

Erneson Alves de Oliveira

Geração de fraturas auto-similares em meios desordenados: Técnicas do caminho crítico e do caminho mínimo.

Fortaleza – CE

Julho / 2008

Erneson Alves de Oliveira

Geração de fraturas auto-similares em meios desordenados: Técnicas do caminho crítico e do caminho mínimo.

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador:

Prof. Dr. José Soares de Andrade Jr.

MESTRADO EM FÍSICA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CENTRO DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

Fortaleza – CE

Julho / 2008

Dedicatória

*Aos meus pais,
Ernesto Borges de Oliveira e
Maria Veracy Alves de Oliveira, e
minha irmã,
Nathália Alves de Oliveira,
que estiveram comigo
em todos os momentos e
em todas as distâncias.*

Agradecimentos

Quero agradecer à todos que contribuíram de alguma forma para essa dissertação. Em especial:

- À minha Família, primeiramente.
- Ao Prof. Dr. José Soares de Andrade Jr., pela orientação, incentivo e confiança depositada em mim.
- Ao Prof. Dr. André Auto Moreira, ao Prof. Dr. Ascânio dias Araújo e ao Prof. Hans Jürgen Herrmann pelas conversas sempre produtivas e pelos ensinamentos que foram de grande ajuda no desenvolvimento desse trabalho.
- Ao Prof. Dr. Luciano Rodrigues da Silva, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, por aceitar o convite para participar da banca.
- Aos professores: Dr. Alexandre Diehl, da Universidade Federal de Pelotas, pela sua orientação em meus três anos de iniciação científica, Dra. Rita Maria Zorzenon dos Santos, da Universidade Federal de Pernambuco, pela sua orientação no tempo em que estudei em Recife e Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho, por ter sido minha porta de entrada na volta à UFC.
- À todos meus colegas de laboratório. Em especial aos amigos: Apiano (Bi), Handrey, Lucas, Samyr e Saulo (Sasaulo) pela convivência, palpites, discussões e idéias.
- Aos vários amigos que fiz em Recife: Bertúlio, Carlos, Cintia, Eroni, Euclides, Fábio, Gerson (Gersin), Gustavo, Hallan, Hans, Manuel (Harry), Maxwell, Miguel, Plínio, Priscila, Ramón, Rebeca, Tiago e Vladimir (Né ?). Agradeço principalmente aqueles com quem morei por um ano quando estava na UFPE: Antônio Márcio (Ney), César Ivan (Soft), Jefferson (Bisssteca), Lavôr (Jimmy), Pablo (Abel).
- Aos amigos de Fortaleza que sempre estiveram comigo e que lembrarei pelo resto da vida: Abraão, Acrísio, Alexandre (Cabeludo), Ana Tereza (Brodinho), Andrey Chaves (Sorín), Bartolomeu, Clenílton, Eduardo (Dudu), Eveline (Vevé), Franciné, George (Bush), Hudson, Ivan Jardins (Brother), Janduy (Janduba), José Júnior (Jota), Marcelo (Montanha), Paschoal, Roberto (Gerente), Roner (Ronin), Sara Honorato, Sara Rocha, Sérgio Gomes (Soim) e Tayroni

(Tay).

– Aos amigos extra-física: Argus, Filipi Augusto (Filipin), Francisco Paz (Neto), Giovanni Nunes, Gledson e Maxwell Morais (Little) que de alguma forma contribuíram para esse trabalho.

– Ao Departamento de Física da UFC e seus funcionários.

– Ao CNPq, CAPES e FUNCAP pelo financiamento dessa pesquisa.

“Shine on you crazy diamond !”

Pink Floyd

Resumo

Neste trabalho propomos dois modelos para a geração de fraturas em substratos regulares. No primeiro modelo, empregamos iterativamente o conceito de *caminho crítico* para determinar sistematicamente o elemento de menor “condutividade” da rede. Estes elementos são então identificados como “falhas” e removidos permanentemente da estrutura até que uma fratura macroscópica destrua a conectividade global da rede. Uma vez detectada, esta fratura é caracterizada topologicamente como uma estrutura auto-similar de dimensão fractal $D_p \approx 1.21$. No segundo modelo, empregamos iterativamente o algoritmo de Dijkstra para determinar o *caminho mínimo* em uma paisagem aleatória, retirando sistematicamente desta estrutura o elemento de maior energia. Como no modelo anterior, estes elementos são identificados como “falhas” até que um conjunto conector deles resulte em uma fratura macroscópica. A média realizada sobre várias amostras de fraturas em diferentes tamanhos de substratos revela a presença de uma estrutura auto-similar de dimensão fractal $D_f \approx 1.21$. A semelhança numérica entre os expoentes D_p e D_f sugere que os dois modelos pertencem à mesma classe de universalidade.

Abstract

In this work we propose two models for fracture generation in regular substrates. In the first model, we iteratively apply the concept of *critical path* to systematically determine the lower “conductivity” element in the connected spanning network. At each iteration, once these elements are identified as local “cracks”, they are permanently removed from the structure up to the point in which a macroscopic fracture can destroy the global network connectivity. This fracture is then topologically characterized as self-similar with fractal dimension $D_p \approx 1.21$. In the second model, we employ the algorithm of Dijkstra to determine the *minimal path* in a random energy landscape and remove its highest energy element. As in the previous model, these elements are considered to be local “cracks” till a subset of them can be identified as a macroscopic fracture. The average over many samples of fractures calculated for different system sizes reveals the presence of a self-similar structure with fractal dimension $D_f \approx 1.21$. The resemblance between the two exponents D_p e D_f suggests that the two models belong to the same universality class.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1	Introdução	p. 14
2	Alguns conceitos para o estado de meios desordenados	p. 16
2.1	Introdução à geometria fractal	p. 16
2.2	Introdução à teoria da percolação	p. 21
2.3	Método do caminho crítico	p. 32
2.4	O problema do caminho mínimo	p. 33
3	Modelos de fratura	p. 40
3.1	Redes de fraturas	p. 40
3.2	Descrição e resultados de um modelo de fratura por caminho crítico	p. 41
3.3	Descrição e resultados de um modelo de fratura por caminho mínimo	p. 45
4	Conclusões	p. 51
	Referências Bibliográficas	p. 53

Lista de Figuras

- 2.1 Imagem de satélite disponibilizada pela *NASA* da costa sul da Noruega mostrando a grande complexidade geográfica do local, com várias ilhas e rios que se ramificam até as montanhas cobertas por neve. A grade de quadrados indicada tem espaçamento $\delta \sim 50$ km. p. 17
- 2.2 Gráfico do número de quadrados pertencentes à grade necessários para cobrir a costa sul da Noruega $N(\delta)$ em relação ao espaçamento da grade δ medido em quilômetros. Encontramos a dimensão fractal $D = 1.51$. Salientando que extraímos os pontos de um gráfico análogo [1] e fizemos uma regressão em lei de potência, por isso a imprecisão na segunda casa decimal. p. 19
- 2.3 O comportamento das primeiras gerações da curva de Koch. Para a n -enésima geração o comprimento da curva é dada por $L(\delta) = \left(\frac{4}{3}\right)^n$ p. 20
- 2.4 Exemplo de uma transformação isotrópica T_i e de uma transformação anisotrópica T_a em um círculo de raio unitário. p. 20
- 2.5 Vizinhanças de Von Neuman. p. 22
- 2.6 Vizinhanças de Moore. p. 23
- 2.7 Redes de tamanho $L = 128$ para diferentes valores da probabilidade de ocupação p . O agregado percolante está em vermelho e os agregados isolados estão em cinza. p. 24
- 2.8 Rede de tamanho $L = 1024$ para a probabilidade crítica p_c . O agregado percolante infinito está em vermelho e os agregados isolados estão nas outras cores. p. 25
- 2.9 Modelo tradicional de fogo na floresta para uma rede de tamanho $L = 128$. Os sítios verdes representam as árvores, os vermelhos representam as árvores queimando e os sítios pretos representam as árvores queimadas. p. 26

- 2.10 Gráfico do tempo de vida médio $\langle t_v \rangle$ com a vizinhança de Von Neuman de primeiros vizinhos em relação a probabilidade de ocupação p . Para rede de tamanho $L = 1024$, adotamos 100 amostras para pontos distantes e refinamos com 1000 amostras para pontos próximos ao ponto crítico. Estimamos a probabilidade crítica como a probabilidade onde encontramos o maior valor de $\langle t_v \rangle$. Definimos a probabilidade crítica como o ponto onde o tempo de vida é maior. Nesse caso, encontramos $p_c = 0.592$ p. 27
- 2.11 Gráfico do tempo de vida médio $\langle t_v \rangle$ com a vizinhança de Von Neuman de segundos vizinhos em relação a probabilidade de ocupação p . Para rede de tamanho $L = 1024$, adotamos 100 amostras para pontos distantes e refinamos com 1000 amostras para pontos próximos ao ponto crítico. Estimamos a probabilidade crítica como a probabilidade onde encontramos o maior valor de $\langle t_v \rangle$. Nesse caso, encontramos $p_c = 0.406$ p. 28
- 2.12 Gráfico do número médio de elementos do agregado percolante no ponto crítico $\langle M(L, p_c) \rangle$ em relação ao raio de giração médio $\langle R_g \rangle$ para redes de tamanho até $L = 1024$. Adotamos 1000 amostras para a realização das médias. Encontramos $D = 1.89$ para a dimensão fractal do agregado percolante [2]. p. 30
- 2.13 Gráfico da fração de elementos pertencentes ao agregado percolante $P(L, p)$ em função da probabilidade de ocupação p . Para redes de tamanho $L = 128$ e $L = 1024$, fizemos 100 amostras para pontos distantes e refinamos com 1000 amostras para pontos próximos ao ponto crítico. p. 31
- 2.14 Exemplo de uma rede de condutância submetida à uma diferença de potencial ΔV p. 32
- 2.15 Grafo das rotas das cidades A e B . Os círculos são os vértices, as setas são as arestas e os pesos são os números suspensos. As arestas sombreadas formam o caminho mais curto. p. 34
- 2.16 Exemplo de uma execução passo à passo do algoritmo de Dijkstra para um dado grafo. Dado um vértice fonte s , o algoritmo encontrará todos os caminhos mais curtos para cada vértice $v \in V$. O caminho mais curto estimado é o valor dentro de cada vértice. Se uma aresta qualquer (u, v) está sombreada, então $\pi[v] = u$. Os vértices brancos pertencem ao conjunto Q , os vértices sombreados são aqueles que tem menor valor no conjunto Q e os vértices pretos pertencem ao conjunto S [3]. p. 37

- 2.17 Exemplo de uma estrutura de pirâmide de uma “heap de mínimo” e de sua lista de prioridades. Os números no interior dos círculos são pertencentes ao conjunto que vai ser organizado e os números de fora do círculos são suas respectivas posições na lista de prioridade. Notamos que o primeiro elemento dessa estrutura é sempre o menor valor do conjunto de números formadores. p. 38
- 2.18 Gráfico do número médio de elementos do menor caminho do agregado percolante no ponto crítico $\langle M(L, p_c) \rangle$ em relação ao raio de giração médio $\langle R_g \rangle$ para redes de tamanho até $L = 1024$. Adotamos 1000 amostras para realizarmos as médias. Encontramos $D = 1.12$ para a dimensão fractal menor caminho do agregado percolante. p. 38
- 3.1 Seqüências de redes de tamanho $L = 8$ seguindo o modelo de fratura proposto baseado no caminho crítico. Os sítios verdes pertencem ao agregado percolante vertical, os sítios violetas são agregados isolados, os sítios laranjas são os sítios que estão sendo proibidos em cada passo distinto de “tempo” e os sítios pretos são aqueles que já foram proibidos. Quando o processo de geração está encerrado, explicitamos a fratura produzida em vermelho. p. 43
- 3.2 Rede de tamanho $L = 512$ seguindo o modelo de fratura baseado no caminho crítico. Notamos que a fratura principal não apresenta sobreposições de caminhos (“loops”) ou cílios, mas apresentando protuberâncias (“over-hangs”). Encontramos a sua fractalidade com dimensão $D_p = 1.21 \pm 0.03$ p. 44
- 3.3 Gráfico do número médio de sítios proibidos pertencentes à fratura $\langle M_p \rangle$ em relação ao tamanho da rede L . O valor do expoente encontrado para este modelo de fratura baseado no caminho crítico foi $D_p = 1.21 \pm 0.03$. Utilizamos 25, 50, 250, 1250, 6250, 31250, 156250 e 781250 amostras para os tamanhos de rede $L = 1024, L = 512, L = 256, L = 128, L = 64, L = 32, L = 16$ e $L = 8$, respectivamente. p. 45
- 3.4 Seqüências de redes de tamanho $L = 8$ seguindo o modelo de fratura proposto baseado no caminho mínimo. Os sítios verdes pertencem ao caminho mínimo vertical para aquela configuração de probabilidades, os sítios laranjas são os sítios que estão sendo “proibido” naquele passo de tempo e os sítios pretos são aqueles que já foram proibidos. Quando o processo de geração está encerrado, mostramos a fratura produzida em vermelho e em seguida explicitamos a sua espinha dorsal. p. 47

- 3.5 Rede de tamanho $L = 512$ seguindo o modelo de fratura baseado no caminho mínimo. Notamos que a fratura principal é bastante ramificada, embora não tenha sobreposições de caminhos (“loops”). Como no caso do caminho crítico, a espinha dorsal (Em vermelho) apresenta características tipicamente auto-similares, ou seja, “over-hangs”. Os nossos resultados confirmam a sua fractalidade com dimensão $D_e = 1.21 \pm 0.03$ p. 48
- 3.6 Gráfico do número médio de sítios pertencentes ao primeiro caminho mínimo $\langle M_{pcm} \rangle$ e ao último caminho mínimo $\langle M_{ucm} \rangle$, ambos em função ao tamanho da rede L com os valores dos expoentes encontrados sendo dados por $D_f = 1.01 \pm 0.03$ e $D_f = 1.17 \pm 0.03$. Utilizamos 50, 250, 1250, 6250, 31250, 156250 e 781250 amostras para os tamanhos de rede $L = 512, L = 256, L = 128, L = 64, L = 32, L = 16$ e $L = 8$, respectivamente. p. 49
- 3.7 Gráfico do número médio de sítios proibidos $\langle M \rangle$ em função do tamanho da rede L . Os *diamantes* correspondem à $\langle M_p \rangle$, ou seja, todos os sítios proibidos da rede, os *quadrados* aos sítios pertencentes à fratura $\langle M_f \rangle$ e os *círculos* à espinha dorsal da fratura $\langle M_e \rangle$. Encontramos as dimensões fractais $D_p = 1.89 \pm 0.03$, $D_f = 1.52 \pm 0.03$ e $D_e = 1.21 \pm 0.03$, respectivamente. Utilizamos 50, 250, 1250, 6250, 31250, 156250 e 781250 amostras para os tamanhos de rede $L = 512, L = 256, L = 128, L = 64, L = 32, L = 16$ e $L = 8$, nessa seqüência. p. 50

Lista de Tabelas

2.1	Tabela das probabilidades críticas nos modelos de percolação de ligação e de sítios [2].	p. 22
-----	--	-------

1 *Introdução*

Como podemos observar na natureza, todo material se quebra dependendo do valor de tensão que nele é aplicada. Dependendo do tipo, forma e outras características do material ou até mesmo do ponto de tensão podemos produzir *fraturas* distintas, por exemplo a fratura causada em uma folha de papel tensionada nas pontas e um solo rachado por climas áridos. Existem materiais mais fáceis de se fraturar do que outros. Por exemplo, para fraturar o diamante devido à sua estrutura organizada é necessária uma força extremamente grande quando comparado a outros materiais, isso acontece devido à existência de *desordem* nas estruturas da maioria dos objetos comuns. Processos de fratura são extremamente sensíveis à desordem que, microscopicamente, pode ter relação com espaços vazios, descolamentos e até mesmo composição estrutural. Na escala em que estamos interessados, no entanto, essas propriedades espaciais podem ser tratadas apenas como ruídos nas propriedades do material, em simulação computacional, podemos gerar desordem através de números pseudo-aleatórios. Existem basicamente dois limites de desordem, um de *baixa desordem* significando que uma dada propriedade dos elementos pertencentes ao sistema não pode diferir muito uma da outra, ou seja, no contexto do *caminho mínimo*, não podemos ter o peso do caminho sendo dominado apenas pelo peso de um sítio qualquer. O limite de *alta desordem*, definido justamente o contrário do anterior, significando que podemos ter uma dada propriedade dos elementos do sistema diferenciando-se significativamente uma da outra, isto é, no contexto do caminho mínimo, podemos ter o peso do caminho sendo dominado apenas pelo peso de um sítio qualquer. Esse comportamento de aleatoriedade é muito familiar à Física Estatística, com principais aplicações em *percolação* e *fractais*.

No primeiro capítulo introduziremos conceitos relacionados à *geometria fractal* definindo a *dimensão fractal* de um objeto, o método de *contagem de caixas*, além de apresentarmos exemplos de fractais bem conhecidos. Falaremos também sobre a *teoria da percolação*, apresentando o modelo de *fogo na floresta* e estudando alguns fenômenos críticos. Para encerrarmos o capítulo, abordaremos o método do *caminho crítico* analisando uma rede de condutores e o problema de caminho mínimo dando ênfase ao *algoritmo de Dijkstra*.

No segundo capítulo apresentaremos alguns conceitos de fraturas e os dois modelos propostos. O primeiro modelo é baseado no método de caminho crítico enquanto que o segundo modelo tem como princípio fundamental o problema do caminho mínimo. Explicaremos cuidadosamente os algoritmos, mostrando imagens da evolução passo-a-passo do algoritmo e configurações finais dos modelos. Na parte de resultados, calcularemos a dimensão fractal das fraturas geradas e no modelo de caminho mínimo veremos como se comportam o primeiro e o último caminho mínimo.

No último capítulo, vamos concluir essa dissertação comparando os resultados dos modelos de fratura propostos. Veremos que há um íntima relação entre eles e outros trabalhos bem conhecidos. Sugestões e perspectivas também são delineadas objetivando a realização de trabalhos futuros nessa mesma linha de pesquisa.

2 *Alguns conceitos para o estado de meios desordenados*

Devido ao surgimento de supercomputadores, ao grande interesse da comunidade científica e às inúmeras aplicações na ciência, sistemas com estruturas desordenadas passaram a ser amplamente estudados desde a segunda metade do século XX [1, 2, 4]. Desde então, desenvolveram-se muitos algoritmos e técnicas cada vez mais eficientes para descrever vários fenômenos de sistemas desordenados. Neste capítulo, introduziremos conceitos de *geometria fractal*, definindo principalmente a *dimensão fractal* e o *método da contagem de caixas*. Daremos ênfase também à *teoria da percolação*, estudando o modelo de *fogo na floresta* e analisando fenômenos no ponto crítico. Para encerrarmos o capítulo, trataremos de *caminho crítico* e de *caminho de mínimo*, apresentaremos definições e resultados bastante conhecidos, porém extremamente importantes para a compreensão de várias características presentes nos modelos de fratura que definiremos nesse trabalho.

2.1 **Introdução à geometria fractal**

A geometria dos objetos naturais, de átomos à galáxias, é usualmente descrita empregando-se conceitos de *geometria Euclidiana*. Outras geometrias foram desenvolvidas, por físicos e matemáticos, para a descrição de fenômenos bem específicos [1]. Na segunda metade do século XX, *Mandelbrot* em vários trabalhos introduziu e estudou os conceitos da *geometria Fractal* [5–7], aplicando-a com sucesso em casos onde a geometria Euclidiana não se aplica. Por exemplo, quanto mede a costa litorânea da Noruega? Podemos ver na Fig. 2.1 que o litoral sul da Noruega tem muitos detalhes geográficos, tornando o problema difícil de se resolver. Na realidade, a costa litorânea sul da Noruega apresenta uma estrutura complexa chamada de *Fractal*. Podemos citar, devido à *Mandelbrot*, a seguinte definição de um fractal:

“Um fractal é por definição um conjunto para o qual a sua *dimensão de Hausdorff-Besicovitch* excede a sua *dimensão topológica*.”

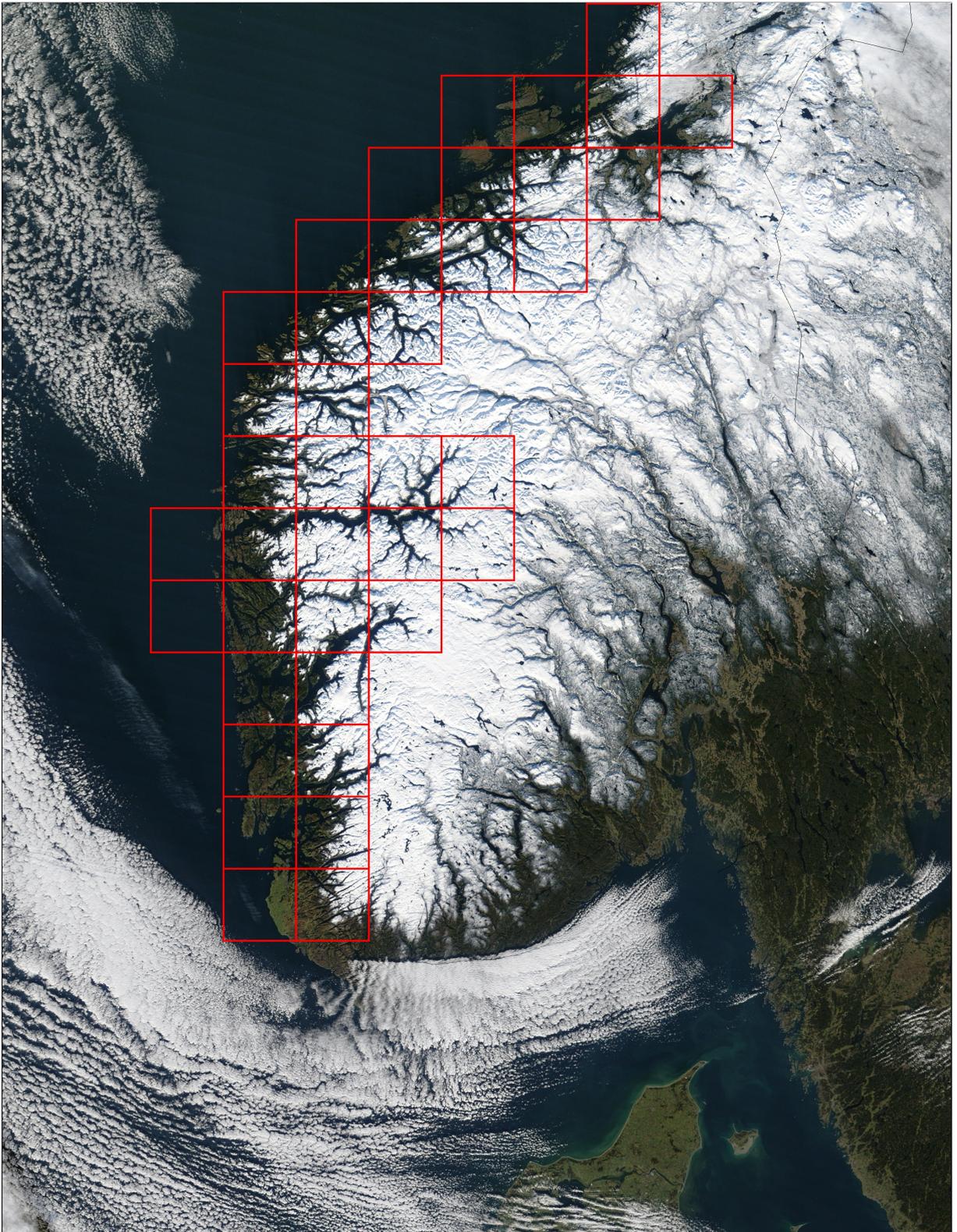


Figura 2.1: Imagem de satélite disponibilizada pela *NASA* da costa sul da Noruega mostrando a grande complexidade geográfica do local, com várias ilhas e rios que se ramificam até as montanhas cobertas por neve. A grade de quadrados indicada tem espaçamento $\delta \sim 50$ km.

A dimensão de Hausdorff-Besicovitch D é definida para o conjunto de pontos S como a dimensão crítica para a qual a d -medida M_d desse conjunto muda de zero à infinito:

$$M_d = \sum h(d) = \sum \gamma(d)\delta^d = \gamma(d)N(\delta)\delta^d \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{se } d > D, \\ \infty & \text{se } d < D. \end{cases} \quad (2.1)$$

Onde $N(\delta)$ é o número necessário de funções teste $h(d)$ para cobrir completamente o conjunto S , $\gamma(d)$ é um fator geométrico, d é a dimensão da medida e δ é o comprimento [1]. Geralmente, o valor de M_d para $d = D$ é finito, mas pode ser zero ou infinito. Na Física, a dimensão de Hausdorff-Besicovitch é comumente chamada de *dimensão fractal*. A dimensão topológica D_t é a dimensão habitual que é sempre um número inteiro.

Considerando este exemplo introdutório, imaginemos a costa litorânea coberta por um conjunto de $N(\delta)$ quadrados com arestas de comprimento δ como mostra a Fig. 2.1. No limite $\delta \rightarrow 0$, teremos:

$$N(\delta) \propto \frac{1}{\delta^D}. \quad (2.2)$$

Podemos chegar ao valor da dimensão fractal encontrando a inclinação do gráfico de $\ln N(\delta)$ em função de $\ln \delta$ como mostrado na Fig. 2.2. O resultado para a costa da Noruega é bastante conhecido, $D = 1.52$ [1]. Esse método é chamado de *contagem de caixas*.

Um dos exemplos mais tradicionais de curvas com dimensão de Hausdorff-Besicovitch maior do que a dimensão topológica é a *curva triádica de Koch* [1]. Sua construção começa com um segmento de linha de comprimento unitário $L(1) = 1$. Essa construção é a geração $n = 0$ e sua forma é chamada de *iniciador*. Prosseguimos trocando o iniciador por um *gerador*. Dessa forma, passamos para a geração $n = 1$ com cada novo iniciador tendo comprimento $L(1/3) = 4/3$ e assim por diante. Mostramos o comportamento para as primeiras gerações na Fig. 2.3. Observa-se que o comprimento de cada segmento de linha segue a relação:

$$\delta = 3^{-n} \Rightarrow n = -\frac{\ln \delta}{\ln 3}. \quad (2.3)$$

Como o número de segmentos obedece a relação:

$$N(\delta) = 4^n = 4^{\ln \delta / \ln 3} = \delta^{-D}. \quad (2.4)$$

Teremos que a dimensão Hausdorff-Besicovitch D é dada por:

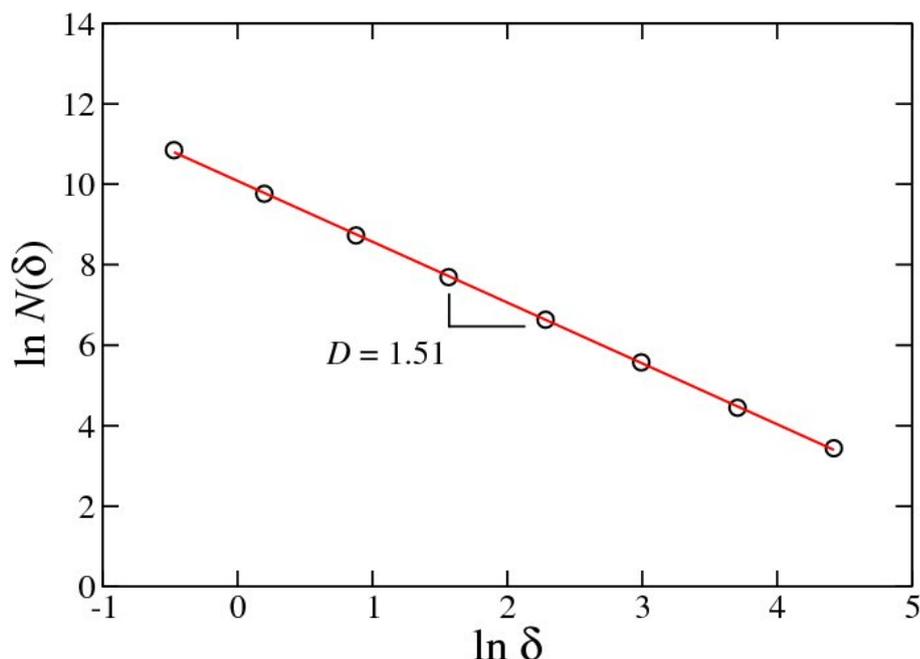


Figura 2.2: Gráfico do número de quadrados pertencentes à grade necessários para cobrir a costa sul da Noruega $N(\delta)$ em relação ao espaçamento da grade δ medido em quilômetros. Encontramos a dimensão fractal $D = 1.51$. Salientando que extraímos os pontos de um gráfico análogo [1] e fizemos uma regressão em lei de potência, por isso a imprecisão na segunda casa decimal.

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \simeq 1.26. \quad (2.5)$$

Considerando que a dimensão topológica da curva de Koch é $D_t = 1$, logo se $D > D_t$, significa que temos uma estrutura fractal. Além deste, existem outros fractais bem conhecidos, como a *curva de Peano*, os *tapetes de Sierpinski* e o *conjunto de Mandelbrot* [5–7].

Uma característica marcante nos fractais é seu comportamento invariante em escalas distintas [1]. Por exemplo, uma linha infinita é um conjunto especial de pontos no espaço. Se mudarmos o comprimento de escala, recuperaremos o mesmo conjunto de pontos. Acontecerá o mesmo, se a transladarmos. Logo, essa linha é *invariante* com respeito à escala e translação. Podemos dizer que ela é *auto-similar*. De forma mais rigorosa, podemos definir uma *transformação isotrópica* ou *transformação de similaridade* como uma transformação que leva os pontos $x = (x_1, \dots, x_E)$ no espaço de dimensão E para novos pontos $x' = (rx_1, \dots, rx_E)$ com o *mesmo* valor de taxa de escala r . Dessa forma, um fractal é auto-similar com respeito a taxa de escala r se o seu conjunto de pontos S é a união de N subconjuntos S_1, \dots, S_N com nenhuma sobreposição e cada um é congruente ao conjunto $r(S)$ obtido de S através da transformação de similaridade. O termo *congruente* significa que o conjunto de pontos S_i é idêntico ao conjunto

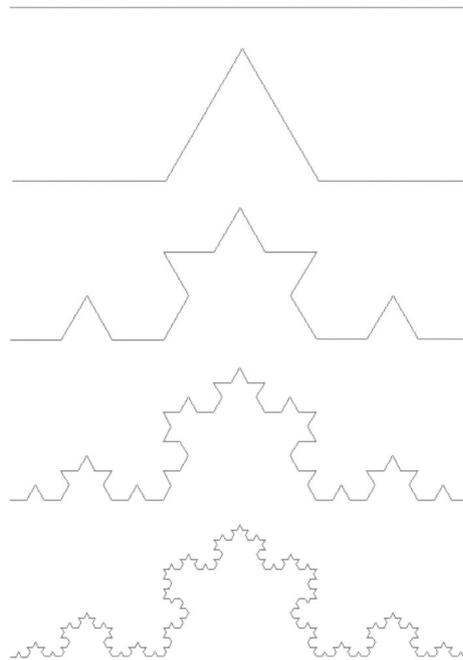


Figura 2.3: O comportamento das primeiras gerações da curva de Koch. Para a n -enésima geração o comprimento da curva é dada por $L(\delta) = \left(\frac{4}{3}\right)^n$.

de pontos $r(S)$ depois de possíveis translações e/ou rotações do conjunto.

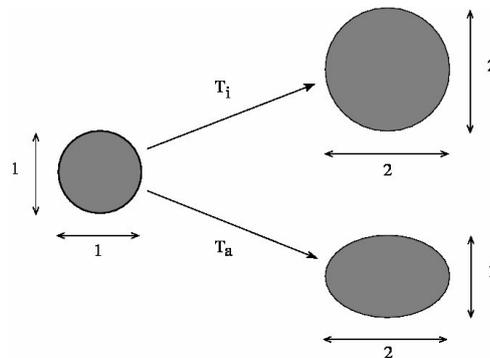


Figura 2.4: Exemplo de uma transformação isotrópica T_i e de uma transformação anisotrópica T_a em um círculo de raio unitário.

De forma análoga a auto-similaridade, podemos definir uma *transformação anisotrópica* ou *transformação de afinidade* que transforma um ponto $x = (x_1, \dots, x_E)$ em um novo ponto $x' = (r_1x_1, \dots, r_Ex_E)$, onde as taxas de escala r_1, \dots, r_E não são necessariamente todas iguais. Podemos exemplificar uma transformação de auto-similaridade quando transformamos um círculo em um círculo maior e uma transformação de auto-afinidade quando passamos de círculo para uma elipse como mostrado na Fig. 2.4. Assim, um fractal é *auto-afim* com respeito a um *vetor taxa* $\vec{r} = (r_1, \dots, r_E)$ se o seu conjunto de pontos S é a união de N subconjuntos S_1, \dots, S_N com

nenhuma sobreposição e cada um é congruente ao conjunto $\vec{r}(S)$ obtido de S através da transformação de afinidade. Semelhantemente, quando usamos *congruente* nesse caso, queremos dizer que o conjunto de pontos S_i é idêntico ao conjunto de pontos $\vec{r}(S)$ depois de possíveis translações e/ou rotações do conjunto.

2.2 Introdução à teoria da percolação

Uma das principais ferramentas de estudo para a desordem estrutural que veremos nessa seção é o *modelo de percolação*. Introduzido formalmente por *Broadbent e Hammersley* em 1957 usando conceitos de geometria e probabilidade [8], o objetivo desse trabalho era estudar um fluido escoando através de um meio desordenado. O termo percolação é relativo ao transporte da informação em um modelo binário de desordem, onde os elementos pertencem a uma rede e são distribuídos aleatoriamente. Os modelos de percolação mais conhecidos são *percolação de sítios* e *percolação de ligações*.

Uma das maiores e mais importantes características do modelo de percolação é a presença de uma transição de fase de segunda ordem na probabilidade de um elemento pertencer ao agregado infinito. Essa transição ocorre em um ponto crítico, chamado de p_c , quando variamos a probabilidade de ocupação da rede. Esse valor é limiar para acima do qual existe uma conectividade global na estrutura formada, ou seja, uma informação qualquer pode atravessar globalmente a rede.

Pela sua generalidade, há várias maneiras de tratarmos o modelo da percolação. Vamos usar a abordagem da percolação de sítios em $d = 2$, tendo em vista que as outras formas são apenas extensões com algumas peculiaridades. Definiremos uma rede de elementos ou sítios, onde a probabilidade de ocupação de cada elemento da rede, caso esteja preenchido, seja dada por p e por $(1 - p)$, caso esteja vazio. Na prática, geramos um número pseudo-aleatório no intervalo $[0, 1]$ segundo uma distribuição uniforme para cada sítio da rede. Se este número for menor do que p , consideraremos ele ocupado e caso contrário, consideraremos ele vazio. Eventualmente, encontraremos *agregados* de sítios na rede, consideraremos elementos participantes de um agregado aqueles que estão ocupados e são vizinhos de outros elementos que também estão ocupados. No modelo tradicional de percolação de sítios, é adotada a *vizinhança de Von Neuman* na identificação dos agregados [2], embora possamos ter variações desse problema com outras vizinhanças, Fig. 2.5 e 2.6, respectivamente. A medida que aumentamos a probabilidade de ocupação da rede, os agregados tendem a ficar maiores, por consequência, alguns podem se juntar formando um agregado maior ainda (Fig. 2.7a). Em um certo valor de probabilidade

p_c , teremos um agregado que se destaca dos demais, tanto pelo tamanho quanto pelo número ramificações que conecta lados opostos da rede (Fig. 2.7b). Nesse ponto, há a formação de um *agregado percolante*. Assim, a condição de percolação é que o transporte de uma dada informação não esteja confinado, ou seja, exista um caminho para que essa informação atravessasse toda a rede. Nessa probabilidade crítica, o processo de percolação revela uma transição de segunda ordem de um estado localmente conectado para um estado onde existe uma conectividade que se estende quase que globalmente pela rede. O valor de p_c pode ser encontrado exatamente para algumas geometrias de rede. Em outras, é necessário a utilização de métodos de simulação computacional para o seu cálculo aproximado (Tab. 2.1). Após o ponto crítico, as ramificações do agregado percolante passam rapidamente a atingir quase todas as regiões possíveis (Fig. 2.7c), culminando, em $p = 1$, com um agregado percolante ocupando completamente a rede de elementos.

Geometria da rede	Percolação de ligação	Percolação de sítios
Quadrada	$1/2^1$	0.5927
Triangular	$\simeq 0.652^1$	$1/2^1$
Hexagonal	$\simeq 0.3473^1$	0.6962
Cúbica	0.2488	0.3116

Tabela 2.1: Tabela das probabilidades críticas nos modelos de percolação de ligação e de sítios [2].

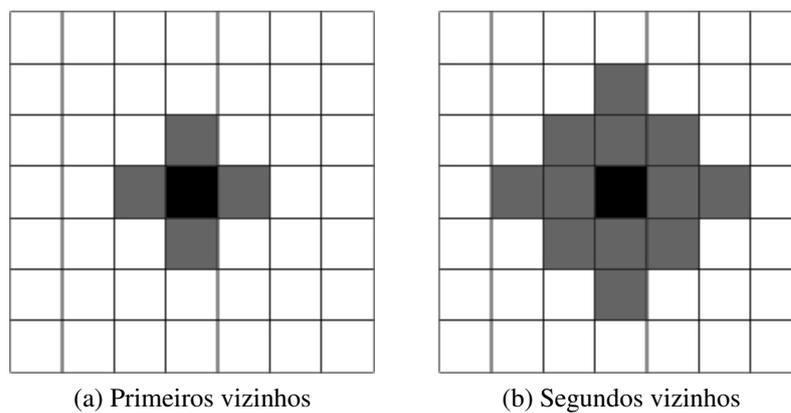


Figura 2.5: Vizinhanças de Von Neuman.

Na realidade, no limite termodinâmico, isto é, $L \rightarrow \infty$. Teremos que o agregado percolante se tornará um *agregado percolante infinito* (Fig. 2.8) e a probabilidade dele existir quando estamos abaixo de p_c tende a zero. No ponto de criticalidade, $p = p_c$, além do agregado percolante infinito, teremos também agregados menores. A distribuição dos tamanhos, ou seja, do número

¹Resultados com valores exatos.

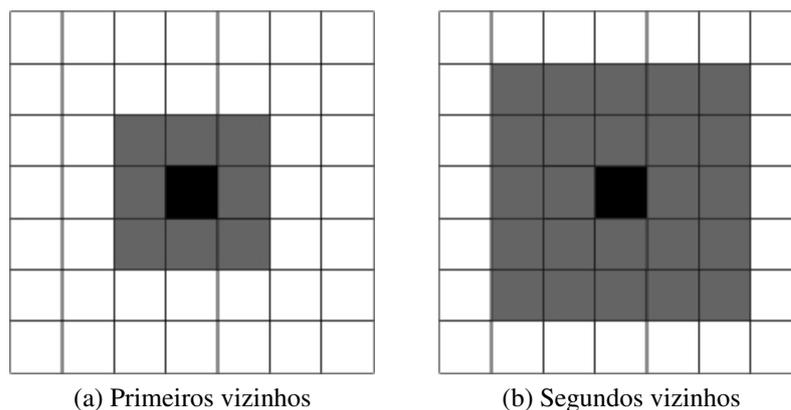


Figura 2.6: Vizinhanças de Moore.

de elementos de todos os agregados na probabilidade crítica segue uma lei de potência caracterizando a existência de agregados de todos os tamanhos possíveis [1]. Na prática, precisamos apenas de uma rede muito grande para observarmos um comportamento similar de uma rede infinita. Desse modo, chegamos ao agregado percolante infinito de forma computacionalmente viável.

Para uma melhor compreensão da criticalidade no modelo de percolação, vamos utilizar um modelo bastante conhecido, chamado *fogo na floresta* [2]. O seu objetivo é simular o processo de propagação de um “incêndio florestal” desejando obter o tempo de vida do incêndio t_v . Seja uma rede com elementos análogos ao modelo de percolação, supondo que a “floresta” seja representada por uma rede quadrada bidimensional de tamanho L , onde os elementos de tal rede têm uma probabilidade de ocupação p de serem “árvores” e $(1 - p)$ de estarem vazios. Como regra para a dinâmica de propagação, definiremos que todas as árvores incendiadas só podem transferir fogo para as suas vizinhas. Adotamos, primeiramente, a vizinhança de *Von Neuman* de primeiros vizinhos (Fig. 2.5a) e consideraremos que uma árvore só permanece queimando por apenas uma unidade de tempo. Cada unidade de tempo corresponde a uma varredura completa sobre todos os elementos da rede, sendo eles árvores ou não. Dessa maneira, o processo de atualização da rede é realizado a cada passo de tempo.

Inicialmente, atearemos fogo nas árvores da primeira linha e deixaremos o incêndio evoluir. A condição de extinção do incêndio será a não existência de árvores queimando dentro da floresta (Fig. 2.9a) ou caso o incêndio consiga percolar na rede (Fig. 2.9b), ou seja, atravessá-la e queimar alguma árvore da última linha. O tempo de vida do incêndio será dado pelo número de varreduras da rede até a extinção do fogo. Para uma análise geral, consideraremos o tempo de vida médio do incêndio $\langle t_v \rangle$ fazendo a média em cima do número de amostras N_a de redes de tamanho L variando os valores da probabilidade de ocupação p (Fig. 2.10).

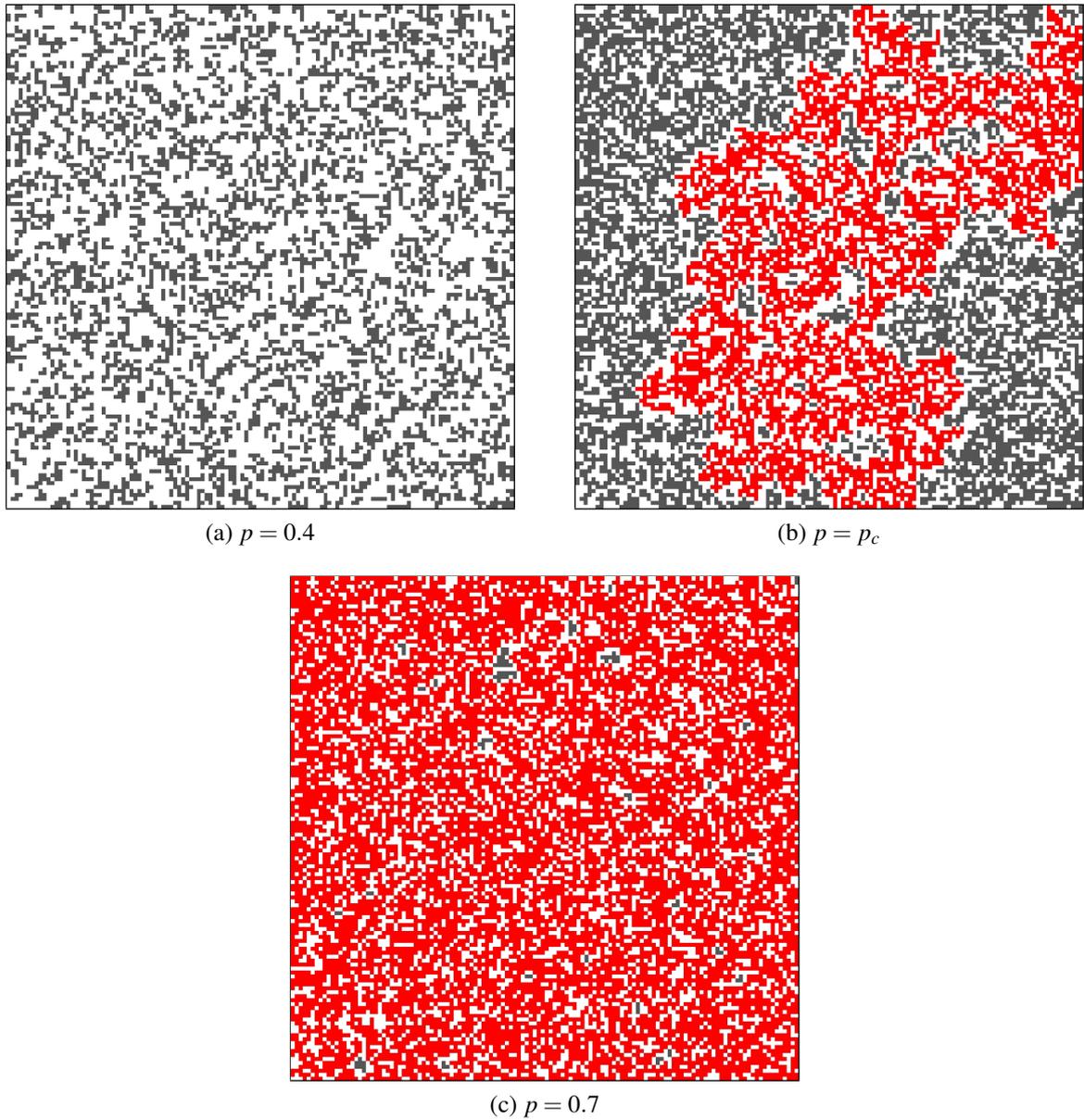


Figura 2.7: Redes de tamanho $L = 128$ para diferentes valores da probabilidade de ocupação p . O agregado percolante está em vermelho e os agregados isolados estão em cinza.

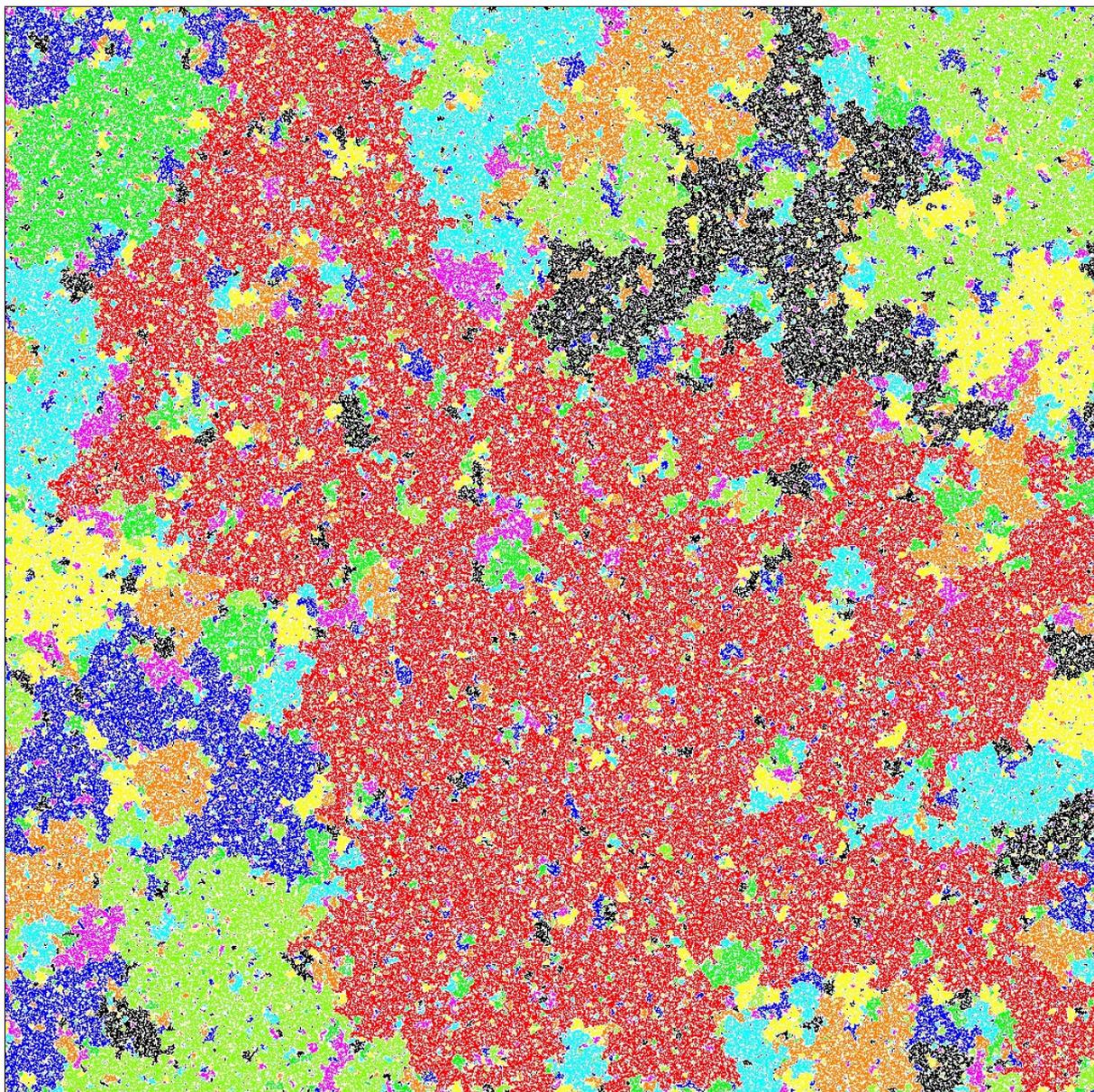


Figura 2.8: Rede de tamanho $L = 1024$ para a probabilidade crítica p_c . O agregado percolante infinito está em vermelho e os agregados isolados estão nas outras cores.

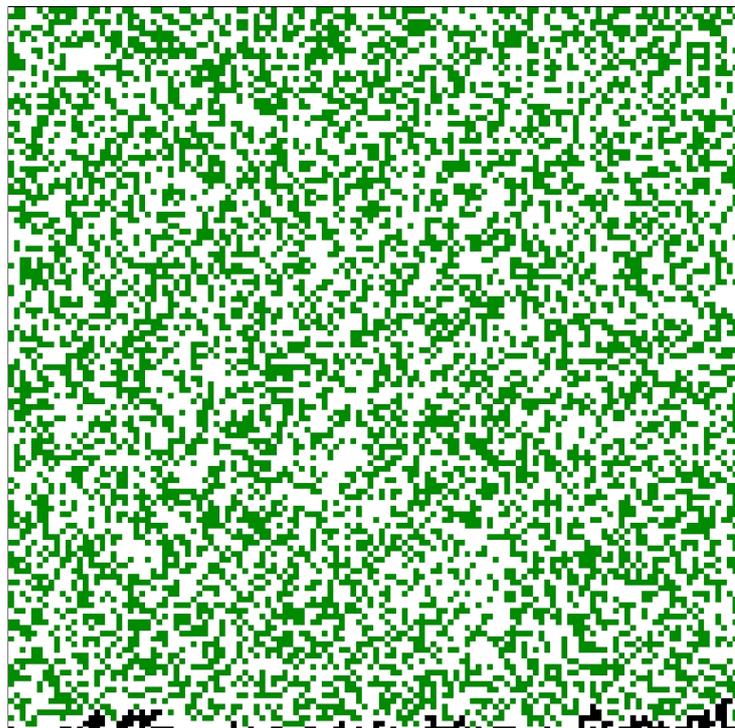
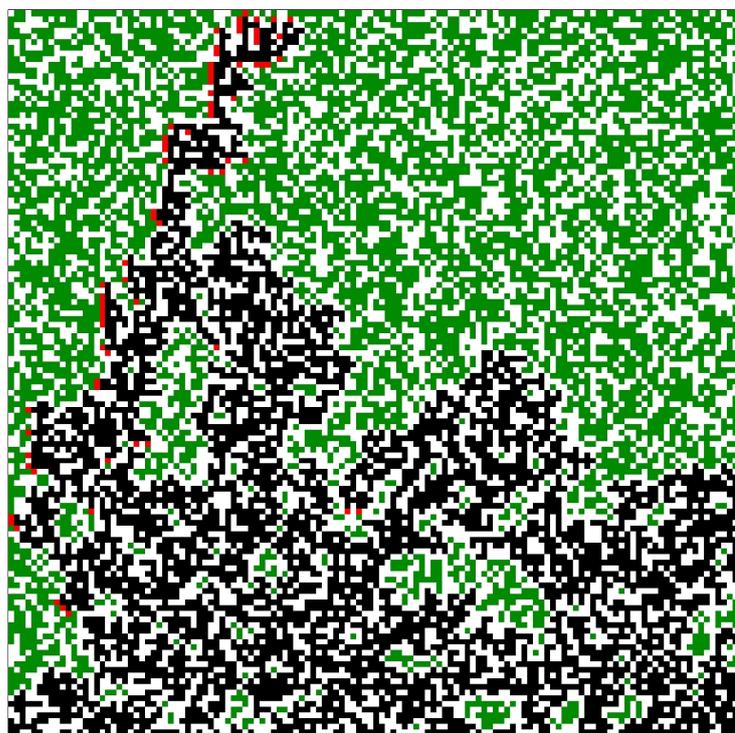
(a) $p = 0.4$ (b) $p = p_c$

Figura 2.9: Modelo tradicional de fogo na floresta para uma rede de tamanho $L = 128$. Os sítios verdes representam as árvores, os vermelhos representam as árvores queimando e os sítios pretos representam as árvores queimadas.

Para $p < p_c$, o tempo de vida médio do incêndio é muito pequeno, pois, como existem poucas árvores na floresta, o fogo não consegue se propagar muito. Mas, quando passamos a aumentar p , o fogo começa a se alastrar pela floresta. Na probabilidade crítica, $p = p_c$, o tempo de vida médio do incêndio $\langle t_v \rangle$ alcança seu máximo. Nesse ponto, a floresta apresenta uma estrutura análoga ao agregados percolantes, com muitas ramificações e com árvores conectando os lados opostos da floresta. Devido à essa estrutura, o fogo pode atingir regiões remotas, fazendo com que o tempo de vida médio do incêndio se prolongue. A probabilidade crítica, p_c , nesse caso é igual a 0.5927 [2]. Para $p > p_c$, o tempo de vida médio passa a diminuir novamente, pois a densidade de árvores da floresta passa a ser suficientemente alta para permitir que o fogo se propague rapidamente. No limite $L \rightarrow \infty$, em $p = p_c$, a floresta se comportará da mesma maneira que o agregado percolante infinito, fazendo com que o tempo de vida médio divirja, isto é, $\langle t_f \rangle \rightarrow \infty$. A ausência de simetria de $\langle t_v \rangle$ nas proximidades do ponto crítico também ilustra uma das características da transição fase de segunda ordem, com completa analogia à processos bem conhecidos da *Física Estatística* [9].

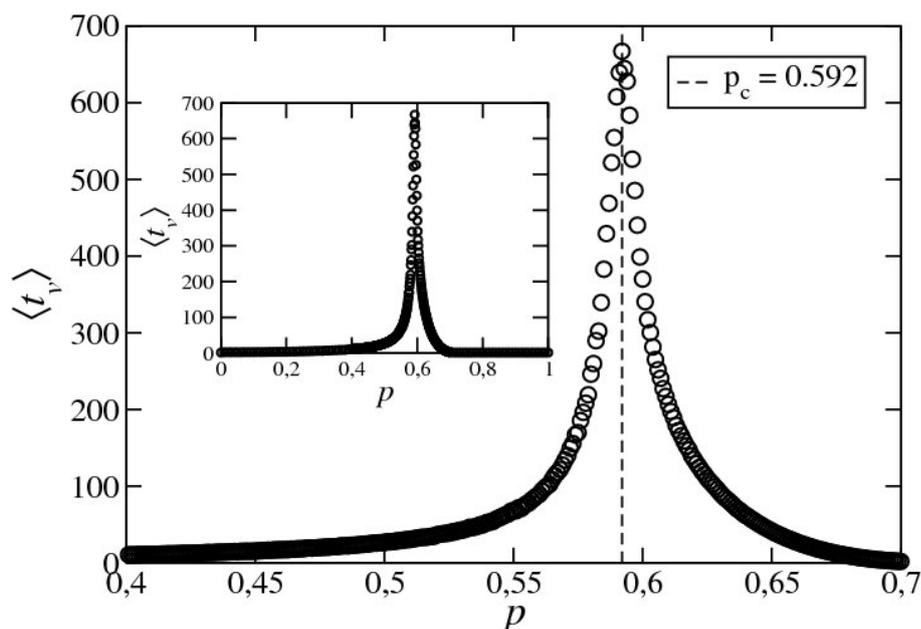


Figura 2.10: Gráfico do tempo de vida médio $\langle t_v \rangle$ com a vizinhança de Von Neuman de primeiros vizinhos em relação a probabilidade de ocupação p . Para rede de tamanho $L = 1024$, adotamos 100 amostras para pontos distantes e refinamos com 1000 amostras para pontos próximos ao ponto crítico. Estimamos a probabilidade crítica como a probabilidade onde encontramos o maior valor de $\langle t_v \rangle$. Definimos a probabilidade crítica como o ponto onde o tempo de vida é maior. Nesse caso, encontramos $p_c = 0.592$.

Como um exemplo de extensão do modelo tradicional de fogo na floresta vamos permitir que as árvores incendiadas passem a poder transferir fogo para uma vizinhança maior. Podemos interpretar essa modificação como uma floresta onde as copas das árvores são maiores que as

copas das árvores na floresta anterior, de forma que elas se entrelacem mais umas com as outras. Assim, o fogo terá um campo de propagação bem maior. Vamos fazer isso adotando a vizinhança de Von Neuman de segundos vizinhos (Fig. 2.5b). Toda a análise qualitativa para o modelo tradicional em relação ao tempo de vida médio continua válida. A única diferença é que o valor máximo de $\langle t_v \rangle$ é deslocado para a esquerda em relação ao modelo com primeiros vizinhos (Fig. 2.11). Ou seja, o fogo se propaga de forma mais rápida. A probabilidade crítica, p_c , para esse modelo é igual 0.4072 [2].

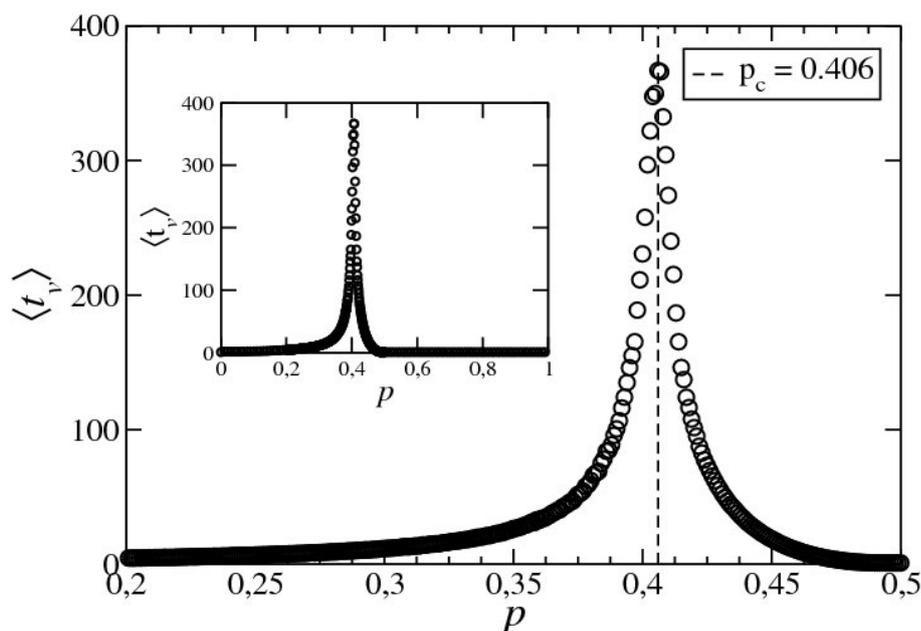


Figura 2.11: Gráfico do tempo de vida médio $\langle t_v \rangle$ com a vizinhança de Von Neuman de segundos vizinhos em relação a probabilidade de ocupação p . Para rede de tamanho $L = 1024$, adotamos 100 amostras para pontos distantes e refinamos com 1000 amostras para pontos próximos ao ponto crítico. Estimamos a probabilidade crítica como a probabilidade onde encontramos o maior valor de $\langle t_v \rangle$. Nesse caso, encontramos $p_c = 0.406$.

Uma grandeza importante no estudo da percolação é o *número de elementos* ou a *massa* pertencente ao maior agregado $M(L, p)$. Observam-se comportamentos diferentes para $M(L, p)$ dependendo da probabilidade de ocupação p da rede. Para $p < p_c$, o número de elementos pertencentes ao maior agregado cresce de forma logarítmica com o tamanho da rede L . Na criticalidade, $p = p_c$, observamos que o número de elementos pertencentes ao maior agregado tem um comportamento em *lei de potência* $M(L, p) \sim L^{D_f}$, com $D_f = 1.89$ (Fig. 2.12). A partir desse ponto, o maior agregado torna-se também o agregado percolante. Esta relação indica a estrutura peculiar do agregado percolante na criticalidade, com várias ramificações e com invariância de escala. Essa estrutura é então identificada como um *fractal*. Para $p > p_c$, o número de elementos do agregado percolante $M(L, p)$ é proporcional ao número total de

elementos da rede L^2 . Matematicamente, tais fatos podem ser expressos como :

$$M(L, p) \propto \begin{cases} \ln L & \text{se } p < p_c; \\ L^{D_f} & \text{se } p = p_c; \\ L^2 & \text{se } p > p_c. \end{cases} \quad (2.6)$$

Nesse ponto, podemos empregar um conceito muito comum no cálculo de dimensões fractais, ou seja, o *raio de giração* R_g . Sem perda de generalidade, podemos definí-lo para uma rede de percolação da seguinte forma :

$$R_g^2 = \frac{\sum_{i=1}^{M(L,p)} |\vec{r}_i - \vec{r}_o|^2}{M(L,p)}, \quad (2.7)$$

onde $M(L, p)$ é o número de elementos do agregado, \vec{r}_i é a posição do i -ésimo elemento e a posição do centro de massa \vec{r}_o é dada por,

$$\vec{r}_o = \frac{\sum_{i=1}^{M(L,p)} \vec{r}_i}{M(L,p)}. \quad (2.8)$$

Se na criticalidade, $p = p_c$, o agregado percolante é um fractal, teremos :

$$M(\infty, p_c) \propto R_g^{D_f}. \quad (2.9)$$

A técnica que utilizamos para identificar o agregado percolante na rede, foi o método de *floresta de conjuntos disjuntos* [3]. Dada uma rede vazia, começaremos a inserir sítios nela, eventualmente, haverá o surgimento de sítios vizinhos. Nessa situação, uniremos esses sítios em um agregado, tendo em vista que cada agregado tem um sítio classificado como “nó”, ou seja, todos os sítios daquele agregado estão “amarrados” ou “apontando” para ele. Continuando o preenchimento da rede, chegaremos à um ponto, que uniremos sítios pertencentes à agregados distintos, ou seja, ambos têm nós diferentes. Nesse caso, uniremos os dois agregados em um novo agregado cujo o novo nó será o nó do agregado formador de maior classe ou, se as classes forem iguais, pegaremos qualquer um. Essa classe é definida como quantas vezes aquele nó juntou agregados. Quando quisermos saber a que agregado um determinado sítio pertence, faremos uma compressão de caminho, ou seja, procuraremos o “nó” de um sítio, a partir do seu “apontador” e dado esse sítio apontado, procuremos o seu apontador e assim por diante. Pararemos essa cadeia de busca quando um sítio for o apontador dele mesmo, ou seja, ele é o próprio nó. Além disso, podemos contar quantos elementos há em cada agregado, já que temos

o conhecimento das posições dos sítios. Há outros métodos similares de contagem de agregados na literatura [2, 10].

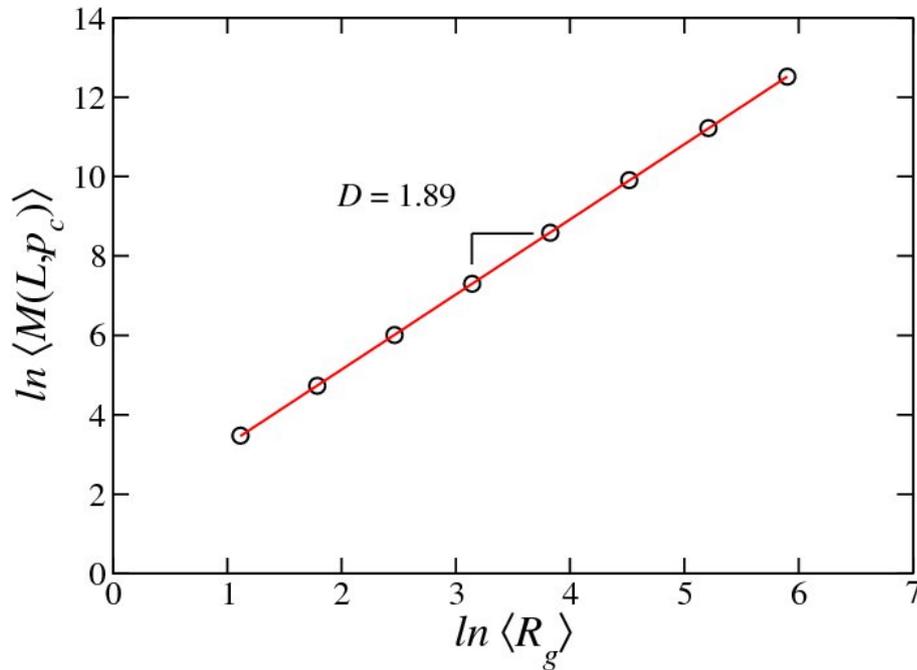


Figura 2.12: Gráfico do número médio de elementos do agregado percolante no ponto crítico $\langle M(L, p_c) \rangle$ em relação ao raio de giração médio $\langle R_g \rangle$ para redes de tamanho até $L = 1024$. Adotamos 1000 amostras para a realização das médias. Encontramos $D = 1.89$ para a dimensão fractal do agregado percolante [2].

Nesse mesmo contexto, podemos definir também a fração de elementos pertencentes ao agregado percolante $P(L, p)$ como a razão entre o número de elementos pertencentes ao maior agregado $M(L, p)$ e o número total de elementos da rede L^2 , ou seja,

$$P(L, p) = \frac{M(L, p)}{L^2}. \quad (2.10)$$

Para redes grandes, ou matematicamente, no limite $L \rightarrow \infty$, podemos escrever,

$$P(\infty, p) = \lim_{L \rightarrow \infty} P(L, p) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{M(L, p)}{L^2}. \quad (2.11)$$

Desse modo, para a Eq.(2.11) ser não nula, o número de elementos pertencentes ao agregado percolante $M(L, p)$ deve escalar da mesma forma que o número de elementos da rede L^2 . De forma mais clara, temos que:

$$M(L, p) \propto L^2. \quad (2.12)$$

Para valores pequenos da probabilidade de ocupação p , não há agregado percolante, ou seja, $P(\infty, p) = 0$. Em torno da probabilidade crítica p_c , observa-se um comportamento em lei de potência para $P(\infty, p)$,

$$P(\infty, p) \propto |p - p_c|^\beta, \quad (2.13)$$

onde, $\beta = 5/36 \simeq 0.138$ [2]. Para a Fig. (2.13) ilustramos o comportamento de $P(L, p)$ através de simulação computacional, determinando para vários valores da probabilidade de ocupação p o número de elementos do maior agregado $M(L, p)$. Para valores da probabilidade de ocupação acima de p_c , o agregado percolante é homogeneamente distribuído e ocupa praticamente toda a rede. Em $p = 1$, ele ocupará completamente toda a extensão da rede, isto é, $P(\infty, p) = 1$. Para pequenos valores da probabilidade de ocupação, $P(L, p)$ é completamente desprezível. A medida que aumentamos o valor de p , a fração de elementos pertencentes ao agregado percolante ainda é praticamente nula e há um crescimento abrupto no valor de $P(L, p)$ nas probabilidades de ocupação próximas à p_c . Para valores acima da probabilidade crítica, $P(L, p)$ torna-se praticamente linear até $P(L, 1) = 1$. Notamos também que para redes cada vez maiores a mudança de comportamento de $P(L, p)$ fica ainda mais abrupta. No limite termodinâmico, $L \rightarrow \infty$, a transição de $P(L, p)$ será exatamente na probabilidade crítica p_c .

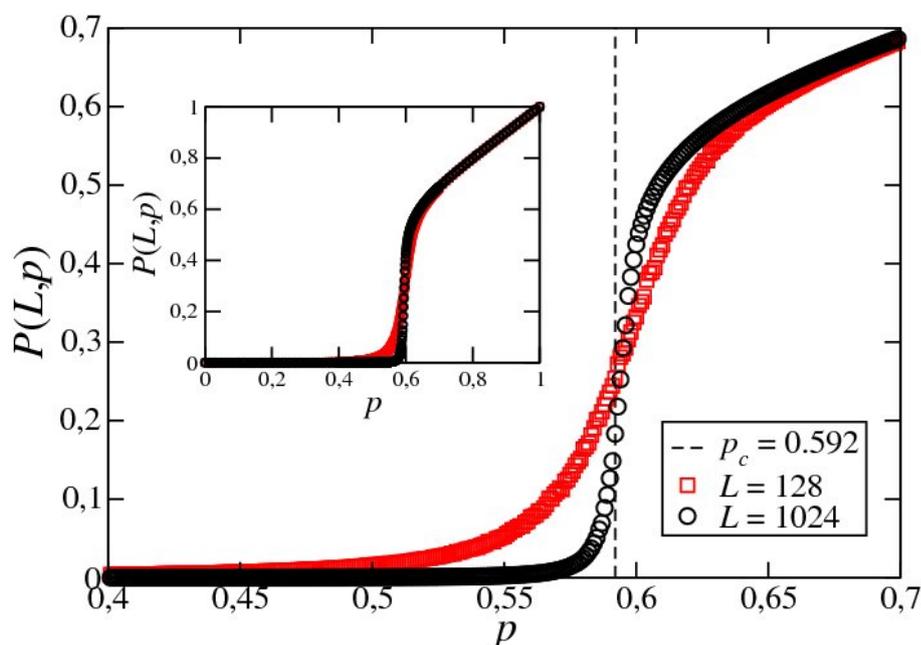


Figura 2.13: Gráfico da fração de elementos pertencentes ao agregado percolante $P(L, p)$ em função da probabilidade de ocupação p . Para redes de tamanho $L = 128$ e $L = 1024$, fizemos 100 amostras para pontos distantes e refinamos com 1000 amostras para pontos próximos ao ponto crítico.

Em suma, a teoria da percolação é muito abrangente devido sua *universalidade*, pois os pontos críticos dependem da topologia da rede e os expoentes críticos só dependem da dimensão. Além do estudo de outros parâmetros relevantes, tais como o comprimento de correlação e a condutividade [1, 2].

2.3 Método do caminho crítico

Um outro conceito que apresentaremos neste capítulo diz respeito ao método do *caminho crítico*, proposto inicialmente por *Ambegaokar, Halperin e Langer* em 1971 [11] e complementado por *Katz e Thompsom* [12, 13]. Imaginemos uma rede de condutores com condutâncias aleatórias submetido à uma diferença de potencial ΔV (Fig. 2.14), rearranjaremos esse sistema da seguinte forma, tiraremos todos os condutores da rede e os realocaremos de forma crescente em relação ao valor de sua condutância, ou seja, o primeiro condutor será aquele que tiver menor valor de condutância e assim por diante. Faremos esse processo de realocação até o surgimento de um agregado percolante conectando as partes superior e inferior da rede, nesse momento surgirá um corrente elétrica no circuito. Esse último condutor inserido é um elemento com uma característica bastante especial, ele promove uma conectividade global no sistema, ou seja, se tirarmos ele não haverá um agregado percolante e conseqüentemente não existirá mais corrente elétrica. Desse modo, podemos afirmar que o valor numérico da condutância daquele condutor é aproximadamente igual ao valor da condutância equivalente da rede. As idéias desse método também são válidas para o cálculo da permeabilidade de rochas fraturadas [4].

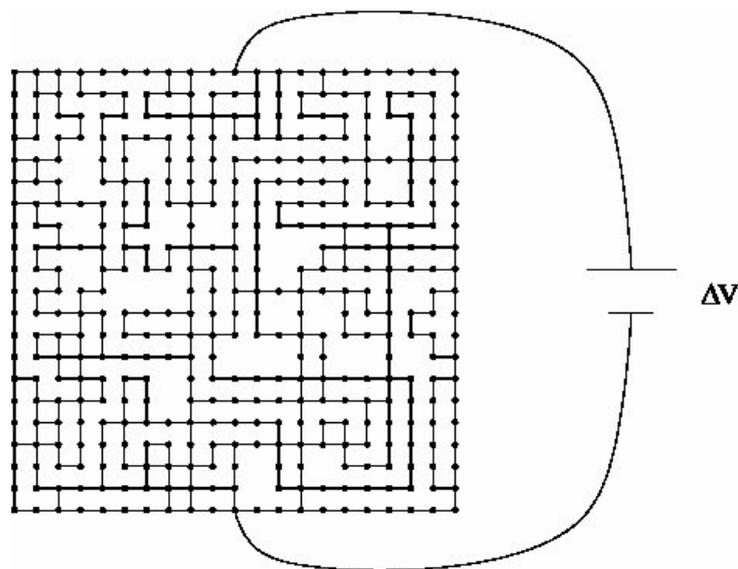


Figura 2.14: Exemplo de uma rede de condutância submetida à uma diferença de potencial ΔV .

2.4 O problema do caminho mínimo

Para encerrarmos esse capítulo, abordaremos o problema do *caminho mínimo*, também conhecido como o problema do *caminho mais curto* [3]. Imaginemos duas cidades, A e B . Suponhamos que existam algumas rotas que ligam essas cidades e que cada rota é composta por vários trechos. Conhecemos também, mediante um mapa, a distância entre dois trechos adjacentes de todas as rotas e desejamos saber qual o caminho de menor distância entre estas duas cidades. Uma maneira trivial de resolver o problema seria tentarmos todos os caminhos possíveis e descobrirmos o mais curto. No entanto, quando o número de rotas começar a se tornar muito grande, esta forma de solução se tornará inviável. Logo, teremos que começar a restringir mais o problema para podermos resolvê-lo, como por exemplo, excluindo ciclos nas rotas ou excluindo uma rota que se afasta demais das cidades. São idéias como essas que os vários algoritmos de caminhos mais curtos utilizam para resolver o problema de maneira mais eficiente.

Na *Teoria de grafos* [3], o *problema do caminho mais curto* ou *problema de custo mínimo* consiste na minimização do custo da travessia entre dois vértices de um grafo. Matematicamente, seja $G = (V, E)$ um grafo dirigido, onde V é o conjunto dos vértices v e E é o conjunto das arestas (u, v) . Considerando que cada aresta (u, v) seja orientada do vértice u para o vértice v e que tenha função peso $w(u, v) : E \rightarrow \mathfrak{R}$, o peso do caminho $p = \langle v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k \rangle$ será a soma dos pesos de todas as arestas constituintes,

$$w(p) = w(v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k) = \sum_{i=1}^k w(v_{i-1}, v_i). \quad (2.14)$$

Desse modo, levando em conta a relação anterior, podemos definir o *peso do caminho mais curto* δ de u para v como sendo:

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \min\{w(p) : u \xrightarrow{p} v\} & \text{se há um caminho de } u \text{ para } v, \\ \infty & \text{de outro modo.} \end{cases} \quad (2.15)$$

Logo, o *caminho mais curto* do vértice u para o vértice v é definido como qualquer caminho p com o peso $w(p) = \delta(u, v)$.

No exemplo mostrado na Fig. (2.15), podemos considerar os vértices como as intersecções entre os trechos, as arestas como os trechos e os pesos como os comprimentos de cada trecho. Dependendo do problema, os pesos das arestas podem representar qualquer outra quantidade que se acumula, por exemplo, de forma linear ao longo do caminho.

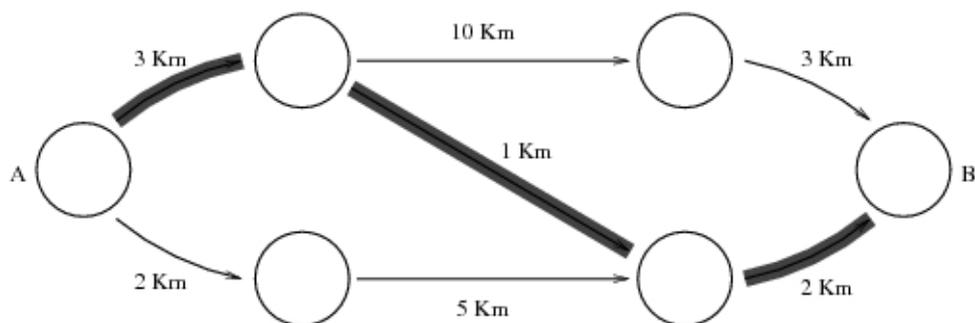


Figura 2.15: Grafo das rotas das cidades A e B. Os círculos são os vértices, as setas são as arestas e os pesos são os números suspensos. As arestas sombreadas formam o caminho mais curto.

Há variações do problema de caminho mais curto. As principais são as seguintes :

- Encontrar o caminho mais curto de um vértice fonte $s \in V$ para todos os vértices $v \in V$,
- Encontrar o caminho mais curto para um vértice destino $t \in V$ de todos os vértices $v \in V$,
- Encontrar o caminho mais curto de um vértice $u \in V$ para um vértice $v \in V$,
- Encontrar o caminho mais curto para todas as combinações do vértice $u \in V$ com o vértice $v \in V$.

Em todas estas variações, os pesos das arestas podem ser positivos e/ou negativos. Para pesos positivos, o caminho mais curto de um vértice u para um vértice v é sempre bem definido. Para pesos negativos, o caminho mais curto só é bem definido caso não existam ciclos de pesos negativos alcançáveis do vértice u . Alguns algoritmos, como o *Algoritmo de Dijkstra* [3], consideram que todos os pesos são sempre positivos, outros, como o *Algoritmo de Bellman-Ford* [3], consideram a possibilidade de haver pesos negativos. Neste caso, o caminho mais curto é encontrado caso não existam ciclos de pesos negativos alcançáveis da fonte. Geralmente, caso haja tais ciclos, eles são detectados.

Para uma análise completa do problema, além de determinarmos o peso do caminho mais curto, queremos também identificá-lo. Sendo assim, dado o grafo $G = (V, E)$, iremos supor que para cada vértice $v \in V$ existe um *antecessor* ou *predecessor* $\pi[v]$. Esse antecessor será nulo ou igual ao vértice anterior à v . Dessa forma, teremos uma *árvore de caminhos mais curtos* com raiz no vértice s . Essa árvore pode ser interpretada como um *sub-grafo de antecessores* $G' = (V', E')$, onde $V' \subseteq V$ é um conjunto de vértices que são alcançáveis do vértice s e $E' \subseteq E$ é o conjunto de arestas desses vértices pertencentes à V' . Logo, qualquer caminho do vértice s para o vértice v em G' é um caminho mais curto do vértice s para o vértice v em G .

Conforme já mencionado, o Algoritmo de Dijkstra resolve o problema do caminho mais curto entre vértices de um grafo dirigido, cujos pesos das arestas sejam não-negativos. Sua técnica principal é a *relaxação*, processo baseado em um teste de melhoramento do caminho mais curto para cada vértice. Esse teste consiste em diminuir repetidamente um limite superior no próprio peso do caminho mais curto de cada vértice até que esse limite superior se torne igual ao peso do caminhos mais curto existente. Esse algoritmo é bastante simples, muito usado ainda hoje em vários campos de estudo e tem uma ótima performance computacional. A seguir explicaremos com detalhes o algoritmo de Dijkstra.

Dado o grafo $G = (V, E)$ definido anteriormente, suponhamos nesse momento que todas as arestas (u, v) tenham pesos não-negativos, ou seja, $w(u, v) \geq 0$. Dado um vértice fonte s , definiremos os seguintes conjuntos:

- S : conjunto de todos os vértices v que já tem o *caminho mais curto final* determinado,
- Q : $Q = V - S$,

os vetores,

- $d[v]$: custo do caminho entre os vértices s e v ,
- $\pi[v]$: vértice antecessor ao vértice v .

Inicialmente, como partiremos do vértice s , faremos $d[s] = 0$. Como não sabemos nenhum outro caminho para qualquer outro vértice v , tomaremos $d[v] = \infty$ ($\forall v \neq s$), pois a pior hipótese é que tal caminho não exista e o seu custo torne-se infinito. Definiremos também todos os antecessores como nulos, $\pi[v] = 0$ ($\forall v \in V$). Podemos expressar essas definições em pseudo-código da seguinte forma:

INICIALIZA-FONTE-UNICA (G, s)

```

1  Para cada vértice  $v \in V[G]$ 
2    Faça
3       $d[v] \leftarrow \infty$ 
4       $\pi[v] \leftarrow NULO$ 
5   $d[s] \leftarrow 0$ 

```

A seguir, relatamos a técnica de relaxação. Dada uma aresta (u, v) , atualizamos $d[v]$ e $\pi[v]$ se o caminho mais curto para o vértice v poder ser melhorado por um outro que passe através do

vértice u . Dessa forma, poderemos descrever o processo de relaxação de uma aresta qualquer como,

RELAXE (u, v, w)

```

1  Se  $d[v] > d[u] + w(u, v)$ 
2      Então
3           $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$ 
4           $\pi[v] \leftarrow u$ 

```

Após a inicialização, fazemos $Q = V$, pois $S = \{0\}$. Começaremos a extrair o vértice u de menor custo de Q e aplicaremos a relaxação em cada aresta do vértice u com os seus adjacentes. Atualizaremos então S e Q , respeitando sempre a relação $Q = V - S$. Continuaremos com esse processo até $Q = \{0\}$, pois nesse ponto $S = V$. O resultado do algoritmo é o conhecimento do custo do caminho mais curto final $d[v]$ e dos antecessores $\pi[v]$ dos vértice v , para todos os vértice do grafo. Dessa maneira, o Algoritmo de Dijkstra, combinando as partes de inicialização e de relaxação ficará da seguinte forma:

DIJKSTRA (G, w, s)

```

1  INICIALIZAR-FONTE-UNICA ( $G, s$ )
2   $S \leftarrow 0$ 
3   $Q \leftarrow V[G]$ 
4  Enquanto  $Q \neq 0$ 
5      Faça
6           $u \leftarrow \text{EXTRAIR-MINIMO}(Q)$ 
7           $S \leftarrow S \cup \{u\}$ 
8          Para cada vértice  $v \in \text{Adj}[u]$ 
9              Faça
10                 RELAXE ( $u, v, w$ )

```

onde, $\text{Adj}[u]$ representam todos os vértices adjacentes a u .

Utilizamos uma estrutura de ordenamento de dados baseada em uma árvore binária, chamada “heap”, para calcular os mínimos do conjunto de Q no algoritmo de Dijkstra. Dado um conjunto qualquer de números a serem ordenados, pegaremos o primeiro valor desse conjunto e o colocaremos na primeira posição de uma lista de prioridades. Depois tomaremos o segundo

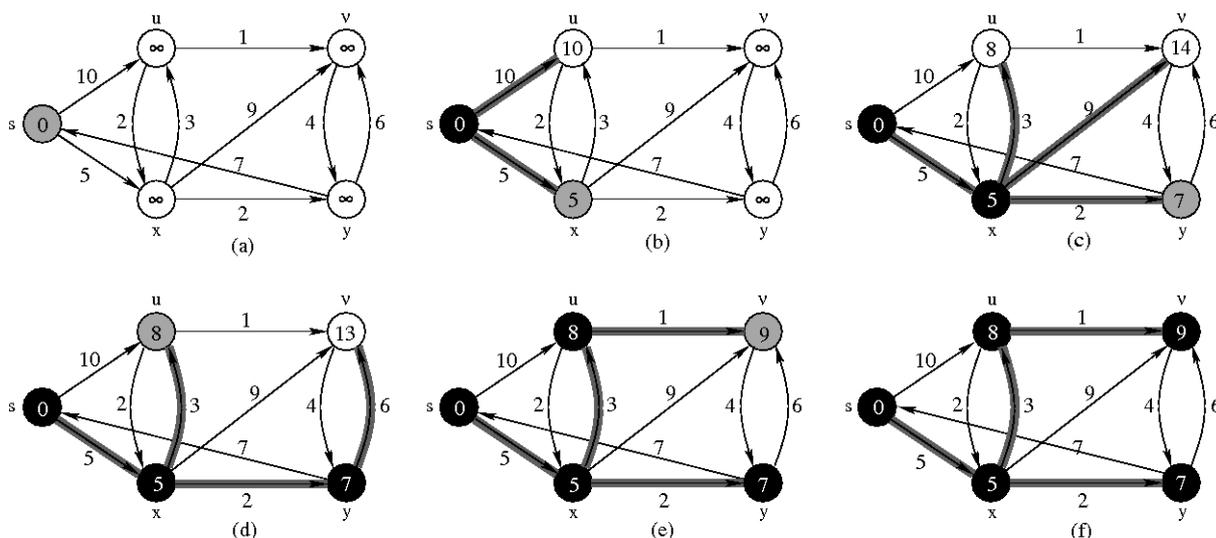


Figura 2.16: Exemplo de uma execução passo à passo do algoritmo de Dijkstra para um dado grafo. Dado um vértice fonte s , o algoritmo encontrará todos os caminhos mais curtos para cada vértice $v \in V$. O caminho mais curto estimado é o valor dentro de cada vértice. Se uma aresta qualquer (u, v) está sombreada, então $\pi[v] = u$. Os vértices brancos pertencem ao conjunto Q , os vértices sombreados são aqueles que tem menor valor no conjunto Q e os vértices pretos pertencem ao conjunto S [3].

valor, colocaremos ele na segunda posição da lista, mas se ele tiver valor menor que o primeiro, trocamos eles de lugar. Pegaremos então o terceiro valor, colocaremos ele em terceiro lugar na lista, compararemos com o primeiro e faremos a troca de posições, caso a mesma condição anterior seja satisfeita. Pegaremos o quarto valor, o colocaremos na quarta posição da lista de prioridades, compararemos com o valor da segunda posição e verificaremos a mesma condição de troca de lugar. Caso ele suba para o posição do segundo, vamos compará-lo com o primeiro e verificar a condição de troca de posições. Assim, faremos isso para todos os elementos inseridos na estrutura (Fig. 2.17). Logo, sempre teremos o primeiro elemento da lista de prioridades ou do topo da estrutura de pirâmide como sendo o menor de todos os valores do conjunto.

Caso tiremos algum valor da estrutura, teremos que rearranjá-la colocando o último valor da lista de prioridades em primeiro lugar, compararemos ele com o elemento de menor valor entre seus dois sucessores na estrutura, nesse caso, o segundo e o terceiro da lista. Caso ele seja maior, trocamos as posições e assim por diante. Dessa forma, conseguiremos manter o menor elemento na primeira posição da lista.

Um outro caso possível, seria a troca de um valor na estrutura por outro qualquer. Nesse caso, teríamos que comparar se o valor do elemento trocado i é menor do que o valor do seu elemento predecessor, $[i/2]$, onde os colchetes simbolizam o valor inteiro da divisão. Caso seja menor, trocamos as suas posições, e assim sucessivamente. Pararemos esse processo, quando

ele não trocar mais os elementos de lugar ou quando já tivermos chegado ao topo da estrutura.

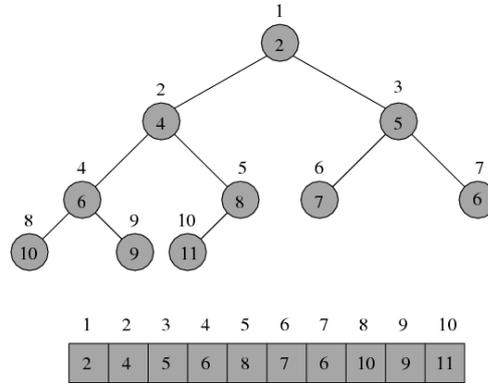


Figura 2.17: Exemplo de uma estrutura de pirâmide de uma “heap de mínimo” e de sua lista de prioridades. Os números no interior dos círculos são pertencentes ao conjunto que vai ser organizado e os números de fora do círculos são suas respectivas posições na lista de prioridade. Notamos que o primeiro elemento dessa estrutura é sempre o menor valor do conjunto de números formadores.

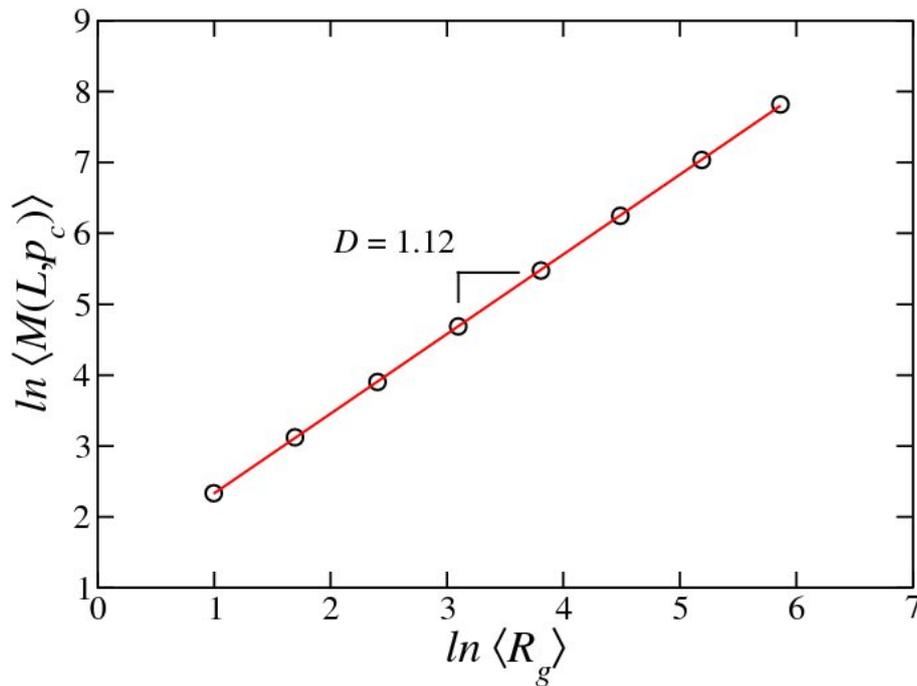


Figura 2.18: Gráfico do número médio de elementos do menor caminho do agregado percolante no ponto crítico $\langle M(L, p_c) \rangle$ em relação ao raio de giração médio $\langle R_g \rangle$ para redes de tamanho até $L = 1024$. Adotamos 1000 amostras para realizarmos as médias. Encontramos $D = 1.12$ para a dimensão fractal menor caminho do agregado percolante.

Como exemplo de uma aplicação simples, usaremos o algoritmo de Dijkstra em um agregado percolante em $d = 2$ para o cálculo da dimensão fractal do caminho mais curto como mostrado na Fig. (2.18). O resultado obtido está em boa concordância com o relatado na [14],

nomeadamente, $D_f = 1.13$. Existem inúmeras aplicações do problema do caminho mais curto na ciência e na engenharia, desde sistemas com estruturas desordenadas até redes de computadores [3].

Em suma, todos os conceitos e técnicas descritos serão utilizados exhaustivamente nos modelos de fratura que definiremos no próximo capítulo.

3 *Modelos de fratura*

Sabemos que *fraturas* estão presentes em vários campos de estudo [15], por exemplo, relacionando-se economicamente com a extração de petróleo de reservatórios subterrâneos, com a extração de calor e vapor de reservatórios geotérmicos e até mesmo com a preservação dos lençóis freáticos [4]. Nesse capítulo, falaremos sobre algumas características de redes de fraturas e definiremos dois modelos para a simulação de um processo de fratura. O primeiro será baseado no *caminho crítico* e o segundo será desenvolvido com argumentos de *caminho mínimo*, apresentaremos os resultados das abordagens utilizadas.

3.1 **Redes de fraturas**

Em todos os casos citados acima, os meios têm permeabilidade muito baixa e fraturas naturais ou feitas pelo Homem tendem à ter permeabilidade bastante alta, proporcionando assim a retirada de qualquer tipo de fluido, por exemplo, petróleo ou gás natural, de reservatórios de forma muito atraente para as empresas de extração. Microscopicamente, o transporte desse fluido é feito através do espaço de poros existentes na rocha que pode ser investigado usando teoria da percolação e modelos que tratam os poros como uma rede aleatória. Macroscopicamente, o fluido escoar através de fraturas, sendo muitas vezes a escala dominante.

Para uma rede de fraturas, as propriedades morfológicas como abertura, densidade e conectividade são parâmetros cruciais para o completo entendimento da Física de fenômenos de transportes em rochas heterogêneas. Por exemplo, a abertura de uma fratura é importante para determinação da permeabilidade da rede, a densidade de fraturas é um parâmetro indispensável para a modelagem de reservatórios e a conectividade de uma fratura é similar ao número de coordenação de um poro no espaço. Essa última propriedade pode ser dividida em três tipos: Uma terminação “cega”, ou seja, que a fratura termina em uma rocha matriz, uma terminação “adjacente”, isto é, que a fratura termina quando ela intercepta outra fratura e quando duas fraturas se cruzam, mas nenhuma delas terminam.

Em um passado recente, vários estudos sobre redes de fratura em rochas heterogêneas encontraram que elas tem um carácter fractal [4, 15]. Por exemplo, um caminho para a estimativa da dimensão fractal desses sistemas seria o método da contagem de caixas, já mencionado no capítulo anterior. Geralmente, para escalas de grandes comprimentos, da ordem de quilômetros ou mais, finas secções de uma rocha fraturada, ou seja, um sistema basicamente bidimensional, são caracterizados por $D \simeq 1.9$ e para escalas de pequenos comprimentos, da ordem de metros, são caracterizadas por $D \simeq 1.6 - 1.7$. Exemplos bem conhecidos desse fato são a formação de montanhas de Yucca em Nevada [16] e para algumas formações japonesas [17]. Evidentemente, podemos ter também redes de fraturas tridimensionais, onde a dimensão fractal encontrada é em torno de $D \simeq 2.5$ para grandes escalas [4]. Considerando apenas a fratura principal simples, semelhante à falha de San Andreas na Califórnia, encontraremos que a dimensão fractal dela é dada por $D \simeq 1.1 - 1.2$ [18]. Portanto, o comprimento da dimensão fractal de uma fratura depende do comprimento de escala da observação e que para grandes escalas as fraturas podem ter uma estrutura do agregado de percolação.

Há modelos baseados em percolação que tentam explicar processos de fraturas, por exemplo podemos representar uma superfície rochosa por uma rede de ligações interconectadas através de *molas* [4]. Nesse modelo, a porosidade é incluída através da remoção aleatória ou correlacionada de uma fração das molas. Cada sítio é ligado aos seus vizinhos por molas e identificado pelo seu vetor posição. Essas molas seguem uma lei de elasticidade linear com a seguinte peculiaridade, se ela for esticada mais do que um valor crítico ela se quebra irreversivelmente. Os resultados desse modelo concordam com os encontrados experimentalmente para pequenas e grandes escalas. Nas seções seguintes, vamos propor dois novos modelos de fraturas.

3.2 Descrição e resultados de um modelo de fratura por caminho crítico

Esse modelo de fratura é baseado em argumentos relacionados ao conceito de *caminho mínimo* [4], como introduzido no capítulo anterior. Dada uma rede quadrada de tamanho L , inicialmente com nenhum sítio alocado, colocaremos condições de contorno fixas (*CCF*) nas suas partes superior e inferior, e condições de contorno periódicas (*CCP*) nas suas laterais, sortearmos, por meio de um gerador de números pseudo-aleatórios, um sítio qualquer e o inseriremos na rede. Em seguida, sortearmos outro sítio da mesma forma, excluindo apenas os sítios já sorteados, e o alocaremos também. Assim faremos sucessivamente, até o momento em que exista um agregado de sítios que percole verticalmente na rede considerando vizinhanças de *Von Neuman* de primeiros vizinhos (Fig. 2.5a), ou seja, até que haja um agregado de sítios

alocados que conecte a rede de cima pra baixo. Nesse ponto “proibiremos” o último sítio alocado como indicamos na Fig. 3.1a, ou seja, este sítio será considerado não-alocado até o final da simulação. Para entendermos a razão da retirada desse elemento, podemos imaginar que cada sítio é um fusível e que a rede está sendo submetida à uma diferença de potencial ΔV entre suas partes superior e inferior. O fusível análogo ao sítio que foi proibido no nosso modelo será também o responsável pela conectividade global da sua rede, isto é, sem ele não existirá nenhuma corrente elétrica atravessando o sistema. Dessa forma, esse elemento representará um “gargalo” para corrente, posto que toda ela terá necessariamente que passar por esse fusível, eventualmente, ocasionando a sua queima (ou no nosso algoritmo a sua “proibição”), levando a rede à sofrer uma micro-fratura. Em seguida, continuaremos sorteando outros sítios para alocar na rede, tendo em mente que os sítios proibidos não pertencem mais a rede como mostrado nas Figs. 3.1 até que outro sítio seja identificado como proibido na estrutura. Continuaremos com esse processo até que não consigamos mais obter um agregado de sítios alocados que percole verticalmente, ou seja, até que haja uma “fratura” de sítios proibidos com vizinhanças de *Moore* de primeiros vizinhos (Fig. 2.6a) conectando o lado direito e esquerdo da rede (Ver Fig. 3.1i).

O método que utilizamos para identificar o agregado percolante foi o método de floresta de conjunto disjunto, descrito no capítulo anterior. Já para identificarmos a fratura, tanto nesse modelo quanto no seguinte, utilizamos o método de “queima” [19], muito parecido com o modelo de fogo na floresta. Dada uma rede de sítios correspondendo a uma floresta, queimamos um sítio qualquer e ele espalhará o fogo para seus vizinhos. Esses novos sítios incendiados também espalharam o fogo para os seus vizinhos e assim por diante. Como temos *CCP* na horizontal, definimos uma origem e calculamos, para todos sítios queimados, as suas distâncias horizontais para essa origem. Pararemos o algoritmo de “queima” quando houverem dois sítios vizinhos com o módulo da diferença das suas distâncias horizontais sendo maior do que uma unidade de rede [20]. Nesse ponto, consideramos que o fogo percolou na floresta, ou nosso caso que o sistema foi fraturado.

Observamos que para o primeiro sítio proibido o número de alocações é muito grande, tendo um grande custo computacional, pois não há nenhum sítio na rede e temos que gerar e, mais importante, identificar um agregado que percole verticalmente. À medida que o número de pontos proibidos começa a aumentar, o número de alocações na rede tende a diminuir, pois a rede começa a ficar completamente preenchida, conseqüentemente, mais fácil de existir um agregado percolante. Uma das características interessantes desse modelo é a de que todos os sítios proibidos são sítios pertencentes à fratura principal, ou seja, não detectamos a presença ilhas isoladas de sítios proibidos. Além disso, vemos que o resultado desse modelo é uma fratura simples, sem sobreposição de caminhos e ramificações, como mostramos na Fig. 3.2.

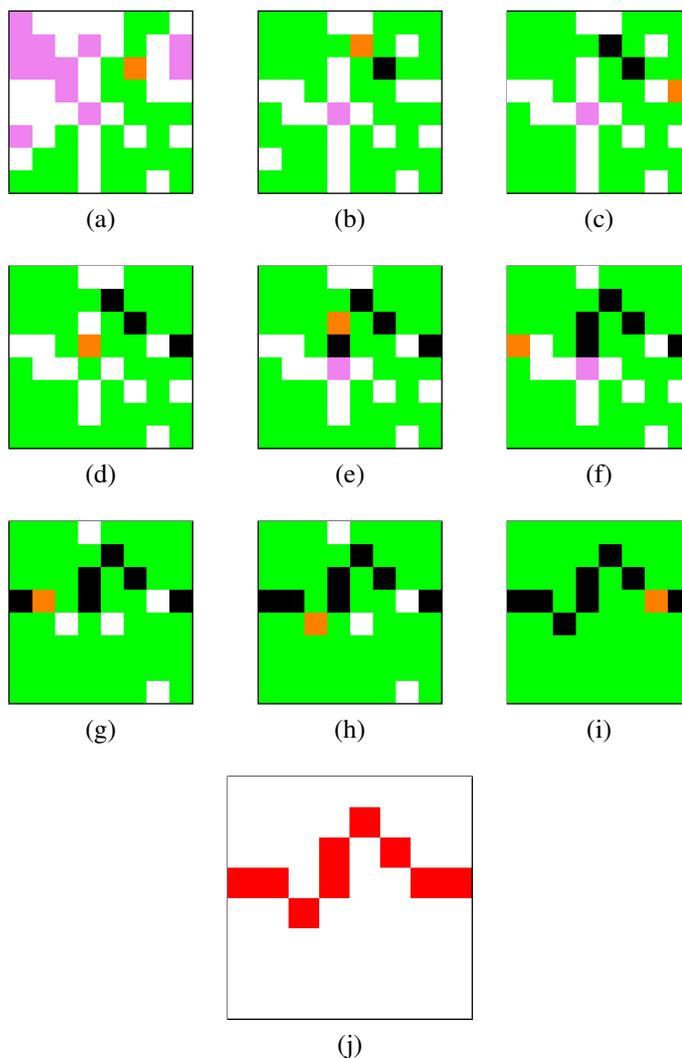


Figura 3.1: Seqüências de redes de tamanho $L = 8$ seguindo o modelo de fratura proposto baseado no caminho crítico. Os sítios verdes pertencem ao agregado percolante vertical, os sítios violetas são agregados isolados, os sítios laranjas são os sítios que estão sendo proibidos em cada passo distinto de “tempo” e os sítios pretos são aqueles que já foram proibidos. Quando o processo de geração está encerrado, explicitamos a fratura produzida em vermelho.

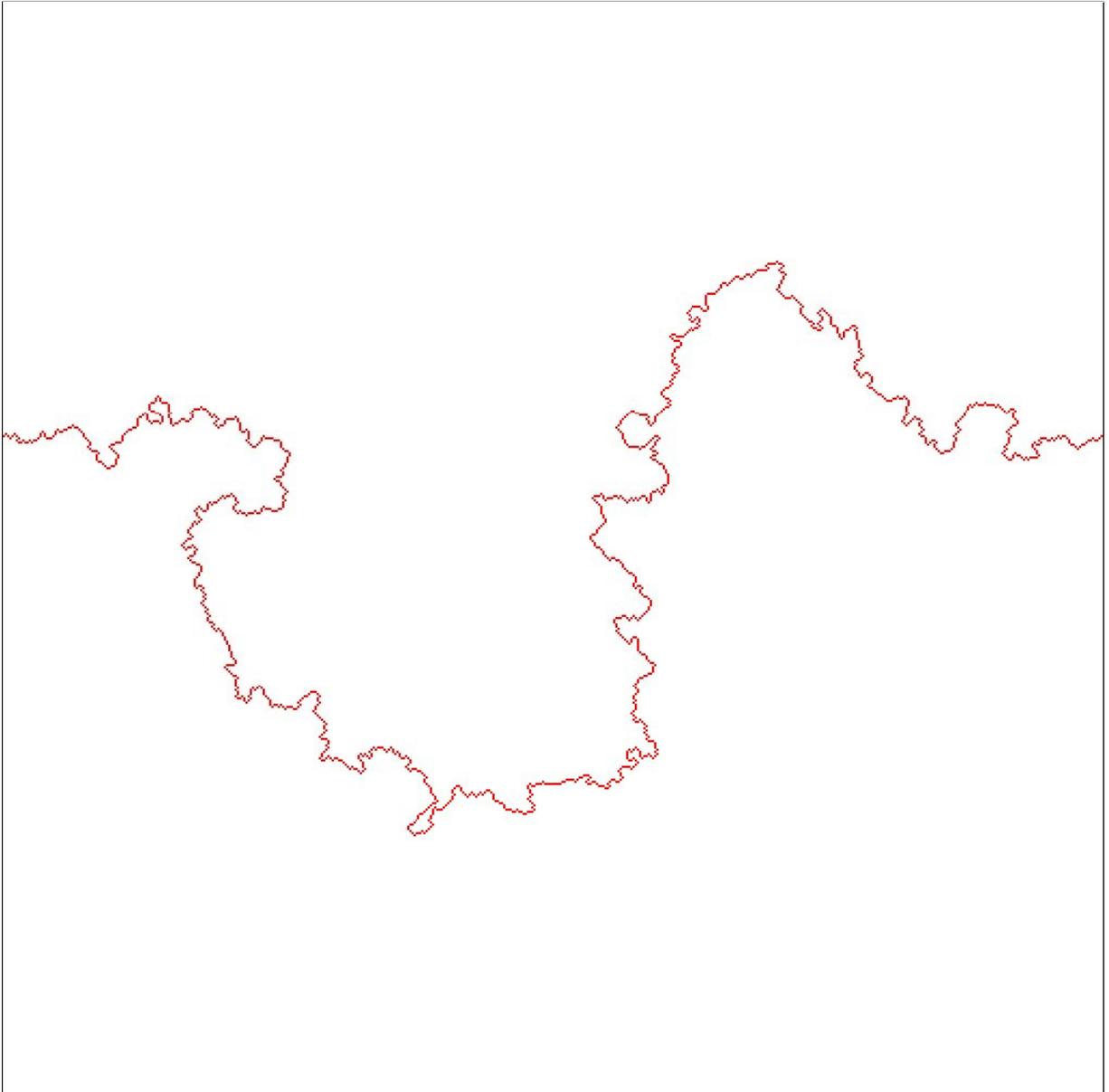


Figura 3.2: Rede de tamanho $L = 512$ seguindo o modelo de fratura baseado no caminho crítico. Notamos que a fratura principal não apresenta sobreposições de caminhos (“loops”) ou cílios, mas apresentando protuberâncias (“over-hangs”). Encontramos a sua fractalidade com dimensão $D_p = 1.21 \pm 0.03$.

Medimos o número médio de sítios proibidos $\langle M_p \rangle$ em função do tamanho da rede L e encontramos que a fratura gerada é um fractal, ou seja, $\langle M_p \rangle \propto L^{D_p}$, com a dimensão fractal $D_p = 1.21$ como mostramos na Fig. 3.3. Para chegarmos a esse valor de dimensão fractal em ambos os modelos utilizamos o método de *escalamento de tamanho finito*. Esse valor de D_p é próximo daquele encontrado para falhas geológicas principais ($\approx 1.1 - 1.2$ [18]), para *polímeros desordenados* (≈ 1.2 [21]), para “fios” de *percolação invasiva* (1.22 ± 0.01 [22]) e caminhos em uma *árvore de extensão mínima* (1.22 ± 0.01 [23]). Como o método do *caminho crítico* é válido apenas para paisagens de energias ou probabilidades altamente desordenadas, temos também que esse modelo de fratura só terá validade no mesmo limite.

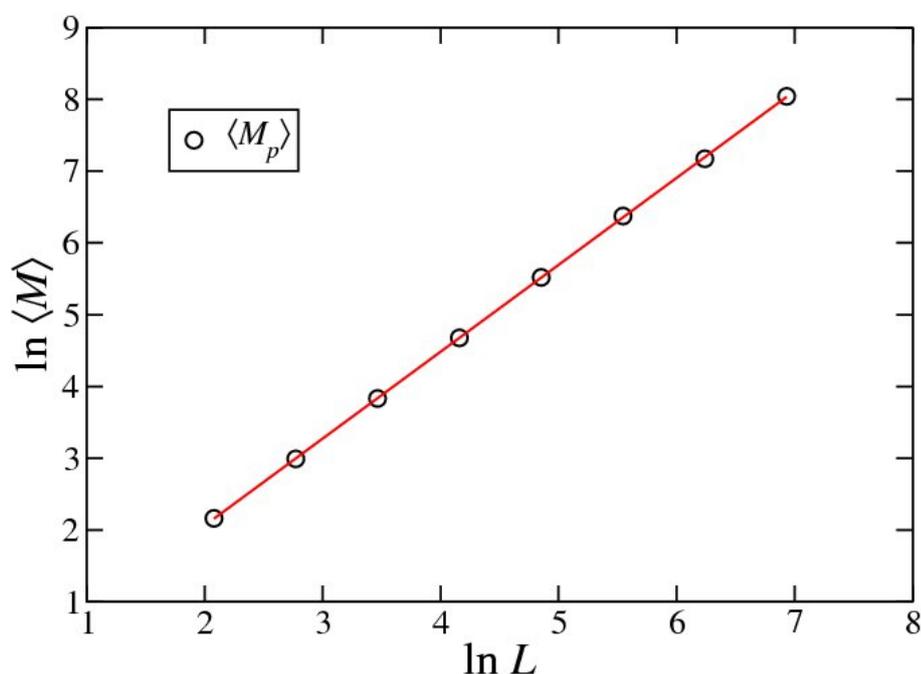


Figura 3.3: Gráfico do número médio de sítios proibidos pertencentes à fratura $\langle M_p \rangle$ em relação ao tamanho da rede L . O valor do expoente encontrado para este modelo de fratura baseado no caminho crítico foi $D_p = 1.21 \pm 0.03$. Utilizamos 25, 50, 250, 1250, 6250, 31250, 156250 e 781250 amostras para os tamanhos de rede $L = 1024, L = 512, L = 256, L = 128, L = 64, L = 32, L = 16$ e $L = 8$, respectivamente.

3.3 Descrição e resultados de um modelo de fratura por caminho mínimo

Esse segundo modelo de fratura terá como base o conceito de *caminho mínimo*, também já amplamente discutido no capítulo anterior. Dada uma rede quadrada de tamanho L com condições de contorno fixas (*CCF*) tanto na parte superior quanto na parte inferior e condições de

contorno periódicas (CCP) nas suas laterais, sortearemos, por meio de um gerador de números aleatórios, uma probabilidade p no intervalo $[0, 1]$ para cada sítio. Dada essa configuração da rede, calcularemos o caminho vertical mais curto para atravessá-la, ou seja, calcularemos o *caminho mínimo* para aquela paisagem de probabilidades considerando vizinhanças de *Von Neuman* de primeiros vizinhos (Fig. 2.5a) para sua formação. A definição desse caminho na nossa rede de sítios é análoga ao *caminho mais curto* em uma rede de grafos e, como as probabilidades geradas na rede são sempre positivas, podemos utilizar o *algoritmo de Dijkstra*. Depois de identificado o *caminho mínimo*, proibiremos o sítio de maior probabilidade dentre todos aqueles que o formam, ou seja, este sítio permanecerá não-alocado até o final, como mostramos na Fig. 3.4a. Nesse caso, para entendermos a razão para a retirada desse sítio, podemos imaginar esse elemento como uma via para transportes rodoviários e a rede como o conjunto de todas as rotas rodoviárias possíveis, por exemplo, uma cidade. Suponhamos que todos os empregos dessa cidade sejam ao norte e todas as residências sejam ao sul. No final do dia, imaginemos também que muitas pessoas inicialmente optam pelo caminho mais curto para chegarem ao lado sul da cidade. Isso ocasionará um grande engarrafamento em algum trecho desse caminho correspondente à nossa maior probabilidade no dado *caminho mínimo*. Dessa maneira, o resto das pessoas são levadas a procurar uma rota alternativa, da mesma forma que vamos continuar a descrição desse algoritmo, calculando novos caminhos mais curtos. Obviamente, continuamos considerando que os sítios proibidos não pertencem mais à rede, e proibindo outros sítios por meio do mesmo critério de proibição dos sítios de maior probabilidade dentro do menor caminho encontrado (Figs. 3.4). Continuaremos com esse processo até que não consigamos mais obter um caminho mínimo que percole verticalmente, ou seja, até que haja uma “fratura” de sítios proibidos com vizinhanças de *Moore* de primeiros vizinhos (Fig. 2.6a) conectando o lado direito e esquerdo da rede (Ver Fig. 3.4o). Para o exemplo dado de trânsito em uma cidade, o análogo dessa fratura do nosso modelo seria uma cadeia de engarrafamentos que resultaria na impossibilidade das pessoas a chegarem em casa no final do expediente. Notamos que nesse modelo, diferentemente do modelo de fraturas por caminho crítico, há o surgimento de muitas ramificações ou cílios na fratura principal (Fig. 3.4p), além da *espinha dorsal* da fratura como está na Fig. 3.4q.

Observamos que para o primeiro caminho mínimo calculado o custo computacional é um pouco menor em comparação ao último, pois a medida que o processo de proibição de sítios avança, o número de sítios proibidos aumenta dificultando cada vez mais a identificação do próximo caminho mínimo. Isto faz com que o último caminho seja significativamente mais “tortuoso” do que o primeiro. Uma característica interessante desse modelo é que, à medida que aumentamos a rede, a maioria dos sítios proibidos começam a não pertencer mais à fratura

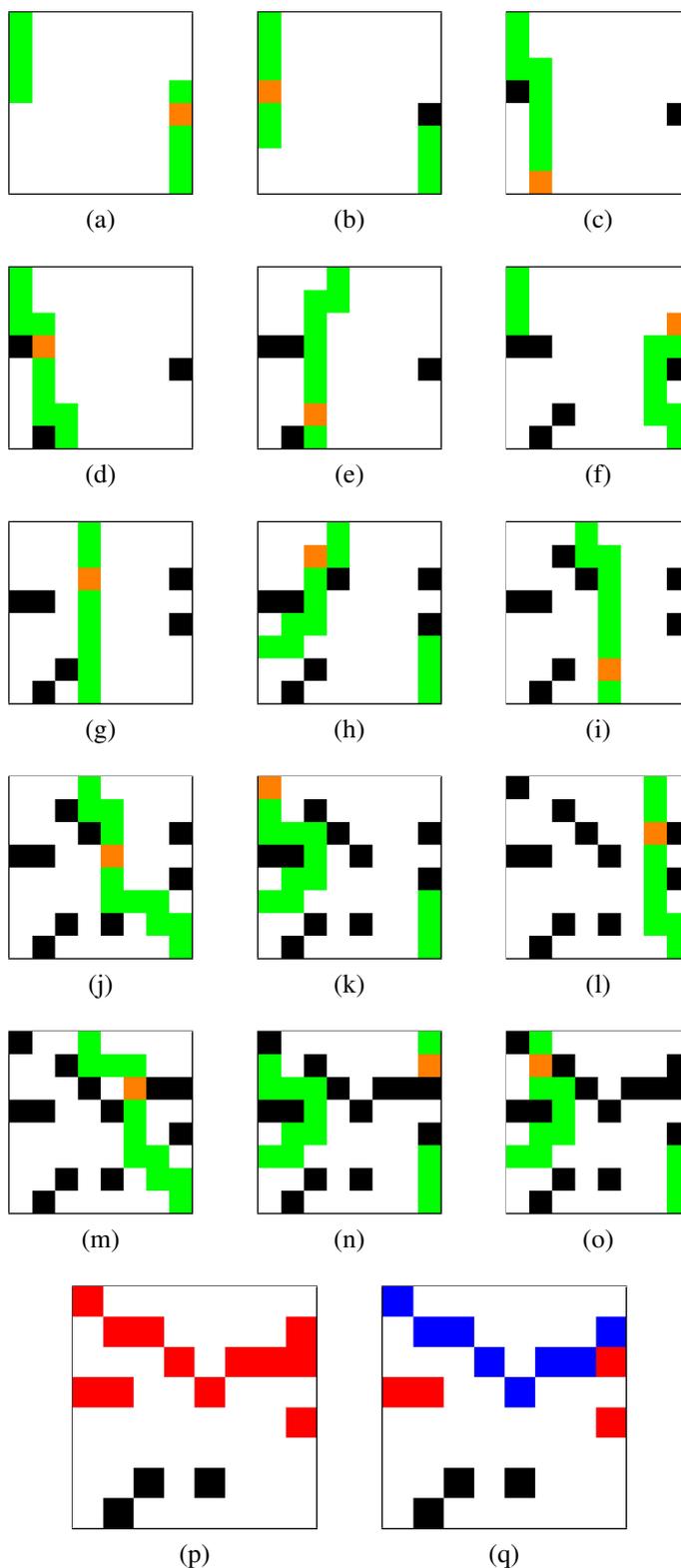


Figura 3.4: Seqüências de redes de tamanho $L = 8$ seguindo o modelo de fratura proposto baseado no caminho mínimo. Os sítios verdes pertencem ao caminho mínimo vertical para aquela configuração de probabilidades, os sítios laranjas são os sítios que estão sendo “proibido” naquele passo de tempo e os sítios pretos são aqueles que já foram proibidos. Quando o processo de geração está encerrado, mostramos a fratura produzida em vermelho e em seguida explicitamos a sua espinha dorsal.

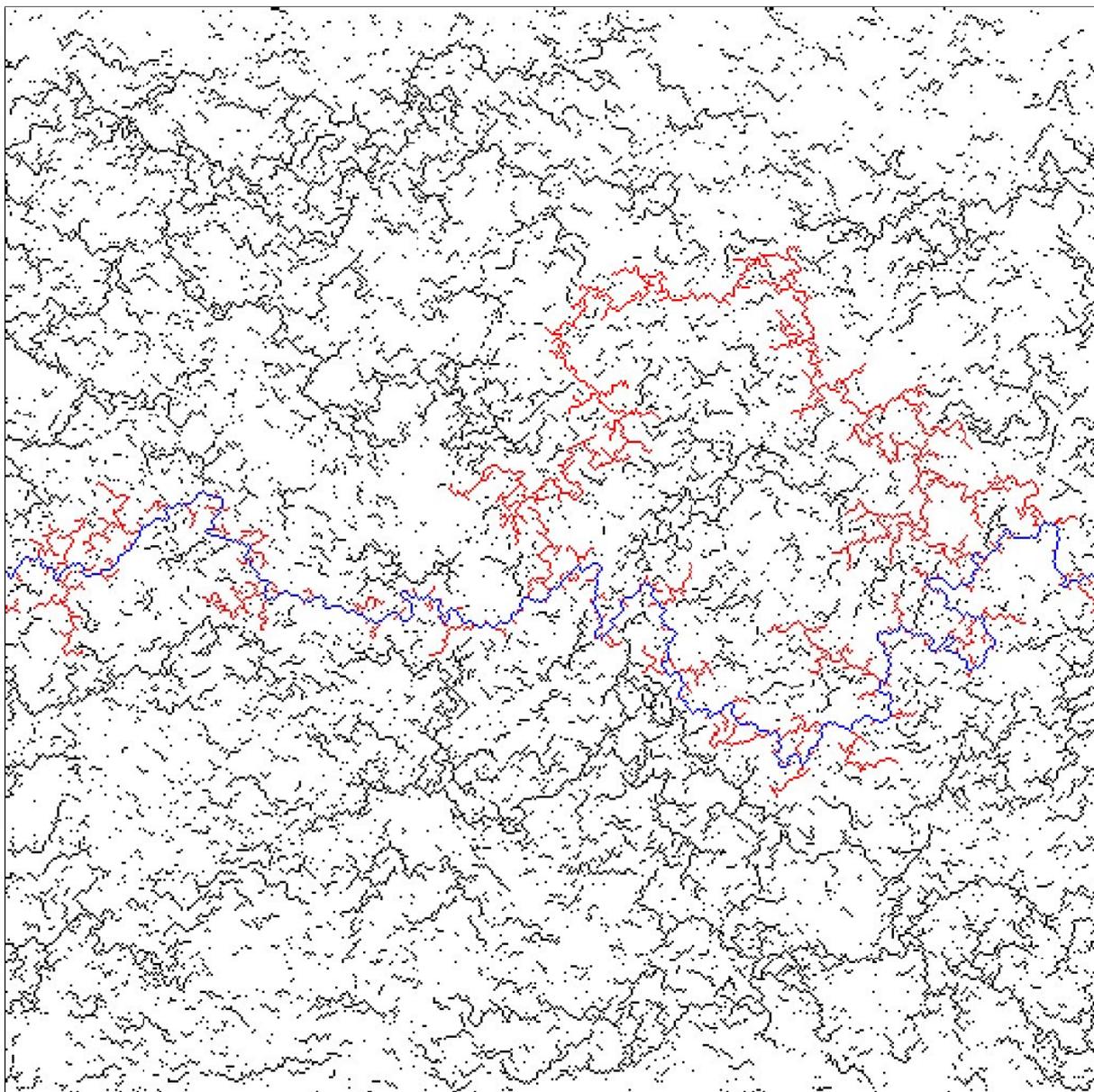


Figura 3.5: Rede de tamanho $L = 512$ seguindo o modelo de fratura baseado no caminho mínimo. Notamos que a fratura principal é bastante ramificada, embora não tenha sobreposições de caminhos (“loops”). Como no caso do caminho crítico, a espinha dorsal (Em vermelho) apresenta características tipicamente auto-similares, ou seja, “over-hangs”. Os nossos resultados confirmam a sua fractalidade com dimensão $D_e = 1.21 \pm 0.03$.

principal, ou seja, há o surgimento de muitas ilhas isoladas de sítios proibidos. Além disso, observamos que o resultado desse modelo é uma fratura principal com muitas ramificações, embora sem sobreposição de caminhos como mostramos na Fig. 3.5.

Para este modelo medimos a média do número de sítios do primeiro caminho mínimo $\langle M_{pcm} \rangle$ em função do tamanho da rede L e encontramos que a sua dimensão fractal é $D_{pcm} = 1.01 \pm 0.03$, mostrando seu comportamento auto-afim (Fig. 3.6), sendo um valor muito próximo daquele encontrado para sistemas com baixa desordem [24]. De forma análoga, podemos medir a média do número de sítios pertencentes ao último caminho mínimo $\langle M_{ucm} \rangle$ em função do tamanho da rede L como mostramos também na Fig. 3.6. Encontramos que o caminho gerado tem a dimensão fractal $D_{ucm} = 1.17 \pm 0.03$ levando-nos à constatar a afirmação feita anteriormente que esse caminho encontrado é significativamente mais tortuoso do que o primeiro.

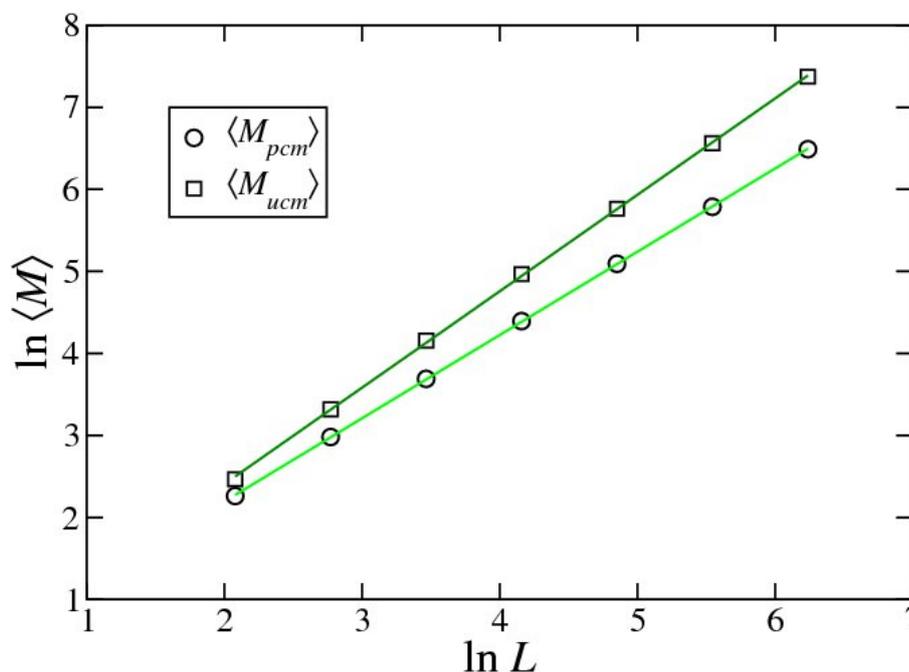


Figura 3.6: Gráfico do número médio de sítios pertencentes ao primeiro caminho mínimo $\langle M_{pcm} \rangle$ e ao último caminho mínimo $\langle M_{ucm} \rangle$, ambos em função ao tamanho da rede L com os valores dos expoentes encontrados sendo dados por $D_f = 1.01 \pm 0.03$ e $D_f = 1.17 \pm 0.03$. Utilizamos 50, 250, 1250, 6250, 31250, 156250 e 781250 amostras para os tamanhos de rede $L = 512, L = 256, L = 128, L = 64, L = 32, L = 16$ e $L = 8$, respectivamente.

De forma análoga ao modelo de fratura por caminho mínimo, medimos o número médio de todos os sítios proibidos $\langle M_p \rangle$ em função do tamanho L da rede. Encontramos a dimensão fractal $D_f = 1.89 \pm 0.03$, aproximadamente o mesmo valor encontrado para redes de fraturas em grande escala (≈ 1.9 [16, 17]). Salientando que o resultado do nosso modelo aproxima-se mais deste último do que o modelo de fratura por molas (≈ 1.85 [4]). Desse modo, pode-

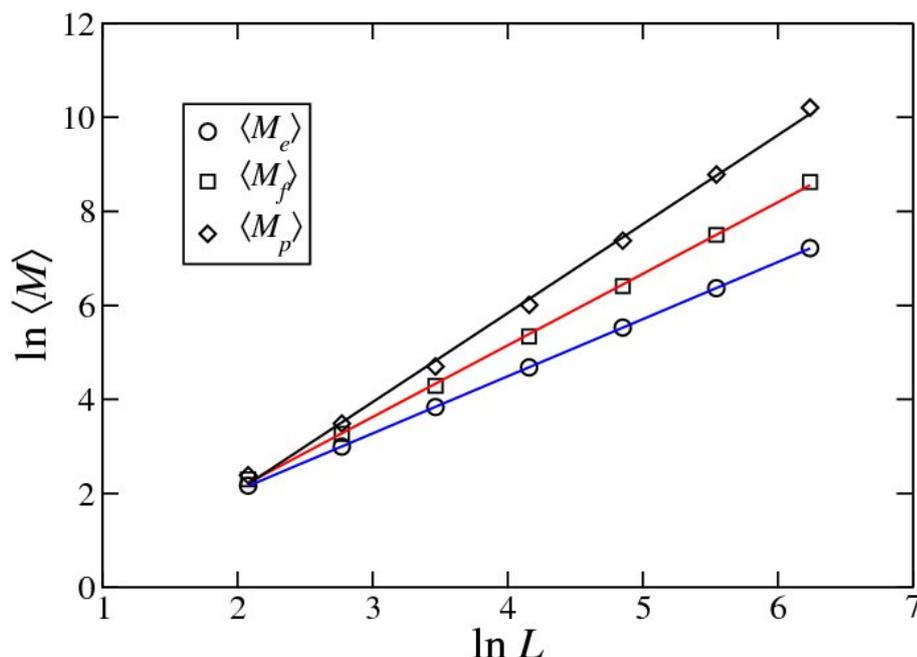


Figura 3.7: Gráfico do número médio de sítios proibidos $\langle M \rangle$ em função do tamanho da rede L . Os *diamantes* correspondem à $\langle M_p \rangle$, ou seja, todos os sítios proibidos da rede, os *quadrados* aos sítios pertencentes à fratura $\langle M_f \rangle$ e os *círculos* à espinha dorsal da fratura $\langle M_e \rangle$. Encontramos as dimensões fractais $D_p = 1.89 \pm 0.03$, $D_f = 1.52 \pm 0.03$ e $D_e = 1.21 \pm 0.03$, respectivamente. Utilizamos 50, 250, 1250, 6250, 31250, 156250 e 781250 amostras para os tamanhos de rede $L = 512, L = 256, L = 128, L = 64, L = 32, L = 16$ e $L = 8$, nessa seqüência.

mos sugerir que uma rede de fraturas macroscópica comporta-se da mesma maneira que um agregado infinito de percolação (Fig. 2.12). Analogamente, calculamos o número médio dos sítios pertencentes à fratura $\langle M_f \rangle$ em função do tamanho da rede L e encontramos o expoente $D_f = 1.52 \pm 0.03$. Essa dimensão fractal é similar ao expoente encontrado para uma rede de fraturas em escalas menores ($\approx 1.6 - 1.7$ [4]). Para encerramos, medimos o número médio dos sítios da espinha dorsal $\langle M_e \rangle$ e achamos que ela também é um fractal de dimensão $D_e = 1.21 \pm 0.03$. Esse valor de D_e é próximo daquele encontrado para o modelo de fraturas anterior ($D_p = 1.21 \pm 0.03$), para falhas geológicas ($\approx 1.1 - 1.2$ [18]), para *polímeros desordenados* (≈ 1.2 [21]), para “fios” de *percolação invasiva* (1.22 ± 0.01 [22]) e caminhos em uma *árvore de extensão mínima* (1.22 ± 0.01 [23]). Neste ponto, podemos lançar a hipótese de que as fraturas geradas com os modelos de caminho crítico e caminho mínimo pertencem à mesma classe de universalidade.

4 Conclusões

No presente trabalho, apresentamos conceitos bem conhecidos como o estudo de fractais, explorando os conceitos de dimensão fractal e método da contagem de caixas. Em teoria da percolação, apresentamos o modelo de fogo na floresta, definição de agregado percolante e seu ponto crítico. Na secção de método do caminho crítico, abordamos a sua definição em cima de uma rede de condutores da mesma forma foi feita no problema do caminho mínimo, dando ênfase ao algoritmo de Dijkstra. Aplicando todos esses conceitos, estudados o comportamento de fraturas em meios desordenados por meio de dois modelos propostos, o primeiro utilizando técnicas de caminho crítico e o segundo baseando-se no problema do caminho mínimo da teoria de grafos.

No primeiro modelo introduzido há a formação de uma fratura auto-similar, ou seja, sem sobreposição de caminho e nem ramificações com a dimensão fractal $D_p = 1.21 \pm 0.03$. Esse valor de dimensão é muito próximo daquele encontrado experimentalmente para fraturas principais [18], para os divisores de água [25], para outros modelos de fraturas [4] e para outros problemas semelhantes [21–23].

No segundo modelo proposto também há a formação de uma fratura com várias ramificações e há o surgimento de sítios proibidos fora dela, ou seja, existe o surgimento de agregados isolados na rede. Para esse caso, calculamos a dimensão fractal do primeiro caminho mínimo $D_{pcm} = 1.01 \pm 0.03$, concordando com o resultado conhecido de auto-afinidade para baixas desordens [24]. Para o último caminho mínimo, encontramos $D_{ucm} = 1.17 \pm 0.03$, ou seja, ele é mais “tortuoso” do que o primeiro, pois há obstáculos de sítios proibidos para contornar. Esse último apresenta auto-similaridade e segue um comportamento parecido com o caminho ótimo para altas desordens [24]. Encerrando o trabalho, encontramos a dimensão fractal para todos os sítios proibidos da rede $D_p = 1.89 \pm 0.03$ que concorda com os resultados experimentais encontrados [16, 17]. Calculamos também a dimensão da fratura com as ramificações, $D_f = 1.52 \pm 0.03$. Esse resultado é semelhante ao comportamento de fraturas em pequenas escalas [4]. Finalmente o valor da dimensão fractal da mesma fratura sem as ramificações é $D_e = 1.21 \pm 0.03$ que concorda muito bem com o modelo anterior baseado no caminho crítico.

Logo, as dimensões fractais de fraturas geradas através do primeiro modelo e de fraturas de sítios da espinha dorsal no segundo modelo são bastante semelhantes, sugerindo que estas fraturas podem pertencer a mesma classe de universalidade. Esperamos ainda estudar esses modelos para sistemas cada vez maiores, aumentarmos a precisão dos resultados e empregá-los em problemas análogos ao de fraturas em meios desordenados como os estudados nessa dissertação.

Referências Bibliográficas

- 1 FEDER, J. *Fractals*. New York: Plenum Press, 1988.
- 2 STAUFFER, D.; AHARONY, A. *Introduction to Percolation Theory*. Philadelphia: Taylor & Francis, 1994.
- 3 CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L. *Introduction to algorithms*. Cambridge & New York: McGraw-Hill Book Company & The MIT press, 1990.
- 4 SAHIMI, M. *Flow and Transport in Porous Media and Fractured Rock*. Boston: VCH, 1995.
- 5 MANDELBROT, B. B. *Les Objets Fractals: Forms, Hasard et Dimension*. Paris: Flammarion, 1975.
- 6 MANDELBROT, B. B. *Fractals: Form, Chance, and Dimension*. San Fransisco: W. H. Freeman, 1977.
- 7 MANDELBROT, B. B. *The Fractals Geometry of Nature*. New York: W. H. Freeman, 1982.
- 8 BROADBENT, S. R.; HAMMERSLEY, J. M. Percolation Processes I. Crystals and Mazes. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 53, p. 629–641, 1957.
- 9 STANLEY, H. E. *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*. New York: Oxford University Press, 1971.
- 10 HOSHEN, J.; KOPELMAN, R. Percolation and cluster distribution. I. Cluster multiple labeling technique and critical concentration algorithm. *Physical Review B*, v. 14, n. 8, p. 3438–3445, 1976.
- 11 AMBEGAOK, V.; HALPERIN, B. I.; LANGER, J. S. Hopping Conductivity in disordered systems. *Physical Review B*, 4, n. 8, p. 2612–2620, 1971.
- 12 KATZ, A. J.; THOMPSON, A. H. Quantitative prediction of permeability in porous rock. *Phys. Rev. B*, v. 34, n. 11, p. 8179–8181, 1986.
- 13 KATZ, A. J.; THOMPSON, A. H. Prediction of rock electrical conductivity from Mercury injection measurements. *Journal of Geophysical Research*, v. 92, n. B1, p. 599–608, 1987.
- 14 HERRMANN, H. J.; STANLEY, H. E. The fractal dimension of the minimum path in two-dimensional and 3-dimensional percolation. *Journal of Physics A-Mathematical and General*, 21, n. 17, p. L829–L833, 1988.
- 15 HERRMANN, H. J.; ROUX, S. *Statistical Models for the Fracture of Disordered Media*. Amsterdam: North Holland, 1990.

- 16 BARTON, C. C.; HSIEH, P. *Physical and Hydrological-Flow Properties of Fractures*. Las Vegas: American Geophysical Union, 1989.
- 17 HIRATA, T. Fractal dimension of fault systems in Japan: Fractal structure in rock fracture geometry at various scales. *Pure and Applied Geophysics*, 131, n. 1-2, p. 157–170, 1989.
- 18 OKUBO, P. G.; AKI, K. Fractal geometry in the San Andreas fault system. *Journal of Geophysical Research*, 92, n. B1, p. 345–356, 1987.
- 19 HERRMANN, H. J.; HONG, D. C.; STANLEY, H. E. Backbone and Elastic Backbone of Percolation Clusters Obtained by the New Method of "Burning". *Journal of Physics A-Mathematical and General*, 17, n. 5, p. L261–L266, 1984.
- 20 NEWMAN, M. E. J.; ZIFF, R. M. Efficient monte carlo algorithm and high-precision results for percolation. *Phys. Rev. Lett.*, v. 85, n. 19, p. 4104–4107, 2000.
- 21 CIEPLAK, M.; MARITAN, A.; BANAVAR, J. R. Optimal paths and domain-walls in the strong disorder limit. *Physical Review Letters*, 72, n. 15, p. 2320–2324, 1994.
- 22 CIEPLAK, M.; MARITAN, A.; BANAVAR, J. R. Invasion percolation and Eden growth: Geometry and universality. *Physical Review Letters*, 1996.
- 23 DOBRIN, R.; DUXBURY, P. M. Minimum spanning trees on random networks. *Physical Review Letters*, 2001.
- 24 SCHWARTZ, N.; NAZARYEV, A. L.; HAVLIN, S. Optimal path in two and three dimensions. *Physical Review E*, 58, n. 6, Part B, p. 7642–7644, 1998.
- 25 JR., J. S. A. et al. On the self-similarity of watershed lines. *Em fase final de preparação*.