu\nu}(p, p') &= -\frac{i\kappa}{2} \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 e^{i[p x_1 - p' x_2 + q x]} \\
&\times \left\{ -\eta^{\mu\nu} (\partial_\mu \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x-x_1)} \partial^\mu \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2(x-x_2)} \right. \\
&- m^2 \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x-x_1)} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2(x-x_2)} \\
&+ (\partial^\mu \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x-x_1)} \partial^\nu \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2(x-x_2)} \\
&\left. + \partial^\mu \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2(x-x_2)} \partial^\nu \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{ip_1(x-x_1)} \right\}. \tag{4.40}
\end{aligned}$$

Agrupando os termos e aplicando as derivadas na equação (4.40), teremos:

$$\begin{aligned}
\Theta^{\mu\nu}(p, p') &= -\frac{i\kappa}{2} \int d^4x e^{i[p x_1 - p' x_2 + q x]} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int d^4x_1 e^{ip_1(x-x_1)} \int d^4x_2 e^{ip_2(x-x_2)} \\
&\times \left\{ -\eta^{\mu\nu} ((ip_{1,\alpha})(ip_2^\alpha) - m^2) + ((ip_1^\mu)(ip_2^\nu) + (ip_1^\nu)(ip_2^\mu)) \right\} \\
&= -\frac{i\kappa}{2} \int d^4x e^{i[p x_1 - p' x_2 + q x]} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int d^4x_1 e^{ip_1(x-x_1)} \int d^4x_2 e^{ip_2(x-x_2)} \\
&\times \left\{ -\eta^{\mu\nu} (-p_{1,\alpha} p_2^\alpha - m^2) - (p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu) \right\} \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Para resolver as integrais em x_1 , x_2 e nos momentos será utilizando os seguintes resultados:

$$\int d^4x_1 e^{i(p-p_1)x_1} = (2\pi)^4 \delta(p_1 - p) \tag{4.42}$$

$$\int d^4x_2 e^{-i(p'+p_2)x_2} = (2\pi)^4 \delta(p' + p_2) \tag{4.43}$$

$$\int d^4p_1 \delta(p_1 - p) (ip_{1\gamma}) = ip_\gamma \tag{4.44}$$

$$\int d^4p_2 \delta(p' + p_2) (ip_{2\gamma}) = -ip'_\gamma, \tag{4.45}$$

aplicando em (4.41),

$$\begin{aligned}
\Theta^{\mu\nu}(p, p') &= -\frac{i\kappa}{2} \int d^4x e^{i[p x_1 - p' x_2 + q x]} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int d^4x_1 d^4x_2 e^{ip_1(x-x_1)+ip_2(x-x_2)} \\
&\quad \times \left\{ -\eta^{\mu\nu} (-p_{1,\alpha} p_2^\alpha - m^2) - (p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu) \right\} \\
&= -\frac{i\kappa}{2} \int d^4x e^{i[p x_1 - p' x_2 + q x]} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int d^4x_1 d^4x_2 e^{ip_1 x - ip_1 x_1 + ip_2 x - ip_2 x_2} \\
&\quad \times \left\{ -\eta^{\mu\nu} (-p_{1,\alpha} p_2^\alpha - m^2) - (p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu) \right\} \\
&= -\frac{i\kappa}{2} \int d^4x e^{i(p_1 + p_2 + q)x} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int d^4x_1 e^{+i(p-p_1)x_1} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \int d^4x_2 e^{-i(p'+p_2)x_2} \\
&\quad \times \left\{ -\eta^{\mu\nu} (-p_{1,\alpha} p_2^\alpha - m^2) - (p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu) \right\} \\
&= -\frac{i\kappa}{2} \int d^4x e^{i(p_1 + p_2 + q)x} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(p_1 - p) \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(p' + p_2) \\
&\quad \times \left\{ -\eta^{\mu\nu} (-p_{1,\alpha} p_2^\alpha - m^2) - (p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu) \right\} \\
&= -\frac{i\kappa}{2} \int d^4x e^{i(p-p'+q)x} \left\{ -\eta^{\mu\nu} (p_\alpha p'^\alpha - m^2) + (p^\mu p'^\nu + p^\nu p'^\mu) \right\}. \tag{4.46}
\end{aligned}$$

A integral que resta é um delta da seguinte forma:

$$\int d^4x e^{i(p-p'+q)x} = (2\pi)^4 \delta(p - p' + q). \tag{4.47}$$

Fazendo a substituição de (4.47) em (4.46), obtêm-se o resultado:

$$\Theta^{\mu\nu}(p, p') = -\frac{i\kappa}{2} (2\pi)^4 \delta(p - p' + q) \left\{ -\eta^{\mu\nu} (p_\alpha p'^\alpha - m^2) + (p^\mu p'^\nu + p^\nu p'^\mu) \right\}. \tag{4.48}$$

A função delta na equação (4.48), mostra a conservação do momento no vértice, representado na figura 1. Como mostrado anteriormente o resultado do vértice da teoria tem-se:

$$V(k, k') = -\frac{i\kappa}{2} \left\{ -\eta^{\mu\nu} (p_\alpha p'^\alpha - m^2) + (p^\mu p'^\nu + p^\nu p'^\mu) \right\}.$$

4.5.2 Vértice na teoria não-comutativa

Na seção anterior a equação (4.33), mostra a lagrangiana da teoria de Klein-Gordon em espaços comutativos, nesta seção será feito a análise da mesma equação, com a diferença da introdução do produto estrela já mencionado neste trabalho.

A equação (4.33) na teoria da não-comutatividade pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}\kappa h_\alpha^\alpha \star (\partial_\mu \phi \star \partial^\mu \phi - m^2 \phi \star \phi) - \frac{1}{2}\kappa h^{\mu\nu} \star (\partial_\mu \phi \star \partial_\nu \phi^* + \partial_\mu \phi^* \star \partial_\nu \phi). \quad (4.49)$$

Na equação (4.28), mostra como calcular o fator exponencial para acrescentar no termo de vértice, tem-se três campos, logo teremos três momentos (k_1, k_2, k_3) , recordando a expressão e realizando as devidas substituições:

$$\begin{aligned} V(k_1, k_2, k_3) &= \exp\left(-\frac{i}{2} \sum_{i<j=1}^3 k_i \wedge k_j\right) \\ &= \exp\left(-\frac{i}{2}[k_1 \wedge k_2 + (k_1 + k_2) \wedge k_3]\right), \end{aligned} \quad (4.50)$$

na equação (4.27), poderá ser observado que o fator exponencial está sujeito a atuação do delta de Dirac, desta forma a expressão (4.50), nos leva a seguinte conclusão:

$$\begin{aligned} V(k_1, k_2, k_3) &= \delta(k_1 - k_2 + k_3) \exp\left(-\frac{i}{2}[k_1 \wedge k_2 + (k_1 + k_2) \wedge k_3]\right) \\ &= \exp\left(-\frac{i}{2}[k_1 \wedge k_2 + k_1 \wedge k_3 + k_2 \wedge k_3]\right) \\ &= \exp\left(-\frac{i}{2}[k_1 \wedge k_2 - k_1 \wedge k_2 + k_2 \wedge k_1]\right) \\ &= \exp\left(\frac{i}{2}[k_1 \wedge k_2]\right). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Para encontrar a forma completa do vértice do diagrama não-comutativo, deve-se juntar as equações (4.51), com a (4.32), desta forma será encontrado o seguinte resultado:

$$\tau(k, k') = -\frac{i\kappa}{2} \left\{ -\eta^{\mu\nu} (p_\alpha p'^\alpha - m^2) + (p^\mu p'^\nu + p^\nu p'^\mu) \right\} e^{\frac{i}{2}(k \wedge k')}. \quad (4.52)$$

onde se assumir $\theta_{i,j} = 0$, modifica somente no termo de $k_i \wedge k_j = k_i k_j \theta_{i,j}$, pois a equação (4.50) deverá retornar ao valor da equação (4.32) quanto o fator de fase não existir [18].

4.5.3 Potencial não-relativístico.

Uma teoria relativista da gravitação deveria concordar com a teoria de Newton, no limite de movimento em baixa velocidade em um campo gravitacional fraco. Assim, vale a pena investigar se uma teoria linearizada da gravidade quadrática leva à lei não-relativística Newtoniana para interações gravitacionais. Para isso vamos calcular o potencial efetivo não-relativístico para a interação de dois bósons massivos idênticas de spin nulo através de uma troca gráviton. Um caminho alternativo é usar a própria amplitude de espalhamento para definir o potencial. Esta descrição do potencial parece ser a forma mais simples e intuitiva, ela foi utilizada por vários autores [14, 22, 23, 24, 25, 26]. Em seguida será utilizada a amplitude de espalhamento completo, a fim de representar o potencial transformado de Fourier. A definição é dada por:

$$\begin{aligned} \langle p' | iT | p \rangle &= -i\tilde{V}(\vec{q})(2\pi)\delta(E - E') \\ &\equiv i\mathcal{M}_{NR}(2\pi)\delta(k - k'). \end{aligned} \quad (4.53)$$

Da equação acima, pode-se escrever o potencial não-relativístico no espaço das coordenadas de modo[3];

$$V(\vec{x}) = -\frac{1}{4m_1m_2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \tilde{V}(\vec{k}). \quad (4.54)$$

Na equação acima o termo $\tilde{V}(\vec{g}) \equiv \mathcal{M}(\vec{g})$, onde $\mathcal{M}(\vec{g})$, é a matriz de espalhamento e teve ser calculado separadamente. Para tornar mais fácil o cálculo, este termo pode ser encontrado através da equação,

$$\mathcal{M}_{\vec{g}} = \tau_{\vec{g}}^{\mu\nu} \mathcal{O}_{\mu\nu,\alpha\beta}^{-1} \tau_{\vec{g}}^{\alpha\beta}, \quad (4.55)$$

o termo $\tau^{\mu\nu}$ é o vértice do diagrama da teoria e $\mathcal{Q}_{\mu\nu,\alpha\beta}$, é o propagador do gráviton, o cálculo deste termo pode ser visto no capítulo(2). Utilizando a lagrangiana de Einstein-Hilbert,

$$\mathcal{L}_{EH} = \frac{2}{\kappa} \sqrt{g} R, \quad (4.56)$$

a forma simetrizada e expandida como (1.6) e (1.7), adicionado com o fixador de gauge de *Feynman*, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda = \frac{1}{2}$ (ver equação(1.31)), será encontrado o seguinte

resultado a partir da equação(2.7):

$$\mathcal{O}_{\mu\nu,\alpha\beta}^{-1} = -\frac{i}{2k^2} (\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}). \quad (4.57)$$

O gráfico que representa a equação (4.55), um espalhamento de dois bosóns escalares e um gráviton, pode ser visto na figura 2,

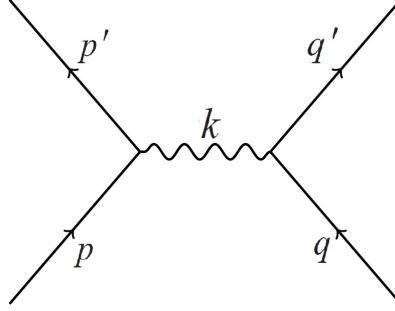


Figura 2: Forma diagramática do espalhamento 1 gráviton com 2 campos escalares.

Substituindo a equação (4.52) e (4.57) na equação (4.55), encontraremos:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \tau^{\mu\nu} \mathcal{O}_{\mu\nu,\alpha\beta}^{-1} \tau^{\alpha\beta} \\ &= \frac{i\kappa^2}{8q^2} \{ -\eta^{\mu\nu} (p_\mu p'^\mu - m^2) + (p^\mu p'^\nu + p^\nu p'^\mu) \} \\ &\quad \times (\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}) \\ &\quad \times \{ -\eta^{\alpha\beta} (q_\alpha q'^\alpha - m^2) + (q^\alpha q'^\beta + q^\beta q'^\alpha) \} e^{\frac{i}{2}(p \wedge p')} e^{\frac{i}{2}(q \wedge q')} \\ &= \frac{i\kappa^2}{8q^2} \{ 4[(p \cdot q)(p' \cdot q') + (p \cdot q')(p' \cdot q) - (p \cdot p')(q \cdot q' \\ &\quad - m_2^2) - (q \cdot q')(p \cdot p' - m_1^2) + 2(p \cdot p' - m_1^2)(q \cdot q' - m_2^2)] \\ &\quad - (2p \cdot p' - 4(p \cdot p' - m_1^2))(2q \cdot q' - 4(q \cdot q' - m_2^2)) \} e^{\frac{i}{2}(p \wedge p')} e^{\frac{i}{2}(q \wedge q')}. \quad (4.58) \end{aligned}$$

No limite não-relativístico, também conhecido como limite estático, tem-se: $m \gg |\vec{p}|$ e $p_i p_i \cong m_i^2$ ou $p_i p_j \cong m_i m_j$, desta forma $(p \cdot p') = m_1^2$, $(q \cdot q') = m_2^2$ e $(p \cdot q) = (p' \cdot q) = (p' \cdot q') = m_1 m_2$ a equação (4.58) se transforma em,

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}_{NR} &= \frac{i\kappa^2}{8k^2} \{4[(m_1 \cdot m_2)(m_1 \cdot m_2) + (m_1 \cdot m_2)(m_1 \cdot m_2) - (m_1 \cdot m_1)(m_2 \cdot m_2)] \\
&\quad - 2[(m_1 \cdot m_1)(m_2 \cdot m_2 - m_2^2) + (m_1 \cdot m_1 - m_1^2)(m_2 \cdot k'_2)] \\
&\quad + (m_1 \cdot m_1 - m_1^2)(m_2 \cdot m_2 - m_2^2)\} e^{\frac{i}{2}(k_1 \wedge k'_1)} e^{\frac{i}{2}(k_2 \wedge k'_2)} \\
&= \frac{i\kappa^2}{8k^2} \{4m_1^2 m_2^2\} e^{\frac{i}{2}(p \wedge p')} e^{\frac{i}{2}(q \wedge q')}. \tag{4.59}
\end{aligned}$$

Lembrando-se do valor de $\kappa^2 \equiv 32\pi G$, teremos como resultado a matriz de espalhamento não-comutativo tomado no limite não-relativístico:

$$i\mathcal{M}_{NR} = \frac{16\pi G m_1^2 m_2^2}{k^2} e^{\frac{i}{2}(p \wedge p' + q \wedge q')}, \tag{4.60}$$

e comparando com a amplitude de espalhamento na aproximação de Born equação (4.53) e (4.54) tem-se como resultado:

$$\begin{aligned}
V(\vec{x}) &= -\frac{1}{4m_1 m_2} \int \frac{d^D}{(2\pi)^D} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} i\mathcal{M}(\vec{q}) \\
&= -\frac{1}{4m_1 m_2} 16\pi G m_1^2 m_2^2 \int \frac{d^3}{(2\pi)^3 q^2} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} e^{\frac{i}{2}(k_1 \wedge k'_1 + k_2 \wedge k'_2)} \\
&= -4\pi G m_1 m_2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 k^2} e^{i\vec{x} \cdot \vec{k}} e^{\frac{i}{2}(p \wedge p' + q \wedge q')}. \tag{4.61}
\end{aligned}$$

A teoria não-comutativa, colabora com o termo de fase adicional, $e^{\frac{i}{2}(p \wedge p' + q \wedge q')}$, se este termo for igual a um, caso clássico, teríamos como resultado o valor do potencial newtoniano usual,

$$V(\vec{x}) = -\frac{G m_1 m_2}{r}. \tag{4.62}$$

Antes de resolver a integral da equação (4.61), tem-se que reescrever o fator de fase vindo da não-comutatividade. Olhando para a equação (4.52), e o gráfico do espalhamento que estamos trabalhando (figura 2), podemos afirmar que $k = (q - q') = -(p - p')$. Desta forma, da equação (4.27), podemos observar que o fator de fase não-comutativo esta sob ação de um delta de conservação $\delta(p + q - p' - q')$, tomadas todas as considerações, o fator pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
\exp \left[\frac{i}{2} (p \wedge p' + q \wedge q') \right] &= \exp \left[\frac{i}{2} (p \wedge p' + q \wedge (p + q - p')) \right] \\
&= \exp \left[\frac{i}{2} (p \wedge p' + q \wedge p - q \wedge p') \right] \\
&= \exp \left[\frac{i}{2} (p \wedge p' + q \wedge (p - p')) \right] \\
&= \exp \left[\frac{i}{2} (p \wedge p' + q \wedge -k) \right] \\
&= \exp \left[\frac{i}{2} (p \wedge (p + q - q') - q \wedge k) \right] \\
&= \exp \left[\frac{i}{2} (p \wedge q - p \wedge q' - q \wedge k) \right] \\
&= \exp \left[\frac{i}{2} (p \wedge (q - q') - q \wedge k) \right] \\
&= \exp \left[\frac{i}{2} (p \wedge k - q \wedge k) \right] \\
&= \exp \left[\frac{i}{2} (p - q) \wedge k \right] \\
&= \exp \left[\frac{i}{2} \rho \wedge k \right], \tag{4.63}
\end{aligned}$$

onde foi definido $\rho \equiv p' - q'$, como sendo o momento relativo de saída.

Aplicando a definição (4.26), o produto contido na equação (4.63), resultará:

$$\exp \left[\frac{i}{2} \rho \wedge k \right] = \exp \left[\frac{i}{2} \rho_\mu k_\nu \theta^{\mu\nu} \right]. \tag{4.64}$$

Para evitar problemas relacionados a violação da unitariedade, é consistente considerar somente a não-comutatividade entre as coordenadas espaciais. Tal fato resulta que devemos tomar $\theta_{0,i} = 0$. Tal procedimento não é único e formas mais elaboradas para tratar esse problema são discutidas em, [28, 29, 30].

Desta forma o termo da equação(4.64), que será diferente de zero será:

$$\exp \left[\frac{i}{2} \rho_\mu k_\nu \theta^{\mu\nu} \right] = \exp \left[\frac{i}{4} \rho_i k_j \theta^{ij} \right], \tag{4.65}$$

substituindo o valor de $\theta_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \theta_k$, na equação(4.65),

$$\exp \left[\frac{i}{4} \rho_i k_j \epsilon^{ijk} \theta^k \right]. \tag{4.66}$$

Na equação (4.66), o termo dentro da exponencial é uma definição de produto vetorial misto, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\exp \left[\frac{i}{4} \rho_i k_j \epsilon^{ijk} \theta^k \right] &= \exp \left[\frac{i}{4} (\vec{\rho} \times \vec{k}) \cdot \vec{\theta} \right] = \exp \left[-\frac{i}{4} (\vec{k} \times \vec{\rho}) \cdot \vec{\theta} \right] \\
&= \exp \left[-\frac{i}{4} \vec{k} \cdot (\vec{\rho} \times \vec{\theta}) \right] = \exp \left[-\frac{i}{4} (\vec{\rho} \times \vec{\theta}) \cdot \vec{k} \right]. \quad (4.67)
\end{aligned}$$

Substituindo a equação (4.67), na (4.61), encontraremos o valor do potencial gravitacional modificado pela a não-comutatividade,

$$\begin{aligned}
V(\vec{x}) &= -4\pi G m_1 m_2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 k^2} e^{i\vec{x} \cdot \vec{k}} e^{-\frac{i}{4} (\vec{\rho} \times \vec{\theta}) \cdot \vec{k}} \\
&= -4\pi G m_1 m_2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 k^2} e^{i(\vec{x} - \frac{1}{4} \vec{\rho} \times \vec{\theta}) \cdot \vec{k}} \\
&= -4\pi G m_1 m_2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 k^2} e^{i\vec{y} \cdot \vec{k}} \quad (4.68)
\end{aligned}$$

o valor do parametro y foi definido como $\vec{y} = (\vec{x} - \frac{1}{4} \vec{\rho} \times \vec{\theta})$, ele não é uma variável de integração. A expressão (4.68) pode se facilmente resolvida se forem utilizadas coordenadas esféricas para o vetor \vec{q} :

$$\begin{aligned}
V(\vec{x}) &= \frac{-4\pi G m_1 m_2}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dk \frac{k^2}{k^2} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) e^{i|y| \cdot |k| \cos \theta} \\
&= -\frac{G m_1 m_2}{|y|}. \quad (4.69)
\end{aligned}$$

Substituindo a definição de \vec{y} a equação (4.69), pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
V(\vec{x}) &= -\frac{G m_1 m_2}{|y|} \\
&= -\frac{G m_1 m_2}{\sqrt{(|\vec{x}| - \frac{1}{4} \vec{k} \times \vec{\theta})(|\vec{x}| - \frac{1}{4} \vec{k} \times \vec{\theta})}} \\
&= -\frac{G m_1 m_2}{\sqrt{|\vec{x}|^2 - \frac{1}{4} \vec{x} \cdot \vec{k} \times \vec{\theta} - \frac{1}{4} \vec{k} \times \vec{\theta} \cdot \vec{x} + O(\theta^2)}} \\
&= -\frac{G m_1 m_2}{\sqrt{|\vec{x}|^2 - \frac{1}{2} (\vec{x} \times \vec{k}) \cdot \vec{\theta} + O(\theta^2)}} \\
&= -\frac{G m_1 m_2}{\sqrt{|\vec{x}|^2 - \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{\theta} + O(\theta^2)}}. \quad (4.70)
\end{aligned}$$

onde $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{k}$.

Tomando θ , muito pequeno podemos expandir o denominador, desta forma encontramos:

$$\left[|\vec{x}|^2 - \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{\theta} \right]^{-\frac{1}{2}} = |\vec{x}|^{-1} \left[1 - \frac{1}{2|\vec{x}|^2} \vec{L} \cdot \vec{\theta} \right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{1}{4|\vec{x}|^3} \vec{L} \cdot \vec{\theta} \right], \quad (4.71)$$

substituindo na equação (4.70), encontraremos;

$$V(\vec{x}) = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{x}|} - \frac{Gm_1m_2}{4|\vec{x}|^3} \vec{L} \cdot \vec{\theta} + O(\theta^2). \quad (4.72)$$

O resultado acima tem o mesmo formato do potencial elétrico não-comutativo encontrado em [31],

$$V_\theta = -\frac{Ze^2}{|\vec{x}|} - \frac{Ze^2}{4|\vec{x}|^3} + O(\theta^2) \quad (4.73)$$

definido em um espaço não-comutativo.

Efeitos gravitacionais fenomenológicos sobre este assunto poderão ser estudado mais profundamente nos trabalhos [32, 33].

No próximo capítulo estudaremos alterações no potencial gravitacional em um espaço não-comutativo devido à adição de um termo de Chern-Simons.

5 *Potencial gravitacional da teoria de Chern-Simons não-comutativa.*

No final do capítulo anterior vimos a alteração gravitacional devido a introdução de uma teoria de não-comutatividade do espaço. Neste capítulo vamos analisar, qual será o ganho ao se adicionar um termo de Chern-Simons na ação de Einstein-Hilbert, também no contexto da não-comutatividade dos espaços. O procedimento a seguir será ser semelhante o da seção 4.5.3.

5.1 Lagrangiana de Einstein-Hilbert-Chern-Simons.

A lagrangiana de Einstein-Hilbert pode ser encontrada na equação (4.56), e a lagrangiana de Chern-Simons é encontrada na equação (3.1),

$$\mathcal{L}_{EH} + \mathcal{L}_{CS} = -\frac{2}{\kappa} \sqrt{g} R + \frac{1}{2\mu} \epsilon^{\lambda\mu\nu} \Gamma_{\sigma\lambda}^{\rho} \left(\partial_{\mu} \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} + \frac{2}{3} \Gamma_{\omega\mu}^{\sigma} \Gamma_{\nu\rho}^{\omega} \right), \quad (5.1)$$

o sinal negativo foi explicado na equação (3.8).

Encontrar o propagador para a equação acima devemos unir o operador de Einstein-Hilbert, com o operador de Chern-Simons e depois inverter o operador, mais detalhes desta operação pode ser vista no capítulo 2. Pela a equação (2.17), adotando o gauge de Feynman e coletando os termos independentes de b , temos:

$$\mathcal{O} = -k^2 P^1 - k^2 P^2 - \frac{k^2}{2} \overline{P}^0 + \frac{k^2}{2} \overline{\overline{P}}^0 \quad (5.2)$$

O operador de Chern-Simons \mathcal{P} encontrado na equação (3.9):

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = & \frac{\square \partial^\gamma}{4} \left[\epsilon_{\alpha\gamma\mu} \left(\eta_{\nu\beta} - \frac{\partial_\nu \partial_\beta}{\square} \right) + \epsilon_{\mu\gamma\beta} \left(\eta_{\nu\alpha} - \frac{\partial_\nu \partial_\alpha}{\square} \right) \right. \\ & \left. + \epsilon_{\nu\gamma\alpha} \left(\eta_{\mu\beta} - \frac{\partial_\mu \partial_\beta}{\square} \right) + \epsilon_{\nu\gamma\beta} \left(\eta_{\mu\alpha} - \frac{\partial_\mu \partial_\alpha}{\square} \right) \right]. \end{aligned}$$

Deve ser somado com a equação (5.2), desta forma obtemos a seguinte forma do operador que deveremos inverter;

$$\mathcal{O} = -k^2 P^1 - k^2 P^2 - \frac{k^2}{2} \overline{P}^0 + \frac{k^2}{2} \overline{P} + \frac{P}{M} \quad (5.3)$$

Seguindo os mesmos passos dos cálculos realizados no capítulo 2, teremos a seguinte imposição;

$$\mathcal{O} \mathcal{O}^{-1} = I \quad (5.4)$$

onde o termo \mathcal{O}^{-1} é o propagador que estamos interessados.

A forma mais geral possível do propagador esta escrita na equação (3.7), substituindo os valores de (5.3) em (3.7), encontraremos:

$$\mathcal{O}^{-1} = \frac{1}{k^2} P^1 - \frac{M^2}{k^2(M^2 + k^2)} P^2 + \frac{1}{k^2} P^0 - \frac{1}{k^2} \overline{P} + \frac{1}{k^2} \frac{M}{k^2(M^2 + k^2)} P \quad (5.5)$$

Esta equação mostra explicitamente que devemos tomar um método encontrado na seção 4.5.3 adicionando o fato que a estrutura do operador adicional vindo do termo de Chern-Simons P , irá modificar o produto dos operadores P^2 e P .

5.2 Matriz de espalhamento \mathcal{M} .

De posse do propagador, equação (5.5), pode-se encontrar a matriz de espalhamento \mathcal{M} , definida na equação (4.58):

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \tau^{\mu\nu} \mathcal{O}_{\mu\nu,\alpha\beta}^{-1} \tau^{\alpha\beta} \\
&= \left(\frac{i\kappa}{2} \right)^2 \{ -\eta^{\mu\nu} (p_\mu p'^\mu - m^2) + (p^\mu p'^\nu + p^\nu p'^\mu) \} \\
&\quad \times \left[\frac{1}{k^2} P^1 - \frac{M^2}{k^2(M^2 + k^2)} P^2 + \frac{1}{k^2} P^0 - \frac{1}{k^2} \overline{P}^0 + \frac{1}{k^2} \frac{M}{k^2(M^2 - k^2)} P \right] \\
&\quad \times \{ -\eta^{\alpha\beta} (q_\alpha q'^\alpha - m^2) + (q^\alpha q'^\beta + q^\beta q'^\alpha) \} e^{\frac{i}{2}(p_1 \wedge p'_1)} e^{\frac{i}{2}(q_2 \wedge q'_2)}. \tag{5.6}
\end{aligned}$$

Na equação (5.6), existem alguns termos que não irão contribuir para o cálculo da matriz de espalhamento quando tomado o limite não-relativístico (\mathcal{M}_{NR}). Analisando somente o termo proporcional a P^1 :

$$\begin{aligned}
\frac{i\kappa^2}{4k^2} \tau^{\mu\nu} P^1 \tau^{\alpha\beta} &= \left(\frac{-\kappa^2}{8k^2} \right) \left[\tau^{\mu\nu} \tau_\mu^\beta \frac{k_\nu k_\beta}{k^2} + \tau^{\mu\nu} \tau_\mu^\alpha \frac{k_\nu k_\alpha}{k^2} + \tau^{\mu\nu} \tau_\nu^\beta \frac{k_\mu k_\beta}{k^2} + \tau^{\mu\nu} \tau_\nu^\alpha \frac{k_\mu k_\alpha}{k^2} \right. \\
&\quad \left. - 4\tau^{\mu\nu} \tau^{\alpha\beta} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{k^4} \right] \\
&= \left(\frac{-\kappa^2}{8k^2} \right) \left[\tau^{\mu\nu} \tau_{\mu\nu} \eta^{\nu\beta} \frac{k_\nu k_\beta}{k^2} + \tau^{\mu\nu} \tau_{\mu\nu} \eta^{\nu\alpha} \frac{k_\nu k_\alpha}{k^2} + \tau^{\mu\nu} \tau_{\mu\nu} \eta^{\mu\beta} \frac{k_\mu k_\beta}{k^2} \right. \\
&\quad \left. + \tau^{\mu\nu} \tau_{\mu\nu} \eta^{\mu\alpha} \frac{k_\mu k_\alpha}{k^2} - 4\tau^{\mu\nu} \tau_{\mu\nu} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{k^4} \right] \\
&= \left(\frac{-\kappa^2}{8k^2} \right) \left[\tau^{\mu\nu} \tau_{\mu\nu} \frac{k^\beta k_\beta}{k^2} + \tau^{\mu\nu} \tau_{\mu\nu} \frac{k^\alpha k_\alpha}{k^2} + \tau^{\mu\nu} \tau_{\mu\nu} \frac{k^\beta k_\beta}{k^2} \right. \\
&\quad \left. + \tau^{\mu\nu} \tau_{\mu\nu} \frac{k^\alpha k_\alpha}{k^2} - 4\tau^{\mu\nu} \tau_{\mu\nu} \frac{k^\alpha k_\alpha k^\beta k_\beta}{k^4} \right] \\
&= \left(\frac{-\kappa^2}{8k^2} \right) \left[4\tau^{\mu\nu} \tau_{\mu\nu} \frac{k^\alpha k_\alpha}{k^2} - 4\tau^{\mu\nu} \tau_{\mu\nu} \frac{k^\alpha k_\alpha k^\beta k_\beta}{k^4} \right] \\
&= \left(\frac{-\kappa^2}{8k^2} \right) \left[4\tau^{\mu\nu} \tau_{\mu\nu} \frac{k^2}{k^2} - 4\tau^{\mu\nu} \tau_{\mu\nu} \frac{k^2 k^2}{k^4} \right] = \left(\frac{-\kappa^2}{8k^2} \right) [4\tau^{\mu\nu} \tau_{\mu\nu} - 4\tau^{\mu\nu} \tau_{\mu\nu}] \\
\frac{i\kappa^2}{4k^2} \tau^{\mu\nu} P^1 \tau^{\alpha\beta} &= 0 \tag{5.7}
\end{aligned}$$

Com argumentos análogos pode-se chegar à mesma conclusão para \overline{P}^0 . Já o último termo P , ele não irá contribuir, pois o tensor de Levi-Civita não admite repetições nos índices.

A equação (5.6) dependerá somente de P^2 e P^0 , lembrado das identidades definidas no capítulo 2:

$$P_{\mu\nu,\alpha\beta}^2 = \frac{1}{2}(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}) - \frac{1}{D-1}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} - \left[P^1 + \frac{D-2}{D-1}\overline{P}^0 - \frac{1}{D-1}\overline{\overline{P}}^0 \right],$$

$$P_{\mu\nu,\alpha\beta}^0 = \frac{1}{D-1}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{D-1}[\overline{P}^0 + \overline{\overline{P}}^0].$$

Aplicando os resultados encontrados em (5.7) na equação (5.6), junto com as identidades acima definidas, lembrando que estamos em uma teoria definida em três dimensões pode-se facilmente encontrar:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\theta &= \frac{-\kappa^2}{4} \left\{ -\eta^{\mu\nu} (p_\mu p'^\mu - m^2) + (p^\mu p'^\nu + p^\nu p'^\mu) \right\} \\ &\quad \times \left[\frac{-M^2}{k^2(M^2 + k^2)} P^2 + \frac{1}{k^2} P^0 \right] \\ &\quad \times \left\{ -\eta^{\alpha\beta} (q_\alpha q'^\alpha - m^2) + (q^\alpha q'^\beta + q^\beta q'^\alpha) \right\} e^{\frac{i}{2}(p_1 \wedge p'_1)} e^{\frac{i}{2}(q_2 \wedge q'_2)} \\ &= \frac{-\kappa^2}{8k^2} \left\{ -\eta^{\mu\nu} (p_\mu p'^\mu - m^2) + (p^\mu p'^\nu + p^\nu p'^\mu) \right\} \\ &\quad \times \left[\frac{-M^2}{(M^2 + k^2)} (\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}) + \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} \right] \\ &\quad \times \left\{ -\eta^{\alpha\beta} (q_\alpha q'^\alpha - m^2) + (q^\alpha q'^\beta + q^\beta q'^\alpha) \right\} e^{\frac{i}{2}(p_1 \wedge p'_1)} e^{\frac{i}{2}(q_2 \wedge q'_2)} \end{aligned} \quad (5.8)$$

A equação (5.8) pode ser dividida em dois termos, um deles será semelhante ao caso estudado na equação (4.58), este fato simplifica bastante o trabalho a ser realizado. O resultado obtido da matriz de espalhamento será:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \left[\frac{-\kappa^2}{8k^2} \frac{-M^2}{(M^2 + k^2)} \right] \times [4 \{ (p \cdot q)(p' \cdot q') + (p \cdot q')(p' \cdot q) - (p \cdot p')(q \cdot q') \} \\ &\quad - 2 \{ (p \cdot p')(q \cdot q' + m^2) + (p \cdot p' + m^2)(q \cdot q') \} \\ &\quad + (p \cdot p' + m^2)(q \cdot q' + m^2)] e^{\frac{i}{2}(p_1 \wedge p'_1)} e^{\frac{i}{2}(q_2 \wedge q'_2)} \\ &\quad + \frac{\kappa^2}{8k^2} \times [2(p \cdot p') - 3(p \cdot p' - m_1^2)2(q \cdot q') - 3(q \cdot q' - m_2^2)] e^{\frac{i}{2}(q_2 \wedge q'_2)}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Fazendo o limite não-relativístico de modo semelhante ao da equação (4.60), obtemos:

$$\mathcal{M}_{NR} = -16\pi G m_1^2 m_2^2 \left[\frac{-M^2}{k^2(M^2 + k^2)} + \frac{1}{k^2} \right] e^{\frac{i}{2}\rho \wedge k}. \quad (5.10)$$

A equação pode ser fatorada para maior simplificação:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{NR} &= -16\pi G m_1^2 m_2^2 \left[-\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(M^2 + k^2)} \right) + \frac{1}{k^2} \right] e^{\frac{i}{2}\rho \wedge k} \\ &= 16\pi G m_1^2 m_2^2 \left[\frac{1}{(M^2 + k^2)} \right] e^{\frac{i}{2}\rho \wedge k}\end{aligned}\tag{5.11}$$

O fator de fase foi simplificado de maneira análoga, na discussão da equação (4.63).

5.3 Deformação do potencial gravitacional.

Substituindo a expressão acima da equação (4.54), podemos analisar qual será a contribuição no potencial gravitacional quando se adiciona o termo de Chern-Simons. Além da substituição citada anteriormente deve-se efetuar os mesmos passos realizados nas equações (4.64), (4.65), (4.66), (4.67) e (4.68), pode-se chegar ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned}V(\vec{x}) &= -\frac{1}{4m_1 m_2} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \mathcal{M}(\vec{k}) \\ &= -\frac{4\pi G m_1 m_2}{(2\pi)^2} \int d^2 k \left[\frac{1}{k^2 + M^2} \right] e^{i\vec{y} \cdot \vec{k}}.\end{aligned}\tag{5.12}$$

Reescrevendo a equação (5.12) em coordenadas esféricas teremos que:

$$\vec{k} \cdot \vec{y} = ky \cos \theta,\tag{5.13}$$

$$d^2 k = k dk d\theta\tag{5.14}$$

Substituindo as equações (5.13), (5.14) em (5.12):

$$\begin{aligned}V(\vec{k}) &= -\frac{4\pi G m_1 m_2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{|k|}{k^2 + M^2} \int_0^{2\pi} d\theta [e^{iky \cos \theta}] \\ &= -2G m_1 m_2 \int_0^\infty dk \frac{J_0(|k|y)|k|}{k^2 + M^2},\end{aligned}\tag{5.15}$$

onde J_0 é a função de Bessel de primeira espécie e ordem zero. Entretanto a integral

$\int_0^\infty dx \frac{x J_0(ax)}{x^2+b^2}$, só existe quando $a > 0$ e $Re b > 0$. Para encontrar o resultado da equação acima foi utilizado o software Mathematica[®], usando este software podemos calcular o valor da integral da equação(5.15)como:

$$V(y) = -2Gm_1m_2 [K_0(My)], \quad (5.16)$$

onde o valor K_0 é a função de Bessel modificada de segunda espécie de ordem zero.

No limite $y \rightarrow 0$, $V(y)$ comporta-se como:

$$2Gm_1m_2 \left(\ln \left[\frac{My}{2} \right] \right) \quad (5.17)$$

por questão de simplificação omitimos uma constante aditiva. Substituindo a definição do parâmetro y :

$$\vec{y} = \left(\vec{x} - \frac{1}{4} \vec{\rho} \times \vec{\theta} \right),$$

encontrado no capítulo 4, na equação (5.17):

$$\begin{aligned} V_\theta &= 2Gm_1m_2 \left\{ \ln \left[\frac{M}{2} \right] + \ln \left[x^2 - \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{\theta} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &= 2Gm_1m_2 \left\{ \ln \left[\frac{M}{2} \right] + \frac{1}{2} \ln \left[x^2 \left(1 - \frac{1}{2x^2} \vec{L} \cdot \vec{\theta} \right) \right] \right\} \\ &= 2Gm_1m_2 \left\{ \ln \left[\frac{M}{2} \right] + \ln |\vec{x}| + \frac{1}{2} \ln \left[1 - \frac{1}{2x^2} \vec{L} \cdot \vec{\theta} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde $x = |\vec{x}|$.

Expandido em série de Taylor a expressão acima para valores de θ pequenos:

$$\begin{aligned} V_\theta &= 2Gm_1m_2 \left\{ \ln \left[\frac{M}{2} \right] + \ln(x) - \frac{1}{4x^2} \vec{L} \cdot \vec{\theta} \right\} \\ &= 2Gm_1m_2 \left\{ \ln \left[\frac{Mx}{2} \right] - \frac{1}{4x^2} \vec{L} \cdot \vec{\theta} \right\} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Deste resultado tomamos a seguinte conclusão: a estrutura da gravitação acrescida de um termo de Chern-Simons na origem [7], é modificada no cenário da não-comutatividade quebrando a isotropia devido ao termo $\vec{L} \cdot \vec{\theta}$.

No limite $y \rightarrow \infty$ a expressão de $V(y)$, se comporta como:

$$-2Gm_1m_2 \left[\sqrt{\frac{\pi}{2My}} e^{-My} \right]. \quad (5.20)$$

Longe da origem tem-se uma alteração na expressão devido a não-comutatividade.

Recordando o valor do termo y equação (4.71), onde foi encontrado o valor do módulo de \vec{y} e expandido para o valores de θ muito pequeno. Iremos substituir o resultado na equação (5.18):

$$\begin{aligned}
V_\theta &= -2Gm_1m_2 \left[\sqrt{\frac{\pi}{2M}} \frac{e^{-My}}{\sqrt{y}} \right] \\
&= -2Gm_1m_2 \left[\sqrt{\frac{\pi}{2M}} e^{-Mx + \frac{M}{4x} \vec{L} \cdot \vec{\theta}} \left[x^2 - \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{\theta} \right]^{-\frac{1}{4}} \right] \\
&= -2Gm_1m_2 \left[\sqrt{\frac{\pi}{2M}} e^{-Mx} e^{\frac{M}{4x} \vec{L} \cdot \vec{\theta}} \left[\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{8x^2 x^{\frac{1}{2}}} \vec{L} \cdot \vec{\theta} \right] \right] \\
&= -2Gm_1m_2 \left[\sqrt{\frac{\pi}{2M}} e^{-Mx} \left[1 + \frac{M}{4x} \vec{L} \cdot \vec{\theta} \right] \left[\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{\vec{L} \cdot \vec{\theta}}{8x^2 x^{\frac{1}{2}}} \right] \right] \\
&= -2Gm_1m_2 \left[\sqrt{\frac{\pi}{2M}} e^{-Mx} \left[\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{\vec{L} \cdot \vec{\theta}}{8x^2 x^{\frac{1}{2}}} + \frac{M}{4x} \vec{L} \cdot \vec{\theta} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \right] \right] \\
&= -2Gm_1m_2 \left[\sqrt{\frac{\pi}{2Mx}} e^{-Mx} \left[1 + \frac{\vec{L} \cdot \vec{\theta}}{8x^2} + \frac{M}{4x} \vec{L} \cdot \vec{\theta} \right] \right] \tag{5.21}
\end{aligned}$$

Notamos que longe da origem, o potencial gravitacional com adição do termo de Chern-Simons [7], também é quebrado a isotropia pela a inclusão da teoria da não-comutatividade no espaço-tempo. Ambos os resultados (5.19) e (5.21) carregam a mesma essência, quebra da isotropia do espaço. Característica esta devida a não-comutatividade do espaço-tempo.

Conclusão

Neste trabalho estudamos quais seriam as contribuições que uma teoria da não-comutatividade no espaço-tempo acrescentaria na gravidade topologicamente massiva. Particularmente calculamos contribuição da não-comutatividade em dois casos: primeiro na teoria de gravidade de Einstein-Hilbert e posteriormente acrescentando um termo de Chern-Simons, até a ordem em *tree level*, sem *loop*. A seguir, resumimos algumas conclusões extraídas deste trabalho.

Antes de calcular as contribuições, devemos entender como conseguir extrair o propagador do gráviton de uma teoria quadrática da gravitação. Fizemos isto no caso mais geral em D-dimensões, mesmo que a intenção sendo aplicar em sistema de baixas dimensões. Todos os passos já bem definidos para calcular o propagador do gráviton, aplicamos na gravidade com um termo adicional topológico.

De posse do propagador da nossa teoria, fizemos uma breve revisão da teoria não-comutativa do espaço-tempo. Notamos que ela modifica o produto dos campos acrescentando um fator de fase, modificação esta que não afeta a teoria da gravidade quadrática nos campos. Acoplando com a matéria construímos o vértice da teoria e notamos que o fator de fase da não-comutatividade corre nos vértices. Neste ponto temos todos os ingredientes para abordar o problema e estudar possíveis modificações.

Nossa conclusão sobre a inserção da não-comutatividade na gravidade usual e acrescida de um termo topológico é que em ambos os casos a isotropia é quebrada. No caso de gravidade com termo de Chern-Simons a isotropia é quebrada tanto na origem quanto longe dela.

Finalizando, o resultado encontrado no trabalho sugere como perspectivas futuras de continuação podendo analisar a extensão para a ordem de um *loop*, e usar termos de gravidade quadrática em altas ordens R^2 , $R_{\mu\nu}^2$, que a princípio pode ser uma saída para ter uma gravidade em (2+1) dimensões que não seja dinamicamente trivial e possa ser renormalizável[7].

Referências

- [1] S. Giddings, J. Abbot e K. Kuchar, *Cosmology in 2+1 dimensions*, Gen. Rel. Grav. **16**, 751 (1984).
- [2] A. Staruszkiewicz, *Gravitation Theory in Three-Dimensional Space*, Acta Physica Polonica **24**, 735 (1963).
- [3] R. Jackiw, Nucl. *Lower Dimensional Gravity*, Phys. B **252**, 343 (1985).
- [4] S. Deser, R. Jackiw e G. t'Hooft, Ann. Phys. (N.Y.) 152, 220 (1984).
- [5] P. Gerbert and R. Jackiw, Commun Math. Phys. 124, 229 (1989).
- [6] H. W. Hamber and S. Liu, *On the quantum corrections to the Newtonian*,.
- [7] A. Accioly, A. Azeredo e H. Mukai, *Propagator, tree-level unitarity and effective non-relativistic potential for higher-derivative gravity theories in D dimensions*, J. Math. Phys. 43, 473 (2002); doi: 10.1063/1.1415743.
- [8] N. Seiberg, E. Witten, *String theory and noncommutativity geometry*, JHEP9909, 032 (1999), hep-th/9908142.
- [9] W. Heisenberg, *The universal length appearing in the theory of elementary particles*, Ann. Phys. Ser5,32, 20-33, (1938).
- [10] H. Snyder, *Quantized space-time*, Phys. Rev. 72, 68 (1947); H. Snyder, *The electromagnetic field in quantized space-time*, Phys. Rev. 72, 68 (1947).
- [11] S. Doplicher, K. Fredenhagen, J. E. Roberts, *The quantum structure of space-time at Plank scale and quantum fields*, Commun. Math. Phys.172, 187 (1995), hep-th/0303037.
- [12] B. A. Campbell, K. Kaminsky, *Noncommutative linear sigma models*, Nucl. Phys. B606, 613 (2001), hep-th/0102022.
- [13] F. J. Petriello, *The Higgs mechanism in non-commutative gauge theories*, Nucl. Phys. B601, 169 (2001), hep-th/0101109.
- [14] E. T. Akhmedov, P. DeBoer, G. W. Semenoff, *Noncommutative Gross-Neveu model at large N*, JHEP06, 009 (2001), hep-th/0103199; E. T. Akhmedov, P. DeBoer, G. W. Semenoff, *Running couplings and triviality of field theories on noncommutative spaces*, Phys. Rev. D 64, 065005 (2001), hep-th/0010003.
- [15] J. Gomis, T. Meheh, *Space-time noncommutative field theories and unitarity*, Nucl. Phys. B591, 265 (2000), hep-th/0005129.

- [16] J. Julve and M. Tonin, *Nuovo Cimento B* 46, 137 (1978).
- [17] G. Hooft, M.J.G. 't; Veltman, *One-loop divergencies in the theory of gravitation*. *Annales de l'Institut Henri Poincaré : Section A, Physique théorique*, volume: 20, issue: 1 (1974), pp. 69 - 94.
- [18] R. Szabo, *Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces*, *Phys. Rept.* 378 (2003) 207
- [19] DUNNE, G. V., *Aspects of Chern-Simons theory*, in: *Les Houches Summer School in Theoretical Physics, Session 69: Topological Aspects of Low-dimensional Systems*, Les Houches, France, 7-31 Jul 1998.
- [20] Maluf R. V., *Quebra dinâmica de simetria, simetria BRST e finitude em modelos supersimétricos em $(2+1)D$* , Tese, 2012.
- [21] Seiberg N. e Witten E., *String theory and noncommutative geometry*, *JHEP* **09**(1999)032, hep-th/990142.
- [22] I.B: Khriplovich and G.G. Kirilin, *Quantum power correction to the Newton law*, *J.Exp.Theor.Phys.* 95 (2002) 981-986.
- [23] S.N. Gupta, *Quantization of Einstein's Gravitational Field: General Treatment*, *Proc. Phys. Soc. London A*65, 608, 1952; S.N. Gupta and S.F. Radford, *Quantum field-theoretical electromagnetic and gravitational two- particle potentials*, *Phys. Rev. D*, Vol 21, No. 8, 2213, 1980.
- [24] Y. Iwasaki, *Quantum Theory of Gravitation vs. Classical Theory*, *Prog. Theor. Phys.* 46, 1587 (1971).
- [25] K. Hiida and H. Okamura, *Gauge Transformation and Gravitational Potentials*, *Prog. Theor. Phys.* 47, 1743 (1972).
- [26] K. A. Kazakov, *On the notion of potential in quantum gravity*, *Phys. Rev. D* 63, 044004 (2001).
- [27] N.E.J Bjerrum-Bohr, J.F. Donoghue, B.R. Holstein, *Quantum gravitational corrections to the nonrelativistic scattering potential of two masses*, *Phys.Rev. D*67 (2003) 084033.
- [28] S. Doplicher, K. Fredenhagen, J. E. Roberts, *The quantum structure of spacetime at Plank scale and quantum fields*, *Commun. Math". Phys.*172, 187 (1995), hep-th/0303037.
- [29] D. Bahns, S. Doplicher, K. Fredenhagen, G. Piacitelli, *On the unitarity problem in space-time noncommutative theories*, *Phys. Lett.*B533, 178 (2002), hep-th/0201222.
- [30] Y. Liao, K. Sibold, *Time-ordered perturbation theory on noncommutative space-time 2. Unitarity*, *Eur. Phys. J.*C25, 469 (2002), hep-th/0206011.
- [31] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, and A. Tureanu, *Hydrogen atom spectrum and the Lamb Shift in noncommutative QED*. *Phys. Rev. Lett.* 86 (2001) 2716.

-
- [32] J M. Romero, J. A. Santiago, J. D. Vergara, *Newton's second law in a noncommutative space*. Phys.Lett. A310 (2003) 9.
- [33] B. Mirza, M. Dehghani, *Noncommutative geometry and the classical orbits of particles in a central force potential*. Commun. Theor. Phys. 42 (2004) 183.
- [34] A. Tikhonov e A. Samarskii, *Equations of Mathematical Physics*, (Dover, New York, 1990).