UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
Centro de Ciências
Departamento de Ciência
Programa de Pós-Graduação em Matemática

José Nobre Dourado Júnior

PROBABILIDADE PARA O ENSINO MÉDIO

Juazeiro do Norte - Ceará

2014

José Nobre Dourado Júnior

Probabilidade para o Ensino Médio

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requesito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Flávio França Cruz.

Juazeiro do Norte - Ceará
2014

Dedicatória

Dedico este trabalho ao Senhor Deus Todo-Poderoso!

Agradecimentos

- A Deus por guiar meus passos a todo instante e me ajudar em todos os momentos.
- À minha esposa, Adriana Sampaio, pela paciência e pelo companheirismo.
- À minha filha, Yane Ádyla, por trazer muita alegria para minha vida.
- A todos os professores do PROFMAT por compartilharem sua experiência conosco.
- Ao meu orientador, Flávio França, pela confiança em nosso trabalho.
- Aos meus colegas do mestrado pela parceria ao longo do curso, em especial ao meu colega de classe, José Alves, pela ajuda na realização dessa pesquisa.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo introduzir os conceitos básicos da Teoria das Probabilidades e apresentar noções sobre alguns modelos probabilísticos para o estudante do Ensino Médio.

Iniciaremos o trabalho apresentando no capítulo 1 as noções de experimento determinístico, experimento aleatório, espaço amostral e eventos, seguidos de algumas definições de Probabilidade, conceitos que constituem a base para essa teoria. No capítulo 2 abordaremos os conceitos de Probabilidade Condicional e Independência de Eventos, apresentando alguns teoremas importantes que decorrem desses conceitos, bem como algumas de suas aplicações. No capítulo 3 apresentaremos de maneira simples alguns modelos probabilísticos discretos bastante úteis por modelarem de forma eficaz um bom número de experimentos aleatórios contribuindo assim para o cálculo das probabilidades de seus resultados.

Por fim, no capítulo 4 será apresentado o modelo probabilístico conhecido como Distribuição de Poisson, que nos permite calcular a probabilidade de um evento ocorrer em um dado intervalo de tempo ou numa dada região espacial.

Palavras-chave: probabilidade e ensino médio.

Abstract

This work has as objective introduce the basic concepts of the Theory of Probabilities and present notions on some probabilistic models for the student of the High School.

We will begin the work presented in chapter I the notions of experiment deterministic, random experiment, sample space and events, followed by some definitions of Probability concepts that constitute the basis for this theory. In chapter II we will discuss the concepts of Conditional Probability and Independence of Events showcasing some important theorems that derive from these concepts, as well as some of its applications. In chapter III we will present in a simple way some probabilistic models discrete quite useful for shape effectively a good number of random experiments thus contributing to the calculation of the probabilities of its results.

Finally, in chapter IV will be presented the probability model known as Poisson distribution, which allows us to calculate the probability that an event will occur in a given time interval or in a given spatial region.

Keywords: probability and high school.

Conteúdo

Lista de Figuras

Introdução

Considere as seguintes questões:

- No lançamento de um dado, qual face ficará voltada pra cima?
- Choverá ou não, no Estado do Ceará, daqui a exatamente 10 dias?
- Um telefone ficará ligado durante 5 dias consecutivos. Quantas chamadas chegarão a esse telefone em cada dia?
- Um clássico do futebol acaba de começar. Qual será o placar do jogo?

Perguntas como essas podem ser respondidas porém não podemos dar a certeza de que nossas respostas de fato ocorrerão. Isso acontece porque não podemos prever o acontecimento de alguns fenômenos e/ou seus resultados. Fenômenos ou experimentos que realizados sob mesmas condições e, em geral, não produzem o mesmo resultado são chamados de **aleatórios**.

Apesar de fenômenos ou experimentos aleatórios serem imprevisíveis, às vezes estamos interessados em algum(ns) de seus resultados que não são necessariamente igualmente prováveis. Por exemplo, ao lançarmos um dado é tão provável que a face voltada para cima seja um número par quanto seja um número ímpar, pois temos a mesma quantidade de casos favoráveis três faces pares e três faces ímpares todas com probabilidades iguais de ocorrer. Porém é bastante aceitável considerar que é mais provável que a face voltada para cima seja múltiplo de 2, pois temos três faces favoráveis (faces 2, 4 e 6) do que múltiplo de 3, apenas duas faces favoráveis (faces 3 e 6). Sendo assim, dizemos que a probabilidade de ocorrer face múltiplo de 2 é maior que a probabilidade de ocorrer face múltiplo de 3.

A Teoria das Probabilidades tem a finalidade de avaliar o quanto é provável o acontecimento ou um resultado de um fenômeno ou experimento aleatório. Dessa forma essa teoria contribui para a tomada de decisões na presença da incerteza devido à natureza de tais fenômenos ou experimentos.

O presente trabalho tem a finalidade de apresentar as noções básicas dessa teoria e introduzir de modo simples alguns modelos probabilísticos que julgamos adequados para serem apresentados no ensino médio, úteis para modelar algumas situações as quais desejamos prever, ou pelo menos saber se é mais provável ou não o seu acontecimento. Destacamos aqui o modelo probabilístico conhecido como Distribuição de Poisson, devido a Siméon-Denis Poisson (1781-1840), que nos permite calcular a probabilidade de um evento ocorrer em um determinado intervalo de tempo (ou numa dada região espacial) desde que satisfeitas algumas exigências estabelecidas que serão apresentadas no último capítulo. Esse modelo possui vasta aplicação nos campos da Engenharia, Informática, Telecomunicações, Estatística e outros.

Capítulo 1

Noções de probabilidade

Neste capítulo, apresentaremos os conceitos básicos sobre experimento aleatório, experimento determinístico, espaço amostral e eventos, como também algumas definições de probabilidade. Tais conceitos formam a base desta teoria chamada de Teoria das Probabilidades.

1.1 Experimento aleatório

Definição 1.1. *Experimentos que ao serem repetidos nas mesmas condições e, em geral, não produzem o mesmo resultado são denominados experimentos aleatórios.*

Exemplo 1.1. *Citaremos alguns exemplos de experimentos aleatórios:*

E_1 : *Jogue um dado e observe o número mostrado na face de cima.*

E_2 : *Um lote de 10 peças contém 3 defeituosas. As peças são retiradas uma a uma, sem reposição, até que a última peça defeituosa seja encontrada. O número total de peças retiradas do lote é contado.*

E_3 : *Lance uma moeda até que apareça uma cara.*

E_4 : *Contar o número de chamadas telefônicas que chegam a uma central em um determinado intervalo de tempo.*

E_5 : *Escolher uma lâmpada do processo de fabricação e observar o seu tempo de duração (em horas).*

Definição 1.2. *Os experimentos que ao serem repetidos nas mesmas condições sempre conduzem ao mesmo resultado são denominados determinísticos.*

Exemplo 1.2. *Aquecer a água até que ela entre em ebulição.*

Sabemos que a água entra em ebulição quando é submetida a uma temperatura de $100°C$, ao nível do mar, portanto experimentos como esse não interessarão daqui em diante. O nosso objetivo agora será construir modelos matemáticos para representar experimentos aleatórios.

1.2 Espaço amostral

Definição 1.3. *Denominaremos espaço amostral associado a um experimento o conjunto de seus resultados possíveis. O espaço amostral será representado por um conjunto S.*

Exemplo 1.3. *Vamos considerar cada um dos experimentos listados no exemplo 1 e descrever um espaço amostral para cada um deles. O espaço amostral S_i se referirá ao experimento E_i.*

$S_1 : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$S_2 : \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$S_3 : \{K, CK, CCK, CCCK, ...\}$; *onde K = cara e C = coroa*

$S_4 : \{0, 1, 2, 3, ...\}$

$S_5 : \{t \in \mathbb{R} | t \geq 0\}$.

Se um espaço amostral tem um número finito de elementos como em S_1 e S_2, é chamado um espaço amostral finito, do contrário é dito infinito. Agora, se um espaço infinito puder ser posto em correspondência biunívoca com o conjunto dos naturais, é dito infinito enumerável, do contrário é dito infinito não-enumerável. No exemplo 3, S_3 e S_4 são espaços infinitos enumeráveis, enquanto S_5 é um espaço infinito não enumerável. Um espaço amostral finito, ou infinito enumerável, é chamado frequentemente espaço discreto, enquanto que um espaço infinito não-enumerável é chamado de espaço contínuo.

1.3 Eventos

Definição 1.4. *Denominaremos Evento a todo resultado ou subconjunto de resultados de um experimento.*

Os eventos serão representados por subconjuntos do espaço amostral. Eventos representados por um conjunto unitário, isto é, contendo somente um elemento do espaço amostral são denominados eventos simples. Diremos que o evento A ocorre quando o resultado do experimento é um evento simples pertencente a A.

Exemplo 1.4. *Alguns exemplos de eventos são dados a seguir: novamente nos referimos aos experimentos do exemplo 1 e A_i se referirá ao experimento relacionado E_i. Assim*

A_1 : *"Um número par ocorre", isto é,* $A_1 = \{2, 4, 6\}$.

A_2 : *"Retiramos 4 peças", isto é,* $A_2 = \{BDDD, DBDD, DDBD\}$*; onde* $B =$ *peças boas e* $D =$ *peças efeituosas.*

A_3 : *"Aparecer cara no terceiro lançamento",* $A_3 = \{CCK\}$.

A_4 : *"O número de chamadas é múltiplo de 3",* $A_4 = \{0, 3, 6, 9, ...\}$.

A_5 : $\{t \in \mathbb{R} | t < 3\}$*, isto é, a "lâmpada dura menos de 3 horas".*

1.3.1 Operações entre eventos

Definição 1.5. *A união de dois eventos A e B, denota-se $A \cup B$, é o evento que ocorre se pelo menos um deles ocorre.*

Definição 1.6. *A interseção de dois eventos A e B, denotada por $A \cap B$, é o evento que ocorre se ambos ocorrem.*

Definição 1.7. *O Complementar do evento A, denotado A^c, é o evento que ocorre quando A não ocorre.*

Definição 1.8. *Dois eventos A e B são denominados disjuntos ou mutuamente exclusivos se eles não puderem ocorrer simultaneamente. Exprimiremos isso escrevendo $A \cap B = \varnothing$, isto é, a interseção de A e B é o conjunto vazio.*

Exemplo 1.5. *Um dispositivo eletrônico é ensaiado e o tempo total de serviço t é registrado. Admitiremos que o espaço amostral seja $\{t \in \mathbb{R} | t \geq 0\}$. Sejam A, B e C três eventos definidos da seguinte maneira*

$A = \{t \in \mathbb{R} | t < 100\}$; $B = \{t \in \mathbb{R} | 50 \leq t \leq 200\}$; $C = \{t \in \mathbb{R} | t > 150\}$.

Desta forma,

$A \cup B = \{t \in \mathbb{R} | t \leq 200\}$; $A \cap B = \{t \in \mathbb{R} | 50 \leq t < 100\}$;

$B \cup C = \{t \in \mathbb{R} | t \geq 50\}$; $B \cap C = \{t \in \mathbb{R} | 150 < t \leq 200\}$;

$A \cap C = \varnothing$; $A \cup C = \{t \in \mathbb{R} | t < 100 \text{ ou } t > 150\}$;

$A^c = \{t \in \mathbb{R} | t \geq 100\}$; $C^c = \{t \in \mathbb{R} | t \leq 150\}$.

Teorema 1.1. *Sejam A, B e C eventos do espaço amostral S, temos que*

a) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

b) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

c) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

d) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Para demonstrar essas igualdades, precisaremos mostrar que todo elemento pertencente ao primeiro membro pertence ao segundo e vice-versa. Demonstraremos a seguir os itens a e d.

Demonstração: a) Se $w \in (A \cup B) \cap C$ então $w \in (A \cup B)$ e $w \in C$. Daí decorre que ($w \in A$ ou $w \in B$) e $w \in C$ e portanto ($w \in A$ e $w \in C$) ou ($w \in B$ e $w \in C$), ou seja, $w \in (A \cap C)$ ou $w \in (B \cap C)$, que implica $w \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Agora se $w \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ então $w \in (A \cap C)$ ou $w \in (B \cap C)$. Daí segue que ($w \in A$ e $w \in C$) ou ($w \in B$ e $w \in C$), logo ($w \in A$ ou $w \in B$) e $w \in C$, ou seja, $w \in (A \cup B)$ e $w \in C$, donde decorre que $w \in (A \cup B) \cap C$.

d) Se $w \in (A \cap B)^c$, então $w \notin (A \cap B)$, que implica que $w \notin A$ ou $w \notin B$, que por sua vez implica que $w \in A^c$ ou $w \in B^c$, isto é, $w \in (A^c \cup B^c)$. Agora se $w \in (A^c \cup B^c)$, então $w \notin A$ ou $w \notin B$, que implica que $w \notin (A \cap B)$, que por sua vez implica que $w \in (A \cap B)^c$.

□

Encerramos as operações entre eventos definindo as operações de uma união e de uma interseção enumerável de eventos.

Definição 1.9. *O evento* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ *é o evento que ocorre quando pelo menos um dos eventos* A_i *ocorre, para* $i = 1, 2, 3, \ldots$.

Definição 1.10. *O evento* $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ *é o evento que ocorre quando todos os eventos* A_i *ocorrem, para* $i = 1, 2, 3, \ldots$.

1.4 Conceito e definições de probabilidade

Em qualquer experimento aleatório, há sempre uma incerteza quanto à ocorrência, ou não, de determinado evento. A fim de obtermos uma medida de chances, ou probabilidade, com que podemos esperar a ocorrência de determinado evento, é conveniente atribuirmos um número entre 0 e 1. Se temos a certeza de que o evento ocorrerá, dizemos que sua probabilidade é 100% ou 1; se estamos certos de que ele não ocorrerá dizemos que sua probabilidade é zero. Se, por exemplo, a probabilidade é $\frac{1}{4}$, diremos que há uma chance de 25% de ocorrência e uma chance de 75% de não ocorrência.

Apresentaremos a seguir algumas definições de probabilidade.

Definição 1.11. *Consideremos um espaço amostral S com N eventos simples, que suporemos igualmente possíveis, ou seja, cada um têm a mesma chance de ocorrer. Seja A um evento de S composto de m eventos simples. A probabilidade de A, denotado por $P(A)$, é definido por*

$$P(A) = \frac{m}{N}. \tag{1.1}$$

Observemos que assim definida, a probabilidade é uma função definida na classe dos eventos, isto é, na classe dos subconjuntos do espaço amostral.

Teorema 1.2. *Seja S um espaço amostral finito satisfazendo as condições da definição 11. A probabilidade definida nesta mesma definição satisfaz*

i) $P(A) \geq 0$, para todo $A \subset S$ (A contido em S)

ii) Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

iii) $P(S) = 1$.

Demonstração: i) Como $N > 0$ e $m \geq 0$ segue que $P(A) \geq 0$.

ii) Suponha que A tenha m_1 eventos simples e que B tenha m_2 eventos simples. Como A e B são mutuamente exclusivos, o número de eventos simples de $A \cup B$ é $m_1 + m_2$. Usando as definição obtemos

$$P(A \cup B) = \frac{m_1 + m_2}{N} = \frac{m_1}{N} + \frac{m_2}{N} = P(A) + P(B).$$

iii) Como o número de eventos simples de S é N, segue da definição que

$$P(S) = \frac{N}{N} = 1.$$

$\square$

Exemplo 1.6. *Um lote possui 3 peças defeituosas e 7 peças boas. Assim, a probabilidade de retirarmos uma peça defeituosa será $\frac{3}{10}$.*

Observe que, quando o número de eventos simples do espaço amostral não for finito, o cálculo da probabilidade considerada na definição 11 será impossibilitado.

Definição 1.12. *Seja $n(A)$ o número de vezes em que o evento A ocorreu nas n repetições do experimento (n suficientemente grande). A razão*

$$f_{n,A} = \frac{n(A)}{n} \tag{1.2}$$

é denominada frequência relativa de A nas n repetições do experimento.

A $f_{n,A}$ tende em certo sentido probabilístico para $P(A)$ quando $n \to \infty$.

Teorema 1.3. *A frequência relativa $f_{n,A}$ definida na classe dos eventos do espaço amostral S satisfaz as seguintes condições*

i) Para todo evento A, $0 \leq f_{n,A} \leq 1$

ii) Se A e B são dois eventos de S mutuamente exclusivos, temos

$$f_{n,A\cup B} = f_{n,A} + f_{n,B}$$

iii) $f_{n,S} = 1$.

Demonstração: i) Como $0 \leq n(A) \leq n$ temos $0 \leq \dfrac{n(A)}{n} \leq 1$.

ii) Como os evento A e B são mutuamente exclusivos, toda vez que um deles ocorre o outro não ocorre e portanto o número de ocorrências de $A \cup B$ é igual a soma do número de ocorrências de A com o número de ocorrências de B, isto é, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$. Dividindo-se esta última equação por n obteremos o resultado.

iii) Como em toda realização do experimento algum elemento de S ocorre, segue-se que $\dfrac{n(S)}{n} = 1$.

□

Exemplo 1.7. *Se jogarmos uma moeda 1000 vezes e aparece cara 532 vezes, estimamos a probabilidade de cara em $\dfrac{532}{1000} = 0,532$.*

Tanto a definição clássica como a frequentista de probabilidade apresentam sérias dificuldades: a primeira porque a expressão “igualmente possível”é vaga; e a segunda porque é igualmente vaga a expressão “suficientemente grande”. Dificuldades tais levaram os matemáticos a procurar uma definição axiomática onde a probabilidade fosse definida numa classe de eventos do espaço amostral satisfazendo certas propriedades. Todas as operações que definimos entre os eventos conduzem a novos eventos que pertencem a essa classe.

Definição 1.13. *Probabilidade é uma função que associa a cada evento A um número real $P(A)$, denominado probabilidade de A, satisfazendo as seguintes condições*

i) $0 \leq P(A) \leq 1$;

ii) Se $(A_n)_n \geq 1$ *é uma sequência de eventos mutuamente exclusivos, então*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n);$$

iii) P(S)=1.

Seguem-se da definição 13 os seguintes resultados.

Teorema 1.4. *Seja* $\varnothing$ *o evento impossível, então* $P(\varnothing) = 0$.

Demonstração: Seja A um evento S de probabilidade positiva e seja $\varnothing$ o evento impossível, podemos exprimir o evento A da seguinte maneira: $A = A \cup \varnothing$.

Então pelo axioma *ii*) segue-se que

$$P(A) = P(A) + P(\varnothing).$$

Subtraindo $P(A)$ de ambos os membros, segue-se da igualdade acima que $P(\varnothing) = 0$.

□

Teorema 1.5. *Se os eventos* $A_1, A_2, ..., A_n$ *são mutuamente exclusivos, então*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Demonstração: Basta considerarmos a sequência $A_1, A_2, ..., A_n$ e que $A_k = \varnothing$ para $k \geq n+1$ e aplicar o axioma *ii)*. Como pelo teorema 4 $P(\varnothing) = 0$ temos o resultado.

□

Teorema 1.6. *Se* A^c *é o complementar do evento* A*, então*

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

Demonstração: Os eventos A e A^c são mutuamente exclusivos e sua união é S. Daí decorre que $P(S) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) = 1$. Subtraindo-se $P(A)$ na última igualdade tem-se o resultado.

□

Teorema 1.7. *Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.*

Demonstração: Podemos decompor B em dois eventos mutuamente exclusivos na seguinte forma: $B = A \cup (B \cap A^c)$. Consequentemente, $P(B) = P(A) + P(B \cap A^C) \geq P(A)$, pois $P(B \cap A^c) \geq 0$ pelo axioma 1.

□

Teorema 1.8. *Sejam A e B dois eventos quaisquer do espaço amostral S, tem-se*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Demonstração: $A \cup B$ pode ser escrito como uma união de dois eventos mutuamente exclusivos: $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$.

Assim, temos que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B). \qquad (I)$$

Note que $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$. Logo

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B). \qquad (II)$$

Subtraindo I de II, obtém-se

$$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$$

concluindo a demonstração.

□

Exemplo 1.8. *No lançamento de um dado, determine as probabilidades dos eventos*

a) Sair número par;

b) Sair número múltiplo de 3;

c) Sair número par e múltiplo de 3;

d) Sair número par ou múltiplo de 3;

e) Não sair par nem múltiplo de 3;

f) Não sair par ou não sair múltiplo de 3.

Solução: No lançamento de um dado temos $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a) Seja o evento A: "sair número par", logo $A = \{2, 4, 6\}$ e $P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

b) Seja o evento B: "sair múltiplo de 3", logo $B = \{3, 6\}$ e $P(B) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

c) O evento "sair número par e múltiplo 3"pode ser representado por $A \cap B$, onde A e B são os eventos definidos nos itens anteriores e $A \cap B = \{6\}$, portanto $P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$.

d) Continuando o raciocínio "sair número par ou múltiplo de 3"será $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$, logo $P(A \cup B) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$. Como vimos no teorema 8

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

e) O evento "não sair par nem múltiplo de 3"pode ser representado por $A^c \cap B^c$ e pelo item c do teorema 1 temos

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

f) O evento "não sair par ou não sair múltiplo de 3"dado por $A^c \cup B^c$ terá probabilidade

$$P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Exemplo 1.9. *Sejam A e B eventos mutuamente exclusivos e $P(A) = 0,25$ e $P(B) = 0,5$. Determine*

a) $P((A \cup B)^c)$;

b) $P(A \cup B)$;

c) $P(A^c)$;

d) $P(B^c)$.

Solução: a) $P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$.

Temos que: $P(A) = 0,25$, $P(B) = 0,5$ e $P(A \cap B) = 0$, pois $A \cap B = \varnothing$ (mutuamente exclusivos).

Logo, $P((A \cup B)^c) = 1 - (0,25 + 0,5) = 0,25$.

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,25 + 0,5 - 0 = 0,75$.

c) $P(A^c) = 1 - 0,25 = 0,75$.

d) $P(B^c) = 1 - 0,5 = 0,5$.

Capítulo 2

Probabilidade condicional

Neste capítulo, apresentaremos o conceito de probabilidade condicional. Logo em seguida enunciaremos e demonstraremos alguns teoremas que decorrem deste conceito.

2.1 Probabilidade condicional

Sejam A e B dois eventos associados ao experimento E. Denotaremos por $P(B|A)$ a probabilidade do evento B ocorrer dado que o evento A já ocorreu.

Observe o exemplo abaixo.

Exemplo 2.1. *Dois dados equilibrados são lançados, registrando-se o resultado como (x_1, x_2), onde x_i é o resultado do i-ésimo dado, $i = 1, 2$. Por isso, o espaço amostral S pode ser representado pela seguinte lista de 36 resultados igualmente prováveis*

$$S = \left\{ \begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & \cdots & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & \cdots & (2,6) \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ (6,1) & (6,2) & \cdots & (6,6) \end{array} \right\}.$$

Consideremos os dois eventos seguintes

$$A = \{(x_1, x_2) | x_1 + x_2 = 10\}, \ B = \{(x_1, x_2) | x_1 > x_2\}.$$

Assim, $A = \{(5,5), (4,6), (6,4)\}$ e $B = \{(2,1), (3,1), (3,2), \cdots, (6,5)\}$. Portanto, $P(A) = \dfrac{3}{36}$ e $P(B) = \dfrac{15}{36}$. Perceba que $P(B|A) = \dfrac{1}{3}$, uma vez que o espaço amostral é, agora, formado por A (isto é, três resultados), e somente um desses três resultados é coerente com o evento B. De modo semelhante, podemos calcular $P(A|B) = \frac{1}{15}$.

Finalmente, vamos calcular $P(A \cap B)$. O evento $A \cap B$ ocorre se, e somente se, a soma dos dois dados for 10 e se o primeiro dado tiver apresentado um valor maior que o segundo dado. Existe apenas um desses resultados e, por isso, $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$. Se fizermos um exame cuidadoso dos vários números já calculados, concluiremos que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad e \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Essas relações não surgiram apenas do particular exemplo que consideramos. Ao contrário, elas são bastante gerais e nos dão um caminho para definir rigorosamente a probabilidade condicional.

Definição 2.1. *Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral e supondo que $P(A) > 0$, a probabilidade condicional de B dado A é definida por*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. \tag{2.1}$$

A definição acima pode também ser facilmente motivada pela interpretação de probabilidades como frequências relativas. Considere um experimento que é repetido um grande número de vezes. Sejam $n(A)$, $n(B)$ e $n(A \cap B)$ o número de vezes em que os eventos A, B e $A \cap B$ ocorrem em n repetições do experimento. Se registrássemos somente os experimentos em que A ocorre, teríamos $n(A)$ provas nas quais B ocorre $n(A \cap B)$ vezes. Assim, a proporção de vezes em que B ocorre nestes $n(A)$ experimentos é $n(A \cap B)/n(A)$. Mas

$$\frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{n(A \cap B)/n}{n(A)/n},$$

assim quando $n \to \infty$ esta fração deve estar próxima de $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Da fórmula (2.1) que define a probabilidade condicional do evento B dado o evento A, obtemos a seguinte expressão

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A). \tag{2.2}$$

Esta expressão e sua generalização para uma interseção de n eventos permitem construir probabilidades em espaços amostrais que representam experimentos realizados em sequência, em que a ocorrência de um evento na k-ésima etapa depende das ocorrências nas $k-1$ etapas anteriores. Vejamos inicialmente um exemplo para $n=2$.

Exemplo 2.2. *Considere uma urna com três bolas brancas e sete bolas vermelhas. Duas bolas são retiradas da urna, uma após a outra, sem reposição. Determinar o espaço amostral e as probabilidades associadas a cada elemento amostral.*

O espaço amostral é o conjunto $\{B_1B_2, B_1V_2, V_1B_2, V_1V_2\}$.

O evento $\{B_1B_2\}$ é o evento que corresponde a ocorrer branca na primeira retirada e branca na segunda. Para os outros elementos do espaço amostral a interpretação é análoga.

Utilizando (2.2) temos

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap B_2) &= P(B_1)P(B_2|B_1) = \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9} = \frac{2}{30} \\ P(B_1 \cap V_2) &= P(B_1)P(V_2|B_1) = \frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9} = \frac{7}{30} \\ P(V_1 \cap B_2) &= P(V_1)P(B_2|V_1) = \frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{7}{30} \\ P(V_1 \cap V_2) &= P(V_1)P(V_2|V_1) = \frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9} = \frac{14}{30}. \end{aligned}$$

A fórmula (2.2) pode ser generalizada de modo a exprimir a probabilidade da interseção de n eventos $A_1, A_2, ..., A_n$ por meio das probabilidades condicionais sucessivas.

Teorema 2.1 (Regra do Produto)**.** *Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ eventos dos espaço amostral S onde está definida a probabilidade P, tem-se*

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) =& P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\cdot \\ & \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_{n-1}) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Demonstração: Vamos demonstrar por indução. Para $n=2$ esta fórmula se reduz a fórmula (2.2). Suponha que (2.3) vale para $n-1$ eventos, isto é,

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) =& P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\cdot \\ & \ldots \cdot P(A_{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_{n-2}). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Aplicando-se a fórmula (2.2) aos eventos $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ e A_n temos

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Substituindo nesta igualdade a expressão de $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$ dada por (2.4), obtemos

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = & P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots \\ & P(A_{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-2})P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}). \end{aligned} \tag{2.5}$$

□

Exemplo 2.3. *Vamos retomar o exemplo 11 e calcular a probabilidade de obter o seguinte resultado: $B_1B_2V_3V_4B_5$ em cinco retiradas de bolas da urna sem reposição. O índice representa o número da retirada. Pela fórmula (2.5) temos*

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap B_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap B_5) &= P(B_1)P(B_2|B_1)P(V_3|B_1 \cap B_2) \cdot \\ &\quad \cdot P(V_4|B_1 \cap B_2 \cap V_3)P(B_5|B_1 \cap B_2 \cap V_3 \cap V_4) \\ &= \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{120}. \end{aligned}$$

As probabilidades condicionais sucessivas foram calculadas levando-se em conta as mudanças na composição da urna após a retirada. Assim após a primeira retirada, em que saiu branca, a urna ficou com duas brancas e sete vermelhas após a segunda retirada em que também saiu branca, fica com uma branca e sete vermelhas; após a terceira em que saiu vermelha, fica com uma branca e seis vermelhas e assim por diante.

2.1.1 Teorema da probabilidade total

Definição 2.2. *Dizemos que os eventos $B_1, B_2, ..., B_n$ representam uma partição do espaço amostral S quando*

i) $B_i \cap B_j = \varnothing$, *para todo* $i \neq j$;

ii) $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = S$.

Consideremos A um evento qualquer referente a S, e B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 e B_6 uma partição S.

Portanto podemos escrever

$$\begin{aligned} A = & A \cap S = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6) \\ = & (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3) \cup (A \cap B_4) \cup (A \cap B_5) \cup (A \cap B_6). \end{aligned}$$

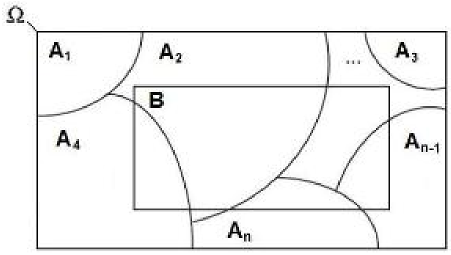

Figura 2.1: Partições do Espaço Amostral

Teorema 2.2 (Probabilidade Total)**.** *Seja B um evento referente a Ω e $A_1, A_2, ..., A_n$ uma partição de Ω. Temos que*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i). \tag{2.6}$$

Demonstração: Como $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, então

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i).$$

Calculando a probabilidade de A obtemos

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i).$$

□

Exemplo 2.4. *Uma determinada peça é manufaturada por três fábricas, digamos 1, 2 e 3. Sabes-se que 1 produz o dobro de peças que 2, e 2 e 3 produzem o mesmo número de peças (durante um período de produção especificado). Sabe-se também que 2% das peças produzidas por 1 e por 2 são defeituosas, enquanto 4% daquelas produzidas por 3 são defeituosas. Todas as peças produzidas são colocadas em um depósito e depois uma peça é extraída ao acaso. Qual a probabilidade de que essa peça seja defeituosa?*

Vamos introduzir os seguintes eventos: A : "a peça é defeituosa", B_1 : "a peça provém de 1", B_2 : "a peça provém de 2", B_3 : "a peça provém de 3".

Pede-se $P(A)$ e, empregando-se o resultado acima, podemos escrever

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3).$$

Ora, $P(B_1) = \frac{1}{2}$, enquanto $P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{4}$. Também $P(A|B_1) = P(A|B_2) = 0,02$, enquanto $P(A|B_3) = 0,04$. Levando-se esses valores à expressão acima, encontraremos $P(A) = 0,025$.

Exemplo 2.5. *Considere duas caixas X e Y, cada uma contendo parafusos grandes e pequenos. Suponha que a caixa X contenha 60 parafusos grandes e 40 pequenos e que a caixa Y contenha 10 parafusos grandes e 20 pequenos. Suponha que é escolhida uma caixa e dela é retirado um parafuso. Qual a probabilidade de que este seja grande?*

Solução: Considere os eventos

A_1 : "o parafuso sair da caixa X";

A_2 : "o parafuso sair da caixa Y";

B : "o parafuso é grande".

Utilizando o teorema da probabilidade total, temos

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) = \\ &= \frac{60}{100} \cdot \frac{1}{2} + \frac{10}{30} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{15} \end{aligned}$$

Portanto a probabilidade de ser retirada um parafuso grande é $\frac{7}{15}$.

2.1.2 Teorema de Bayes

Vamos agora deduzir a fórmula de Bayes. Como veremos sua dedução é bem simples, porém permite interpretação bastante profunda e que é responsável pelo desenvolvimento de uma linha de fundamentos da estatística que hoje em dia é denominada Bayesiana.

Teorema 2.3 (Regra de Bayes)**.** *Seja B um evento tal que $P(B) > 0$ e $A_1, A_2, ..., A_n$ uma partição do espaço amostral S. Seja P uma probabilidade definida nos eventos de S. Temos*

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)}. \tag{2.7}$$

Demonstração: Como $A_1, A_2, ..., A_n$ é uma partição de S temos que

$$B = B \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) = \bigcup_{k=1}^{n} (B \cap A_k).$$

Assim
$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k).$$
Mas
$$P(B \cap A_k) = P(A_k)P(B|A_k)$$
de modo que podemos escrever
$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)}.$$

□

Uma forma de interpretar a fórmula (2.7) é a seguinte: suponha que pensemos nos eventos A_k como possíveis "causas"do evento observável B. Então $P(A_i|B)$ é a probabilidade de que o evento A_i foi a causa de B, dado que B ocorreu.

Exemplo 2.6. *Suponha que existam três cofres, cada um com duas gavetas. O primeiro tem uma moeda de ouro em cada gaveta, o segundo tem uma moeda de ouro na gaveta e uma moeda de prata em outra, e o terceiro cofre tem uma moeda de prata em cada gaveta. Escolhe-se um cofre ao acaso e abre-se a gaveta. Se a gaveta contém uma moeda de ouro, qual a probabilidade de que a outra gaveta contenha também uma moeda de ouro? Pedimos ao leitor que faça uma pausa e advinhe a resposta antes de ler a solução. Frequentemente a resposta errada de* $\frac{1}{2}$ *é dada para este problema.*

Resolve-se o problema fácil e corretamente usando a regra de Bayes uma vez decifrada a descrição. Podemos pensar em um espaço de probabilidade em que os eventos A_1, A_2 e A_3 correspondam às seleções do primeiro, segundo e terceiro cofre respectivamente. Esses eventos são disjuntos e sua união é S já que se seleciona exatamente um cofre. Além do mais, pressume-se que os três cofres são igualmente prováveis de serem selecionados de modo que $P(A_i) = \frac{1}{3}$, $i = 1, 2, 3$. Seja B o evento de que a moeda observada é de ouro. Então, da composição dos cofres, é claro que
$$P(B|A_1) = 1, P(B|A_2) = \frac{1}{2} \text{ e } P(B|A_3) = 0.$$
O problema pede a probabilidade de que a segunda gaveta contenha uma moeda de ouro dado que havia uma moeda de ouro na primeira. Isto pode acontecer somente se o cofre escolhido foi o primeiro, assim o problema equivale ao de determinar $P(A_1|B)$. Agora podemos aplicar a regra de Bayes (2.7) para obter a

resposta que é $\frac{2}{3}$. Deixemos ao leitor como exercício a determinação da probabilidade de que a segunda gaveta contenha uma moeda de prata dado que a primeira continha uma de ouro.

Exemplo 2.7. *Uma companhia monta rádios cujas peças são produzidas em três de fábricas denominadas A_1, A_2 e A_3. Elas produzem, respectivamente, 15%, 35% e 50% do total. As probabilidades das fábricas A_1, A_2 e A_3 produzirem peças defeituosas são 0,01; 0,05 e 0,02 respectivamente. Uma peça é escolhida ao acaso do conjunto de peças produzidas. Essa peça é testada e verifica-se que é defeituosa. Qual a probabilidade que tenha sido produzida pela fábrica A_i, para $i = 1, 2, 3$?*

Designemos por B o evento "a peça é boa"e por D o evento "a peça é defeituosa". Sabemos que: $P(A_1) = 0,15$, $P(A_2) = 0,35$ e $P(A_3) = 0,5$, pois a peça é escolhida ao acaso do conjunto de peças. Sabemos ainda dos dados do problema que $P(D|A_1) = 0,01$, $P(D|A_2) = 0,05$ e $P(D|A_3) = 0,02$. Desejamos calcular $P(A_i|D)$, isto é, a probabilidade condicional de a peça ter sido produzida na fábrica A_i para $i = 1, 2, 3$, sabendo-se que ela é defeituosa.

Pela fórmula de Bayes, temos para $i = 1, 2, 3$,

$$P(A_i|D) = \frac{P(D|A_i)P(A_i)}{P(D|A_1)P(A_1) + P(D|A_2)P(A_2) + P(D|A_3)P(A_3)}$$

e como

$$P(D|A_1)P(A_1) + P(D|A_2)P(A_2) + P(D|A_3)P(A_3) =$$

$$= (0,01)(0,15) + (0,05)(0,35) + (0,02)(0,5) = 0,0290$$

.

Para $i = 1$, o numerador é $P(D|A_1)P(A_1) = 0,0015$, para $i = 2$ é $P(D|A_2)P(A_2) = 0,0175$ e para $i = 3$ é $P(D|A_3)P(A_3) = 0,01$. Substituindo-se, obtemos

$$P(A_1|D) = 0,052, P(A_2|D) = 0,603, P(A_3|D) = 0,345.$$

O uso da fórmula de Bayes nos fornece a seguinte interpretação: como as fábricas A_1, A_2 e A_3 são responsáveis, respectivamente, por 15%, 35% e 50% da produção, se retirarmos uma peça ao acaso da linha de produção, as probabilidades de que essa peça venha das fábricas A_1, A_2 e A_3 são respectivamente iguais a 0,15, 0,35 e 0,5. Por outro lado, se retirarmos a peça ao acaso e desconhecemos a procedência da peça, isto é, de que fábrica ela veio, e somos informados de que ela é defeituosa, então levando em conta essa informação proveniente do experimento, as probabilidades que a peça tenha vindo de A_1, A_2 ou A_3 passam a valer, respectivamente, 0,052, 0,603 e 0,345.

2.2 Independência de eventos

Definição 2.3. *Sejam A e B dois eventos e suponha que $P(A) > 0$. O evento B é dito independente do evento A se*

$$P(B|A) = P(B). \tag{2.8}$$

Esta definição sugere que a probabilidade do evento B não se altera com a informação de que o evento A ocorreu.

Se o evento B é independente do evento A, temos por (2.8) que

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{2.9}$$

E mais, se o evento B é independente do evento A, o evento A é independente do evento B, pois

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A),$$

desde que $P(B) > 0$.

Teorema 2.4. *Se A e B são eventos independentes, então A e B^c são também eventos independentes.*

Demonstração: Sabemos que $P(B^c) = 1 - P(B)$. Sabemos também que os eventos $(A \cap B)$ e $(A \cap B^c)$ são disjuntos e sua união é A, isto é, $(A \cap B) \cap (A \cap B^c) = \varnothing$ e $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$. Logo

$$\begin{aligned}
A &= (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \\
P(A) &= P[(A \cap B) \cup (A \cap B^c)] \\
P(A) &= P[(A \cap B)] + P[(A \cap B^c)] \\
\therefore\ P[(A \cap B^c)] &= P(A) - P[(A \cap B)] \\
&= P(A) - P(A) \cdot P(B) \\
&= P(A) \cdot (1 - P(B)) \\
&= P(A) \cdot P(B^c)
\end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 2.8. *Vamos considerar uma urna que contém três bolas brancas e sete bolas vermelhas. Retiram-se duas bolas da urna, porém após a primeira retirada a bola é reposta na urna.*

Vamos supor que as dez bolas são numeradas de 1 a 10, as brancas recebem números de 1 a 3 e as vermelhas de 4 a 10. Podemos considerar como espaço amostral associado a esse experimento o conjunto

$$S = \{(i, j) : i, j \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq 10, 1 \leq j \leq 10\}.$$

Se partirmos da hipótese de que qualquer das 10 bolas tem a mesma chance de ser escolhida, como as duas retiradas são feitas com reposição, podemos associar aos elementos do espaço amostral probabilidade $\frac{1}{100}$. Obtemos para as probabilidades dos eventos $\{B_1B_2\}, \{B_1V_2\}, \{V_1B_2\}, \{V_1V_2\}$, onde o índice indica a retirada, os seguintes valores

$$P(B_1 \cap B_2) = \frac{9}{100}$$

$$P(B_1 \cap V_2) = \frac{21}{100}$$

$$P(V_1 \cap B_2) = \frac{21}{100}$$

$$P(V_1 \cap V_2) = \frac{49}{100}.$$

Vamos justificar a primeira igualdade, pois a justificação para as demais é a mesma. Pode-se tirar branca na primeira vez de três maneiras e na segunda retirada também de três maneiras, pois a primeira bola é reposta na urna antes da retirada da segunda. Assim o evento $\{B_1B_2\}$ pode ocorrer de nove maneiras e o espaço amostral tem 100 elementos. Para o evento B_1 e B_2 temos

$$P(B_1) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

$$P(B_2) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}.$$

Observe que tanto B_1 quanto B_2 têm 30 pontos amostrais,

$$B_1 = \{(i, j) : 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 10\}$$

$$B_2 = \{(i, j) : 1 \leq i \leq 10, 1 \leq j \leq 3\}.$$

De modo análogo obtemos $P(V_1)$ e $P(V_2)$. Vemos assim que:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2)$$

$$P(B_1 \cap V_2) = P(B_1) \cdot P(V_2)$$

$$P(V_1 \cap B_2) = P(V_1) \cdot P(B_2)$$

$$P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \cdot P(V_2).$$

Esse exemplo nos mostra formalmente que os eventos B_1 e B_2; B_1 e V_2; V_1 e B_2 e V_1 e V_2 são independentes.

Exemplo 2.9. *Seja S o quadrado no plano $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. Considere o espaço uniforme de probabilidade sobre o quadrado, e seja A o evento*

$$\left\{(x, y); 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq 1\right\},$$

e B o evento

$$\left\{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{4}\right\}.$$

Note que A e B são eventos independentes.

Para tanto, determinamos $P(A), P(B)$ e $P(A \cap B)$ e mostramos que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Como A é um sub-retângulo do quadrado S com área $\frac{1}{2}$ e B é um sub-retângulo de S com área $\frac{1}{4}$, segue-se que $P(A) = \frac{1}{2}$ e $P(B) = \frac{1}{4}$. Por outro lado

$$A \cap B = \left\{(x, y); 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq \frac{1}{4}\right\}$$

é um sub-retângulo do quadrado S com área $\frac{1}{8}$. Assim $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$ e vemos que A e B são eventos independentes.

OBS 1. *No exemplo acima o espaço amostral S é infinito não-enumerável. Para calcular $P(A), P(B)$ e $P(A \cap B)$ consideramos uma medida finita no espaço amostral, no caso a área pois se trata de uma região plana, e então aplicamos a definição clássica de probabilidade.*

Capítulo 3

Modelos probabilísticos sobre espaços discretos

Apresentaremos agora alguns métodos para calcular a probabilidade da ocorrência de determinados eventos desde que os mesmos se enquadrem em algumas condições exigidas. Esses métodos são conhecidos como modelos de **distribuição de probabilidades**.

Neste capítulo abordaremos os modelos probabilísticos onde queremos determinar a probabilidade da ocorrência de eventos em uma determinada quantidade finita de realizações de um experimento aleatório e/ou em uma posição específica no número de realizações ou ainda a probabilidade de obtermos um número de elementos desejados na extração aleatória de uma amostra finita de elementos. Perceba que nesses modelos que estudaremos agora sempre existirá um número natural que representará o número de realizações do experimento aleatório ou o número de elementos de um conjunto, isto é, a probabilidade é determinada sobre espaços discretos de probabilidade.

3.1 Distribuição binomial

O método binomial é utilizado quando temos um experimento aleatório no qual estamos interessados em apenas dois resultados, ou um dado evento A ocorre ou não, sendo conhecida a sua probabilidade de ocorrência e ao realizarmos o experimento n vezes, com as n tentativas independentes queremos saber qual a probabilidade de ocorrer k vezes ($k \leq n$) esse evento A ou equivalentemente a probabilidade de não ocorrer $(n-k)$ vezes.

Note que como estamos interessados apenas na ocorrência ou não do evento A se a probabilidade do evento A ocorrer for p temos que a probabilidade da não ocorrência será $(1-p)$ conforme o Teorema 6.

Definição 3.1. *Sejam n, k inteiros não-negativos com $0 \leq k \leq n$, o número binomial $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ é dado por*

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Exemplo 3.1. *Um time X tem $\frac{2}{3}$ de probabilidade de vitória sempre que joga. Considere o evento V : "X vencer"e o evento D : "X não vencer". Daí se X jogar 6 partidas temos*

$$P(V) = \frac{2}{3} \;\; e \;\; P(D) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Assim a probabilidade de X

- não vencer pode ser representado por DDDDDD, no caso temos a situação

  $$P(nao\, vencer) = 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 \cong 0,0013 = 0,13\%$$

- vencer 1 partida pode ser representada por VDDDDD, DVDDDD, DDVDDD, DDDVDD, DDDDVD, DDDDDV, no caso temos 6 situações e daí

  $$P(vencer\ 1) = 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cong 0,0164 = 1,64\%$$

- vencer 2 partidas podemos representar por VVDDDD,VDVDDD e suas demais permutações. Basta notar que temos uma permutação com repetição que nos dará $\frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$ situações. Logo

  $$P(vencer\ 2) = 15 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cong 0,823 = 8,23\%$$

- vencer 3 partidas. Total de maneiras $\frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$.

  $$P(vencer\ 3) = 20 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cong 0,2194 = 21,94\%$$

- vencer 4 partidas. Total de maneiras $\dfrac{6!}{4!\cdot 2!} = 15.$

$$P(vencer\ 4) = 15\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cong 0,3292 = 32,92\%$$

- vencer 5 partidas. Total de maneiras $\dfrac{6!}{5!\cdot 1!} = 6.$

$$P(vencer\ 5) = 6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \cong 0,2633 = 26,33\%$$

- vencer 6 partidas. Total de maneiras $\dfrac{6!}{6!\cdot 0!} = 1.$

$$P(vencer\ 6) = 1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0 \cong 0,0877 = 8,77\%$$

Raciocinando de modo geral, se queremos que o evento A ocorra k vezes, queremos que o evento A^c ocorra $(n-k)$ vezes. Considerando a sequência $AAA...AA^cA^c...A^c$ que contém k vezes A e $(n-k)$ vezes A^c e todas as suas permutações temos um total de $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ sequências e os fatores $p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ decorrem da independência dos eventos. Suponha um experimento aleatório E no qual estamos interessados em saber quantas vezes o evento A ocorre em n ensaios independentes. Suponha que seja p a probabilidade da ocorrência desse evento em cada ensaio. Então a probabilidade do evento A ocorrer k vezes $(k \leq n)$ nas n tentativas que denotaremos por $P_B(kA)$ e dado por

$$P_B(kA) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}.$$

Exemplo 3.2. *Um dado não viciado é lançado 8 vezes. Qual a probabilidade de sair exatamente 4 vezes a face 6?*

Solução: Temos que o resultado de um lançamento não interfere no resultado dos lançamentos seguintes, assim cada lançamento é independente. Considere o evento A : "sair face 6", daí temos:

Probabilidade de A ocorrer: $p = \dfrac{1}{6}$; probabilidade de A não ocorrer: $1-p = 1-\dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$ e pela distribuição binomial com $n = 8$ e $k = 4$ a probabilidade de sair a face 6 em 4 lançamentos é

$$P_B(4A) = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{6^4}\cdot\frac{5}{6^4} \cong 0,0260 = 2,60\%.$$

Exemplo 3.3. *Uma prova contém 10 questões. Cada questão possui 5 alternativas das quais somente uma é correta. Se um estudante responde aleatoriamente à todas as questões, qual a probabilidade de que acerte 7 delas?*

Solução: Definindo o evento A : "acertar à questão". Temos que a probabilidade de que o estudante acerte uma questão é $\frac{1}{5}$.

O exemplo recai numa distribuição binomial com $n = 10$ e $k = 7$ e assim

$$P_B(7A) = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^7 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cong 0,00078 = 0,078\%.$$

3.2 Distribuição multinomial

A distribuição multinomial é uma extensão da binomial. O método multinomial é utilizado quando um experimento aleatório é realizado n vezes com todos os ensaios independentes e em cada ensaio podem ocorrer i eventos $A_1, A_2, ..., A_i$ com probabilidades conhecidas $p_1, p_2, ..., p_i$ e queremos determinar a probabilidade de ocorrerem k_1 vezes o evento A_1, k_2 vezes o evento A_2,..., k_i vezes o evento A_i com $k_1 + k_2 + ... + k_i = n$.

Exemplo 3.4. *Uma caixa contém bolas, das quais são 5 vermelhas, 4 brancas e 3 azuis. Suponha que sejam retiradas bolas ao acaso e com reposição. Qual a probabilidade de que sejam retiradas*

a) duas bolas vermelhas, duas brancas e uma azul;

b) três bolas vermelhas, uma branca e duas azuis.

Solução: Primeiramente notemos que o fato da reposição da bola após cada retirada é necessária para que o problema se encaixe na distribuição multinomial, pois do contrário o experimento aleatório não seria o mesmo em cada retirada. Perceba também que o fato da retirada e reposição de uma bola em nada interfere na retirada seguinte, isto é, cada retirada de bola é independente. Sejam os eventos V : "sair uma bola vermelha", B : "sair uma bola branca"e A : "sair uma bola azul". Então temos

Probabilidade de sair bola vermelha: $P(V) = \frac{5}{12}$;

Probabilidade de sair bola branca: $P(B) = \frac{4}{12}$;

Probabilidade de sair bola azul: $P(A) = \frac{3}{12}$.

Dessa forma o total de maneiras de sair

a) 2 bolas vermelhas, duas brancas e uma azul pode ser representado por VVBBA e suas permutações e daí a probabilidade será

$$P = \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{12}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{12}\right)^1 \cong 0,1446 = 14,46\%.$$

b) três bolas vermelhas, uma branca e duas azuis dado por VVVBAA e suas permutações terá probabilidade

$$P = \frac{5!}{3! \cdot 1! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{12}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{12}\right)^2 \cong 0,1808 = 18,08\%.$$

Suponha que na realização de um experimento aleatório E podem ocorrer i eventos $A_1, A_2, ..., A_i$ com probabilidades respectivamente $p_1, p_2, ..., p_i$. Se realizarmos n ensaios desse experimento no qual cada ensaio é independente então a probabilidade de que ocorra k_1 vezes A_1, k_2 vezes A_2,..., k_i vezes A_i que denotaremos por $P_M(k_1A_1, k_2A_2, ..., k_iA_i)$ será

$$P_M(k_1A_1, k_2A_2, ..., k_iA_i) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_i!} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_i^{k_i}$$

Exemplo 3.5. *Em uma fábrica, uma peça é considerada "boa"(tipo A) se uma de suas dimensões L está entre l_1 e l_2 ($l_1 < l_2$); "recuperável"(tipo B) se $L > l_2$ e "perdida"(tipo C) se $L < l_1$. Numa sequência de produção de 10 peças resultou em 5 peças do tipo A, 3 do tipo B e 2 do tipo C. Retira-se, aleatoriamente, uma peça dentre as 10 e mede-se sua dimensão, devolvendo a peça para o conjunto (com reposição). São realizados 6 ensaios dessa natureza. Qual a probabilidade de entre as seis peças observadas obter 3 peças do tipo A, 2 do tipo B e 1 do tipo C?*

Solução: Sejam os eventos B : "sair uma peça boa", R : "sair uma peça recuperável"e P : "sair uma peça perdida". Então

$$P(B) = \frac{5}{10}, P(R) = \frac{3}{10} \text{ e } P(P) = \frac{2}{10}.$$

Utilizando a distribuição multinomial com $n = 6$, $k_1 = 3$, $k_2 = 2$ e $k_3 = 1$ temos

$$P_M(3B, 2R, 1P) = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} \cdot \left(\frac{5}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{10}\right)^1 \cong 0,135 = 13,5\%.$$

3.3 Distribuição geométrica

Considere um experimento aleatório E e um dado evento A associado com probabilidade p de ocorrer. É claro que em cada ensaio do experimento E existe a possibilidade do evento A ocorrer ou não. A distribuição geométrica consiste em calcular a probabilidade de que o evento A ocorra pela primeira vez no n-ésimo ensaio realizado.

Exemplo 3.6. *Suponhamos que uma válvula eletrônica seja posta em um soquete e ensaiada. Admitamos que seja* $\frac{3}{4}$ *a probabilidade de que o teste seja positivo, daí a probabilidade de que seja negativo é* $\frac{1}{4}$. *Considere os eventos* A_n : *"a primeira válvula positiva aparecer no n-ésimo teste". O espaço amostral associado a esse experimento é*

$$S = \{+, -+, --+, ---+, ...\}, \textit{ ou ainda, } S = \{A_1, A_2, ..., A_n\}.$$

Raciocinemos da seguinte maneira: o evento A_n ocorrerá se as primeiras $(n-1)$ válvulas forem negativas e a n-ésima válvula for positiva. Se aceitarmos que a condição de uma válvula não influencie a condição de outra podemos dizer que a probabilidade de a primeira válvula positiva ocorrer no n-ésimo teste é $P(A_n) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{3}{4}$. Daí temos que a probabilidade de

a) A ocorrer no primeiro teste

$$P(A_1) = \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \frac{3}{4}.$$

b) A ocorrer no segundo teste

$$P(A_2) = \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \frac{3}{4}.$$

E assim por diante.

Note que, como $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = S$, temos que $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(S)$ e como os eventos $A_1, A_2, ..., A_n$ são mutuamente exclusivos, segue-se que

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = P(S) = 1,$$

pois mesmo que $n \to \infty$ utilizando a soma dos termos de uma P.G. infinita observamos que

$$= \frac{3}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + ...\right) = \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = 1.$$

Seja um experimento aleatório E e A um evento associado com probabilidade p. A probabilidade de que A ocorra pela primeira vez no n-ésimo ensaio que representaremos por $P_G(A, n)$ é dada por

$$P_G(A, n) = (1 - p)^{n-1} \cdot p.$$

Exemplo 3.7. *Um dado é lançado sucessivas vezes. Qual a probabilidade que a face 4 saia pela primeira vez no quinto lançamento?*

Solução: Seja o evento A : "sair face 4", logo a probabilidade de A ocorrer é $p = \dfrac{1}{6}$. Assim pela distribuição geométrica a probabilidade da face 4 sair pela primeira vez no quinto lançamento é

$$P_G(A, 5) = \left(\frac{5}{6}\right)^{5-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cong 0,0803 = 8,03\%.$$

Exemplo 3.8. *Uma moeda é lançada seis vezes. Qual a probabilidade de sair uma coroa no quarto lançamento?*

Solução: Perceba que a situação em questão não recai numa distribuição geométrica, pois não estamos querendo calcular a probabilidade de sair a primeira coroa no quarto lançamento e sim de sair coroa no quarto lançamento. Como os lançamentos de uma moeda são independentes a probabilidade de sair coroa em qualquer lançamento é igual a $\dfrac{1}{2}$.

3.4 Distribuição de Pascal

A distribuição de Pascal conhecida também como Binomial negativa é uma extensão da distribuição geométrica e consiste em calcular a probabilidade de um dado evento A associado a um experimento E ocorrer pela k-ésima vez no n-ésimo ensaio desse experimento.

Exemplo 3.9. *Uma moeda é lançada sucessivamente, qual a probabilidade de que a face cara apareça pela quarta vez na sétima jogada?*

Solução: Seja o evento A : "sair a quarta cara no sétimo lançamento". Se a face cara sair pela quarta vez na sétima jogada, isso significa que as outras três caras saíram nos outros seis lançamentos. Existem $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ maneiras de arrumar 3 caras em seis posições (lançamentos), a probabilidade de sair quatro caras é $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$ e de sair três coroas (não sair cara) é $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$ assim temos

$$P(A) = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{2^3} \cong 0,1562 = 15,62\%.$$

Raciocinando de maneira geral, para que um evento ocorra pelo k-ésima vez no n-ésimo ensaio é necessário que ao último ensaio n, corresponda a última ocorrência k e assim nos outros $(n-1)$ ensaios esse evento ocorreu $(k-1)$ vezes. Daí $\begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$ é o numero de maneiras que esse evento pode ocorrer $(k-1)$ vezes em $(n-1)$ tentativas.

Seja um experimento E e um evento A associado com probabilidade de ocorrência igual a p. Então a probabilidade do evento A ocorrer pela k-ésima vez no n-ésimo lançamento que representaremos por $P_{PA}(A, k, n)$ é

$$P_{PA}(A, k, n) = \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Exemplo 3.10. *Em uma linha de produção de uma montadora de automóveis, a probabilidade de que um carro saia com defeito é de* 10%*. Em certo dia foram produzidos 20 automóveis e um funcionário da empresa tem a missão de testar os automóveis para encontrar os possíveis carros defeituosos. Qual a probabilidade do funcionário encontrar dois carros defeituosos sendo o segundo no quinto teste?*

Solução: Considere o evento D : "o carro é defeituoso". Temos que $P(D) =$ 10% e pela distribuição de Pascal com $k = 2$ e $n = 5$, pois queremos que D ocorra pela segunda vez no quinto teste, temos

$$P_{PA}(D, 2, 5) = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} \cdot (0,1)^2 \cdot (0,9)^3 \cong 0,0291 = 2,91\%.$$

3.5 Distribuição hipergeométrica

Considere um conjunto com um número finito de elementos e que cada um desses elementos possui uma determinada característica (propriedade) ou não. O modelo hipergeométrico consiste em calcular a probabilidade de ao retirarmos sem reposição e sem levar em conta a ordem de extração, uma amostra contendo n elementos desse conjunto de termos exatamente x deles possuindo tal propriedade.

Exemplo 3.11. *Considere um grupo de 10 pessoas sendo 6 homens e 4 mulheres e que através de um sorteio queremos formar uma comissão contendo 8 componentes. Qual a probabilidade da comissão ter o número de homens igual ao de mulheres?*

Solução: Como a comissão deve ter 8 componentes devemos obter a probabilidade de que sejam sorteados exatamente 4 homens ou equivalentemente 4 mulheres. Temos $\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$ maneiras possíveis para o sorteio da comissão. Há $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ maneiras de sair 4 homens e $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ maneiras de sair 4 mulheres. Portanto há $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ maneiras da comissão ter exatamente 4 homens e 4 mulheres e a probabilidade desejada será dada por

$$\frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}} \cong 0,3333 = 33,33\%.$$

De maneira geral temos que se um conjunto possui N elementos onde k desses elementos possui determinada propriedade e $N - k$ não possui. Então a probabilidade de selecionarmos aleatoriamente, sem reposição e sem levar em conta a ordem dos elementos selecionados, uma amostra com n $(n < N)$ elementos dos quais exatamente x possuam a propriedade será obtida da seguinte maneira

Temos $\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}$ maneiras de selecionarmos a amostra (número de elementos do espaço amostral).

Há $\begin{pmatrix} k \\ x \end{pmatrix}$ maneiras de selecionar os elementos com a propriedade e $\begin{pmatrix} N-k \\ n-x \end{pmatrix}$ maneiras de selecionar os que não possuem, portanto $\begin{pmatrix} k \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N-k \\ n-x \end{pmatrix}$ casos favoráveis.

Seja o evento A : "selecionar elemento com a propriedade". Daí a probabilidade de selecionarmos x elementos com a propriedade dos k $(x \leq k)$ que a possuem numa amostra com n elementos pertencentes a uma população N, que representaremos por $P_H(xA, k, n, N)$ será

$$P_H(xA, k, n, N) = \frac{\begin{pmatrix} k \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-k \\ n-x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}}.$$

Exemplo 3.12. *Uma urna contém 16 bolas brancas e 14 bolas pretas. Calcular a probabilidade de ao serem retiradas 5 bolas, 3 serem brancas quando a amostragem for feita*

a) com reposição;

b) sem reposição.

Solução: a) Considere o evento B : "sair bola branca". Daí a probabilidade de B ocorrer em cada retirada é $\dfrac{16}{30} = \dfrac{8}{15}$. Então o problema se enquadra no modelo binomial com $n = 5$, $k = 3$ e $p = \dfrac{8}{15}$ tendo como resposta:

$$P_B(3B) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{8}{15}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{15}\right)^2 \cong 0,3303 = 33,03\%.$$

b) Temos um conjunto com 30 elementos dos quais 16 tem a "propriedade"ser bola branca e 14 não tem, e queremos a probabilidade de ao selecionar, sem reposição, uma amostra contendo 5 elementos exatamente 3 tenham a propriedade. Seja o evento B : "sair bola branca". Agora o problema se enquadra no modelo hipergeométrico com $N = 30$, $k = 14$, $n = 5$ e $x = 3$ e tem como resposta

$$P_H(3B, 14, 5, 30) = \frac{\begin{pmatrix} 16 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 30 \\ 5 \end{pmatrix}} \cong 0,3575 = 35,75\%.$$

OBS 2. *As condições do experimento aleatório realizado no modelo binomial (item a) diferem daquelas sob os quais vale o modelo hipergeométrico (item b) apenas quanto à forma de seleção da amostra: com reposição ou sem reposição. Entretanto, se o tamanho da amostra for pequeno em relação à população, dificilmente um mesmo elemento será selecionado mais que uma vez e, portanto, sob estas condições, o modelo hipergeométrico pode ser aproximado pelo modelo binomial.*

Exemplo 3.13. *Por engano 3 peças defeituosas foram misturadas com boas formando um lote com 12 peças no total. Escolhendo ao acaso 4 dessas peças determine a probabilidade de encontrar pelo menos duas defeituosas.*

Solução: Calcular a probabilidade de encontrar pelo menos duas peças defeituosas equivale a calcular a probabilidade de encontrarmos 2 ou 3 peças defeituosas. Seja o evento D : "sair peça defeituosa". Aplicando o modelo hipergeométrico temos que:

- Probabilidade de encontrarmos exatamente duas defeituosas

$$P_H(2D, 3, 4, 12) = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}} \cong 0,2181 = 21,81\%;$$

- Probabilidade de encontrarmos exatamente três defeituosas

$$P_H(3D, 3, 4, 12) = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}} \cong 0,0181 = 1,81\%.$$

Se ao selecionarmos 4 peças exatamente duas são defeituosas isso exclui a possibilidade de três serem. Assim a probabilidade desejada é dada pela soma

$$P_H(2D, 3, 4, 12) + P_H(3D, 3, 4, 12) \cong 23,62\%.$$

Capítulo 4

Modelo probabilístico de Poisson

4.1 Breve histórico sobre Poisson

Figura 4.1: Siméon Denis Poisson (1781 - 1840)

Engenheiro e matemático francês, nascido em Pithiviers, considerado o sucessor de Laplace no estudo da mecânica celeste e da atração de asteróides. Filho de um administrador público e ex-soldado, entrou para a École Polytechnique (1798), em Palaiseau, onde se formou, estudando com professores como Joseph Louis Lagrange, Pierre Simon Laplace e Jean Baptiste Fourier, dos quais se tornou amigo pessoal.

Ocupou cargos acadêmicos na École Polytechnique e na Sorbonne e contribuiu para as teorias da eletricidade e do magnetismo e estudou também o movimento da lua. Desenvolveu pesquisas sobre mecânica, eletricidade (a constante de Poisson), elasticidade (razão de Poisson), calor, som e estudos matemáticos (integral de Poisson na teoria do potencial e o colchete de Poisson nas equações diferenciais) com aplicação na medicina e na astronomia e produziu escritos sobre movimentos de ondas em geral e coeficientes de contração e a relação entre estes e a extensão.

Publicou trabalhos (1812) que ajudaram a eletricidade e o magnetismo tornarem-se um ramo da física matemática. Ganhou o título de barão (1825). Na hidrodinâmica seu mais notável trabalho foi *Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides (1829)*, relacionando equilíbrio de sólidos elásticos e correntes de fluidos compressíveis. Publicou o importante tratado *Traité de Mécanique (1833)*, em dois volumes, na termodinâmica a teoria matemática do calor (1835) e em *Recherches sur la probabilité des jugements (1837)* apareceu a famosa distribuição de Poisson de intensa aplicação em estatística. Na teoria de probabilidades descobriu a forma limitada da distribuição binomial que posteriormente recebeu o seu nome e hoje considerada uma das mais importantes distribuições na probabilidade, sendo o método de Poisson um processo randômico de importância fundamental. Publicou cerca de quatrocentos trabalhos e morreu em Sceaux, próximo a Paris, França[1].

4.2 O Número de Euler

Considere o desenvolvimento do binômio

$$\begin{aligned}(x+a)^n = &\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} x^n a^0 + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^{n-1} a^1 + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} x^{n-2} a^2 + \dots \\ &+ \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} x^1 a^{n-1} + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} x^0 a^n.\end{aligned}$$

[1]Fonte: http://www.brasilescola.com/biografia/simeon-denis.htm

Para $x = 1$ e $a = \dfrac{1}{n}$ teremos

$$
\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{n}\right)^0 + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{n}\right)^1 + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots \\
&+ \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}\left(\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \frac{n!}{0!(n-0)!}\left(\frac{1}{n}\right)^0 + \frac{n!}{1!(n-1)!}\left(\frac{1}{n}\right)^1 + \frac{n!}{2!(n-2)!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots \\
&+ \frac{n!}{n!(n-n)!}\left(\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1 + \frac{n(n-1)!}{1!(n-1)!}\left(\frac{1}{n}\right)^1 + \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots \\
&+ \frac{1}{n!}\left(\frac{n!}{n^n}\right) \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot\frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \ldots \\
&+ \frac{1}{n!}\cdot\frac{n(n-1)\cdots 1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots \\
&+ \frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

À medida que aumentamos o valor de n, os termos do tipo $\dfrac{a_0}{n}$, com a_0 constante, vão se aproximando cada vez mais de zero.

Assim, quando $n \to \infty$, temos que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cong 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

Agora considere a seguinte série

$$\sum_{n=0}^{n}\frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{!}{n!}.$$

Para $n = 4$, temos

$$\sum_{n=0}^{4}\frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = \frac{24+24+12+4+1}{24} = \frac{64}{24} \cong 2,70833.$$

Para $n = 5$, temos

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{5}\frac{1}{n!} &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \\
&= \frac{120+120+60+20+5+1}{120} = \frac{326}{120} \cong 2,71667.
\end{aligned}
$$

Para $n = 6$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{6} \frac{1}{n!} &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = \frac{720 + 720 + 360 + 120 + 30 + 6 + 1}{720} \\ &= \frac{1957}{720} \cong 2,71806.\end{aligned}$$

Para $n = 7$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{7} \frac{1}{n!} &= \frac{1}{0!} + \ldots + \frac{1}{7!} = \frac{5040 + 5040 + 2520 + 840 + 210 + 42 + 7 + 1}{5040} \\ &= \frac{13700}{5040} \cong 2,71825.\end{aligned}$$

Percebemos que à medida que aumentamos o valor de n, o resultado da série $\sum_{n=0}^{n} \frac{1}{n!}$ vai aumentando. Será que fazendo $n \to \infty$, o resultado dessa série crescerá ilimitadamente? Mostraremos que isso não ocorre.

Note que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots > 2.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots \\ &< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots = 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3\end{aligned}$$

(onde empregamos a soma da P.G. infinita).

Concluímos assim que $2 < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < 3$, isto é, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converge para um valor compreendido entre 2 e 3.

O número de Euller é então definido como

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cong 2,718281828285.$$

Definição 4.1. *Um número real α é dito algébrico se é solução de alguma equação polinomial do tipo $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, sendo os coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ todos inteiros e $a_0 \neq 0$. Se um número α não for algébrico é dito transcedente.*

Em 1873, Charles Hermite (1822-1901) provou que e é transcedente. Não demonstraremos esse fato aqui. Ao leitor mais interessado, indicamos a leitura de [2].

4.3 Distribuição de Poisson

O modelo probabilístico conhecido como distribuição de Poisson, em geral, tem a finalidade de calcular a probabilidade de um determinado evento ocorrer um número k de vezes num dado intervalo de tempo ou numa dada região espacial tomando alguma observação anterior como base. Esse modelo probabilístico também é discreto, pois como queremos a probabilidade de um evento ocorrer um número k de vezes temos um espaço amostral do tipo $S = \{1, 2, 3, ...\}$.

A diferença desse modelo para os demais modelos estudados é que observamos a ocorrência de eventos discretos em espaços contínuos, pois, por exemplo, um intervalo de tempo não pode ter todos os instantes representados por números inteiros, mas sim por subconjuntos dos números reais que são conjuntos não enumeráveis e diferencia do modelo Binomial já estudado pelo fato de não sabermos quantas vezes o evento em questão deixou de ocorrer. São eventos como o número de veículos que passam por um determinado cruzamento, o número de chamadas telefônicas que chegam a uma central, número de falhas por metro em um fio, o número de nascimentos em determinado local, etc. Podemos, por exemplo, contar quantas chamadas ocorreu em um intervalo de tempo, mas não é possível afirmar quantas chamadas deixaram de ser realizadas nesse período.

Para que esse modelo seja aplicado devemos admitir que a ocorrência do evento num intervalo Δ (que pode ser de tempo, comprimento, área ou volume) seja proporcional a amplitude do intervalo e as ocorrências de sucessos em intervalos disjuntos sejam independentes. Para justificarmos a expressão do modelo de Poisson primeiramente apresentaremos a seguinte situação:

Exemplo 4.1. *Suponhamos que chamadas telefônicas cheguem a uma grande central, e que em um período particular de três horas tenham sido recebidas um total de 270 chamadas, isto é, uma média de 1,5 chamadas por minuto. Desejamos agora calcular, com base nesses dados a probabilidade de ocorrerem 2 chamadas num intervalo de três minutos. Note que a chegada de uma chamada em um determinado instante é tão provável quanto em qualquer outro instante, porém se considerarmos um intervalo de tempo é razoável se esperar um maior número de chamadas ao se aumentar o intervalo de tempo. Considere agora as seguintes aproximações a seguir:*

Podemos considerar o intervalo de três minutos subdividido em 9 subintervalos de 20 segundos cada e encarar cada um desses subintervalos como um ensaio de um experimento onde observaremos ou não uma chamada telefônica. Assim a probabilidade de uma chamada telefônica ocorrer em 20 segundos deve ser igual a 0,5, pois na central temos uma média de 1,5 chamadas por minuto e como 20 segundos e igual a um terço de 60 segundos (1 min) temos $P(uma\ chamada\ em\ 20s) = \frac{1}{3} \cdot 1,5 = 0,5$. Desse modo podemos imaginar que a probabilidade de ocorrerem 2 chamadas em três minutos (isto é, 2 chamadas em 9 tentativas) seja igual a $\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (0,5)^2 \cdot (0,5)^7 = \frac{9}{128} \cong 0,0703$ como no modelo binomial.

O problema é que em cada ensaio (intervalos de 20s) pode acontecer não só a chegada de uma ligação, mais de duas, três ou mais ligações. Assim o cálculo acima perde a eficiência, pois no modelo binomial em cada ensaio, ou o evento ocorre (uma vez) ou não ocorre. A fim de encontrarmos um valor cada vez mais próximo do ideal, devemos dividir o intervalo de três minutos em subintervalos cada vez mais curtos, pois desta forma a probabilidade de chegarem mais que uma chamada em cada subintervalo irá diminuir.

Considere agora o intervalo de três minutos como 18 subintervalos de 10 segundos cada. Daí a probabilidade de ocorrer uma chamada em 10 segundos deve ser igual a 0,25 pois 10 segundos é um sexto de 60 segundos e logo temos $P(uma\ chamada\ em\ 10s) = \frac{1}{6} \cdot 1,5 = 0,25$. Segue que a probabilidade de ocorrerem 2 chamadas em três minutos (2 chamadas em 18 tentativas) e igual a $\begin{pmatrix} 18 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (0,25)^2 \cdot (0,75)^{16} \cong 0,0958$.

Realizando mais uma aproximação podemos dividir três minutos em 36 subintervalos de 5 segundos cada, logo a probabilidade de uma chamada em 5 segundos será $P(uma\ chamada\ em\ 5s) = \frac{1}{12} \cdot 1,5 = 0,125$ e aí a probabilidade de 2 chamadas em três minutos (2 chamadas em 36 tentativas) será $\begin{pmatrix} 36 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (0,125)^2 \cdot (0,875)^{34} \cong 0,1050$.

Realizamos até então três aproximações utilizando o modelo binomial

- Na primeira com $n = 9$, $k = 2$ e $p = 0,5$;
- Na segunda com $n = 18$, $k = 2$ e $p = 0,25$;
- Na terceira com $n = 36$, $k = 2$ e $p = 0,125$.

Note que o valor do produto $n \cdot p$ em cada aproximação é

$$n \cdot p = 9 \cdot 0,5 = 18 \cdot 0,25 = 36 \cdot 0,125 = 4,5.$$

Assim seguindo com o raciocínio para obter subintervalos cada vez mais curto devemos fazer $n \to \infty$ e considerando o produto $n \cdot p$ e constante percebemos que $p \to 0$.

O exemplo acima retrata a ideia para obtermos a expressão do modelo de Poisson que é a forma limite da expressão do modelo binomial quando $n \to \infty$ e admitimos $n \cdot p$ constante. Vejamos:

Temos que a expressão do modelo binomial é

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{(n) \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

fazendo $n \cdot p = \lambda$ segue que $p = \dfrac{\lambda}{n}$ e $1 - p = 1 - \dfrac{\lambda}{n}$ e substituindo na equação acima,

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot \frac{(n-k+1)}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$\frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{(k-1)}{n}\right)\right] \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$\frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{(k-1)}{n}\right)\right] \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

Agora fazendo $n \to \infty$ e considerando λ constante segue que os termos $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \dfrac{(k-1)}{n}\right)$ se aproximam da unidade. Tambem se aproxima da unidade o fator $\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^{-k}$ e como é conhecido do Cálculo o fator $\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^{n} \to e^{-\lambda}$, onde "e"é o número de Euller mencionado em 4.2. Portanto a expressão do modelo de Poisson de parâmetro λ para calcular a probabilidade de k ocorrências de um evento A num dado intervalo de tempo (ou numa dada região espacial), que denotaremos por $P_{PO}(kA)$, é dada por

$$P_{PO}(kA) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \tag{4.1}$$

onde o parâmetro λ corresponde ao número médio de eventos que ocorre em determinado intervalo de tempo.

Voltando ao exemplo anterior, seja A : "chegar chamada", temos $\lambda = 4,5$ pois a média e de 1,5 chamadas por minuto, logo a probabilidade de chegar 2 chamadas em 3 minutos será

$$P_{PO}(2A) = e^{-4,5} \cdot \frac{(4,5)^2}{2!} \cong 0,1124 = 11,24\%$$

Exemplo 4.2. *O Corpo de Bombeiros de uma determinada cidade recebe, em média, 3 chamadas por dia. Qual a probabilidade de receber*

a) 4 chamadas num dia;

b) Nenhuma chamada em um dia;

c) 20 chamadas em uma semana.

Solução: a) Seja o evento A : "receber chamada num dia". Temos que $\lambda = 3$ chamadas por dia em média e assim a probabilidade de 4 chamadas é

$$P_{PO}(4A) = e^{-3} \cdot \frac{3^4}{4!} \cong 0,1680 = 16,80\%.$$

b) $P_{PO}(0A) = e^{-3} \cdot \dfrac{3^0}{0!} \cong 0,0498 = 4,98\%.$

c) Como a média é de 3 chamadas por dia, temos que em uma semana espera-se um número médio de $3 \cdot 7 = 21$ chamadas. Daí temos: B : "receber chamada numa semana", $\lambda = 21$ chamadas por semana, donde $P_{PO}(20B) = e^{-21} \cdot \dfrac{21^{20}}{20!} \cong 0,0867 = 8,67\%.$

OBS 3. *Em um problema que possa ser resolvido pela distribuição binomial para encontrar a probabilidade desejada, quando n (número de ensaios) é grande às vezes nos deparamos com cálculos trabalhosos. Podemos então aplicar a distribuição de Poisson para aproximar o resultado, porém haverá uma diferença (um erro). Só que esse erro é bastante aceitável desde que o produto $n \cdot p$ seja "pequeno", isso se deve ao fato de que na obtenção da expressão da distribuição de Poisson, quando $n \to \infty$ temos $p \to 0$. É, em geral, bastante difícil precisar um valor máximo para o produto $n \cdot p$, pois o mesmo está associado ao "tamanho"do erro cometido entre as aproximações. Dessa forma, restringir um valor para o erro leva a um estudo avançado que deve ser realizado num curso de Estatística.*

Exemplo 4.3. *Uma pesquisa mostrou que 5% das televisões fabricadas tem defeito. Qual a probabilidade de ao serem compradas 100 televisões, 2 apresentarem defeito?*

1^a **Solução:** Seja o evento T : "televisão ter defeito". Aplicando a distribuição binomial com $n = 100$ e $k = 2$ temos

$$P_B(2T) = \begin{pmatrix} 100 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (0,05)^2 \cdot (0,95)^{98} \cong 0,0811 = 8,11\%.$$

2^a **Solução:** Considerando o mesmo evento T da 1^a solução: A média de televisões com defeito em 100 unidades é dada pelo produto $n \cdot p = 100 \cdot 5\% = 5$, portanto $\lambda = 5$. Agora aplicando a distribuição de Poisson temos

$$P_{PO}(2T) = e^{-5} \cdot \frac{5^2}{2!} \cong 0,0842 = 8,42\%.$$

Pelos cálculos acima percebemos uma diferença de aproximadamente $(0,0842 - 0,0811) \cong 0,0031$. Um erro bastante aceitável para $n = 100$ e $n \cdot p = 5$.

OBS 4. *Em geral, se $n \geq 100$ e $n \cdot p \leq 10$ o erro cometido será razoavelmente adequado.*

Exemplo 4.4. *Suponhamos que a receita federal tenha informações que o número médio de declarações preenchidas com fraude seja em média de 2 a cada 1000 declarações. Calcule a probabilidade de em 1000 declarações enviadas chegarem:*

a)duas declarações com fraude;

b)menos de duas com fraude;

c)mais de duas com fraude.

Solução: Temos $\lambda = 2$ e se A : "chegar declaração com fraude", teremos
a) $P_{PO}(2A) = e^{-2} \cdot \dfrac{2^2}{2!} \cong 27,07\%$.
b) $P_{PO}(0A) = e^{-2} \cdot \dfrac{2^0}{0!} + P_O(1A) = e^{-2} \cdot \dfrac{2^1}{1!} \cong 40,60\%$.
c) A probabilidade de duas ou menos é $27,07\% + 40,60\% = 67,67\%$. Portanto a de mais de duas é $1 - 67,67\% = 32,33\%$.

Exemplo 4.5. *Um dado é formado por chapas de plástico de 10×10 cm. Em média aparecem 50 defeitos por metro quadrado de plástico, segundo uma distribuição de Poisson.*

a) Qual a probabilidade de uma determinada face apresentar exatamente 2 defeitos?

b) Qual a probabilidade de o dado apresentar no mínimo dois defeitos?

Solução: a) Seja o evento D_1 : "uma face apresentar defeito". Em média aparecem: 50 defeitos/m^2 $= \dfrac{50}{10000}$ defeitos/cm^2. Como cada face tem área igual a 10cm x 10cm = 100 cm^2, tem-se

$$\lambda = \frac{50}{10000}$$

defeitos/cm^2 x 100 cm^2 = 0,5 defeitos por face. A probabilidade de uma face apresentar dois defeitos será

$$P_{PO}(2D_1) = e^{-0,5} \cdot \frac{(0,5)^2}{2!} \cong 7,58\%.$$

b) Seja o evento D_2 : "o dado apresentar defeito". No dado inteiro, a área total será 6x100 cm^2 = 600 cm^2 e o número médio de defeitos será então: $\lambda = \dfrac{50}{10000}$ defeitos/cm^2 x 600 cm^2 = 3 defeitos. A probabilidade de o dado apresentar no mínimo dois defeitos será

$$1 - [P_{PO}(0D_2) + P_{PO}(1D_2)].$$

Assim

$$P_{PO}(1D_2) = e^{-3} \cdot \frac{3^0}{0!};$$
$$P_{PO}(2D_2) = e^{-3} \cdot \frac{3^1}{1!}\ e;$$
$$1 - (0,0498 + 0,1494) = 80,08\%.$$

Capítulo 5

Considerações finais

O grande motivo que nos levou à realização do presente estudo reside no fato de que conhecimentos relativos a noções de probabilidade se fazem presentes, atualmente, em propostas para o ensino de matemática desde os anos iniciais do ensino fundamental. Esses estudos relativos a noções de probabilidade são geralmente apresentados com o título *tratamento da informação* que também consiste de estudos sobre noções de combinatória e de estatística.

Dessa forma existe uma nova tendência que defende que conceitos básicos de probabilidade, de combinatória e de estatística, como experimento aleatório, experimento determinístico, espaço amostral, evento, princípio multiplicativo, permutação simples e construção e interpretação de gráficos sejam apresentados já no ensino fundamental. O objetivo dessa tendência é possibilitar que os alunos desse nível de escolaridade possam ler, interpretar, construir gráficos e tabelas para que possam entender as informações ali contidas, que entendam diversos tipos de agrupamentos para que possam lidar com a quantificação de possibilidades para uma tomada de decisão, que conheçam noções de probabilidade e estatística para lidar com situações do cotidiano tais como: risco, jogos de azar, clima, questões ambientais, questões econômicas, resultados de exames médicos, dentre outras situações que envolvem acaso e incerteza.

Devido essa tendência acreditamos que o aluno chegando ao ensino médio já com certa familiaridade com esses conceitos fará com que o processo de ensino-aprendizagem sobre esses tópicos de matemática seja de certo modo facilitado o que permitirá um avanço no estudo dessas teorias bem como em suas aplicações. Sendo assim escolhemos um desses tópicos, no caso àquele denominado *probabilidade*, e procuramos através desse trabalho apresentar um texto que embora simples contemplasse alguns conceitos que, em geral, não são apresentados no ensino médio, mas que possuem essência na matemática elementar.

Bibliografia

[1] DANTAS, Carlos A. B. *Probabilidade um Curso Introdutório*. São Paulo. 2^a ed. Editora da Universidade de São Paulo. 2000.

[2] FIGUEIREDO, Djairo G. *de Números Irracionais e Transcendentes*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1985.

[3] HOEL, Paul G. *Introdução à Teoria da Probabilidade*. Rio de Janeiro. Editora Interciência. 1978.

[4] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PERIGO, Roberto. *Matemática - Volume Único*. São Paulo: Saraiva. 2002.

[5] JAMES, Barry. *Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário*. Rio de Janeiro. IMPA. LTC. 1981.

[6] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto Cesar. *A Matemática do Ensino Médio*, Coleção do Professor de Matemática. 6^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006, 2^o V.

[7] LIPSCHUTZ, Seymour. *Teoria e Problemas de Probabilidade*. Tradução de RUTH RIBAS ITACARABI. São Paulo. Editora MCGRAW-HILL do Brasil, LTDA. 1973.

[8] MEYER, Paul L. *Probabilidade: Aplicações à Estatística*. Tradução de RUY de C. B. Lourenço Filho. 2^a ed. Rio de Janeiro. LTC. 1983.

[9] MORDADO, Augusto C. O; CARVALHO, João B. P; CARVALHO, Paulo C. P; FERNANDES, Pedro. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro. IMPA SOIGRAF Publicações LTDA. 2001.

[10] S., Ross. *Probabilidade - Um Curso Moderno com Aplicações*. Bookmem, 2010.

[11] SPIEGEL, Murray Ralph. *Probabilidade e Estatística*. Tradução de ALFREDO ALVES de FARIAS. São Paulo. Editora MCGRAW-HILL do Brasil, LTDA. 1978.

[12] STWART, J. *Cálculo,* volume I. 2^a ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

[13] XAVIER, Teresinha de Maria Bezerra Sampaio. *Probabilidade: Teoria e Problemas*. Rio de Janeiro. LTC. 1974.