



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

CLAUDÉCIO GONÇALVES LEITE

**A CONSTRUÇÃO HISTÓRICA DOS SISTEMAS DE
NUMERAÇÃO COMO RECURSO DIDÁTICO PARA O
ENSINO FUNDAMENTAL I**

JUAZEIRO DO NORTE/CE
2014

CLAUDÉCIO GONÇALVES LEITE

A CONSTRUÇÃO HISTÓRICA DOS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO
COMO RECURSO DIDÁTICO PARA O ENSINO FUNDAMENTAL I

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

JUAZEIRO DO NORTE/CE

2014

CLAUDÉCIO GONÇALVES LEITE

A CONSTRUÇÃO HISTÓRICA DOS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO
COMO RECURSO DIDÁTICO PARA O ENSINO FUNDAMENTAL I

BANCA EXAMINADORA

Examinadores: _____

Dissertação apresentada em ____/____/____

Nota obtida: _____.

JUAZEIRO DO NORTE/CE
2014

DEDICATÓRIA

À minha família, por todo o incentivo e apoio que me proporcionaram e aos meus professores do curso de matemática da Urca que contribuíram para o meu crescimento com professor de matemática.

RESUMO

Utilizar a história dos sistemas de numeração é criar momentos diferenciados para que o aluno vivencie experiências na construção dos números e que esses venham a entender que o sistema usado hoje pelas diversas culturas é uma criação de toda a humanidade. O trabalho dissertará sobre a temática sistemas de numeração, utilizando as publicações já existentes sobre o referido assunto, fazendo, assim, uma ampla consulta bibliográfica em livros didáticos, livros técnicos sobre o assunto e, também, resultados das avaliações externas disponibilizadas pelos órgãos oficiais. Os objetivos do trabalho voltam-se para um resgate da história da matemática, como uma fonte de entendimento do sistema de numeração decimal, usando a linha histórica da construção de outros sistemas numéricos a fim de que os alunos possam comparar esses sistemas numéricos com o sistema decimal e assim compreender melhor os nossos números. Acreditamos que uma visão da matemática como uma ciência pronta, que deve ser apenas “servida” em sala de aula, já não tem mais espaço nas aulas de uma sociedade que passa por rápidas e profundas transformações.

Palavras-Chave: Sistemas de numeração; ensino; aluno do ensino fundamental I

LISTA DE QUADROS E FIGURAS

• LISTA DE QUADROS

QUADRO 1: Quadro comparativo dos resultados do brasil no pisa, desde 2000. Pg.	10.
QUADRO 02: Representação da escrita dos sumérios. Pg.....	14
QUADRO 3 e 4: As regras do sistema sumeriano. pg.....	16
QUADRO 05: Numeração egípcia. pg.....	19
QUADROS 6: A escrita de um a dez no sistema egípcio. pg.....	20
QUADROS 7: A escrita de onze a vinte no sistema egípcio. pg.....	21
QUADRO 8: Regras do sistema chinês.pg	25
QUADRO 10: Números romanos. pg.....	27
QUADRO 11: Regras do sistema romano. pg.....	28
QUADRO 12: Numeração maia. pg.....	31
QUADRO 13: Regras de numeração maia. pg.....	32
QUADRO 14: Regras de numeração maia. pg.....	32
QUADRO 15: Numeração indo-arábico. pg.....	35
QUADRO 16: Comparação entre os sistemas de numeração. pg.....	40
QUADRO 17: <u>As principais características dos sistemas numéricos.</u> pg..	41

• LISTA DE FIGURAS

Figura 1.....	12
Figura 2.....	17
Figura 3.....	22
Figura 4.....	25
Figura.....	29
Figura 6.....	33

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	08
1 RESUMO SOBRE AS CIVILIZAÇÕES E SEUS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO	12
1.1 Civilizações Suméria	12
1.1.1 Sistema de Numeração Sumeriano	13
1.1.2 Regras do Sistema Sumeriano	15
1.1.3 Civilização Egípcia	17
1.1.4 17 Sistema de Numeração Egípcia	19
1.1.5 Regras do Sistema Egípcio	20
1.1.6 Civilização Chinesa	21
1.1.7 Sistema de Numeração Chinesa	23
1.1.8 Regras do Sistema Chinês	24
1.2 Civilização Romana	25
1.4.1 Sistema de Numeração Romana	27
1.4.2 Regras do Sistema de Numeração Romana	28.
1.5 Civilização Maia	29
1.5.1 Sistema de Numeração Maia	30
1.5.2 Regras do Sistema de Numeração Maia.....	31
1.6 Civilizações Árabe e Indiana.....	32
1.6.1 Sistema de Numeração indo-Arábico.....	35
1.6.2 Regras do Sistema de Numeração Indo-Arábico.....	35
2 OS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO E SUAS CARACTERÍSTICAS.....	37
3 A TÍTULO DE CONCLUSÃO: COMO USAR OS SISTEMAS NUMÉRICOS.....	4
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	
ANEXOS	

INTRODUÇÃO

A humanidade, há milhares de anos, desenvolveu formas de fazer registros de suas ações e com isso criou, em particular, métodos para comparar e fazer relações entre conjuntos de naturezas diferentes, fazendo relacionar quantidade de elementos entre dois grupos, que cria uma das mais antigas formas de contagem - a relação um a um ou relação biunívoca. Sendo que, em cada época, a capacidade de registro era melhorada e ainda cada cultura tinha sua forma particular de fazer esses registros. Considerando o longo período de tempo e as várias culturas que contribuíram para a construção dessas formas de registros, temos, assim, a elaboração de vários sistemas de numeração que surgem em civilizações espalhadas por toda a antiguidade. Mas, diante de inúmeras formas de fazer registro numérico como chegar ao consenso para que todas as pessoas usassem a mesma forma de contar? Essa é uma das várias perguntas que trata o nosso objeto de estudo.

O presente trabalho tem como principal contribuição o preenchimento de um lacuna presente no ensino de matemática nas séries iniciais, no Brasil, que foi construída, principalmente nos anos trinta, com o discurso da Escola Nova, movimento conhecido com “Os Pioneiros da Educação “ e, nos anos oitenta, com o discurso da psicogênese, a qual tinha como principal fundamento as ideias de Jean Piaget. Assim, o método tradicional foi sendo retirado do sistema de ensino brasileiro e os profissionais da educação não tinham a formação relativo ao novo discurso, que apregoava a escola nova .

A respeito dessa falta de direcionamento do ensino brasileiro dentro de uma corrente pedagógica única os PCNs (1997, pag. 39) dizem:

“As tendências pedagógicas que se firmam nas escolas brasileiras, públicas e privadas, na maioria dos casos não aparecem na forma pura, mas com características

particulares, muitas vezes mesclando aspectos de mais de uma linha pedagógica”.

Sendo, assim, o ensino do sistema de numeração e a forma de como opera sobre esse sistema ficou entre um dilema: se podemos memorizar os fatos matemáticos (tabuada) ou se construímos esse fatos de forma lúdica.

De acordo com Marília Centurión (1994 , p 21), um conjunto de símbolos e de regras utilizados para escrever números é denominado sistema de numeração. Tendo em vista o tempo utilizado pela humanidade e o número de culturas que contribuíram para a construção de um sistema de numeração para que toda a humanidade viesse a utilizar, devemos reconhecer que esse sistema numérico deve ter grandes atributos, e ser bem elaborado. Neste sentido, vários sistemas de numeração são conhecidos em civilizações antigas, sendo os mais citados pelos livros didáticos: sistema Romano, sistema do povo Maia, sistema indiano e o sistema Chinês entre outros, dos quais utilizaremos alguns para a elaborar o nosso trabalho.

Como ensinar em cinco anos (ensino fundamental I) o conhecimento que a humanidade levou milhares de ano para construir ? O desafio desse trabalho é criar uma alternativa para o ensino do sistema de numeração indo-arábico ou simplesmente sistema de numeração decimal, que, segundo Marília Centurión (1994 , p 32) é o sistema de numeração utilizado na maioria de nossa culturas contemporânea, representando o principal objeto de ensino do ensino fundamental.

Acreditamos que um fator motivador para as dificuldades que os alunos encontram para seguir no estudo de matemática nos anos posteriores ao ensino fundamental I é a falta de entendimento de sistema de numeração decimal e, com isso, as notas das avaliações externas e internas ficam também comprometidas.

O quadro, a seguir, mostra as notas PISA

QUADRO1: QUADRO COMPARATIVO DOS RESULTADOS DO BRASIL NO PISA, DESDE 2000.

	Pisa 2000	Pisa 2003	Pisa 2006	Pisa 2009	Pisa 2012
Número de alunos participantes	4.893	4.452	9.295	20.127	18.589
Leitura	396	403	393	412	410
Matemática	334	356	370	386	391
Ciências	375	390	390	405	405

Fonte : INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira)

O quadro mostra os resultados do Programme For International Student Assessment (PISA), revelando uma melhora crescente entre os estudantes brasileiros no ensino de matemática. Mas, mesmo com esse crescimento, o Brasil encontra-se ainda nos últimos lugares, na classificação dos países que participam dessa avaliação.

Diante do quadro acima, podemos constatar que os alunos, dessa etapa de ensino, necessitam de uma alternativa para compreender melhor os conceitos sobre sistema de numeração bem como as formas de operação com esse número, sendo esse o principal intuito com a realização deste trabalho.

O presente trabalho é constituído de três capítulos. O primeiro capítulo faz um levantamento histórico de seis sistemas de numeração (maia, romano, chinês, egípcio, sumério e indo-arábico), que consideramos mais frequentes nos livros didáticos, nessa etapa de ensino, com suas regras, algarismos, a base em que foi construído, e um levantamento sociocultural da civilização que o originou. O segundo capítulo estabelece uma comparação entre esses sistemas, retomando

as principais semelhanças e as principais diferenças e sugestões de atividades, a fim construimos um recurso didático para essa fase do ensino. E, por último, apresenta-se, a título de conclusão, algumas sugestões de como usar os sistemas numéricos, como contribuição maior para a melhoria do ensino de matemática no ensino fundamental I.

Assim, frente ao exposto, já existem nos livros didáticos esse recurso. Não temos a pretensão de mostrarmos um trabalho inédito e, sim, apenas despertar nos professores, desse nível de ensino, um caminho traçado pelos livros, quase nunca reconhecido pelos professores. Serão observadas as páginas que trazem a história da matemática como um recurso didático e não apenas como sendo um conjunto de curiosidades que quase nem sequer é lido pelo professor para que os alunos tenham conhecimento do “assunto”.

O trabalho dissertará sobre a temática, utilizando as publicações já existentes sobre o referido assunto, fazendo, assim, uma ampla consulta bibliográfica em livros didáticos, livros técnicos sobre o assunto e, também, resultados das avaliações externas disponibilizadas pelos órgãos oficiais.

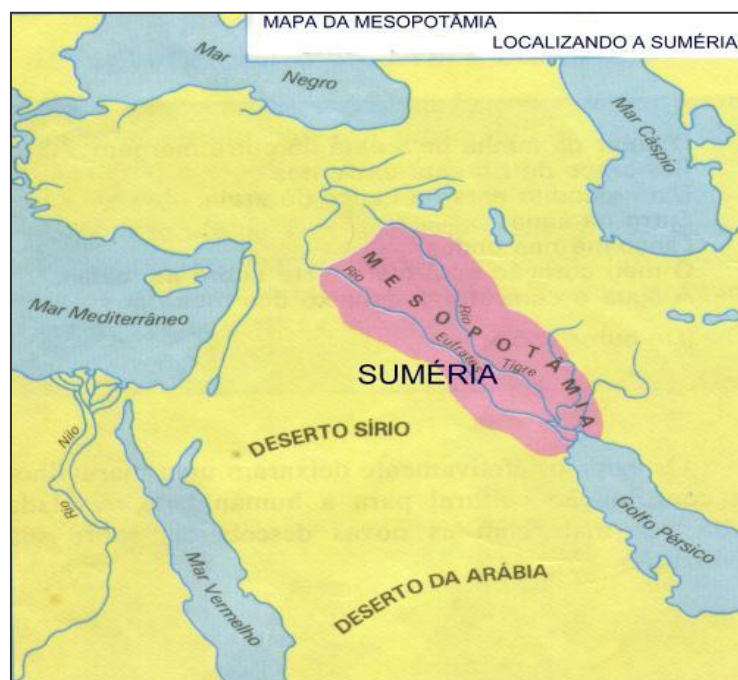
Os objetivos do trabalho são voltados para um resgate da história da matemática, como uma fonte de entendimento do sistema de numeração decimal, usando a linha histórica da construção de outros sistemas numéricos a fim de que os alunos possam comparar esses sistemas numéricos com o sistema decimal e assim compreender melhor os nossos números. Acreditamos que uma visão da matemática como uma ciência pronta, que deve ser apenas “servida” em sala de aula, já não tem mais espaço nas aulas de uma sociedade que passa por rápidas e profundas transformações.

1 RESUMO SOBRE AS CIVILIZAÇÕES E SEUS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

1.1 - Civilizações Suméria

A Suméria ficava situada ao sul da Mesopotâmia, onde se unem o Rio Tigre e o Rio Eufrates antes de desaguar no Golfo Pérsico. Hoje, sul do Iraque, como mostra a Figura 01.

FIGURA 1: MAPA LOCALIZANDO A SUMÉRIA



Fonte: Atlas Geográfico – 2001.

Os agricultores sumérios enfrentavam muitas dificuldades, sendo a principal delas a escassez de chuvas. Para obter água, construíam canais de irrigação. Ao povo sumeriano é atribuída a invenção da escrita, sendo o primeiro texto regido no mundo utilizando o sistema silábico para redigir transações comerciais.

As principais cidades-estados dos sumérios eram: Ur, Uruk e Eridu. Cada cidade tinha seus próprios deuses. Os sumérios ainda são conhecidos pela invenção da roda (4000 a. C.). A roda era usada para transporte e para a fabricação de cerâmica.

Nas palavras de Divalte (2011, p. 38):

"Ao contrário dos egípcios, que eram politicamente unificados, os sumérios organizavam-se em pequenas cidades estados independentes, formadas por núcleo principal e por terras cultivadas ao redor, o que as enfraquecia, favorecendo as invasões de outros povos."

A massa da população, servos e escravos, arcavam com pesados tributos e com trabalho obrigatório nos serviços públicos. Alguns dos servos cultivavam terras dos seus senhores e ficavam com parte do que produziam.

Havia duas classes de escravos; os escravos domésticos, encarregados das tarefas caseiras; e os prisioneiros de guerra, sujeitos a uma vida mais miserável, os quais eram presos por pesados grilhões, e compelidos a trabalhar até a exaustão, na construção de estradas, canais e palácios.

1.1.1 Sistema de Numeração Sumeriano

Esse sistema de numeração tinha, na sua formação, apenas dois símbolos, como podemos constatar no livro do Ifrah (1994, p. 237):

“Esta numeração utilizava propriamente apenas dois algarismos: um ‘cravo’ vertical representando as unidades e uma ‘asna’ associadas ao número 10 signos cuja grafia é denominada ‘cuneiforme’ em virtude do seu aspecto em forma de ‘cunha’ e de ‘cravo’ ”.

Os sumérios criaram sistemas de numeração de base decimal até os números menores que sessenta. Para os números maiores que sessenta, agruparam de sessenta em sessenta, ou seja, criaram um sistema de numeração sexagesimal com valor posicional já definido no quadro que segue.

QUADRO 02: REPRESENTAÇÃO DA ESCRITA DOS SUMÉRIOS

O diagrama mostra um pedaço de argila com inscrições sumérias em seis linhas, cada uma representando um número de 1 a 6. À direita, uma tabela mostra a correspondência entre os símbolos sumérios e os números decimais modernos.

Em nosso sistema:	
1	9
2	18
3	27
4	36
5	45
6	54

Fonte: Livro de Imenes - Os números na história da civilização, 1994.

A representação da falta do elemento (zero), em qualquer ordem, nesse sistema de numeração, assim como em qualquer outro sistema numérico, levou muito tempo para ser usado.

Acreditamos que a resistência ao uso de um símbolo, na falta de elementos em uma ordem, tenha sido consequência da visão dos matemáticos, que usavam os símbolos na representação de quantidade e, a partir do momento

que não existiam elementos para ser representado, não era necessário usar símbolos.

Sobre esse assunto, discorre Centurión (1994, p. 25) o seguinte:

“Como você deve ter notado, os babilônios não tinham um símbolo para ocupar uma casa vazia, ou seja, um símbolo para o zero. Eles deixavam um espaço para diferenciar as posições dos agrupamentos, mas certamente isso causava confusão” .

Acreditamos que essas dificuldades eram geradas devido à falta de padronização desse espaço, que pode ter um único espaço, mais também ter dois, três ou mesmo mais espaços juntos e como era feita essa diferenciação, ou ainda não ter espaço e, por deslize de quem escreve, deixar um espaço sem existir. Assim, a falta do zero para preencher esse espaço gerava uma deficiência na representação desses números.

A civilização sumeriana criou um símbolo para representar subtração no seu sistema numérico, que é o "prego" representado horizontalmente. Tal fato pode ser observado no quadro 02.

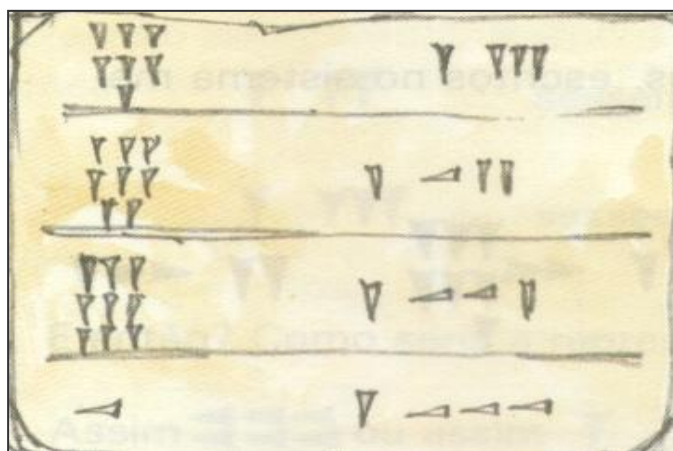
1.1.2 Regras do Sistema Sumeriano

As regras do Sistema Sumeriano, de acordo com Boyer (1994, p. 20), são usados:

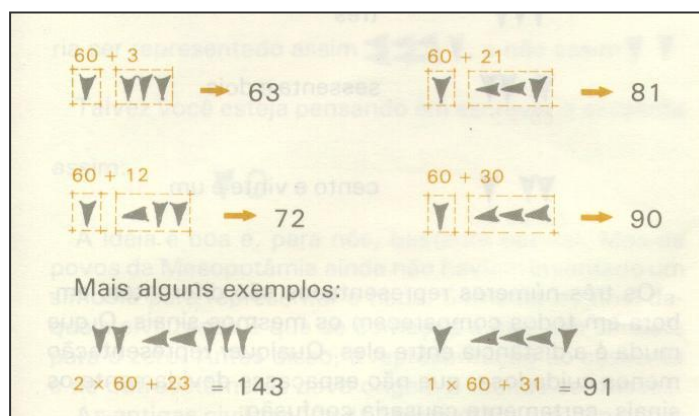
- *Dois símbolos para escrever qualquer quantidade;*
- *Dois "pregos" inclinados representam o "zero";*
- *Para indicar cada novo agrupamento há um espaço entre os símbolos;*
- *As unidades são contadas até 60;*
- *O sistema é posicional.*
- *“Os agrupamentos são feitos de 60 em 60”.*

Aparece uma contradição entre o Boyer e Centurión, na existência ou não do zero, no sistema de numeração sumeriano. Mas isso é claramente aceitável, pois o primeiro vem confirmar a não criação do zero pelos babilônios, pois não se tem registro de representação de zero em término de números. Sendo assim, o próprio Boyer mostra a falta do zero de forma plena, no sistema de numeração babilônio, e, ainda, o zero representado por dois “pregos” inclinados nas casas centrais é usado em um período após a criação de sistema.

QUADRO 3 e 4: AS REGRAS DO SISTEMA SUMERIANO



Fonte: Livro de Imenes - Os números na história da civilização, 1994.



Fonte: Livro de Imenes - Os números na história da civilização, 1994.

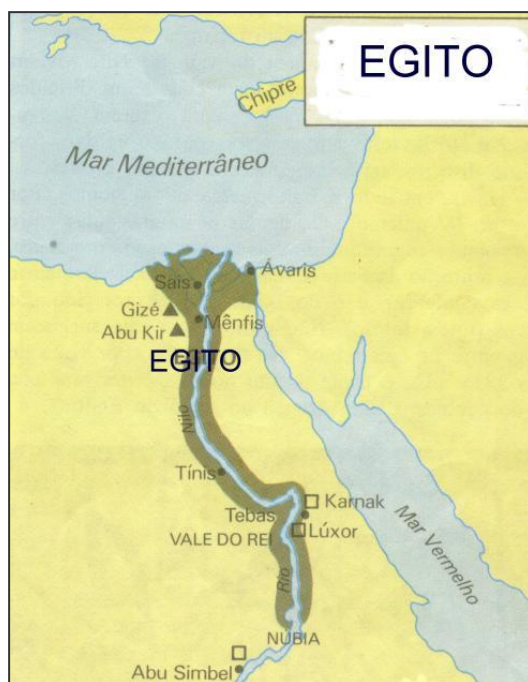
Os dois quadros acima estão mostrando que, no Sistema Sumeriano, são usados dois símbolos para se escrever qualquer quantidade.

1.2 Civilização Egípcia

A civilização egípcia foi estabelecida, no nordeste da África, às margens do Rio Nilo. Ocupou, durante três milênios, centenas de quilômetros ao longo desse produtivo vale.

O vale onde vicejou (ostentar-se de maneira brilhante), o Egito corresponde a 800 quilômetros do Rio Nilo, que tem uma extensão de 6.450 quilômetros, como mostra a figura 02.

FIGURA 02: LOCALIZAÇÃO DA CIVILIZAÇÃO EGÍPCIA



Fonte: Atlas Geográfico – 2001.

A sociedade egípcia começou a se delinear na luta pela posse das melhores áreas, valendo-se sempre da força física, dos recursos políticos e do apelo religioso.

Segundo Patrícia e Myuian (1996, p. 64):

"Essa sociedade estava dividida em três classes: a primeira formada pelo faraó, considerado um deus e sua família que tinha posição especialíssima e faziam parte desse primeiro grupo os sacerdotes e nobres, a segunda classe social era formada pelos funcionários públicos, comerciantes e artesãos, a terceira e última classe era formada pelos camponeses, operários, soldados e guardas. Os escravos egípcios não estão incluídos nas classes sociais e eram responsáveis pelo trabalho braçal".

A agricultura era naturalmente o fundamento da economia egípcia. Dependia da singularidade do inverno, que só se viabilizava pela enchente do Nilo. Foi necessário muito tempo e trabalho para que os habitantes do vale domassem a natureza e tivessem perfeito controle das águas.

A produção de trigo, cevada, lentilha, algodão e uvas formavam o lastro básico da agricultura, enquanto a criação de bovinos, caprinos, suínos e ovinos expressava a diversidade das atividades pastoris.

Segundo Divalte (2011, p. 33): "Como inúmeros povos da antiguidade os egípcios eram politeístas, ou seja, adoravam diversos deuses". A necessidade de estabelecerem comunicação benéfica com os elementos constitutivos do seu meio ambiente levou-os a divinizar todas as forças da natureza.








O principal passa tempo dos egípcios era o jogo de xadrez. Os tabuleiros descobertos nas sepulturas comportavam de 20 a 30 casas. Nas artes, a religião impunha normas fixas rígidas, reduzindo ou até anulando o espírito criativo dos artistas.

Templos e túmulos foram construídos de granitos e calcários, em dimensões ciclópicas, gigantescas, pilares monumentais, obeliscos e estátuas colossais, ladeando avenidas que chegam até à porta de entrada dos templos.

1.2.1 Sistema de Numeração Egípcia

Os numerais egípcios conhecidos como hieróglifos, foram criados aproximadamente há cinco mil anos, mas a forma de contar dos egípcios já possibilitava uma escrita de números abrangentes a partir da ideia de agrupamento. As unidades eram representadas por traços verticais de um a nove, contando pela repetição do traço vertical. As potências de dez tinham representação por símbolos criados para cada potência.

QUADRO 05: NUMERAÇÃO EGÍPCIA

	um traço vertical representava a unidade ;
	um sinal em forma de alça indicava a dezena ;
	este sinal, parecido com um pedaço de corda enrolada, valia cem ;
	esta flor de lótus com seu talo representava mil (lótus era uma planta sagrada no Egito Antigo);
	este desenho, representando um dedo dobrado, era o símbolo para dez mil ;
	com um girino eles representavam cem mil ;
	esta figura ajoelhada, com as mãos para o alto, representava um milhão .

Fonte: Livro de Imenes - Os números na história da civilização, 1994.

Ainda, com relação ao Sistema de Numeração Egípcia, Eves (2008, p. 30) declara que:

"Talvez o mais antigo sistema tipo de numeração a se desenvolver tenha sido aquele chamado sistema de agrupamento simples. Nessa modalidade de sistema escolhe-se um número b como base e adotam-se símbolos para $1, b, b^2, b^3$ etc. Então, qualquer número se expressa pelo uso desse símbolos aditivamente, repetindo cada um deles o número necessário de vezes. "

O Sistema de Numeração Egípcia é um exemplo desse sistema de numeração, onde consideramos um sistema de numeração de agrupamento simples e sem o princípio posicional, pois cada elemento tem a sua posição já determinada, sendo que os símbolos têm posição definida.

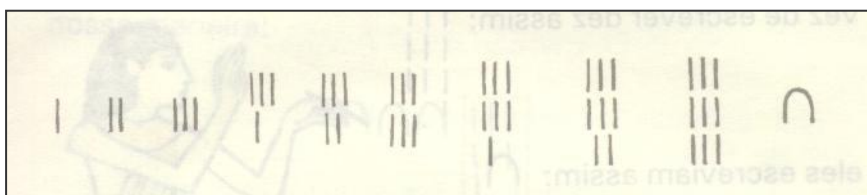
1.2.2 Regras do Sistema Egípcio

Tomando como referência as palavras de Centurión (1994, p. 21), as regras do sistema Egípcio têm as seguintes características:

- *A unidade é representada por uma haste vertical;*
- *Cada potência de dez tinha um símbolo específico;*
- *O número do símbolo é indefinido;*
- *Os agrupamentos são feitos de dez em dez;*
- *“Para saber o valor do número escrito, é preciso somar os valores dos símbolos utilizados”.*
- *Não possui valor posicional*
- *Cada símbolo é representado no máximo nove vezes.*

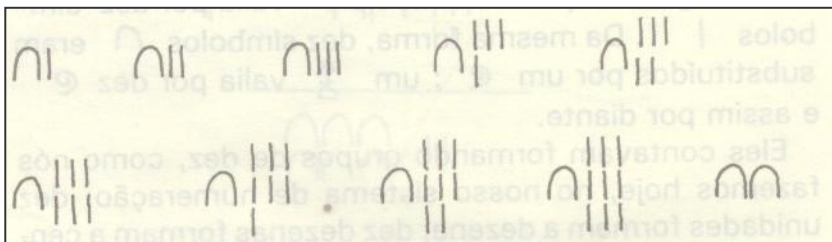
Vejamos a representação dos quadros abaixo:

QUADROS 6: A ESCRITA DE UM A DEZ NO SISTEMA EGÍPCIO



Fonte: Livro de Imenes- Os números na história da civilização, 1994.

QUADROS 7: A ESCRITA DE ONZE A VINTE NO SISTEMA EGÍPCIO



Fonte: Livro de Imenes - Os números na história da civilização, 1994.

Gostaríamos de ressaltar que as motivações para o uso desses símbolos, no sistema de numeração egípcio, não são mencionadas em obras bibliográficas consultadas para a produção desse trabalho.

O sistema de numeração egípcio citado, seus símbolos e suas regras no texto acima, são conhecidos como escrita demótica, que era de uso geral e deriva da hieroglífica.

A respeito dessa evolução, Eves (2008 p. 31) diz:

“ A mais antiga dessa forma era uma escrita cursiva, conhecida como hierática, da hieroglífica e usada pelos sacerdotes. Da hierática mais tarde resultou a escrita demótica, que foi que foi adotada para uso geral. Os sistemas de numeração hierático e demótico não pertencem ao tipo de agrupamentos simples”.

Assim, estamos considerando o Sistema de Numeração Egípcio a forma de escrita demótica.

1.3 Civilização Chinesa

Baseado na opinião de Divalte, “o território chinês já era habitado por antepassados da espécie humana desde, pelo menos, meio milhão de anos atrás”. Uma das mais antigas provas da ocupação da China foi pela descoberta do *Homo erectus pekinensis*, que foi conhecido popularmente pelo homem de Pequim. Embora pouco se saiba sobre a origem dos primeiros habitantes da

China, pode-se dizer, com certeza, que ficaram na extensa região banhada por diversas bacias hidrográficas do Rio Amarelo (Hoang-Ho) e do Rio Azul (Yang-Tsé Kiang). Observemos a figura 03.

FIGURA 03: LOCALIZAÇÃO DA CHINA



Fonte: Atlas Geográfico - 2001

A invasão Indo-européia transformou a China num verdadeiro mosaico de povos e, após uma constante miscigenação, surgem os chineses, sendo considerada de acordo com Divalte (2011, p. 160):

“Descobertas realizadas posteriormente mostraram que o homem de Pequim viveu entre 250 mil e 800 mil anos atrás, e que seus parentes bastante numerosos para se espalharem por várias regiões do território chinês. Uma das primeiras civilizações da humanidade.”.

A China se tornou um Estado e começou a conquistar povos em torno de suas fronteiras, tornando-se um império enorme com muitas dificuldades para administrar e por isso o governador resolveu criar "Estados", muito parecidos com os brasileiros, onde os governantes tinham amplo poder sobre seu Estado, sendo os governadores transformados em príncipes e seus "Estados" em principados.

Os chineses tinham um eficiente sistema de arrecadação de impostos, garantindo ao imperador recursos para manter um exército profissional, para afastar a ameaça dos invasores.

Segundo divalte (2011, p. 164):

“Camponeses foram recrutados em grande quantidade para o exército e também para o exército e também para a execução de obras públicas, onde trabalhavam ao lado dos escravos. Entre essas obras estava a construção de uma muralha no norte da china.”

A grande muralha da China, na verdade, são várias residências unidas uma às outras, com a função de proteger a China dos invasores.

1.3.1 Sistema de Numeração Chinesa

Dois mil anos após os matemáticos da Babilônia descobrirem uma forma de representar os números, independentemente de sua influência, os sábios chineses redescobriram a mesma regra, sendo representada de outra maneira.

Segundo Ifrah (1994, p. 243): "na época da dinastia Han (século II a C e III d. C) os chineses forjaram um engenhoso sistema de numeração escrita, combinando regularmente, sobre o princípio de posição, barras verticais e horizontais".

Se a matemática chinesa não tivesse sido interrompida, algumas das maravilhosas descobertas, na notação numérica, poderiam ter sido antecipadas pelos chineses que tiveram uma interrupção, quando o imperador da China mandou queimar todos os livros. Algumas obras evidentemente escaparam, ou por meio de persistência de cópias, ou transmissão oral. O aprendizado de fato continuou com ênfase, principalmente a matemática, em problemas de comércio e calendário.

O Sistema de Numeração Chinesa é usado até hoje por países como a China e o Japão, sendo que, para calcular, eles utilizam o sistema indo-arábico, embora utilizem, também, outros sistemas.

Os chineses criaram um símbolo para cada valor de um a nove e para todas as potências de dez, sendo assim impossível determinar a quantidade de símbolos do sistema chinês.

Segundo Ibrah (2011, p. 231):

"Os símbolos na numeração chinesa não eram repetidos, para indicar grupos iguais mais de uma vez. Era só escrever um símbolo antes do agrupamento que se pretendia repetir. Só que esse símbolo, tinha que ser menor que a quantidade de grupos. Com essa maneira de representar a repetição de agrupamentos foi criado o princípio multiplicativo dos sistemas de numeração chinesa".

Os números chineses são escritos na posição vertical, sendo que a primeira ordem está na parte inferior, seguida da segunda, terceira... Até à ordem desejada.

1.3.2 Regras do Sistema Chinês

Baseado nas palavras de Centurión (1994, p 30), as regras do Sistema Chinês se processam da seguinte forma:

- *Há diferentes símbolos para escrever de um a nove;*
- *Há símbolos específicos para as potências de dez;*
- *Os números são escritos em colunas, de cima para baixo (ou também da esquerda para direita);*
- *Se um símbolo de menor valor for escrito antes de um valor maior, deve-se multiplicar os valores desses símbolos;*
- *“A posição desses símbolos é importante (sistema posicional)”.*
- *A tabela, acima, nos mostram os símbolos e a forma que os chineses usam para representar a sua numeração.*

O quadro, abaixo, nos mostram os símbolos e a forma como são usados pelos chineses para representar a sua numeração.

QUADRO 8: REGRAS DO SISTEMA CHINÊS

一	二	三	四	五	六	七	八	九
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	十	百	千	万				
	10	100	1000	10000				

Fonte: Livro de Imenes.- Os números na história da civilização, 1994.

1.4 Civilização Romana

Ainda hoje se pergunta como uma pequena colônia de pastores situada a beira do Rio Tibre, no centro da Península itálica, transformou-se num império que abrangeu, no seu momento máximo, mais de cinco milhões de quilômetros quadrados, conforme a figura 04.

FIGURA 04: LOCALIZAÇÃO DA CIVILIZAÇÃO ROMANA



Fonte: Atlas Geográfico – 2001.

Ocupando uma posição central no Mediterrâneo, a Itália é a ponte entre a Bacia Oriental e a Bacia Ocidental daquele mar. O relêvo da Península Itálica forma-se pelo escudo dos Alpes, ao norte, e a cordilheira dos Apeninos que corre no sentido Norte-Sul, assegurando-lhe magnífica defesa natural. Ao Leste, é banhado pelo mar Cáspio e, a oeste, mar Tirreno, onde se localizam as ilhas de Córsega, Sardenha e Sicília.

Diz Divalte (2011, p. 84) que:

"Segundo as lendas sobre a origem de Roma, sete reis governaram a cidade. Os quatro primeiros foram, alternadamente, latinos e Sabinos. Os três últimos eram origem etrusca. Sobre a fundação de Roma não há precisão quanto a data, sabe-se que aconteceu por volta do século X a. C, a data tradicional de 753 a. C, como afirma Burns, foi inventada pelos escritores romanos".

A divisão social em Roma parte da família. O grupo familiar, com antepassado comum, formava a gens. Na comunidade gentílica, o exercício do poder cabia ao "*pater familias*". O ascendente mais antigo era que administrava a propriedade coletiva dos bens e zelava pela harmonia e solidariedade entre os integrantes.

Segundo Luiza & Milton (1996, p. 53):

"Com o tempo a chefia das gens foi passando do mais velho para o mais forte. Usando de uma artimanha política, os chefes guerreiros conseguiram abolir a igualdade social criando três classes distintas: (I) Os patrícios, formados pela aristocracia de nascimento; (II) Clientes, outros membros dos gens responsáveis para cuidar dos bens pertencentes aos patrícios, Plebeus, povos que migravam de vários pontos da Itália e os escravos que representavam a mão de obra"

A religião romana primitiva voltava-se, principalmente, para o culto do lar e dos mortos. Cada casa tinha um altar onde ardia o fogo sagrado e onde se invocavam a alma do primeiro ascendente (lar), de todos os espíritos dos parentes já falecidos (os Manes) e os Gênios protetores da comida e da casa, (os Ponates).

Mesmo com a criação da religião do Estado, o culto doméstico perdurou, sendo até os últimos dias da história, uma tradição romana. A religião do Estado era politeísta, onde alguns deuses tiveram origem na religião doméstica e representavam, principalmente, elementos da natureza.

Segundo Divalte (2011, p. 84): "Na época da monarquia, a sociedade se dividia, basicamente em quatro grupos: patrícios, plebeus, clientes e escravos". Sendo que, nas lutas sociais, Roma dá início à primeira greve da história, conhecida como a revolta do Monte Sagrado, em 494 a.C, onde os plebeus resolveram abandonar a cidade de Roma.

1.4.1 Sistema de Numeração Romana

O Sistema de Numeração Romano como todos os sistemas estudados, passou por várias transformações. Os símbolos tiveram várias formas para chegar à representação atual, e o princípio aditivo de espaço à subtração que foi empregada com o objetivo de repetir menos símbolos.

Os números romanos usados, em nossas aulas, são os números com as novas regras, ou seja, o sistema de numeração romano já desenvolvido.

Imenes (1994, p. 34) diz o seguinte: "o antigo sistema de numeração romana não usava o princípio da subtração, pois esse princípio é uma evolução que só aparece tempos depois", de acordo com o quadro 10, que mostra os símbolos do Sistema de Numeração Romana.

QUADRO 10: NÚMEROS ROMANOS

Símbolo	I	V	X	L	C	D	M
Valor	1	5	10	50	100	500	1 000

Fonte: Livro do números na história da civilização, 1994.

1.4.2 Regras do Sistema de Numeração Romana

Segundo Imenes (1994, p. 36), o sistema de numeração romana se processa da seguinte maneira:

- O sistema de numeração romana usa sete símbolos;
- Os símbolos I, X, C, M podem ser repetidos no máximo três vezes.
- que V, L, D não podem ser repetidos;
- Um símbolo de menor valor à esquerda é subtraído e a direita é adicionado;
- Não há símbolo para o "zero";
- Um número fica mil vezes maior quando colocamos um traço sobre ele.

O quadro, a seguir, mostra o sistema antigo de numeração romana, anterior ao uso do princípio subtrativo.

QUADRO 11: REGRAS DO SISTEMA ROMANO

XXXX → 40 10+10+10+10	LXXVII → 77 50+10+10+5+1+1
I C XXXIIII → 634 500+100+10+10+10+1+1+1+1	C I LI → 1 051 1 000+50+1
CCCCV IIII → 409 100+100+100+100+5+1+1+1+1	

Fonte: Livro de Imenes - Os números na história da civilização, 1994.

O respectivo quadro está explicitando a forma em que são usados os algarismos romanos, colocando o valor de cada símbolo.

1.5 Civilização Maia

Civilização pré-colombiana: os Maias (IV a.C) ocuparam as planícies da península do Iucatã e quase toda a Guatemala e parte Ocidental de Honduras. Vejamos a figura 05.

FIGURA 05: LOCALIZAÇÃO DA CIVILIZAÇÃO MAIA



Fonte: Atlas Geográfico – 2001

De acordo com Divalte (2008, p. 197):

"Em 700 a. c., aproximadamente, outra importante sociedade surgira na península de Iucatã, situada entre a América de norte e a América central: a dos maias, durante o período de sua formação, essa sociedade herdou vários elementos das culturas dos povos que habitavam a região, como os olmecas. Por volta de 317 de nossa era, os maias já ocupavam extensas regiões do que conhecemos hoje como México, Honduras e Guatemala".

Portanto, podemos observar que essa civilização, ao contrário das demais estudadas anteriormente, tem o seu momento de pleno desenvolvimento, segundo os historiadores, em uma época posterior às outras civilizações estudadas.

Na política, não chegaram a constituir um Estado centralizado. As cidades eram independentes, governadas por um chefe, que dirigia e recebia

impostos, assessorado por um conselho formado por “alguns nobres e sacerdotes”.

Nas artes, os Maias destacaram-se na arquitetura, com a construção de templos e palácios. Também desenvolveram a pintura e a escultura. Na escultura, foram notáveis no baixo relevo, nos quais retratavam divindades, sacerdotes ou chefes políticos. Nas ciências, desenvolveram a matemática e a astronomia, fazendo cálculos bastante complexos, que permitiram conhecer a duração da rotação de Vênus, as fases da lua, os eclipses solares, etc.

1.5.1 - Sistema de Numeração Maia

Independente de qualquer influência, os Maias criaram um sistema de numeração muito desenvolvido.

O sistema de numeração Maia, era usado para representar qualquer número, porém, eram apenas dois símbolos: pontos e traços. Sendo que a primeira ordem era representada até dezenove. Cada número, a partir de vinte, era escrito, ao lado de uma linha vertical, com uma fileira para cada ordem das unidades. Para os números compostos de duas ordens, colocava-se o algarismo das unidades simples, na parte de baixo, e os algarismos das “centenas”, na parte de cima.

O sistema numérico Maia, de início, tinha uma configuração de base vinte e podia ser escrito da seguinte forma: 1º ordem ($X_1 \cdot 20^0$), 2º ordem ($X_2 \cdot 20^1$), 3º ordem ($X_3 \cdot 20^3$), 4º ordem ($X_4 \cdot 20^4$)... Mas uma anomalia, na terceira ordem, não se sabe porque, o sistema Maia não concretizou a base vinte e ficou construída a seguinte norma:

$$X_1 \cdot 20^0 + X_2 \cdot 20^1 + X_3 \cdot 18 \cdot 20^1 + X_4 \cdot 18 \cdot 20^2 \dots X_n 20^{n-2}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{1^\circ \text{ ordem}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{2^\circ \text{ ordem}} \quad \underbrace{\hspace{2.5cm}}_{3^\circ \text{ ordem}} \quad \underbrace{\hspace{2.5cm}}_{4^\circ \text{ ordem}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\dots}$

Fonte: Livro de Infrain. Os números: a história de uma grande invenção - 1994.

Os Maias criaram ainda um símbolo para representar a falta do símbolo em qualquer ordem, muito parecido com uma concha. Estava criado o "zero" do

sistema de numeração Maia. A operacionalidade desse sistema foi inviável devido a anomalia na terceira ordem. Sabemos que esse sistema com anomalia era usados pelos sacerdotes que estudavam astronomia e o povo usavam o sistema na base vinte sem anomalia. O quadro 12 mostra a representação de números Maias.

QUADRO 12: NUMERAÇÃO MAIA

1	•	6	—•	11	—•	16	—•
2	••	7	—••	12	—••	17	—••
3	•••	8	—•••	13	—•••	18	—•••
4	••••	9	—••••	14	—••••	19	—••••
5	—	10	—	15	—		

Fonte: Livro de Imenes - Os números na história da civilização, 1994.

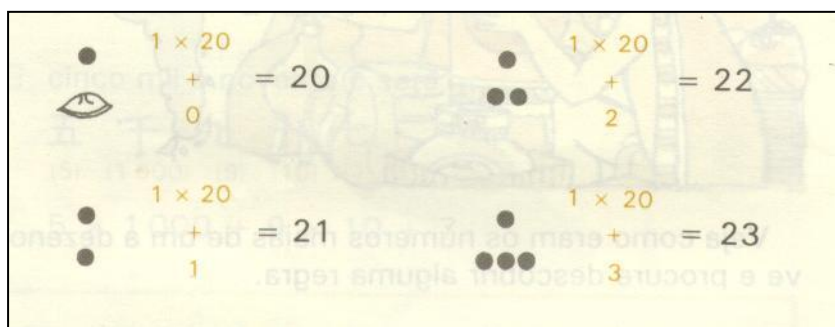
1.5.2 Regras do Sistema de Numeração Maia

De acordo com Infrain (1994, p. 66), no sistema de numeração Maia, eles usavam:

- Os Maias usavam três símbolos: ponto, traço e concha;
- O sistema era posicional;
- Os agrupamentos eram feitos na base vinte, sendo que a partir da terceira ordem cada grupo perdía quarenta;
- Criaram o "zero";
- Os números eram escritos em vertical usando uma barra do lado;
- "As unidades eram a parte inferior do número".

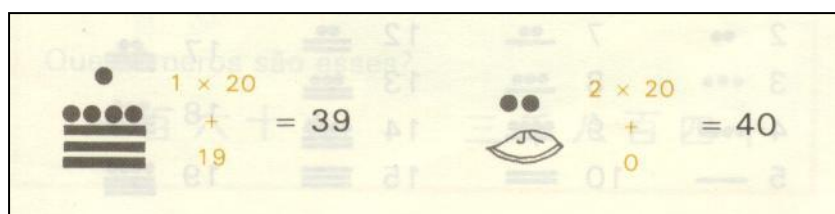
Os quadros seguintes demonstram como os Maias usavam o seu sistema de numeração, a partir de três símbolos.

QUADRO 13: REGRAS DE NUMERAÇÃO MAIA



Fonte: Livro de Imenes - Os números na história da civilização, 1994

QUADRO 14: REGRAS DE NUMERAÇÃO MAIA



Fonte: Livro de Imenes - Os números na história da civilização, 1994.

1.6 Civilização Árabe e Indiana

Achados arqueológicos obtidos às margens ocidental do Baixo Indo, indicam que talvez a mais velha das civilizações, não seja a Mesopotâmia, mas sim, a Índia que já conseguiu o seu apogeu quando surgiram as culturas sumerianas, conforme mostra a figura 06.

FIGURA 06: LOCALIZAÇÃO DA CIVILIZAÇÃO ÁRABE



Fonte: Atlas Geográfico – 2001.

Segundo Divalte (2008 p. 148), a passagem do nomadismo para a vida sedentária, com o cultivo de plantas, ocorreu no vale do Rio Indo, entre 8000 e 700 a. c., e também as áreas banhadas pelo Rio Ganges, cerca de um milênio mais tarde. Mostrando ser uma das civilizações mais antigas, até mesmo mais antiga do que a civilização Roma e civilização Grega.

A divisão social em castas (classes sociais) dessa sociedade é a primeira que se tem notícias em toda a história. Desde que os arianos se tornaram os senhores da Índia, a sociedade indiana foi-se dividindo em grandes grupos, chamados classes.

A sociedade, diz Divalte (2008, p. 152): “se dividia em quatro castas: Tatrias - chefes guerreiros, Bramanes - sacerdotes, Vaícas - homens livres, Sudras - escravos e servos”.

Apesar da Índia nunca ter formado uma sólida união política, destaca-se o budismo como identidade religiosa muito forte.

A arquitetura tinha como base a construção de grandes palácios e templos, sendo caracterizado por uma suntuosa ornamentação e colunas de ferro. Os hindus desenvolveram a matemática de forma extraordinária, tendo conhecimento da extração de raízes, princípios de trigonometria e algarismo, trazidos ao ocidente pelos árabes e até hoje usados.

A civilização Árabe fica localizada, na parte Ocidental da Ásia, entre o Golfo Pérsico, o Mar Vermelho e o deserto da Síria existem uma plataforma rochosa de terra árida e quente conhecida por península arábica.

Divalte (2008, p. 143) afirma que:

"Ao sul, na região fértil do Imêmen atual, e ao longo da costa ocidental da península, acompanhando o mar vermelho, ficam as rotas percorridas pelas caravanas de comércio que iam até Bizâncio, ao oeste, e rumavam para Índia, no leste. Assim a comunicação entre as culturas levou os árabes a conhecer o sistema de numeração indiano".

Assim, além de números com forma bem elaborado, surge guerreiros fanáticos, capazes de uma obediência cega, uniram na sua expansão as duas pontas do mundo, conseguindo, além de terras, uma fantástica realização cultural.

O Ocidente deve aos árabes coisas imprescindíveis. Retirando-se do nosso cotidiano, o que eles nos trouxeram, nas nossas vidas, faltariam: o zero do nosso sistema de numeração e o próprio sistema, o fósforo, o arroz, o álcool, o café e o açúcar.

Diante de todo o conhecimento e da expansão Árabe, essa civilização precisava de uma motivação para que os habitantes das cidades e os habitantes dos desertos, povo nômade, conhecido como Beduínos, tornar-se uma nação.

Nas palavras de Divalte (2008, p. 143):

"No ano de 570 a. C nasce Maomé na cidade de Meca, pertencendo a uma família de comerciantes e, em contato com as outras culturas nas viagens de comércio. Maomé cria o Islamismo uma religião monoteísta que fala de um Deus incriado. E foi a partir dessa criação e uma motivação forte é que se cria raízes com o tempo para a formação do povo Árabe".

1.6.1 Sistema de Numeração indo-Arábico

A denominação indo-arábico para nosso sistema de numeração deve-se ao fato de seus símbolos e suas regras terem sido criadas pelo antigo povo Hindu e comerciantes, que usavam a matemática árabe no dia a dia, aperfeiçoando e divulgando este sistema de numeração. Sendo conhecido também como sistema de numeração decimal devido ao fato de agrupar de dez em dez.

Os nove símbolos para representar as quantidades, não nulas, entre um e nove, depende do local onde se encontra na formação do número, ou seja, esse sistema tem valor posicional. Uma das maiores características do nosso sistema de numeração não está no fato de ser posicional, mas sim, no fato de possuir um símbolo para representar a ausência de elementos.

O quadro 15, abaixo, mostra os símbolos do sistema de numeração Indo-Arábico.

QUADRO 15: NUMERAÇÃO INDO-ARÁBICO

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

1.6.2 - Regras do Sistema de Numeração Indo-Arábico

De acordo com Ifrah, capítulo nove, o sistema de numeração

Indo-Arábico apresenta as seguintes características:

- *O sistema tem dez (10) símbolos;*
- *Um algarismo escrito à esquerda vale dez vezes mais (valor posicional);*
- *O sistema agrupa de dez em dez, ou seja, sistema decimal;*
- *O mesmo símbolo pode possuir valores diferentes (valor posicional);*
- *“O sistema indo-arábico possui um símbolo (zero) para representar ordens vazias”.*

Com os números construídos, principalmente, pela civilização indiana, concluímos o embasamento histórico para o nosso trabalho, mostrando seis sistemas numéricos (sistema de numeração Chinesa, sistema de numeração Suméria, sistema de numeração Maia, sistema de numeração Romana, sistema de numeração Egípcia e o sistema de numeração Indo- arábica).

2 OS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO E SUAS CARACTERÍSTICAS

A arte de contar e registrar as quantidades se desenvolveu em diferentes culturas, sendo que todas essas culturas seguiram o mesmo caminho, o agrupamento das unidades. Entretanto, cada cultura agrupava de maneira diferente.

No nosso estudo, a base numérica mais estudada é a decimal, que foi identificada no sistema Chinês, Egípcio, Romano e Indo-Arábico. Nós temos a base sexagesimal, do povo Sumério, e a base "vigésimal", dos Maias.

A importância didática dos sistemas numérico não decimal se deve ao fato de que os alunos não entendem o sistema decimal. Cria-se, portanto, uma alternativa para a comparação com a base dez. Assim, mostramos evidências de que a humanidade traçou outros caminhos na forma de contar. Estes sistemas incentivam o professor propor aos alunos que descubram outras diferenças entre esses sistemas e o indo-arábico, fazendo uma aprendizagem significativa.

Dois aspectos comuns, dos sistemas em estudo, é a relação feita um a um em todos os sistemas numéricos e o princípio aditivo. Essas duas regras de formação eram usadas pela maioria dos povos, mostrando a sua importância na forma de contar de toda a humanidade.

A relação um a um, de que fala o parágrafo acima, ou a correspondência biunívoca é a forma que todas as culturas matemáticas criaram para comparar quantidades, como os pastores dos rebanhos que, ao saírem para alimentar os seus rebanhos, utilizavam pedra para cada ovelha que saía para o pasto, ou ainda, quando os caçadores marcavam em ossos de animais traços para cada animal abatido. Acreditamos que esse momento de relacionar de tal forma foi comum em diferentes civilizações e só a partir desse momento é que cada cultura criava seus símbolos e a forma de agrupar com características próprias.

O princípio aditivo encontrado, em todos os sistemas, é de forma mais explícita quando representamos as unidades nos sistemas de numeração suméria e Egípcia. Mas, em outro sistema, o romano quando representam sete (VII = 5 + 2) ou, como os Maias, quando agrupam, na primeira ordem, representando doze (5 + 5 + 2). Podemos ver a grande importância desses dois fundamentos no momento de construção de todos os sistemas de numeração.

No caso do princípio multiplicativo, somente o sistema Egípcio nos apresenta o sistema numérico usando a técnica de repetir os símbolos.

Gostaríamos de chamar a atenção para o princípio multiplicativo dos romanos que, na maioria das vezes, passa despercebido; mas, quando os romanos, em um determinado período da sua história, passaram a usar um ou mais traços horizontais sobre os números, eles estavam usando o princípio multiplicativo. O sistema egípcio repetia os símbolos com uma representação $a \cdot 10^0 + b^1 + C \cdot 10^2 \cdot x \cdot 10^n$, onde as nove primeiras unidades devem ser representadas com traços verticais e a toda potência de dez (10) é criado um símbolo novo, o qual é repetido nove vezes dentro de uma ordem específica, criando um sistema com um número de símbolos indeterminado.

A maior diferença entre os sistemas numéricos, em estudo, talvez seja a quantidade de símbolos, que as várias culturas criaram para representar as quantidades. Em dois sistemas numéricos, Chinês e Egípcios não definiram a quantidade de símbolos pelo fato desses sistemas adotarem símbolos diferentes para potência de dez. Daí os símbolos serem criados a partir das necessidades, enquanto o sistema Sumério e o sistema Maia tinham apenas dois símbolos. Já os romanos usavam sete símbolos e os números indo-arábico eram constituídos por dez símbolos.

A presença do zero em um sistema de numeração tem uma importância de grande proporção. Assim, o zero hoje não parece um símbolo diferente de qualquer outro, mas nem sempre foi assim e levou muito tempo para que o zero fosse inventado e, mesmo depois, esse símbolo não foi aceito com facilidade, justamente porque todos os símbolos criados antes tinham a função de representar quantidades enquanto que o "zero" era para representar a ausência de elementos.

Nos sistemas de numeração, em estudo, só três - o Sumério, o Maia e o Indo-Arábico -, apresentavam símbolos para representar as posições vazias dentro de suas representações numéricas. A criação do "zero", no sistema de numeração suméria, deu-lhes um sistema muito prático e desenvolvido.







O mesmo aconteceu com os números maias, que se não fosse a anomalia apresentada, na terceira ordem, teriam a mesma praticidade para se efetuar as operações encontradas no sistema Indo-Arábico.

A comparação entre os sistemas de numeração, em estudo, mostra que cada sistema tem suas características próprias sem deixar de existir pontos comuns entre esses sistemas e, que, a partir dessas diferenças e semelhanças, os alunos tenham uma visão global sobre o nosso sistema numérico, atendendo a sua viabilidade.

Com essa análise dos sistemas e a prática dos laboratórios, acreditamos que uma lacuna, no ensino da matemática, seja preenchida e que os educandos tenham o conhecimento matemático sobre outra visão e não apenas como repetidores de regras já prontas.

Os quadros 16 e 17, seguintes, mostram a comparação e as principais características dos sistemas de numeração resumida.

QUADRO 16: COMPARAÇÃO ENTRE OS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

Egípcio	Babilônico	Indo-arábico	Chinês	Romano	Maia
					
	▼	1	一	I	•
	▼▼	2	二	II	••
	▼▼▼	3	三	III	•••
	▼▼▼▼	4	四	IV	••••
	▼▼▼▼▼	5	五	V	—
	▼▼▼▼▼▼	6	六	VI	•—
	▼▼▼▼▼▼▼	7	七	VII	••—
	▼▼▼▼▼▼▼	8	八	VIII	•••—
	▼▼▼▼▼▼▼	9	九	IX	••••—
∩	∟	10	十	X	==
∩	∟▼▼	12	十二	XII	••—
∩∩	∟∟	20	二十	XX	∩
∩∩∩	∟∟▼▼▼	59	五十九	LIX	•••—
∩∩∩	▼	60	六十	LX	∩
e	▼ ∟∟∟	100	百	C	∩

Fonte: Livro de Imenes - Os números na história da civilização, 1994.

O quadro 17 nos mostra a comparação entre os sistemas estudados, ou seja, o Egípcio, o Babilônico, o Indo-Arábico, o Chinês, o Romano e o Maia.

Já o quadro dezoito apresenta as principais características dos sistemas numéricos, colocando o valor posicional, o princípio aditivo, o princípio multiplicativo, o número de símbolos, a base e o zero.

QUADRO 17: AS PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS DOS SISTEMAS NUMÉRICOS

	VALOR POSICIONAL	PRINCIPIO ADITIVO	PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO	Nº DE SÍMBOLOS	BASE	ZERO
SISTEMA SUMERIA-NO	S	S	S	DOIS	Sessenta	S
SISTEMA CHINÊS	N	S	S	INDEFINIDO	Dez	N
SISTEMA EGÍPCIO	N	S	N	INDEFINIDO	Dez	N
SISTEMA ROMANO	N	S	S	SETE	Dez	N
SISTEMA MAIA	S	S	S	TRÊS	Vinte	S
SISTEMA INDO-ARÁBICO	S	S	S	DEZ	Dez	S

Fonte: Livro de Imenes - Os números na história da civilização, 1994.

A história dos sistemas de numeração nos mostra que, além dessas bases, foram criados outros sistemas com base numérica b , sendo $b \geq 2$, e que as representações de cada número tem forma única.

Portanto, os alunos que, porventura, estudarem matemática, em cursos mais avançados, reconhecerão com mais facilidade e clareza a generalização do sistema de numeração no estudo da álgebra, na teoria dos números, no estudo dos polinômios, entre outros.

Concluída a comparação entre os sistemas numéricos, iremos mostrar que, nos sistemas de numeração com principio posicional, a forma de representar os números é única e apresentaremos um algoritmo para que possamos mudar esses números de base.

Os sistemas de numeração posicional baseiam-se no seguinte resultado, que é uma aplicação da divisão euclidiana.

Teorema: dados a e $b \in \mathbb{N}$, com $b > 1$, existem números naturais c_0, c_1, \dots, c_n menores do que b , unicamente determinados, tais que $a = c_0 + c_1b + c_2b^2 + \dots + c_nb^n$.

Vamos demonstrar o teorema, usando a segunda forma do princípio de indução matemática sobre a .

Se $a = 0$ ou $a = 1$, basta tomar $n = 0$ e $c_0 = a$. Suponhamos o resultado válido para todo natural menor que a . vamos prová-lo para a . Pela divisão euclidiana, existem q, r únicos tais que

$$a = bq + r \text{ com } r < b \quad (1)$$

Como $q < a$, pela hipótese de indução, segue-se que existem números naturais n' e $d_0, d_1, \dots, d_{n'}$, com $d_j < b$, para todo j tais que

$$q = d_0 + d_1b + \dots + d_{n'}b^{n'} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1) temos

$$a = bq + r = b(d_0 + d_1b + \dots + d_{n'}b^{n'}) + r$$

donde o resultado segue fazendo $c_0 = r$, $n = n' + 1$ e $c_j = d_{j-1}$ para $j = 1, 2, 3, \dots, n$

A unicidade segue-se da unicidade acima estabelecida.

A demonstração do teorema é chamada de expansão relativa à base b . Quando $b = 10$, essa expansão é chamada expansão decimal e quando $b = 2$ ela é chamada de expansão binária. Sendo que essa demonstração, ainda, nos dá um algoritmo para mudarmos a base em que esse número está escrito.

Trata-se de aplicar, sucessivamente, a divisão euclidiana, observemos.

$$a = bq_0 + r_0, \quad r_0 < b$$

$$q_0 = bq_1 + r_1, \quad r_1 < b$$

$$q_1 = bq_2 + r_2, \quad r_2 < b$$

$$q_2 = bq_3 + r_3, \quad r_3 < b$$

$$q_3 = bq_4 + r_4, \quad r_4 < b$$

$$q_{n-1} = bq_n + r_n, \quad r_n < b$$

Podemos notar que $a > q_0 > q_1 \dots$ devemos em algum momento ter $q_{n-1} < b$ e, portanto, $q_{n-1} = bq_n + r_n$.

Então, se $q_n = 0$ o que implica $0 = q_n = q_{n+1} = q_{n+2} = \dots$ e portanto $0 = r_{n+1} = r_{n+2} \dots$ e, portanto,

$$a = r_0 + r_1b + \dots + r_nb^n$$

A expansão numa dada base b nos fornece um método para representar os números naturais em uma base qualquer. Para tanto escolher um conjunto S de b símbolos

$$S = (s_0, s_1, \dots, s_{b-1})$$

Como $s_0 = 0$, para representar os números de 0 a $b - 1$, um número natural a na base b se escreve da forma.

$$x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0$$

Com $x_0 \dots x_n \in S$, $E \in \mathbb{N}$ variando, dependendo de a , representando o número

$$x_0 + x_1b + \dots + x_nb^n$$

Exemplo: vamos representar o número 723 na base 5.

Usando a divisão euclidiana, temos;

$$723 = 144 \cdot 5 + 3, 144 = 28 \cdot 5 + 4, 28 = 5 \cdot 5 + 3, 5 = 5 \cdot 1 + 0, 1 = 5 \cdot 0 + 1$$

Portanto.

$$723 = 3 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^4$$

e, conseqüentemente, 723 na base 5 se representa por 10343.

3 A TÍTULO DE CONCLUSÃO: COMO USAR OS SISTEMAS NUMÉRICOS

Os sistemas de numeração não podem ser definidos como conteúdo e o professor fica criando situações para verificar se o aluno aprendeu, tornando o recurso didático indicado, em nossos trabalhos, como mais uma barreira no processo de ensino-aprendizagem da matemática e transformado um recurso didático em mais um conteúdo.

A orientação para as entidades de ensino, que tomem a decisão de usar o nosso material, é que tenham cuidado de não "jogar" os recursos em um único ano letivo, pensando que estão inovando. Como introduzimos as dezenas, centenas etc, de forma organizada, a formação de outras bases para contar deve seguir o mesmo caminho.

Faz-se necessário que os agrupamentos, em outras bases numéricas, sejam trabalhados durante todo o Ensino Fundamental e os alunos possam, assim, tomar conhecimento por etapa dos agrupamentos diversos. Devem, também, analisar outros sistemas numéricos que não seja o Indo-Arábico, para evitar que, em alguns momentos, a escola trate da escrita numérica como se fosse um processo único de uma só cultura.

Quando definimos a exposição de um sistema numérico, é necessário que os princípios existentes, e não existentes nesse sistema sejam apresentados. O nosso fundamento consiste justamente em fazer o aluno criar situações de contrastes e formas, ou seja, uma visão de que os números são formados a partir de regras estabelecidas com a finalidade de obter a forma mais prática de registrar a quantidade.

Pudemos fazer uma comparação, quando relacionamos um sistema numérico que os Maias usavam, construído sobre o princípio multiplicativo com um símbolo para o "zero" e o sistema Chinês sem valor posicional. Os Maias com

três símbolos eram capazes de registrar qualquer quantidade e os Chineses tinham sempre que criar novos símbolos. Assim diante desses e do demais contrastes, os alunos puderam analisar quais as características que tornam um sistema de numeração eficiente e prático.

Todo trabalho tem como finalidade que os alunos conheçam outros sistemas de numeração e possam extrair deles o melhor para complementar o nosso e, com isso, haver uma melhor aprendizagem, além de que, a partir dessa descoberta, outros professores possam usufruir desse recurso para reforçar a aprendizagem dos discentes.

Traçaremos um conjunto de sugestões de atividades para trabalhar o uso da história dos sistemas de numeração como recursos didáticos para o ensino do sistema de numeração decimal. Organizaremos essas sugestões na ordem em que os sistemas numéricos foram citados na primeira parte desse trabalho.

1. Para os números sumérios devemos, inicialmente, mostrar uma atividade em que os alunos escrevam os números de um () a sessenta () a fim de mostrar para os alunos a necessidade do zero para que o sistema de numeração esteja completo e, posteriormente, deveremos fazer cálculos com medidas e tempo (minutos, segundos e horas). Assim, mostraremos os agrupamentos de sessenta em sessenta.
2. O uso desse sistema de numeração egípcio é de fundamental importância, pois é um sistema decimal como o Sistema Indo-arábico e as quatro operações são bem visualizadas. Portanto, temos a oportunidade de apresentar para os alunos os agrupamentos, quando adicionamos dois ou mais números e, portanto, mostraremos o “vai um” da adição. Para subtração, precisamos, em muitos casos, quebrar a ordem para que a operação seja realizada. Esse sistema é bastante conveniente como na adição. Assim, a sugestão para uso desse sistema é trabalhar as quatro operações e explicar algumas regras das operações básicas, que muitas vezes ficam implicadas no sistema de numeração decimal.

3. Com o Sistema Chinês devemos criar situações para que possamos observar os princípios aditivos e multiplicativos, sendo uma atividade interessante a leitura de números onde precisamos multiplicar dois símbolos, que pertencem à mesma ordem e a soma das respectivas ordens para que esse número seja entendido. Ainda é possível trabalhar, nesse sistema, os valores posicional e absoluto dos algarismos para que os alunos construam esses conceitos em nosso sistema de numeração.
4. Para alguns professores, estudar o Sistema de Numeração Romano é uma necessidade para que, com esses conhecimentos, os alunos possam ler capítulos de livros, nome de Papas e horas em certos tipos de relógios. **P**erde-se uma ótima oportunidade para mostrar como um sistema de numeração, que ainda hoje é utilizado, não tinha função operatória e foi necessário que essa civilização criasse uma forma diferente de calcular. Assim, através de exemplos de adição e subtração, podemos verificar a ineficiência desse sistema para as operações e deixar claro, nesse sentido, a superioridade do Sistema Indo-arábico.
5. Para trabalhar com os números Maias, o agrupamento, em outra base, não decimal. É uma grande experiência para entender a formação de números. Logo, podemos, com esse sistema, criar atividades que envolvam os alunos em formação de números em diversas bases numéricas e operar com esses números em ainda, podemos com os próprios números Maias trabalhar a adição e a subtração, na forma vertical, para que os discentes tenham uma nova experiência nessa duas operações, sendo as operações realizadas com o sistema utilizado pelo povo maia, que não estavam ligados com a astronomia e não o sistema de numeração que tinha anomalia, na terceira ordem, usado pelos sacerdotes maias, pois esse sistema era viável para cálculo.

Toda a atividade realizada com os outros cinco sistemas numéricos deverá ser acompanhada por atividades com o Sistema de Numeração Indo-arábico, pois o objetivo desse trabalho é o entendimento desse sistema de

numeração. Logo, quando adicionamos ou subtraímos números egípcios, devemos fazer as mesmas adições e subtrações com o sistema decimal e, quando estamos somando devemos sempre argumentar com “vai um” como a formação de grupo maior por dez grupos menores e, na subtração, deve ser argumentado o “empresta”, ou seja, a quebra de um grupo em dez grupos menores ou em dez unidades e, assim, podemos dar significado as operações. Podemos pensar ainda em construir números, em bases quaisquer, criando uma experiência para os alunos de como os números são formados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AABOE, Asger. **Episódios da história antiga da matemática**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2002.

BRAICK, Patrícia Ramos (org.). **História: das cavernas ao terceiro milênio**. 2 ed. São Paulo: Moderna, 2010.

CENTURIÓN, Marília. **Conteúdo e metodologia da matemática: números e operações**. São Paulo: editora Scipione, 1994.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FIGUEIRA, Divalte Garcia. **Historia em foco**. São Paulo: Ática, 2010.

HEFEZ, Abramo. **Elementos de aritmética**. 2 ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2011.

IFRAH, Georges. **Os Números: história de uma grande invenção**. Tradução Stella Maria de Freitas Senra: revisão técnica Antonio José Lopes. 7 ed. São Paulo: Globo, 1994.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática. Uma análise da influência francesa**. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002. (Coleção Tendências em Educação Matemática)

SERIACOPI, Gislane Campos Azevedo (org.). **História**. volume único. São Paulo: Ática, 2005.

ANEXOS

- SUGESTÕES DE ATIVIDADES

Faça os agrupamentos de acordo com as tabelas de registro.

	Grupos de 3x3x3	Grupos de 3x3	Grupos de 3	Resto



	Grupos de 4x4x4	Grupos de 4x4	Grupos de 4	Resto



- Qual o valor posicional do algarismo que forma o número nas duas tabelas?
- Como se ler o número?

- ✓ Sugestão de aula para trabalhar bases numéricas diferentes da base dez.

- ✓ O que o aluno pode aprender com essa aula?
- ✓ Reconhecer o valor numérico de um polinômio com sendo a generalização do sistema de numeração em uma base x , com x natural.
- ✓ Calcular valor numérico de um polinômio.
- ✓ Conhecimentos prévios trabalhados pelo professor com os alunos.
- ✓ As **quatro** operações básicas e potenciação.
- ✓ Estratégias e recursos das aulas.

Em sala de aula, o professor deve mostrar aos alunos números na forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ depois relacionar com a forma $(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_x$ para que os alunos percebam que a forma como os números se apresentam depende da base numérica escolhida para a sua formação e, assim, eles construam o conceito de polinômios como sendo a generalização do nosso sistema numérico.

Com a ideia de formalizar o conceito de polinômio, propomos o jogo das fichas coloridas, onde usaremos fichas nas cores: verde, vermelha, branca, azul e amarela da seguinte forma.

cinco fichas brancas valem uma ficha azul.

cinco fichas azuis valem uma ficha vermelha.

cinco fichas vermelhas valem uma amarela.

cinco fichas amarelas valem uma verde.

Observação: Nesse caso devemos jogar com dois dados e somarmos as faces voltadas para cima, recebendo o número de fichas brancas, representadas na soma dos dados e sempre que tiver cinco de uma cor trocar por outra que representa a próxima ordem. Ganha o jogo aquele que conseguir a ficha verde primeiro. (a ficha verde representa a maior ordem)

Modelos das fichas:



A atividade deve ser feita com a sala realizando o mesmo jogo, mas deve contar em bases diferentes como (6 ,11 , 8 ,15) para que os alunos tenham expressões do tipo: $(1420)_5$, $(6827)_9$.

Devemos mostrar aos alunos que a expressão $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ para um x natural qualquer e a_i é também natural. Temos que a representação do tipo $(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_x$ é viável para representar $p(x)$. Após os alunos observarem a ideia de que um polinômio representa um número escrito, em uma base qualquer, poderemos considerar x e a_i números reais.

A aula sobre valor numérico de um polinômio, na sua introdução, é um momento em que o professor de matemática tem para se voltar às quatro operações básicas e ajudar aos alunos que, ainda, não tiveram a oportunidade de concretizar a aprendizagem sobre sistema de numeração, superando o que é, com certeza, uma dos pontos cruciais no ensino de matemática e, ainda, sem a importância de sistema de numeração mais com uma ferramenta didática. As potências estão presentes para que entendamos esse conteúdo. Com isso, não querem pensar numa metodologia inovadora, mas apenas voltar-se no próprio conhecimento, ao invés de criar novas experiências, em momentos didáticos para fazer uma aula onde o principal recurso seja a própria matemática.

Nessa aula não é recomendado computadores ou máquinas de calcular, porque não queremos mostrar função de teclas ou programas, que auxiliem na formação matemática, mas sim, queremos construir com os que ainda não têm as quatro operações o sistema de numeração com todas as suas regras implícitas e explícitas.

APLICAÇÃO

Em um país z a aritmética era muito diferente da que conhecemos e os números eram formados contando de cinco em cinco, ou seja, cinco unidades formavam um grupo pequeno, cinco grupos pequenos formavam um grupo médio e cinco grupos médios formavam um grupo grande. Desenhe trinta bolas e agrupe essas bolas como os moradores do país z, depois registre a quantidade como esse povo.

EXERCÍCIOS

Efetue as operações indicadas de acordo com os agrupamentos.

a) $(1354)_6 + (2543)_6$

b) $(2102)_3 - (1220)_3$

c) $(6452)_7 \times (34)_7$

d) $(231)_4 : 3$