UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ – UFC

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

CENTRO DE CIÊNCIAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

ALESSANDRO MENDONÇA NASSERALA

ELABORAÇÃO E DESCRIÇÃO DE SITUAÇÕES DIDÁTICAS COM AMPARO NA SEQUÊNCIA FEDATHI: O CASO DA INTEGRAL IMPRÓPRIA

FORTALEZA – CE

2014

ALESSANDRO MENDONÇA NASSERALA

ELABORAÇÃO E DESCRIÇÃO DE SITUAÇÕES DIDÁTICAS COM AMPARO NA SEQUÊNCIA FEDATHI: O CASO DA INTEGRAL IMPRÓPRIA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Ceará como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre Ensino de Ciências e Matemática. Eixo Temático: Matemática. Linha de Pesquisa: Tecnologias no Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

FORTALEZA – CE

2014

ALESSANDRO MENDONÇA NASSERALA

ELABORAÇÃO E DESCRIÇÃO DE SITUAÇÕES DIDÁTICAS COM AMPARO NA SEQUÊNCIA FEDATHI: O CASO DA INTEGRAL IMPRÓPRIA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves

Aprovado em: 15/12/2014.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves (Orientador)
Instituto Federal do Ceará – IFCE

Profa. Dra. Maria José Costa dos Santos
Universidade Federal do Ceará – UFC

Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Dedico este trabalho a Deus, minha esposa Jarinne, meu filho Davi e aos meus pais José e Vanilde com muito amor.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, amigo e Professor Francisco Régis Vieira Alves, pela indicação das pessoas e livros certos, pela compreensão nos momentos difíceis e pelo apoio na superação das dificuldades apresentadas na concepção da pesquisa.

Ao amigo Márcio Soares, pelas diversas vezes que ao solicitar sua ajuda, obtive apoio e prontamente fui atendido.

A todos os componentes do Instituto de Matemática, Ciências e Filosofia, pelos momentos em que me deram força para continuar escrevendo e me dedicando ao término desta pesquisa.

As Professoras Doutoras Mazé e Carolina pela aceitação do convite para fazer parte da banca examinadora deste trabalho.

Aos meus alunos, todos, que são objeto central das minhas inquietações em fazê-los aprender Matemática.

Ao Professor Júlio Wilson pelos artigos e suas aulas que foram bastante motivadoras para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus irmãos, pela partilha na alegria e dor. Em especial minha irmã Veny a qual sempre me escutou nos momentos difíceis.

Ao amigo Pontes que me ajudou na confecção do blog e em outras atividades de informática.

À minha esposa Jarinne por ter paciência comigo na execução do projeto de pesquisa.

"A principal meta da educação é criar homens que sejam capazes de fazer coisas novas, não simplesmente repetir o que outras gerações já fizeram. Homens que sejam criadores, inventores, descobridores. A segunda meta da educação é formar mentes que estejam em condições de criticar, verificar e não aceitar tudo que a elas se propõe."

(Jean Piaget)

RESUMO

Esta pesquisa elaborou e descreveu situações didáticas sobre Integrais Impróprias ou Generalizadas, tendo como metodologia de ensino a Sequência Fedathi e a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa. Usamos o *software* GeoGebra como ferramenta de visualização geométrica para nossas situações didáticas, voltadas para o ensino de Integrais Impróprias. Produzimos como produto educacional vídeoaulas e também desenvolvemos um blog para a divulgação de nosso trabalho. Nossa pesquisa tem como foco principal estudantes de Cálculo Diferencial e Integral, além de propiciar uma visualização gráfica de problemas algébricos. Observamos que os livros de Cálculo, como: Guidorizzi (1998) e Stewart (2011) não permitem tais visualizações. Com isso, concluímos que esta pesquisa pode ajudar inúmeros estudantes a desenvolver os seus conhecimentos sobre Cálculo Diferencial e Integral, pois mostramos várias situações didáticas com o uso do *software* GeoGebra através de vídeoaulas e descrevemos as mesmas fazendo comentários significativos, dessa forma, o estudante pode encontrar formas de visualização geométrica das Integrais Impróprias, fazendo com que possibilite uma diversidade de exploração em busca do saber matemático.

Palavras-chave: Situação Didática. Sequência Fedathi. Integral Imprópria. *Software* GeoGebra

ABSTRACT

This research developed and described didactic situations on Improper integrals or generalized, with the teaching methodology to Fedathi sequence and the Didactic Engineering as a research methodology. We use GeoGebra software as geometric visualization tool for our teaching situations, aimed at teaching Improper integrals. We produce educational video classes as product and also developed a blog to disseminate our work. Our research is mainly focused on students of Differential and Integral Calculus, as well as providing a graphical view of algebraic problems. We note that the calculation of books such as: Guidorizzi (1998) and Stewart (2011) do not allow such views. Thus, we conclude that this research can help many students to develop their knowledge of Differential and Integral Calculus, since we showed various teaching situations with the use of GeoGebra software through video classes and describe the same making meaningful comments, thus the student can find ways to geometric visualization of Improper integrals, making possible a variety of exploration in search of mathematical knowledge.

Keywords: Teaching Situation. Following Fedathi. Improper Integral. software GeoGebra

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O ensino de Cálculo[1] nas universidades brasileiras tem sido objeto de questionamento em diversos fóruns e congressos em função das dificuldades apresentadas pelos alunos em ensino e aprendizagem, também observamos uma evasão muito alta dos estudantes dos primeiros períodos, matriculados nesta disciplina.

Nossas preocupações com o ensino e aprendizagem de Cálculo não são novidades, pois esse questionamento se deve aos altos índices de reprovação e evasão nas universidades públicas brasileiras.

Essas dificuldades foram estudadas por Reis (2001), que vem nos remeter sobre o ensinar e aprender Cálculo hoje nas universidades de todo o Brasil. Encontramos muitos trabalhos de pesquisa, nacionais e internacional, que têm ressaltado as dificuldades dos alunos dos ciclos básicos das universidades no ensino e aprendizagem de Cálculo e pesquisado as causas. Podemos destacar alguns: Fischbein (1993), Fiorentini (1995), Baruffi (1999), Echeverry (2001), Reis (2001), Tall (2002), Anacleto (2007), Mateus (2007), Nasser (2009), Alves (2011), entre outros. Isso nos mostra que nossas preocupações acerca do ensino de Cálculo são relevantes e de grande importância para o desenvolvimento da Matemática.

O ensino de Cálculo na grande maioria das salas de aula, que deveriam ser tratadas como espaço de trabalho onde se estabelecem as múltiplas relações entre os sujeitos do fazer pedagógico, na sua maioria é centrado no professor, cujo papel, muitas vezes, é o de um mero transmissor de informações. Essas problemáticas podem nos levar a observar, segundo Fischbein (1993, p.161, tradução nossa) que “[...] é importante saber como os estudantes resolvem vários tipos de problemas matemáticos, que dificuldades eles devem encontrar e a fonte de tais dificuldades, os erros sistemáticos que cometem, e assim sucessivamente”.

A Investigação dos erros tanto de natureza algébrico como geométrico e a interelação entre eles, que acontecem na resolução de problemas de Cálculo e a buscar de métodos para superar essas barreiras, talvez seja um dos desafios mais difíceis que enfrentamos atualmente no ensino e aprendizagem do Cálculo.

---

[1] A palavra **Cálculo** quando usada neste trabalho faz referência ao Cálculo Diferencial e Integral em sua grandeza.

A fonte das dificuldades enfrentadas por estudantes quando se deparam com uma situação-problema de Cálculo, além dos erros algébricos[2] e mesmo a transposição para o geométrico são problemas que deixam os professores com sentimento de incapacidade e muitas vezes de insegurança. Segundo Anacleto (2007, p. 138) conclui dizendo que:

> Os dados analisados nos protocolos permitem concluir que os estudantes sabem derivar a integral e verificar que a derivada da integral é a função integranda. No entanto esta relação fica evidente no domínio algébrico, mas quando mudamos para o domínio geométrico, muitos estudantes não utilizam os conhecimentos contidos nas representações para a solução das questões apresentadas, o que pode significar que eles dominam parcialmente estes conceitos.

Anacleto (2007) faz referência às dificuldades que os estudantes têm em relação ao domínio geométrico e a transposição do saber algébrico. Sabemos que o ambiente de lápis, papel e quadro traz certa barreira para o ensino e aprendizagem da Matemática de um modo mais geral, podendo impactar diretamente na prática do professor em sala de aula.

Observamos ainda que o uso de tecnologias computacionais no ensino e aprendizagem de Matemática é objeto de estudo de algumas pesquisas, podemos encontrar considerações significativas sobre as potencialidades trazidas pelo advento do computador à aula de Matemática em trabalhos como: Artigue (1996; 2009), Almeida (2000), Souza (2010) e Alves (2011).

O computador se tornou tão importante para o ensino e aprendizagem quanto o livro didático, mas claro que sozinho não faz o mesmo efeito que associado com outras ferramentas, Almeida**,** (2000, p.19) descreve a importância da Informática na Educação.

> Informática na Educação é um novo domínio da ciência que em seu próprio conceito traz embutida a ideia de pluralidade, de inter-relação e de intercâmbio crítico entre saberes e ideias desenvolvidas por diferentes pensadores. Por ser uma concepção que ainda está em fase de desenvolver seus argumentos, quanto mais nos valermos de teorias fundamentadas em visões de homem e de mundo coerentes, melhor será para observamos e analisarmos diferentes fatos, eventos e fenômenos, com o objetivo de estabelecer relações entre eles.

Podemos dizer então que o uso do computador é fundamental na prática pedagógica do professor e associado a outras ferramentas de ensino, pode auxiliar no problema que os estudantes têm com o Cálculo. Outra possibilidade que podemos considerar em relação ao ensino de Cálculo, recai sobre a prática pedagógica dos professores. Dessa forma, o computador pode ser um aliado para contribui na prática docente desse profissional.

---

[2] **Erros algébricos** em nossa concepção são de natureza algorítmica, resolução de um problema de Cálculo apenas utilizando métodos convencionais, sem usar a topológica. Ou seja, sem auxílio de qualquer instrumento gráfico.

Também podemos observar que a prática pedagógica do professor de Cálculo deve se pautar, primeiramente, na reflexão e compreensão do papel fundamental do Cálculo na formação Matemática de seus alunos. Somente estabelecendo elementos que esclareçam a real função do Cálculo na formação Matemática do aluno é que o professor terá condições de refletir sobre que objetivos a traçar, que conteúdos e metodologias a estabelecer, enfim, que prática pedagógica desenvolver.

Sabemos que hoje não apenas os livros estão disponíveis, mas também a rede mundial de informações, de modo que alunos ou mesmo professores podem recorrer a materiais de qualidade para ensinar ou aprender Cálculo. Por que não utilizar essas ferramentas e materiais disponíveis na rede? Continuar com essas deficiências que nossos alunos de Cálculo possuem e não tentar superar, talvez não seja o que nossos professores e estudantes de Matemática desejam para sua formação.

Nossa motivação para trabalhar com o ensino de Cálculo vem desde a faculdade de Matemática que cursamos na década de 90 (noventa), naquela ocasião nós já percebíamos uma dificuldade em nossos colegas com o estudo do Cálculo. Quando o professor tentava desenvolver alguma situação que envolvia gráficos, verificamos que a dificuldade em compreender era ainda maior, mas o fato é que o entendimento gráfico-geométrico em alguns casos do Cálculo é de fundamental importância para a compreensão e desenvolvimento do problema proposto.

Alguns anos depois fomos lecionar na faculdade a disciplina de Cálculo I e percebemos problemas similares de compreensão em relação ao ensino e aprendizagem do Cálculo, nossos alunos tinham dificuldade na transposição do algébrico para o geométrico e o pior, tivemos dificuldades em encontrarmos meios didáticos para superar tais problemas de ensino e aprendizagem.

Ao trocar experiências com outros professores percebemos que eles tinham limitações do saber didático e possuíam o mesmo problema que víamos enfrentando, essas dificuldades que professores e estudantes encontram no Cálculo fizeram com que procurássemos algumas reflexões acerca da deficiência do ensino e aprendizagem do Cálculo.

Quando resolvemos fazer um mestrado e fomos indagados em que seria nossa pesquisa, pensamos logo no ensino do Cálculo. Como poderíamos ajudar o meio acadêmico a superar algumas dificuldades referentes ao Cálculo? O que poderíamos deixar de contribuição para nossos colegas professores e os alunos de Matemática, e mesmo de outros cursos que estudam Cálculo?

Resolvemos então procurar dentro da didática, uma sequência de ensino que nos orientassem, viemos para o Ceará e aqui encontramos uma Sequência Didática que foi desenvolvida por um professor da Universidade Federal do Ceará (UFC), este nos acolheu em seu laboratório de multimeios e passamos cerca de um ano estudando a Sequência Fedathi, a qual iremos nos apropriar no próximo capítulo. Dessa forma, tínhamos uma metodologia de ensino definida e o objeto a ser estudado, o ensino de Cálculo com a perspectiva de encontrar um conteúdo específico para estudo e aprofundamento dentre os muitos que existem.

Nosso orientador nos propôs a metodologia de pesquisa fundamentada na Engenharia Didática, esta surgiu na França e é muita usada em diferentes trabalhos, também iremos nos apropriar desta metodologia no próximo capítulo. Complementando resolvemos utilizar o *software* GeoGebra para auxiliar na transposição do algébrico para o geométrico, esta ferramenta que já utilizamos há algum tempo é de grande utilidade para o ensino e aprendizagem do Cálculo.

Partindo de todas estas concepções aqui expostas com referenciais teóricos foi que delimitamos nosso objeto de estudo no ensino de Cálculo com o uso do *software* GeoGebra, vamos também usar a Sequência Fedathi como metodologia de ensino e a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa.

Como o Cálculo é muito amplo e para que tenhamos um trabalho significativo acerca da conjectura do ensino de Cálculo na perspectiva de resolução de problemas, pensando nisto foi que decidimos restringir o objeto a ser estudado para somente Integral Imprópria ou Integral Generalizada com o uso do *software* GeoGebra, ou seja, Integrais do tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx,\ sendo\ f\colon(-\infty,+\infty) \rightarrow R$, na busca de explorar áreas, elaborar e descrever situações didáticas[3] de forma heurística, ou seja, pensando em resolver problemas de Cálculo utilizando a visualização amparado na Sequência Fedathi. Segundo, Alves (2011, p. 51) destaca a ideia de visualização:

> A visualização de uma série de exemplos auxilia os estudantes na absorção de conceitos que podem ser difíceis de compreender em suas formulações Matemáticas abstratas, especialmente nos primeiros dois anos do currículo universitário. A partir

[3]Segundo Freitas (2002, p. 67) fala que "**Situação didática**: é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição [...] o trabalho do aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes".
Segundo Souza (2010, p.75) fala que "**situação didática** refere-se ao conjunto das relações estabelecidas entre professor, aluno e saber, dentro de uma situação organizada para um fim específico de ensino".

> deste ponto de vista o uso do computador é prático e eficiente, e se o *software* conduz a uma interativa modificação dos dados, podemos facilmente mudar os parâmetros para um exemplo dado e realizar nova escolha.

O caminho para superação de alguns problemas no ensino do Cálculo seria a visualização proporcionada pelo computador, através do uso de *softwares*. Afinal, a visualização pode inegavelmente ajudar a superar alguns entraves para a aprendizagem. Ademais, a visualização é necessária à compreensão, mas não é suficiente para a evolução de um raciocínio conceitual posterior relacionado ao mesmo objeto matemático.

De certo modo um ato de visualização pode consistir de construções mentais de objetos ou processos que um indivíduo associa com objetos ou eventos percebidos por ele ou ela externamente. A visualização pode nos ajudar na exploração desse modo de ver o ensino de Cálculo, buscando aliar o rigor matemático com as novas tecnologias apresentada na atualidade.

A nossa problemática e que nos trouxe inquietações é como podemos contribuir para a melhoria do ensino e aprendizagem da Integral Imprópria em um curso de Cálculo II?

Buscamos encontrar algum trabalho no âmbito nacional que tivesse como objeto de estudo o ensino da Integral Imprópria com o uso do GeoGebra, nessa linha de pesquisa que estamos nos propondo a fazer, encontramos trabalhos de Alves (2013), Alves e Borges Neto (2013), Nasserala; Alves; Silva (2013) e Nasserala e Pinheiro (2014). Já de autores de outros países não encontramos nenhum trabalho nessa linha, claro que essa afirmação é muito vasta, mas nossa pesquisa foi baseada nas revistas, jornais e congressos internacionais que tenham o GeoGebra como objeto de estudo. Como, por exemplo, essas três revistas internacionais que publicam experiências com ensino e aprendizagem com o GeoGebra:

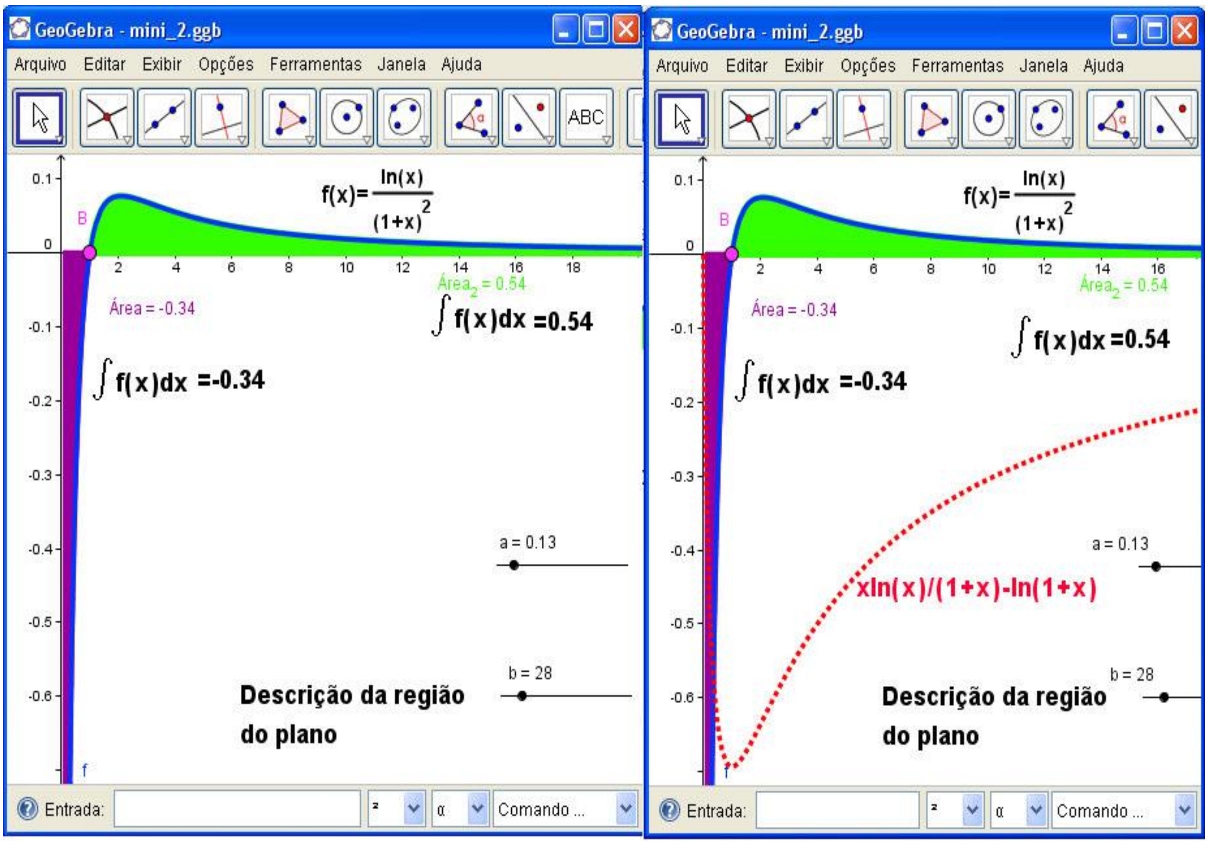
a) a primeira nos Estados Unidos, denominada *North American GeoGebra Journal – Official Publication of the Geogebra Institute of Maine*;
b) a segunda na Romênia , denominda *Index Copernicus International;*
c) e a terceira no Brasil, denominada Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo – Pontifícia Universidade Católica (PUC-SP).

No artigo desenvolvido por Alves (2013), o mesmo fez um resgate histórico da Integral até problematizar com as Integrais Impróprias ou Generalizadas, também fez uma teorização usando como referência vários autores, se embasando em definições e teoremas até propor uma situação-problema sobre integral, a qual é o cálculo da $\int \frac{\ln(x)dx}{(1+x)^2}$. Nessa integral, observamos vários problemas que não podem ser resolvidos por métodos ou técnicas convencionais, “forçando” o uso da Integral Imprópria. Porém mostra que só é possível essa visualização rápida e de fácil entendimento por utilizar o *software* GeoGebra.

Usando a ferramenta do GeoGebra, a transposição do algébrico para o geométrico e vice-versa, pode nos auxiliar na construção de situações didáticas e na fundamentação de conceitos matemáticos. Nessa perspectiva de visualização é que o presente trabalho se apoiará para buscar a exploração das Integrais Impróprias, claro que com uso de uma metodologia adequada e com situações didáticas. Podemos destacar que de acordo com Souza (2010, p. 75) diz que “situação didática refere-se ao conjunto das relações estabelecidas entre professor, aluno e saber, dentro de uma situação organizada para um fim específico de ensino”.

A seguir podemos observar uma figura do trabalho de Alves (2013), nesta podemos notar similaridade com o que queremos propor como visualização. Vejamos:

Figura 1 – Interpretação gráfico-geométrica com uso do GeoGebra



Fonte: Alves (2013, p.10)

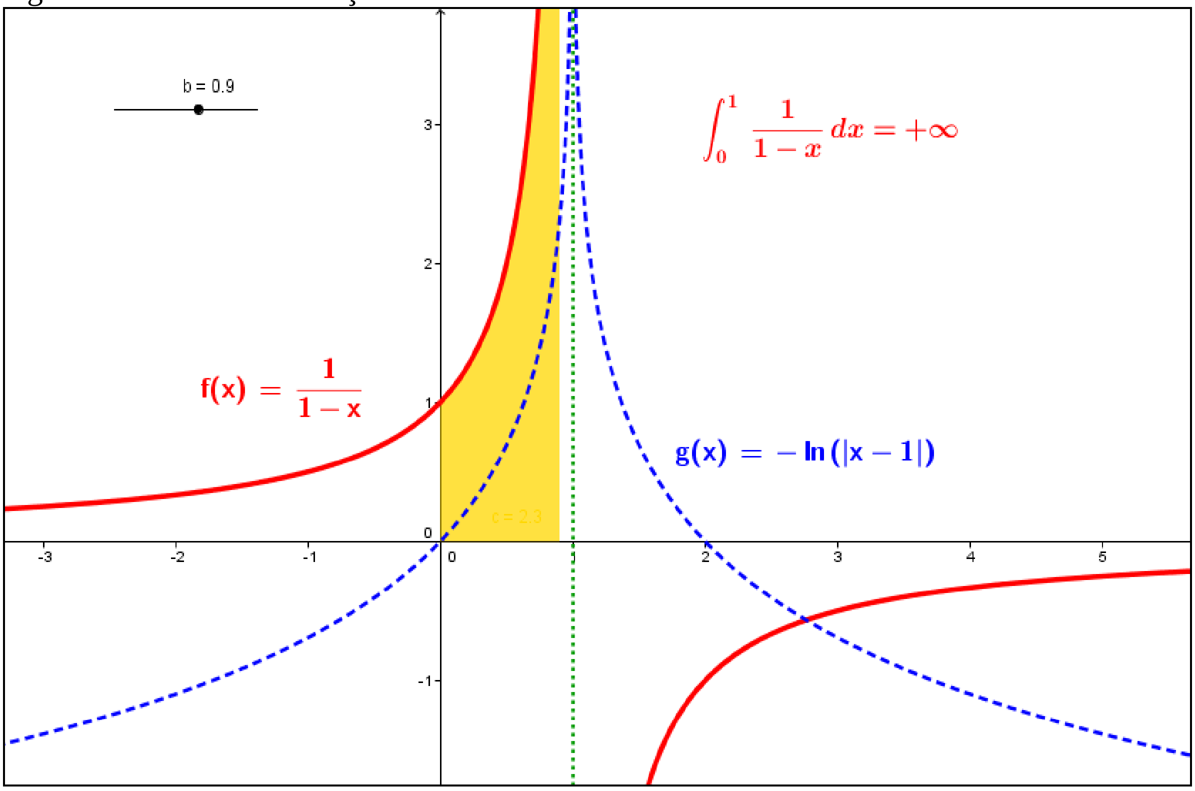
Neste gráfico podemos observar que se trata de uma discussão sobre a integral $\int \frac{\ln(x)dx}{(1+x)^2}$, ressaltamos aqui a importância da visualização e da exploração geométrica para garantir um melhor direcionamento na constituição da resolução algébrica do problema proposto.

A qualidade do gráfico e facilidade em extrair dados vem enriquecer a formulação de uma solução para integral proposta, vejam que $\int \frac{\ln(x)dx}{(1+x)^2}$ não é de simples resolução. O gráfico nos mostra também alguns intervalos acima e abaixo do eixo das abscissas que podem ser explorados em uma situação didática.

No trabalho de Nasserala, Alves e Silva (2013), podemos observar a presença de situações didáticas sobre Integrais Impróprias que trazem como ideia central a visualização por meio do *software* GeoGebra.

A seguir podemos apresentar uma situação didática que Nasserala, Alves e Silva (2013, p. 8) colocam em seu artigo, "Discutir a $\int_0^1 \frac{1}{1-x}\mathrm{dx}$ e decidir se a mesma converge ou diverge. Com o recurso do *software*, pode-se fazer o gráfico do problema proposto, facilitando a discussão algorítmica e a visualização". Essa Tomada de Posição, como a Sequência Fedathi sugere, vem seguida de um gráfico no GeoGebra.

Figura 2 – Gráfico da situação didática com uso do GeoGebra



Fonte: Nasserala, Alves e Silva (2013, p.8)

Esse tipo de situação didática é que queremos desenvolver neste trabalho, procurando descrever a elaboração dessas situações. Neste problema o autor busca facilitar a transposição do algébrico para o geométrico e vice-versa, algo que nem sempre é fácil sem um *software* de apoio.

Entendemos que situações didáticas bem elaboradas e disponíveis tanto para professores como para alunos de um curso de Cálculo, poderão contribuir para uma melhoria no ensino de Cálculo, nessa concepção foi que pensamos como objetivo geral de nossa pesquisa "descrever situações didáticas com auxílio do *software* GeoGebra, amparado na Sequência Fedathi sobre Integrais Impróprias com ênfase na visualização".

Nosso objetivo geral se complementa ancorado pelos seguintes objetivos específicos, a saber:

- Elaborar situações didáticas sobre o ensino de Integrais Impróprias com amparo na Sequência Fedathi;
- Visualizar situações didáticas sobre o ensino de Integrais Impróprias com o uso do *software* GeoGebra;
- Produzir vídeoaulas referentes ao Ensino e aprendizagem do Cálculo com ênfase em Integrais Impróprias usando o GeoGebra e um blog para divulgação.

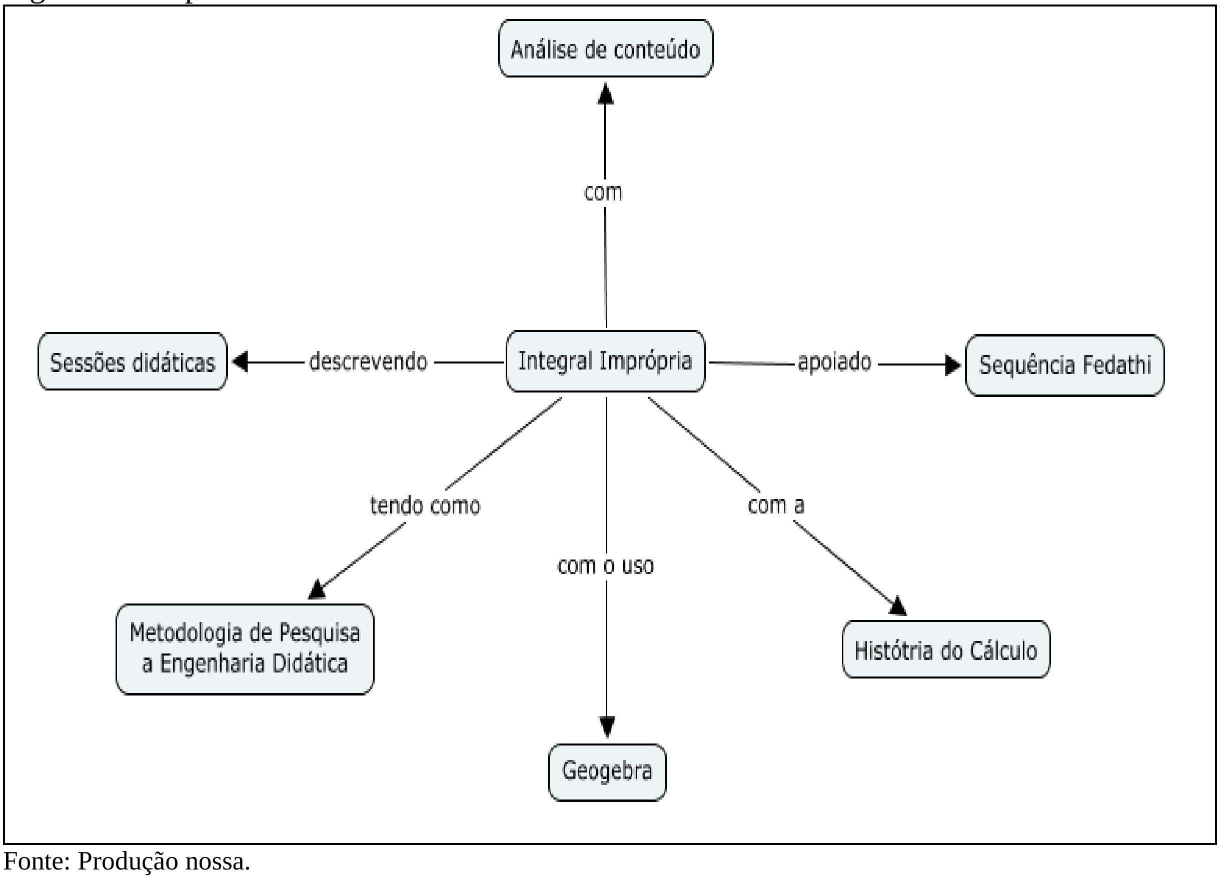
O motivo por termos escolhido a Integral Imprópria dentro de tantos assuntos do Cálculo foi que encontramos poucos trabalhos científicos que abordassem esse conteúdo, mas sabemos de sua importância para a Matemática e suas aplicações em Estatística, Física e Medicina.

Já o *software*, sabemos que têm vários, como: o Winplot, Maple, Cabri-Géomètre, entre outros. Porém, por ser livre, de fácil acesso e por dominarmos o uso do *software* GeoGebra foi que escolhemos este como nosso objeto de estudo. Já usamos o GeoGebra em nossas aulas e sabemos que tem grande aceitação tanto para estudantes quanto para professores.

Para atingir o objetivo proposto neste trabalho, temos a necessidade de um *software* conforme cita Souza (2010, p. 132) que possa desenvolver, a "[...] prova de teoremas, a precisão e visualização, as explorações e descobertas [...]". A visualização e a exploração são as duas principais vias que iremos desenvolver nesse trabalho, o *software* GeoGebra será de fundamental importância nessa busca por novas maneiras de ensinar Cálculo.

Buscaremos descrever situações didáticas sobre Integrais Impróprias com o uso do GeoGebra, tendo a Sequência Fedathi como metodologia de ensino. A seguir um mapa conceitual sobre como será o desenvolvimento estrutural do nosso trabalho.

Figura 3 – Mapa conceitual da estrutura de nosso trabalho



Fonte: Produção nossa.

O Capítulo 2 traz a fundamentação teórico-metodológica da pesquisa. Aqui abordamos a Sequência Fedathi, trazendo uma discussão acerca de suas principais características, também traremos a Engenharia Didática, segundo Artigue (1996; 2009) como metodologia de pesquisa complementando com a análise de conteúdo de Bardin (1977; 2009). Nesse capítulo, buscaremos entender cada uma dessas teorias para nossas reflexões ficarem embasadas e que possamos (re)construir um saber significativo. Sempre levando em consideração as etapas da Engenharia Didática.

O capítulo 3 traz a história do Cálculo, falaremos sobre o *software* GeoGebra, como também a análise de livro voltado ao conteúdo de Integrais Impróprias, finalizando com a descrição de situações didáticas sobre Integrais Impróprias com o uso do *software* GeoGebra.

O Capítulo 4 traz as considerações finais da pesquisa, no qual relatamos as principais contribuições, sugerimos pesquisas futuras e tecemos algumas reflexões acerca do ensino de Cálculo, e particularmente, em Integrais Impróprias ou Generalizadas.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICOS

Neste capítulo iremos fazer uma abordagem de alguns temas de grande relevância em nosso trabalho: A Sequência Fedathi, A Engenharia Didática e a Análise de Conteúdo na perspectiva de Bardin (1977, 2009). Nos quais nos embasamos principalmente em autores como: Bardin (1977; 2009), (Duval (1995; 1999), Borges Neto (1999), Machado (1999), Almouloud (2007), Alves (2011) e Sousa *et al* (2013).

Nosso estudo apresenta alguma semelhança com respeito aos trabalhos de Mateus (2007), Alves (2011) e Lopes (2013). Nesses trabalhos apresentam estudos sobre o ensino do Cálculo com algumas propostas metodológicas, assim sendo, o nosso trabalho também terá como foco o ensino de Cálculo com ênfase na Integral Imprópria.

Dessa forma, neste capítulo iremos fazer uma abordagem sobre a Sequência Fedathi na qual será desenvolvida no decorrer do nosso trabalho como metodologia de ensino, visando nosso produto final. Posteriormente, faremos uma abordagem sobre a Engenharia Didática na qual estaremos utilizando como metodologia de Pesquisa e complementando com a análise de conteúdo na perspectiva de Bardin (1977, 2009), na qual utilizaremos como apoio para análise de livros de Cálculo sobre o conteúdo proposto de Integrais Impróprias.

2.1 A Sequência Fedathi no ensino da Matemática

A Sequência Fedathi é uma sequência de ensino que nos propõem uma mudança de comportamento, tanto do professor quanto do aluno, segundo Sousa *et al* (2013, p.18) fala que “a Sequência Fedathi propõe que ao deparar um problema novo, o aluno deve reproduzir os passos que um matemático realiza quando se debruça sobre seus ensaios”. Isso mostra que o aluno tenta buscar um modelo para resolver o problema proposto, nessa busca pode haver análises e (re)construção do saber a ser adquirido. Não podemos deixar destacar que a Sequência Fedathi, foi criada por educadores do estado do Ceará, que pode ser considerada “uma proposta teórico-metodológica apresentada por um grupo de Educadores Matemáticos do Estado do Ceará”. (BORGES NETO, 1999; BORGES NETO *et at*, 2001)

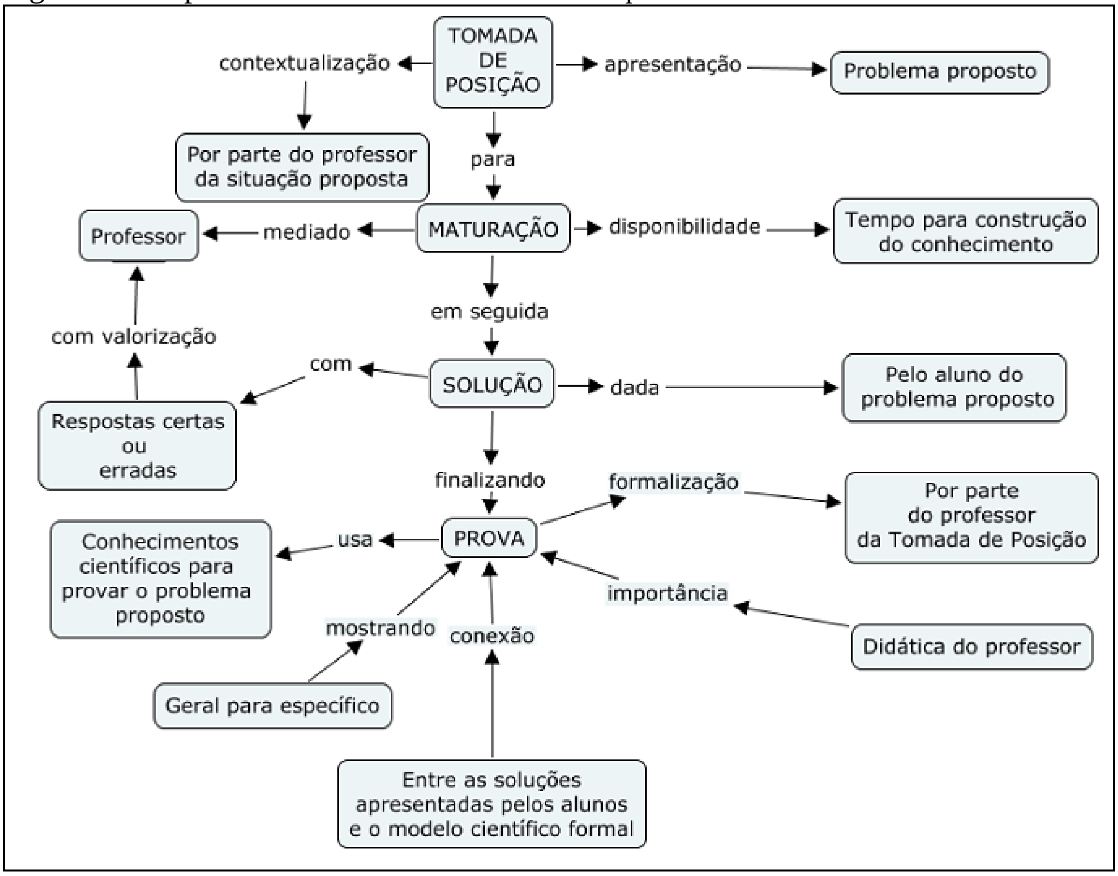
Para elaborarmos uma aula de Matemática segundo os pressupostos da Sequência Fedathi, devemos abordar quatro fases: *tomada de posição, maturação, solução* e *prova* que poderão aparecer uma única vez, ou várias vezes, dependendo do planejamento do professor. Essas fases visam tornar o ambiente da aula propício para que as ações discentes sejam direcionadas à construção do conhecimento sob a devida mediação do professor, buscando uma melhor postura possível perante os problemas que possam aparecer no decorrer da aula.

A postura do professor e do aluno no decorrer da aula é fundamental para se adquirir o conhecimento matemático esperado e propiciar êxito nas fases da Sequência Fedath. Também devemos considerar o *plateau*[4], ou seja, nível de conhecimento do aluno acerca do conteúdo a ser trabalhado, possibilitando uma melhor abordagem e planejamento da aula e um sucesso nas fases que seguem.

Em nossa concepção a Sequência Fedathi busca transformar o professor em um pesquisador do seu meio, usando as fases como suporte para chegar ao conhecimento desejado. Dessa forma, os erros são transformados em vitórias para o ensino e não como fracasso, pois temos a possibilidade de fazer a transformação através de uma nova postura a ser incorporada.

As fases da Sequência Fedathi estão abaixo especificadas na forma de um mapa conceitual com base em Sousa *et al* (2013):

Figura 4 – Mapa conceitual sobre as fases da Sequência Fedathi



Fonte: Produção nossa.

De acordo com o mapa, o papel do professor nessa primeira fase (**Tomada de Posição**) é estimular a participação e o envolvimento mútuo dos alunos, observando o

[4] *Plateau*, de acordo com Borges Neto (criador da Sequência Fedathi) é o nível cognitivo do sujeito em relação ao domínio do conteúdo.

trabalho individual e fomentando o trabalho interativo, para que ocorra um ambiente de colaboração e cooperação entre os membros. Além de apresentar um problema proposto, sabemos que isso será o motivador da aula, o professor pode fazer isso de várias formas, como: jogos, problema matemático, utilizando um *software* matemático entre outros.

Na **Maturação**, os alunos já tomaram posse do problema em questão, então ocorre a compreensão e identificação das variáveis envolvidas no problema. Nessa fase, o professor deve estar em alerta para perceber quando e como mediar às informações estimulando os alunos a levantarem hipóteses que solucionem o problema em questão. Segundo Sousa *et al* (2013, p.23) diz que:

> Na segunda etapa, destacamos que um dos momentos de grande relevância na formulação do raciocínio matemático são os **questionamentos,** pois, além de promoverem o desenvolvimento intelectual dos alunos, proporcionam ao professor o *feedback* necessário para certificar se estes estão acompanhando-o no desenvolvimento dos conteúdos ensinados. Os questionamentos podem surgir dos alunos ou ser propostos pelo professor, de formas variadas. Em sua maioria, surgem por parte dos alunos no momento em que se debruçam sobre os dados do problema, originando-se a partir daí as reflexões, hipóteses e formulações, na busca de caminhos que conduzam à solução do problema. Os questionamentos também podem partir do professor através de perguntas estimuladoras, esclarecedoras e orientadoras.

Na segunda fase é o momento que acontece os questionamentos em relação a situação-problema proposta e, principalmente, dúvidas, questionamentos, hipóteses e insights. O tempo necessário a ser dado é de acordo com o planejamento do professor, devemos levar em conta o tempo de construção do conhecimento e a postura usada no decorrer da aula.

O trabalho que o aluno desenvolve na fase da maturação é imprescindível para o desenvolvimento de seu raciocínio e da aprendizagem final. Sem esta colaboração e participação, eles absorverão apenas informações temporárias e uma aprendizagem superficial.

Na fase da **Solução**, os alunos deverão organizar e apresentar formas de soluções que possam resolver o problema proposto, ou seja, representação e organização de esquemas ou modelos que visem à solução do problema proposto inicialmente. Segundo Sousa *et at* (2013, p.29) diz que "na feitura da solução, é imprescindível que o professor analise junto aos alunos as diferentes formas de representação por eles apresentadas, para, com apoio nelas, buscar a constituição do novo conceito matemático implicado".

Nessa fase o professor mediador deve valorizar as respostas dos alunos, mesmo estando erradas, pois desta forma disponibiliza e propicia a construção do conhecimento matemático proposto.

A última fase é a **Prova**, nesse momento ocorre a apresentação e formalização do modelo matemático a ser ensinado, ou seja, em Fedathi esta etapa caracteriza a finalização do processo. Em Sousa *et at* (2013, p.33) fala que:

> Nessa fase, a didática do professor será determinante para aquisição do conhecimento por parte dos alunos, pois, além de ter que manter a atenção e motivação do grupo, o professor precisará fazer uma conexão entre os modelos apresentados e o modelo matemático científico a ser apreendido; deverá introduzir o novo saber mediante sua notação simbólica em linguagem matemática, juntamente com as novas regras inerentes a esse conhecimento.

Na **Prova** o professor usa conhecimentos científicos para resolver o problema proposto na **Tomada de Posição**, fazendo conexão entre as soluções apresentadas pelos alunos e formalização do modelo matemático adotado. Este momento é de extrema importância para a aquisição e consolidação do saber em questão.

Podemos destacar alguns aspectos que consideramos fundamentais na aplicação da Sequência Fedathi, pois entendemos para que ocorra o sucesso do ensino, são necessários um bom planejamento e a execução de alguns aspectos, abaixo uma tabela usando como base Sousa *et at* (2013):

Tabela 1 – Tabela com os aspectos fundamentais na aplicação da Sequência Fedathi

PROFESSOR/MEDIADOR	ALUNO
• **Sequência das fases;**	• Atividade;
• **Planejamento;**	• Participação na aula;
• **Verificação do *plateau*;**	• Interação com colegas e o professor;
• **Conexão com o aluno;**	• Questionamentos;
• **Experimentação;**	• Experimentação;
• **Generalização;**	• (Re) construção do saber.
• **Avaliação.**	

Fonte: Produção nossa.

Podemos destacar que a essência da Sequência Fedathi, está em o professor tornar o saber algo que pode ser construído e reconstruído sem perda de generalidade para o aluno e o conteúdo trabalhado. Através da exploração, compreensão e investigação de problemas matemáticos. Podendo o aluno vivenciar uma atmosfera de (re)descoberta a todo o momento no contexto matemático, através de experimentações e constatações feita durante todo o processo da Sequência.

Escolhemos a Sequência Fedathi, pois encontramos inúmeros trabalhos científicos que usaram esta sequência de ensino como referencial, além de fazermos parte do grupo Fedathi da Universidade Federal do Ceará no Laboratório de Multimeios em Fortaleza. Desse universo de trabalhos que podemos encontrar, podemos mencionar: Campos (1998), Souza (2001), Barreto (2002), Santana (2006), Santos (2007), Rocha (2008), Jucá (2011), Alves (2011), entre outros.

No caso de nosso trabalho iremos utilizar a Sequência Fedathi na situação didática que preparamos como produto de nosso trabalho, bem como já usamos esta sequência de ensino em nossa prática em sala de aula. Em relação a metodologia de pesquisa usamos a Engenharia Didática que abordaremos a seguir.

2.2 A Engenharia Didática como metodologia de pesquisa

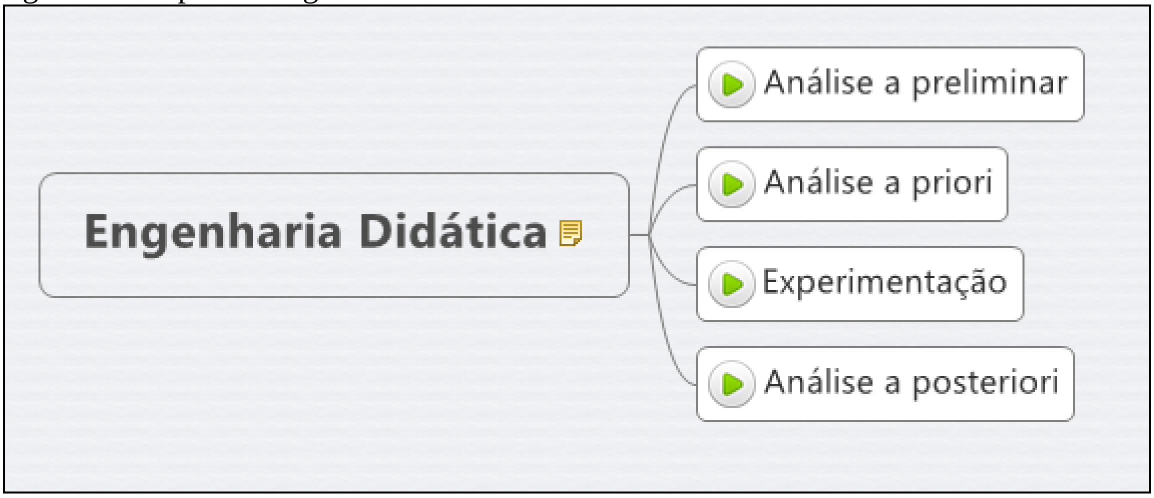
É uma metodologia de pesquisa que defende a noção de que o planejamento das atividades didáticas sejam tão detalhadas quanto a elaboração de um projeto de construção concebido por um engenheiro competente e eficaz. A Engenharia Didática que foi concebida na década de 80 e tem como sua maior representação a francesa Artigue (1996), consolidou-se por meio de seu crescente emprego em grande número de projetos de pesquisa que originaram artigos, dissertações e teses em diferentes espaços de estudo. Desse universo, para não limitarmos a trabalhos desenvolvidos na França, mencionaremos, como por exemplo, os trabalhos de Baldini (2004), Campos (2006), Rocha (2008), Santos (2010), Alves (2011), entre outros.

A Engenharia Didática pode ser entendida não somente como uma metodologia de pesquisa específica do campo da didática da Matemática, mas como referencial para a elaboração de Sequências Didáticas. Para Artigue, citada por Machado (1999, p. 199), é "[...] um esquema experimental baseado sobre realizações didáticas em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de sequências de ensino".

A Engenharia didática está dividida em quatro etapas: análises prévias ou preliminares, análise a *priori*, experimentação e análise a *posteriori*. Conforme a figura abaixo.

Para Artigue, citada por Almouloud (2007, p. 173), diz que "[...] cada uma dessas fases é retomada e aprofundada ao longo do trabalho de pesquisa, em função das necessidades emergentes". A seguir as fases ou etapas da Engenharia Didática.

Figura 5 – Etapas da Engenharia Didática



Fonte: Produção nossa.

A Engenharia Didática nos apresenta como relevante metodologia de pesquisa, por interligar o aspecto científico com a prática pedagógica. Para Souza (2010, p.69) diz que:

> A engenharia didática, vista como metodologia de pesquisa, se caracteriza em primeiro lugar por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e análise de sequências de ensino.

Vamos então descrever as etapas da Engenharia Didática, a saber:

- **Análise prévia ou preliminar**: é o momento inicial que fundamenta toda a elaboração da proposta de trabalho, sendo esta etapa decisiva para possíveis erros que por ventura possam aparecer no decorrer do percurso. Nesse momento é necessário um estudo da parte histórica do conteúdo a ser abordado, para em seguida estudar como os conceitos são abordados no aspecto do ensino e sua inserção nos currículos. Nesta etapa não podemos negligenciar: o estudo da organização Matemática e a análise da organização didática do objeto matemático escolhido como investigado, que pode comportar as seguintes vertentes importantes.

  - estudar a história do saber em estudo e suas manifestações antigas ou contemporâneas;

- analisar a estrutura Matemática do conceito estudado;
- analisar o ensino usual e seus efeitos;
- considerar os objetivos específicos da pesquisa;
- analisar livros didáticos ou conteúdo propriamente dito;

- levantar referências bibliográficas sobre os fatores que no processo de ensino do objeto em questão (artigos, livros, revistas, teses, dissertações, monografias, entre outras.).

Podemos observar que nesta fase é o momento que estamos buscando fundamentação teórico-metodológica de nosso trabalho, bem como a busca pela apropriação do conteúdo proposto para o estudo (Integral Imprópria). Também ressaltamos a importância do domínio do GeoGebra, todo esse aprofundamento e preparação tem como foco conseguirmos atingir o objetivo que é a produção de situações didáticas.

- **Análise a *priori***: é a etapa que efetivamente são arquitetados as sequências didáticas e o escopo experimental com todo o seu detalhamento necessário. Delimita certo número de variáveis pertinentes, as quais se podem chamar de variáveis de comando. Essas variáveis serão analisadas no transcorrer da pesquisa. Esta etapa carrega em si uma forte componente relativa à previsão; nela, o professor deverá antecipar as atitudes que os alunos terão durante o desenvolvimento da atividade e preparar-se para mediar esses comportamentos, de modo que resultem no desenvolvimento da aprendizagem esperada para aquela sessão didática. Podemos sintetizar, os elementos a serem observados em:
  - ambiente pedagógico;
  - material didático disponível;
  - estratégias e metodologias a serem utilizadas;
  - distribuição do tempo didático;
  - método da transposição didática;
  - situação problema proposta; e finalizando;
  - no que é preciso para resolver o problema.

Feito isso podemos passar para a próxima etapa da Engenharia Didática. É importante salientar que em nosso trabalho iremos apenas desenvolver as duas primeiras etapas da Engenharia Didática, não chegamos a fazer a experimentação de nossas situações didáticas. Pensamos que as duas etapas seguintes podem ser trabalhadas em projetos futuros, como uma tese de doutorado.

- **Experimentação**: é a aplicação efetiva da sequência previamente elaborada. Trata-se da aula propriamente dita. A postura adotada nesse momento é de extrema importância para a efetivação desta etapa, o uso da Sequência Fedathi, a qual como vimos anteriormente valoriza a postura do professor e do aluno durante uma sessão didática[5].

Devemos começar pelo contrato didático que segundo Souza (2010, p.66) diz que:

> Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor [...] Esse contrato é o conjunto de regras que determinam uma pequena parte, mas, sobretudo implicitamente, o que cada parceiro da relação didática deverá gerir e aquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro.

Nesse momento o professor necessita explicitar os objetivos e todas as condições em que os trabalhos vão se desenvolver quais as atitudes e comportamentos que ele espera dos alunos, bem como os procedimentos que estes podem esperar dele. Posteriormente aplicar os instrumentos elaborados, dando início às observações de todos os aspectos do experimento. São necessárias a descrição e documentação dos fenômenos percebidos, através de relatórios, entrevistas, gravações, transcrições dos registros de áudio e vídeo.

- **Análise a *posteriori***: é quando se aceitam ou rejeitam as conjecturas levantadas no início da Engenharia Didática, podemos dizer que é exatamente nesse momento que reside o grande diferencial da metodologia. Isto porque sua validação é interna, significando que, para a comprovação ou negação das hipóteses, não se recorre a grupos de controle, nem a nenhuma outra variável externa à Engenharia Didática.

Segundo Souza (2010, p.71) diz que:

> O importante é que essa análise atinja a realidade da produção dos alunos, quando possível, desvelando seus procedimentos de raciocínio. A análise a *posteriori* tende a enriquecer, complementar os dados obtidos por meio de outras técnicas, questionários, entrevistas, gravações, diálogos, entre outras.

Podemos dizer nesse momento que ocorre a comparação entre a análise *a priori* com o que encontramos na análise *a posteriori*, tendo desta forma uma validação ou não de cada um dos fatos que estavam sob investigação.

2.3 Entendendo Análise de Conteúdo na perspectiva de Bardin

Para Bardin, citada por Ramos e Salvi (2009, p. 1) se refere à Análise de Conteúdo como um "[...] conjunto de instrumentos metodológicos que se aperfeiçoa

---

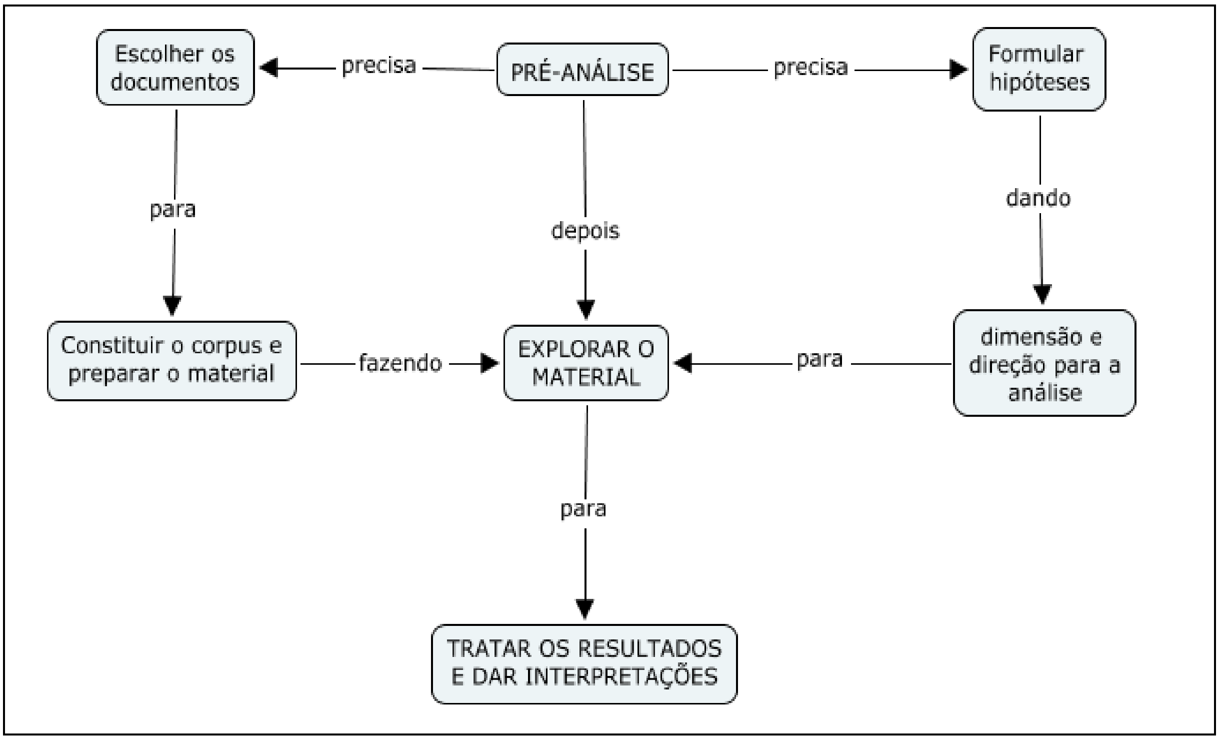
[5] Entendemos como **sessão didática** o plano de aula estruturado e fundamentado.

constantemente e que se aplica a discursos diversificados”. Em nosso trabalho a análise de conteúdo vem complementar nossa pesquisa a respeito de nosso objeto de estudo.

Para Bardin (1977, p.31), a Análise de Conteúdo é não só um instrumento, mas um “leque de apetrechos; ou, com maior rigor, um único instrumento, mas marcado por uma grande disparidade de formas e adaptável a um campo de aplicação muito vasto: as comunicações”. Podendo seguir vários caminhos, inclusive dando margem a pesquisas de natureza quantitativa ou qualitativa.

A análise de conteúdo consiste em tratar a informação a partir de um roteiro (ou fases) específico, iniciando com (a) pré-análise, na qual se escolhe os documentos, se formula hipóteses e objetivos para a pesquisa, (b) na exploração do material, na qual se aplicam as técnicas específicas segundo os objetivos e (c) no tratamento dos resultados e interpretações. Cada fase do roteiro segue regras bastante específicas. A seguir um mapa conceitual das fases da análise de conteúdo, com base em Bardin (1977, p.102).

Figura 6 – Mapa conceitual das fases (ou roteiro) da Análise de Conteúdo na perspectiva de Bardin



Fonte: Produção nossa.

O mapa acima mostra as fases da Análise de Conteúdo na perspectiva de Bardin, começando na pré-análise, nesta encontramos também a fase de formulação de hipóteses e objetivos. Esta fase, conforme Bardin (1977, p. 99) se dar “[...] em função das hipóteses, caso tenham sido determinadas, isto é, quando considerados os textos como uma manifestação de índices que irão tornar a análise expressiva, estes devem ser escolhidos e organizados em indicadores”. Em nosso estudo, faremos uma análise do conteúdo sobre Integral Imprópria na perspectiva da visualização das situações-problemas evidenciadas nos livros de Guidorizzi (1998) e Stewart (2011), ambos serão nossos referenciais para esta análise.

Nesta fase acontece a organização do material a ser investigado. Constitui na leitura flutuante dos documentos colhidos nas entrevistas e nas observações livres de cenários, sob a orientação das regras de exaustividade, representatividade, homogeneidade e pertinência, para a constituição do *corpus*, que é composto por todos os documentos selecionados para análise durante o período de tempo estabelecido para a coleta de informações. Em nosso caso, trabalharemos com recortes de livros, visando situações-problemas, definições, teoremas e situações diversas que podemos encontrar visualizações no ensino e aprendizagem do Cálculo. Vejamos então, a descrição destas regras:

- **Regra de exaustividade**: refere-se à deferência de todos os componentes constitutivos do *corpus*. O ato de exaurir significa não deixar fora da pesquisa qualquer um de seus elementos, sejam quais forem às razões;
- **Regra de representatividade**: na conformidade dessa regra, o procedimento amostral da investigação é representativo ao inferir com rigor o universo de investigação. No caso da amostra ser uma parte representativa do universo, os resultados obtidos para a amostra será generalizados ao todo, compreendendo que o todo tem como inferência a realidade empírica pesquisada;
- **Regra de homogeneidade**: essa regulamentação prescreve que a documentação esteja sujeita aos critérios definidos de sem fugacidade. Considerando que as regras se inter-relacionam, a homogeneidade pretendida decorre do direcionamento da pesquisa para o cumprimento dos critérios de seleção da amostra.
- **Regra de pertinência**: para essa fase, a fonte documental corresponde adequadamente ao objetivo suscitado pela análise, ou seja, esteja concernente com o que se propõem o estudo, desvelar imagens empíricas da realidade da comunicação.

Concluída a pré-análise, passamos para a segunda fase: a exploração do material. Segundo Bardin (1977, p. 101) deve-se, aqui, “[...] administrar sistematicamente as decisões tomadas na etapa anterior”. Dessa forma, procuramos estabelecer uma organização a respeito daquilo que seria levado em consideração: no contexto histórico; nos conhecimentos necessários para a compreensão das aplicações no que diz respeito a Integral Imprópria e *software* GeoGebra.

Na terceira fase de nossa investigação realizamos o tratamento dos resultados obtidos e interpretação. Nossos resultados referem-se à análise de situações problemas envolvendo visualização e tratamento heurístico. Ainda nesta etapa, Bardin (1977, p. 101) afirma que "o analista poderá ainda realizar inferências caso tenha à disposição resultados significativos".

Nessa fase, os resultados recebem um tratamento analítico, para que se tornem significantes e válidos conforme Bardin (1977). Em termos operacionais, as informações são organizadas em forma de categorias de análise empíricas, abstraídas de meios de comunicação e enriquecidas, muitas vezes, com observações livres dos cenários.

Segundo Bardin (2009, p.123) diz que "nem todo o material de análise é susceptível de dar lugar a uma amostragem, e, nesse caso, mais vale abstermo-nos e reduzir o próprio universo se este for demasiado importante". Em nosso entendemos que nosso objeto de estudo é demasiado importante e por este motivo escolhemos apenas dois livros de Cálculo para a Análise de Conteúdo, claro que tanto Guidorizzi (1998) como Stewart (2011) são autores consagrados no meio acadêmico e de grande relevância para nossa pesquisa.

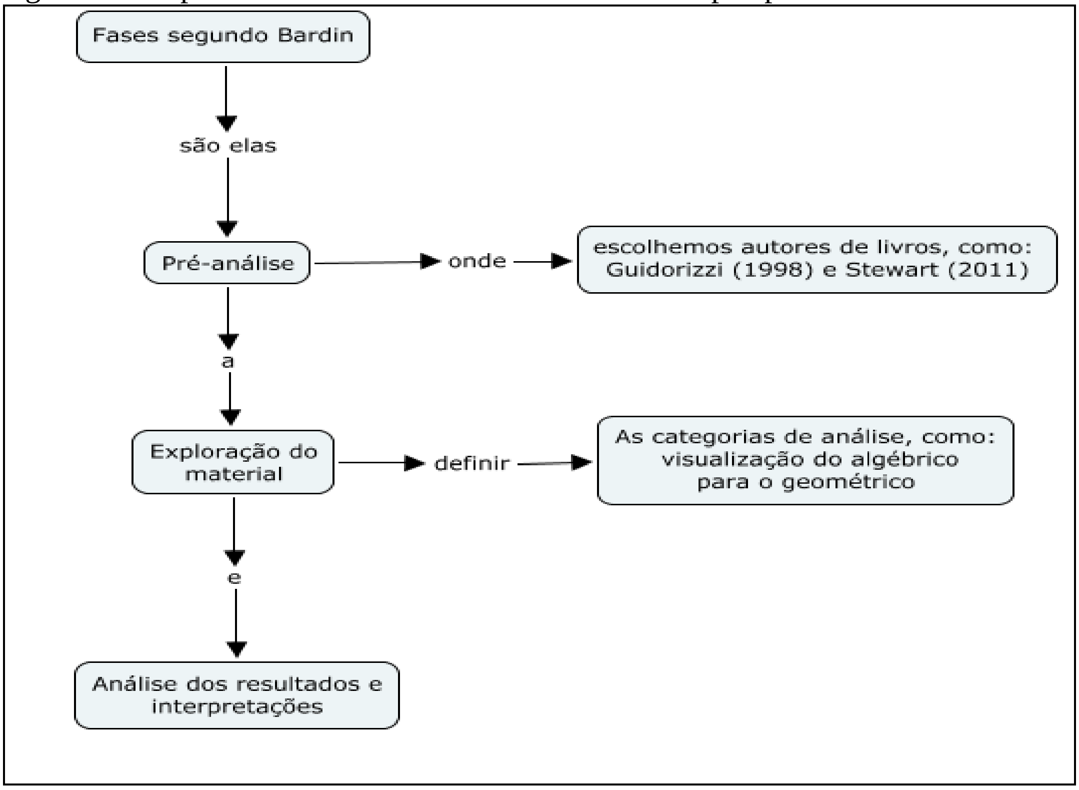
2.4 Reflexões acerca da Engenharia Didática e a Análise de Conteúdo

Como nossa metodologia de pesquisa é a Engenharia Didática, desta forma devemos observar que a análise preliminar nos coloca que devemos aprofundar a fundamentação teórica e nosso objeto de estudo. Claro, que para iniciarmos nosso trabalho era fundamental nos apropriarmos das teorias que serão utilizadas, como por exemplo: Sequência Fedathi, Engenharia Didática e a Análise de Conteúdo por Bardin. Então, seguindo as fases da Engenharia Didática nos apropriamos das teorias necessárias, porém a análise de conteúdo entra na apropriação do objeto a ser trabalho que é a Integral Imprópria. Antes de começarmos a descrever situações didáticas, faremos uma análise do conteúdo de Integral imprópria, tendo dois autores como fonte: Guidorizzi (1998) e Stewart (2011).

A relação entre a análise de conteúdo que iremos fazer e a Engenharia Didática, está nos fundamentos da análise preliminar, pois nesta fazer segundo Souza (2010, p. 70) "[...] as análises preliminares são feitas principalmente para embasar a concepção da engenharia, porém elas são retomadas e aprofundadas durante todo o transcorrer do trabalho". Isso é exatamente o que queremos em nosso trabalho, para isso vamos retomar e fazer uma reflexão de como iremos usar a Análise de Conteúdo de Bardin em nosso trabalho.

Observamos que esta análise que estamos propondo se encontra na pesquisa na parte de análise preliminar, porém ela tem fases definidas, primeiro a pré-análise onde escolhemos os autores a analisados, o conteúdo no nosso caso é Integral Imprópria. Depois passamos para a exploração do material, onde definimos as categorias a serem analisadas e por último a análise do resultado e interpretações, vejamos no quadro a seguir como estamos pensando em discorrer esta análise.

Figura 7 – Mapa conceitual da Análise de Conteúdo na perspectiva de Bardin



Fonte: Produção nossa.

Nesta figura deixamos evidente que iremos explorar Guidorizzi (1998) e Stewart (2011), além de estabelecer algumas categorias de análise, como nosso foco principal é visualização, tentaremos verificar como esses autores fazem a transposição do algébrico para o geométrico.

3. A PESQUISA

Neste capítulo descrevemos o modelo organizacional e estruturante da nossa pesquisa. Assim, concluiremos que, tanto as etapas descritas nos capítulos anteriores como os que seguem se enquadram em algumas etapas previstas na Engenharia Didática. E acrescentamos e detalhamos as informações pertinentes as etapas que deverão ser objeto de análise a seguir.

3.1 Desenvolvimento e organização

Nossa pesquisa busca elaborar situações didáticas sobre Integrais Impróprias, usando o *software* GeoGebra como ferramenta e a sequência Fedathi como metodologia de ensino. Segundo Artigue (1996, p. 243, tradução nossa) relata que

> A noção de Engenharia Didática emergiu em Didática da Matemática no início dos anos 1980. E trata-se de classificar por este termo uma forma de trabalho didático; comparável ao do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apóia sobre um conjunto de conhecimentos científicos do seu domínio, aceita se submeter a um controle do tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar sobre objetos mais complexos do que os objetos depurados pela ciência e, assim se debruça praticamente, com todos os meios pelos quais ele dispõe mesmo os problemas ainda não considerados pela ciência.

Nosso estudo se caracteriza por esquema experimental de situações didáticas que possam contribuir para o ensino e a aprendizagem das Integrais Impróprias no meio acadêmico. Nos capítulos anteriores nos apropriamos de algumas teorias que consideramos importante para o desenvolvimento de nosso trabalho.

Já sabemos que a Engenharia Didática se divide em quatro fases distintas, são elas: análises preliminares, análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori*. Na fase 1 (Análise preliminar) , Artigue (1996, p. 249, tradução nossa), explica que “em uma pesquisa de Engenharia Didática a fase de concepção se efetua ao se apoiar sobre um quadro teórico didático geral e sobre os conhecimentos didáticos adquiridos em certo domínio de estudo”. Nesse caso em nosso trabalho nos apoiamos na Sequência Fedathi e na análise de conteúdo na perspectiva de Bardin, também vislumbramos a necessidade de ter um conhecimento sobre o *software* GeoGebra e das Integrais Impróprias.

Na fase 2 (Análise *a priori*), Artigue (1996, p. 255, tradução nossa) orienta que “o pesquisador toma a decisão de agir sobre um certo número de variáveis do sistema ou variáveis de comando”. Em nosso trabalho resolvemos fazer análise de conteúdo sobre Integral Imprópria dos autores: Guidorizzi (1998) e Stewart (2011). Também elaboraremos e descreveremos nossas situações didáticas sobre Integrais Impróprias com apoio na sequência Fedathi, utilizando o GeoGebra como ferramenta.

Na fase 3 (Experimentação) iremos estruturar um blog com objetivo de divulgação científica de trabalhos acadêmicos e vídeoaulas sobre Integrais Impróprias de nossa autoria e de outros autores, para que possamos ajudar nossos professores universitários, principalmente (UFAC, IFAC, UNINORTE, FAMETA entre outras) e acadêmicos das disciplinas de Cálculo. Nosso ambiente de experimentação será o virtual como expomos aqui, porém não faremos nesse trabalho a *validação*, segundo Artigue (1996) de nosso experimento, entendemos que podemos deixar esta fase para trabalhos futuros. Nosso produto educacional será vídeoaulas e um *blog* para divulgação, ensino e troca de experiências.

Em nosso trabalho levamos em consideração o que Moreira e Nardi (2009, p.4) acentuam sobre a natureza de um mestrado profissional, vejamos:

> O trabalho de conclusão e o produto educacional: ainda que se mantenha a nomenclatura de dissertação, a natureza do trabalho de conclusão do mestrado profissional é distinta da do acadêmico; trata-se do relato de uma experiência de implementação de estratégias ou produtos de natureza educacional, visando à melhoria do ensino em uma área específica de Ciências ou Matemática.

Nossa preocupação é que entendamos que nosso mestrado é profissional e nossa maior busca é por desenvolver um produto educacional que permita a identificação de roteiros diferenciados no ensino das Integrais Impróprias em nossas universidades.

3.2 O *software* GeoGebra

Para iniciarmos nosso trabalho e fazendo uso da Engenharia Didática (análise preliminar), fomos buscar embasamentos em alguns assuntos que são necessários para um bom desenvolvimento da pesquisa. Como nosso *software* escolhido foi o GeoGebra, fomos entender suas funções e nos apropriar de conhecimentos necessários.

Segundo Almeida (2000, p. 10) diz que:

> “Um programa muito interessante de Matemática Dinâmica é o GeoGebra, este *software* livre é uma ferramenta didática e interativa para o ensino-aprendizagem da matemática e reúne recursos de geometria, cálculo e álgebra. Tal como os demais programas de geometria dinâmica, contém um certo domínio do saber matemático, possibilita a expansão de sua base de conhecimento por meio de macro construções e permite a manipulação de objetos que estão na tela. Contudo, a diferença é que ele oferece diferentes representações (numérica, algébrica e geométrica) para um mesmo objeto matemático.”

Pensando nisso fizemos um estudo sobre o GeoGebra e estudamos a história das Integrais Impróprias, como também um pouco de sua teoria, para depois descrever as situações didáticas usando a Sequência Fedathi como metodologia de ensino.

O GeoGebra é um *software* de Matemática dinâmica que combina Geometria, Álgebra e Cálculo com o mesmo grau de importância, possibilitando o usuário reconhecer funções através de gráficos, desta forma facilita a compreensão de expressões matemáticas complexas. Foi desenvolvido por Markus Hohenwarter na Universidade de Salzburg e uma equipe internacional de programadores, com a finalidade de aprender e ensinar Matemática nos Ensinos Fundamental, Médio e Superior.

É um *software* livre, de fácil instalação, possuindo linguagem clara, comando simples e está disponível em vários idiomas. O GeoGebra pode ser copiado e utilizado para fins não comerciais. Foi desenvolvido em Java; por esse motivo pode ser instalado nas plataformas Windows, Linux[6], Macintosh entre outras.

O *software* GeoGebra pode ser acessado e instalado pelo site: www.geogebra.org, onde podemos encontrar um tutorial contendo instruções de uso e exemplos do *software*. Nele podemos fazer construções geométricas (pontos, vetores, segmentos, seções cônicas, linhas e funções em geral), permitindo a manipulação dinâmica com a alteração de suas coordenadas. Por ser um *software* criado para ensinar Matemática tem sido usados nas salas de aula, laboratórios de informática, palestras, conferências entre outros.

O GeoGebra pode também ser encontrado em vários trabalhos (artigos, revistas, dissertações, teses, entre outros), destacamos dois que consideramos relevantes para nosso estudo: Alves (2011) e Souza (2010).

3.2.1 Algumas noções importantes sobre o software GeoGebra

A nossa principal preocupação é preparar o leitor com algumas noções básicas que possam ajudar na utilização do GeoGebra, mas sabemos que a Informática na Educação é fundamental para desenvolver habilidades e competências nos estudantes de hoje sem perder relações existentes na escola, vejamos a concepção de Almeida (2000, p. 19):

> Informática na Educação é um novo domínio da ciência que em seu próprio conceito traz embutida a ideia de pluralidade, de inter-relação e de intercâmbio crítico entre saberes e ideias desenvolvidas por diferentes pensadores. Por ser uma concepção que ainda está em fase de desenvolver seus argumentos, quanto mais nos valermos de teorias fundamentadas em visões de homem e de mundo coerentes, melhor será

---

[6] No site www.geogebra.org/cms/pt_BR contém instruções de instalação para sistemas operacionais diferentes do Windows como, por exemplo, o linux.

> para observamos e analisarmos diferentes fatos, eventos e fenômenos, com o objetivo de estabelecer relações entre eles.

Não podemos esquecer que o *software* interage com o meio que é utilizado, muitas vezes pode nos trazer certo receio do uso dessas tecnologias por ainda está em fase de desenvolver argumentos, mas sabemos também que o mundo está cada vez mais dinâmico, sendo necessário que possamos estabelecer essa relação e inter-relação com essa Informática na Educação.

O GeoGebra nos possibilita escrever fórmulas e ao mesmo tempo podemos ver a sua representação geométrica, dessa forma podemos alterar valores e verificar o comportamento gráfico. Isso pode possibilitar uma exploração de conteúdos matemáticos algébrico-geométrico, além de "suavizar" algumas demonstrações de cunho algébrico.

Segundo Gravina (1996, p. 13), "a geometria dinâmica proporciona uma nova abordagem ao aprendizado geométrico, onde conjecturas são feitas a partir da experimentação e criação de objetos geométricos". Desta forma, podemos introduzir o conceito matemático dos objetos a partir da resposta gráfica oferecida pelo *software* de geometria dinâmica ou Matemática dinâmica, tendo em vista que o GeoGebra pode oferecer outros recursos além de gráficos.

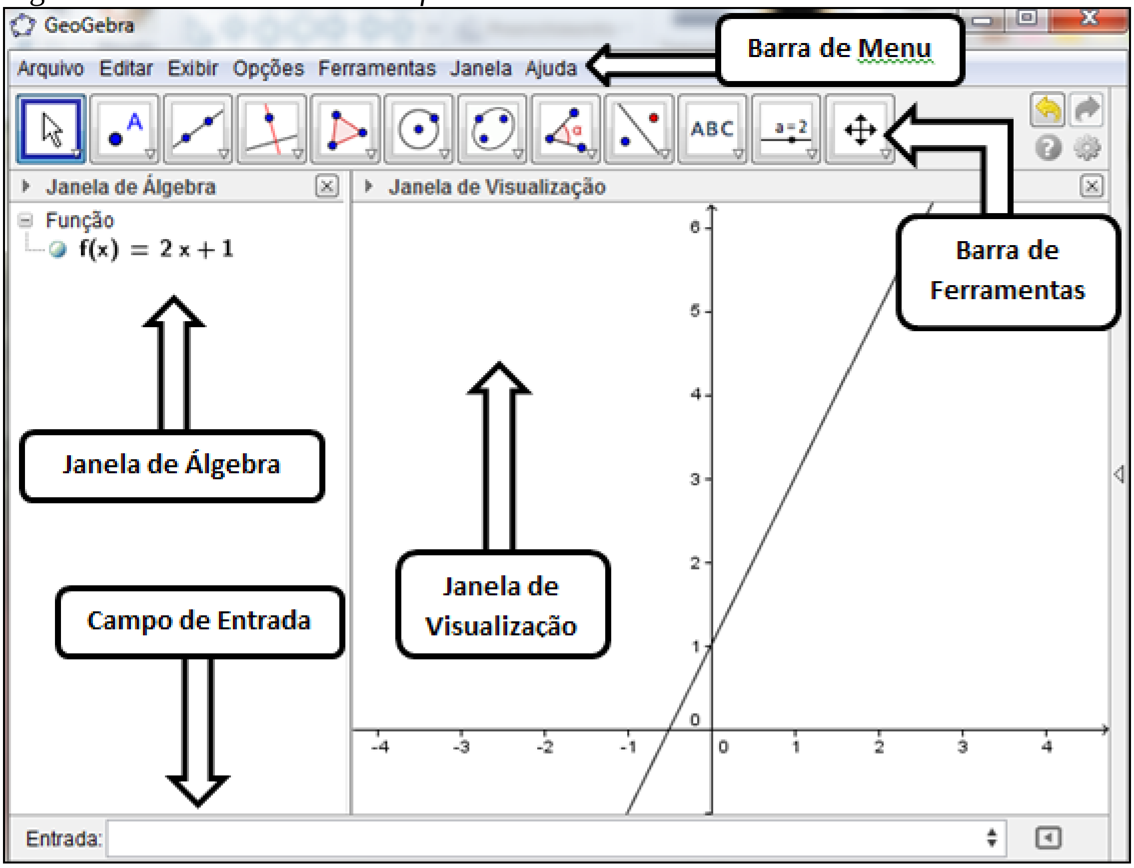
O GeoGebra que iremos explorar aqui é a versão 4.2, mas sabemos que este *software* está em constante atualização. Dessa forma, vamos começar pela Interface inicial para termos a noção inicial e fazermos as observações convenientes.

Segundo Souza (2010, p.149), fala que "[...] a Matemática, as tecnologias digitais e seus recursos atuais podem fazer um grande diferencial no ensino e na aprendizagem desta disciplina, propiciando experimentações, visualizações e demonstrações [...]". Isso mostra como é importante o uso de um *software* no ensino da Matemática, o desenvolvimento de uma aula com esse recurso pode potencializar a aprendizagem de nossos alunos.

Observando a Figura 8, podemos fazer os seguintes comentários e observações a seguir:

a) Barra de Menu ou Menu de Edição – este nos permite editar a área de trabalho, arquivos e algumas funções. Neste local podemos encontrar alguns comandos que muitas vezes encontramos em outros locais ou possuem atalhos fáceis;
b) Barra de Ferramentas - é dividida em ícones que apresenta várias funções que podemos visualizar clicando na parte inferior de cada janela;

Figura 8 – Interface inicial do *software* GeoGebra



Fonte: Produção nossa.

c) Campo de Entrada - local destinado à entrada dos comandos ou condições que definem os objetos. Neste campo escrevemos as equações, funções e coordenadas dos pontos e teclamos o comando "enter" para representá-los na janela de gráficos;

d) Janela de Álgebra – esta janela mostra a representação algébrica dos objetos construídos na área gráfica, tais como, coordenadas de pontos, equações de retas, de circunferências, comprimentos, etc. Também podemos habilitar e desabilitar esta janela pela barra de menu (tecla exibir);

e) Janela de Visualização – local onde aparecem os gráficos, figuras geométricas, pontos, etc. Podemos construir e transformar figuras geométricas, apresenta um sistema de eixo de coordenados que pode ser habilitado e desabilitado na barra de menu (Exibir). Também podemos habilitar uma "Malha" no menu Exibir entre outras situações possíveis.

No campo de entrada podemos escrever a fórmula para podermos ter a sua representação gráfica na janela de visualização. Exemplo: Entrando com a função $f(x) = x^2 + 1$ no campo de entrada.

Figura 9 – Interface do campo de entrada do GeoGebra

Fonte: Produção nossa.

No campo de entrada (Figura 9), podemos inserir equações, pontos, funções e outros objetos matemáticos. Estes podem ser inseridos automaticamente, os quais aparecem na janela algébrica e sua representação geométrica na janela de visualização. Essa representação simultânea é que nós consideramos como sendo um dos pontos mais interessantes do GeoGebra no que diz respeito ao ensino e aprendizagem de conteúdos da Matemática.

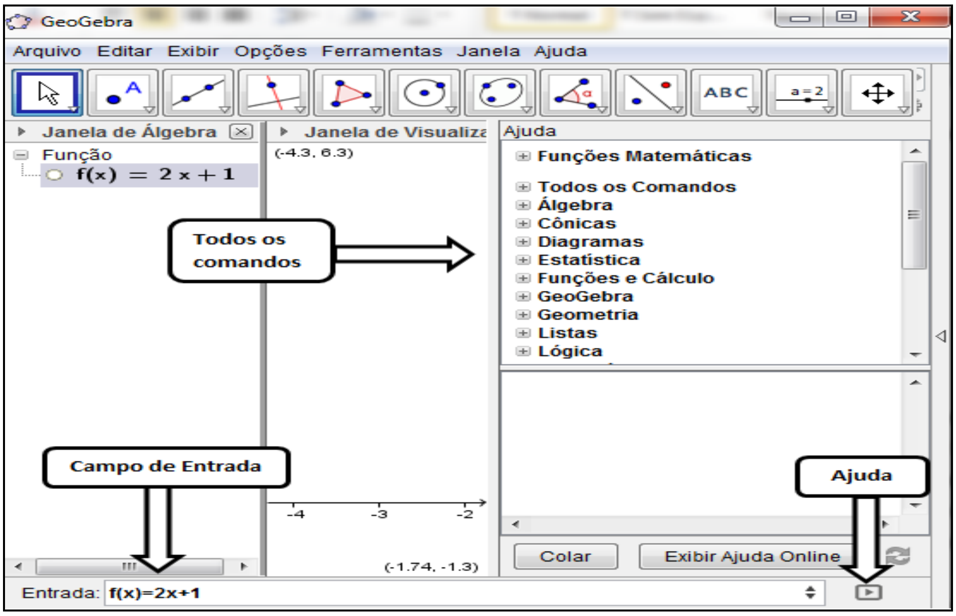
A percepção dupla dos objetos: cada expressão na janela de Álgebra corresponde a um objeto na janela de visualização e vice-versa. Em nossa concepção isso faz com que este *software* seja diferenciado de outros e, possivelmente, seja este um dos motivos de tanto sucesso no meio acadêmico.

Esta ferramenta (Figura 9) possui uma janela de ajuda onde estão configurados os objetos matemáticos que podem ser inseridos diretamente na janela campo de entrada. Podemos inserir objetos matemáticos, tais como:

a) Pontos - Basta digitarmos uma letra maiúscula do nosso alfabeto seguido do símbolo de igualdade (=) e em seguida a abertura de parênteses, onde serão inseridas as coordenadas separadas por vírgula. Por exemplo: A = (2,3);
b) Funções – Quando inseridas podemos utilizar as notações iniciadas por **y,** f(x) ou até mesmo nada que o *software* irá entender, por exemplo: $f(x) = x^2 + 1$;
c) Médias, Medianas, Bissetrizes, Amostra, Ângulo, Arco, Baricentro, Círculo, Centro, Cônicas, Curva, Covariância, Derivada, Desvio Padrão, Distância, Distribuições Estatísticas, Estimativas, Polígonos, Polinômios, Raízes entre outros.

Todos esses atalhos podem ser encontrados no ícone de ajuda que se encontra ao lado da Janela de Entrada – Todos os Comandos (Figura 10).

Figura 10 – Interface do campo de entrada e da janela de ajuda dos comandos do GeoGebra



Fonte: Produção nossa.

Na figura anterior (Figura 10) podemos verificar que quando lançamos à função no campo de entrada a fórmula fica representada na janela de álgebra, também podemos observar o campo ajuda que fica a direita do campo de entrada e possui todas as fórmulas necessárias para a utilização do GeoGebra. Como por exemplo de integral que iremos utilizar bastante em nossa pesquisa, assim como outras fórmulas pertinentes ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

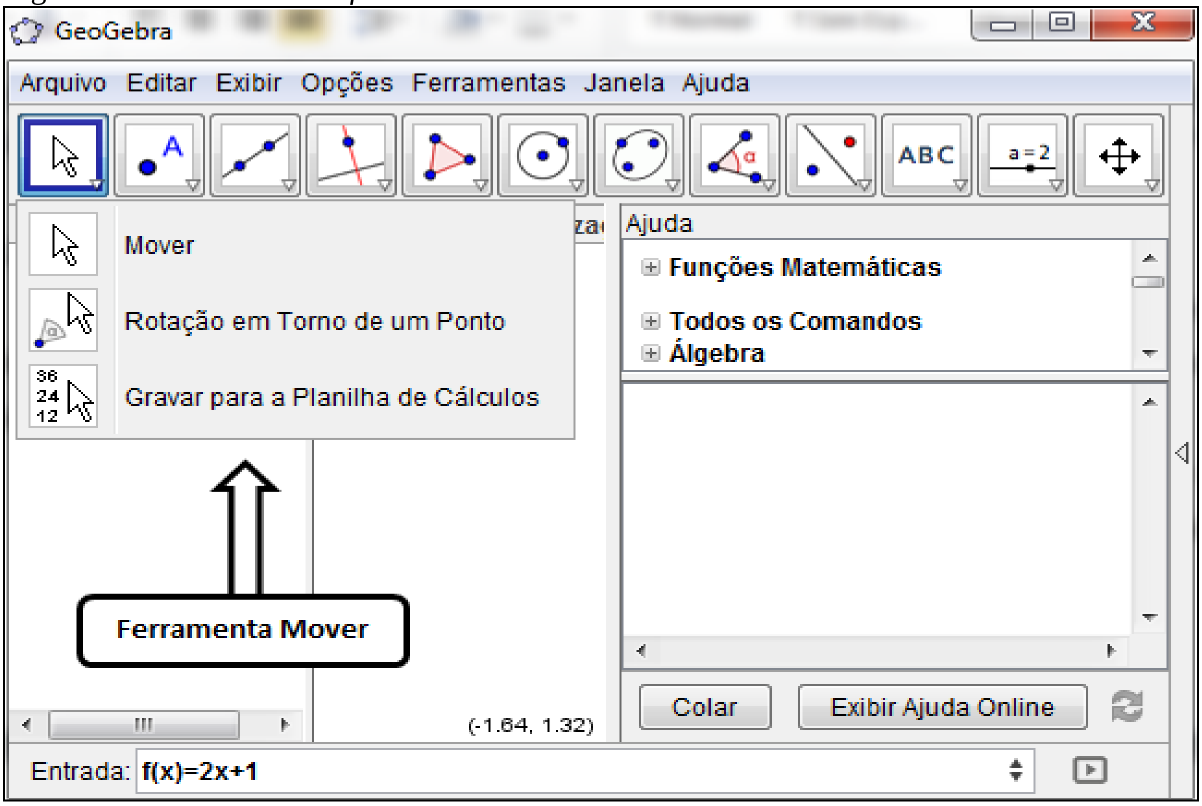
3.2.2 Algumas ferramentas importantes no uso do GeoGebra

Na conjectura voltada ao Cálculo Diferencial e Integral que é o objeto de estudo deste trabalho, mas com ênfase na Integral Imprópria, podemos destacar algumas ferramentas do *software* GeoGebra que são muito importantes em nossa pesquisa voltada a situações didáticas do Cálculo. Destacamos:

a) Mover – usamos esta ferramenta para selecionar, mover e manipular objetos (Figura 11). Também podemos selecionar apertando “ESC” no teclado do computador (atalho para a barra na barra de ferramenta);
b) Seletor ou Controle Deslizante – esta ferramenta é importante para se modificar, de forma dinâmica, o valor de algum parâmetro utilizado (Figura 11). Essa ferramenta é muita usada para produzir gráficos envolvendo o Cálculo Diferencial e Integral, além de propiciar animações nas figuras. Para criar um Controle Deslizante, basta clicar no ícone Controle Deslizante que

aparecerá a janela a seguir (Figura 12). Ressaltamos que este comando será muito usado em nossas situações didáticas em seções futuras, pois é através do controle deslizante que encontramos a área da integral sobre a curva utlizada, em nosso caso serão funções.

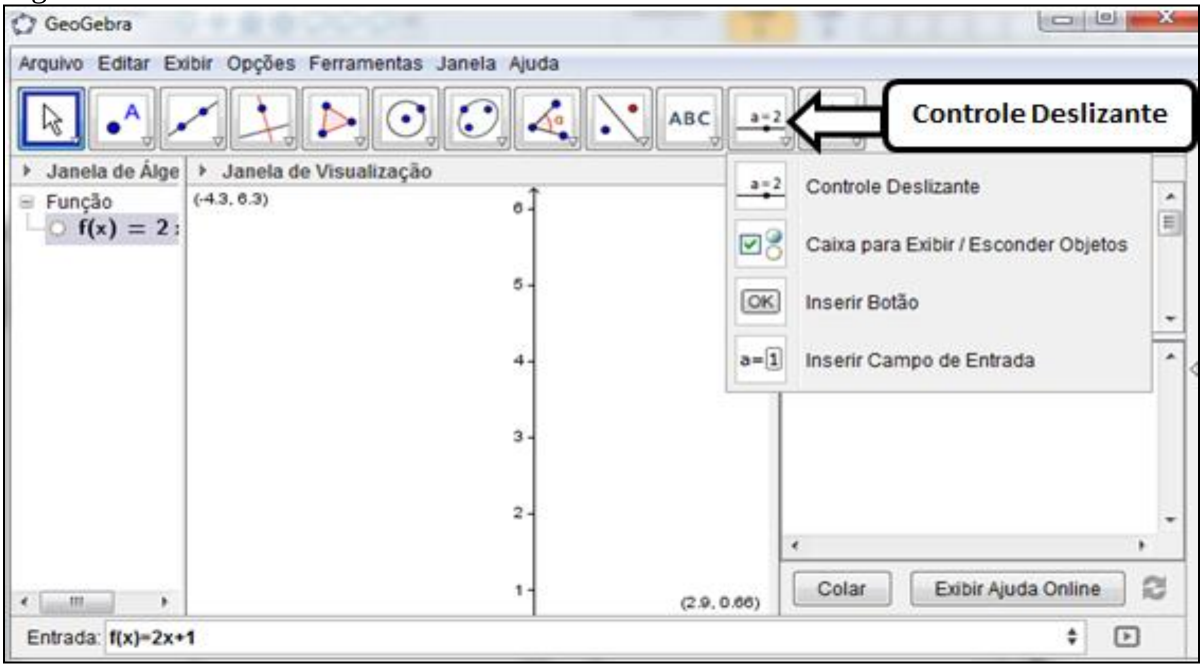
Figura 11 – Interface do *soft*ware GeoGebra com a ferramenta Mover



Fonte: Produção nossa.

Nesta janela (Figura 12) do Controle Deslizante, é possível aplicar vários comandos. Como por exemplo, mudar o "Intervalo" (min ou max) de variação do Controle Deslizante e tamanho do passo ou "Incremento". Também se podem editar outros detalhes, como: mudar o nome, posição, animar, etc. Para criar o Controle Deslizante basta clicar no botão "Aplicar".

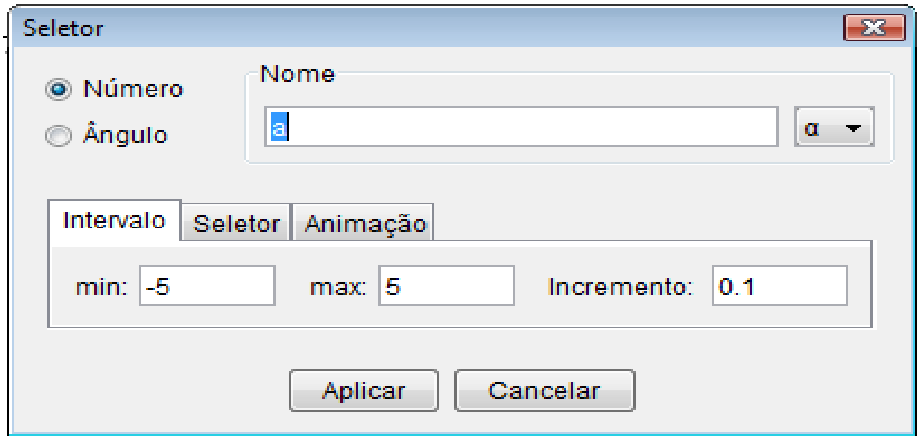
Figura 12 - Interface do seletor ou controle deslizante



Fonte: Produção nossa.

Veja que quando clicarmos no botão aparecerá às ferramentas: controle deslizante, caixa para exibir/esconder objetos, inserir botão e inserir campo de entrada. Em nosso caso nos interessa a ferramenta controle deslizante, que quando selecionarmos aparecerá a seguinte janela abaixo (Figura 13).

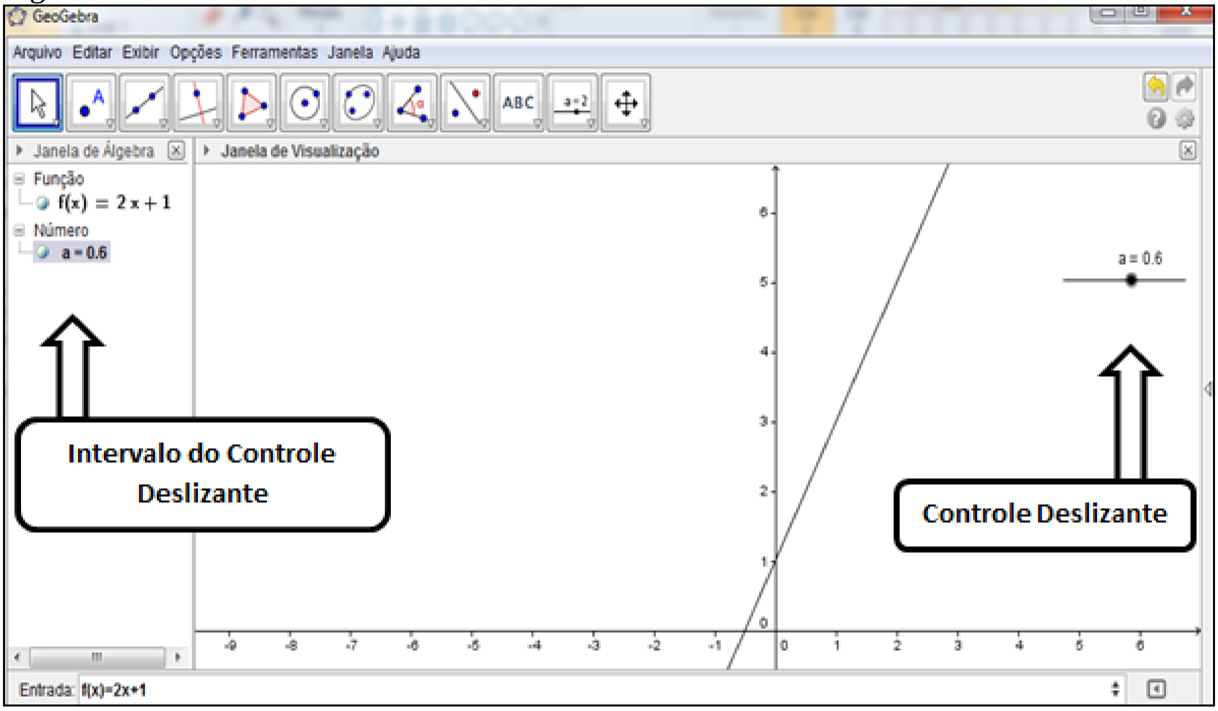
Figura 13 - Janela do Controle Deslizante



Fonte: Produção nossa.

Nesta janela (Figura 13) do Controle Deslizante, é possível aplicarmos vários comandos. Como por exemplo, mudar o "Intervalo" (min ou max) de variação do Controle Deslizante e tamanho do passo ou "Incremento". Também podemos editar outros detalhes, como: mudar o nome, posição, animar, etc. Para criar o Controle Deslizante basta clicar no botão “Aplicar” (Figura 14).

Figura 14 - Uso do Controle Deslizante no GeoGebra



Fonte: Produção nossa.

Observamos (Figura 14) que quando inserimos o Controle Deslizante, também aparece na Janela de Álgebra. Essa ferramenta possibilita variações de intervalos em diversas funções, além de possibilitar animações nos gráficos. Isso favorece a dinamização do conteúdo que está sendo trabalhado e sua exploração por parte do usuário.

Essas são algumas das funções que o *software* GeoGebra pode nos oferecer para o usuário que deseja desenvolver exploração de problemas. Claro que se desejarmos nos aprofundar nesse *software*, temos que explorar seus comandos e funções, para ajudar nessa tarefa basta acessar o site www.geogebra.org que encontraremos um tutorial com mais informações.

3.3 Um pouco da história do Cálculo Diferencial e Integral

Entender como foi concebido o Cálculo é primordial para nossa pesquisa, tendo em vista que o objeto a ser estudado está contido nessa história e se faz necessário uma abordagem mesmo que preliminar, dentro da nossa metodologia de pesquisa. Quando se trata da História do Cálculo Diferencial e Integral tem muitas divergências e controvérsias, alguns autores da História da Matemática, tais como: Bell (1945); Boyer (1949; 1959; 1993);

Edwards (1979); Kline (1972); Maor (2003). Mostram que a história desta tão importante área da Matemática é densa e cheia de "buracos".

Ao tentar descrever, mesmo que sucintamente, as origens do Cálculo é necessário primeiro definir a nomenclatura "Cálculo" para se entender o significado e também de onde veio esta palavra tão usada pelos matemáticos na atualidade. Em seu livro Boyer (1993, p. 1) traz o seguinte apontamento:

> Os infinitivos "calcular" e "computar" têm significados semelhantes, relacionados com a realização de processos numéricos. O último está associado, tanto etimologicamente como no sentido corrente, com processos mentais. O primeiro, por outro lado, traz desde sua origem uma conotação de manipulação não deliberada, pois "calcular" no passado significou "fazer contas por meio de seixos". A palavra "cálculo" é o diminutivo de calx, que em latin significa "pedra". Em medicina, o significado literal ainda se preserva na expressão "cálculos renais", usada para pedras nos rins.

Observamos que Boyer (1993) no trecho acima, expressa que a palavra Cálculo que se utiliza na Matemática em situações diversas, está associada com os processos mentais exigidos para a compreensão de situações que não estão limitadas a mera interpretação da nomenclatura no sentido de pedras, conforme se pode observar na medicina. Mas ao surgimento da intuição do Cálculo, falando em termos de Cálculo Diferencial e Integral, vem que de acordo com Maor (2003, p.61) é aos gregos que se deve a ideia que dá sustentação ao Cálculo:

> Geralmente se diz que o Cálculo foi inventado por Issac Newton (1642-1727) e por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) durante a década de 1665-1675, mas isso não é inteiramente verdadeiro. A idéia central por trás do cálculo de usar o processo de limite para derivar resultados sobre objetos comuns, finitos recua até a época dos antigos gregos. Arquimedes de Siracusa (cerca de 290-212 a.C.), o lendário cientista cuja inventividade militar teria desafiado os invasores romanos de sua cidade durante mais de três anos, teria sido um dos primeiros a usar o conceito de limite para calcular a área e o volume de várias formas planas e sólidas.

Apesar de vários estudiosos da área divergir sobre o assunto, conforme Barbosa (2004, p.19), em sua pesquisa, conclui que "livros diferentes ressaltam aspectos distintos, concepções múltiplas".

Talvez tenha sido Zenão de Eléia (495 - 430 a.C.) e seus paradoxos que iniciou este estudo, porém se tem uma controvérsia dos historiadores em relação à sua interpretação e influência sobre a Matemática grega, mas o fato é que existe um certo consenso que o Cálculo iniciou na Grécia antiga, pelo menos termos de noção inicial. Apesar de ter divergências o fato é o Cálculo foi concebido antes conforme Moar (2003, p.61) afirma que pelo menos Arquimedes teria usado o conceito de limites.

Usando Torres e Giraffa (2009, p.13) afirma que “o desenvolvimento e o aperfeiçoamento das técnicas associadas ao Cálculo aconteceram com Newton (1643 – 1727) e Leibniz (1646 – 1716), os quais deram origem aos fundamentos mais importantes para o ensino do Cálculo, como a formalização das Derivadas e as Integrais.” O fato é que antes de se formalizar a linguagem do Cálculo, já existia uma intuição matemática a respeito dos limites e mesmo do Cálculo na sua amplitude, como se pode observar na seguinte afirmação dada por Nascimento *et at* (2013, p.4):

> Após Zenão, surgiram Arquimedes de Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.) e também Apolônio de Rodes (295 a.C. – 230 a.C.) que utilizavam métodos geométricos, que diferiam entre si, para a determinação de tangentes, parábolas, elipses e hipérboles. Tendo em vista que os gregos já conheciam a reta tangente como sendo uma reta que intercepta uma curva num único ponto, é claro que o Cálculo é o resultado de um longo período de pensamento matemático que foi sendo desenvolvido ao longo do tempo e com muita dificuldade.

Usando a natureza e a geometria como campo de estudo, os pitagóricos desenvolveram a teoria de comparação de grandezas que se desenvolveu até chegar ao método de exaustão de Arquimedes, que era muito próximo ao método de integração moderno, em seu livro Boyer (1949, p. 34) diz que:

> O método da exaustão corresponde a um conceito intuitivo, descrito em termos de imagens mentais do mundo, da percepção intuitiva. A noção de limite por outro lado pode ser considerada como verbal, a explicação que é dada em termos de palavras e símbolos como números, sequência infinita menor do que, maior do que, sem qualquer visualização mental, mas à sua definição de elementos à *priori* não definidos.

Naquela época os gregos já sabiam calcular a área de qualquer região poligonal, dividindo-a em triângulos e somando as áreas obtidas. Para o cálculo de áreas de regiões planas limitadas por curvas, eles usavam o chamado método da exaustão, alguns autores atribuem a Eudoxo (406 –355 a.C.) o descobrimento, mas o certo é que foi desenvolvido e aperfeiçoado por Arquimedes (287 –212 a.C.), grande matemático da escola de Alexandria.

O método da exaustão consiste em “exaurir” a figura dada por meio de outras de áreas e volumes conhecidos. O caso mais conhecido é o famoso problema da quadratura do círculo, isto é, o problema de obter um quadrado com a mesma área de um círculo de raio r dado. Uma primeira aproximação para a área do círculo é dada pela área do quadrado inscrito no círculo. Com o acréscimo de quatro triângulos isósceles convenientes, obtemos o octógono regular inscrito no círculo, cuja área fornece uma aproximação melhor à área do círculo. O certo é que se faz sucessivos triângulos isósceles obtendo aproximações cada vez melhores para a área do círculo, através de polígonos regulares inscritos de dois elevado a n lados.

Usando um procedimento similar a este, com polígonos inscritos e circunscritos, Arquimedes encontrou uma aproximação muito boa para o número π (Pi).

O método de exaustão de Arquimedes é muito desgastante e inconveniente, pois para cada novo problema havia a necessidade de um tipo particular de aproximação. Segundo Nascimento *et al* (2013, p. 6) dizem que "o grande Arquimedes conseguiu desenvolver teoremas sobre áreas, volumes e centros de gravidade que anteriormente não tinham utilizados por nenhum de seus antecessores, avançou ainda mais demonstrando esses teoremas da maneira tradicionalmente rigorosa pelo método da exaustão."

Continuando essa linha do tempo, se considera que o último matemático importante na idade antiga talvez tenha sido Pappus de Alexandria (290-350 d.C.), o que hoje é chamado de "comentarista", essa era uma expressão usada para matemáticos que usavam teorias de outros matemáticos. Embora fosse o principal matemático grego da sua época, a Matemática original que ele criou era muito pequena em limites de informações, em especial quando comparada com grandes matemáticos clássicos como Arquimedes e Apolônio. A fama de Pappus reside em sua extensa obra denominada *The collection*, na qual ele reuniu uma lista eclética de obras antigas (algumas atualmente perdidas) de alguns autores da época. Nesse compêndio, ele acrescentou um número considerável de suas próprias explanações e ampliações. *The collection* contém oito livros, ou capítulos, cada um existindo como uma obra única.

Segundo Boyer (1993, p. 8), relata que:

> Pappus foi o último matemático importante da antiguidade; depois dele, o nível da Matemática no mundo ocidental decaiu sistematicamente por quase um milênio. A civilização romana foi em geral inóspita para com a Matemática. Nos séculos XII e XIII a Europa latina tornou-se receptiva à cultura clássica, transmitida através do grego, árabe, hebreu, sírio e outras línguas, mas o nível da Matemática na Europa medieval permaneceu muito abaixo daquele do mundo grego antigo.

Alguns dos tópicos abordados por Pappus são: cônicas, geometria plana, geometria mecânica e, de especial interesse em "cálculo", linhas retas tangentes a certas curvas. No livro que trata de geometria mecânica, Pappus foi o primeiro a definir o conceito de centro de gravidade. No final do livro 7, *The treasury of analysis*, ele descreveu (sem apresentar demonstração) duas fórmulas que relacionam determinados centros de gravidade a volumes de sólidos de revolução e suas áreas de superfície. As fórmulas oferecem atalhos para cálculos extensos e complexos.

O que se observa em Boyer (1993) é que após Pappus ocorreu um "buraco" na história da Matemática, não se tem relatos de quase nada. O que foi uma pena, pois a

Matemática vinha numa crescente e de repente estagnou com prejuízos incalculáveis para a humanidade, talvez o mundo estivesse mais desenvolvido se não tivesse ocorrido essa "ruptura".

Também segundo Nascimento *et al* (2013, p. 5) afirmam que a "Matemática árabe e hindu no período medieval pouco se preocupou com questões que no futuro conduziriam ao Cálculo." No entanto, os árabes desempenharam papel importantíssimo na preservação e principalmente, transmissão para Europa dos trabalhos dos gregos que poderia muito bem ter sido perdido.

Assim como outras áreas da Matemática, o Cálculo Diferencial e Integral, surgiu e se desenvolveu a partir de uma combinação entre problemas e formulações de conceitos e teorias adequadas para resolvê-los.

Após as grandes contribuições dos gregos a Matemática ficou "estagnada" no período em que os romanos dominaram a terra, mas Segundo Boyer (1949, p. 23), a volta ao estudo do Cálculo só aconteceu com Nicole Oresme (1323-1382 d.C.), que era bispo de Lisieux.

> [...] o trabalho de Oresme marca um avanço notável na análise Matemática. Ele tinha percepção clara da aceleração e da aceleração uniforme. Oresme foi o primeiro a dar um passo significativo na representação de uma taxa de variação por uma reta. Apesar de não ter dado uma definição satisfatória da velocidade instantânea, ele se esforçou a clarificar a questão por acentuar que quanto maior for a velocidade, maior é a distância percorrida se o movimento continuar uniformemente a essa taxa. Uma das questões resolvidas por Oresme foi a proposição segundo a qual "a distância percorrida por um corpo a partir de repouso e movendo-se com uma aceleração constante é a mesma que o corpo percorreria se movesse com a velocidade constante que é a metade da velocidade final.

Com Johannes Kleper (1571-1630) o Cálculo volta ao palco, pois este pensou nas áreas de figuras planas e volumes de sólidos como um número infinito de elementos infinitesimais, pode ter sido influenciado pelo método da exaustão dos gregos já exposto anteriormente. Também Galileu Galilei (1564-1642) desenvolveu um método de integração, mostrando que, para aceleração uniforme a área sob a curva velocidade versus tempo era a distância percorrida. Os seus trabalhos chegaram muito perto do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). Já Bonaventura Cavalieri (1598-1647) usou as ideias de Kepler e Galileu, dando continuidade ao estudo de áreas de figuras planas e volumes a partir de indivisíveis. Não se pode deixar de mencionar os trabalhos de Pierre de Fermat (1601-1665), o maior dos amadores da Matemática, foi responsável pela invenção do que hoje é chamado de diferenciação, este descobriu um método surpreendentemente simples de achar máximos e mínimos de curvas polinomiais.

Mas o descobrimento formal do Cálculo veio com Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Von Leibniz (1646-1716). "Estes dois têm espaços diferenciados na história do Cálculo, pois ocupam uma posição central" segundo Mateus (2007). Serão feito uma abordagem diferenciada para esses dois grandes notáveis da Matemática. Isaac Newton (1643-1727) nasceu na Inglaterra, tinha uma característica solitária, insegura e com temperamento difícil, devido a perda de seu pai que morrera antes de seu nascimento e após teve ser criado pelo seu avô. Sua formação acadêmica deu-se no Trinity College da Universidade de Cambridge, de 1661 a 1665.

Já Gottfried Wilhelm Von Leibniz (1646-1716), nasceu na Alemanha, filho de um professor universitário de filosofia. Ingressou no curso de Direito na Universidade de Leipzig em 1661, obteve o título de Bacharel em 1663, entretanto, em 1666 lhe recusaram o título de doutor, pois era muito jovem. Mas Leibniz não desistiu, e em 1667 dirigiu-se a Universidade de Altdorf, onde defendeu sua tese de doutorado com sucesso. Tinha um temperamento forte e não gostava de divergências, não escondia essa forma de agir, onde era refletido em seus estudos e pesquisas.

Segundo Mateus (2007, p. 62), ocorre uma diferença entre as contribuições de Newton e Leibniz, conforme afirma:

> [...] Newton formulou regras e procedimentos sistemáticos para o cálculo infinitesimal. Ele alargou o âmbito de aplicação das técnicas da diferenciação e da integração, diferentemente do que acontecia com os seus predecessores [...] já Leibniz [...] aperfeiçoou os conceitos de diferenças infinitamente pequenas e somas de sequências, introduzindo uma notação adequada.

Com efeito, observa-se que são trabalhos distintos, mas a história colocaria os dois num duelo implacável, principalmente pelo lado de Newton que moveu montanhas para desmascarar Leibniz no meio acadêmico. Numa concepção parecida Boyer (2001, p.54) faz algumas abordagens sobre os estudos de ambos, em que relata:

> Isaac Newton entendia que as quantidades geométricas são geradas por movimentos contínuos; assim, por exemplo, um ponto móvel gera uma reta. A quantidade x, assim gerada era chamada por ele de "fluente"; à sua taxa de variação, que indicava por x (isto é, dx/dt em notação moderna), Newton dava o nome de "fluxo" de x. Além disso, o pequeno incremento que um fluente x, sofre num pequeno intervalo de tempo 0, era denominado por ele "momento" do fluente; e este momento era denotado por x0 (isto é, (dx/dt) (dt) ou dx, como escreveríamos). [...] Leibniz desenvolveu sua notação diferencial e aplicou-a para achar diferenciais de expressões como xy. O uso que fazia diferenciais [...] para o fluxo x de Newton,

> Leibniz escrevia dx/dy [...] para o que chamamos agora de integral de y, Newton escrevia y [...] Leibniz escrevia da forma como utilizamos atualmente [...]

Tanto Newton como Leibniz estudou o Cálculo profundamente, porém Leibniz se preocupou mais com a notação e consequentemente foi a que prevaleceu anos mais tarde, porém o rigor matemático de Newton fez com que seus trabalhos fossem levados mais a sério.

3.4 A história das Integrais Impróprias

Nossa pesquisa buscou fatos históricos do Cálculo em autores como Boyer (1949; 1993), Cavaillés (1962), Grattan-Guiness (1970), Edwards (1979), Bottazzini (1986), Alves (2013) entre outros. Verificamos que as contribuições de Newton (1643-1727) e Leibniz (1646-1716) começaram um desenvolvimento "fervoroso" do Cálculo na Europa, dessa forma a Integral que é parte integrante desse trabalho foi se desenvolvendo. Conforme Alves (2013, p.8) afirma que "A noção de integral constitui pedra fundante no Cálculo Diferencial e Integral". No rol dos matemáticos que contribuíram, direta ou indiretamente para a gênese e sistematização da noção de integral, vale assinalar: Newton (1643-1727), Leibniz (1646-1716), Cauchy (1789-1857), Riemann (1826-1866), entre outros.

A integral segundo Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), desconsiderava uma série de comportamentos e propriedades patológicas de uma função, sobretudo, quando se referia ao seu conjunto de pontos de descontinuidade (e domínio ilimitado). A história da Matemática registra a evolução da noção de integral que passou a considerar um modelo matemático que permitiu o trato e extração de conclusões relativas a uma classe maior de funções. Segundo Alves (2013, p. 10) diz que "a noção de integral de Riemann, nos livros de Cálculo Diferencial e Integral, no Brasil, assume determinadas restrições (como a continuidade) da função $f: [a, b] \to R$, que garantem a existência/significado de $\int_a^b f(x)dx$". Dessa forma, Alves (2013) deixa evidenciar que a partir daí se pode falar sobre a Integral Generalizada ou Integral Imprópria, ou seja, foi à janela para começar estudos e problemas.

A partir das concepções de Riemann que passa a considerar uma classe maior de funções, tais como: (i) funções definidas em intervalos abertos ou semi-abertos do tipo (a, b], [a, b), (a, b), $(\pm\infty, \pm\infty)$; (ii) funções com imagem ilimitada". Dessa forma, as funções não necessariamente deveriam ser contínuas em todos os pontos de seu domínio.

Fazendo uma análise de uma das obras de Cauchy do século XIX, Alves (2013, p. 2) observa que "a segunda parte da obra, intitulada *Leçons sur les applications du Calcul* *infinitesimal à la Geometrie*, inclui aplicações de sua teoria da integral à Geometria". Algumas das aplicações envolvem o comprimento de arco e a determinação de áreas e volumes específicos. Uma das motivações para a teoria das integrais de Cauchy foi devido à sua percepção da necessidade de uma teoria para o estudo de integrais mais complexas.

Nesse sentido, vale assinalar que em 1823, segundo Alves (2013, p. 3) "Cauchy aplicou sua definição de integral como limites de somas e usou, também, teoremas envolvendo integrais por meio do cálculo de resíduos". Na introdução da obra intitulada "*Memoires sur les íntegrales définies prises entre des limites imaginaires*", em 1825, ele enfatizou a noção de valor principal (V.P.) de integrais impróprias.

Edwards (1979, p.322, tradução nossa) recorda que "Cauchy considerou integrais de funções possuindo infinitos pontos isolados de descontinuidade. Por exemplo, se $\lim_{x\to X} f(x) = \pm\infty$, todavia, contínua em $[x_0, X]$, para cada $\varepsilon > 0$, ele definiu a integral $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{x_0}^{X-\varepsilon} f(x)dx$". Porém, podemos ressaltar que "outros matemáticos imprimiram sua contribuição relativa à mesma noção".

De acordo com Hairer e Wanner (2008, p. 260, tradução nossa) diz que "a seguinte definição é devida a Gauss (1812): se a função $f\colon (a,b] \to R$ é integrável em todo intervalo da forma $[a+\varepsilon, b]$, então se define $\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ se tal limite existe." Podemos observar que a construção da noção de Integral Imprópria passou por várias análises até chegar na definição que usamos na atualidade.

Ainda sobre a história da Integral Imprópria, Bottazzini (1986, p. 132, tradução nossa) descreve o seguinte contexto histórico:

> A noção de integral imprópria foi objeto de discussão entre os matemáticos desde Euler. O próprio Euler, e Laplace, de modo próximo em sua investigação, de modo próximo à teoria da probabilidade. Poisson e Legendre, em seu *Exercices de Calcul Integral* (1811), todos usaram o tipo de passagem indutiva da parte real à imaginária.

Encontrarmos literatura que descreva a história da Integral Imprópria é difícil, mesmo com tantos trabalhos na internet, verificamos que em livros como Boyer (2001) passa despercebida a história da Integral Imprópria. Mesmo o livro do mesmo autor Boyer (1993) que trata especificamente da história do Cálculo não traz nenhum referência sobre a Integral Imprópria. Porém, buscamos reunir aqui o máximo de informações possíveis para que nossa pesquisa possa enriquecer o conhecimento acadêmico.

3.5 Uma abordagem sobre Integrais Impróprias ou Integrais Generalizadas

Já sabemos que o estudo das Integrais Impróprias ou Generalizadas é parte integrante do Cálculo Diferencial e Integral, as situações didáticas que se pretende trabalhar através de visualização será alavancada pelo *software* GeoGebra e amparada pela sequência Fedathi, que é uma metodologia de ensino. Para conseguirmos elaborar e descrever situações didáticas temos que definir formalmente uma Integral Imprópria para poder termos um alicerce do conteúdo trabalhado.

Nossa pesquisa teve como referência autores como Guidorizzi (1998), Lima (2006), Bloch (2011), Thomas (2012) e Stewart (2011), as definições que aqui iremos colocar partiram deles. É importante salientar que estamos seguindo nossa metodologia de pesquisa (Engenharia Didática), na fase preliminar. Vejamos a seguir as definições que irão nortear nosso trabalho.

Segundo Guidorizzi (1998, p. 55) define a Integral Imprópria da seguinte forma: “Definição 1. Seja *f* integrável em [a,t], para todo $t > a$. Definimos $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)dx$, desde que o limite exista e seja finito. Tal limite denomina-se integral imprópria de *f* estendida ao intervalo [a, + ∞[.” O fato é que a definição 1, só é válida se $\lim_{t \to +\infty} \int_a^t dx\ for + \infty\ ou - \infty$, e ainda a $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ é uma Integral Imprópria e pode ser escrito como $\int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty$ ou $\int_a^{+\infty} f(x)dx = -\infty$. Se ocorrer um destes casos ou se o limite não existir, se dirá que a integral imprópria é <u>divergente</u>. Seguindo ainda esta definição Guidorizzi (1998, p. 55) diz que “se o limite for finito, se dirá que a integral imprópria é <u>convergente</u>”. Esta abordagem de Guidorizzi (1998) é complementada por duas outras definições, a seguir.

Usando as concepções de Guidorizzi (1998, p. 55) segue dizendo que: Definição 2. Seja *f* integrável em [t, a] para todo $t \leq a$. Definimos $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^a f(x)\ dx$. Observamos que Guidorizzi (1998, p. 55) na definição 1, se restringe ao intervalo de $a \geq 0$ e na definição 2 de $a \leq 0$, já na definição 3, a seguir, se têm um intervalo em que $-\infty \leq \text{a} \leq +\infty$, ou seja, em todo o campo real percorrido pela função dada.

Ainda usando Guidorizzi (1998, p. 56) podemos observar a “ definição 3. Seja *f* integrável em [-t, t] para todo $t > 0$. Definimos $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx$ desde que ambas as integrais do 2º membro sejam convergentes. Mas Guidorizzi (1998, p. 56) faz uma observação importante em relação a definição 3, pois se as duas integrais que ocorrem no 2º membro forem iguais a $+\infty$ (ou $-\infty$), ou se uma delas for convergente e a outra $+\infty$ (ou $-\infty$), se dirá que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = +\infty$ e, respectivamente, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = -\infty$.

Outra definição acerca do objeto estudado vem de Bloch (2011, p. 342) explica que "supondo que possuímos uma função cujo domínio é [a, b[, podemos pensar numa aproximação deste intervalo por meio de intervalos do tipo [a, t], onde $t \in (a, b)$ e t é pensado como cada vez mais próximo do ponto x = b". Aproveitamento este raciocínio, podemos definir a Integral Imprópria como uma função de [a, b), por meio da avaliação da integral ordinária de uma função tem cada intervalo fechado [a, t], e tomando limite de t se aproximando de b, se o limite existir.

Uma definição mais precisa e formal podemos encontrar em Lima (2006, p. 142) que define a "Integral Imprópria $\int_a^b f(x)dx$, de uma função $f: (a, b] \to R$ ilimitada e contínua, como $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$. Assim, em cada intervalo do tipo $[a + \varepsilon, b]$, *f* é contínua, logo, integrável". Todavia, Lima (2006, p. 142) acrescenta que "o problema é saber se existe ou não o limite acima. Se ele existir, a integral é convergente; se não existir o limite, a integral é divergente". O problema da convergência e divergência é o fator principal da Integral Imprópria, dessa forma, saber limites é parte obrigatória para o desenvolvimento desse conteúdo, pois se não conseguir analisar o limite de uma determinada função não terá a resposta da situação-problema proposta através de uma Integral Imprópria.

Outra definição para Integral Imprópria é dada por Stewart (2011), o mesmo classifica as Integrais em dois tipos (tipo 1 e tipo 2), a primeira para intervalos finitos (tipo 1) e a segunda para integrandos descontínuos (tipo 2). Então, segundo Stewart (2012, p. 480) temos que:

> (a) definição de uma Integral Imprópria do tipo 1. (a) Se $\int_a^t f(x)\,dx$ existe para cada número $t \geq a$, então $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$ desde que o limite exista (como um número finito).
> (b) se $\int_t^b f(x)dx$ existe para cada número $t \leq b$, então $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{x\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx$ desde que o limite exista (como um número finito).
> As integrais impróprias $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ são chamadas **convergentes** se os limite**s** correspondentes existem e **divergentes** se os limites não existirem.
> (c) Se ambas $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ são convergentes, então definimos $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx$, qualquer número real a pode ser usado.

Na definição acima as Integrais Impróprias são apenas para o caso em que o intervalo é infinito, deixando o caso onde *f* tem descontinuidade infinita em [a, b] para o tipo 2 conforme a notação de Stewart (2012, p. 482). O fato é que para termos de visualização qualquer integral do tipo acima pode ser apresentada como área, desde que *f* seja uma função positiva. Isso é importante para o que se estar buscando neste trabalho. A seguir a definição para o tipo 2 segundo Stewart (2012, p. 482).

> (a) Se *f* é contínua em [a, b) e descontínua em b, então $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$ se esse limite existir (como um número finito).
> (b) Se *f* é contínua em (a, b] e descontínua em a, então $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$ se esse limite existir (como um número).
> A integral imprópria $\int_a^b f(x)dx$ é chamada **convergente** se o limite correspondente existir e **divergente** se o limite não existir.
> (c) Se *f* tiver uma descontinuidade em c, onde $a < c < b$, e ambos $\int_a^c f(x)dx$ e $\int_c^b f(x)dx$ forem convergentes, então definimos $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Esse tipo de Integral é que será abordado nessa pesquisa na qual o *software* GeoGebra será usado como ferramenta de apoio na resolução de situações didáticas.

Usamos Thomas (2012, p. 490) para citarmos os testes de comparação, "Sejam *f* e *g* contínuas em [a, ∞) com $0 \le f(x) \le g(x)$ para qualquer $x \ge a$. Então, (1) $\int_a^\infty f(x)dx \text{ converge se } \int_a^\infty g(x)dx \text{ converge}$ e (2) $\int_a^\infty g(x)dx \text{ diverge se } \int_a^\infty f(x)dx \text{ diverge}$". Este método é conhecido como teste de comparação direta, é muito usado em Integrais complexas e integração longa.

Ainda segundo Thomas (2012, p. 490), diz que: "Se as funções positivas *f* e *g* são contínuas em [a, ∞), e se $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L,\ 0 < L < \infty,$ então $\int_a^\infty f(x)dx \text{ e } \int_a^\infty g(x)dx$ são ambas convergentes ou divergentes". Este método é chamado de teste de comparação no limite e muito usado para cálculo de Integrais Impróprias.

3.6 O Uso do GeoGebra no Cálculo Diferencial e Integral

Para darmos continuidade ao nosso estudo sobre o uso do *software* GeoGebra, vamos enunciar alguns operadores que consideramos importantes no uso do GeoGebra no Cálculo Diferencial e Integral (Tabela 2).

Tabela 2 – Algumas operações importantes no uso do GeoGebra

OPERADORES	COMANDO
*	Multiplicação
/	Divisão
^	Potenciação
sqrt(...)	Raiz quadrada
lg(...)	Logaritmo decimal
ln(...)	Logaritmo natural
sin(...)	Seno
cos(...)	Cosseno
tan(...)	Tangente
abs(...)	Módulo
derivada(...)	Derivadas
Integral(...)	Integrais

Fonte: Produção nossa.

Podemos também estabelecer algumas dicas que podem ser muito úteis na exploração do GeoGebra, dessa forma pode otimizar o tempo de uso e até mesmo motivar a fazer novas experiências, já que este *software* está em constante descoberta e até novas construções. São elas:

a) Para mudar o zoom e formatar os eixos, podemos dar um clique com o botão do lado direito do mouse e selecionar a opção desejada;
b) O comando Desfazer (Ctrl + z) do menu editar é muito útil para retificar e anular a(s) última(s) operação(ões), dessa forma podemos otimizar tempo na hora da exploração do GeoGebra;
c) O GeoGebra pode escrever textos na Janela de Visualização, esse recurso é interessante para fazer explicações e colocar fórmulas de representações gráficas;
d) Podemos formatar (ocultar objeto, ocultar rótulo, exibir rastro, etc) um objeto, basta clicar com o botão direito do mouse sobre ele e escolher a função desejada.

3.6.1 O GeoGebra no contexto das Integrais Impróprias

O uso do GeoGebra no ensino das Integrais Impróprias facilita a exploração de problemas e a análise de Integrais complexas, podendo verificar convergências[7] e divergências[8] das mesmas. Depois de uma pesquisa em revistas nacionais e internacionais da área, como também em dissertações e teses, não encontramos até a presente pesquisa trabalhos sobre o uso do GeoGebra no ensino de Integrais Impróprias, exceto de Alves (2012, 2013), Alves e Borges Neto (2013), Nasserala, Alves e Silva (2013), Nasserala e Alves (2014) e finalizando Nasserala e Pinheiro (2014).

Sabemos que o GeoGebra é uma ferramenta que auxilia e valida problemas antes feito apenas manualmente, além de propiciar uma exploração gráfica acerca de problemas de Cálculo Diferencial e Integral. Segundo Silva (1994, p.7) em sua dissertação destaca que,

> O Cálculo, por sua própria natureza de trabalhar com aproximações, é um dos mais adequados para a utilização de computador em experimentação, propiciando uma (re)descoberta dos seus conceitos. Infelizmente, esta ferramenta de trabalho atualmente não é utilizada pelos professores. Uns, por não a aceitarem como método de validação de uma verdade matemática, outros por desconhecerem a sua utilidade.

Essa validação de problemas e até mesmo de demonstrações, dependo do nível de aprofundamento do usuário no conteúdo de Cálculo Diferencial e Integral, pode favorecer o uso do GeoGebra por parte de professores e estudantes na busca por respostas Matemática diversas. Na perspectiva da Integral Imprópria, Alves (2012, p.49) ressalta que

> Por fim, acrescentamos a importância do domínio e entendimento das argumentações formais atinentes aos teoremas e propriedades (critérios de convergência) doravante discutidos, entretanto, a mera inspeção e reprodução de cadeias dedutivas de inferências lógicas, exigidas em cada demonstração, não asseguram um entendimento conceitual e intuitivo dos mesmos. Sendo assim, neste cenário, o GeoGebra adquire um papel diferenciado, no sentido de potencializar determinadas abordagens e viabilizar a evolução de um raciocínio heurístico distinguido.

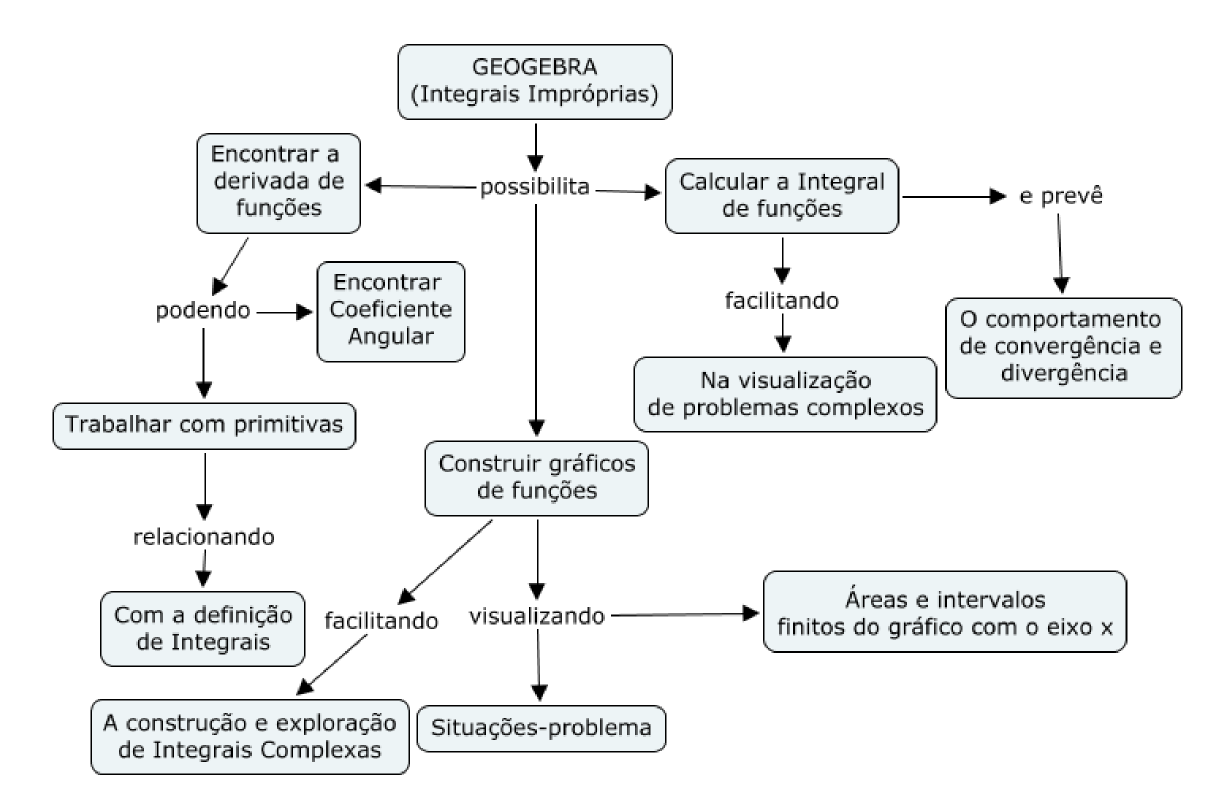
Essa potencialização é que torna o ensino com GeoGebra diferenciado, por isso a importância de usar um *software* dinâmico para a exploração de problemas. A seguir um mapa conceitual (Figura 15) do uso do GeoGebra no ensino das Integrais Impróprias, seu potencial tecnológico e heurístico.

---

[7] Convergência é o termo usado no Cálculo Diferencial e Integral para resultado numérico, ou seja, quando a Integral tem um resultado numérico.

[8] Divergência é o termo usado no Cálculo diferencial e Integral para Integrais que vão para o infinito, dizemos que diverge.

Figura 15 – Mapa conceitual do uso do GeoGebra no ensino e aprendizagem das Integrais Impróprias

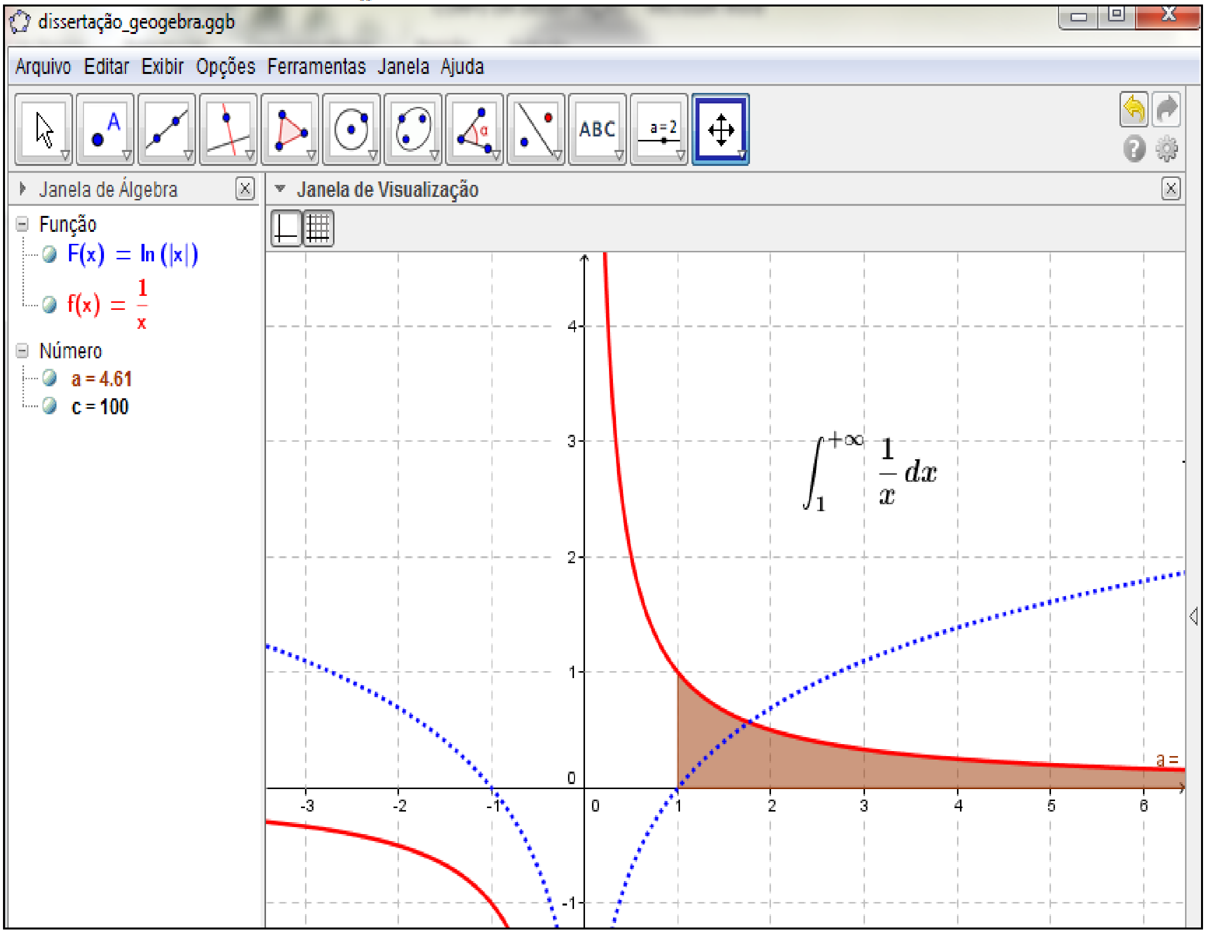


Fonte: Produção nossa.

O Mapa conceitual acima (Figura 15) nos mostra o potencial do *software* em relação ao estudo com Integrais Impróprias, podemos encontrar derivadas de funções quaisquer possibilitando trabalhar com primitivas, também podemos calcular as integrais de curvas. O GeoGebra realiza esses comandos com representações algébricas e geométricas, dessa forma auxilia no desenvolvimento algébrico e geométrico na resolução de problemas.

Vejamos a seguir algumas representações de Integrais Impróprias com o *software* GeoGebra, nelas podemos observar os detalhes e as informações implícitas que podem ser exploradas pelo usuário, obviamente que cada um com sua visão de mundo com a possibilidade de expandir e interagir com o *software*. O GeoGebra possibilita que o usuário faça programações, desenhando novos modelos dentro do próprio *software*, isso é algo que possibilita a (re)construção de ferramentas dentro do GeoGebra. Isso nos mostra que além de ser um *software* dinâmico, o GeoGebra foi idealizado por professores de Matemática, isso o torna ideal para práticas em ambientes de ensino e aprendizagem. A seguir temos a análise de uma Integral Imprópria com o auxílio do GeoGebra.

Figura 16 – Análise da $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ com o auxílio do *software* GeoGebra



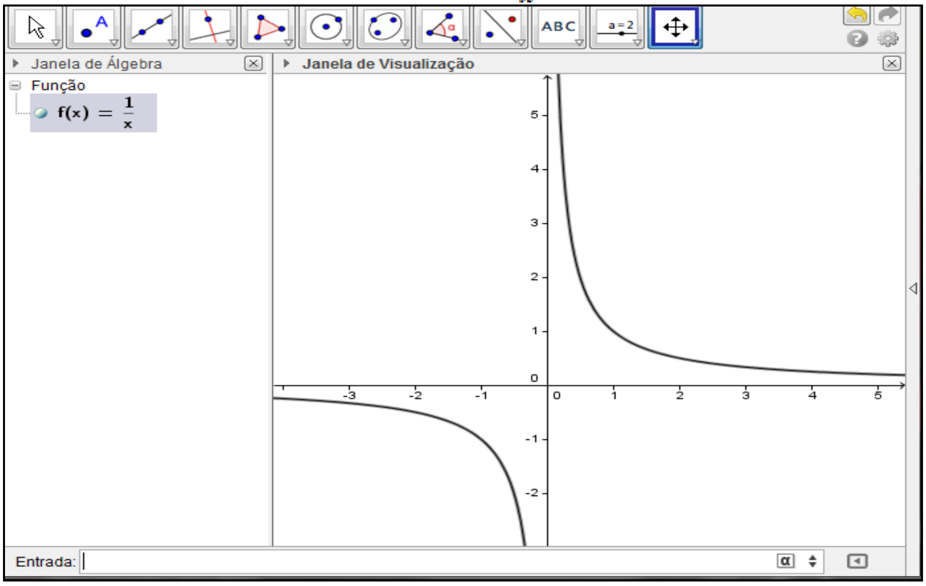
Fonte: Produção nossa.

Vamos descrever como podemos construir uma figura desta no GeoGebra (Figura 16), podemos começar observando que o conteúdo a ser trabalho é do Cálculo Diferencial e Integral. Nossa abordagem será em Integrais Impróprias ou Integrais Generalizadas, precisamos inicialmente saber qual problema inicial será estabelecido, escolhido o problema vamos aos passos do GeoGebra:

Nesse caso, escolhemos o problema que está explicitado na figura 16, consiste em analisar a $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$, para isto devemos utilizar a definição de Integral Imprópria que já foi discutida anteriormente. Queremos ressaltar que para que possamos ter uma melhor exploração do gráfico é fundamental que se tenha a interação com a definição de Integral Imprópria.

a) Inserir na caixa de entrada a função escolhida como integranda (Figura 17), nesse caso irá aparecer o gráfico da função na janela de visualização, conforme mostra a figura 17;

Figura 17 – Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$ com o auxílio do *software* GeoGebra

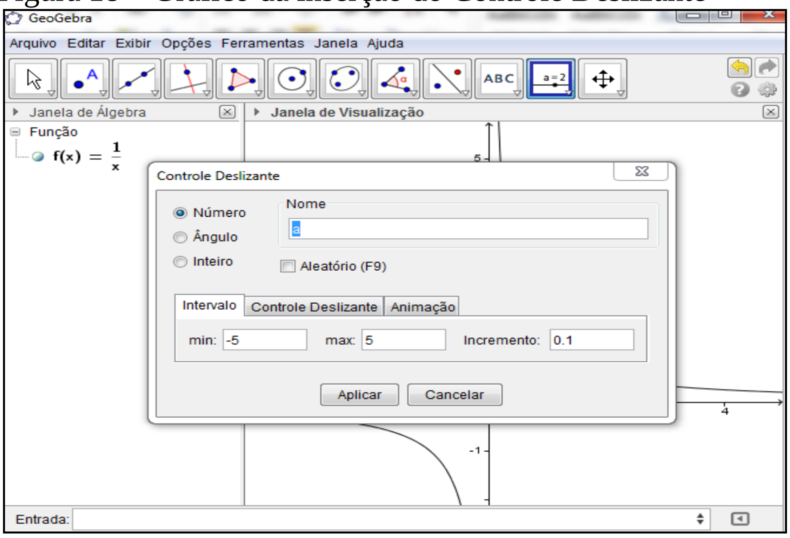


Fonte: Produção nossa.

Observamos (Gráfico 17) que não tem nenhuma dificuldade alta para inserir um gráfico no *software* GeoGebra, dessa forma a manipulação desse recurso nos ajuda a explorar o conteúdo sobre Integrais Impróprias.

b) Inserir o controle deslizante;

Figura 18 – Gráfico da inserção do Controle Deslizante

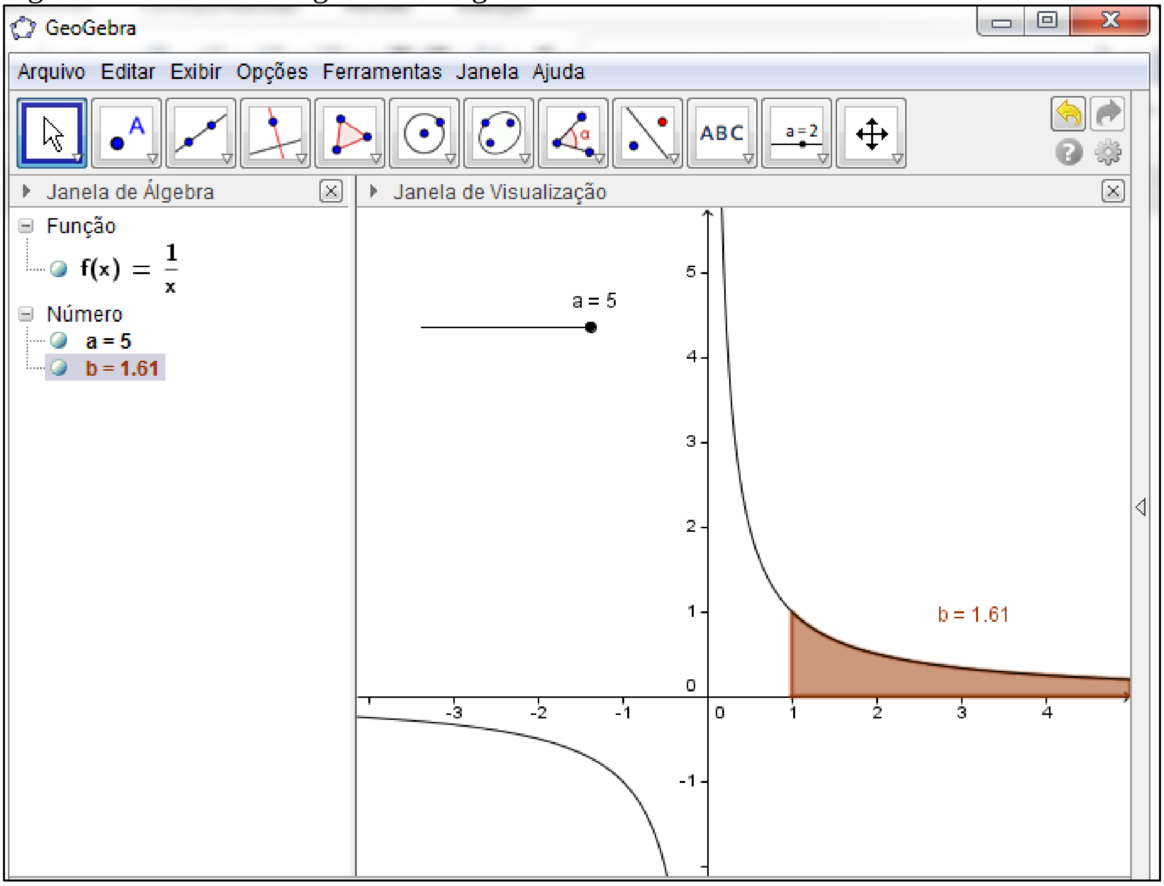


Fonte: Produção nossa.

Observamos que neste passo a caixa do Controle Deslizante aparece para que possamos configurar de acordo com a necessidade do problema a ser explorado no *software*.

c) No campo de entrada, escrever integral [*f*, 1, a]. Observamos que dentro dos colchetes temos: a função integranda escolhida, o número 1 escolhido é o início do intervalo e **a** é o Controle Deslizante que foi inserido anteriormente, nessa ordem (Figura 18);

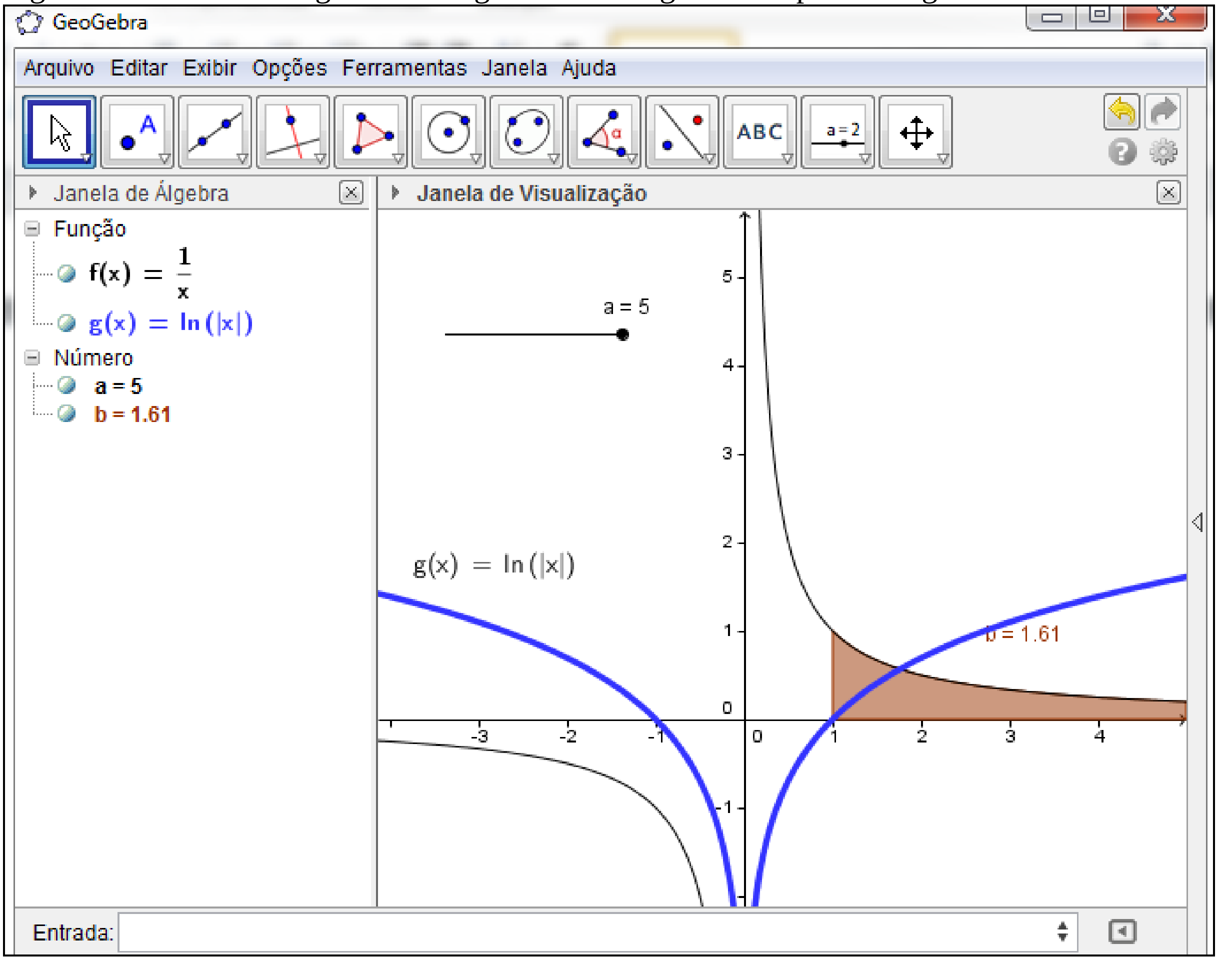
Figura 19 – Área da integral sobre o gráfico



Fonte: Produção nossa.

d) Para nós inserirmos a primitiva, basta escrever na caixa de entrada: integral [*f*]. Nesse caso, o próprio GeoGebra já vai chamar o comando quando nós digitarmos o início da palavra integral. O gráfico da função integral aparecerá na área gráfica, à parte algébrica fica registra na área de álgebra. Agora basta explorarmos o gráfico, usando conhecimentos de Matemática já adquiridos. Claro que para manusear o *software* com mais facilidade e para criar situações interessantes para o ensino e aprendizagem, necessitamos ter certo conhecimento matemático do assunto proposto.

Figura 20 – Área da integral sobre o gráfico com o gráfico da primitiva g



Fonte: Produção nossa.

Observando o gráfico (Figura 12) temos o gráfico de *f* e o gráfico de g, que é a primitiva de *f*, dessa forma podemos vislumbrar o comportamento da integral de *f*.

3.7 Análise de conteúdo na perspectiva de Bardin

No campo da Matemática em particular do Cálculo, a maior parte do professorado concorda que a importância do livro didático no processo educacional é inegável. Por um lado, ele costuma ser um suporte confiável e amplificador em sala de aula ou mesmo fora dela. Por outro, representa uma referência histórica indispensável para os estudos na área da didática geral e das didáticas específicas. O caráter geométrico em livros de Cálculo como Guidorizzi (1998) e Stewart (2011) tem aspectos diferenciados, vamos fazer uma análise do conteúdo de Integral Imprópria na perspectiva de Bardin (1977; 2009) na busca de analisarmos algumas categorias importantes em nossa pesquisa, principalmente, no aspecto da visualização do geométrico para o algébrico e vice-versa.

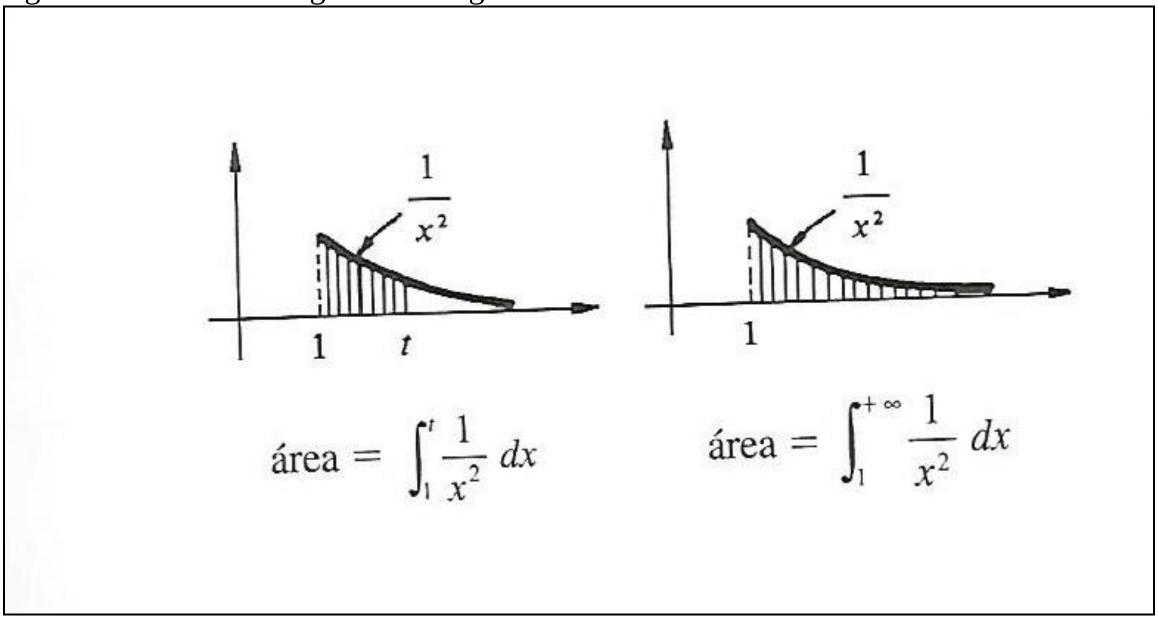
Os dados serão analisados levando em consideração o contexto de Bardin(1977; 2009) relacionados com a Sequência Fedathi, dando continuidade a nossa metodologia de pesquisa que é a Engenharia Didática na fase de análise *a priori*.

3.7.1 O livro de Guidorizzi (1998)

O livro de Guidorizzi (1998) constitui uma obra acessível aos alunos das universidades públicas, o mesmo foi recomendado como referência, por exemplo, nas turmas de Cálculo II do Instituto Federal de Educação do Ceará - IFCE e da Universidade Federal do Acre - UFAC. Esse livro não exibe nenhum registro gráfico com auxílio de algum *software* dinâmico.

Na figura 21, observamos como Guidorizzi (1998, p.56) desenvolve o conteúdo de Integral Imprópria a partir da definição anteriormente já abordada.

Figura 21 – Área da integral sobre o gráfico



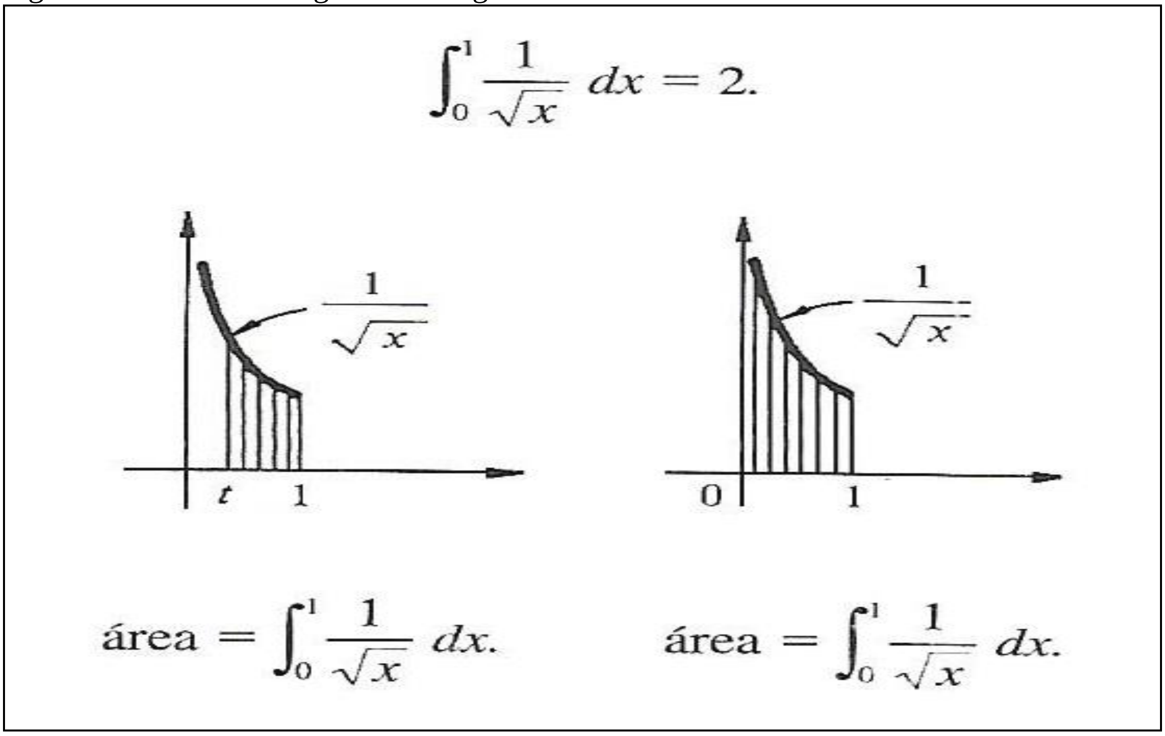
Fonte: Guidorizzi (1998, p. 56).

Nessa figura acima o autor mostra a convergência da integral em questão, também não faz referência a nenhum recurso computacional. Observamos que o gráfico foi feito sem muita preocupação com a natureza e o comportamento da função estudada, além de não favorecer a compreensão do geométrico para o algébrico e vice-versa.

Também verificamos que inicia o conteúdo através da definição formal, usando o algébrico como ferramenta de exploração. Nos exercícios o autor não explora gráfico e fica restrito a visão algébrica das Integrais Impróprias, dessa forma tendência o estudo, deixando a visualização gráfica negligenciada.

A seguir mais um exemplo que Guidorizzi (1998) explora o conteúdo de Integrais Impróprias.

Figura 22 – Área da integral sobre o gráfico



Fonte: Guidorizzi (1998, p. 64).

Na figura 22 o autor mostrar a área da integral sobre a curva, dando ênfase na convergência. Quando passamos para divergência não fica claro na abordagem de Guidorizzi (1998) a visualização gráfica da Integral Imprópria.

Figura 23 – Área da integral sobre o gráfico

EXEMPLO 4. A integral imprópria $\int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen}^3 x \, dx$ é convergente ou divergente? Justifique.

Solução

$$0 \leqslant | e^{-x} \operatorname{sen}^3 x | \leqslant e^{-x}.$$

Como $\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$ é convergente, então $\int_0^{+\infty} | e^{-x} \operatorname{sen}^3 x | \, dx$ também será convergente; pelo Exemplo 3, $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}^3 x \, dx$ é convergente.

Fonte: Guidorizzi (1998, p. 68).

Na figura 23 o autor não faz uso da visualização gráfica, fazendo toda a resolução por meio algébrico.

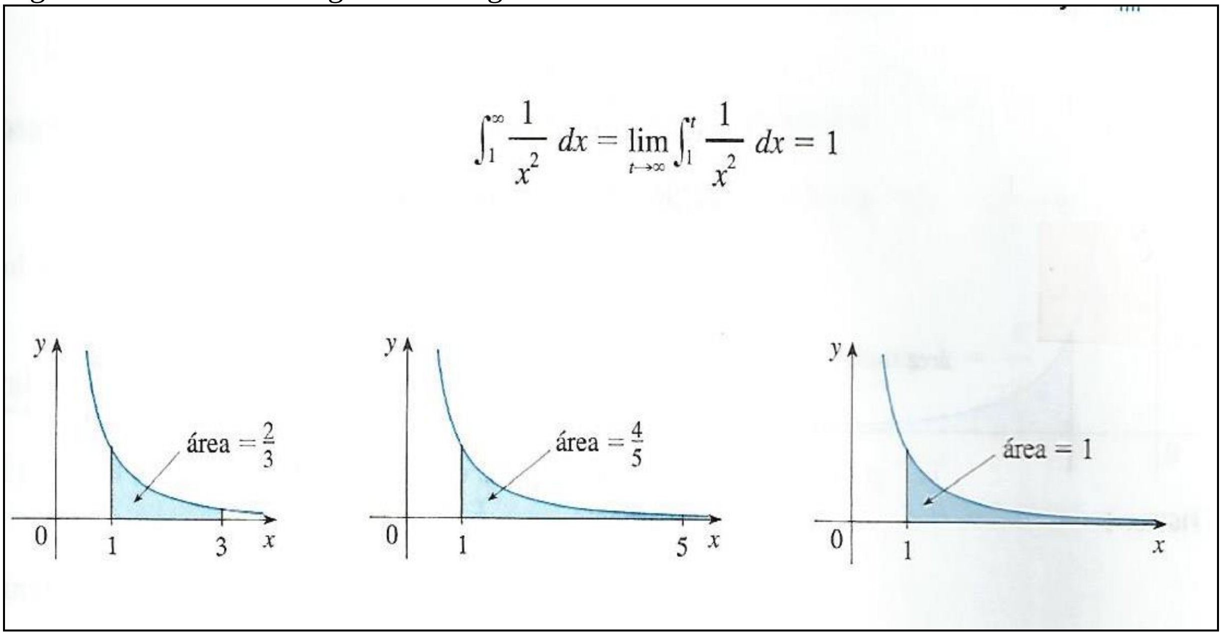
Para concluir nossa análise do conteúdo de Integrais Impróprias do livro de Guidorizzi (1998), salientamos:

- As demonstrações do autor são todas de cunho algébrico, faltando a visualização geométrica;
- Inicia o conteúdo de Integrais Impróprias usando a definição formal e explorando o recurso de termos algébricos;
- O livro explora muito pouco a visualização gráfica através de computador, não especificando que *software* está sendo utilizado;
- Questões contextualizadas para o uso em cursos como as Engenharias não são explorados, assim como faz pouco uso de figuras para a visualização de problemas;
- Em seus exercícios o autor não trabalha com gráficos para visualização do problema proposto.

3.7.2 O livro de Stewart (2011)

O livro de Stewart (2011) pode ser encontrado tanto na biblioteca do IFCE como na da UFAC, além de ter sido indicado para estudos na disciplina de Cálculo II em ambas as instituições citadas anteriormente.

Figura 24 – Áreas da integral sobre o gráfico em vários intervalos



Fonte: Stewart (2011, p. 481).

Na figura 24, podemos verificar que o autor faz uso de gráficos e tenta mostra a convergência da Integral Imprópria, o interessante é que o mesmo faz teste com as integrais definidas até mostrar a Integral Imprópria desejada. Porém, Stewart (2011) usa os termos algébricos com mais frequência sem fazer a conexão do algébrico com o geométrico. A seguir uma figura de um exemplo sem qualquer uso geométrico em sua explicação.

Figura 25 – Exemplo de Integral Imprópria usado em Stewart (2011)

EXEMPLO 2 Calcule $\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx$.

SOLUÇÃO Usando a parte (b) da Definição 1, temos

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 xe^x\,dx$$

Integramos por partes com $u = x$, $dv = e^x\,dx$, de modo que $du = dx$, $v = e^x$:

$$\int_t^0 xe^x\,dx = xe^x\Big]_t^0 - \int_t^0 e^x\,dx$$

$$= -te^t - 1 + e^t$$

Sabemos que $e^t \to 0$ quando $t \to -\infty$, e pela Regra de L'Hôspital temos

$$\lim_{t\to-\infty} te^t = \lim_{t\to-\infty}\frac{t}{e^{-t}} = \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{-e^{-t}}$$

$$= \lim_{t\to-\infty}(-e^t) = 0$$

Portanto,

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx = \lim_{t\to-\infty}(-te^t - 1 + e^t)$$

$$= -0 - 1 - 0 = -1$$

Fonte: Stewart (2011, p. 482).

No exemplo da figura 25, observamos que o autor não faz uso de gráficos, dessa maneira o leitor não tem como associar o algébrico que é desenvolvido pelo autor com o geométrico que poderia enriquecer a didática e a compreensão do leitor. Na parte do Teorema da Comparação Stewart (2011) não usa a visualização gráfica, nem encontramos exemplos de aplicações em probabilidades como é citado por Stewart (2011, p. 480) dizendo que “uma das aplicações mais importantes dessa ideia, distribuições de probabilidades [...]”. O autor podia ter explorado esse fato para desenvolver alguns exemplos resolvidos.

Figura 26 – Exemplo de Integral Imprópria através de Teorema

EXEMPLO 10 A integral $\int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx$ é divergente pelo Teorema da Comparação porque

$$\frac{1+e^{-x}}{x} > \frac{1}{x}$$

e $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ é divergente pelo Exemplo 1 [ou por (2) com $p = 1$]. □

A Tabela 2 ilustra a divergência da integral do Exemplo 10. Parece que os valores não se aproximam de nenhum número fixado.

Fonte: Stewart (2011, p. 487).

Stewart (2011) explora registros gráficos e registros algébricos de forma moderada, nas demonstrações não exagera na formalidade. Dessa forma, o autor demonstra sua preocupação com a visualização gráfica.

Para concluir nossa análise do conteúdo de Integrais Impróprias do livro de Stewart (2011), salientamos:

- O autor faz as demonstrações usando apenas o algébrico sem fazer uso da visualização gráfica;
- Inicia o conteúdo de Integrais Impróprias usando a definição formal, também cita as aplicações e explora o recurso de termos algébricos;
- O livro explora a visualização gráfica através de computador, não especificando que *software* está sendo utilizado. Porém desenvolve exemplo utilizando a visualização;
- Questões contextualizadas para o uso em cursos como as Engenharias são explorados de forma satisfatoria;
- Em seus exercícios o autor trabalha muito pouco com gráficos para visualização do problema.

Concluímos esta seção destacando a tabela a seguir que sintetiza as conclusões à respeito das obras didáticas as quais alunos de várias instituições de nível superior têm acesso durante a disciplina de Cálculo II. Observamos que Guidorizzi (1998) e Stewart (2011) têm limitações quanto ao aprofundamento das Integrais Impróprias.

Observamos que os dados analisados foram relativamente “afetados” pela Sequência Fedathi no que diz respeito à metodologia de ensino. A seguir vejamos o nosso resultado dos livros analisados quanto ao conteúdo de Integral Imprópria.

Tabela 3 – Resultado da análise de conteúdo de Integral Imprópria em Guidorizzi (1998) e Stewart (2011)

Elementos analisados	Guidorizzi (1998)	Stewart (2011)
Quanto às demonstrações	De maneira formal utilizando o algébrico	De maneira formal utilizando o algébrico
Quanto à visualização através de gráficos	Utiliza muito pouco	Utiliza moderadamente
Quanto às definições formais	Não usa o computador na construção do conhecimento	Não usa o computador na construção do conhecimento
Quanto à conversão do algébrico para geométrico e vice-versa	Faz muito pouco em poucos exemplos resolvidos	Faz de maneira moderada, buscando a construção do conhecimento
Quanto à utilização da visualização gráfica em exercícios	Não utiliza	Utiliza moderadamente em alguns exercícios

Fonte: Produção nossa.

Vale ressaltar que na próxima seção iremos descrever nossas situações didáticas, usando a Sequência Fedathi como norteadora, sem deixar de levar em consideração nossa metodologia de pesquisa (Engenharia Didática).

3.8 Descrição das situações didáticas

O estudo da seção anterior foi de fundamental importância para o aprofundamento do conteúdo de Integral Imprópria e o entendimento acerca das formas de utilização por partes de autores de livros. Sendo que analisamos duas importantes obras no que tange ao estudo do Cálculo que foram Guidorizzi (1998) e Stewart (2011), vamos então a seguir apresentar a descrição de nossas situações didáticas usando a Sequência Fedathi como metodologia de ensino. Observamos que esta parte da pesquisa corresponde à análise *a priori* na Engenharia Didática, sendo apenas o material para ser utilizado e não a experimentação de fato.

Ressaltamos que outros trabalhos também usaram parte das fases da Engenharia Didática, como: Refatti (2012) e Gobbi (2012). As mesmas também trabalharam situações didáticas em suas dissertações.

3.8.1 Primeira Situação Didática

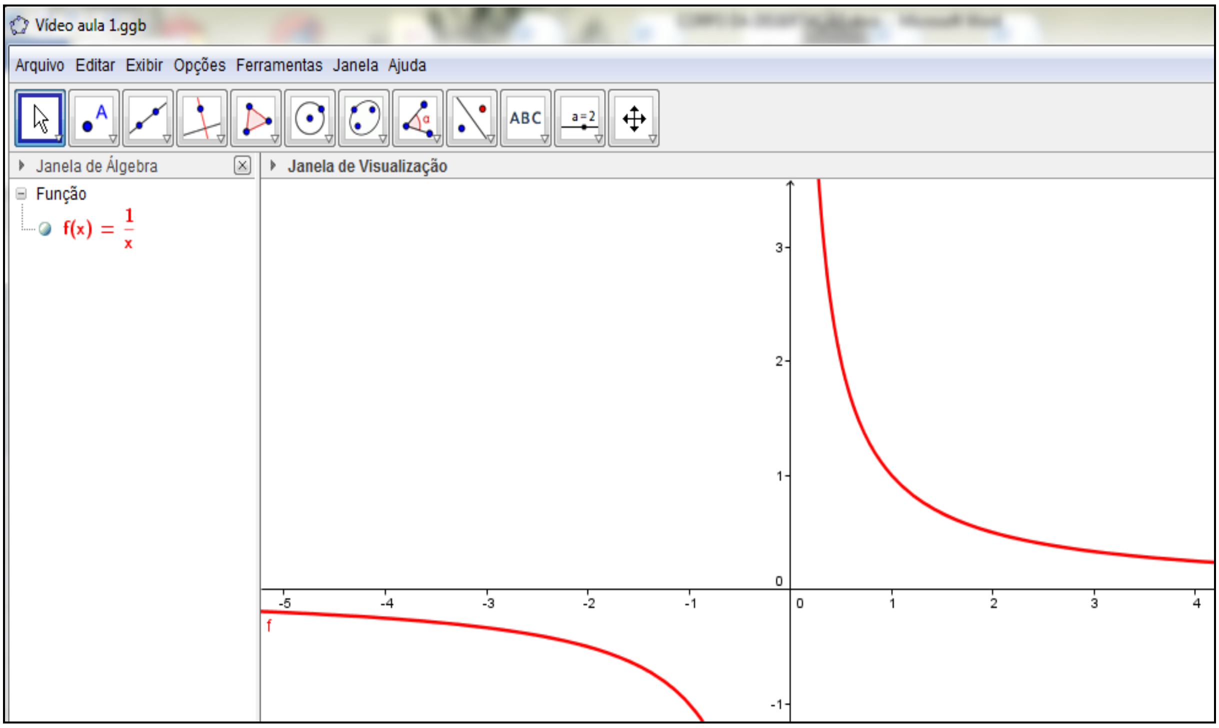
Tomada de Posição: Verifique se a Integral Imprópria $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge ou converge?

Comentário: Esta tomada de posição utilizada é uma situação problema, para a próxima fase da Sequência Fedathi, iremos utilizar o GeoGebra como ferramenta para visualização do problema proposto.

Objetivo: Descobrir se a Integral proposta diverge ou converge atráves da visualização geométrica com auxílio do conhecimento algébrico.

Comentário: Vamos construir a situação didática proposta com o auxílio do GeoGebra, para que possamos ter uma visualização geométrica. Então, primeiro vamos construir o gráfico da função estudada, ou seja, a função integranda.

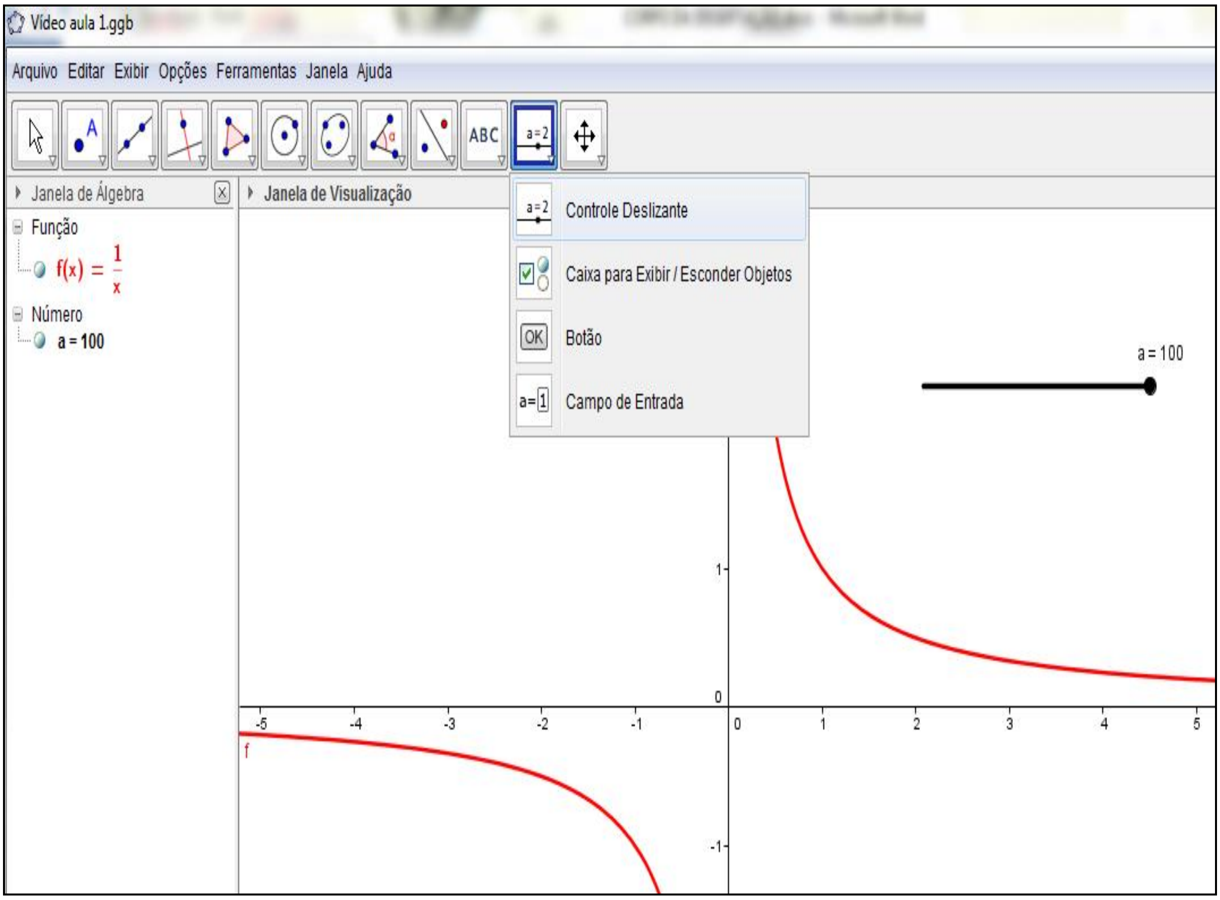
Figura 27 – Gráfico da função integranda



Fonte: Produção nossa.

Comentário: Para construir este gráfico no GeoGebra basta inserir na caixa de entrada a função desejada, em nosso caso foi $f(x) = \frac{1}{x}$. Lembramos que estes comandos que iremos aqui utilizar já foram discutidos em seções anteriores. Agora, vamos para o segundo passo da visualização gráfica utilizando o *software* GeoGebra, utilizarmos o controle deslizante, conforme a figura a seguir.

Figura 28 – Utilização do controle deslizante no gráfico

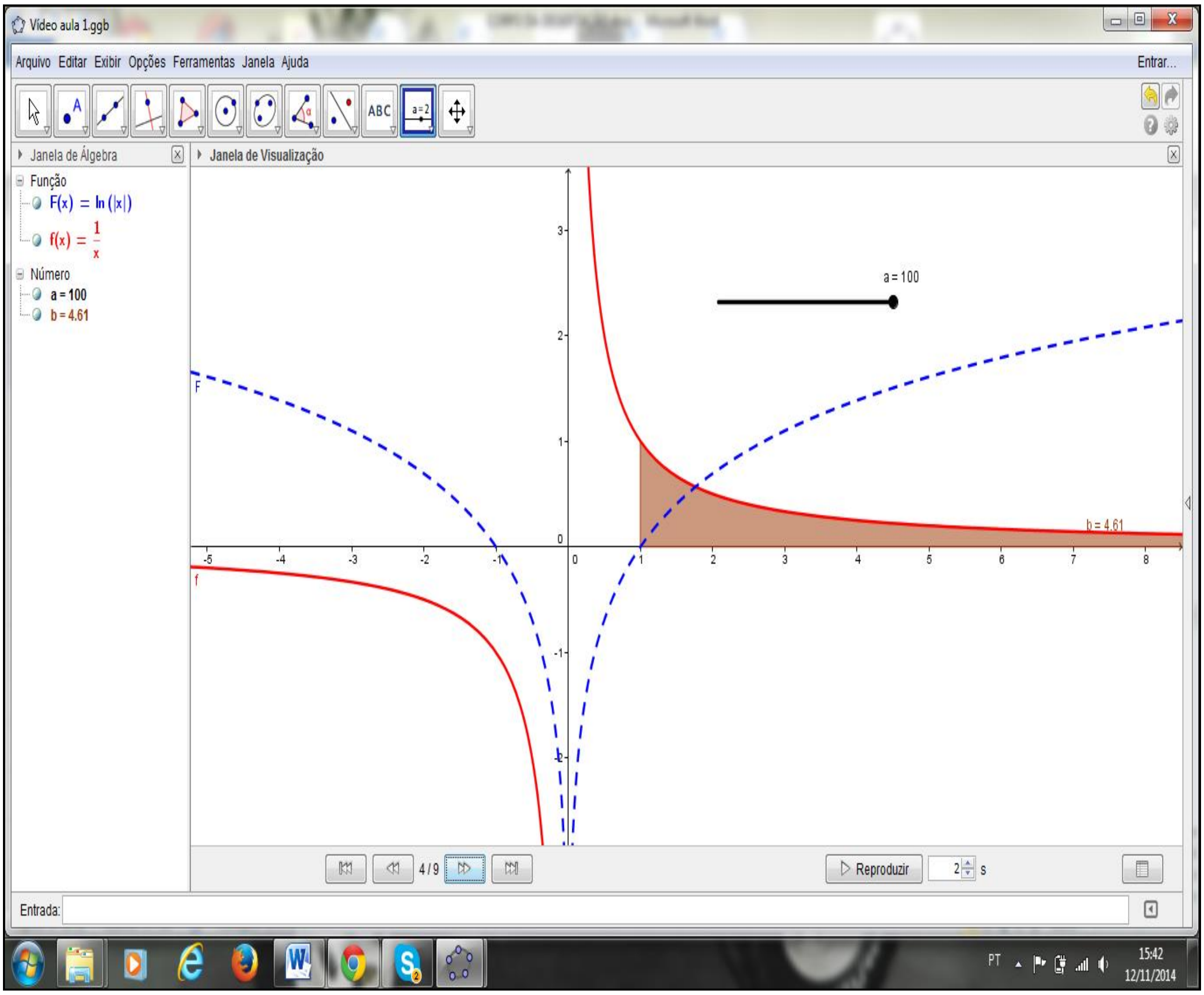


Fonte: Produção nossa.

Comentário: Observamos que enquanto o aluno constrói o gráfico no *software* GeoGebra, já está ocorrendo à fase de maturação, pois o professor está mencionando apenas o comando a ser utilizado e o aluno está fazendo suas análises corretas ou não, conforme o entendimento e amadurecimento de cada aluno. O professor deve intervir o mínimo possível nesta fase Vamos dar continuidade na construção da visualização gráfica, encontrando a área delimitada pelo comando escrito na caixa de entrada "integral[f,1,a], ou seja, integral[função, valor inicial do intervalo do controle deslizante, valor final do intervalo do controle deslizante]".

Observamos que este comando nos mostra área da função estudada no intervalo [1, 100], ou seja, não será a resposta que procuramos, pois estamos querendo a integral de [1, $+\infty$[. Essa Integral Imprópria não pode ser calculada direta, assim como é feita com as Integrais definidas usando o GeoGebra. Logo, esta análise não deve ser colocada no momento da maturação para o aluno, apenas na fase da solução quando ocorre os contraexemplos, conforme Souza *et at* (2013) nos colocar em sua obra.

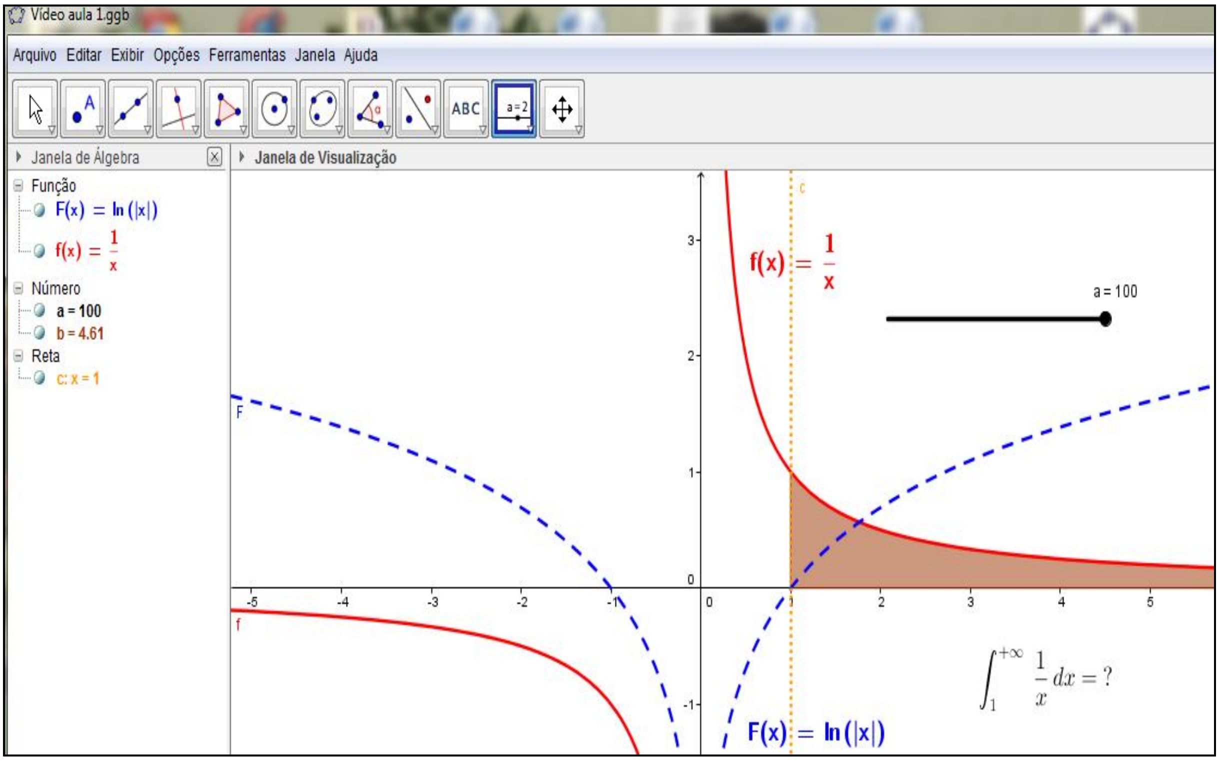
Figura 29 – Construção do gráfico da primitiva da função *f*



Fonte: Produção nossa.

Comentário: A figura 29 nos mostra o gráfico com a primitiva de *f*, esse comando que o professor dará ao aluno é em virtude da definição de Integral Imprópria dessa natureza, porém também não deve ser explicado para o aluno o motivo para o qual devemos encontrar a primitiva, o professor deve fazer com que o aluno construa as perguntas e compreenda a definição explicada anteriormente. Devemos lembrar que o problema nos propõe a calcular a integral no intervalo [1, $+\infty$[, observamos que o GeoGebra nos dar o valor da área sobre a curva calcula, no caso da figura 29 em relação ao intervalo [1, 100], o valor aparece com b = 4,61. Porém o GeoGebra não trabalha com o infinito no intervalo, tendo esta limitação e forçando o uso da definição. Porém, podemos fazer inferências em relação a valores para o intervalo, possibilitando uma análise mais eficaz e aliando o algébrico com o geométrico.

Figura 30 – Gráfico completo da situação didática



Fonte: Produção nossa.

Comentário: Com este gráfico pronto os alunos podem visualizar a tomada de posição proposta de maneira geométrica, podendo de forma dinâmica aumentar o intervalor, por exemplo [1, 1000] e dessa forma verificar de forma empírica se converge ou diverge a Integral Imprópria, claro que não vamos encontrar a resposta, mas a exploração que pode ser feita utilizando o *software* GeoGebra é muito rica e dinâmica.

Solução: Nesta fase o professor deve observar as respostas do aluno e discutir com o uso do GeoGebra as possibilidades que podem ser exploradas, nesse momento acontece a interação entre professor e aluno de maneira mais próxima, podendo o professor manter uma postura construtivista de acordo com a Sequência Fedathi. Dessa forma, não apenas diremos qual resposta está certa ou errada, mas faremos com que o aluno descubra de forma construtivista analisando inclusive as respostas dos colegas de turma.

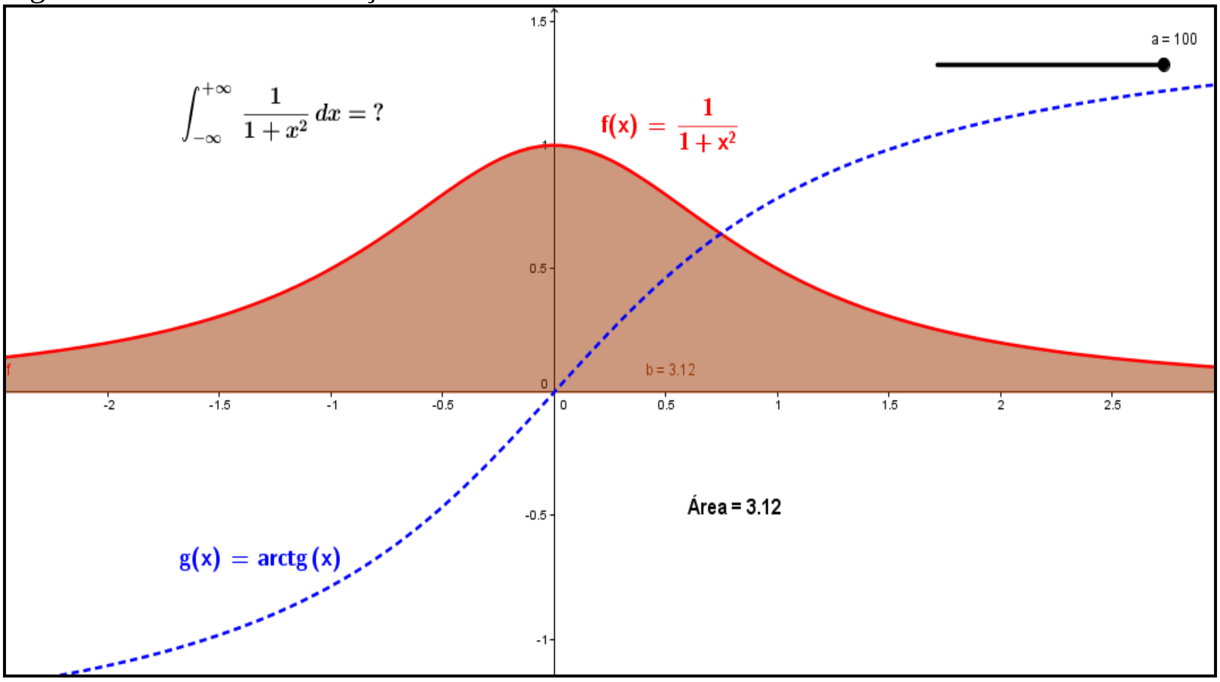
Prova: Nesta fase da Sequência Fedathi o professor deverá resolver formalmente a situação didática proposta, neste caso devemos fazer uso do gráfico construído e dar definição formal de Integral Imprópria. Por fim, algebricamente a resposta deve ser dada pelo professor, esclarecendo que podem existir outras construções correta.

A descrição passo a passo dessa situação didática pode também ser encontrada em http://matematicagama.blogspot.com.br/ em formato de vídeoaula, sabemos que esta ferramenta é muita utilizada nos dias atuais.

3.8.2 Segunda Situação Didática

Tomada de Posição: Descubra se a $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$ converge ou diverge, justifique utilizando cálculos e a figura abaixo.

Figura 31 – Gráfico da situação didática



Fonte: Produção nossa.

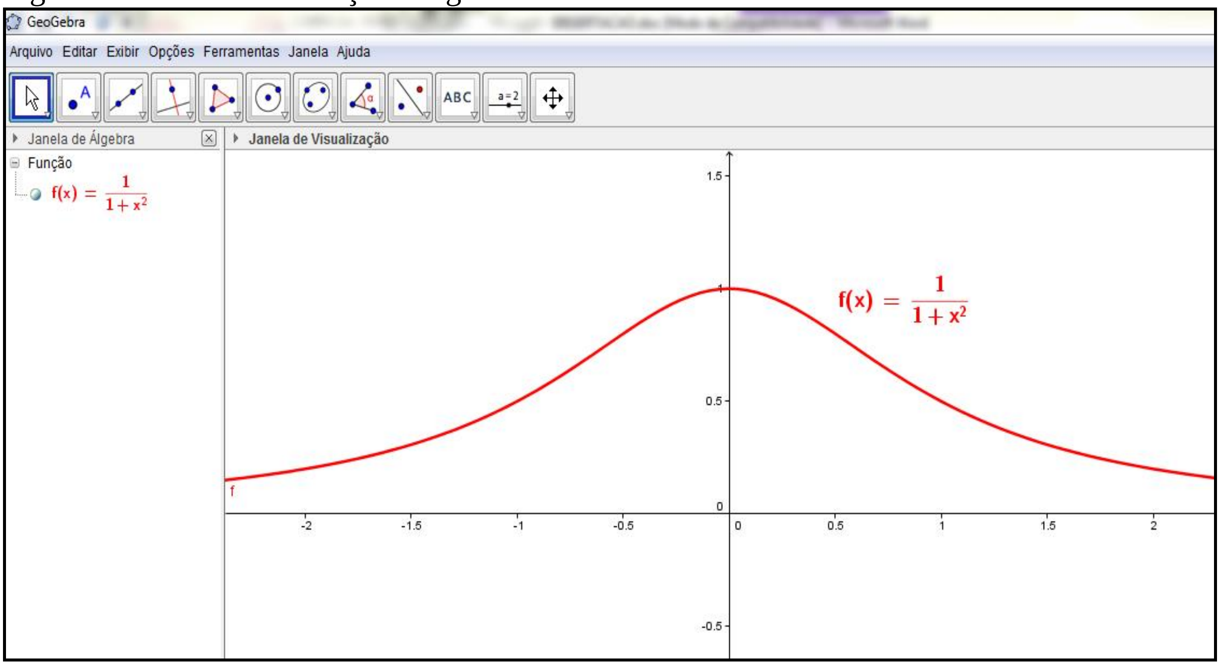
Objetivo: Fazer com que o aluno descubra a importância da visualização gráfica em problemas envolvendo as Integrais Impróprias, como também usar os dados do gráfico para responder algebricamente.

Comentário: Isso possibilitará com que o aluno consiga visualizar a definição e entender como funciona geometricamente a convergência e a divergência.

Maturação: Nesta fase da Sequência Fedathi o aluno deve tentar analisar o problema para poder chegar a uma solução, no caso da figura 31, o aluno pode retirar várias informações importantes. Como por exemplo, o valor da área da integral sobre a curva no intervalo que foi calculado, nesse caso será de 3,12. Começa nesse momento a ser construído uma solução. Também podemos explorar a primitiva de *f* que na figura 30 será *g*, esse dado é importante pela definição que utiliza a primitiva para chegar à resposta, neste caso o geométrico estará ajudando no fazer algébrico.

Solução: Aqui os alunos vão apresentar as suas soluções diversas possivelmente, porém cabe ao professor analisar e dar contraexemplos fundamentados no conteúdo trabalhado (Integral Imprópria). O professor pode no *software* GeoGebra refazer a figura 31, mostrando passo a passo e analisando junto com os alunos para os mesmos verificarem as suas soluções e chegarem a uma construção algébrica embasada na geométrica. Vejamos:

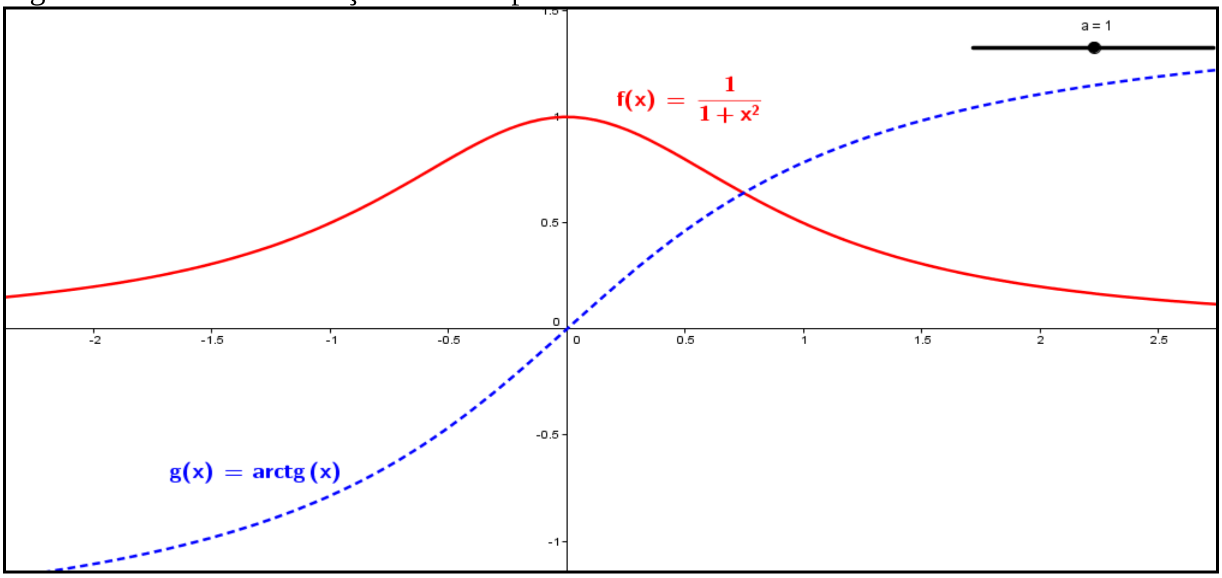
Figura 32 – Gráfico da função integranda



Fonte: Produção nossa.

Comentário: Esse gráfico nos possibilita fazer análise do limite desta função integranda. Vamos da continuidade encontrando o controle deslizante. Também precisamos encontrar a primitiva da função *f* para aplicar a definição de Integral Imprópria e verificar para onde vai o limite de *g* que é a primitiva, isso quando t tender a mais infinito ou a menos infinito, de acordo com a exploração que o aluno vai fazer.

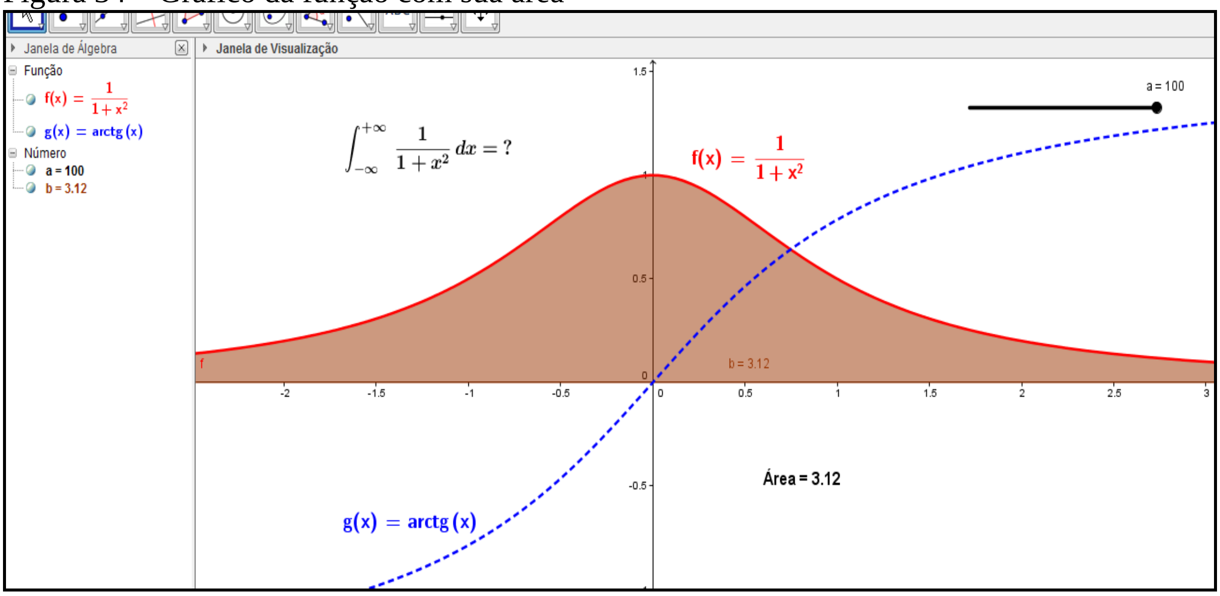
Figura 33 – Gráfico da função com sua primitiva



Fonte: Produção nossa.

Comentário: Vamos agora calcular a área da integral sobre a curva, dessa forma verificamos então que a área corresponde a 3,12, conforme mostra figura 34 a seguir.

Figura 34 – Gráfico da função com sua área



Fonte: Produção nossa.

Comentário: Dessa forma o aluno teve uma descrição de como chegou até a figura proposta na tomada de posição, além de ter discutido várias passagens que vão resultar diretamente em sua solução. Ressaltamos que esse tipo de situação didática pode ser feita no laboratório de informática ou até mesmo na sala de aula com apenas o professor fazer a descrição com auxílio de um data show e um computador.

Prova: Nesse momento o professor pode fazer a formalização da resposta usando as discussões obtidas pelos alunos. Através da exploração do gráfico e com as discussões sobre as soluções encontradas será possível fazer a formalização algébrica, utilizando a definição de Integral Imprópria e os conhecimentos adquiridos na construção do conhecimento. Dessa forma uma solução possível e formal para esse problema é o que encontramos em Stewart(2011, p.483), vejamos a figura 35 a seguir com a formalização.

Figura 35 – Formalização da situação didática

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} \operatorname{tg}^{-1}x\Big]_0^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}(\operatorname{tg}^{-1}t - \operatorname{tg}^{-1}0) = \lim_{t\to\infty}\operatorname{tg}^{-1}t = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to-\infty} \operatorname{tg}^{-1}x\Big]_t^0$$

$$= \lim_{t\to-\infty}(\operatorname{tg}^{-1}0 - \operatorname{tg}^{-1}t)$$

$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Como ambas as integrais são convergentes, a integral dada é convergente e

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

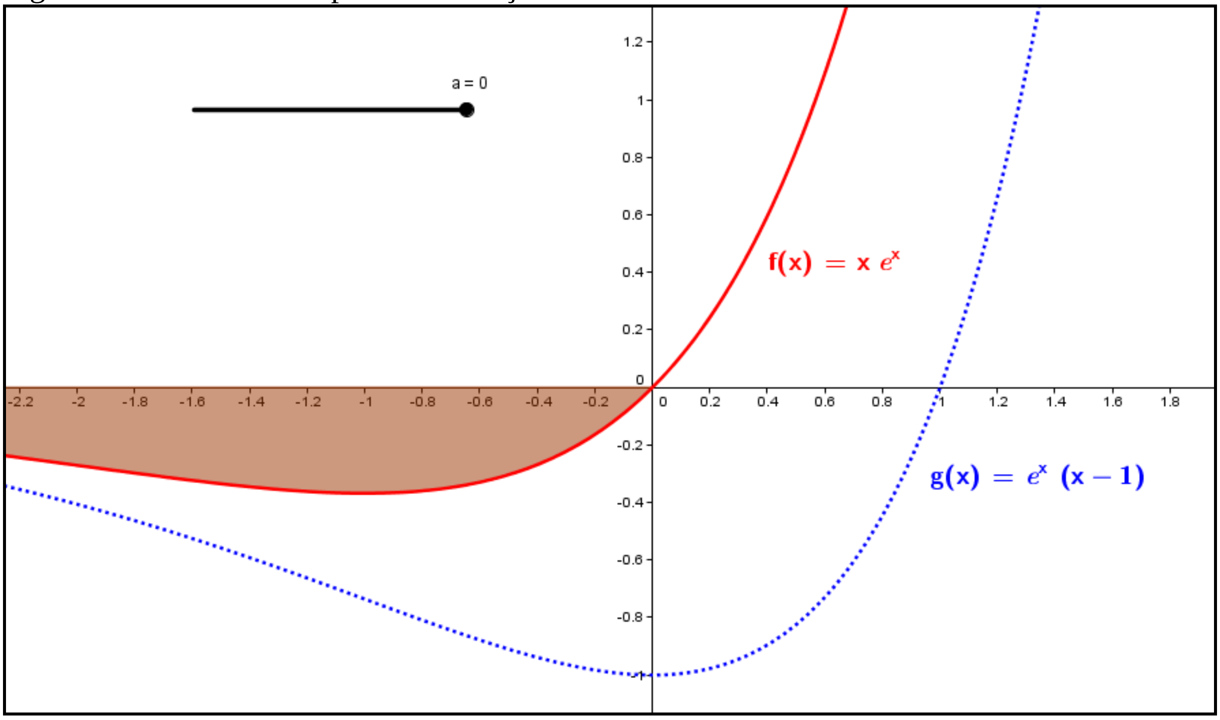
Fonte: Stewart (2011, p.483).

Comentário: Essa pode ser uma das formalizações para a situação didática proposta. Devemos observar que curiosamente a área encontrada é igual a de um círculo de raio igual a um.

3.8.3 Terceira Situação Didática

Tomada de Posição: Discuta a convergência ou divergência da integral imprópria $\int_{-\infty}^{0} xe^{x}\,dx$, utilizando o gráfico abaixo e justificando a resposta através de cálculos.

Figura 36 – Gráfico de suporte da situação didática



Fonte: Produção nossa.

Objetivo: Fazer com que o aluno consiga encontrar a área da integral sobre a curva através da definição e a visualização gráfica.

Comentário: A intenção é fazer com que o aluno verifique as possibilidades que podemos explorar no gráfico com a ajuda do *software* GeoGebra, mas sem deixar de lado a definição forma de Integral Imprópria. Dessa forma, podemos aliar o rigor matemático as novas tecnologias em sala de aula.

Maturação: É interessante que o professor na sala de aula ou em um laboratório de informática, faça um estudo do gráfico apresentado no problema, para isso é interessante utilizar o GeoGebra como ferramenta dinâmica. Reconstruir a figura é uma boa estratégia, mas cada professor pode junto com sua turma desenvolver outras maneiras de “atacar” o problema. Essa também pode ser uma maneira de maturar o problema.

Comentário: O importante na fase de maturação é não induzir o aluno a encontrar a resposta, mas deixar com que eles desenvolvam a exploração de várias formas, algébrica ou geométrica.

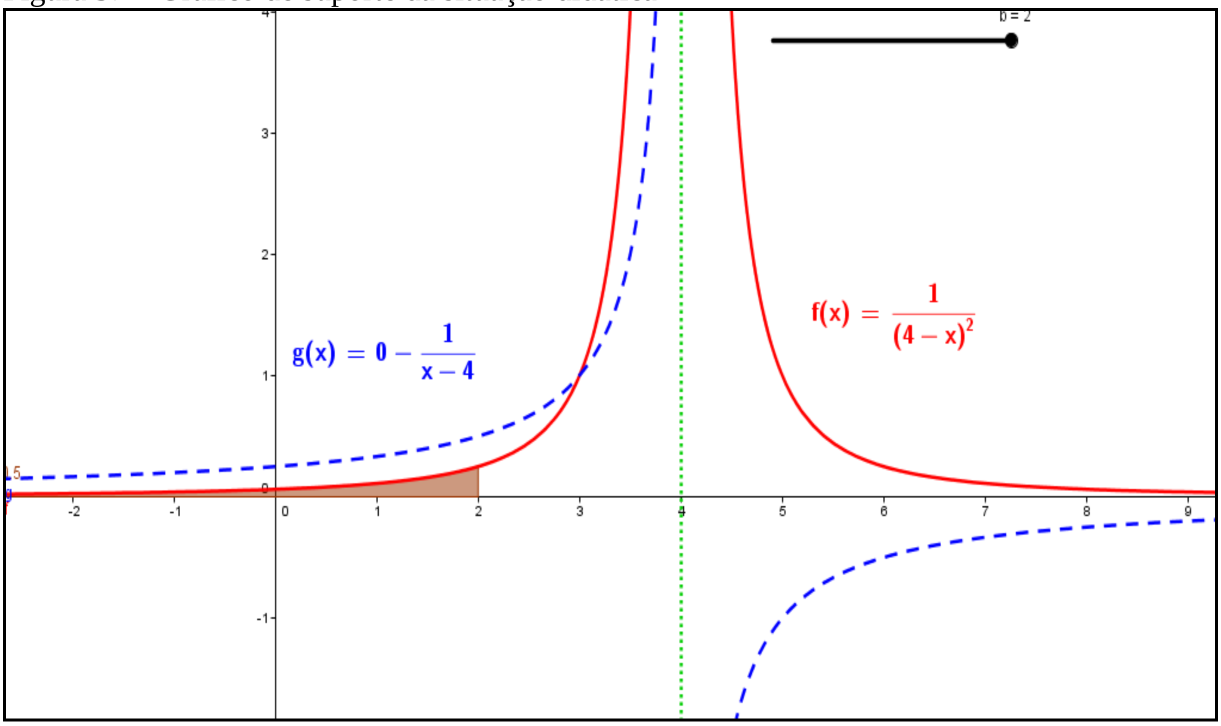
Solução: Os alunos podem apresentar as suas respostas, nesse momento o aluno não precisa necessariamente apresentar uma resposta certa, mas o importante é que seja a que ele construiu através de suas explorações no problema proposto.

Prova: Nesse momento o professor deve apresentar uma solução formal para o problema proposto sem deixar o rigor matemático de lado.

3.8.4 Quarta Situação Didática

Tomada de Posição: Calcule a integral $\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{(4-x)^2} dx$ e discuta a convergência ou divergência utilizando o gráfico.

Figura 37 – Gráfico de suporte da situação didática

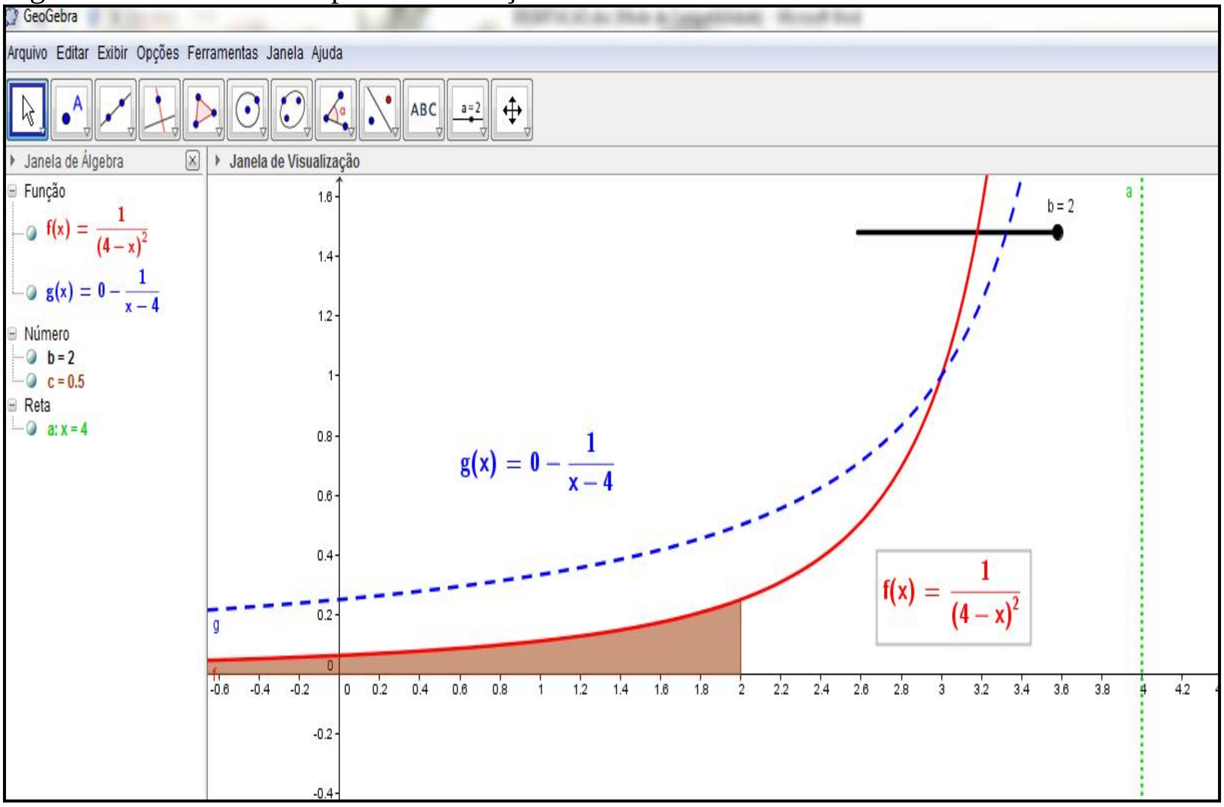


Fonte: Produção nossa.

Objetivo: Encontrar a convergência da Integral Imprópria e mostrar uma solução utilizando a visualização gráfica e o *software* GeoGebra como ferramenta.

Comentário: O professor pode apresentar o gráfico de formas mais significativa, podendo o aluno utilizar o *software* GeoGebra. O gráfico abaixo apresenta mais detalhes (figura 37).

Figura 38 – Gráfico de suporte da situação didática com mais detalhes



Fonte: Produção nossa.

Maturação: Nesta fase da Sequência Fedathi o aluno deve ficar construindo seus conhecimentos acerca do problema proposto, o professor deve o mínimo possível intervir. A troca de experiências com outros colegas é muita rica, dessa forma é interessante que aconteça.

Solução: As possíveis soluções encontradas para o problema devem ser expostas, o professor deve dialogar com os alunos para que eles falem sobre o que encontraram durante a maturação.

Comentário: Nessa fase os alunos vão apresentar se a integral diverge ou converge, além de falarem coo chegaram no resultado. Podendo apresentar algebricamente suas respostas, o professor pode fazer perguntas e dar contraexemplos para poder enriquecer a troca de experiências e a discussão sobre o problema.

Prova: Nesta fase o professor deve apresentar a convergência e explicar como chegou a esse resultado, mostrando a relação entre o algébrico e o geométrico, através do gráfico do problema e explorando o GeoGebra.

3.8.5 Possíveis perspectivas sobre as situações didáticas

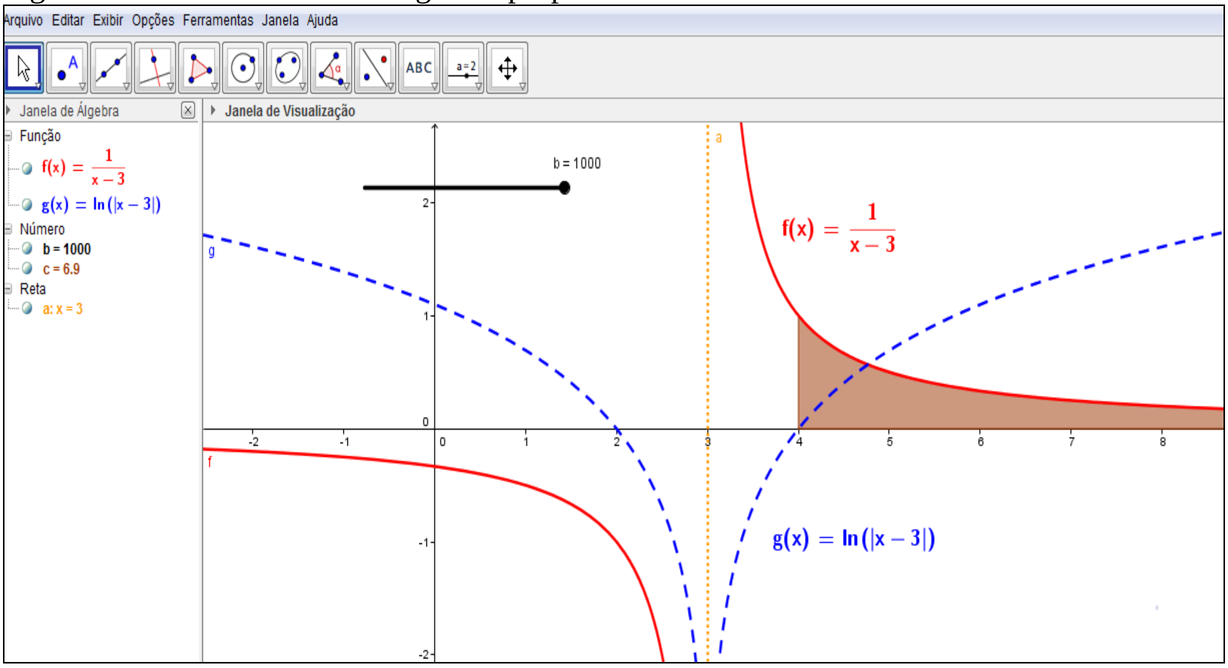
Nossas situações didáticas que apresentamos aqui é fruto de algumas observações que foram feitas no Instituto Federal do Ceará - IFCE e na Universidade Federal do Acre – UFAC, estas citamos no apêndice A. Queremos esclarecer que essas observações não caracterizam uma experimentação da Engenharia Didática, por esta razão não fizemos a validação e não citamos no corpo de nosso trabalho. Nosso trabalho é constituído de três fases da Engenharia Didática, sendo que a terceira que é a experimentação não foi totalmente finalizada, sendo que apenas formulamos as situações didáticas e não aplicamos efetivamente, dessa forma não tínhamos como validar.

Então fica claro que nosso trabalho deve ser continuado em momentos futuros, através de uma tese ou mesmo artigos. Essa é nossa proposta, mais para conseguirmos entender o que vinha acontecendo com o ensino e aprendizagem das Integrais Impróprias, tivemos que observar algumas aulas e até mesmo aplicar algumas atividades conforme aparecem em nossos anexos e apêndice.

Nossas situações didáticas também foram feitas em vídeoaulas as quais aparecem as descrições e comentários de acordo com a Sequência Fedathi, nosso blog a qual vamos descrever na seção a seguir podem ser encontradas esse material e outros que entedemos que são interessante para o estudo das Integrais Impróprias.

A seguir um caso interessante que mostra que o GeoGebra possui algumas limitações. Queremos verificar se a $\int_4^{+\infty} \frac{1}{x-3} dx$ diverge ou converge, para isto vamos usar o GeoGebra como apoio didático, mas antes vamos tentar fazer algebricamente os cálculos necessários utilizando a definição de Integral Imprópria. Então, $\int_4^{+\infty} \frac{1}{x-3} dx$ pode ser escrita como, $\lim_{t\to+\infty} \int_4^{t} \frac{1}{x-3} dx = \lim_{t\to+\infty} [ln|t-3| - 0] = +\infty$ $\therefore$a integral diverge. Até porque verificamos que tal limite possui o mesmo comportamento de $\lim_{x\to+\infty} ln|x-3| = +\infty$. Vamos observar o gráfico na figura 39.

Figura 39 – Gráfico de uma Integral Imprópria



Fonte: Produção nossa

Usando o GeoGebra como ferramenta de visualização gráfica, observamos que quando aumentamos o valor do intervalo no controle deslizante a área vai aumentando até chegar num momento que cresce muito devagar. Isto não ajuda na construção de uma solução para o problema, dessa forma verificamos que o software Geogebra apresenta limitações quanto ao comportamento de Integrais Impróprias divergentes, tendo que recorrermos aos cálculos algébricos para constatarmos nossas incertezas.

3.9 O Produto educacional

Nosso produto educacional foi idealizado de duas formas: vídeoaulas e um blog de interação e visualização de vários materiais de Cálculo (com principal atenção para as Integrais Impróprias), inclusive as vídeoaulas que nós produzimos das respectivas situações didáticas que foram discutidas em nossa pesquisa. O endereço de nosso blog consiste em: http://matematicagama.blogspot.com.br/.

Não podemos esquecer que segundo a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior)/MEC, contém alguns esclarecimentos relativos ao Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática no país. Podemos citar Moreira e Nardi (2009, p.4) que escreveram um artigo para esclarecer quaisquer dúvidas em relação a este tipo de mestrado, vejamos:

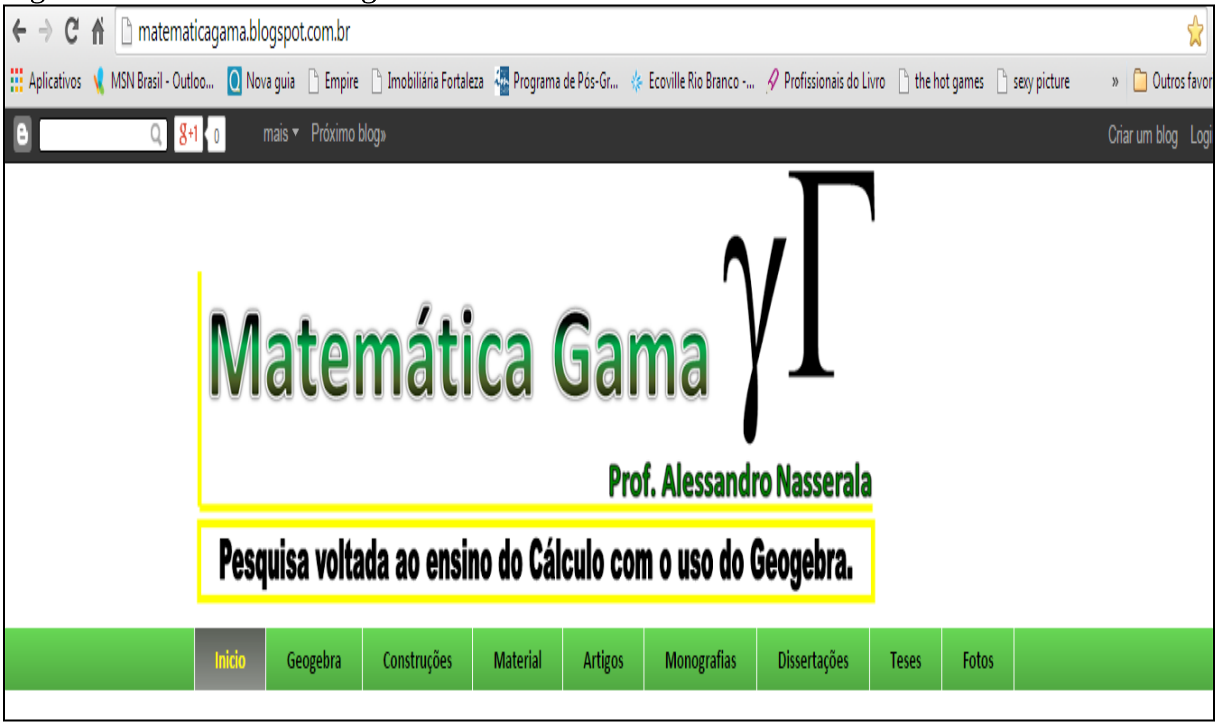
> O trabalho de conclusão e o produto educacional: ainda que se mantenha a nomenclatura de dissertação, a natureza do trabalho de conclusão do mestrado profissional é distinta da do acadêmico [...] Este produto pode ter a forma de um texto sobre sequência didática, um aplicativo, um CD, um DVD, um equipamento; enfim, algo identificável e independente da dissertação [...]

Essa citação nos deixa clara a importância do produto educacional para um mestrado profissional, e ainda podemos considerar, que fizemos dois produtos as vídeoaulas e o blog.

3.9.1 A descrição do blog Matemática Gama

É de nosso interesse fazer uma breve descrição de nosso blog que já pode ser encontrado na rede desde agosto de 2013, o blog foi construído de acordo com as necessidades dos usuários e o objetivo de nossa pesquisa. A seguir a interface da página inicial de nosso blog interativo.

Figura 40 – Interface do blog Matemática Gama

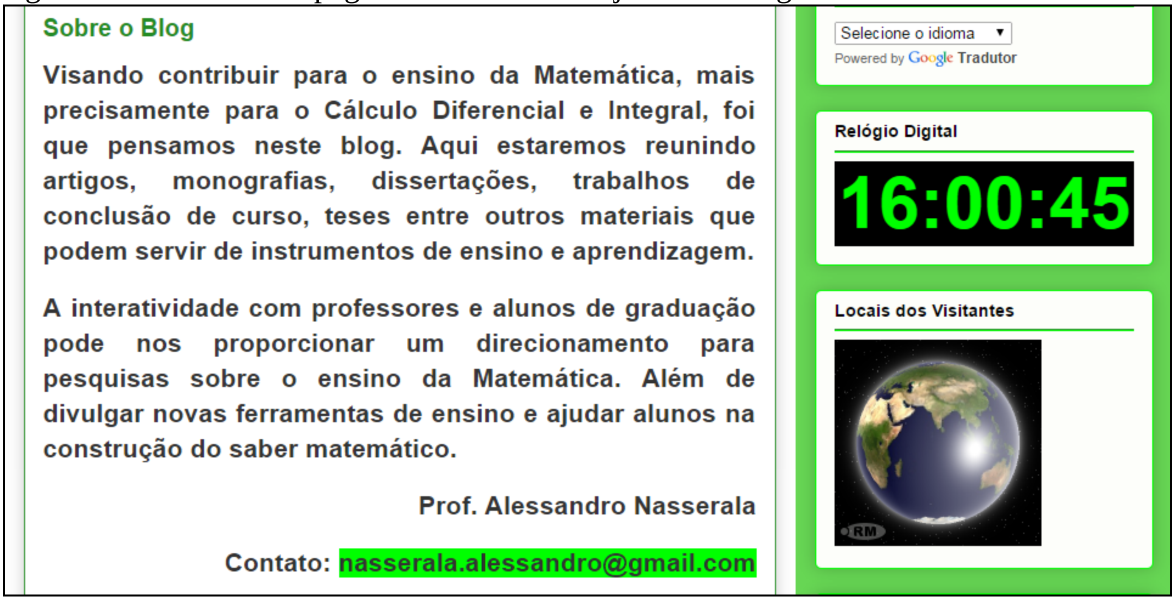


Fonte: http://matematicagama.blogspot.com.br/

Em nosso blog também podemos fazer interação com alunos dos cursos de Cálculo dos mais variados locais, sendo que nossa principal fonte de internautas cursa a Universidade Federal do Acre – UFAC. Isso ocorre em virtude de nossa divulgação ter acontecido principalmente nesta instituição de ensino, mas também temos alunos da Unichristus de Fortaleza – CE e de outras instituições de ensino. Os alunos curtem nossas postagens e visualizam os vídeoaulas interagindo virtualmente conosco. Nossa página já está no ar desde agosto de 2013 e já possui 42 seguidores e 3 457 acessos (em 01/11/2014).

Nosso blog está constituído também de construções geométricas através do GeoGebra, artigos diversos, monografias, dissertações, teses; também pode ser encontrado o *software* GeoGebra que pode ser baixado facilmente através de um link que disponibilizamos.

Figura 41 – Interface da página inicial com o objetivo do blog



Fonte: http://matematicagama.blogspot.com.br/

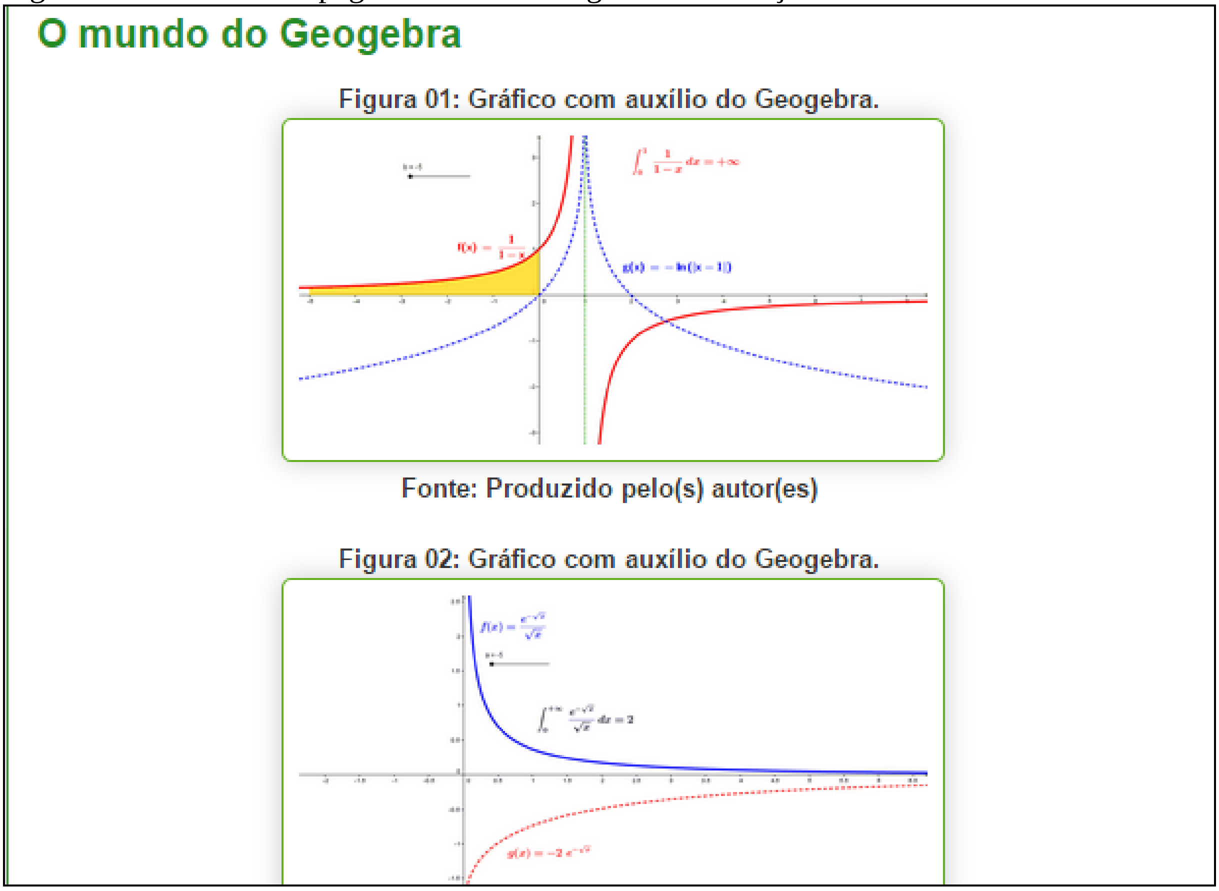
Em nosso blog também temos outros professores que são seguidores e membros, fazendo algumas críticas construtivas para enriquecer ainda mais a construção do conhecimento em relação ao Cálculo.

Figura 42 – Interface da página inicial

Fonte: http://matematicagama.blogspot.com.br/

Nesse blog também colocamos algumas construções sobre as Integrais Impróprias, possibilitando a visualização dos internautas, podemos salientar que são construções dinâmicas.

Figura 43 – Interface da página inicial com algumas construções no GeoGebra



Fonte: http://matematicagama.blogspot.com.br/

A seguir a quantidade de visualizações até o dia 01/11/2014 às 18h no horário do Acre, não podemos deixar de salientar que a quantidade de participações para um blog científico e de cunho acadêmico tem sido uma surpresa.

Figura 44 – Interface da página inicial das visualizações

Fonte: http://matematicagama.blogspot.com.br/

Como o *software* GeoGebra é ferramenta efetiva em nossa pesquisa, colocamos um link especial em nosso blog para que o internauta possa baixa o *software* sem maiores problemas. A nossa intenção é promover a utilização principalmente do GeoGebra em problemas que envolvam o Cálculo, em nosso caso especial atenção para as Integrais Impróprias. Apesar de não validarmos nossa pesquisa, claro que podemos deixar esta fase da Engenharia Didática para futuras pesquisas, podemos afirmar que a interação de situações didáticas através da internet, e principalmente com vídeoaulas é bastante significativa e utilizada por alunos e professores de diferentes instituições.

Figura 45 – Interface da aba GeoGebra no blog Matemática Gama

Fonte: http://matematicagama.blogspot.com.br/

3.9.2 As vídeoaulas

Nossas vídeoaulas seguem algumas sistemáticas básicas, que vamos discutir nesta seção. Em primeiro plano nos preocupamos em seguir a Sequência Fedathi como sequência de ensino e procuramos utilizar situações didáticas a partir das Integrais Impróprias. Para chegar nesse nível seguimos três fases da Engenharia Didática a qual adotamos como nossa metodologia de pesquisa, mas também tivemos que procurar um programa eficaz para gravar as vídeoaulas, assim como os matérias necessários para o uso na gravação, como a tábua para escrever com uma caneta especial (prancheta eletrônica intuos wacon). Então vamos começar relacionando o material necessário: computador, *software* GeoGebra instalado no computador, programa OCAM para gravação das vídeoaulas, prancheta eletrônica intuos wacon ou similar e microfone para falar nas vídeoaulas.

Na concepção da situação didática, é pertinente encontrar um problema significativo ao conteúdo, resolver a situação didática previamente e estruturar dentro da Sequência Fedathi.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso trabalho buscou descrever situações didáticas com auxílio do *software* GeoGebra, amparado na Sequência Fedathi sobre Integrais Impróprias com ênfase na visualização gráfica. Desse modo, tecemos algumas considerações acerca dos resultados obtidos, destacando sua relevância e contribuições para a área, bem como sugestões para futuras pesquisas.

Levamos em consideração a preocupação da CAPES/MEC citada por Moreira e Nardi (2009) neste trabalho, na qual evidencia o produto educacional. Dessa forma, nossa investigação seguiu as fases da Engenharia Didática (fase preliminar, fase *a posteriori*, experimentação e validação), porém desenvolvemos as duas primeiras por completo, a terceira não completamos totalmente, ficando seu complemento e a última fase para futuros trabalhos que possam ser desenvolvidos.

Podemos afirmar a partir de nossa pesquisa que a visualização gráfica através do *software* GeoGebra é importante para o ensino e aprendizagem do Cálculo, em especial das Integrais Impróprias ou generalizadas, unimos o rigor matemático às novas tecnologias que estão sendo desenvolvidas na atualidade. Com isso nossos questionamentos e objetivos específicos foram alcançados.

Nossas reflexões se coadunam com as orientações registradas por especialistas, ao sublinharem que o profissional de um Mestrado Profissionalizante "deve saber o que está ensinando e saber como ensinar esse conteúdo". (MOREIRA & NARDI, 2009, p. 3), na medida em que, as atividades envolvendo a visualização, apoiadas pela Sequência Fedathi, nos proporcionaram maior aprofundamento reflexivo sobre nossa prática docente.

Dessa forma, desenvolvemos situações didáticas sobre Integrais Impróprias que pudessem ajudar nesse processo de ensino e aprendizagem, para isto verificamos que era necessário entender melhor as Integrais Impróprias, por isso, buscamos sua história a partir do Cálculo propriamente dito, como também o conteúdo que é exposto por autores de livros de Cálculo como: Guidorizzi (1998) e Stewart (2011). Percebemos que a maneira que é trabalhada a estrutura didática e metodológica dos livros é muito tradicional e extremamente formal, e para aprimorarmos o ensino, usamos um *software* dinâmico com mais aplicações, e desenvolvemos nossas situações didáticas.

Sabemos que o produto educacional é o principal objetivo para a CAPES, este deve visar à melhoria de implementação de estratégias ou produtos de natureza educacional, visando à melhoria do ensino em uma área específica de Ciências ou Matemática. Em virtude disto, o uso das novas tecnologias é fundamental para o desenvolvimento do aspecto cognitivo dos estudantes de hoje e como nosso mestrado é profissional, a CAPES considera um dos objetivos o produto educacional, por este motivo, desenvolvemos vídeoaulas e também um blog para divulgação e interação de trabalhos sobre Cálculo e especificamente, Integrais Impróprias ou generalizadas. A metodologia de ensino, através da Sequência Fedathi foi fundamental para que pudéssemos estruturar nossas situações didáticas e desenvolver uma concepção construtivista.

Podemos afirmar que através das situações didáticas que construímos encontramos uma forma de contribuir com o ensino e aprendizagem das Integrais Impróprias, através do material escrito e nossas vídeoaulas podem subsidiar estudantes a melhorar os seus métodos de aprender e de construir o saber matemático.

Concluímos este trabalho de modo satisfatório alcançando os objetivos que foram propostos, já que estamos deixando como produto educacional vídeoaulas e um blog que servirá como motivação e embasamento para outros trabalhos que possivelmente poderão ser desenvolvido em breve. Nossos objetivos específicos foram alcançados e entendemos que podemos desenvolver trabalhos futuros, fazendo a experimentação e validação das situações didáticas que foram elaboradas e descritas.

Ressaltamos que apesar desta pesquisa aplicada (MOREIRA & NARDI, 2009, p. 5) ter um enfoque prático no ensino da disciplina de Cálculo II, as discussões referentes à Sequência Fedathi, incluindo postura e mediação docente, elaboração e execução das situações didáticas, importância do uso de recursos e estratégias de ensino como subsídio ao professor, podem ser apreciadas e replicadas por professores de qualquer outra disciplina ou nível de ensino da Matemática. O que faz com que as contribuições deste estudo possam se estender de forma diversificada.

Esperamos, portanto, despertar diferentes percepções e atitudes na práxis docente, suscitando a vontade de (re)elaborar a forma de abordagem dos conceitos de Cálculo discutidos por meio da Sequência Fedathi e o software GeoGebra, percorrendo caminhos favoráveis à reflexão discente sobre as noções das Integrais Impróprias, buscando superar as dificuldades inerentes ao próprio conteúdo e evitar a chamada fraude epistemológica.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. E. **Informática na Educação**. *In:* ProInfo: Informática e formação de Professores. Brasília: Ministério da Educação/SEED, 2000. 2v. v.1, p.19-47.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007. 218p.

ALVES, F. R. V. **Aplicações da Sequência Fedathi na promoção do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis.** 2011. 397p. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de Fortaleza, Fortaleza, 2011.

ALVES, Francisco, R. V. **Discussão da noção de integral imprópria com o auxílio do software GeoGebra**. *In*: Actas de la Conferencia Latinoamericana de GeoGebra. 2012, p. 48-55.

ALVES, Francisco, R. V. Discussão da noção de integral imprópria com o auxílio do *software* GeoGebra. *In:* CONFERÊNCIA LATINOAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 2013, p. 48-55. Montevideo. **Anais...** Montevideo: CLEM, 2013.

ALVES, Francisco. R. V.; BORGES NETO, Hermínio. D**iscussão do Ensino de Integrais Impróprias com amparo da tecnologia**. *In:* Encontro Nacional de Educação Matemática, 11 - ENEM, Curitiba-PR. 2013.

ANACLETO, G. M. C. **Uma investigação sobre a aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo.** 2007. 195p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

ARTIGUE, Michelle. **Ingénierie didactique**, *In:* BRUN, J. Didactiques des Mathématiques, Paris: Delachaux et Niestlé, 1996, p. 243-264.

ARTIGUE, Michelle. **Didactical Design in Mathematics Education**. *In:* Proceedings of NORMA08 – Nordic Research in Mathematics Education, 2009.

BALDINI, Loreni A. F. **Construção do conceito de área e perímetro:** uma sequência didática com auxílio de *software* de Geometria Dinâmica. 2004. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Paraná, 2004.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. 7 ed. Lisboa, Portugal: Edições 70, 2009.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Lisboa, Portugal: Edições 70, 1977. 225p.

BARUFFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral.** 1999. 267p. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BARRETO, M. C. **Análise do Nível de Raciocínio Matemático e da Conceitualização de Conteúdos Aritméticos e Álgébricos no Ensino Fundamental: Considerações Acerca de**

Alunos do Sistema Telensino Cearense. 2002. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de Fortaleza, Fortaleza, 2002.

BARBOSA, Marcos Antonio. **O insucesso no ensino e aprendizagem na disciplina de cálculo diferencial e integral**, 2004. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2004.

BELL, E. T. **The development of Mathematics**. London: McGraw-Hill Book Company. 651p., 1945.

BLOCH, Ethan, D. **The Real Number and Real Analysis**. New York: Springer. 2011. 577p.

BORGES NETO, H. Uma classificação sobre a utilização do computador pela escola. *In:* **Revista Educação em debate.** FACED-UFC. Fortaleza, Ano 21, nº 37, 1999.

BORGES NETO, Hermínio. *et al*. **A Seqüência Fedathi como proposta metodológica no ensino-aprendizagem de Matemática e sua aplicação no ensino de retas paralelas**, 15 EPENN - Encontro de Pesquisa Educacional do Nordeste, São Luis, 2001, p. 590-609.

BOYER, Carl B.. **The History of the Calculus and its Conceptual Development**. New York, Dover Publications, INC, 1949.

________. **The concepts of the Calculus: a critical and historical discussion of the derivative and the integral**. New York: Columbia University Press, 344p., 1959.

________. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Cálculo**. Tradução de Hygino H. Domingues. Atual Editora Ltda. São Paulo, 93p., 1993.

BOTTAZZINI, Umberto. **The Higher Calculus: a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass**. New York: Springer, 1986. 191p.

CAMPOS, M. O. C. **Cabri-Géomètre**: uma aventura epistemológica. 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Brasileira) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 1998.

CAMPOS, Edison de Faria. **Ingeniería Didática**. Cuadernos de investigación y formación em educación matemática. Costa Rica, n.2, dez. 2006.

CAVAILLÉS, Jean. **Philosophie des Mathématiques**. Paris: Hermann, 1962. 274p.

DUVAL, Raymond. **Sémiosis et Pensée Humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels,** Editeur: Peter Lang, 1995.

DUVAL, Raymond. **L'analyse cognitive du fonctionnement de la pensée de l' activité mathématique: cours sur les apprentissages intellectuels donné à la PUC-SP**. São Paulo: Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 1999.

ECHEVERRY, N. **La ensenãnza del concepto de limite:** continuidad y rupturas entre los niveles médio y universitário**.** 2001, 345p. Tesis (Doctorado en educación), Universidad Nacional de Rio Cuarto, Córdoba, 2001.

EDWARDS, C. H. **The Historical Development of Calculus**. New York: Springer Verlag. 362p., 1979.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o Ensino da Matemática no Brasil. **Zetetiké.** Campinas – SP, v.3, n.4, 1995, p.51-60.

FISCHBEIN, Efrain. **The theory of Figural Concept**. *In:* Educational Mathematics Studies, Netherlands: Klumer Academic Publishers, 1993. p.139-162.

FREITAS, J.L.M. Situações Didáticas. *In:* MACHADO, S.D.A. (Org.) – **Educação Matemática – uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999, p. 65-87.

GOBBI, Juliana A. **Do livro didático ao *software* GeoGebra: a engenharia didática no estudo de figuras planas na 6ª série/7º ano do ensino fundamental**. 2012. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física e Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Rio Grande do Sul, 2012.

GRATTAN-GUINESS, Ivor. **The development of the Foundations of Mathematical Analisys from Euler to Riemann**. Massachusetts: MIT Press, 1970. 192p.

GRAVINA, M. A. Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. *In:* VII CONGRESSO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 7 – CBIE. 1996. Belo Horizonte - MG. **Anais...**. Belo Horizonte, 1996.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo,** v. 2, Rio de Janeiro: LTC. 1998. 406p.

JUCÁ, A. M. **Construções geométricas no ambiente virtual de ensino TeleMeios com mediação na Sequência Fedathi.** 2011. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011.

KLINE, Morris. **Mathematical thought from ancient and moderns times**. New York: Oxford University Press. 428p., 1972.

LIMA, Elon. L. **Análise Real**, v. 1, Rio de Janeiro: SBM. 2006. 148p.

LOPES, Maria Maroni. Sequência Didática para o Ensino de Trigonometria Usando o *Software* GeoGebra. **Bolema.** Rio Claro – SP, v.27, n.46, 2013, p.641-644.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Engenharia didática**. Educação Matemática: Uma introdução. São Paulo: Educa, 1999, P. 197-208.

MAOR, Eli. E: **A história de um número.** Tradução de Calife. Rio de Janeiro: Record, 2003.

MATEUS, Pedro**. Cálculo Diferencial e Integral nos livros didáticos: uma análise do ponto de vista da organização praxeológica**. 2007. 187p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

MOREIRA, Marco A.; NARDI, Roberto. O mestrado profissional na área de Ensino de Ciências e Matemática: alguns esclarecimentos. **R.B.E.C.T.** v.2, n.3, 2009.

NASSER, L. **Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos.** *In*: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.) Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates. Recife: SBEM, p. 43-58, 2009.

NASSERALA, Alessandro M.; ALVES, Francisco. R. V.; SILVA, Sandro R. P. **O ensino da Integral Imprópria usando o GeoGebra: discussões de situações didáticas com apoio na Sequência Fedathi.** *In:* Semana de Educação Matemática, 2 – Novas Práticas e Perspectivas para Formação Docente, Rio Branco-AC. 2013.

NASSERALA, Alessandro M.; ALVES, Francisco. R. V. Discussão da noção de integral imprópria com o auxílio do *software* GeoGebra. *In:* CONFERÊNCIA LATINOAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 2014, p. 48-55. Montevideo. **Anais...** Montevideo: CLEM, 2014.

NASSERALA, Alessandro M.; PINHEIRO, Ana C. M. Um estudo do ensino da Integral Imprópria com o uso da Sequência Fedathi – uma proposta metodológica para as licenciaturas. *In:* COLOQUIO INTERNACIONAL SOBRE ENSENANZA DE LAS MATEMÁTICAS. 2014, p. 206-212.Lima-Peru. **Anais...** Lima: CIEM, 2014.

RAMOS, R. C. S. S.; SALVI, R. F..**Análise de conteúdo e análise do discurso em educação matemática – um olhar sobre a produção em periódicos *qualis* A1 e A2**. *In:*Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 4 - SIPEM, Brasília-DF. 2009.

REIS, Frederico da Silva. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise:** a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**.** 2001. 302p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

REFATTI, Liliane R**. Uma sequência didática para o estudo de transformações geométricas**. 2012. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física e Matemática) - Centro Universitário Franciscano, Rio Grande do Sul, 2012.

ROCHA, Elizabeth Matos. **Tecnologias digitais e ensino de matemática:** compreender para utilizar. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2008.

SOUZA, M.J.A. **Aplicações da Sequência Fedathi no ensino e aprendizagem da geometria mediada por tecnologias digitais**. 2010. 231p. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2010.

SOUZA, M. J. A. Sequência Fedathi: apresentação e caracterização. *In*: SOUSA, F. E. E. *et al*. (Org.). **Sequência Fedathi**: **uma proposta pedagógica para o ensino de Ciências e Matemática**. Fortaleza: Edições UFC, 2013. 184p.
SANTANA, J. R. **Educação Matemática**: **Favorecendo investigações matemáticas através do computador**. 2006. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2006.

SANTOS, Javilane A. dos. **TeleMeios:** ferramentas interativas para o ensino à distância. Monografia (Graduação em Pedagogia) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2010.

SANTOS, M. J. C. **Reaprender frações por meio de oficinas pedagógicas**: desafio para a formação inicial. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Brasileira) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2007.

SILVA, J. F. **Questões Metodológicas do Ensino de Cálculo Diferencial e Integral I**. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, 1994.

SOUZA, M. J. A. **Informática na Educação Matemática**: estudo de geometria no ambiente do *software* Cabri-Géomètre. 2001. Dissertação (Mestrado em Educação Brasileira) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2001.

STEWART, James. **Cálculo,** v.1, São Paulo: CENGACE Learning, 2011. 535p.

TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking**. Mathematics Education Library, v. 11, London: Klumer Academic Publishers, 2002.

THOMAS, George B. **Cálculo,** v.1, São Paulo: Pearson. 2012. 634p

TORRES, T. I. M.; GIRAFFA, L. M. M. **O Ensino do Cálculo numa perspectiva histórica: Da régua de calcular ao MOODLE.** *In*: REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática. V4, p.18-25, São Paulo. UFSC: 2009.

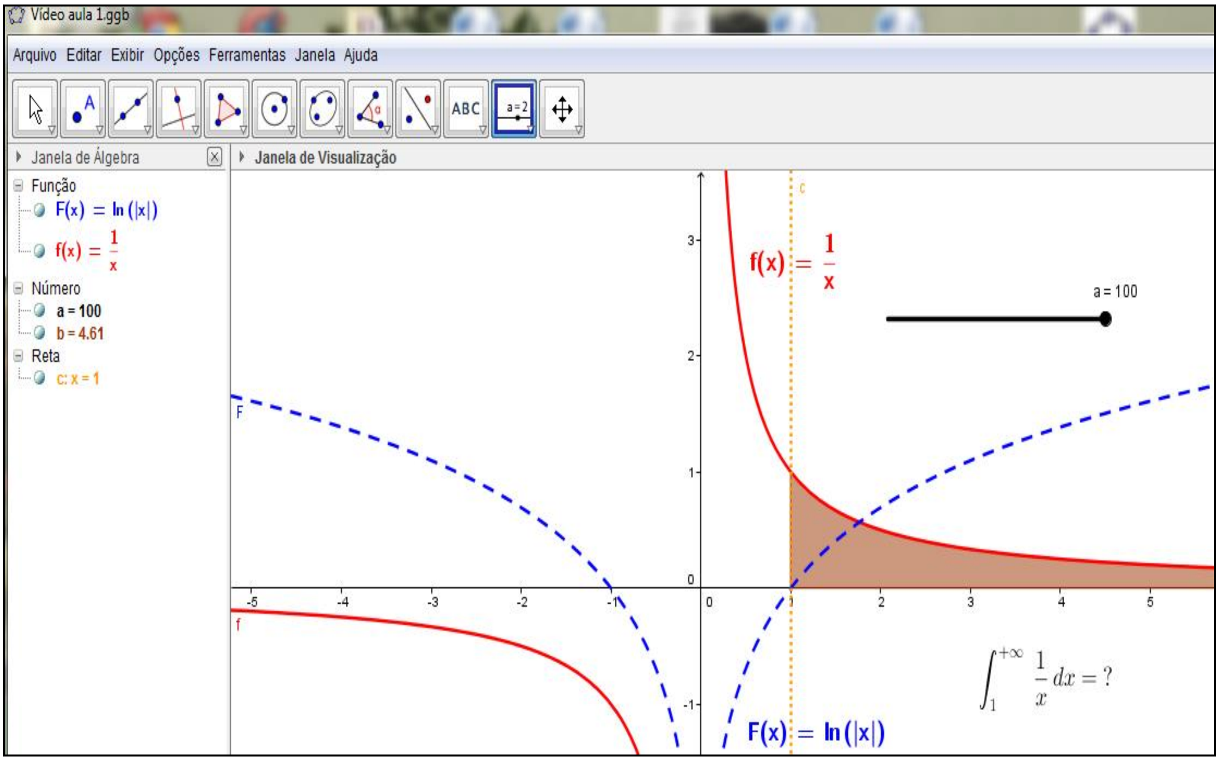
APÊNDICE E ANEXOS

APÊNDICE A – FOTOS E REGISTROS DE SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Nesta parte do trabalho apresentamos algumas fotos e resolução de situações didáticas que aplicamos numa turma do Instituto Federal do Ceará – IFCE, campus Fortaleza, em setembro de 2013 e numa turma na Universidade Federal do Acre – UFAC, campus Rio Branco, em agosto de 2014. Também mostramos um quadro com o objetivo e a descrição da atividade apresentada.

A turma no IFCE era de Engenharia de telecomunicações e na UFAC era de Matemática, ambas da disciplina denominada Cálculo II.

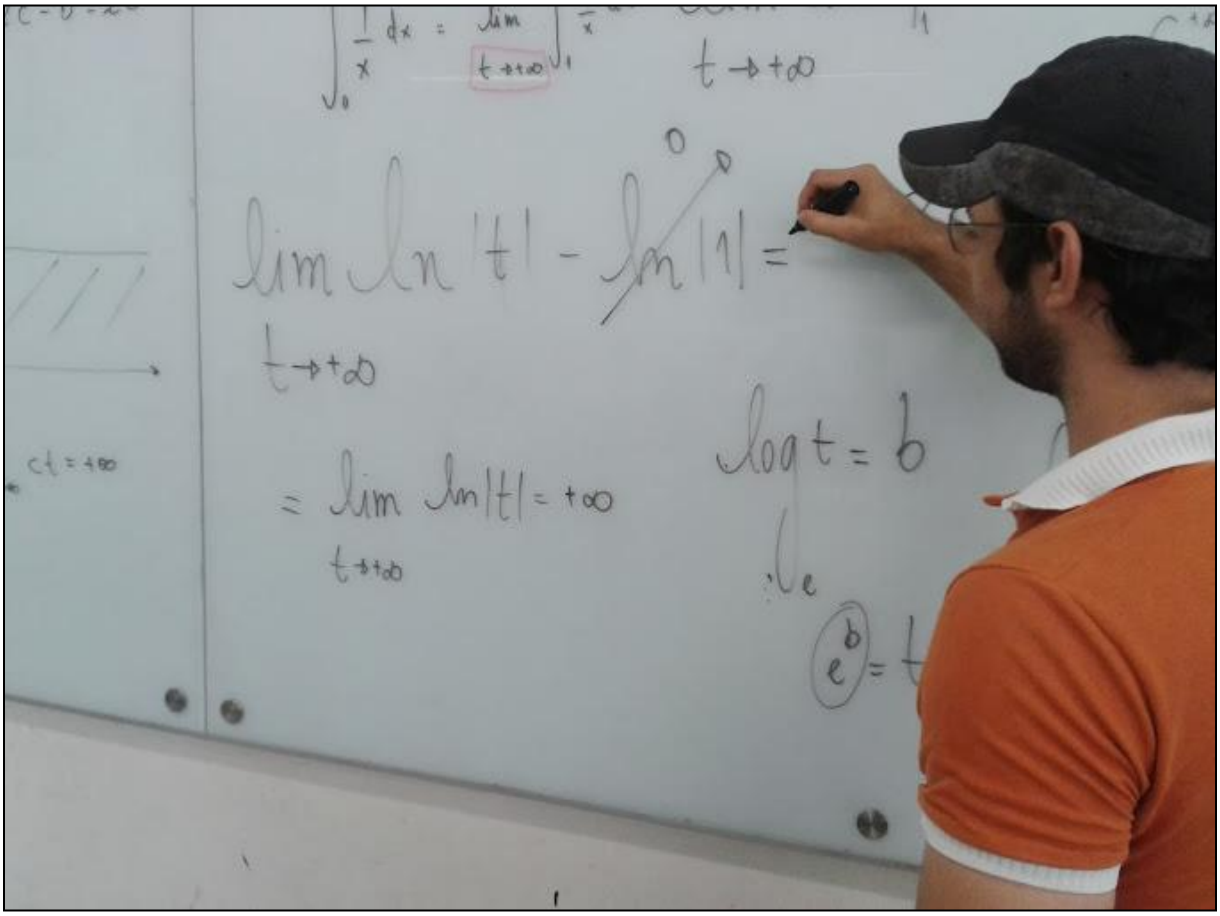
Atividade 1: Determine se a Integral Imprópria $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge ou converge?



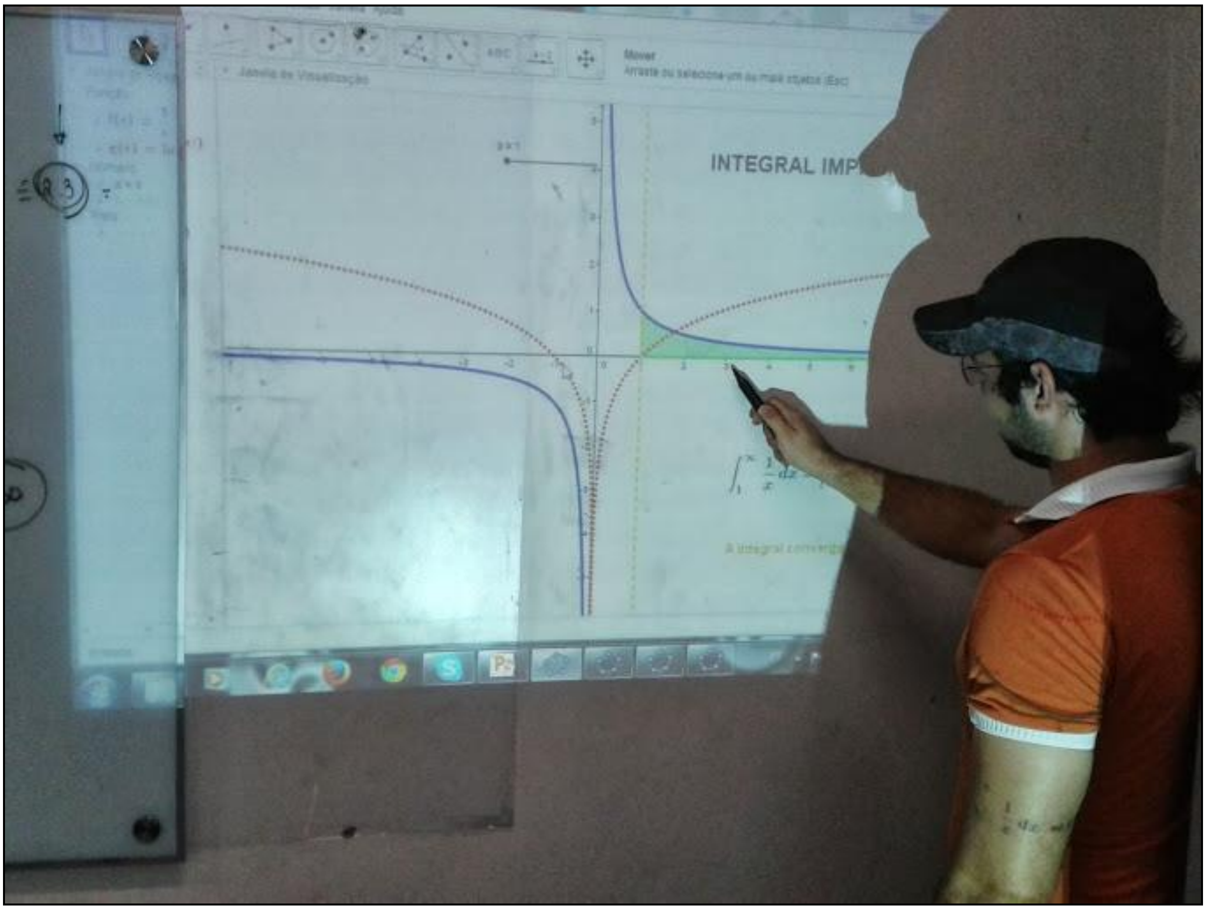
Objetivos Esperados: Desenvolver a definição de Integral Imprópria utilizando a visualização gráfica como ferramenta.

Registro e descrição da atividade: Os alunos (IFCE) resolveram o problema proposto e depois um deles fez a exposição de sua solução para a turma no quadro. Verificamos que a maioria conseguiu chegar na resposta correta utilizando o gráfico do problema com apoio na resolução.

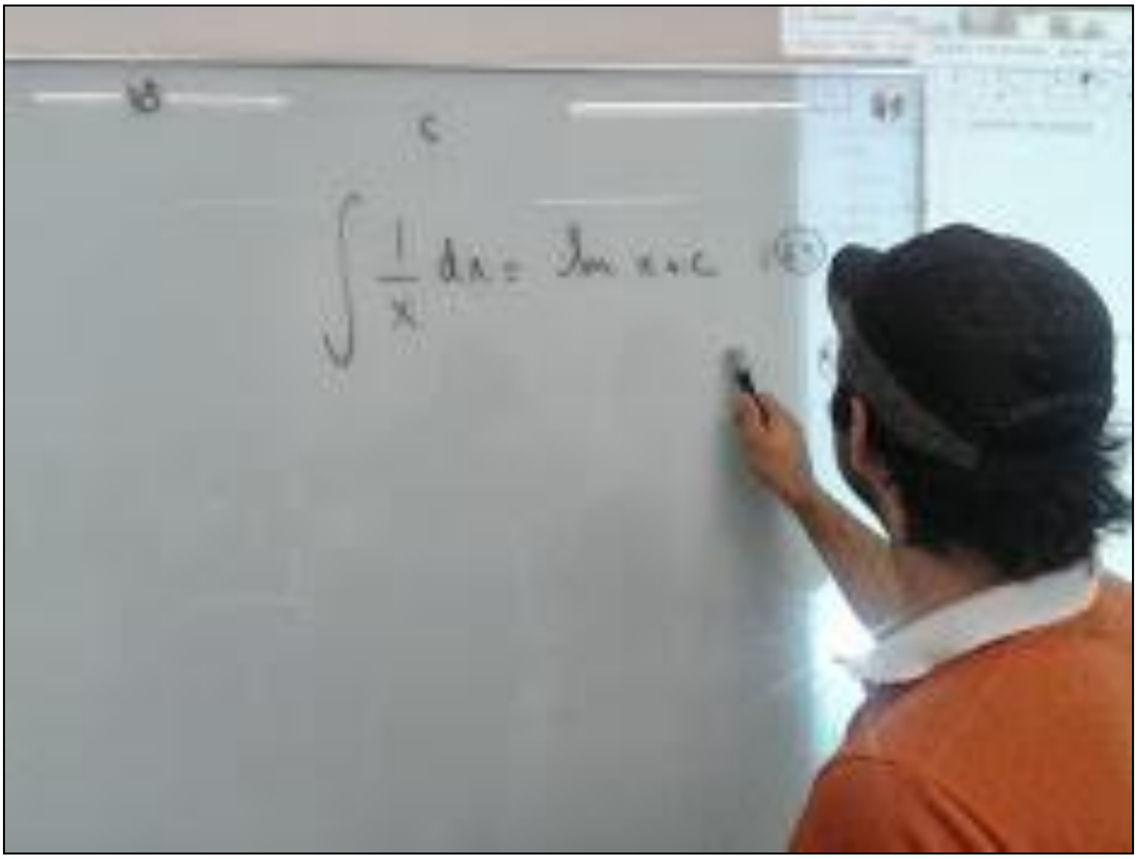
Fotos dos alunos desenvolvendo a Atividade 1(11/09/2013)



Descrição: Neste momento o aluno estava na fase de solução da Sequência Fedathi, mostrando sua solução para os colegas de turma, resolveu o problema usando a visualização gráfica da situação didática como apoio para os cálculos algébricos. Ou seja, resolveu a $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ com auxílio do Geogebra e definição de Integral Imprópria.

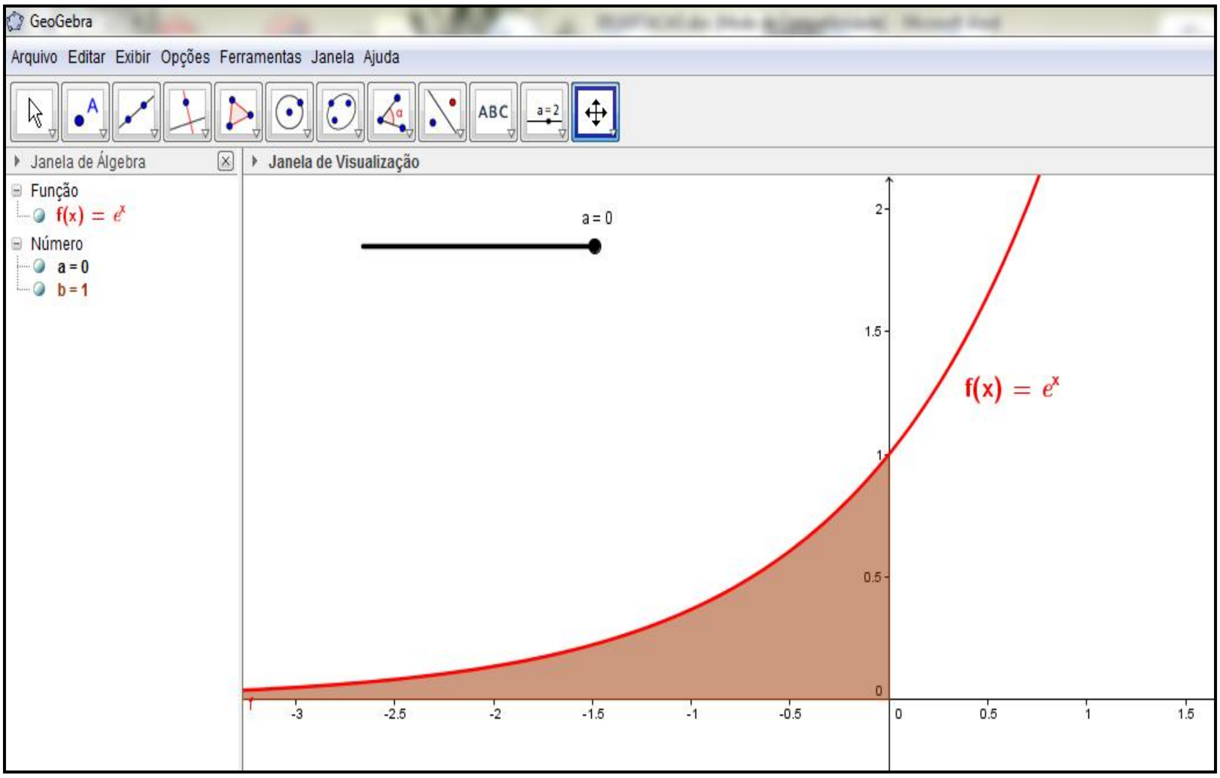


Descrição: Neste momento o aluno estava na fase de maturação da Sequência Fedathi, usando a visualização gráfica com auxílio do GeoGebra. O aluno está observando a área da integral sobre a curva. Isso pode possibilitar uma solução da $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$, também está observando uma possível convergência ou divergeência.



Descrição: Esta fase da Sequência Fedathi é de solução, apesar de está no início da mesma. O aluno encontra-se fazendo o "*link*" da visualização gráfica da maturação com a definição de Integral Imprópria algébrica.

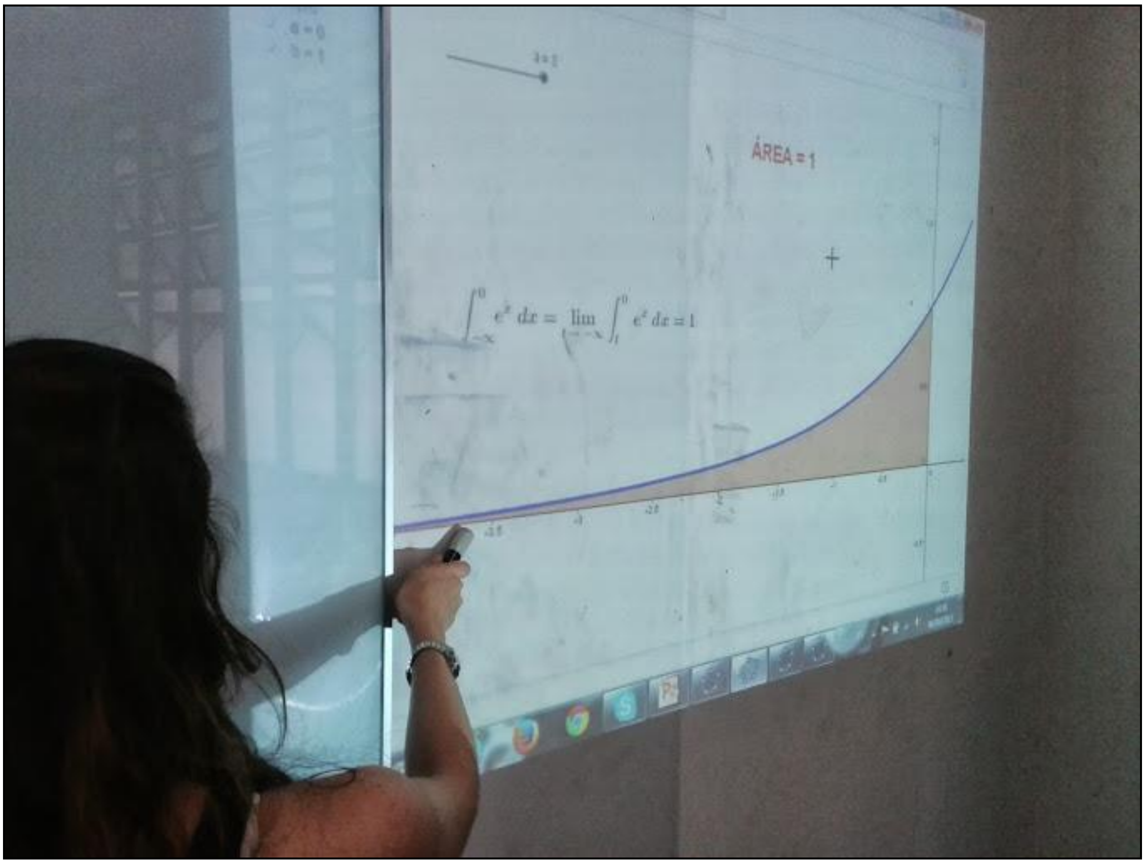
Atividade 2: Encontre a área da integral sobre a curva da $\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$, observe o gráfico abaixo para facilitar a visualização.



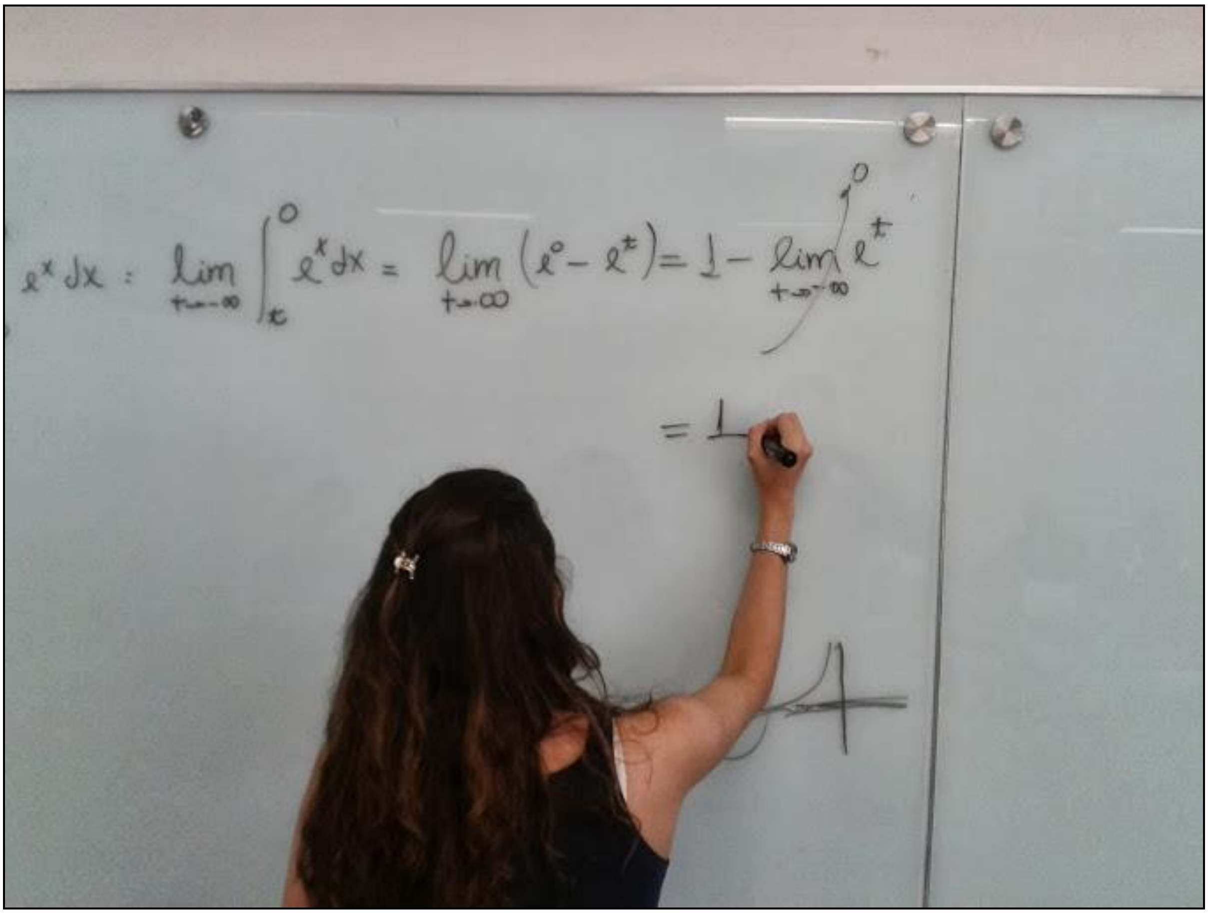
Objetivos Esperados: Encontrar a área da integral sobre a curva, mostrando a convergência da integral.

Registro e descrição da atividade: Esta atividade fez com os alunos do IFCE visualizassem que a primitiva de *f* era ela própria, apenas olhando para o gráfico, também já encontraram a área que era 1. Dessa forma, apenas aplicaram a definição de Integral Imprópria para formalizar uma solução rigorosa.

Fotos dos alunos desenvolvendo a Atividade 2 (11/09/2013)

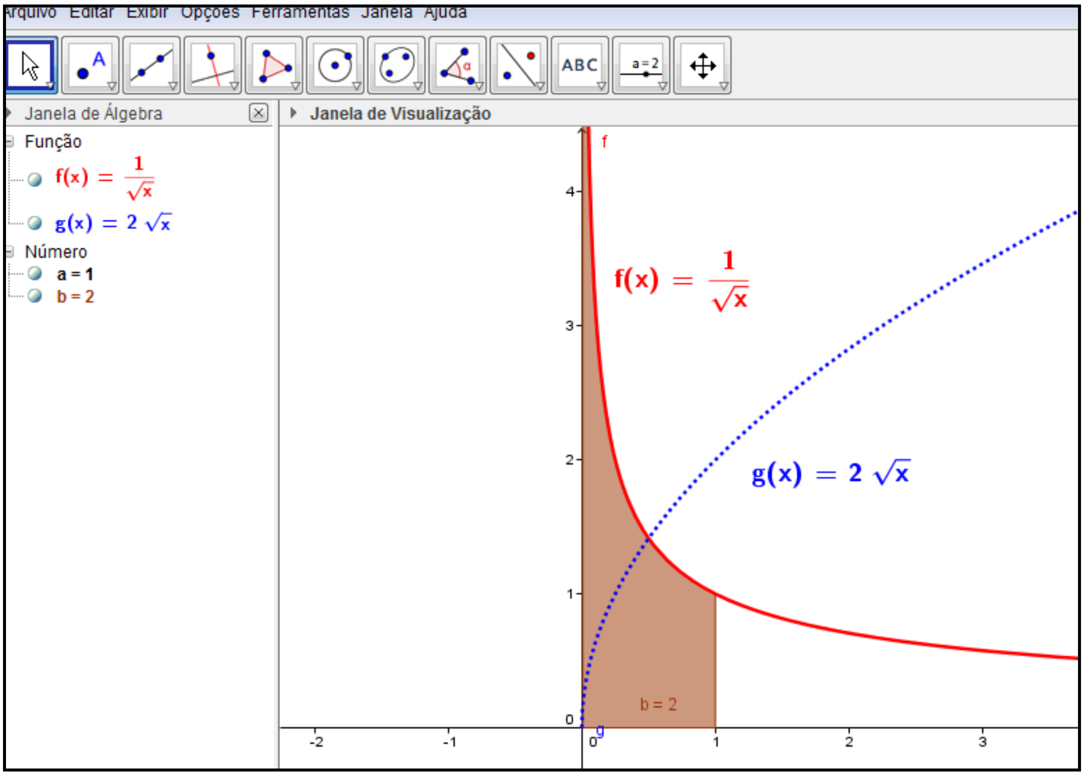


Descrição: Neste momento a aluna encontra-se na fase de maturação da Sequência Fedathi, a mesma observa o gráfico de visualização do problema, tentando conjecturar uma possível divergência ou convergência da $\int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx$.



Descrição: A aluna encontra-se na fase de solução da Sequência Fedathi, mostrando através da definição de Integral Imprópria e de suas análises gráficas que a situação didática proposta converge para 1.

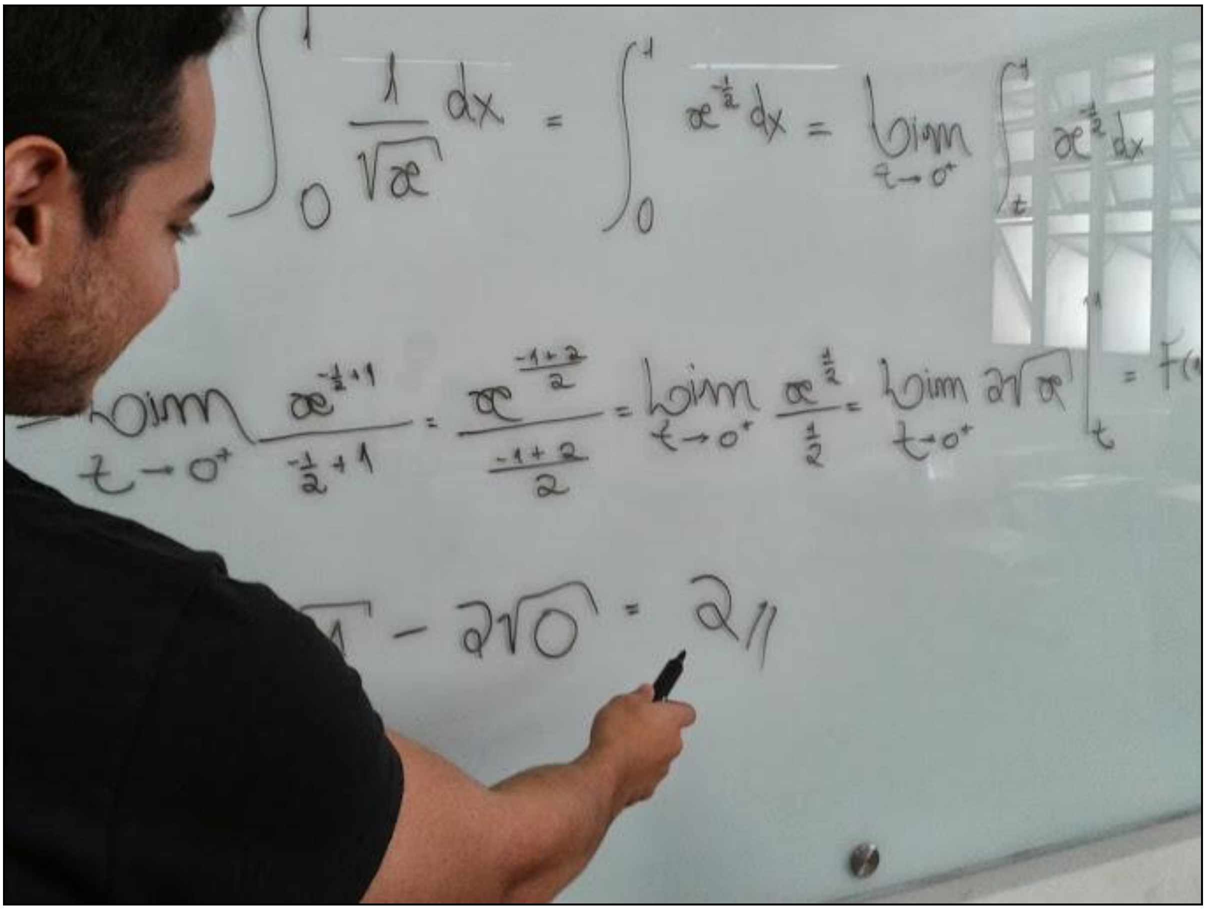
Atividade 3: Discuta a convergência ou divergência da $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$.



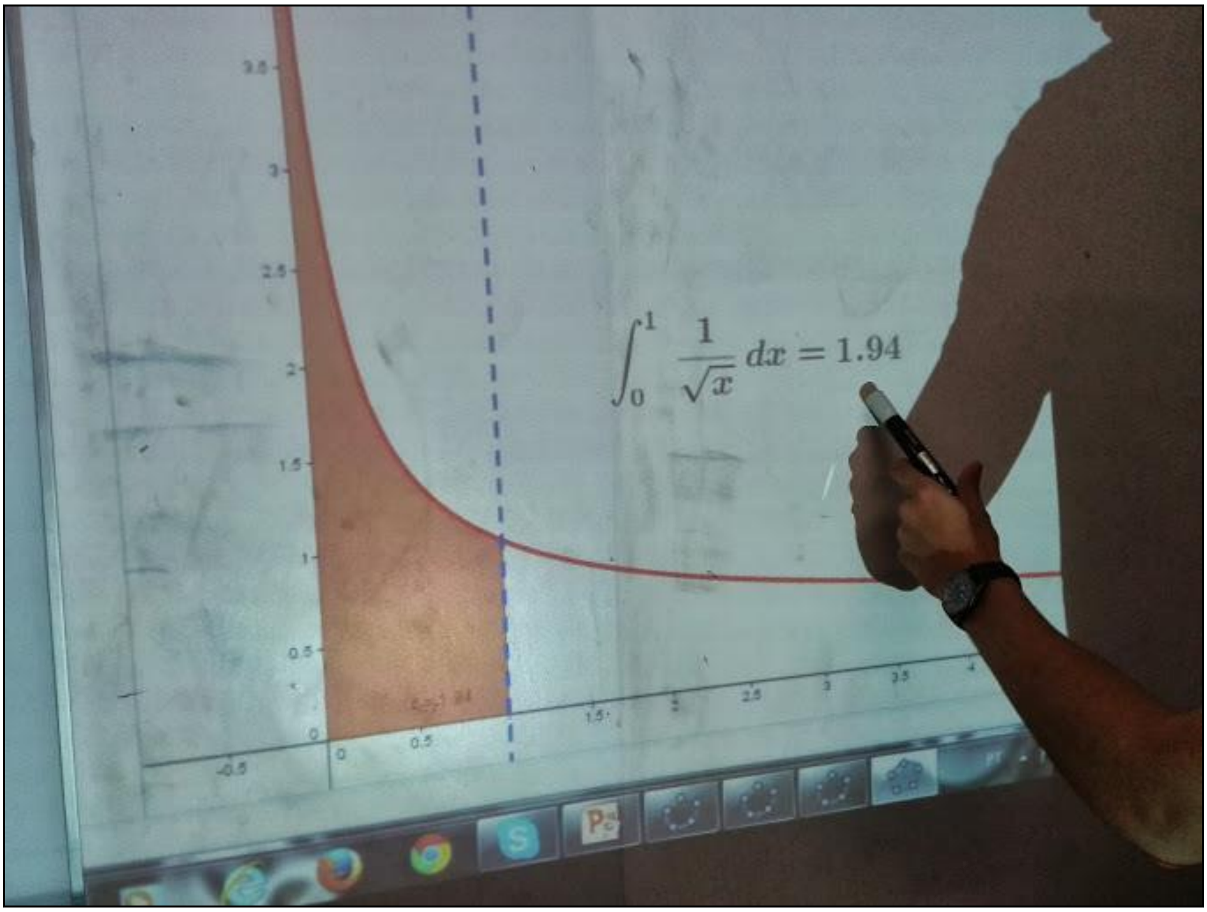
Objetivos Esperados: Encontrar a convergência ou divergência do problema proposta, usando a visualização como apoio para a solução.

Registro e descrição da atividade: Esse problema faz com que o aluno (IFCE) verique algumas possibilidades da Integral Imprópria, ou seja, com intervalos finitos.

Fotos dos alunos desenvolvendo a Atividade 3 (11/09/2013)

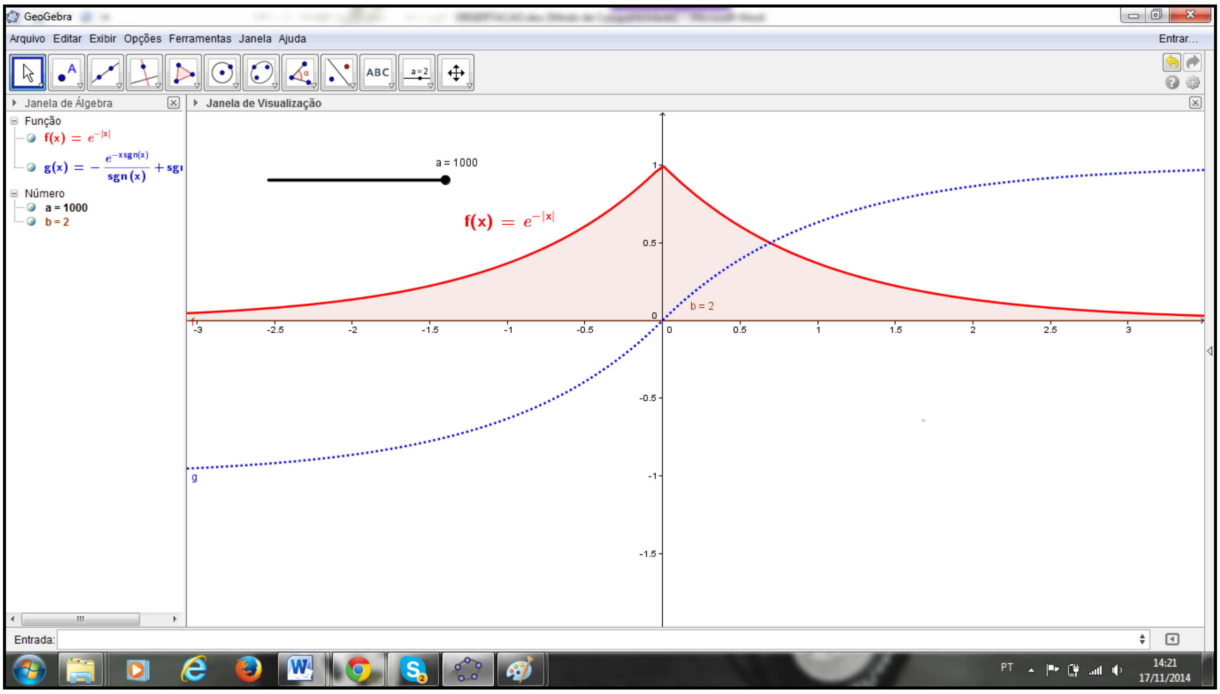


Descrição: O aluno escontra-se na fase de solução da Sequência Fedathi, mostrando que a Integral Imprópria da situação didática converge para 2. Essa conclusão foi auxiliada pela visualização gráfica e a definição de Integral Imprópria. O GeoGebra possibilitou verificar empiricamente através dos intervalos do controle deslizante que a integral converge.



Descrição: Neste momento o aluno encontra-se em maturação, de acordo com a Sequência Fedathi, resolvendo a $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ através da observação do gráfico com apoio do GeoGebra, verificando que a área da integral sobre a curva no intervalo de [0,1; 1] vai pra 1,96. Isto pode implicar que a integral converge para 2; porém só podemos afirmar através da definição de Integral Imprópria.

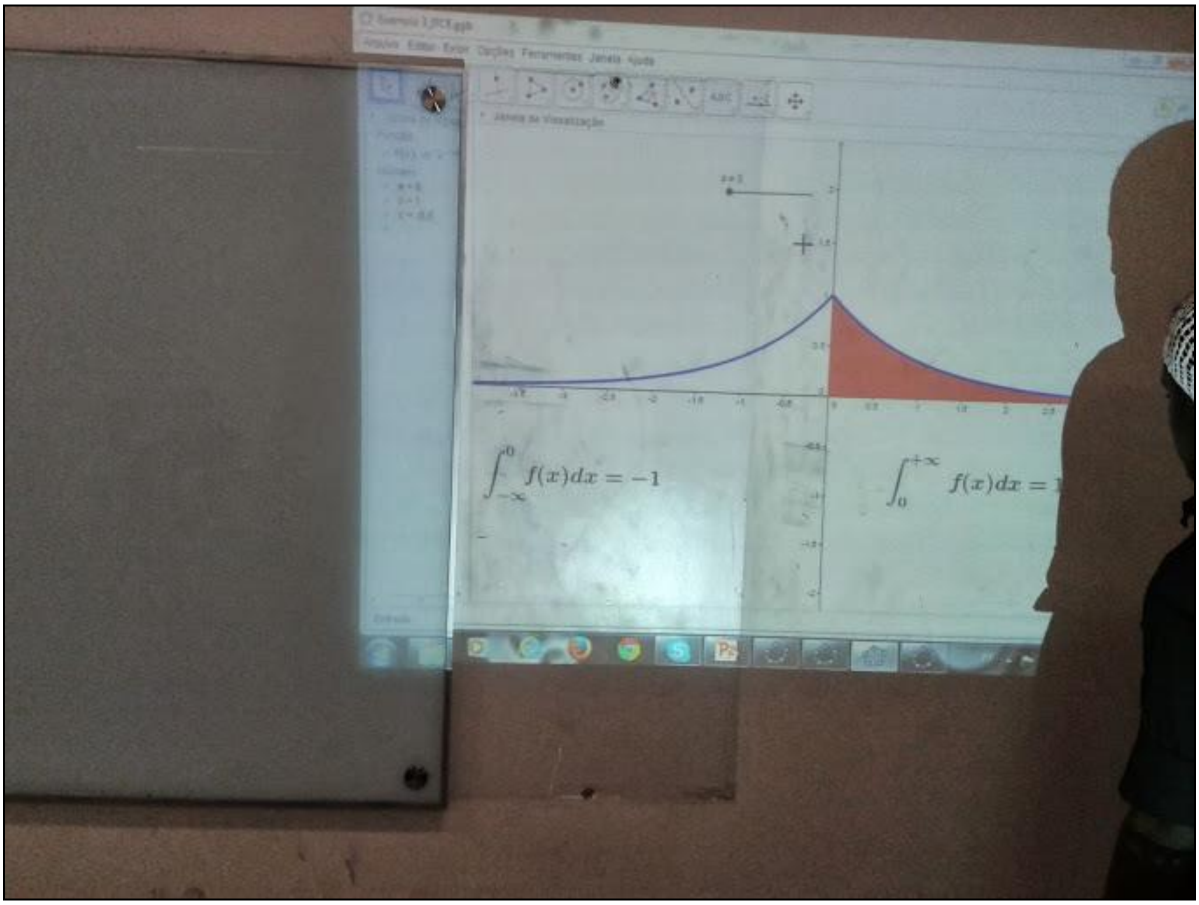
Atividade 4: Encontre a convergência ou divergência da $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$, utilize o gráfico para visualização gráfica.



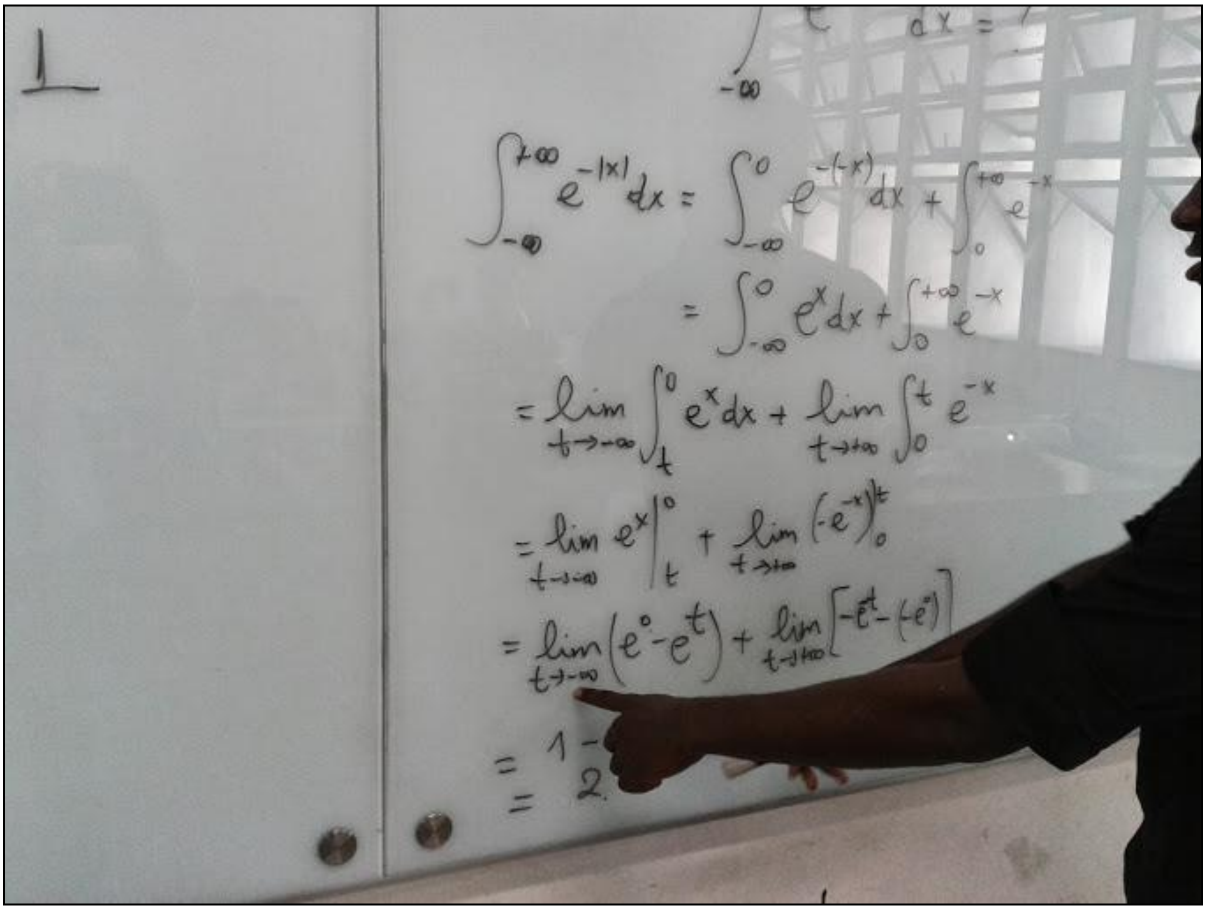
Objetivos Esperados: Encontrar a convergência ou divergência do problema proposta, usando a visualização como apoio para a solução.

Registro e descrição da atividade: Neste problema o aluno(IFCE) percebe que mesmo abragendo todo o domínio a área da integral sobre a curva permanece finita, ou seja, convergente.

Fotos dos alunos desenvolvendo a Atividade 4 (11/09/2013)

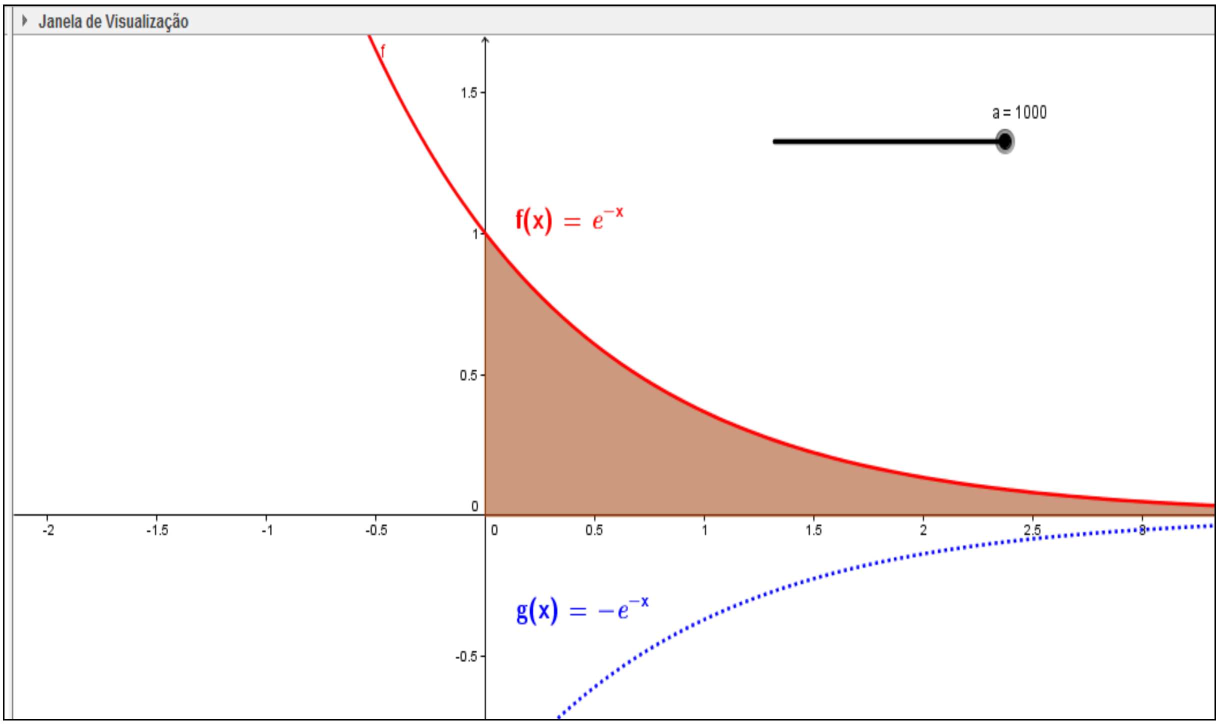


Descrição: O aluno está analisando a situação didática proposta através do GeoGebra, neste caso ele encontra-se na fase de maturação, segundo a Sequência Fedathi. A visualização gráfica que o aluno está analisando pode vai sistematizar sua solução, seja certa ou errada.



Descrição: A fase apresenta é de solução, o aluno encontra-se formulando sua resposta, conjecturando e apresentando para os colegas de sala como foi que ele chegou a solução. Usou a relação geométrica com a algébrica, através do GeoGebra e da definição de Integral Imprópria.

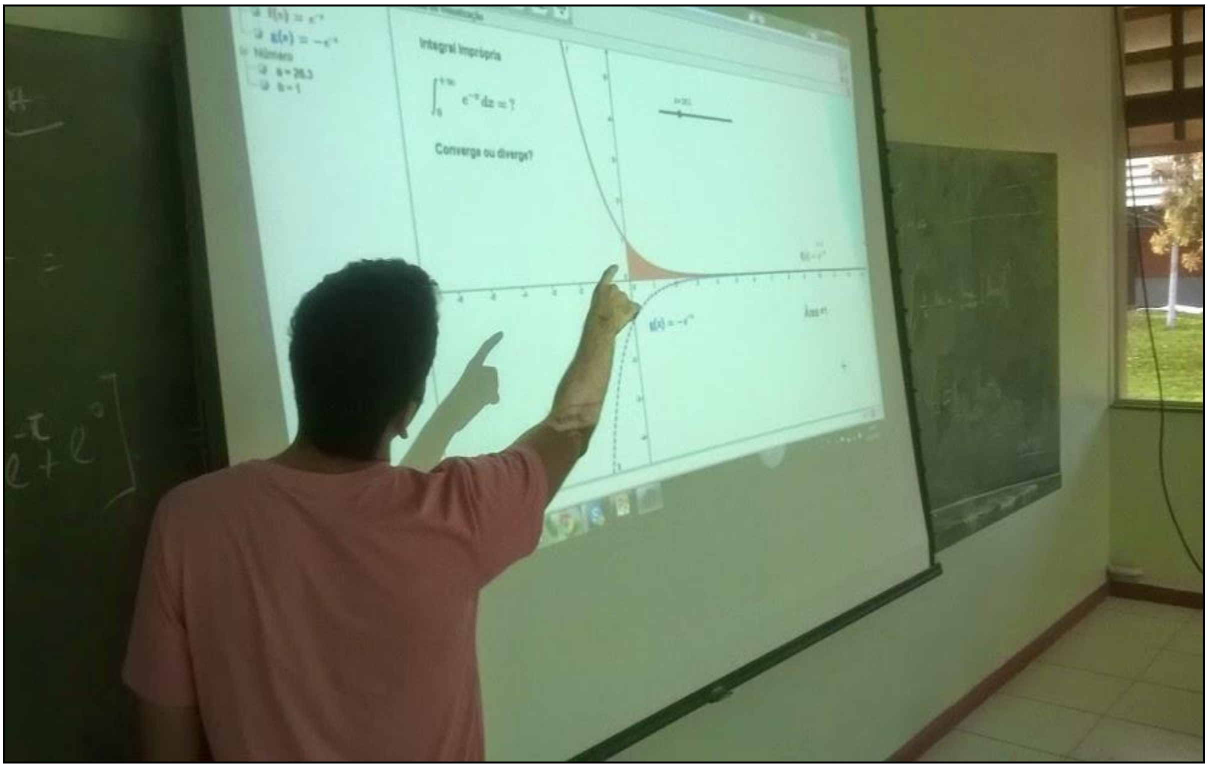
Atividade 5: Estude quanto a natureza e o comportamento da integral $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$, use o gráfico abaixo para visualização.



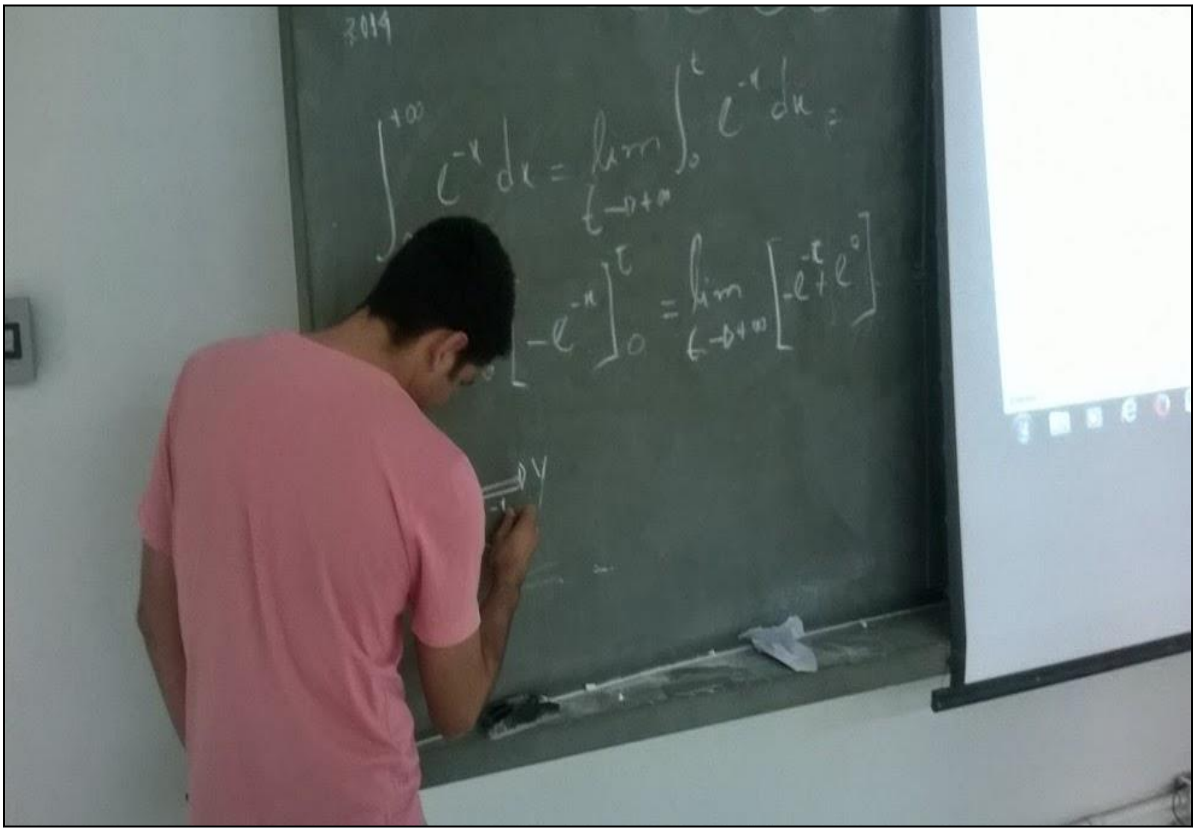
Objetivos Esperados: Discutir a Integral Imprópria quanto a convergência ou divergência e encontrar o seu resultado.

Registro e descrição da atividade: Neste problema os alunos(UFAC) perceberam que a visualização gráfica é uma forte aliada na hora de verificar a convergência da Integral proposta, como o gráfico mostra a primitiva, isto facilita a aplicação da definição por parte do aluno. Dessa forma acontece a junção do algébrico com o geométrico.

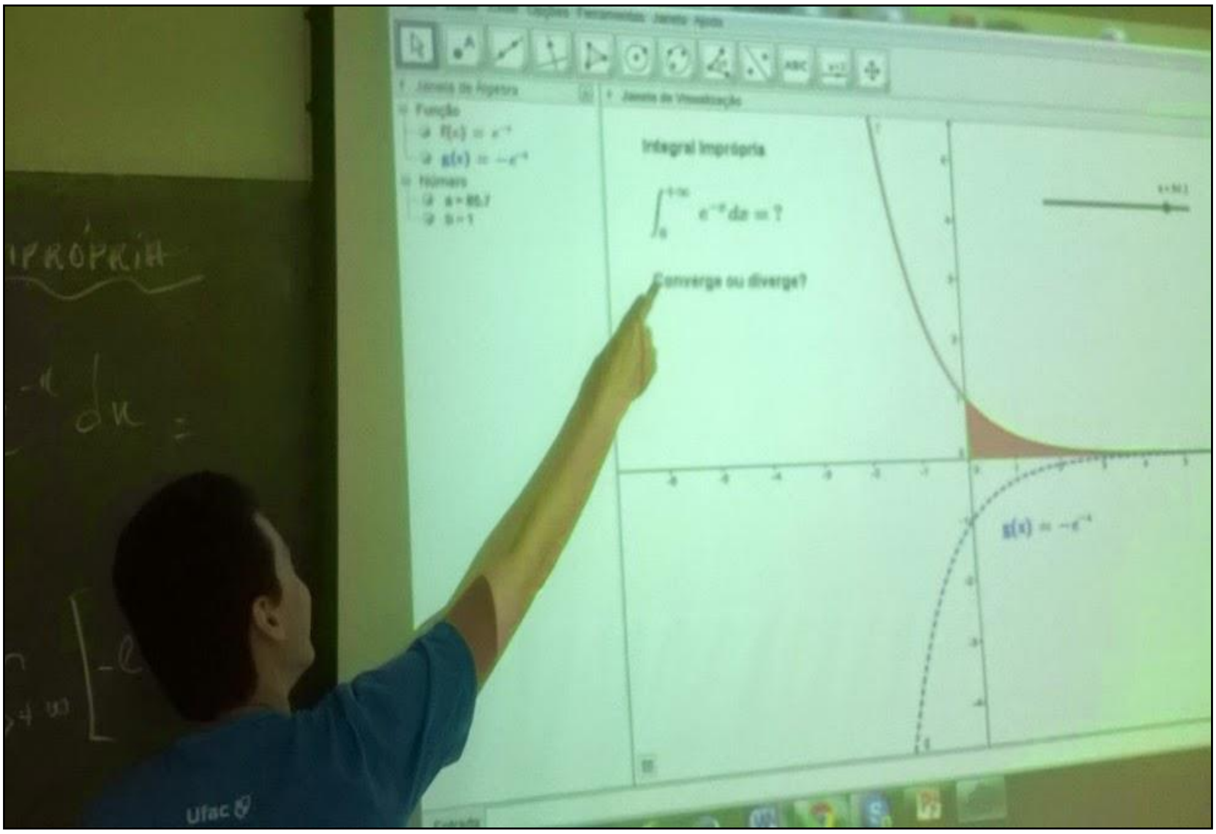
Fotos dos alunos desenvolvendo a Atividade 5 (12/08/2014)



Descrição: A fase da Sequência Fedathi que o aluno encontra-se é maturação, neste caso ele está analisando o gráfico com auxílio do GeoGebra. Buscando encontrar uma solução para a situação didática proposta, verificando a natureza e o comportamento do gráfico da Integral Imprópria.

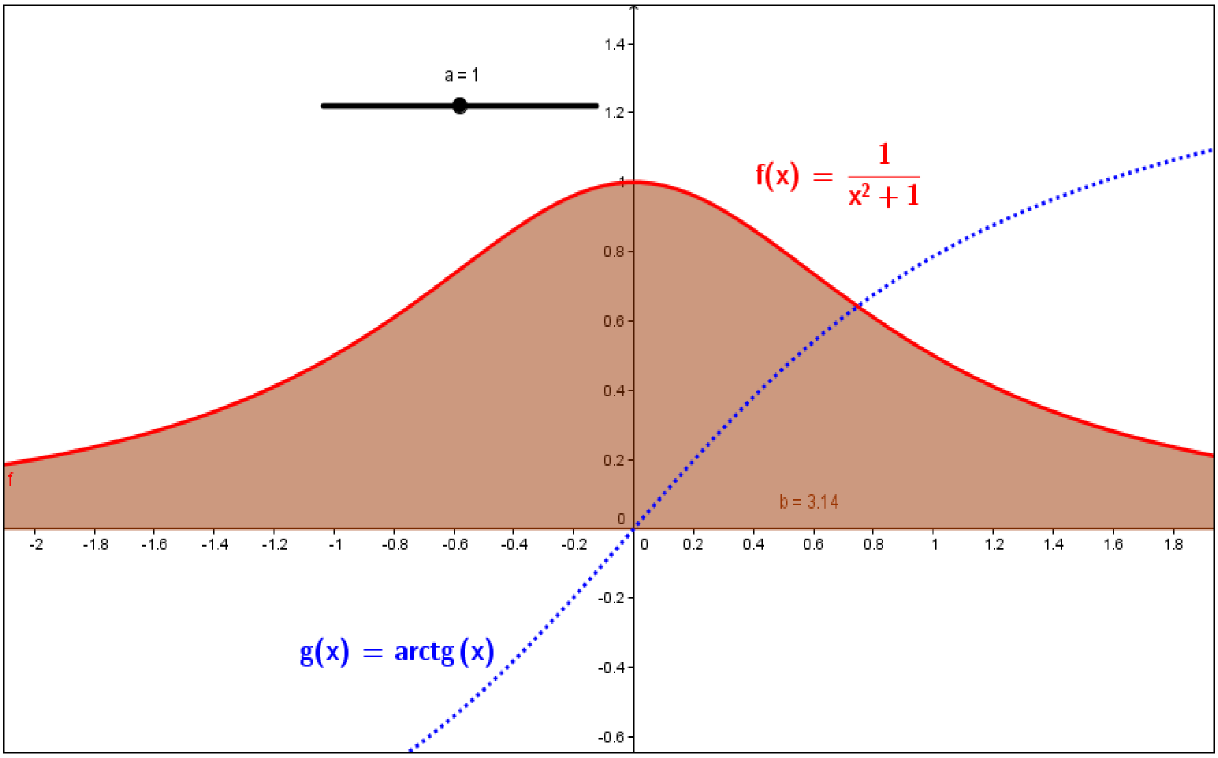


Descrição: O aluno está apresentando a resposta encontrada para a turma, neste momento encontra-se na fase de solução da Sequência Fedathi, usando definição de Integral Imprópria através de cálculos algébricos.



Descrição: O aluno está na fase de maturação da Sequência Fedathi, utilizando o gráfico para fazer analogias e chegar numa solução para a situação didática proposta. Claro que o *software* GeoGebra auxiliou em suas resposta, fazendo a interação com a definição de Integral Imprópria.

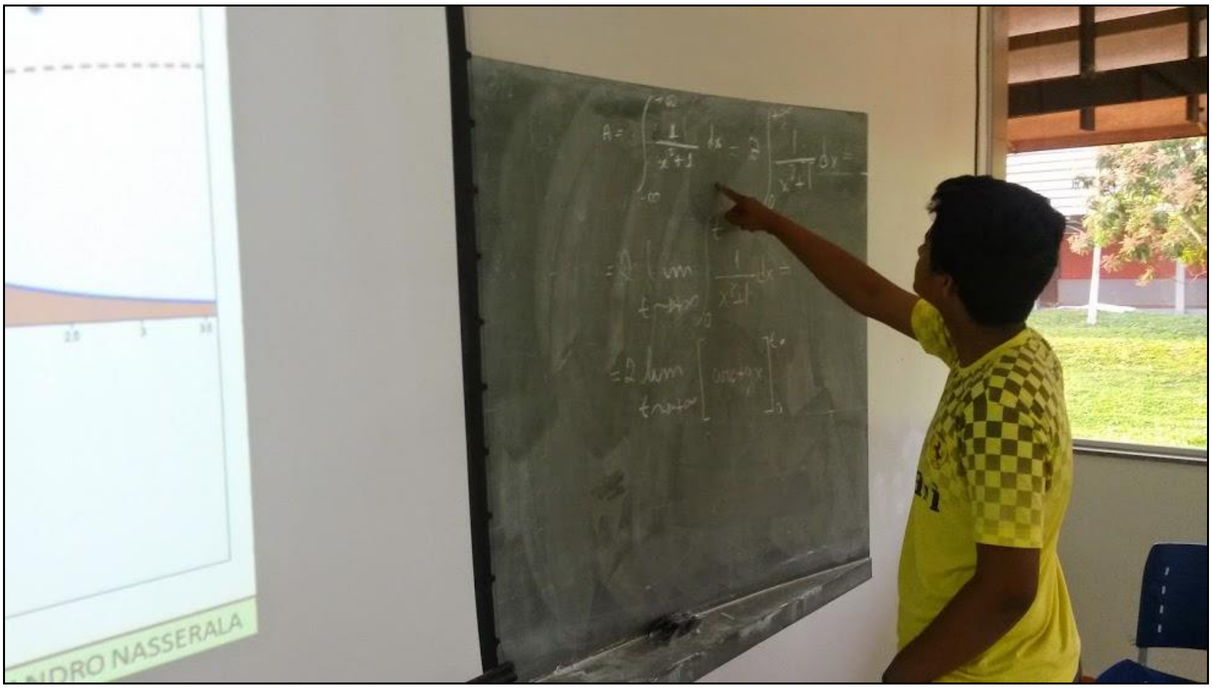
Atividade 6: Calcule a área da região delimitada pelo gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ e pelo eixo x.



Objetivos Esperados: Encontrar a área da região delimitada na figura através da definição de Integral Imprópria.

Registro e descrição da atividade: Neste problema os alunos(UFAC) usaram a definição de Integral Imprópria para responder a situação didátic proposta.

Fotos dos alunos desenvolvendo a Atividade 6 (14/08/2014)



Descrição: O aluno está relacionando o gráfico com o problema a ser resolvido, dessa forma, desenvolveu uma resposta para a situação didática encontrada apoiada no GeoGebra, neste caso encontra-se na fase da solução da Sequência Fedathi.

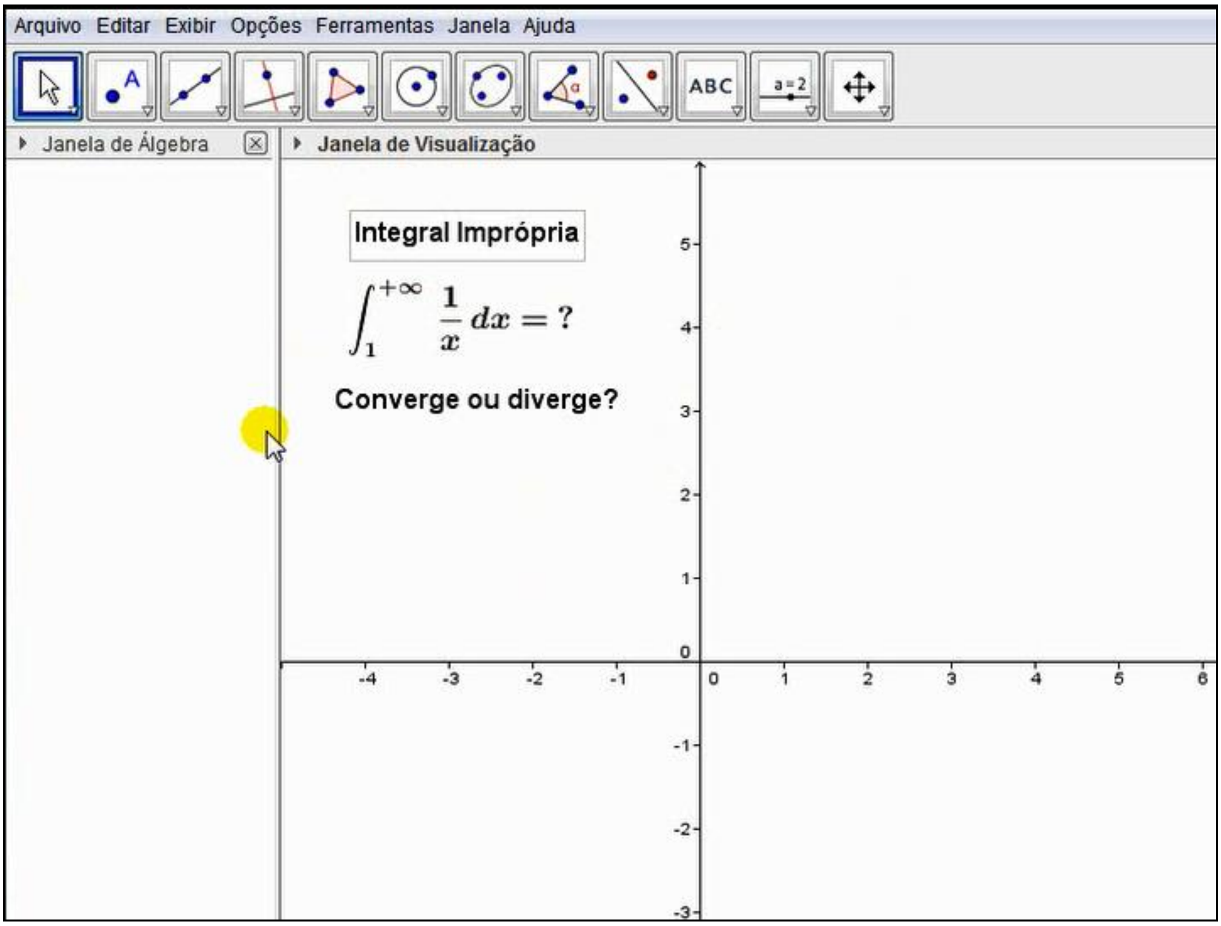
Descrição: Momento da maturação da Sequência Fedathi, o problema foi proposto deixando os alunos maturarem para tentar chegar em uma solução, o professor fica interagindo com os alunos sem inteferir em sua construção epistemológica.

Comentário: As atividades na UFAC foram basicamente as mesmas desenvolvidas no IFCE, o objetivo era verificar a interpretação gráfica e como os alunos conseguiam desenvolver as atividades. Dessa forma, teríamos subsídios para confeccionar as nossas situações didáticas que apresentamos no corpo de nosso trabalho.

APÊNDICE B – DESCRIÇÃO DAS VÍDEOAULAS

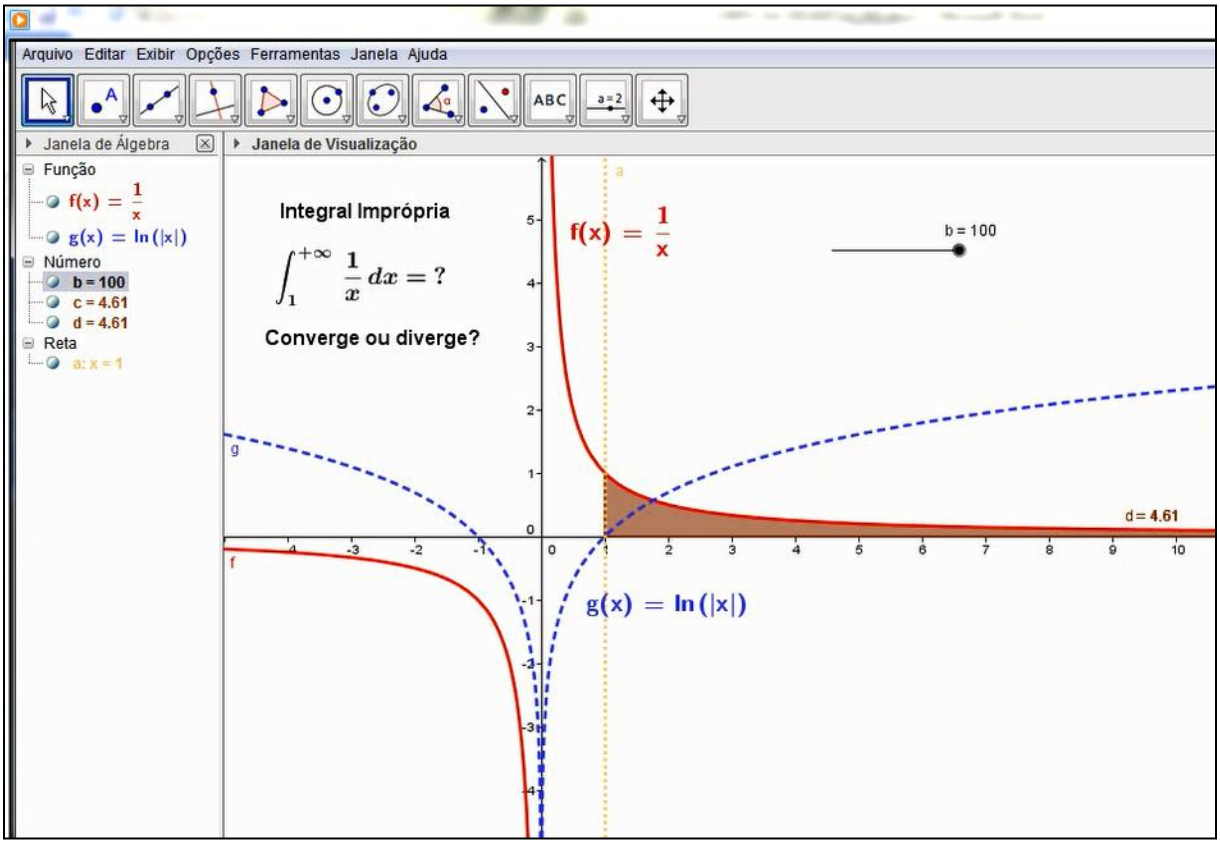
Iremos fazer uma descrição breve das nossas vídeoaulas que estão em nosso blog, aqui iremos mostrar alguns detalhes sobre as situações didáticas com o uso da Sequência Fedathi. Vejamos:

1ª Vídeoaula



Nesse primeiro momento temos uma situação problema, neste caso pensamos em desafiar os alunos a encontrarem o resultado desta Integral Imprópria usando o GeoGebra com ferramenta (Tomada de Posição), essa manipulação do *software* deverá ser feita pelo aluno ou até mesmo pelo professor, porém sem forçar nenhum resultado precipitado.

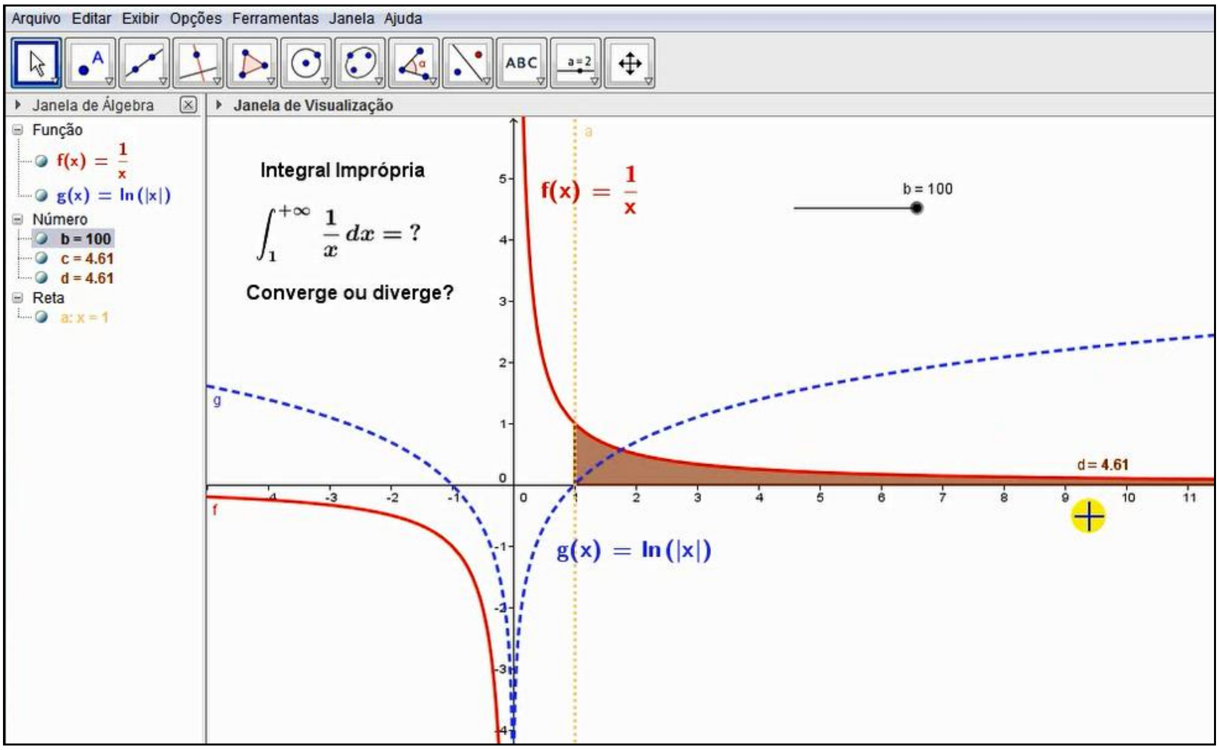
Antes desta situação didática o professor deverá fazer um nivelamento do conteúdo de Integral Imprópria em sala de aula, fazendo as definições necessárias e revisando conteúdos sobre integrais.



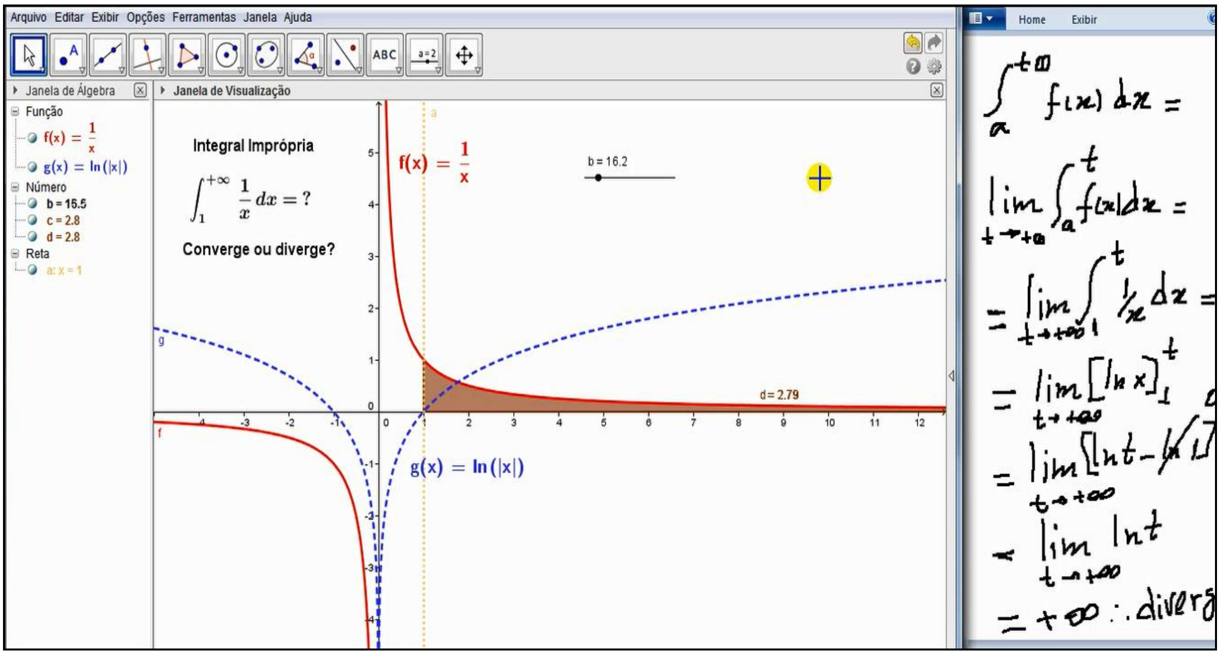
A maturação vai acontecendo de acordo com a exploração do *software*, as perguntas referentes ao controle deslizante, como também em relação à divergência ou convergência da Integral Imprópria devem ser exploradas. As respostas dos alunos devem ser levadas em consideração, mesmo que estejam erradas não devemos mencionar isto no desenvolvimento e construção de sua solução. Tendo em vista que neste momento o aluno está maturando as informações e definições já previamente trabalhadas.

Logo em seguida o aluno pode dar uma resposta quanto à convergência ou divergência mesmo que informalmente, mas pode construir uma solução algébrica usando a visualização gráfica como suporte. Dessa forma, poderá encontrar uma solução algébrica para o problema proposto, sem perder de vista o rigor matemático que é necessário no Cálculo.

Do ponto de vista da Sequência Fedathi é fundamental que tenha uma reflexão nas soluções com contraexemplos matemáticos, sem apontar soluções certas ou erradas. Buscamos em nossas vídeoaulas mostrar para nossos alunos alternativas de construções para possíveis soluções.



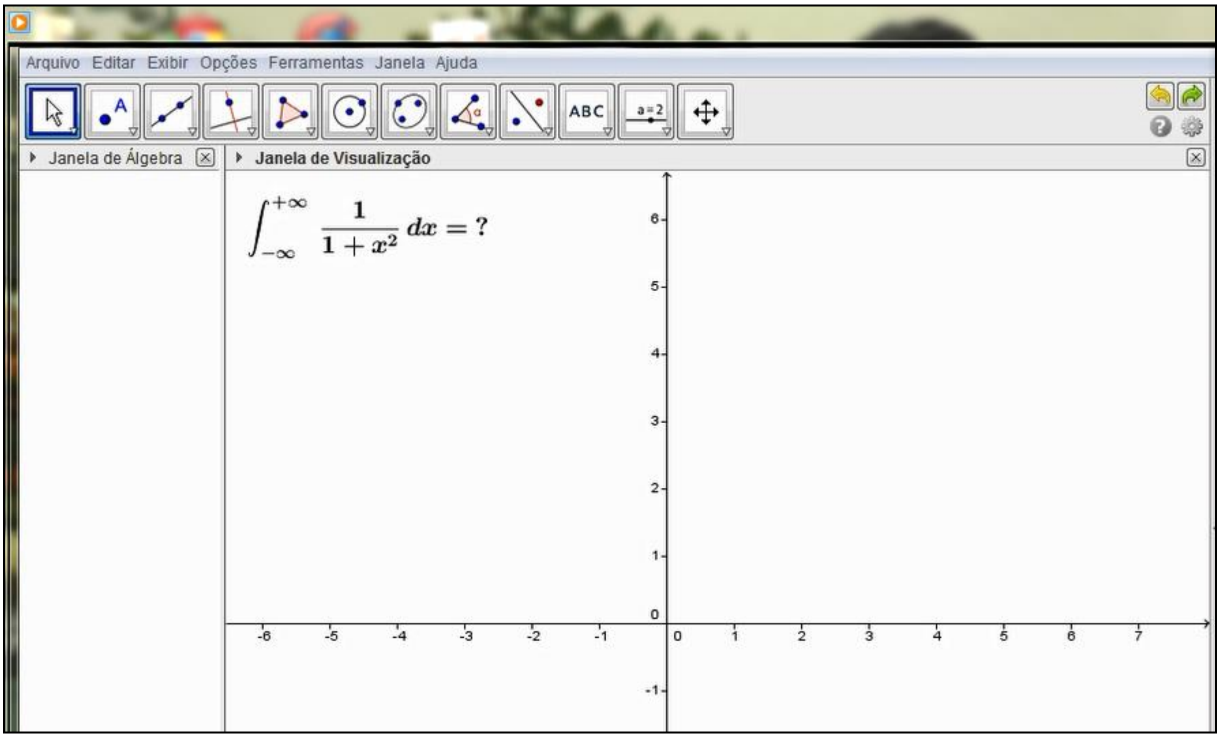
A área apontada na figura acima pode convergir ou divergir? Essa pode ser uma das perguntas que poderemos fazer aos nossos alunos. Se aumentarmos o intervalos a área irá aumentar o permanecerá a mesma? Esta também pode ser uma análise a ser feita. Como estamos usando Fedathi como metodologia de ensino, é de fundamental importância que seja feita esta interação com os alunos.



Na fase de prova, figura anterior, formalizamos a resposta utilizando a definição de Integral Imprópria formal e rigorosa, verificamos então que a Integral Imprópria diverge. Este fato nos mostra que o *software* GeoGebra tem limitações quanto a validar a divergência, pois não trabalha com intervalos infinitos.

2ª Vídeoaula

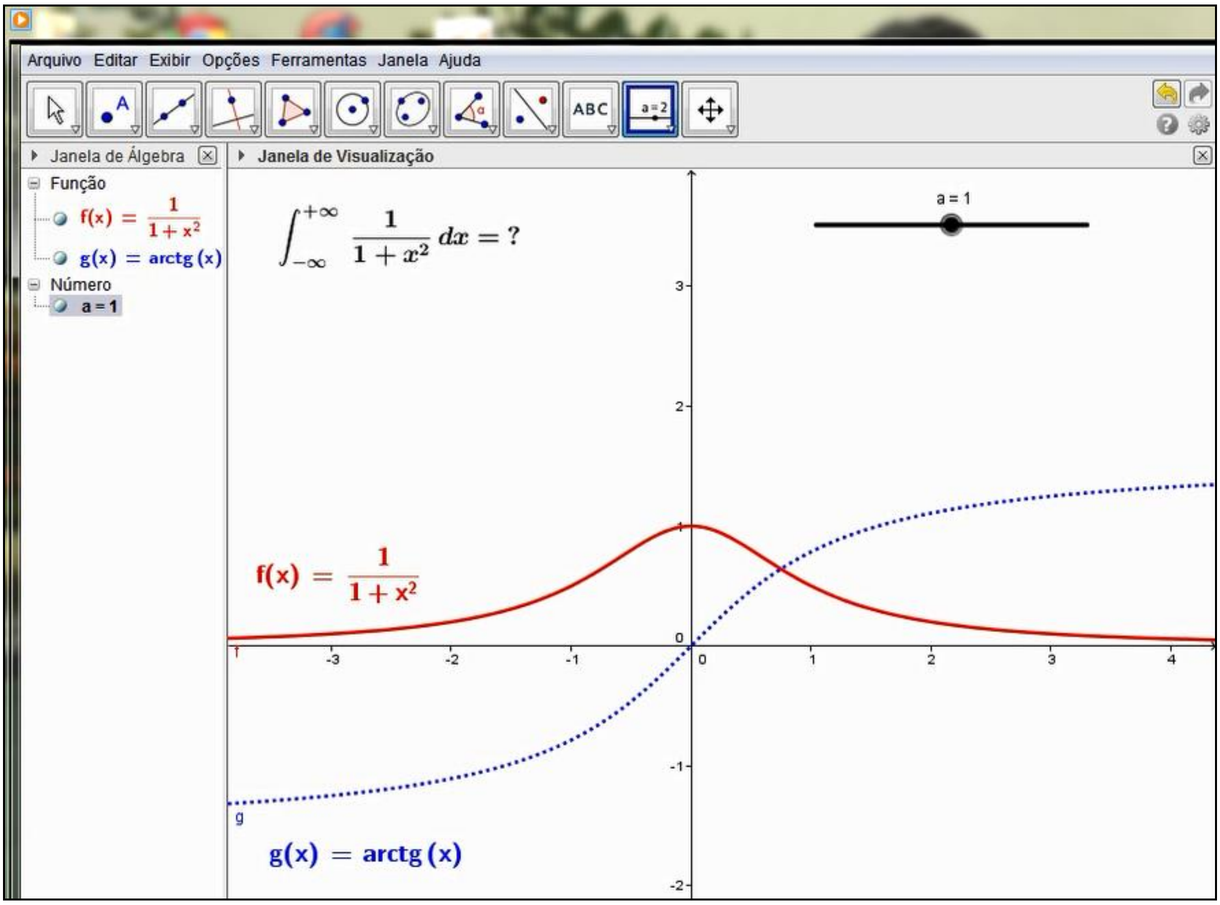
Nesta vídeoaula foram abordados a natureza da Integral Imprópria e buscamos o valor que ela representa, isto nos leva a observar uma situação problema (Tomada de Posição) através da área da integral sobre a curva.



Observamos na figura acima que a função integranda é par, isto de conhecimentos prévios, logo basta calcular apenas a área do intervalo [0, $+\infty$[, ou seja a função é simétrica em relação ao eixo y.

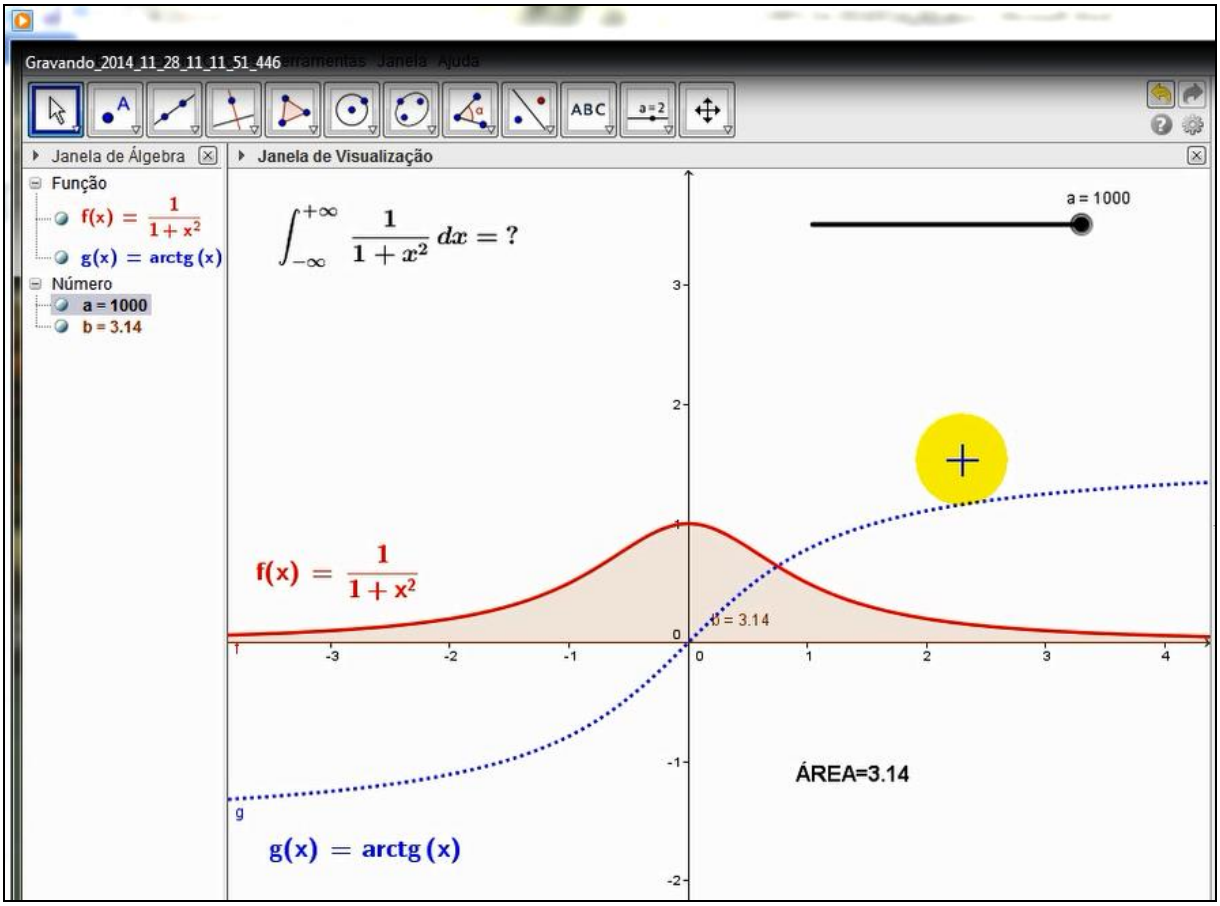
Essas construções buscam levar o aluno para a maturação segundo Fedathi, neste momento o aluno busca construir uma solução através da visualização gráfica e o professor procura interferir o mínimo possível para não prejudicar o raciocínio desenvolvido para a solução construída.

Na figura a seguir, algumas visualizações que podemos encontrar com o uso do GeoGebra na maturação.



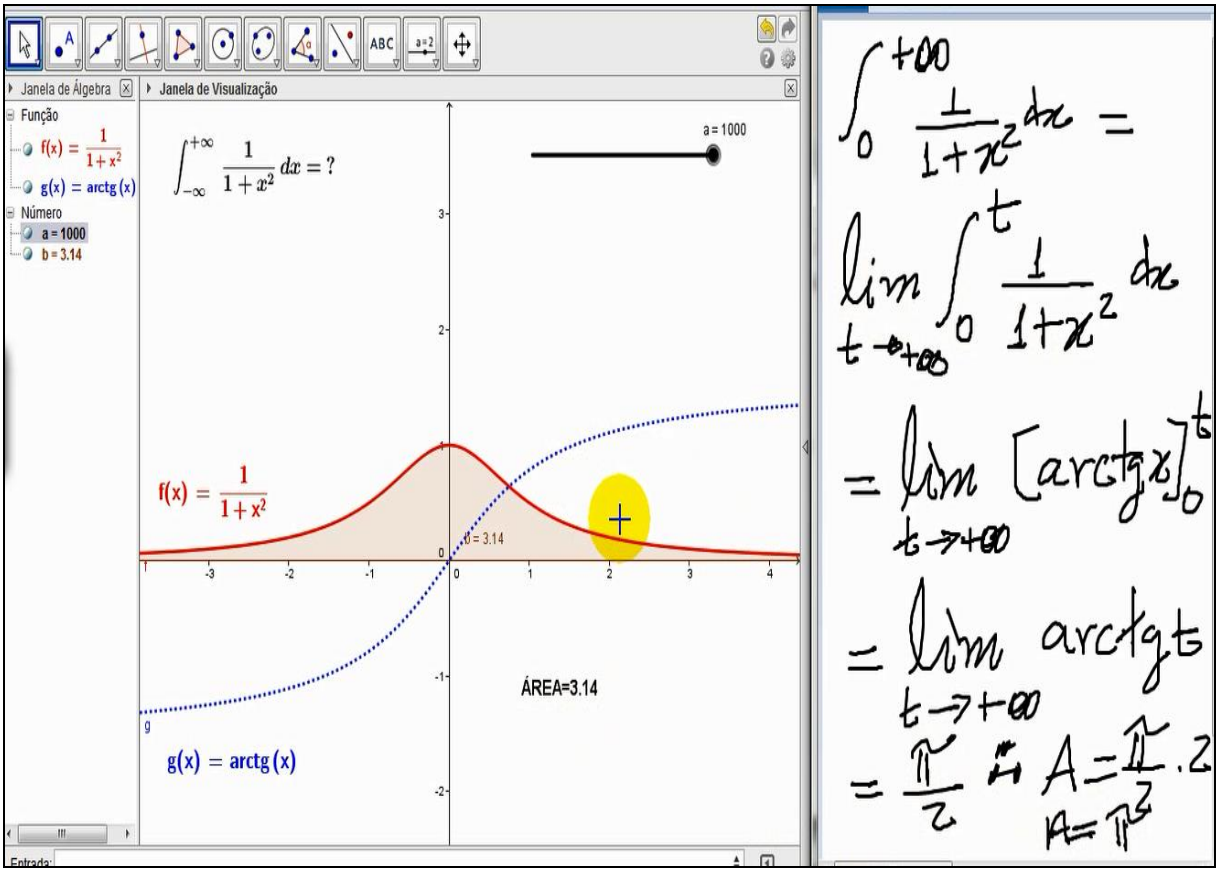
Um fato importante a ser observado nesta situação didática é que o controle deslizante do GeoGebra pode nos dar várias interpretações para uma solução do problema.

Na próxima figura, observamos que uma possível solução é 3,14 com o uso do GeoGebra, porém isto é uma solução informal, mas podemos formalizar com cálculos algébricos. Ou seja, na fase de solução o aluno pode nos dar várias soluções, podemos explorar também soluções informais, como as que podemos encontrar manipulando o GeoGebra, através do controle deslizante e análise de gráficos com apoio da definição de Integral Imprópria. No vídeo construímos possíveis caminhos para que o aluno possa decidir e comprovamos que o GeoGebra pode ajudar a encontrar soluções para o problema proposto.



Na figura acima, podemos observar a formalização da resposta para o problema proposto, neste caso observamos segundo Fedathi que ocorre a fase da prova. O problema proposto $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$, como a função integranda é par, basta calcular $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$. Escolhemos a parte positiva por conveniência, mas o aluno pode tranquilamente trabalhar com a parte negativa. Os cálculos são análogos, mas o interessante é discutir a formalização através de métodos algébricos rigorosos, utilizando a visualização gráfica como apoio. Podendo ainda confirmar a solução encontrada através do GeoGebra.

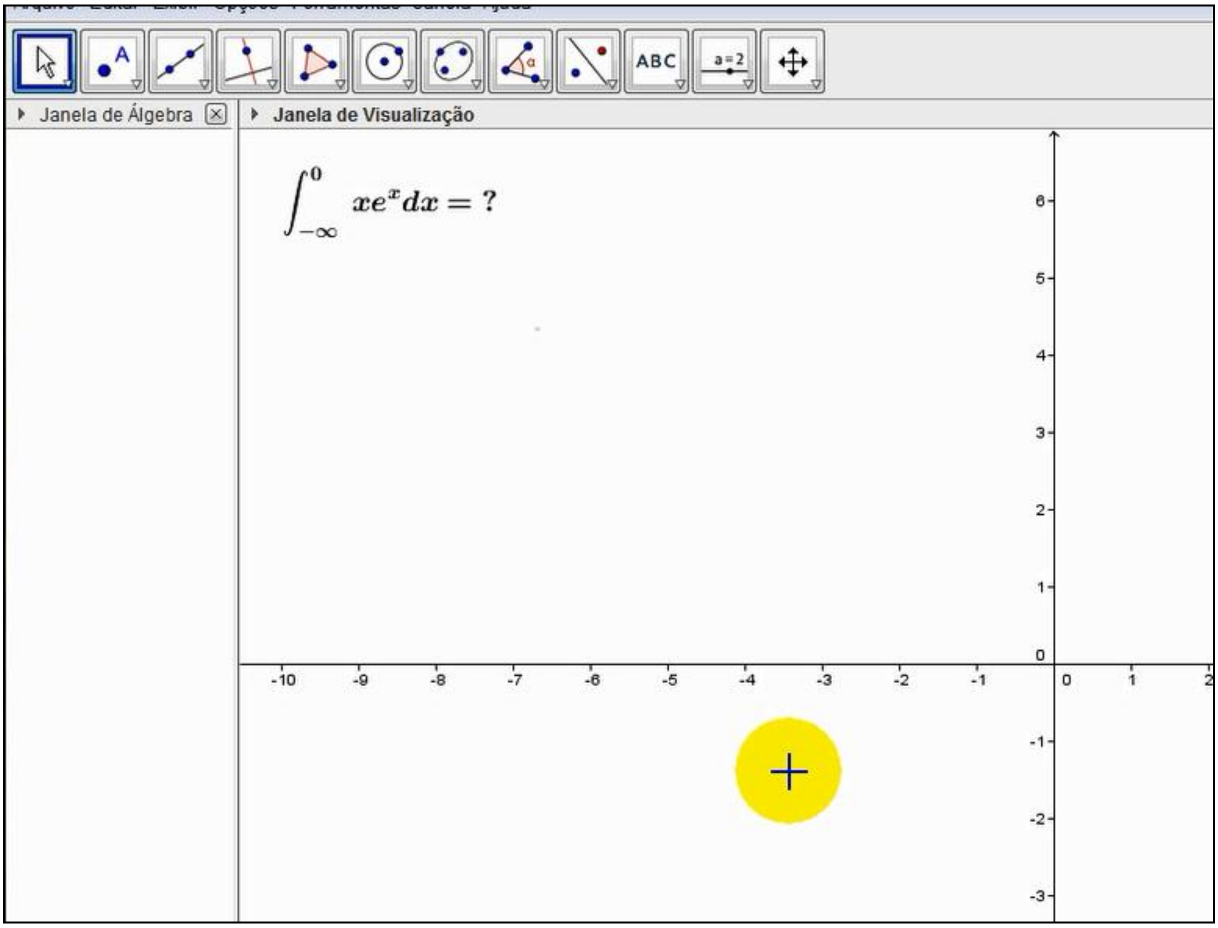
A medida que se vai desenvolvendo a parte algébrica, podemos ter o auxílio de informações que são obtidas com o uso do GeoGebra. Na resolução da $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{0}^{t} \frac{1}{1+x^2} dx$, aplicamos a definição de Integral Imprópria e observamos o comportamento de seu gráfico na visualização do GeoGebra. Logo, $\lim_{t\to+\infty} \int_{0}^{t} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t\to+\infty} [arctgx]_{0}^{t} = \lim_{t\to+\infty} arctgt = \frac{\pi}{2}$. A análise do limite proposto é feita através da visualização gráfica proposta pelo GeoGebra e finalizando temos que multiplicar por 2 para encontrarmos o resultado final. Essa multiplicação é em virtude da função ser par, e portanto simétrica em relação ao eixo y. Conforme podemos ver na figura a seguir.



3ª Vídeoaula

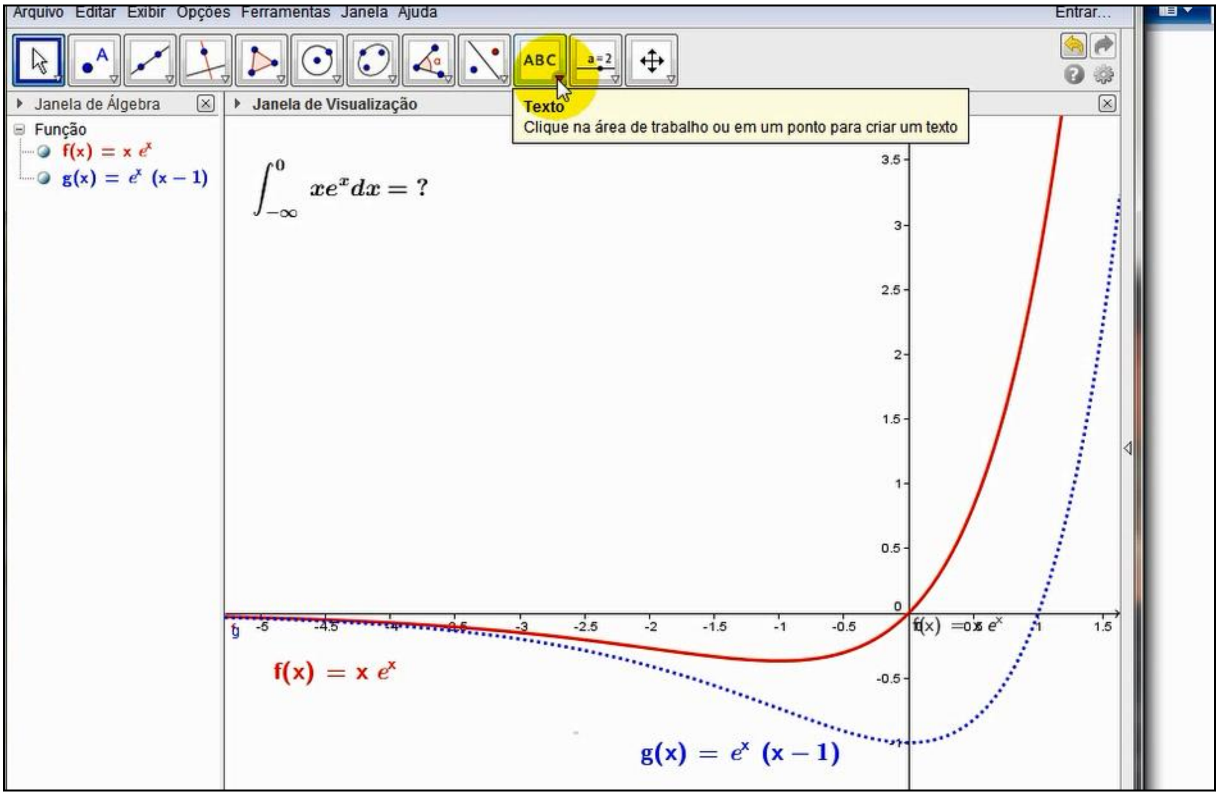
Nesta vídeoaula a situação problema é calcular a $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$, esta é uma Integral Imprópria que pode convergir ou divergir. Na figura a seguir verificamos a tomada de posição, teremos que resolver esta integral para conseguirmos chegar a resposta desejada, a situação motivadora terá o *software* GeoGebra como apoio. Dessa forma, iremos construir uma solução para o problema proposto.

Essa situação didática foi escolhida para que o aluno consiga vislumbrar que podemos encontrar valores negativos, mesmo usando o GeoGebra como ferramenta de apoio na construção gráfica.

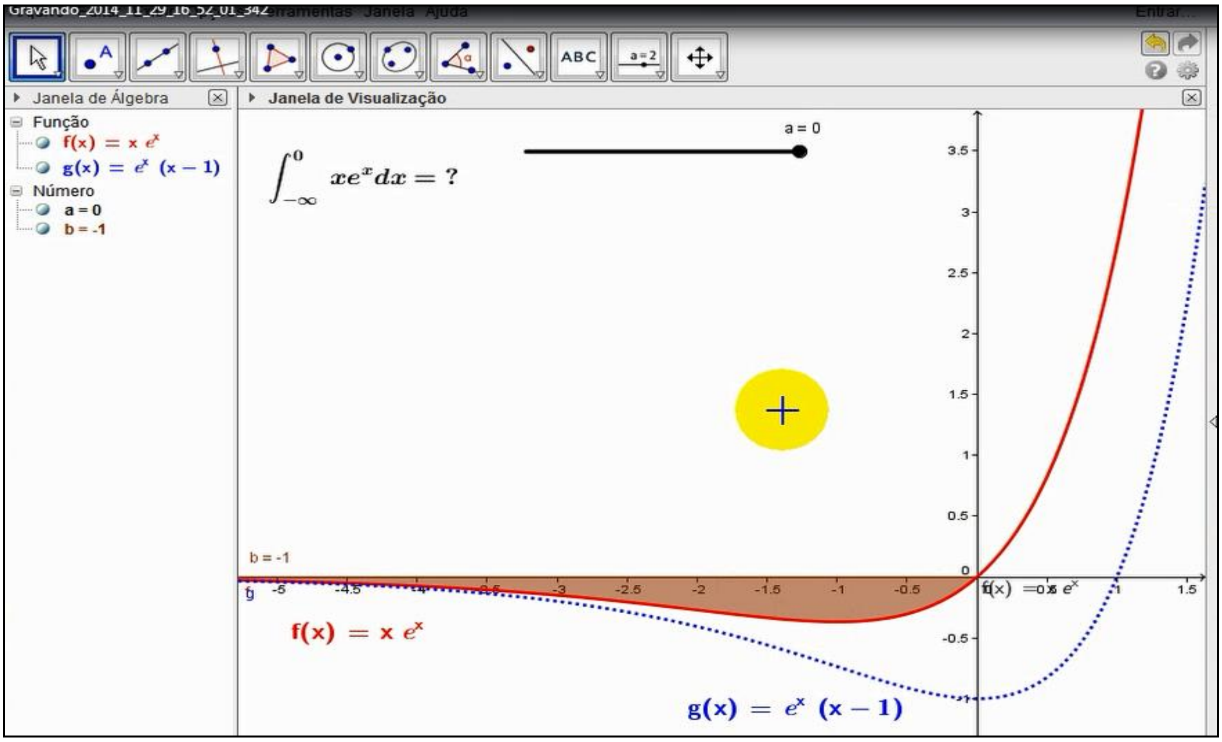


A partir da fase de Tomada de Posição, buscamos fazer com que o aluno construa uma solução com conhecimentos já adquiridos ou que consiga fomentar conexões a partir do desenvolvimento do *software*, neste momento é que entra a fase de Maturação, conforme a figura 10 a seguir.

Procuramos explorar a visualização gráfica no *software* GeoGebra, buscando conexões para que o aluno possa desenvolver uma solução informal ou formal. Neste momento não estaremos preocupados se a resposta que os alunos estão construindo é correta ou incorreta, mas estamos buscando o maior número de conhecimento possível que possamos explorar para o desenrolar do problema proposto. Na figura a seguir, mostramos o momento em que a construção esta sendo formulada.

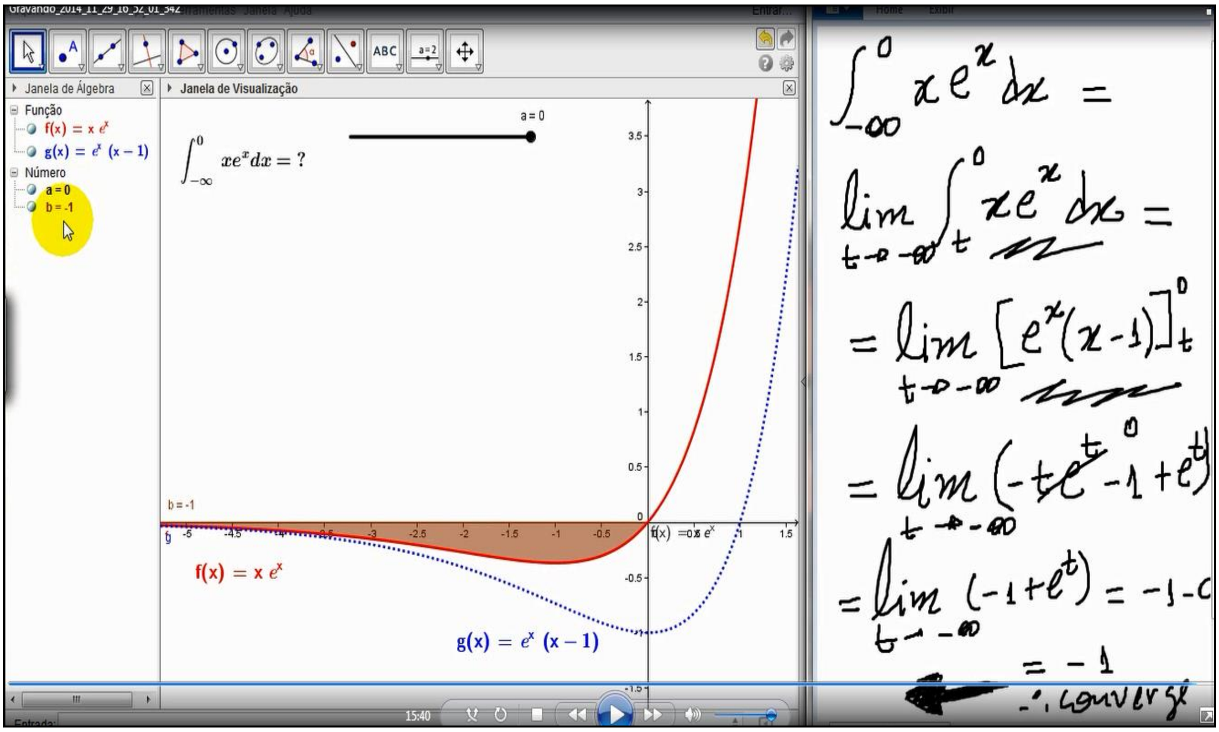


Observamos que encontramos a primitiva da função integranda, isso nos ajudará na resolução algébrica, onde resolveremos formalmente a integral proposta.



Após a maturação o aluno poderá nos apresentar a sua solução, podendo ser formal ou informal, neste caso poderá ser apresentada o resultado que o GeoGebra nos apresenta e posteriormente poderemos confrontar com o resultado algébrico. Dessa forma, nossa intenção é fazer que o aluno verifique que a visualização gráfica ajuda na construção rigorosa da solução formal, através de informações que podemos retirar da exploração visual.

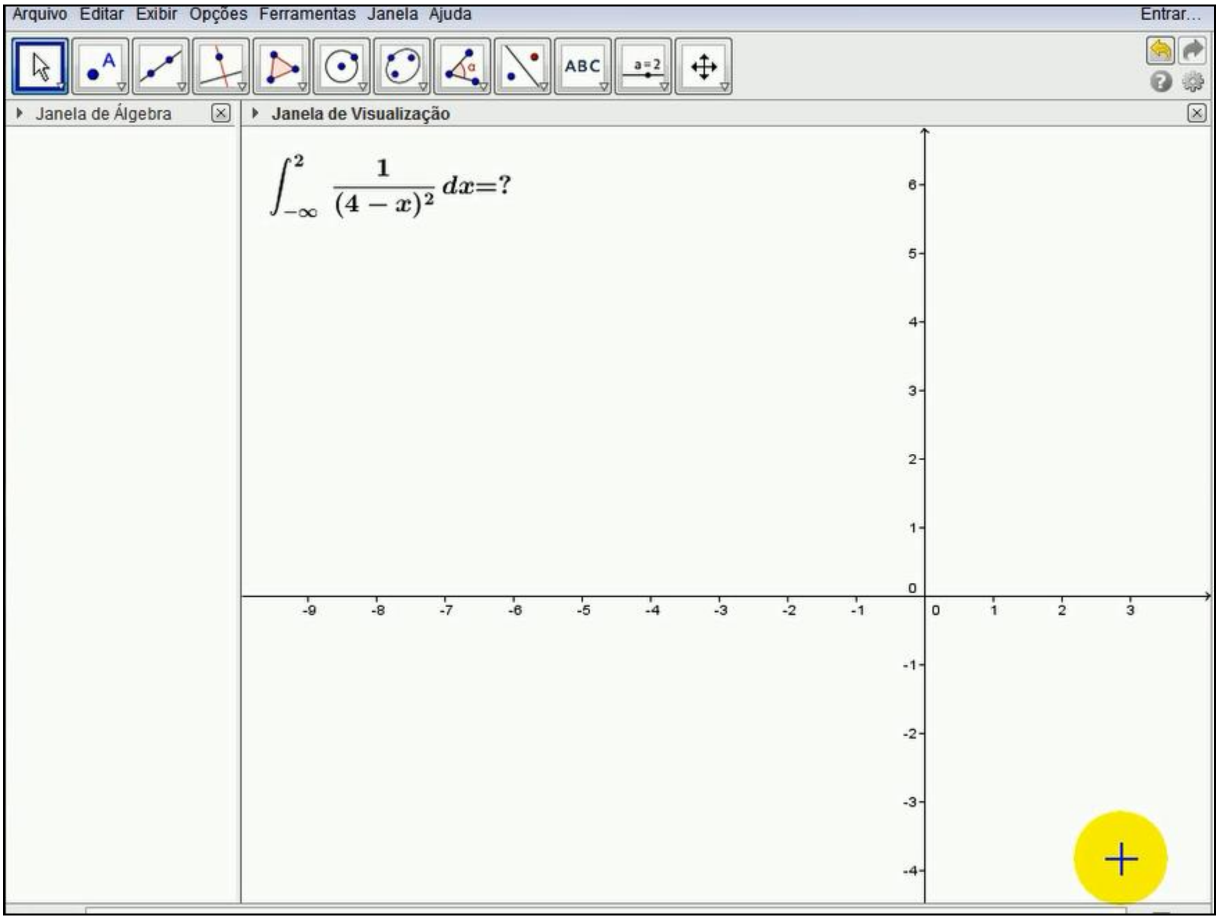
No gráfico a seguir temos o resultado formal do problema, que pode ser feito pelo professor com o rigor necessário, mas com o uso do GeoGebra.



Vale ressaltar que devemos mostrar para o aluno algumas análises que poderão ajudar na sua formação presente e futura. Quando queremos encontrar $\int_{-\infty}^{0} xe^{x}dx$, podemos verificar pela definição que $\int_{-\infty}^{0} xe^{x}dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} xe^{x}dx$, neste momento podemos usar a visualização gráfica para encontrar a primitiva. Então, $\lim_{t\to-\infty}[e^{x}(x-1)]_{t}^{0} = -1$, logo converge.

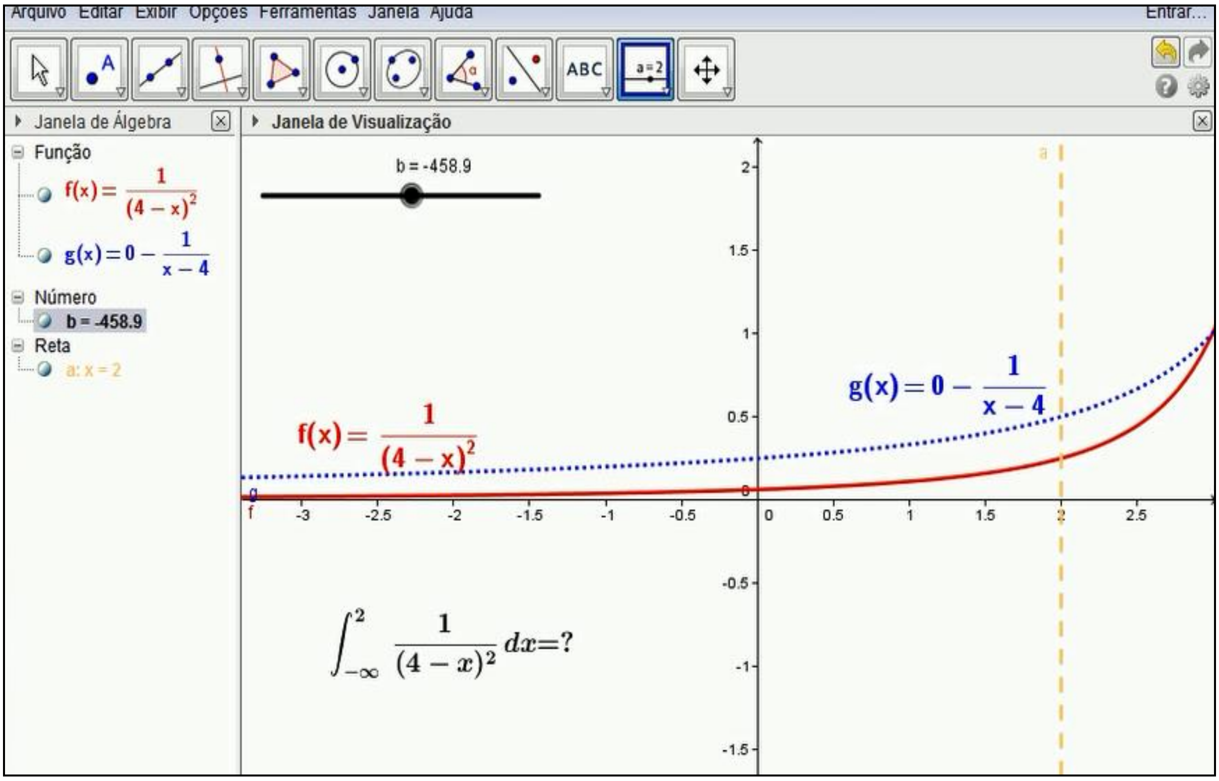
4ª Vídeoaula

Para esta vídeoaula buscamos uma situação didática clássica das Integrais Impróprias, encontrar o valor de $\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{(4-x)^2} dx$. Essa é nossa Tomada de Posição, vejamos:

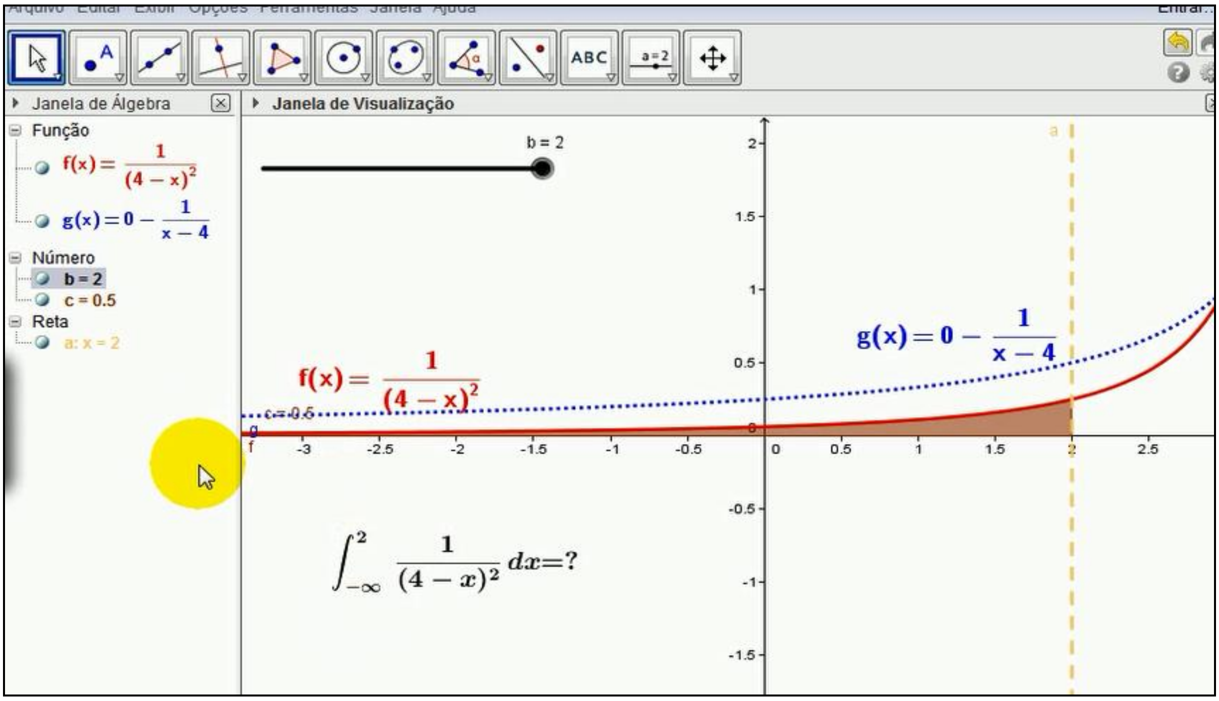


Não buscamos nesta situação que o aluno resolva unicamente graficamente, mas que possamos desenvolver a capacidade de exploração do GeoGebra na ajuda para uma solução correta.

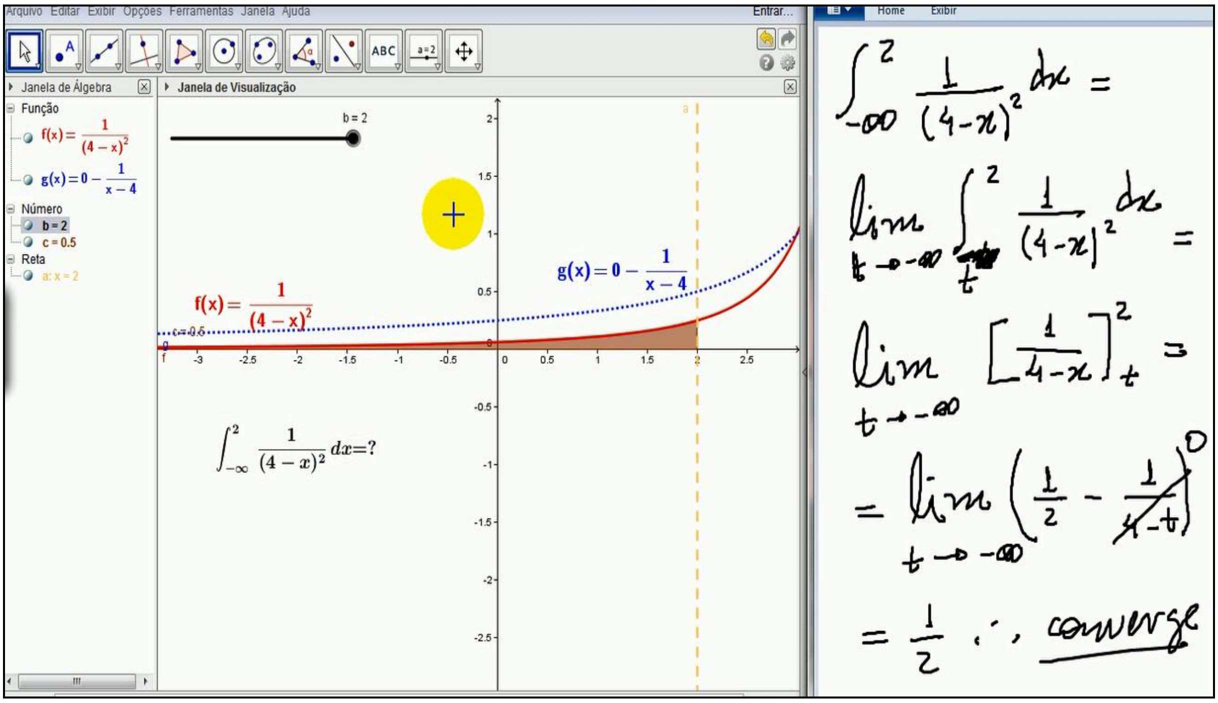
Na figura a seguir, ocorre a fase de maturação, pois neste momento o aluno já deve ter manipulado o *software* e possivelmente deve ter construído uma resposta. Vejamos:



Observamos que fizemos o gráfico da função integranda e sua primitiva, além de possivelmente manipularmos o controle deslizante. Para encontrarmos uma solução, conforme a figura a seguir.



Observamos que na figura abaixo, temos uma área que o GeoGebra nos mostra, nesse caso 0,5. Não podemos afirmar que é uma resposta correta, em virtude das limitações do GeoGebra, porém essa pode ser uma resposta informal e que pode ser comprovada pela formalização da solução com a definição algébrica. Conforme a figura a seguir, vejamos:



Fonte: Produção nossa

Esta é fase da Prova, neste momento estamos mostrando com o auxílio do GeoGebra que a Integral Imprópria converge e que realmente a resposta que o software forneceu é correta, apesar de suas limitações para intervalos infinitos.

ANEXO A – ATIVIDADE APLICADA EM AMBAS ÀS INSTITUIÇÕES (UFAC E IFCE) PARA OBSERVAÇÃO.

SITUAÇÕES DIDÁTICAS APLICADAS

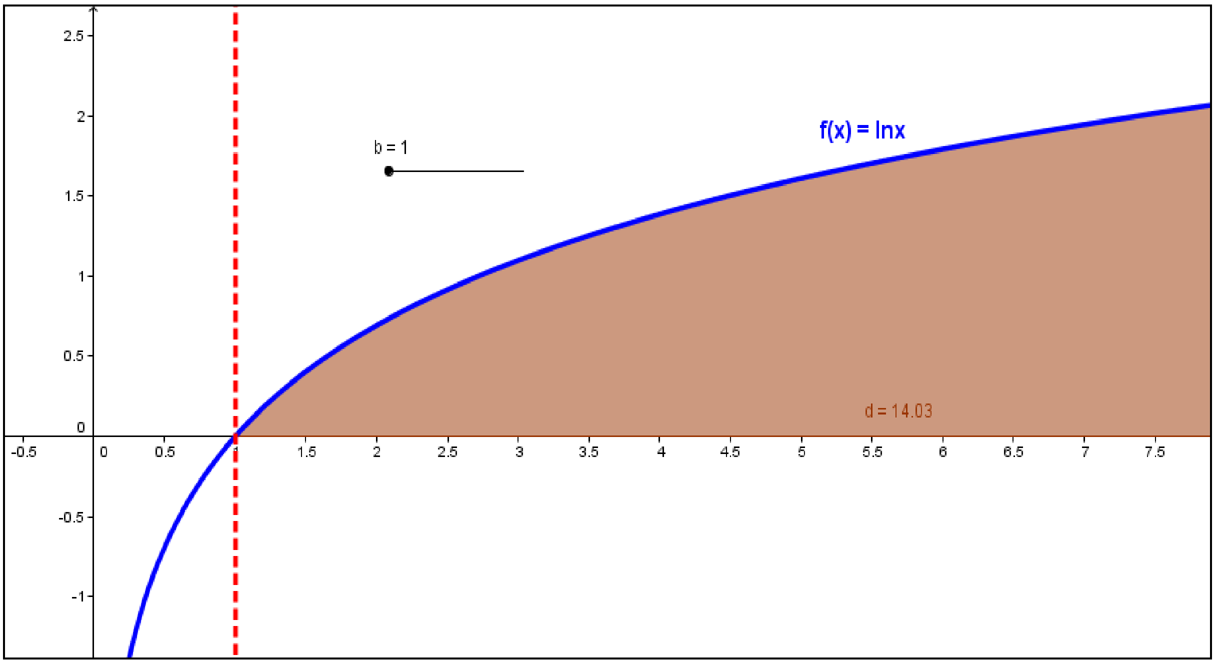
ALUNO(A):____

DATA: ___/___/______. **CONTEÚDO: INTEGRAL IMPRÓPRIA**

DISCIPLINA: CÁLCULO II **CURSO:**______________________

QUESTÕES

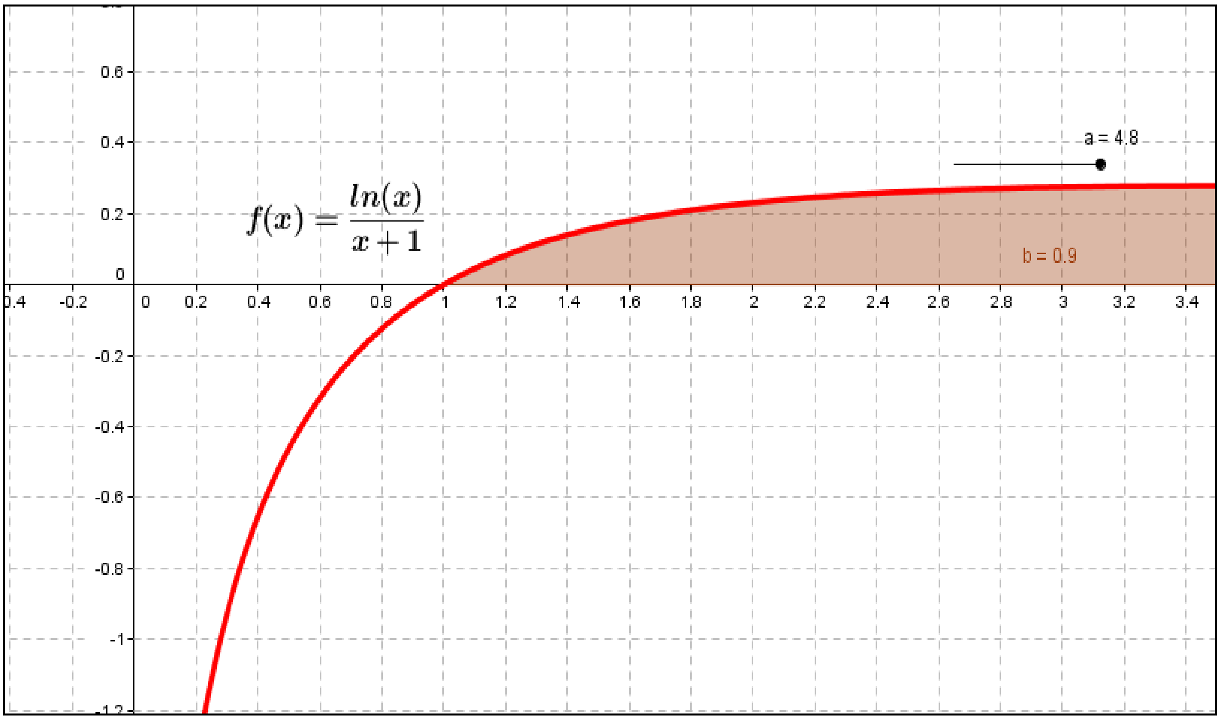
01. Observando a figura abaixo, justificar cada item e marque (V) ou (F).



a) (   ) Na figura, aparentemente, as contribuições de área correspondentes a integral $\int_1^{+\infty} \ln(x)\, dx$ tendem a aumentar, assim, talvez $\int_1^{+\infty} \ln(x)\, dx$ divirja.

b) (   ) Na figura, as contribuições de área correspondentes a integral $\int_0^1 \ln(x)\, dx$ é convergente.

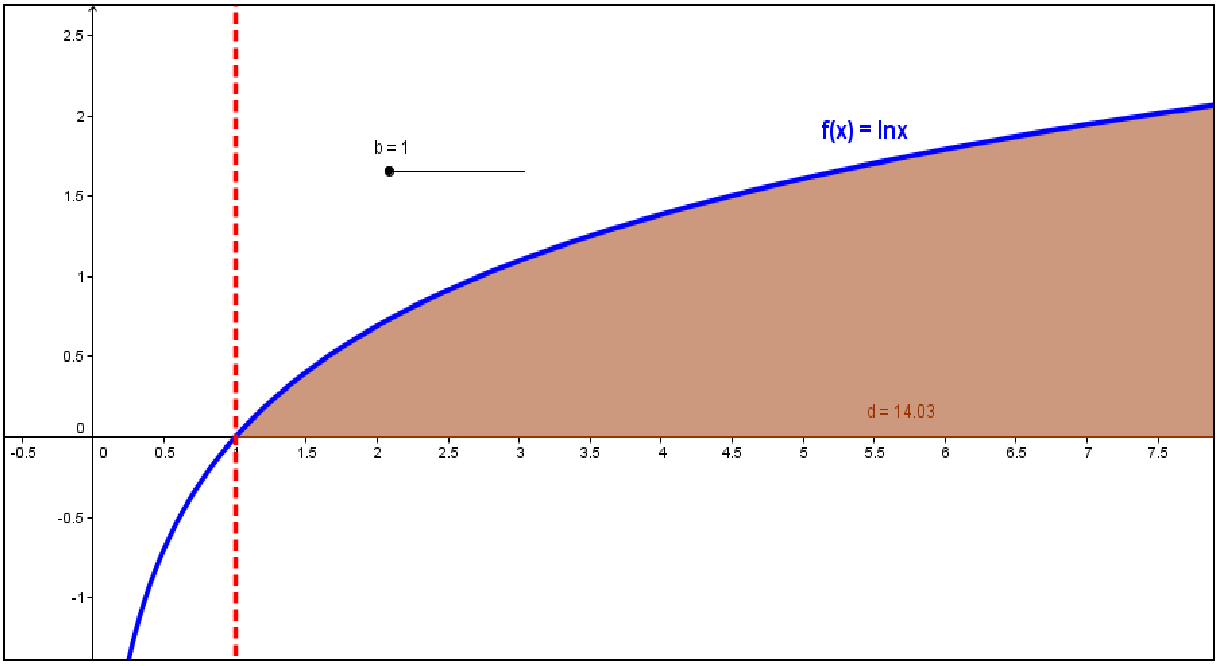
02. Decidir a natureza e o comportamento da seguinte integral $\int \frac{\ln(x)\,dx}{x+1}$. Observe o gráfico abaixo.



ANEXO B - REGISTROS DAS RESOLUÇÕES DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS PROPOSTAS NO ANEXO A

Vamos apresentar a situação didática e em seguida as soluções que alguns alunos conseguiram apresentar, seguido de nossos comentários.

01. Observando a figura abaixo, justificar cada item e marque (V) ou (F).



a) ( ) Na figura, aparentemente, as contribuições de área correspondentes a integral $\int_1^{+\infty} \ln(x)\, dx$ tendem a aumentar, assim, talvez $\int_1^{+\infty} \ln(x)\, dx$ divirja.

b) ( ) Na figura, as contribuições de área correspondentes a integral $\int_0^1 \ln(x)\, dx$ é convergente.

SOLUÇÕES APRESENTADAS PELOS ALUNOS

Atividade

1 a) Observamos o gráfico, podemos calcular a Integral indefinida.

$$\int_1^{+\infty} \ln(x)\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \ln(x)\,dx \quad (I)$$

Resolvendo somente a integral temos:

$$\int \ln(x)\,dx = \quad \text{Chamando } u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x}$$

$$\int dv = \int 1\,dx \Rightarrow v = x$$

$$\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} = x\ln(x) - x$$

Voltando para (I) temos:

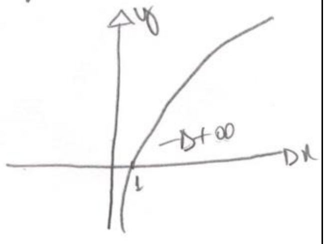
$$\int_1^{+\infty} \ln(x)\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \ln(x)\,dx = \lim_{t \to +\infty} \Big[x\ln(x) - x \Big]_1^t$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \Big[\big(t\ln(t) - t\big) - \big(\cancelto{0}{\ln(1)} - 1\big) \Big] =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \Big[t\cancelto{+\infty}{\ln(t)} - \cancelto{-\infty}{t} + 1 \Big] =$$

Este limite é indeterminado, pela definição de integral no infinito quando o limite é indeterminado a função diverge. Então é verdadeira a afirmação.

Analisando o gráfico $\ln(t)$



(b) Podemos Calcular a inversa, e achar essa area em torno do eixo x.

$$\ln(x) = y = \log_e e^x = e^y = x = e^y.$$

E ficaria assim.

$$\int_{-\infty}^{0} e^y\,dy = \lim_{t \to +\infty} \int_t^0 e^y\,dy = \lim_{t \to +\infty} \left[e^y\right]_t^0 =$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \left(e^0 - e^t\right) = \lim_{t \to -\infty} \left(1 - \cancel{e^t}^{\to 0}\right)$$

Quando t tende a − ∞ a função tende a zero. Então:

$$\int_{-\infty}^{0} e^y\,dy = 1$$

Então a função converge ou seja a afirmação esta correta

Comentário: Neste caso o aluno detalhou todos os seus passos algebricamente, usou pouco a visualização gráfica, teve que detalhar cada passagem para abstrair a construção da solução. Ou seja, foi uma resolução “extremamente” tradicional.

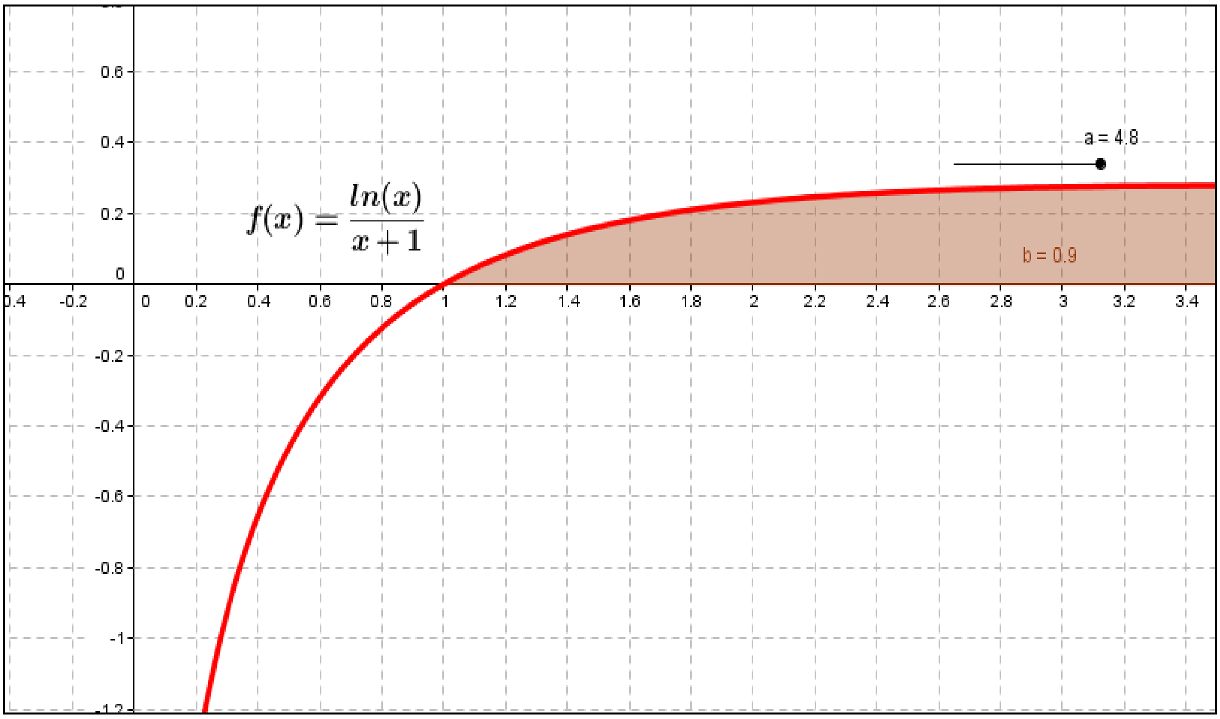
1) a) Aparentemente, as limitações de áreas no intervalo $[1, +\infty)$ aumentam, proporcionalmente, a partir do aumento do valor de x.

$$\int_1^{+\infty} \ln(x)\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \ln(x)\,dx \Rightarrow x\ln(x) - x \Big|_1^t \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} x\ln(x) - x \Big|_1^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to +\infty} t\ln(t) - t - 1 = +\infty - 1 = +\infty \text{ (Diverge)}.$$

Comentário: Neste caso o aluno fala das limitações de áreas no intervalo, dando entender que o mesmo fez análises do gráfico contido no problema. Também fez uma resposta mais sucinta, demonstrando maior abstração sem tirar o rigor matemático.

02. Decidir a natureza e o comportamento da seguinte integral $\int \frac{\ln(x)dx}{x+1}$. Observe o gráfico abaixo.



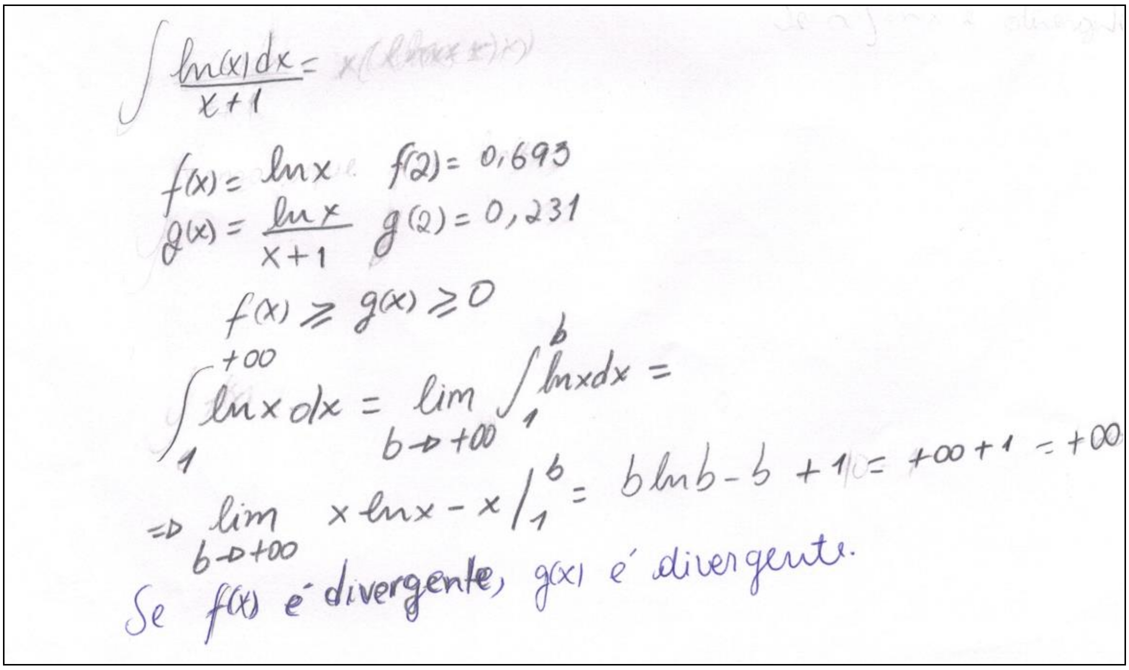
SOLUÇÕES APRESENTADAS PELOS ALUNOS

(I) iremos descobrir uma função equivalente a $f(x) = \frac{\ln(x)}{x+1}$.

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x+1} \Rightarrow \int_0^1 \frac{\frac{\ln(x)}{x+1}}{\ln(x)} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\ln(x)}{x+1}}{\ln(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x+1} = 1.$$

Como o resultado deu $=1$, provamos que: No intervalo de $[0,1]$, as funções $f(x) = \frac{\ln(x)}{x+1}$ e $g(x) = \ln(x)$ são EQUIVALENTES, ou seja $f(x) \underset{0}{\sim} g(x)$.

Comentário: Neste caso o aluno não conseguiu fazer uma resposta completa para o problema proposto, conseguiu analisar a natureza da Integral Imprópria, mas desenvolveu o seu comportamento.



$$\int \frac{\ln(x)\,dx}{x+1} =$$

$f(x) = \ln x \quad f(2) = 0{,}693$

$g(x) = \frac{\ln x}{x+1} \quad g(2) = 0{,}231$

$$f(x) \geq g(x) \geq 0$$

$$\int_1^{+\infty} \ln x\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \ln x\, dx =$$

$$\Rightarrow \lim_{b \to +\infty} x \ln x - x \Big|_1^b = b \ln b - b + 1 = +\infty + 1 = +\infty$$

Se $f(x)$ é divergente, $g(x)$ é divergente.

Comentário: Aqui o aluno usou recursos de uma calculadora e a visualização gráfica para desenvolver sua resposta, sem perder o rigor matemático necessário ao conteúdo de Integrais Impróprias.

ANEXO C – INTERFACE DE SITES IMPORTANTES VOLTADOS AO GEOGEBRA.

1) Revista voltada a área de publicações com o *software* GeoGebra nos Estados Unidos, denominada *North American GeoGebra Journal – Official Publication of the Geogebra Institute of Maine*. Pode ser encontrado na página: http://www.lib.miamioh.edu/multifacet/record/mu3ugb4256846

Neste site podemos encontrar publicações em nível internacional voltadas ao *software* GeoGebra, sendo filiado ao Instituto GeoGebra Internacional.

2) Revista da Romênia especializada em artigos voltados ao GeoGebra, denominda *Index Copernicus International*, pode ser encontrada no site: http://www.indexcopernicus.com/

3) Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo – Pontifícia Universidade Católica (PUC-SP). Pode ser encontrada no site: http://www.pucsp.br/geogebrasp/