

Demétrius Ribeiro de Paula

*Dinâmica de Redes Neurais e Formação de
Agregados em Redes Complexas.*

Fortaleza – CE

Março / 2006

Demétrius Ribeiro de Paula

*Dinâmica de Redes Neurais e Formação de
Agregados em Redes Complexas.*

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador:

Prof. Dr. José Soares de Andrade Júnior

DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CENTRO DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

Fortaleza – CE

Março / 2006

*Dedico esta dissertação
a minha família e amigos.*

Agradecimentos

- Ao professor e amigo José Soares de Andrade Júnior pela orientação e confiança;
- Ao professor Ascânio Dias Araújo;
- Ao professor e amigo André Auto Moreira, pelos ensinamentos e discussões;
- Aos professores Gil de Aquino Farias e Raimundo Nogueira da Costa Filho, pelos conselhos e incentivos;
- Aos professores do Departamento de Física, em especial Murilo, Evangelista e Eloneide;
- Ao amigo Tony e ao Ramos, que possibilitaram o trabalho nos laboratórios;
- Aos funcionários do Departamento de Física, Ana Cleide, Rejane e Elias;
- Aos amigos do departamento Teldo, Daniela, Luís Araripe, José Filho, Marcelo, Emerson, Talita, Munarim, Marília, Marilza, Fabrício, Danyel, Tayroni, Geová, Hiroshé, Assis, Jeanlex, King, Franciné, José Alves;
- Aos amigos pessoais, Adriana Ribeiro, Sérgio Bastos, Ari, Reinalde, Rodrigo, Fátima, Grazi, Eveline, Gledson, Cialdini, Silvana, Flávio, Mitchele, Lia, Neirara, Adriana, Ana Cláudia, Carolina, Moreira, Cláudio, Luis José, Erasmo;
- Aos meus computadores pessoais, Jedi-Stallman e Peçlet;

Resumo

Na primeira parte deste trabalho, propomos um modelo de crescimento competitivo de agregados em redes complexas para simular a propagação de idéias ou opiniões em comunidades. Investigamos como as distribuições de tamanhos de agregados variam com a topologia de construção da rede e com o número de sementes aleatoriamente dispersas na estrutura. Para tal, analisamos redes do tipo de Erdős-Rényi, redes de contato preferencial e a chamada rede Apoloniana. Esta última apresenta distribuições de tamanho de agregado em forma de uma lei de potência $P(n) \sim n^{-\alpha}$ com um expoente $\alpha \approx 1.0$, onde n é o tamanho do agregado. Resultados similares são observados com as distribuições obtidas para as frações de votos por candidato às eleições proporcionais para deputados no Brasil. Na segunda parte, analisamos o comportamento temporal da atividade neural em redes com características de mundo pequeno e em redes construídas segundo o modelo do contato preferencial. Nesta primeira topologia, estudamos como a série temporal se comporta com a variação do alcance das conexões. Em ambas as topologias, observamos a formação de períodos e investigamos como estes variam com o tamanho da rede.

Abstract

The process by which new trends and ideas propagate in social communities can have a profound impact in the life of individuals. To understand this process, we introduce a competitive cluster growth model in complex networks. In our model, each cluster represents the set of individuals with a certain opinion or preference. We investigate how the cluster size distribution depends on the topology of the network and how it is affected by the number of initial seeds dispersed in the structure. We study our model using different network models, namely, the Erdos-Renyi geometry, the preferential attachment model, and the so-called Apollonian network. This last complex geometry displays a cluster size distribution that follows a power-law $P(n) \sim n^{-\alpha}$ with an exponent $\alpha \approx 1.0$, where n is the cluster size. Similar results have been obtained for the distributions of number of votes per candidate in the proportional elections for federal representation in Brazil. In the second part of this work, we investigate the temporal behavior of neural networks with small world topology and in networks built according to the preferential attachment model. In the first case we study the effect of the range of connections on the behavior of the time series. In both topologies, we detect the existence of cycles and investigate how their periods depend on the size of the system.

Sumário

Resumo	p. i
Abstract	p. ii
Lista de Figuras	p. v
Introdução	p. 2
1 Redes Complexas	p. 5
1.1 Introdução	p. 5
1.2 Teoria dos grafos e o modelo de Erdős-Rényi	p. 5
1.2.1 Distribuição de Conectividade	p. 6
1.2.2 Distância Média	p. 7
1.3 Redes de Mundo Pequeno: uma nova topologia	p. 7
1.4 O Modelo de Watts-Strogatz	p. 9
1.5 O modelo do contato preferencial	p. 12
1.5.1 A equação mestra da evolução da rede	p. 14
1.5.2 O tratamento contínuo	p. 15
1.6 O truncamento exponencial da distribuição de conectividade	p. 16
1.7 Rede Apoloniana	p. 19
1.8 Propriedades observadas em redes reais	p. 22
1.8.1 Internet	p. 22
1.8.2 WWW	p. 22

1.8.3	Redes metabólicas	p. 23
1.8.4	Outros sistemas	p. 23
1.9	Redes Neurais	p. 24
2	Crescimento de Agregados em Redes Complexas	p. 34
2.1	Introdução	p. 34
2.2	Eleições	p. 37
2.3	Modelo	p. 40
2.4	Conclusões	p. 47
3	Dinâmica de Redes Neurais Complexas	p. 48
3.1	Introdução	p. 48
3.2	O cérebro humano	p. 49
3.3	Eletroencefalograma - EEG	p. 55
3.4	Modelo da atividade neural	p. 57
3.5	Resultados e Discussões	p. 60
3.5.1	Topologia de Watts-Strogatz (WS)	p. 60
3.5.2	Topologia do Contato Preferencial	p. 68
3.6	Conclusões	p. 71
4	Conclusões	p. 72
	Referências	p. 74
5	Apêndice	p. 78

Lista de Figuras

1	Representação de um grafo com o conjunto $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e o conjunto $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{5, 7\}\}$	p. 6
2	Mapa dos Estados Unidos mostrando (a) origem das cartas e (b) local onde a pessoa-alvo se encontrava.	p. 8
3	Modelo de rede Watts-Strongatz: a) Inicialmente temos uma rede regular com 20 nós, sendo cada nó ligado aos seus 4 primeiros vizinhos. b) Alteramos o valor de p , entre 0 e 1, c) até chegarmos em $p = 1$, onde a troca das ligações é feita de forma aleatória.	p. 10
4	Troca de uma ligação de uma rede do tipo WS. O nó v está ligado inicialmente ao nó v' . Com a troca aleatória da ligação v é ligado diretamente ao nó v''	p. 10
5	Menor caminho médio e Coeficiente de agregação para modelos de rede WS com $N = 10^4$. Os dados são normalizados pelos valores de $L(0)$ e $C(0)$ para uma rede regular. Observe a queda acentuada do menor caminho médio para pequenos valores de p , correspondendo a um comportamento característico da classe de redes de mundo pequeno. Durante esta queda, C permanece quase constante, indicando que a transição para a rede de mundo pequeno é quase imperceptível a nível local. Figura retirada de (ALBERT; BARABÁSI, 2002)	p. 11
6	Distribuição de conectividade do modelo WS com $N = 10^4$ e $\langle k \rangle = 6$ para $p = 0.0$ (círculo), $p = 0.1$ (quadrado) e $p = 0.3$ (triângulo).	p. 12
7	Uma rede gerada pelo modelo do contato preferencial. Ilustração retirada de Strogatz (STROGATZ, 2001)	p. 13

8	Distribuição acumulada de conectividade para diferentes tamanhos de rede. Observamos que as distribuições seguem um comportamento em lei de potência, $P \propto k^{-\alpha}$, seguido de um truncamento exponencial. A posição do truncamento depende do tamanho da rede.	p. 17
9	As mesmas distribuições acumuladas da Fig. 8 reescaladas segundo $S^{1/\alpha}$ de forma a colapsar a região de decaimento exponencial.	p. 18
10	(a) Formato Apoloniano clássico, (b) Rede Apoloniana, primeira, segunda e terceira geração representadas respectivamente pelos símbolos \bigcirc , \blacksquare e \bullet (ANDRADE et al., 2004).	p. 20
11	Distância média entre dois nós L como função do número de nós N . A linha sólida é um guia para os olhos e tem uma inclinação $3/4$. O detalhe mostra em papel semilog o coeficiente de agregação C como função de N . A linha tracejada mostra o valor observado para grandes redes $C = 0.828$	p. 21
12	Lei de potência para guerras (BUCHANAN, 2000).	p. 36
13	Distribuições de números de votos por candidato nas eleições proporcionais para (a) Deputados Estaduais e (b) Deputados Federais no Brasil, nos anos de 1998 e 2000.	p. 38

- 14 Descrição gráfica de nosso modelo para o processo de crescimento competitivo de agregados. Nesta figura usamos a terceira geração da rede Apoloniana, Seção 1.7 do Capítulo 1, como substrato para o crescimento. Esse escolha se deve a característica planar desta rede que a faz particularmente apropriada para uma representação gráfica. No primeiro passo do processo de crescimento (a), alguns nós (marcados pelo quadrado, triângulo, estrela e pelo círculo maior) são escolhidos para servirem de sementes para o crescimento de agregados na rede. Todos os demais nós (marcados pelos pequenos pontos) não são associados a nenhum dos agregados neste passo; esses nós serão os únicos acessíveis ao crescimento. As linhas tracejadas ligam ou um par de nós que já pertencem a algum agregado, ou um par de nós acessíveis. Nesse passo, essas conexões não influenciam o crescimento. As linhas mais largas ligam um nó que já foi incorporado a um agregado a algum nó ainda acessível. São essas linha que mediam o crescimento dos agregados. A cada passo qualquer uma dessas linhas pode ser escolhida com a mesma probabilidade, e o nó acessível é incorporado ao mesmo agregado que seu vizinho. Desta forma, a velocidade com que um agregado cresce é proporcional a seu perímetro, isto é, ao número de de conexões de um nó no agregado para um nó acessível. No segundo passo (b) um novo nó é incorporado ao agregado marcado pelos quadrados e novas linhas largas são adicionadas ao perímetro desse agregado. O processo continua até que todos os nós tenham sido incorporados a algum dos agregados (c). Nesse ponto o tamanho dos agregados é computado. Esse mecanismo de crescimento é uma espécie de processo “ganancioso”, ou seja, quanto maior o perímetro do agregado mais rápido ele cresce incorporando ainda mais nós e conexões. . . p. 41

- 15 Distribuições de tamanhos de agregados obtidas quando o modelo de crescimento competitivo acontece sobre uma rede do tipo ER. Essas distribuições foram obtidas com redes contendo 10^5 nós. Para garantir uma boa amostragem estatística, foram obtidos 10^5 amostras de agregados para cada curva. Isso implica que foram feitas mais realizações para os casos com menos sementes de forma a manter o número de amostras de agregados constante. As distribuições obtidas com essa topologia seguem aproximadamente uma forma exponencial com um comprimento característico dependendo do número de sementes n_s . As linhas tracejadas correspondem as funções $P(n) = n_s e^{-n_s n}$. As linhas contínuas são as funções $p(n) = C n_s^{1-\gamma} n^{-\gamma} \exp(-n_s n)$, com os parâmetros $C = 0.85 \pm 0.003$, e $\gamma = 0.2 \pm 0.05$, obtidos a partir de um ajuste linear para os dados colapsados mostrados no detalhe. A figura mostra que para as redes do tipo ER a forma da distribuição é completamente determinada pela densidade de sementes para o processo de crescimento. p. 43
- 16 Distribuições de tamanhos normalizados obtidas quando o modelo é realizado sobre uma rede construída com o esquema do contato preferencial (BARABÁSI; ALBERT, 1999). Foram usados 10^7 nós e obtidos 10^5 amostras para cada valor de n_s . Diferente do observado com as redes ER não é possível colapsar as distribuições nesse caso. No entanto, nota-se que para qualquer valor de n_s são obtidas distribuições altamente dispersas com tamanhos de agregado indo de apenas alguns nós até quase toda a rede. A linha contínua é um ajuste em lei de potência, $P(n) \sim n^{-\alpha}$, com expoente $\alpha = 1.2$, obtida para a região em escala da distribuição com $n_s = 10^2$. A inclinação das curvas parece crescer a medida que o número de agregados competindo cresce. p. 44

17	Distribuição de tamanhos normalizados de agregados para o caso do crescimento sobre a rede Apoloniana (ANDRADE et al., 2004). As distribuições foram obtidas para a 15 ^a geração da rede Apoloniana, o que corresponde a $N = 7174456$ nós. Cada curva é obtida de uma amostra de 10^5 agregados. Neste caso as distribuições apresentam a forma de uma lei de potência, $P(n) \sim n^{-\alpha}$ com um expoente $\alpha \approx 1.0$, independente do número de sementes. A linha continua é um ajuste linear para a região em escala para os dados com $n_s = 10^2$ sementes. A forma em degraus periódicos das distribuições é remanescente da estrutura auto similar resultante da construção hierárquica da rede Apoloniana.	p. 46
18	Representação em diagrama em blocos do sistema nervoso.	p. 49
19	Ilustração de uma célula nervosa. Esta célula é formada por: (1) O corpo de neurônio ou Somma, (2) Dendritos, (3) Axônio e (4) Terminais Sinápticos.	p. 51
20	Organização estrutural dos níveis no cérebro	p. 53
21	Mapa citoarquitetural do córtex cerebral. As diferentes áreas são identificadas pela espessura de suas camadas e tipos de células nelas contidas. Algumas das áreas específicas mais importantes são como segue. Córtex motor: banda motora, área 4; área pré-motora, área 6; campos oculares frontais, área 8. Córtex somestésico: áreas 3, 1, 2. Córtex visual: áreas 17, 18, 19. Córtex auditivo: áreas 41 e 42 (BRODAL, 1981).	p. 54
22	Registro eletroencefalográfico real típico.	p. 56
23	Parte da evolução temporal da atividade neural $A(t)$ em uma rede WS contendo 2048 nós, com a probabilidades de realocação (rewire) igual a zero, $p = 0$, na curva do topo, e com $p = 1$, na curva abaixo.	p. 61
24	Visualização da formação de períodos, em que (a) , (b) e (c) estão em intervalos de tempo distintos e consecutivos exibindo um período de 24.	p. 62

25	Quantidade de redes em regime periódico com T períodos $P(T)$, pelo período, T	p. 63
26	Fração de redes periódicas, ϕ , pelo número de nós, N , para diferentes valores de probabilidade de realocação p ou <i>rewire</i>	p. 64
27	Fração de redes periódicas ϕ pela probabilidade de realocação p , ou <i>rewire</i> , para vários tamanhos de rede.	p. 65
28	Representação gráfica dos parâmetros a_0 , a_1 e a_2 com função de N	p. 66
29	Renormalização da fração de redes periódicas ϕ' como função da \tanh de renormalização da probabilidade de realocação p'	p. 67
30	Periodo Médio para cada tamanho de rede, em escala logarítmica, 1000 diferentes gerações de rede, e para um valor de probabilidade de realocação igual para todos, $p = 0.9$. A linha tracejada corresponde a $T \sim \sqrt{N}$	p. 68
31	Evolução temporal da atividade neural em rede construída segundo o modelo do contato preferencial contendo 2048 nós.	p. 69
32	A curva do topo (a), mostra a fração de redes periódica ϕ pelo tamanho da rede N , e a curva abaixo (b) mostra o tamanho médio dos períodos $\langle T \rangle$ como função do tamanho da rede, N	p. 70

Introdução

Sistemas com interações simples entre seus elementos constituintes, mas com muitos graus de liberdade, podem exibir morfologias complicadas e apresentar comportamentos dinâmicos intrincados, tais como fenomenologias emergentes, avalanches, criticalidade e leis de escala (BAK, 1996). Quando tratamos com estes sistemas, usualmente denominados *sistemas complexos*, há sempre a expectativa de que exista um número pequeno de “leis básicas” governando a essência do comportamento global do fenômeno em estudo. É neste contexto que alguns sistemas complexos podem ser compreendidos em termos de leis de escala (STANLEY, 1999). Neste caso, diz-se que o sistema é invariante de escala, ou seja, há a dependência de uma determinada grandeza com algum parâmetro relevante na forma de uma lei de potência.

Nestas circunstâncias, o conceito de universalidade implica que diferentes fenômenos invariantes de escala ocorrendo na natureza, podem ser classificados em um número comparativamente pequeno de classes, usualmente definidas pelos expoentes de suas leis de escala. Esse conceito permite que sistemas mais complicados possam ser descritos por modelos simples, desde que os ingredientes mínimos necessários para definirem a sua classe de universalidade estejam presentes na formulação.

Um dos desafios no estudo de sistemas complexos consiste em modelar a natureza diversa dos seus constituintes e a intrincada estrutura das suas interações. Entre as técnicas usadas com maior sucesso para estudar os sistemas complexos estão os modelos discretos baseados em agentes. Nesses modelos, os agentes podem ocupar um número finito de estados e o sistema evolui em passos discretos de tempo. A cada passo, todos os agentes usam alguma regra para decidir que estado irão assumir no próximo passo. Cada agente está conectado a um pequeno grupo de outros agentes no sistema, os vizinhos. A regra de evolução de um determinado agente é descrita por uma função, que toma como parâmetro os estados de seus vizinhos. Tipicamente, o sistema evolui de forma síncrona, atualizando os estados de todos os agentes ao

mesmo tempo.

A simplicidade e liberdade na definição das regras de interação fizeram desses modelos discretos uma ferramenta ideal para o estudo de diversos sistemas complexos. Nessa linha de abordagem, um dos modelos mais estudados é o chamado autômato celular. Tipicamente, nesse tipo de modelo os agentes são dispostos em uma rede regular e todos usam a mesma regra de evolução. Autômatos celulares foram empregados no passado como um modelo para o estudo de sistemas caóticos, auto-organização e computação emergente. Apesar do sucesso dos autômatos celulares como um modelo para sistemas descentralizados, a estrutura regular, com todos os agentes executando a mesma função e com as interações definidas em uma rede periódica, é propriedade que por si só induz uma ordem global e que não se espera observar em sistemas reais. No universo dos modelos discretos, o extremo oposto à estrutura regular dos autômatos celulares é ocupado pelo chamado modelo das redes Booleanas. Nas redes Booleanas a estrutura das interações é definida aleatoriamente e cada agente usa uma regra de evolução diferente. Redes Booleanas foram propostas inicialmente como um modelo para redes de regulação genética, mas já foram usadas em sistemas tão variados como interações em grupos sociais, evolução e redes neurais. Esse modelo exibe várias propriedades observadas em sistemas reais, uma das mais intrigantes provavelmente sendo uma transição entre uma fase ordenada e uma caótica. Na fase ordenada, o sistema evolui para atratores que consistem de estados fixos ou pequenos ciclos. Na fase caótica, os atratores consistem de grandes ciclos, cujo comprimento varia exponencialmente com tamanho do sistema.

Neste trabalho utilizaremos uma classe de modelos para sistemas complexos onde as leis de escala e o conceito de universalidade praticamente ditam a sistemática de sua abordagem. Como veremos, as denominadas *redes complexas* servem como paradigma para os mais diferentes sistemas. Uma vez que essas redes são modelos plausíveis para caracterizar a natureza das interações que regem alguns sistemas complexos (STROGATZ, 2001), o estudo e a caracterização de suas propriedades é fundamental para a descrição de tais sistemas. Por exemplo, sabe-se que a conectividade de vários sistemas complexos é notadamente anômala, seguindo uma distribuição de probabilidade na forma de uma lei de potência. Esse tipo de sistema pode, então, ser modelado pela regra do contato preferencial (BARABÁSI; ALBERT, 1999). Observa-se que neste de redes, os nós mais conectados determinam a conec-

tividade global da estrutura (ALBERT; JEONG; BARABÁSI, 2000) e controlam uma série de processos dinâmicos. Uma outra propriedade observada, é a característica de mundo pequeno. As redes de mundo pequeno têm a propriedade de que a distância média entre qualquer par de nós da rede, medida pelo número mínimo de conexões que separam os nós, é proporcional ao logaritmo do número total de nós. Outra propriedade de grande interesse em redes complexas é um valor relativamente alto para o chamado coeficiente de agregação.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma. No Capítulo 1, apresentamos uma revisão sobre alguns dos principais conceitos da estatística de redes complexas. São descritos os modelos de rede de Erdős e Rényi, de mundo pequeno, de contato preferencial e de Apolônio. Mostramos então algumas das propriedades observadas empiricamente em redes reais e um breve histórico sobre redes neurais. No Capítulo 2, introduzimos um modelo de crescimento competitivo de agregados em redes complexas utilizando modelos de rede de Erdős e Rényi, de contato preferencial e de Apolônio. Mostramos como a topologia com que a rede é construída interfere na formação dos agregados. Constatamos que as distribuições obtidas segundo o modelo de Apolônio são similares às distribuições obtidas para as frações de votos por candidato observada nas eleições proporcionais no Brasil (COSTA et al., 2002). No Capítulo 3, abordamos um problema dinâmico envolvendo a evolução temporal da atividade neural em redes com estruturas regulares e desordenadas. Observamos, em alguns casos, a existência de formação de períodos nas séries temporais desta atividade, e investigamos como a transição da estrutura de construção da rede influencia na formação destes períodos. Para tal análise, por exemplo, variamos a probabilidade de realocação no modelo de rede de Watts-Strogatz (WATTS; STROGATZ, 1998), que também define a aleatoriedade das conexões entre os seus nós. Outro aspecto abordado, diz respeito à forma como o tamanho da rede interfere na formação dos períodos. Adicionalmente, um estudo similar é feito para redes construídas segundo o modelo do contato preferencial. Finalmente, no Capítulo 4, apresentamos nossas conclusões sobre todos os resultados obtidos, bem como algumas perspectivas para trabalhos futuros.

1 *Redes Complexas*

1.1 Introdução

A modelagem de redes complexas tem sido o foco de muitos trabalhos recentes em mecânica estatística para a representação de sistemas físicos, químicos, biológicos e até mesmo sociais. Neste capítulo, estudaremos as propriedades estatísticas de algumas redes complexas, introduzindo os conceitos necessários para a construção e entendimento destas, como a teoria dos grafos, a distribuição de conectividade, a distância média e o coeficiente de agregação. Em seguida, descreveremos a experiência de Stanley Milgram, que propõe o famoso “seis graus de separação”. Discutiremos também, a topologia de algumas redes reais, como por exemplo, WWW e redes metabólicas. Por fim, faremos um breve histórico sobre redes neurais.

1.2 Teoria dos grafos e o modelo de Erdős-Rényi

Podemos definir um grafo $G = (V, E)$ (DIESTEL, 2000) como um par de conjuntos V e E que satisfaz $E \subseteq [V]^2$, onde cada elemento de E é formado por dois elementos de V . Graficamente, os elementos do conjunto V representam os sítios, e os elementos do conjunto E representam as ligações entre os sítios. Podemos visualizar um exemplo de um *grafo* na Fig. 1.

Com o conhecimento da teoria dos grafos e com o surgimento do interesse no estudo de redes com topologia complexas, Paul Erdős e Alfréd Rényi (ERDÖS; RÉNYI, 1959) propõem um modelo, no qual, um sistema com N nós, onde cada nó pode se conectar a outro randomicamente com uma probabilidade ξ , criando um grafo com $\xi N(N - 1)/2$ conexões.

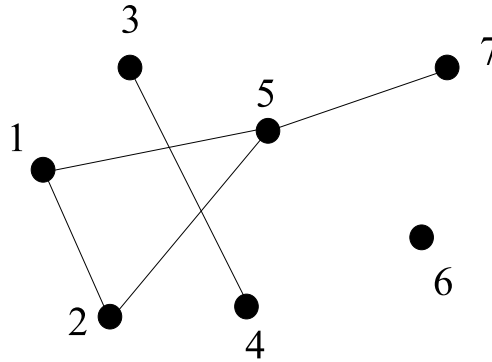


Figura 1: Representação de um grafo com o conjunto $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e o conjunto $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{5, 7\}\}$.

Para o melhor entendimento de problemas que envolvem sistemas com um número elevado de elementos, é necessário a introdução de algumas definições:

1.2.1 Distribuição de Conectividade

A distribuição de conectividade, $p(k)$, representa a probabilidade de um nó ter uma conectividade k . A probabilidade de $p_i(k_i)$, de que um determinado nó i tenha um número k_i de conexões é dada pelo binomial,

$$p_i(k_i) = C_{N-1}^{k_i} \xi^{k_i} (1 - \xi)^{N-1-k_i} \quad (1.1)$$

pois o nó i pode estabelecer até $N - 1$ conexões, sendo que a probabilidade de que k_i dessas conexões existam é ξ^{k_i} , a probabilidade de que as demais $N - 1 - k_i$ conexões estejam ausentes é $(1 - \xi)^{N-1-k_i}$, e $C_{N-1}^{k_i}$ é o número de diferentes combinações em que as conexões podem ser distribuídas. No limite em que N vai a infinito, a forma binomial se aproxima da distribuição de Poisson,

$$p(k) \approx e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}, \quad (1.2)$$

onde $\langle k \rangle = \xi N$ é a conectividade média. Isso mostra que, apesar da distribuição aleatória de conexões, a rede é homogênea, ou seja, os nós têm, aproximadamente, o mesmo número de conexões, e como o número total de conexões da rede é limitado,

a conectividade dos nós não são variáveis independentes.

1.2.2 Distância Média

A distância entre dois nós é definida como o número mínimo de conexões que os separam. A distância média l é a média das distâncias entre todos os pares de nós. Eventualmente, se a probabilidade ξ de conexão for suficientemente pequeno, pode acontecer de não existir um caminho conectando dois nós; neste caso, a distância entre eles é infinita. Quando isto ocorre, a distância média toma apenas os pares de nós em um mesmo agregado completamente conectado. Em média, cada nó tem $\langle k \rangle$ primeiros vizinhos. Cada um desses tem $\langle k \rangle$ vizinhos, resultando em $\langle k \rangle^2$ segundos vizinhos, $\langle k \rangle^3$ terceiros vizinhos, e assim por diante. Se o número N de nós de uma rede for suficientemente grande, $\ln(N) \gg \langle k \rangle$, o número de nós a uma distância l continua crescendo exponencialmente até que, eventualmente, o número de vizinhos a uma distância l fica da ordem do tamanho da rede, N . Nesta condição, a distância média deve crescer logaritmicamente com o tamanho da rede,

$$l \sim \frac{\ln N}{\ln \langle k \rangle}. \quad (1.3)$$

1.3 Redes de Mundo Pequeno: uma nova topologia

Em 1967, o sociólogo e psicólogo americano, Stanley Milgram (MILGRAM, 1967) realizou uma experiência com o intuito de verificar o grau de ligação entre as pessoas. A experiência consistia em escolher 150 pessoas em Wichita, Kansas, Omaha e Nebraska, e cada uma delas recebia uma carta contendo instruções específicas explicando o experimento. Basicamente teriam que fazer chegar um envelope a uma pessoa, que deveria ser desconhecida, chamada de pessoa-alvo, localizada em Boston. Na Fig. 2 mostramos o mapa norte americano para ilustrar a distância entre as localidades.



Figura 2: Mapa dos Estados Unidos mostrando (a) origem das cartas e (b) local onde a pessoa-alvo se encontrava.

O conteúdo de cada envelope era:

1. O nome, e a informação que a pessoa-alvo era corretor em Boston.
2. Algumas regras, como por exemplo: “se você não conhece *diretamente* a pessoa-alvo, repasse o documento para um amigo que tenha uma possível relação com o alvo”.
3. Para registrar o *percurso*, cada intermediário deve assinar seu nome. Isto é importante, pois evita que o envelope volte para a mesma pessoa, e podemos rastrear de quem partiu o envelope.

Várias cartas foram perdidas, e nunca chegaram, mas as que chegaram não tiveram mais que 6 amigos intermediários. Tal resultado, conhecido como “seis graus de separação”, nos revela que pessoas aparentemente desconhecidas têm uma grande probabilidade de possuírem, em um certo grau, amigos em comum que as aproximem.

1.4 O Modelo de Watts-Strogatz

As primeiras tentativas de explicar os “seis graus de separação” consistiam exatamente em supor um caráter aleatório para os grafos de colaboração (RAPOPORT, 1957), não levando em conta o fato das pessoas possuírem um núcleo de amizades locais, onde vários amigos são amigos em comum, acrescidos de alguns amigos distantes, que neste caso, se comportam como conexões aleatórias. Assim, deveríamos esperar que os grafos possuísem um certo grau de regularidade local, isto é, uma região onde o grafo se assemelha a uma rede regular. Para tal situação, recentemente Duncan Watts e Steven Strogatz (WATTS; STROGATZ, 1998) propuseram um modelo de rede que nada mais é do que uma interpolação entre uma rede regular e um grafo aleatório.

A construção da rede Watts-Strongatz (*WS*) é realizada de maneira simples através do seguinte algoritmo:

1. Construir um grafo regular, por exemplo, um anel unidimensional com ligações entre primeiros e segundos vizinhos, de modo que o número de conexões seja igual a $k = 4$.
2. Com probabilidade p , *probabilidade de realocação*, trocar a ligação, $L_{vv'}$ por uma ligação aleatória $L_{vv''}$, onde v'' é um sítio sorteado aleatoriamente, Fig. 4. Assim, a probabilidade de realocação nos diz qual é a probabilidade de fazer uma troca de ligação. Para $p = 0$, nenhuma troca é feita, já para $p = 1$, haverá troca.
3. Repetir o item anterior (passo 2) para todas as ligações da rede.

Atavés deste algoritmo, fica clara a possibilidade de interpolação entre uma estrutura regular, ou seja, com valor da probabilidade $p = 0$, e uma estrutura aleatória, com $p = 1$. Para pequenos valores de p temos uma estrutura com vizinhança bem definida, com exceção de alguns “defeitos”, que são regiões onde existem sítios com ligações de longo alcance. Para quantificar esses defeitos, torna-se necessária a introdução do conceito de coeficiente de agregação C_a , o qual define a tendência da rede formar pequenos ciclos. Em outras palavras, se dois nós i e j têm pelo

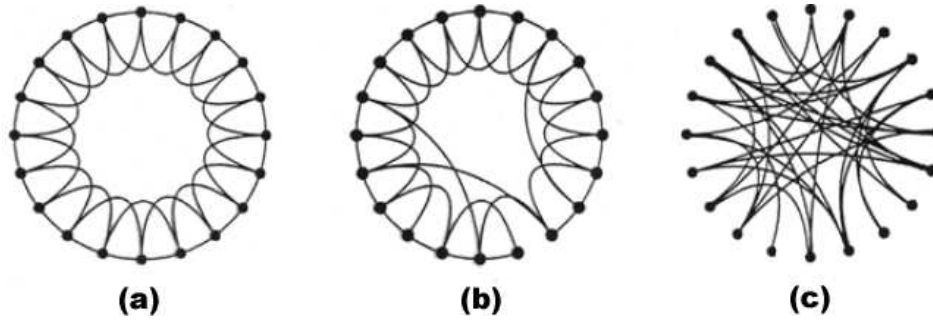


Figura 3: Modelo de rede Watts-Strogatz: a) Inicialmente temos uma rede regular com 20 nós, sendo cada nó ligado aos seus 4 primeiros vizinhos. b) Alteramos o valor de p , entre 0 e 1, c) até chegarmos em $p = 1$, onde a troca das ligações é feita de forma aleatória.

menos um vizinho em comum, C_a é a probabilidade de que i e j sejam conectados. Em redes de relações sociais, por exemplo, as conexões entre pessoas se iniciam, normalmente, através de conhecidos em comum. Se tomarmos como parâmetro a conectividade média, temos que o coeficiente de agregação vai a zero para grandes redes, $C_a = \xi = \langle k \rangle / N$.

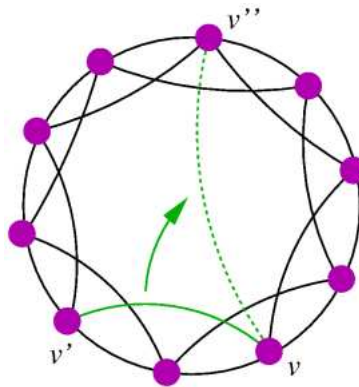


Figura 4: Troca de uma ligação de uma rede do tipo WS. O nó v está ligado inicialmente ao nó v' . Com a troca aleatória da ligação v é ligado diretamente ao nó v''

Mostramos na Fig. 5 que a distância média l decai rapidamente com a adição de poucas ligações de longo alcance, enquanto C permanece com valor alto por um amplo intervalo de p .

Para a probabilidade de realocação igual a zero, $p = 0$, ou seja, uma rede regular, cada sítio tem a mesma conectividade k . À medida que essa probabilidade aumenta, a distribuição de conectividade $P(k)$ torna-se uma curva que continua com um pico

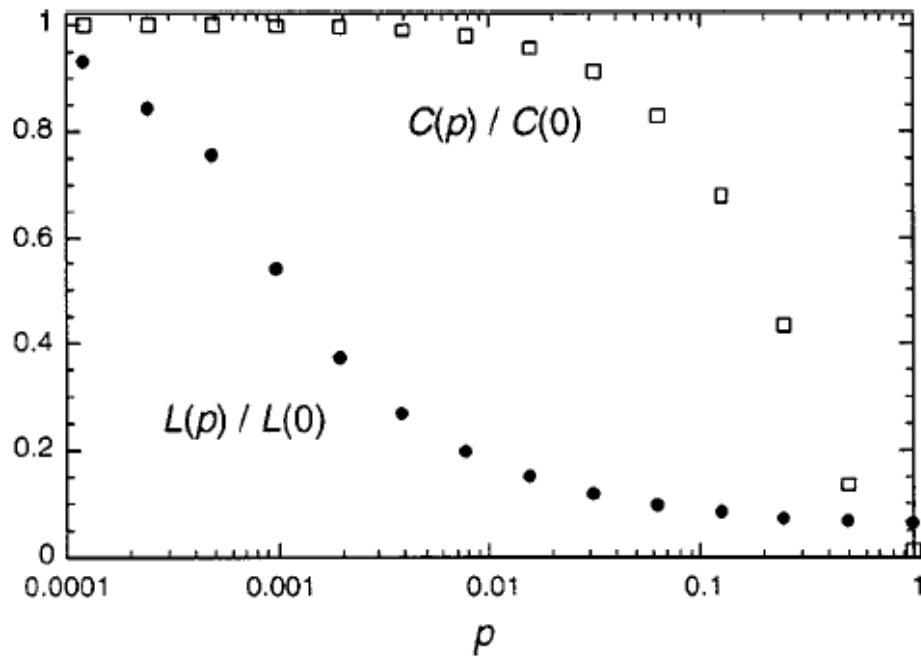


Figura 5: Menor caminho médio e Coeficiente de agregação para modelos de rede WS com $N = 10^4$. Os dados são normalizados pelos valores de $L(0)$ e $C(0)$ para uma rede regular. Observe a queda acentuada do menor caminho médio para pequenos valores de p , correspondendo a um comportamento característico da classe de redes de mundo pequeno. Durante esta queda, C permanece quase constante, indicando que a transição para a rede de mundo pequeno é quase imperceptível a nível local. Figura retirada de (ALBERT; BARABÁSI, 2002)

em torno da conectividade média, $\langle k \rangle$, mas que decai rapidamente para valores de k afastados de $\langle k \rangle$.

A Fig. 6 mostra a distribuição de conectividade para uma rede WS com $N = 10^4$ e $\langle k \rangle = 6$. Com o crescimento da probabilidade de realocação, a largura da curva aumenta, convergindo para uma distribuição de conectividade obtida pelo modelo de ER para $p(k) = \langle k \rangle / N$.

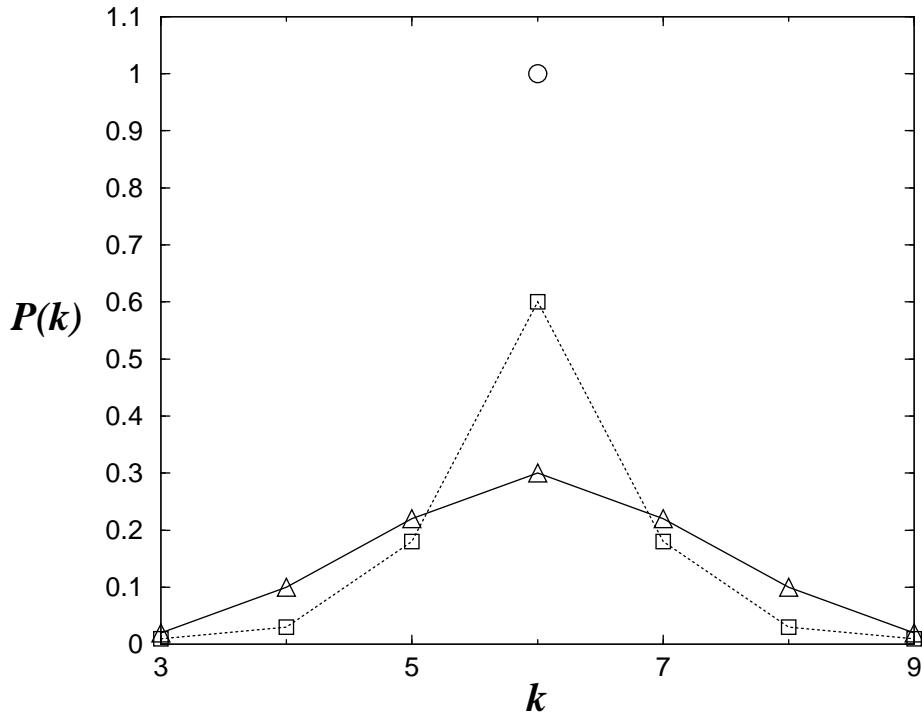


Figura 6: Distribuição de conectividade do modelo WS com $N = 10^4$ e $\langle k \rangle = 6$ para $p = 0.0$ (círculo), $p = 0.1$ (quadrado) e $p = 0.3$ (triângulo).

1.5 O modelo do contato preferencial

As redes aleatórias têm distribuição de conectividade Poissoniana, com um valor característico para a conectividade. No caso de uma distribuição em lei de potência, não há valor característico. Na prática, a conectividade dos nós só é limitada pelo número finito de conexões. Por essa razão, as redes que têm esse tipo de distribuição são chamadas redes sem escala (*scale-free networks*).

Como diferentes redes reais apresentam distribuições em lei de potência, pode existir um mecanismo universal que leva as redes a tomarem esta forma. O modelo do contato preferencial (BARABÁSI; ALBERT, 1999) propõe que esse comportamento emerge da dinâmica de evolução da rede. As seguintes regras constituem este modelo:

- (i) A rede deve ser construída em um processo de crescimento. Neste caso, a rede parte de um número pequeno m_0 de nós, todos conectados entre si. Em seguida, outros nós são introduzidos um a um. Cada nó introduzido deve se conectar a m

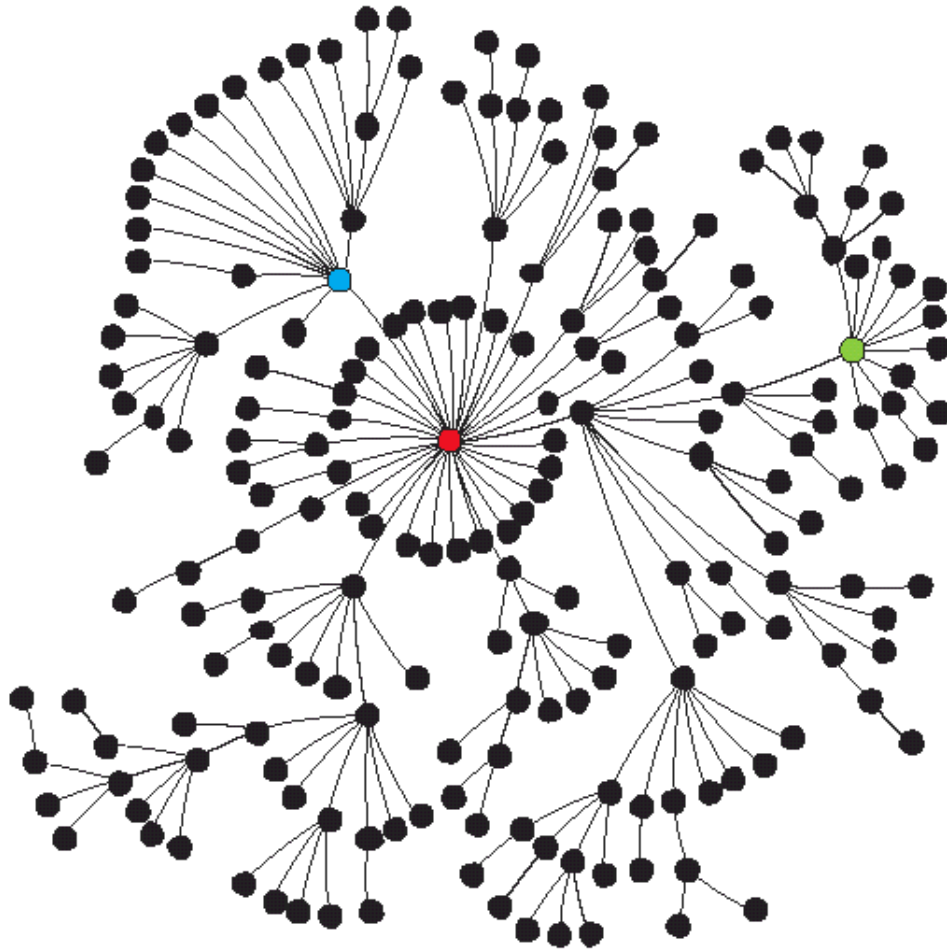


Figura 7: Uma rede gerada pelo modelo do contato preferencial. Ilustração retirada de Strogatz (STROGATZ, 2001)

nós já presentes na rede.

(ii) Ao estabelecerem novas conexões, os nós buscam, preferencialmente, os nós mais conectados. Mais precisamente, a probabilidade Π_i de uma conexão ser dirigida a um nó i é proporcional à sua conectividade k_i ,

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}, \quad (1.4)$$

onde o termo no denominador é a soma das conectividades de todos os nós, que é

introduzido para normalizar a probabilidade. Como cada conexão liga dois nós, o termo de normalização é idêntico ao dobro do número de conexões.

1.5.1 A equação mestra da evolução da rede

Para demonstrar que esse modelo simples leva, naturalmente, a uma distribuição de conectividade em lei de potência, vamos estudar a evolução da população $S_k(N)$ de nós com conectividade k , numa rede com um número S de nós. Quando um novo nó entra na rede, o valor de S_k deve mudar segundo (DOROGOVTSSEV; MENDES; SAMUKHIN, 2000; KRAPIVSKY; REDNER; LEYVRAZ, 2000)

$$S_k(N+1) = S_k(N) + m \frac{k-1}{\sum_{k'} k' S_{k'}(N)} S_{k-1}(N) - m \frac{k}{\sum_{k'} k' S_{k'}(N)} S_k(N) + \delta_{k,m}. \quad (1.5)$$

A primeira parcela da Eq. (1.5) dá conta dos nós que já tinham conectividade k na rede de tamanho $N-1$. A segunda parcela é referente à probabilidade de que um nó com conectividade $k-1$ receba uma conexão e seja promovido para a população S_k . O terceiro termo subtrai os nós com conectividade k que recebem mais uma conexão. O último termo acrescenta o novo nó que entra na rede com m conexões.

A probabilidade de um nó ter conectividade k é, simplesmente, $p(k, N) = S_k(N)/N$. Vamos, agora, determinar a forma de $p(k)$ no limite em que N vai a infinito. Neste limite, o número total de conexões no sistema pode ser aproximado por mN , e o termo de normalização, portanto, fica $2mN$.

Temos, então,

$$p(k) = \frac{k-1}{2} p(k-1) - \frac{k}{2} p(k) + \delta_{k,m}, \quad (1.6)$$

que leva a

$$p(k) = \frac{k-1}{k+2} p(k-1) \quad (1.7)$$

e

$$p(m) = \frac{2}{m+2}. \quad (1.8)$$

resultando, finalmente, em

$$p(k) = \frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)}. \quad (1.9)$$

No limite em que k vai ao infinito, essa solução é levada a uma lei de potência $p(k) \sim k^{-\gamma}$ com o expoente $\gamma = 3$.

1.5.2 O tratamento contínuo

Um outro meio de determinar a forma da distribuição de conectividade no modelo do contato preferencial é através do tratamento contínuo (BARABÁSI; ALBERT, 1999). Neste tratamento, relaciona-se a conectividade média dos nós, $\langle k_i \rangle$, com o instante i em que o nó é introduzido na rede. Para isso, podemos expressar a taxa com que a conectividade média do nó cresce com o tamanho da rede na forma

$$\frac{\partial \langle k_i \rangle}{\partial S} = m\Pi(\langle k_i \rangle). \quad (1.10)$$

Usando a forma do contato preferencial (1.4), obtemos

$$\frac{\partial \langle k_i \rangle}{\partial S} = \frac{\langle k_i \rangle}{\sum_j k_j}. \quad (1.11)$$

A solução de (1.11) deve satisfazer à condição inicial de que o nó entrou na rede no instante i com conectividade m . Como cada nó introduz m conexões à rede, no limite assintótico a constante de normalização pode ser tomada como

$$\sum_j k_j \sim 2mN. \quad (1.12)$$

Dessa forma, a solução de (1.11) deve ser

$$\langle k_i \rangle = m \left(\frac{N}{i} \right)^\beta, \quad (1.13)$$

onde $\beta = 1/2$.

Neste ponto, vamos determinar a probabilidade $P(k)$ para que um nó tenha conectividade maior que k . Podemos esperar que os nós que atingiram a conectividade k sejam aqueles que entraram primeiro na rede. Usando a Eq. 1.13, podemos determinar que, numa rede de tamanho N , os nós cujas conectividades superem k devem ser aqueles introduzidos antes do instante $i = m^{1/\beta} N/k^{1/\beta}$. Fazemos, então, a associação de $P(k)$ com a fração da rede formada pelos nós introduzidos antes do instante i ,

$$P(k) \propto \left(\frac{m}{k}\right)^{1/\beta}. \quad (1.14)$$

A função $P(k)$ é uma distribuição acumulada e pode ser relacionada com a distribuição de conectividade,

$$\rho(k) = -\frac{\partial P(k)}{\partial k} \propto \frac{m^{1/\beta}}{\beta} k^{-1-1/\beta}. \quad (1.15)$$

Chegamos, assim, a uma distribuição em lei de potência com expoente $\gamma = 1 + 1/\beta = 3$, em concordância com o resultado encontrado através da equação mestra na Seção 1.5.1.

1.6 O truncamento exponencial da distribuição de conectividade

A solução da Eq. 1.9 é exata no limite em que o tamanho da rede S vai a infinito. Soluções para tamanhos de rede finitos podem ser obtidas iterando a equação (1.5) numericamente. A Fig. 8 mostra a distribuição de probabilidade acumulada para diferentes tamanhos de rede. A distribuição acumulada é definida como

$$P(k) = \sum_{k'=k}^{\infty} p(k') \quad (1.16)$$

e deve decrescer segundo uma lei de potência com expoente $\alpha = \gamma - 1 = 2$. A Fig. 8 mostra que, mesmo em tamanhos finitos, a distribuição segue o comportamento em lei de potência. No entanto, o tamanho finito da rede restringe o número máximo

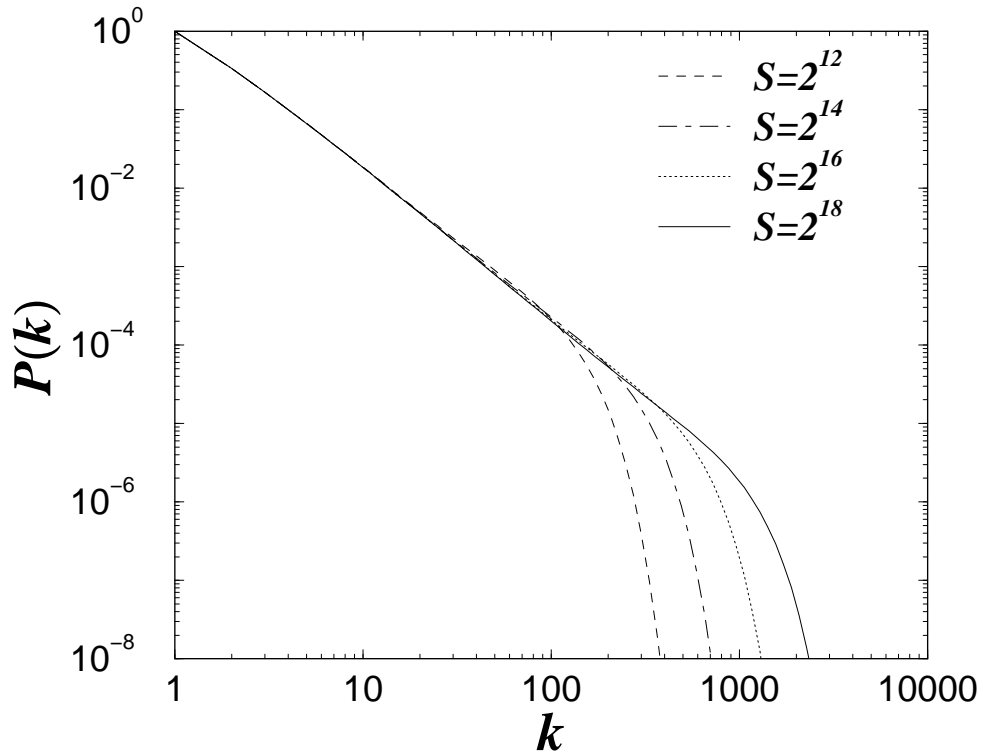


Figura 8: Distribuição acumulada de conectividade para diferentes tamanhos de rede. Observamos que as distribuições seguem um comportamento em lei de potência, $P \propto k^{-\alpha}$, seguido de um truncamento exponencial. A posição do truncamento depende do tamanho da rede.

de conexões. Acima de um certo valor, a distribuição muda para um decaimento do tipo exponencial¹. Nota-se, na Fig. 8, que a posição do truncamento exponencial move-se para maiores valores de k quando a rede cresce.

A partir do resultado do tratamento contínuo, pode-se compreender como o truncamento depende do tamanho da rede. Vimos que a conectividade de um nó cresce segundo $(i/S)^\beta$. Os nós mais conectados, portanto, estão provavelmente entre aqueles presentes nos primeiros momentos da rede, $i \approx 1$. Portanto, a probabilidade de encontrar um nó com mais que S^β conexões, deve ir rapidamente a zero, ou seja, o expoente $\beta = 1/\alpha$ controla a posição do truncamento exponencial. A Fig. 9 mostra que, de fato, a posição do truncamento colapsa quando as curvas são reescaladas

¹De fato, pode-se mostrar que a distribuição apresenta um truncamento do tipo e^{-k^2} (DOROGOVTSSEV; MENDES; SAMUKHIN, 2001).

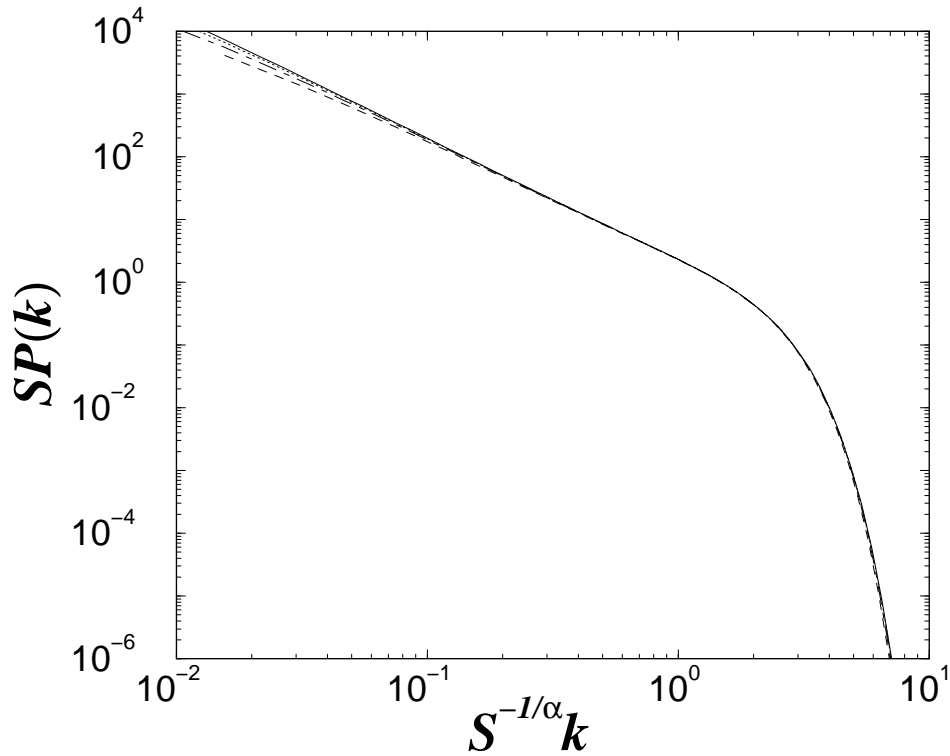


Figura 9: As mesmas distribuições acumuladas da Fig. 8 reescaladas segundo $S^{1/\alpha}$ de forma a colapsar a região de decaimento exponencial.

segundo (DOROGOVITSEV; MENDES; SAMUKHIN, 2001; KRAPIVSKY; REDNER; LEYVRAZ, 2000)

$$P(k) \equiv SP\left(\frac{k}{S^{1/\alpha}}\right) \quad (1.17)$$

A posição do truncamento exponencial determina o número máximo de conexões que um nó pode atingir em uma rede gerada pelo modelo do contato preferencial. Essa informação é relevante porque esses nós mais fortemente ligados formam um esqueleto que acessa toda a rede. Foi mostrado que a conectividade global da rede é fortemente sensível à eliminação dos maiores nós (ALBERT; JEONG; BARABÁSI, 2000).

Diferentes efeitos observados em redes reais podem afetar a posição do truncamento (AMARAL, 2000b). Por exemplo, a rede formada por aeroportos, onde

as conexões são estabelecidas pelos vôos, apresenta um truncamento relativamente pequeno. É evidente que um aeroporto tem um limite no número de vôos que consegue receber por dia e esse limite estabelece o valor máximo para a conectividade independente do tamanho da rede. O truncamento é afetado, também, se os nós que entram na rede, ao estabelecerem suas conexões, acessam apenas uma parte da rede. Roteadores, por exemplo, devem, mais provavelmente, estabelecer conexões com os outros roteadores fisicamente mais próximos; uma página da internet deve ter *links* para páginas com assuntos em comum. Pode-se mostrar que, neste caso, a conectividade em que acontece o truncamento deve crescer logaritmicamente com o tamanho da rede (MOSSA; AMARAL, 2002).

1.7 Rede Apoloniana

Modelos determinísticos de redes complexas podem ser particularmente adequados para construir redes com propriedades topológicas predeterminadas, por exemplo alto grau de agregação, compactação, etc. Alguns exemplos de modelos determinísticos de redes sem escala foram propostos e usados com sucesso para descrever o crescimento de redes aleatórias (JUNG; KAHNG, 2001; DOROGOVTSSEV; GOLTSEV; MENDES, 2002), mas estes modelos não apresentam a propriedade de serem acomodados em espaços Euclidianos. Recentemente (ANDRADE et al., 2004) introduziram uma nova classe de redes, chamadas redes Apolonianas, cujas propriedades são:

- podem ser tanto determinísticas como aleatórias;
- são sem escala;
- possuem característica de pequeno mundo;
- podem ser acomodadas em espaços euclidianos.

Na sua versão determinística, a rede Apoloniana pode ser relacionada com o problema do empacotamento de esferas de acordo com o matemático grego Apolônio de Perga (BOYD; MATH, 1973). Na sua solução clássica, inicialmente temos três círculos que tocam a si mesmos. O espaço entre esses círculos é preenchido por outro círculo que toca os três primeiros, formando assim três interstícios ainda menores, que são

então preenchidos da mesma forma, como mostrado na Fig. 10a . A distribuição de tamanhos de círculos segue uma lei de potência com expoente próximo a 1.3 (BOYD; MATH, 1973). De fato, existem muitas outras topologias com diferentes dimensões fractais (HERRMANN; MANTICA; BESSIS, 1990). Esse procedimento pode também ser generalizado para dimensões mais altas (BARAM; HERRMANN; RIVIER, 2004).

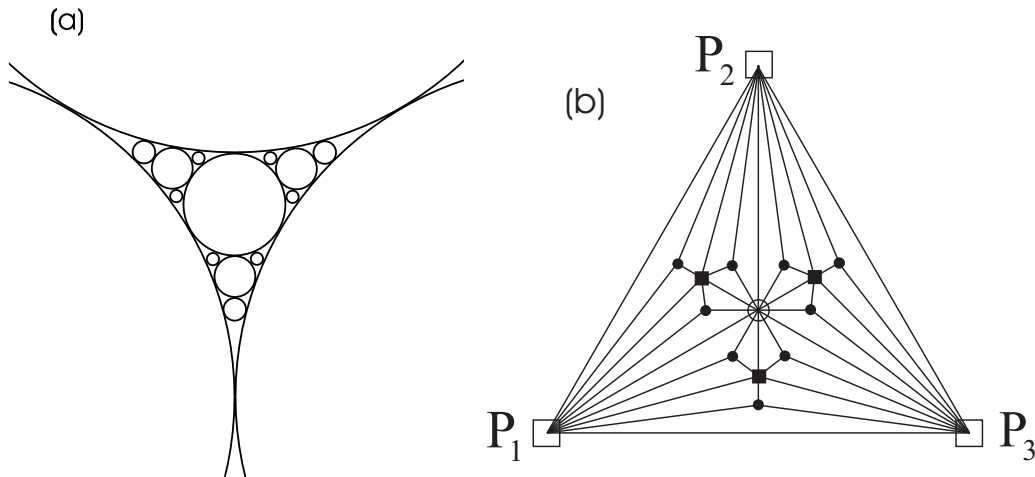


Figura 10: (a) Formato Apoloniano clássico, (b) Rede Apoloniana, primeira, segunda e terceira geração representadas respectivamente pelos símbolos \circ , \blacksquare e \bullet (ANDRADE et al., 2004).

O empacotamento Apoloniano pode ser utilizado para descrever empacotamentos densos de grão e foi também usado como um modelo simples para turbulência e fragmentação. Conectando os centros das esferas que se tocam por linhas, obtém-se a rede que no caso clássico da Fig. 10.a, resulta na triangulação correspondente à rede de forças no empacotamento de Apolônio. A rede resultante é o que se chama uma rede Apoloniana (ANDRADE et al., 2004).

É possível notar que a rede Apoloniana é de fato sem escala. A Fig. 10b mostra que a cada geração n o número de sítios N cresce de um fator de três e a coordenação de cada sítio por um fator de dois. Mais precisamente, a cada geração n ($n = 0, 1, 2, \dots$) existem $m(k, n) = 3^n, 3^{n-1}, 3^{n-2}, \dots, 3^2, 3, 1$, e 3 vértices com conectividade $k = 3, 3 \times 2, 3 \times 2^2, \dots, 3 \times 2^{n-1}, 3 \times 2^n$, e 2^{n+1} , respectivamente, onde o último número de vértices e conectividade corresponde aos três cantos, P1, P2, P3. Devido à característica discreta desse espectro, é conveniente trabalhar com a distribuição cumulativa $P(k) = \sum_{k' \geq k} m(k', n) / N_n$, onde $N_n = 3 + (3^{n+1} - 1) / 2$ é o número de

sitions na geração n . É simples mostrar que: $P(k) \propto k^{1-\gamma}$ com $\gamma = 1 + \ln 3 / \ln 2 \approx 2.585$. A característica de pequeno mundo da rede Apoloniana é mostrada na Fig. 11.

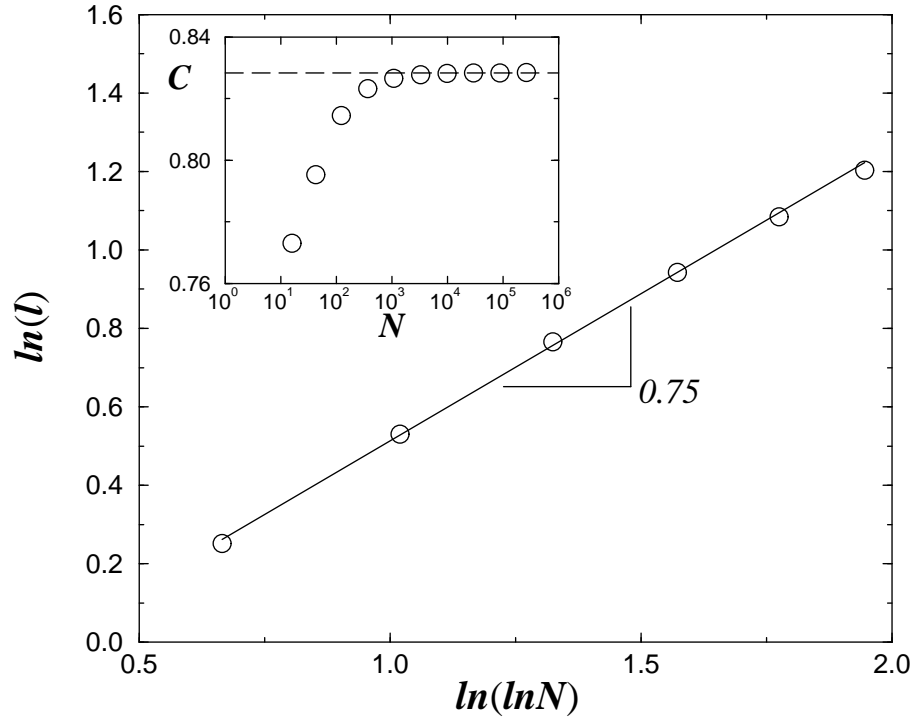


Figura 11: Distância média entre dois nós L como função do número de nós N . A linha sólida é um guia para os olhos e tem uma inclinação $3/4$. O detalhe mostra em papel semilog o coeficiente de agregação C como função de N . A linha tracejada mostra o valor observado para grandes redes $C = 0.828$.

É observado que $l \propto (\ln N)^\beta$, com $\beta \approx 3/4$. Este é um novo comportamento entre o mundo pequeno, $l \sim \ln N$, e ultra pequeno, $l \sim \ln(\ln N)$ (ADLER, 1985; AMARAL, 2000a). Uma segunda propriedade caracterizando uma rede de mundo pequeno é o coeficiente de agregação. Foi mostrado por Andrade et. al. (ANDRADE et al., 2004) que no limite de grandes redes o coeficiente converge para 0.828 (ver detalhe na Fig. 11). Esse é um valor relativamente alto, quando comparado por exemplo com o observado para as redes de colaboração de atores $C = 0.79$ (WATTS; STROGATZ, 1998). O comportamento destas duas propriedades caracteriza o cenário de pequeno mundo (WATTS; STROGATZ, 1998).

1.8 Propriedades observadas em redes reais

Várias redes complexas podem ser construídas a partir de dados obtidos de sistemas reais. Uma revisão sobre as propriedades das redes de diferentes sistemas pode ser encontrada em (ALBERT; BARABÁSI, 2002). Nesta seção, vamos apresentar algumas propriedades observadas em redes de sistemas naturais e artificiais.

1.8.1 Internet

As informações que trafegam na rede mundial de computadores, a internet, são distribuídas por roteadores que determinam para onde cada pacote de informação deve ir. Um estudo da rede de roteadores (PASTOR-SATORRAS; VESPIGNANI, 2001a) mostrou que a internet não obedece uma distribuição de conectividade Poissoniana. De fato, a distribuição de conectividade tem a forma de uma lei de potência $p(k) \sim k^{-\gamma}$, com $\gamma = 2.23$ (PASTOR-SATORRAS; VESPIGNANI, 2001a). O coeficiente de agregação, C_a , medido em diferentes momentos entre 1997 e 1999, por exemplo, variou entre 0.18 a 0.3 (PASTOR-SATORRAS; VESPIGNANI, 2001a), sendo bem maior que o esperado em uma rede aleatória com os mesmos parâmetros, $C_a = 0.0001$. Mostrou-se, também, que a distância média é da ordem de $l \sim 9$.

1.8.2 WWW

Uma outra visão possível da internet consiste em determinar as propriedades da rede formada pelas páginas de hipertexto (ALBERT; JEONG; BARABÁSI, 1999). Neste tipo de rede, as conexões têm direção, ou seja, é possível determinar o número de citações *em uma página* e o número de citações *para uma página*. Analisando a rede formada por mais de 300.000 páginas, verificou-se que, neste caso, também se obtém uma distribuição de conectividade em lei de potência, com expoente $\gamma = 2.45$ para o número de citações por página, e $\gamma = 2.1$ para o número de vezes que cada página é citada. A distância média observada na rede de páginas da internet é de cerca de 16 conexões (ALBERT; JEONG; BARABÁSI, 1999). O coeficiente de agregação foi calculado considerando as conexões bidirecionais, resultando em $C_a \approx 0.1$, um valor três ordens de grandeza superior ao esperado em uma rede aleatória.

1.8.3 Redes metabólicas

Em um trabalho recente (JEONG et al., 2000) estudou-se a rede correspondente ao metabolismo de 43 diferentes organismos. Os nós da rede são os substratos e as conexões são estabelecidas quando esses substratos participam em uma mesma reação química no organismo. Essa rede tem uma distribuição de conectividade em lei de potência com expoente γ entre 2.0 e 2.4, dependendo do organismo, e distância média l da ordem de 3.3.

1.8.4 Outros sistemas

Muitos outros sistemas estudados apresentam propriedades semelhantes. O pequeno valor observado para a distância média em relação ao tamanho dos sistemas é consistente com o previsto pelo modelo ER. No entanto, as redes reais normalmente apresentam coeficientes de agregação bem mais altos que os previstos por esse modelo. Outro ponto em que o modelo ER falha é na distribuição de conectividade. Os exemplos mostrados acima têm distribuição de conectividade em lei de potência. Esse tipo de distribuição não acontece em todos os sistemas. As redes ecológicas formadas pelas conexões predador-presa, por exemplo, obedecem uma distribuição exponencial (CAMACHO; GUIMERA; AMARAL, 2002). Entretanto, distribuições em lei de potência são observadas em vários sistemas distintos, indicando um processo universal de formação para esse tipo de rede. Também foram observadas distribuições em lei de potência nas redes formadas pelas colaborações de atores em filmes de cinema (BARABÁSI; ALBERT, 1999), na rede de colaborações em artigos científicos (NEWMAN, 2001), e na rede de relações sexuais na Suécia (LIJEROS et al., 2001), dentre outras.

Um exemplo dentro do campo da Física foi observado no mapa de conformações em agregados de partículas que interagem via potencial Lennard-Jones (DOYE, 2002). Esse resultado foi obtido construindo-se o mapa de conformações de um sistema de 14 átomos. O mapa apresenta milhares de estados que são mínimos locais. Cada um desses estados é tratado como um nó na rede e as conexões são estabelecidas se existe a possibilidade do sistema seguir diretamente de um mínimo ao outro. A rede construída dessa forma apresenta uma distribuição de conectividade em lei

de potência com expoente $\gamma = 2.78$.

1.9 Redes Neurais

Concluimos este capítulo introdutório com algumas notas históricas sobre redes neurais. A era moderna das redes neurais começou com o trabalho pioneiro de McCulloch e Pitts (MCCULLOCH; PITTS, 1943). McCulloch foi um psiquiatra e neuroanatomista por treinamento; passou cerca de 20 anos refletindo sobre a representação de um evento no sistema nervoso. Pitts foi um prodígio matemático que se associou a McCulloch em 1942. De acordo com Rall (1990), o artigo de 1943 de McCulloch e Pitts surgiu dentro de uma comunidade de modelagem neural em atividade na Universidade de Chicago por pelo menos cinco anos antes de 1943, sob a liderança de Rashevsky. No seu artigo, McCulloch e Pitts descrevem um cálculo lógico das redes neurais que unificava os estudos de neurofisiologia e da lógica matemática. Eles supuseram que o modelo formal de um neurônio deveria seguir uma lei “tudo ou nada”. Com um número suficiente dessas unidades simples e com conexões sinápticas ajustadas apropriadamente e operando de forma síncrona, McCulloch e Pitts mostraram que uma rede assim constituída realizaria, a princípio, a computação de qualquer função computável. Este foi um resultado muito significativo, sendo reconhecido como o nascimento das disciplinas de redes neurais e inteligência artificial. Este trabalho influenciou von Neumann a usar chaves de atraso idealizadas, derivadas do neurônio de McCulloch-Pitts na construção do EDVAC (Electronic Discrete Variable Automatic Computer) que foi desenvolvido a partir do ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer) (Aspray e Burks, 1986). O ENIAC foi o primeiro computador eletrônico de propósito geral, que foi construído na Escola de Engenharia Elétrica Moore da University of Pennsylvania de 1943 a 1946. A teoria de McCulloch-Pitts sobre redes neurais formais se destacou de forma proeminente na segunda das quatro palestras proferidas por von Neumann na University of Illinois em 1949. Em 1948, foi publicado o livro “Cybernetics” de Wiener, descrevendo alguns conceitos importantes sobre controle, comunicação e processamento estatístico de sinais. A segunda edição do livro foi publicada em 1961, adicionando material novo sobre aprendizagem e auto-organização. Neste livro, Wiener tenta explicar o significado físico da mecânica estatística no contexto

desse assunto, mas foi com Hopfield (mais de 30 anos depois) que se conseguiu consumir a ligação entre a mecânica estatística e os sistemas de aprendizagem.

O próximo desenvolvimento significativo das redes neurais veio em 1949, com a publicação do livro de Hebb “The Organization of Behavior”, no qual foi apresentada pela primeira vez uma formulação explícita de uma regra de aprendizagem fisiológica para a modificação sináptica. Especificamente, Hebb propôs que a conectividade do cérebro é continuamente modificada conforme um organismo vai aprendendo tarefas funcionais diferentes e que agrupamentos neurais são criados por tais modificações. Hebb deu seguimento a uma sugestão anterior de Ramón y Cajál e apresentou o seu agora famoso postulado de aprendizagem, que afirma que a eficiência de uma sinapse variável entre dois neurônios é aumentada pela ativação repetida de um neurônio causada pelo outro neurônio, através daquela sinapse. O artigo de Rochester, Holland, Haibt e Duda (1956) talvez seja a primeira tentativa de usar simulação computacional para testar uma teoria sobre redes neurais bem formulada com base no postulado de aprendizagem de Hebb; os resultados de simulação relatados naquele artigo mostram claramente que se deve adicionar inibição para que a teoria realmente funcione. Naquele mesmo ano, Uttley (1956) demonstrou que uma rede neural com sinapses modificáveis pode aprender a classificar conjuntos simples de padrões binários em classes correspondentes. Uttley introduziu o assim chamado neurônio “íntegra e dispara com fuga”, o qual foi mais tarde analisado formalmente por Caianiello (1961). Em um trabalho posterior, Uttley (1979) formulou a hipótese de que a eficiência de uma sinapse variável do sistema nervoso depende da relação estatística entre os estados flutuantes em ambos os lados daquela sinapse, fazendo assim uma associação com a teoria da informação de Shannon. Em 1952, foi publicado o livro de Ashby, “DesignforaBrain: The Origin of Adaptive Behavior”. Este livro trata da noção básica de que o comportamento adaptativo não é inato mas sim é aprendido, e que através da aprendizagem o comportamento de um sistema normalmente evolui. O livro enfatiza os aspectos dinâmicos do organismo vivo como uma máquina e o conceito correlacionado de estabilidade.

Em 1954, Minsky escreveu uma tese de doutoramento em “redes neurais” na Universidade de Princeton, intitulada “*Theory of Neural-Analog Reinforcement Systems and Its Application to the Brain-Model Problem*”. Em 1961, foi publicado um artigo de Minsky sobre Inteligência Artificial intitulado “Steps Toward Artificial Intelli-

gence”, este artigo contém uma grande seção sobre o tema que agora é denominado redes neurais. Em 1967, foi publicado o livro de Minsky, *Computation: Finite and Infinite Machines*. Este livro, estendeu os resultados de 1943 de McCulloch e Pitts e os colocou no contexto da teoria dos autômatos e da teoria da computação. Também em 1954, a idéia de um filtro adaptativo não-linear foi proposta por Gabor, um dos pioneiros da teoria da comunicação e o inventor da holografia. Ele construiu essa máquina com a ajuda de colaboradores, e os detalhes estão descritos em Gabor et al. (1960). A aprendizagem era realizada alimentando-se a máquina com amostras de um processo estocástico, juntamente com a função-alvo que a máquina deveria produzir.

Nos anos 50, iniciou-se o trabalho sobre a *memória associativa* por Taylor (1956). Ele foi seguido por Steinbruch (1961) que introduziu a *matriz de aprendizagem*, esta matriz consiste de uma rede planar de chaves interpostas entre arranjos de receptores “sensoriais” e atuadores “motores”. Em 1969, foi publicado por Willshaw, Buneman e Longuet-Higgins um elegante artigo sobre a memória associativa não-holográfica. Este artigo apresenta dois modelos engenhosos de rede: um sistema ótico simples realizando uma memória de correlação e uma rede neural intimamente relacionada com ele, inspirada na memória óptica. Outras contribuições significativas ao desenvolvimento inicial da memória associativa incluem os artigos de Anderson (1972), Kohonen (1972) e Nakano (1972), que de maneira independente e no mesmo ano introduziram a idéia de uma *memória por matriz de correlação*, baseada na regra de aprendizagem ao *produto externo*.

Von Neumann foi uma das grandes figuras da ciência na primeira metade do século vinte. A *arquitetura de von Neumann*, básica para o projeto de um computador digital, é assim denominada em sua homenagem. Em 1955, foi convidado pela Universidade de Yale para proferir as Palestras Silliman durante 1956. Ele morreu em 1957, e o manuscrito inacabado das Palestras Silliman foi publicado mais tarde como um livro, *The Computer and the Brain* (1958).

Uma questão particularmente interessante no contexto das redes neurais é aquela do projeto de uma rede confiável com neurônios que podem ser vistos como componentes não-confiáveis. Este problema importante foi resolvido por von Neumann (1956) utilizando a idéia de redundância, o que motivou Winograd e Cowan (1963)

a sugerir a utilização de uma representação redundante *distribuída* para as redes neurais. Winograd e Cowan mostraram como um número grande de elementos pode coletivamente representar um conceito individual, com o aumento correspondente em robustez e paralelismo.

Cerca de 15 anos após a publicação do clássico artigo de McCulloch e Pitts, uma nova abordagem para o problema de reconhecimento de padrões foi introduzida por Rosenblatt (1958) em seu trabalho sobre o *perceptron*, um método inovador de aprendizagem supervisionada. O coroamento do trabalho de Rosenblatt foi o chamado *teorema da convergência do perceptron*, cuja primeira demonstração foi delineada por Rosenblatt (1960b); outras provas do teorema também apareceram em Novikoff (1963) e outros. Em 1960, Widrow e Hoff introduziram o algoritmo do mínimo quadrado médio (LMS, Least Mean-Square) e o usaram para formular o *Adaline* (adaptive linear element, elemento linear adaptativo). A diferença entre o perceptron e o Adaline está no procedimento de aprendizagem. Uma das primeiras redes neurais em camadas treináveis com múltiplos elementos adaptativos foi a estrutura *Madaline* (multiple-adaline) proposta por Widrow e seus estudantes (Widrow, 1962). Em 1967, Amari utilizou o método do gradiente estocástico para classificação adaptativa de padrões. Em 1965, foi publicado o livro de Nilsson, *Learning Machines* que ainda é a exposição mais bem escrita sobre padrões linearmente separáveis por hipersuperfícies. Durante o período clássico do perceptron nos anos 1960, parecia que as redes neurais poderiam realizar qualquer coisa. Mas então veio o livro de Minsky e Papert (1969), que utilizaram métodos matemáticos para demonstrar que existem limites fundamentais para aquilo que os perceptrons de camada única podem calcular. Eles afirmavam que não havia razão para supor que qualquer uma das limitações do perceptron de camada única poderia ser superada na versão de múltiplas camadas.

Um problema importante encontrado no projeto de um perceptron de múltiplas camadas é o problema de atribuição de crédito (i.e., o problema de atribuir crédito a neurônios ocultos da rede). A terminologia “atribuição de crédito” utilizada primeiro por Minsky (1961), sob o título de “O problema de Atribuição de Crédito para Sistemas de Aprendizagem por Reforço”. No final dos anos 60, já havia sido formulada a maioria das idéias e conceitos necessários para resolver o problema de atribuição de crédito do perceptron, bem como muitas das idéias que fundamen-

tam as redes (neurais de atratores) recorrentes que são agora denominadas redes de Hopfield. Entretanto, tivemos que esperar até os anos 80 para que emergissem as soluções para esses problemas básicos. De acordo com Cowan (1990) houve três razões para este atraso de mais de 10 anos:

- Uma razão foi tecnológica - não havia computadores pessoais ou estações de trabalho para a experimentação. Quando Gabor, por exemplo, desenvolveu o seu filtro não-linear de aprendizagem, seu grupo de pesquisadores levou mais seis anos para construir o filtro com dispositivos analógicos (Gabor, 1954; Gabor et. al., 1960).
- A outra razão foi em parte psicológica e em parte financeira. A monografia de 1969 de Minsky e Papert certamente não encorajou ninguém a trabalhar com perceptrons, tampouco as agências a apoiar trabalhos sobre eles.
- A analogia entre redes neurais e spins de grade foi prematura. O modelo do vidro de spins de Sherrington e Kirkpatrick foi inventado somente em 1975.

Estes fatores contribuíram de um modo ou de outro para o esmorecimento do interesse continuado em redes neurais nos anos 70. Muitos pesquisadores, com exceção daqueles que trabalhavam em psicologia e em neurociências, abandonaram a área durante aquela década. De fato, somente um punhado dos pioneiros originais mantiveram seu comprometimento com as redes neurais. De uma perspectiva de engenharia, podemos considerar os anos 70 como uma década de adormecimento para as redes neurais. Uma atividade importante que emergiu nos anos 70 foram os mapas auto-organizáveis utilizando aprendizagem competitiva. O trabalho em simulação computacional feito por von der Malsburg (1973) talvez tenha sido o primeiro a demonstrar a auto-organização. Em 1976, Willshaw e von der Malsburg publicaram o primeiro artigo sobre a formação de mapas auto-organizáveis, motivados pelos mapas ordenados de forma topológica do cérebro. Nos anos 80, foram feitas importantes contribuições em várias frentes à teoria e ao projeto de redes neurais, e com isso houve um ressurgimento do interesse pelas redes neurais. Grossberg (1980), baseando-se no seu trabalho anterior sobre aprendizagem competitiva (Grossberg, 1972, 1976a, b), estabeleceu um novo princípio de auto-organização conhecido como teoria da ressonância adaptativa (ART, Adaptive Resonance Theory). Basicamente,

a teoria envolve uma camada de reconhecimento de baixo para cima (bottom-up) e uma camada generativa de cima para baixo (top-down). Se o padrão de entrada e o padrão realimentado aprendido coincidirem, então ocorre um estado dinâmico chamado de “ressonância adaptativa” (i.e., amplificação e prolongamento da atividade neural). Este princípio de projeções para frente/para trás foi redescoberto por outros pesquisadores sob diferentes aspectos. Em 1982, Hopfield utilizou a idéia de uma função de energia para formular um novo modo de se entender a computação executada por redes recorrentes com conexões sinápticas simétricas. Além disso, ele estabeleceu o isomorfismo entre uma rede recorrente assim definida e o modelo de Ising utilizado na Física Estatística. Esta analogia desencadeou um grande interesse da física teórica (e dos físicos) pela modelagem neural, transformando com isso a área de redes neurais. Esta classe particular de redes neurais com realimentação atraiu muita atenção nos anos 1980, e no decorrer do tempo tornou-se conhecida como redes de Hopfield. Apesar de as rede de Hopfield não serem modelos realísticos dos sistemas neurobiológicos, o princípio que elas incorporam, isto é, o armazenamento de informação em redes dinamicamente estáveis, é profundo. A origem deste princípio remonta ao trabalho pioneiro de muitos outros investigadores:

- Cragg e Tamperley (1954, 1955) observaram que assim como os neurônios podem ser “disparados (ativados)” ou “não disparados” (quiescentes), também os átomos em uma rede têm seus spins apontando “para cima” ou “para baixo”;
- Cowan (1967) introduziu a característica de disparo “sigmóide” e a condição de disparo suave para um neurônio que era baseada na função logística;
- Grossberg (1967, 1968) introduziu o modelo aditivo de um neurônio, envolvendo equações não-lineares de diferenças/diferenciais e explorou o uso do modelo como uma base para a memória de curto prazo;
- Amari (1972) introduziu, de forma independente, o modelo aditivo de um neurônio e o utilizou para estudar o comportamento dinâmico de elementos semelhantes a neurônios conectados aleatoriamente;
- Wilson e Cowan (1972) derivaram equações diferenciais não-lineares acopladas correspondentes à dinâmica de populações localizadas no espaço, contendo neurônios tanto excitadores como inibitórios;

- Little e Shaw (1975) descreveram um modelo probabilístico de um neurônio, quer disparando ou não um potencial de ação, e usaram o modelo para desenvolver uma teoria da memória de curto prazo;
- Anderson, Silverstein, Ritz e Jones (1977) propuseram o modelo do estado cerebral em uma caixa (brain-state-in-a-box, BSB), consistindo de uma rede associativa simples acoplada a uma dinâmica não-linear.

Não causa surpresa, portanto, que a publicação do artigo de Hopfield em 1982 tenha gerado tanta controvérsia. Apesar disso, foi neste mesmo artigo que pela primeira vez o princípio do armazenamento de informação em redes dinamicamente estáveis foi explicitado. Além disso, Hopfield mostrou que ele havia se baseado no modelo do vidro de spins da mecânica estatística para examinar o caso especial das redes recorrentes com conexões simétricas, garantindo com isso a sua convergência para uma condição estável. Em 1983, Cohen e Grossberg estabeleceram um princípio geral para estimar a estabilidade de uma memória endereçável por conteúdo, que inclui a versão de contínuo da rede de Hopfield como um caso especial. Uma característica distintiva de uma rede neural de atratores é o modo natural como o tempo, uma dimensão essencial para a aprendizagem, se manifesta na dinâmica não-linear da rede. Neste contexto, o teorema de Cohen-Grossberg é de profunda importância.

Um outro desenvolvimento importante em 1982 foi a publicação do artigo de Kohonen sobre os mapas auto-organizáveis (Kohonen, 1982), utilizando uma estrutura de rede unidimensional ou bidimensional, que era em alguns aspectos diferente do trabalho anterior de Willshaw e von der Malsburg. O modelo de Kohonen recebeu muito mais atenção em um contexto analítico e em relação às aplicações na literatura que o modelo de Willshaw-von der Malsburg, e tornou-se uma referência para a avaliação de outras inovações neste campo. Em 1983, Kirkpatrick, Gelatt e Vecchi descreveram um novo procedimento denominado *recozimento simulado*, para resolver problemas de otimização combinatória. O recozimento simulado tem suas raízes na mecânica quântica. Ele é baseada em uma técnica simples que foi primeiramente utilizada em simulações computacionais por Metropolis et al. (1953). A idéia do recozimento foi utilizada mais tarde por Ackley, Hinton e Sejnowski (1985) no desenvolvimento de uma máquina estocástica conhecida como a máquina de Boltz-

mann, que foi a primeira realização bem sucedida de uma rede neural de múltiplas camadas. Apesar de o algoritmo de aprendizagem da máquina de Boltzmann não ter se mostrado tão eficiente do ponto de vista computacional como o algoritmo de retropropagação (*Back-propagation*), ele superou o impasse psicológico, mostrando que a especulação de Minsky e Papert (1969) não estava corretamente embasada. A máquina de Lann também serviu de base para o desenvolvimento subsequente das redes de *crença sigmóide* de Neal (1992), que conseguiu realizar duas tarefas: (1) a melhoria significativa da aprendizagem e (2) ligação das redes neurais às redes de crença (Pearl, 1988). Uma melhoria adicional no desempenho das redes de crença sigmóide foi realizada por Saul, Jakkola e Jordan (1996) utilizando a teoria do campo médio, uma técnica também com raízes na mecânica estatística.

Um artigo de Barto, Sutton e Anderson sobre *aprendizagem por reforço* foi publicado em 1983. Apesar de eles não terem sido os primeiros a utilizar aprendizagem por reforço (Minsky a levou em consideração na sua tese de doutorado em 1954, por exemplo), especificamente, eles demonstraram que um sistema de aprendizagem por reforço poderia aprender a equilibrar um cabo de vassoura (i.e., um mastro montado sobre uma carreta) na ausência de um professor auxiliar. O sistema requeria somente um sinal de insucesso que ocorre quando o mastro, ao cair, ultrapassa um ângulo crítico a partir da vertical, ou quando a carreta alcança o final da pista. Em 1996, foi publicado o livro *Neurodynamic Programming de Bertsekas e Tsitsiklis*. Este livro colocou a aprendizagem por reforço sobre uma base matemática apropriada, ligando-a à programação dinâmica de Bellman.

Em 1984, foi publicado o livro de Braitenberg, *Vehides: Experiments in Synthetic Psychology*. Neste livro, Braitenberg defende o princípio do desempenho auto-organizado, direcionado a objetivo: obtém-se um melhor entendimento de um processo complexo pela síntese de mecanismos elementares putativos do que por uma análise de cima para baixo (*top-down*). Sob o pretexto da ficção científica, Braitenberg ilustra este importante princípio descrevendo várias máquinas com uma arquitetura interna simples. As propriedades das máquinas e seu comportamento são inspirados em fatos acerca dos cérebros de animais, um assunto que ele estudou diretamente ou indiretamente por mais de 20 anos.

Em 1986, foi relatado por Rumelhart, Hinton e Williams (1986) o desenvolvi-

mento do algoritmo de retropropagação (*back-propagation*). Naquele mesmo ano, foi publicado o célebre livro em dois volumes, *Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructures of Cognition*, editado por Rumelhart e McClelland. Este livro exerceu uma grande influência na utilização da aprendizagem por retropropagação, que emergiu como o algoritmo de aprendizagem mais popular para o treinamento de perceptrons de múltiplas camadas. Na verdade, a aprendizagem por retropropagação foi descoberta de modo independente por outros dois pesquisadores, na mesma época (Parker, 1985; LeCun, 1985). Após a descoberta do algoritmo de retropropagação em meados dos anos 1980, revelou-se que o algoritmo havia sido descrito anteriormente por Werbos na sua tese de doutorado na Universidade de Harvard em agosto de 1974; a tese de doutorado de Werbos foi a primeira descrição já documentada da computação eficiente do gradiente em modo reverso que foi aplicada a modelos gerais de redes, sendo as redes neurais um caso especial. A idéia básica da retrogradação pode ainda ser encontrada mais anteriormente no livro *Applied Optimal Control* de Bryson e Ho (1969). Na Seção 2.2, intitulada “Sistemas de Multiestágios” daquele livro, é descrita uma derivação da retropropagação utilizando um formalismo Lagrangiano. Em última análise, entretanto, deve-se atribuir muito do crédito pelo algoritmo de retropropagação a Rumelhart, Hinton e Williams (1986), por proporem a sua utilização para a aprendizagem de máquina e por demonstrarem como isto poderia funcionar.

Em 1988, Linkser descreveu um novo princípio para a auto-organização em uma rede perceptiva (Linkser, 1988). O princípio é concebido para preservar o máximo de informação sobre os padrões de atividade das entradas, sujeito a limitações como as conexões sinápticas e o intervalo dinâmico das sinapses. Entretanto, foi Linkser quem utilizou conceitos abstratos baseados na teoria da informação (formulada por Shannon em 1948) para formular o princípio da *máxima informação mútua* (Infomax). O artigo de Linkser reacendeu o interesse pela aplicação da teoria da informação às redes neurais. Em particular, a aplicação da teoria da informação ao problema da separação cega de fontes por Bell e Sejnowski (1995) provocou muitos pesquisadores a explorar outros modelos teóricos da informação para resolver uma vasta classe de problemas, conhecidos coletivamente como deconvolução *cega*.

Também em 1988, Broomhead e Lowe descreveram um procedimento para o projeto de redes alimentadas adiante, em camadas utilizando *funções de base radial*

(RBF, radial basisfunctionari), as quais fornecem uma alternativa aos perceptrons de múltiplas camadas. A ideia básica das funções base radial remonta pelo menos ao método das funções de potencial que foi proposto originalmente por Bashkirov, Braverman e Muchnik (1964), e cujas propriedades teóricas foram desenvolvidas por Aizerman, Braverman e Rozonoer (1964). Uma descrição do método das funções de potencial é apresentada no livro, *Pattern Classification and Scene Analysis de Duda e Hart*. Apesar disso, o artigo de Broomhead e Lowe levou a um grande esforço em pesquisa para ligar o projeto de redes neurais a uma importante área da análise numérica e também aos filtros lineares adaptativas. Em 1990, Poggio e Girosi (1990) enriqueceram ainda mais a teoria das redes RBF aplicando a teoria da regularização de Tikhonov. Em 1989, foi publicado o livro de Mead, *Analog VLSI and Neural Systems*. Este livro fornece uma mistura inusitada de conceitos retirados da neurobiologia e da tecnologia VLSI. Sobretudo, ele inclui capítulos sobre a retina de silício e a cóclea de silício, escrito por Mead e co-autores, que são claros exemplos da mente criativa de Mead.

No início dos anos 90, Vapnik e co-autores inventaram uma classe de redes de aprendizagem supervisionada poderosa do ponto de vista computacional, chamada de máquinas de *vetor de suporte* para serem utilizadas em reconhecimento de padrões, regressão e problemas de estimação de Kdade (Boser, Guyon e Vapnik, 1992; Cortes e Vapnik, 1995; Vapnik, 1995, 1998). Este método novo se baseia nos resultados da teoria de aprendizagem com tamanhos de amostra finitos. Uma característica inovadora das máquinas de vetor de suporte é o modo natural pelo qual a *dimensão de Vapnik-Chervonenkis* (V-C) é incorporada no seu projeto. A dimensão V-C fornece uma medida para a capacidade de uma rede neural de aprender a partir de um conjunto de exemplos (Vapnik e Chervonenkis, 1971; Vapnik, 1982).

Agora já está bem estabelecido que o caos constitui um aspecto chave de fenômenos físicos. A questão que muitos levantam é: existe um papel importante para o caos no estudo de redes neurais? Em um contexto biológico, Freeman (1995) acredita que a resposta a esta questão é afirmativa. De acordo com Freeman, os padrões de atividade neural não são impostos de fora do cérebro, eles são construídos a partir do seu interior. Em particular, a dinâmica caótica oferece uma base para descrever as condições que são requeridas para a emergência de padrões auto-organizados em populações de neurônios e entre estas populações.

2 *Crescimento de Agregados em Redes Complexas*

2.1 Introdução

Nas últimas décadas do século XX, parte da comunidade dos físicos passou a se interessar pela dinâmica de sistemas complexos, com componentes interagindo de forma não-linear. Uma das propriedades marcantes de tais sistemas é a presença de leis de escala ou leis de potência. Estas são observadas em diversos contextos, de biologia até o comportamento de bolsas de valores. A tentativa de se construir um esquema teórico geral para esses fenômenos deu origem a novos ramos da física, como a teoria do caos e a física dos sistemas complexos. Conceitos como criticalidade auto-organizada, auto-similaridade, fractais e leis de potência passaram a fazer parte da física contemporânea (BAK, 1996; FEDER, 1988).

A maioria dos sistemas na natureza apresentam uma escala espacial e/ou temporal característica. Por exemplo, a distribuição de gotas de chuva tem uma escala característica: o diâmetro médio de uma gota é bem definido apresentando apenas pequenas variações. Mas existem sistemas que não possuem escala característica, descritos por leis de potência, que são soluções de equações funcionais da forma,

$$f(\lambda x) = \lambda^p f(x) \tag{2.1}$$

Fenômenos críticos ocorrem geralmente em sistemas que se encontram longe do equilíbrio, em processos nos quais a história é importante (STANLEY, 1987). Diversas grandezas termodinâmicas, tais como calor específico, compressibilidade e susceptibilidade magnética, apresentam comportamento singular na região crítica, com

divergências assintóticas caracterizadas por *expoentes críticos*. O comportamento dessas grandezas termodinâmicas próximas a um ponto crítico apresenta caráter universal, caracterizado pelos mesmos valores de expoentes críticos. Teorias clássicas, como a de Van Der Waals para a análise de fluidos e a de Pierre Curie para o ferromagnetismo, já apontavam para esta universalidade, fornecendo um conjunto de valores (hoje ditos clássicos) para os expoentes críticos.

É natural pensar que, para se atingir pontos críticos, seja necessária alguma intervenção externa. Porém, às vezes essa criticalidade é atingida espontaneamente pela natureza, fenômeno denominado *criticalidade auto-organizada* (BAK; TANG; WIESENFELD, 1987). A criticalidade auto-organizada parece surgir quando as partes de um sistema afastam-se lentamente do estado de equilíbrio, e onde as ações de cada parte individual são dominadas pelas interações com as demais partes do sistema. Incêndios em florestas são um bom exemplo de criticalidade auto-organizada. No intervalo entre cada incêndio as árvores crescem. Quanto maior o intervalo de tempo de crescimento, menor será a distância entre as árvores, aumentando a probabilidade de propagação do fogo, ou seja, a região atingida será maior. Essa dinâmica naturalmente leva o sistema a um estado onde incêndios de qualquer proporção, indo de uma pequena região à toda a floresta, podem acontecer (MALAMUD; MOREIN; TURCOTTE, 1998).

A liberdade individual não oferece escapatória para a inevitabilidade da criticalidade. Mesmo que as pessoas interajam umas com as outras através de suas escolhas pessoais, existem, no entanto, padrões matemáticos definidos nas atividades do grupo. Tais padrões não podem nos auxiliar na previsão do que determinada pessoa irá fazer, mas podem ser capazes de dizer o que podemos esperar do aglomerado de pessoas. O conceito de criticalidade pode ser útil na compreensão de fatos históricos. A história é cheia de fatos tidos como inexplicáveis e imprevisíveis. Tomemos como exemplo a Primeira Guerra Mundial, um caso clássico de catástrofe não antecipada (GELLER, 1997). Hegel e Marx pensaram que a história fosse como o crescimento de uma árvore, que progride em direção a uma maturidade estável. Nessa linha, alguns autores (FUKUYAMA, 1992) chegam até a especular que estamos nos aproximando do fim da história, visto que o mundo parece estar atingindo um equilíbrio final na universalização da democracia e do capitalismo. Também existe a possibilidade de ciclos regulares de crescimento e declínio em todas as civilizações.

Outra hipótese é a história ser completamente aleatória, sem nenhum padrão perceptível. A este respeito, H. A. L. Fisher observou (citado por Buchanan (BUCHANAN, 2000)) que há apenas uma regra segura para o historiador: aceitar que o desenvolvimento humano é governado pela contingência e pelo acaso. Entretanto, ainda parece haver padrões indiscutíveis na história, sendo um exemplo óbvio o aumento de nosso conhecimento científico e tecnológico. Talvez a história seja caótica, no sentido dado pela teoria dos sistemas dinâmicos: aparenta ser governada pelo acaso em seu funcionamento, embora não seja genuinamente estocástica. A história pode ser ainda um sistema em estado crítico. Em uma “história crítica”, eventos locais e imediatos controlam um suposto destino. A contingência adquire um papel muito importante. De fato, a contingência é a marca do estado crítico (BAK, 2000). Nessa linha, Kennedy (KENNEDY, 1987) sugeriu que o ritmo histórico das interações entre grandes potências é governado pela quantidade de estresse acumulado nos interesses nacionais em jogo. Isto força a alteração do equilíbrio geopolítico. Comumente o estresse é “aliviado” através de conflitos armados, após os quais a influência de cada nação chega a novo equilíbrio de acordo com o poder econômico real de cada uma. Estatísticas dos últimos cinco séculos revelam uma lei de potência na distribuição de guerras (LEVY, 1983). Sempre que o número de mortes dobra, guerras deste tamanho são 2.62 vezes menos comuns, como podemos ver na Fig. 12.

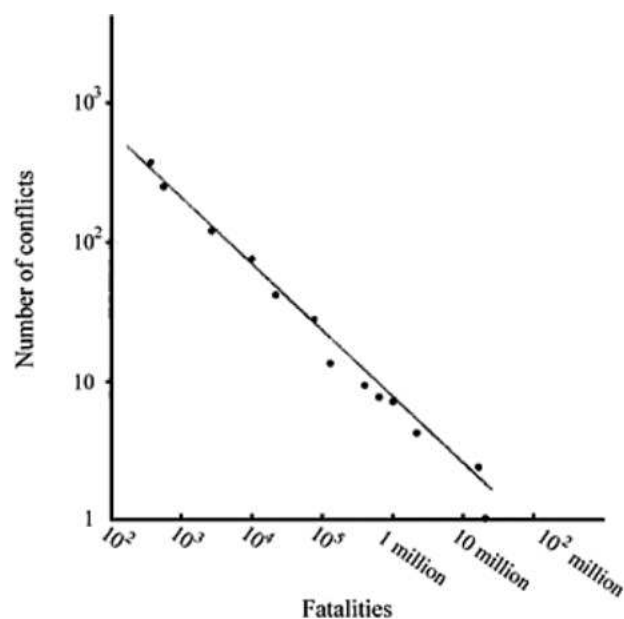


Figura 12: Lei de potência para guerras (BUCHANAN, 2000).

Outro aspecto interessante aqui é que, quando um conflito é iniciado, não há como prever o seu tamanho. Aparentemente não há nada especial que leve um conflito a se tornar uma grande guerra. Tem sido sugerido que o mesmo modelo matemático utilizado na descrição de incêndios florestais consegue explicar os elementos cruciais de como um conflito se espalha (TURCOTTE, 1999).

2.2 Eleições

A sedimentação de novas tendências e idéias em grandes comunidades sociais pode ter um profundo impacto na vida dos indivíduos. Um exemplo onde a dinâmica de formação de opinião pode ser de grande importância é no processo democrático de escolha dos representantes durante as eleições. Além disso, no processo eleitoral, todos os indivíduos são chamados para dar sua opinião de maneira anônima, e os resultados estatísticos gerados por esse evento são facilmente adquiridos, tornando as eleições um sistema ideal para o estudo do processo de formação de opinião.

Estudos recentes (COSTA et al., 2002) mostraram que as distribuições de números de votos por candidato nas eleições proporcionais para Deputados Estaduais e Federais no Brasil apresentam distribuições na forma de uma lei de potência com um expoente universal $\alpha = -1$. A Fig. 13.a mostra as distribuições obtidas para as eleições para Deputados Estaduais e na Fig. 13.b das eleições para Deputados Federais, nos anos de 1998 e 2002. Vale notar que entre os dois pleitos houve mudança nas regras eleitorais que em 2002 vincularam as alianças nacionais para as eleições estaduais. Esse fator torna especialmente surpreendente a semelhança entre os resultados obtidos nas duas eleições, sugerindo que existe um mecanismo intrínseco que governa a dinâmica global do processo eleitoral.

Apesar das campanhas nos meios de comunicação agirem no sentido de divulgarem os candidatos, não é esperado que um eleitor tome sua decisão apenas baseado nessas campanhas. Pois existe um número muito grande de candidatos em eleições proporcionais, e, tipicamente, as pessoas devem dar mais atenção à uma opinião de alguém com quem elas têm algum tipo de contato, do que através de campanhas publicitárias, ou seja, o processo de formação de opinião deve ser movido principalmente através de interações pessoais, indivíduo a indivíduo. Desta forma,

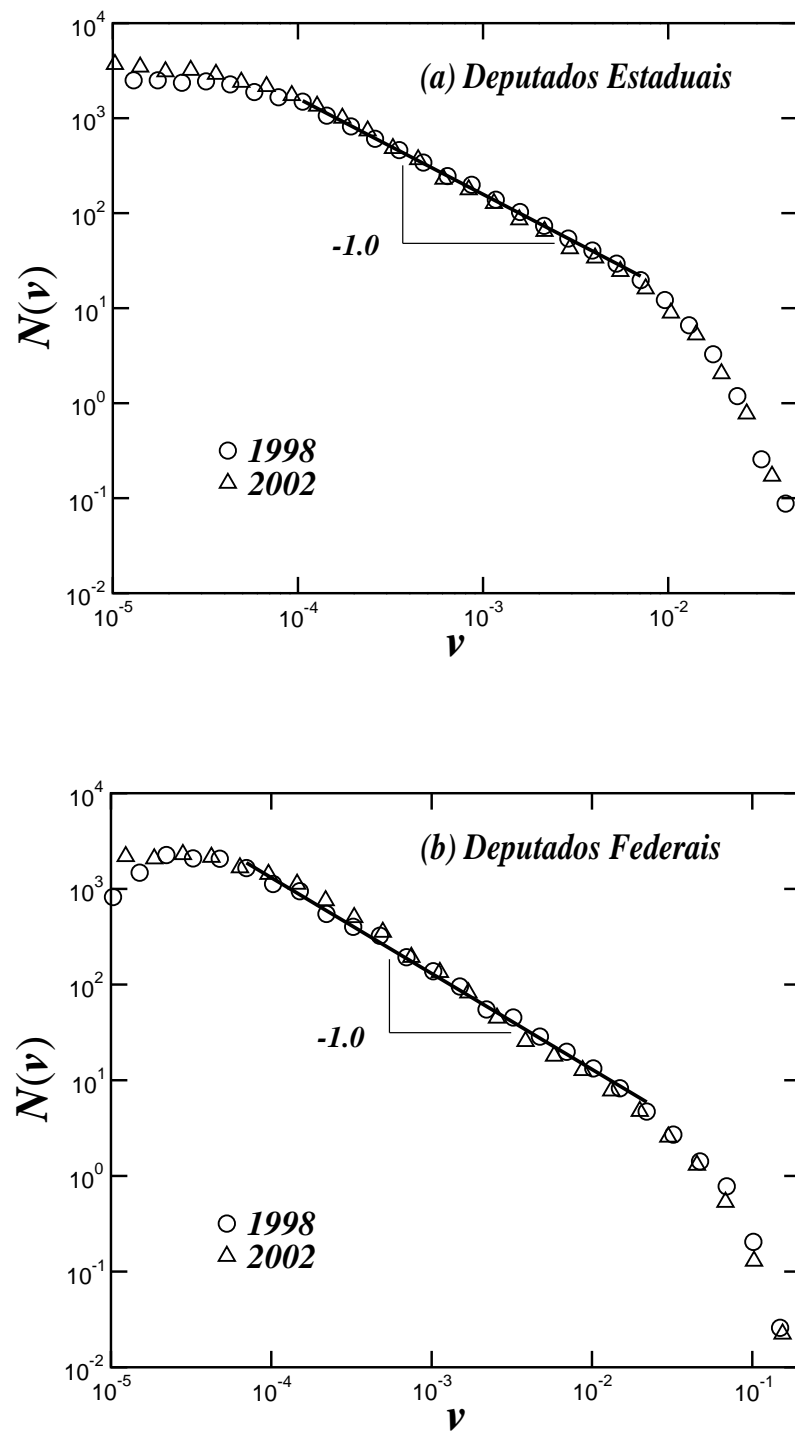


Figura 13: Distribuições de números de votos por candidato nas eleições proporcionais para (a) Deputados Estaduais e (b) Deputados Federais no Brasil, nos anos de 1998 e 2000.

a dispersão de uma opinião segue um padrão similar ao processo de dispersão de epidemias (PASTOR-SATORRAS; VESPIGNANI, 2001b).

Deve se esperar que a estrutura particular da rede de contato entre os agentes de uma sociedade deve ter um impacto na forma como as opiniões se propagam. Certamente, a característica de pequeno mundo observada em muitas redes naturais e sociais possibilita uma rápida dispersão das informações através da rede. Já foi mostrado, por exemplo, que a característica de pequeno mundo é fundamental em processos de coordenação global e auto-regulação.

Outra propriedade comumente estudada em redes complexas é a distribuição de conectividade $P(k)$, esta define a probabilidade com a qual um nó da rede se conecta à exatamente k outros nós, como explicado na Seção 1.5 do Capítulo 1.

Uma característica relevante que freqüentemente é observada em redes complexas é uma distribuição de conectividade na forma de uma lei de potência $P(k) \sim k^{-\gamma}$, com o expoente γ normalmente entre os valores $2 < \gamma < 3$. Esse comportamento em lei de potência para a distribuição de conectividade faz com que a variância dos valores observados de conectividade seja até várias ordens de magnitude superior ao valor médio, de forma que o valor médio não corresponde a uma escala característica do sistema. Por esse motivo, tal tipo de rede é comumente chamada *sem escala* (scale-free). Essa característica pode ter um efeito dramático em processos dinâmicos que acontecem na rede. Por exemplo, já foi mostrado que se o processo de propagação de infecção for mediado por uma rede sem escala, sempre existirá uma fração positiva de indivíduos infectados (PASTOR-SATORRAS; VESPIGNANI, 2001b). Mais recentemente, foi sugerido que uma outra propriedade universal das redes reais seria uma estrutura hierárquica (RAVASZ, 2002). Isso significa que a rede como um todo poderia ser dividida em grandes grupos ou comunidades, essas comunidades conteriam por sua vez “subcomunidades” que também poderiam ser divididas em grupos ainda menores. Esse processo de partição da rede poderia continuar até se chegar em nível local onde os grupos seriam constituídos por apenas alguns nós conectados entre si. Em cada nível da hierárquica o papel de unir os “subgrupos” seria tomado por alguns nós mais conectados, que acessariam os diferentes grupos.

2.3 Modelo

No presente capítulo, pretendemos estudar um processo de crescimento competitivo em redes complexas. Nesse processo muitos estados diferentes e auto-excludentes são acessíveis aos nós da rede. Diremos que os nós que estão no mesmo estado pertencem a um agregado, e que cada um desses agregados competem uns com os outros para tomar um pedaço maior da rede. Esse mecanismo abstrato de crescimento competitivo pode ser pensado como um modelo para uma variedade de processos em redes reais. Por exemplo, pode se pensar que cada agregado representa uma fração de uma população infectada com uma cepa de vírus. Alternativamente, os agregados podem representar varias opiniões dentro de uma sociedade. O que vamos estudar é a distribuição da fração da rede que é ocupada por cada agregado, e investigar se os resultados dependem da estrutura da rede. Como veremos adiante, os resultados obtidos para uma rede sem escala mostram distribuição que seguem uma lei de potência por várias ordens de magnitude. No caso particular das redes hierárquicas que estudamos aqui, obtivemos uma lei de potência para distribuições de tamanho de agregados, semelhante a observada na distribuição de números de votos por candidatos nas eleições para Deputados Federais no Brasil. Isso nos leva a imaginar que o processo pelo qual os eleitores escolhem seus representantes pode ser mediado por uma rede complexa com características bem similares a que estamos estudando.

O modelo para o crescimento competitivo segue os seguintes passos: no primeiro momento, um número n_s de nós é escolhido como sementes do processo de crescimento. Cada semente é o primeiro nó dos diversos agregados, o que leva a um total n_s de estados possíveis. No caso de uma eleição, os estados possíveis representam o número de candidatos. Inicialmente, os nós não pertencem a nenhum agregado, ou seja, todos esses nós estão acessíveis ao crescimento de cada agregado. Em seguida, o processo continua em passos discretos. A cada passo, um dos nós é incorporado ao agregado. Uma vez que o nó é incorporado a um agregado, ele permanecerá no mesmo até o fim do processo de crescimento, quando todos os nós tiverem sido incorporados. Para decidir qual nó é acessível, escolhemos aleatoriamente um par de nós conectados, um pertencendo a um agregado e o outro não. Esse nó acessível passa então a pertencer a esse mesmo agregado.

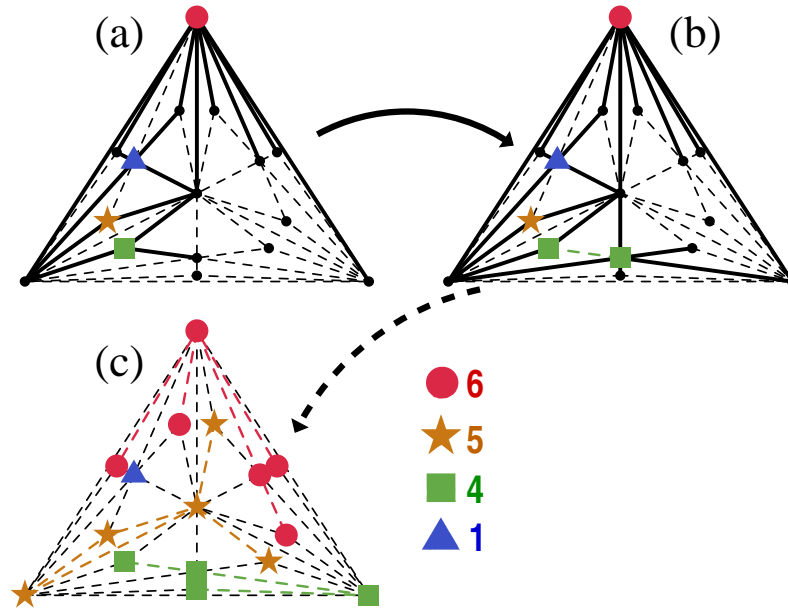


Figura 14: Descrição gráfica de nosso modelo para o processo de crescimento competitivo de agregados. Nesta figura usamos a terceira geração da rede Apoloniana, Seção 1.7 do Capítulo 1, como substrato para o crescimento. Esse escolha se deve a característica planar desta rede que a faz particularmente apropriada para uma representação gráfica. No primeiro passo do processo de crescimento (a), alguns nós (marcados pelo quadrado, triângulo, estrela e pelo círculo maior) são escolhidos para servirem de sementes para o crescimento de agregados na rede. Todos os demais nós (marcados pelos pequenos pontos) não são associados a nenhum dos agregados neste passo; esses nós serão os únicos acessíveis ao crescimento. As linhas tracejadas ligam ou um par de nós que já pertencem a algum agregado, ou um par de nós acessíveis. Nesse passo, essas conexões não influenciam o crescimento. As linhas mais largas ligam um nó que já foi incorporado a um agregado a algum nó ainda acessível. São essas linha que mediam o crescimento dos agregados. A cada passo qualquer uma dessas linhas pode ser escolhida com a mesma probabilidade, e o nó acessível é incorporado ao mesmo agregado que seu vizinho. Desta forma, a velocidade com que um agregado cresce é proporcional a seu perímetro, isto é, ao número de de conexões de um nó no agregado para um nó acessível. No segundo passo (b) um novo nó é incorporado ao agregado marcado pelos quadrados e novas linhas largas são adicionadas ao perímetro desse agregado. O processo continua até que todos os nós tenham sido incorporados a algum dos agregados (c). Nesse ponto o tamanho dos agregados é computado. Esse mecanismo de crescimento é uma espécie de processo “ganancioso”, ou seja, quanto maior o perímetro do agregado mais rápido ele cresce incorporando ainda mais nós e conexões.

Na Fig. 14 mostramos uma descrição pictórica do modelo. É importante notar que a taxa de crescimento de um agregado é proporcional ao número de nós acessíveis que são vizinhos do agregado. Desta forma, esse modelo descreve um processo de crescimento “ganancioso”, isto é, os agregados contendo mais nós, deverão ter mais conexões aos nós acessíveis, e tendem a crescer mais depressa do que os pequenos agregados. Assim, esse modelo é de alguma forma similar ao modelo do contato preferencial para o crescimento de redes. No entanto, o crescimento competitivo difere significativamente deste modelo, pois dentre todas as sementes que estão presentes no começo do processo e as que dariam origem aos maiores agregados seriam aquelas cujo crescimento começa antes das outras. A escolha de uma topologia particular para a rede deve ter efeito no processo de crescimento. Por tanto, começamos nosso estudo com modelos mais simples de construção de rede que foi sugerido por Erdős-Rényi(ER), Seção 1.2 do Capítulo 1.

Na Fig. 15 mostramos a fração da rede ocupada por cada agregado quando o processo de crescimento acontece na rede ER. Para obter essas distribuições utilizamos redes contendo 10^6 nós. Fizemos simulações com um número de sementes indo de 10^2 a 10^4 . Para manter o número de amostras de agregados constante, igual a 10^5 , foram feitas mais realizações para os sistemas com menos sementes. As distribuições obtidas para essa topologia seguem aproximadamente uma forma exponencial, com comprimento característico dependendo do número n_s de agregados competindo. No detalhe da Fig. 15 mostramos as distribuições reescaladas pelo número de sementes n_s . As distribuições obtidas para essa topologia são limitadas por um truncamento exponencial com uma escala característica que depende apenas da densidade de agregados competindo no crescimento. Esse resultado pode ser compreendido quando se nota que o tamanho médio dos agregados N/n_s é o inverso da densidade de sementes. A curva contínua é a função exponencial e descreve bem o comportamento das distribuições com um desvio apenas para pequenos tamanhos de agregados. Já a curva tracejada é um ajuste para a função $p(x) = c * x^{-\alpha} * e^{-x}$, como os parâmetros $c = 0.85$ e $\alpha = 0.17$. Com esses parâmetros, a linha tracejada descreve as distribuições perfeitamente.

Em seguida, vamos estudar nosso modelo de crescimento em uma rede sem escala. Para tanto, utilizamos o modelo do contato preferencial, já descrito na Seção 1.5 do Capítulo 1. A longa cauda da distribuição para grande valores de

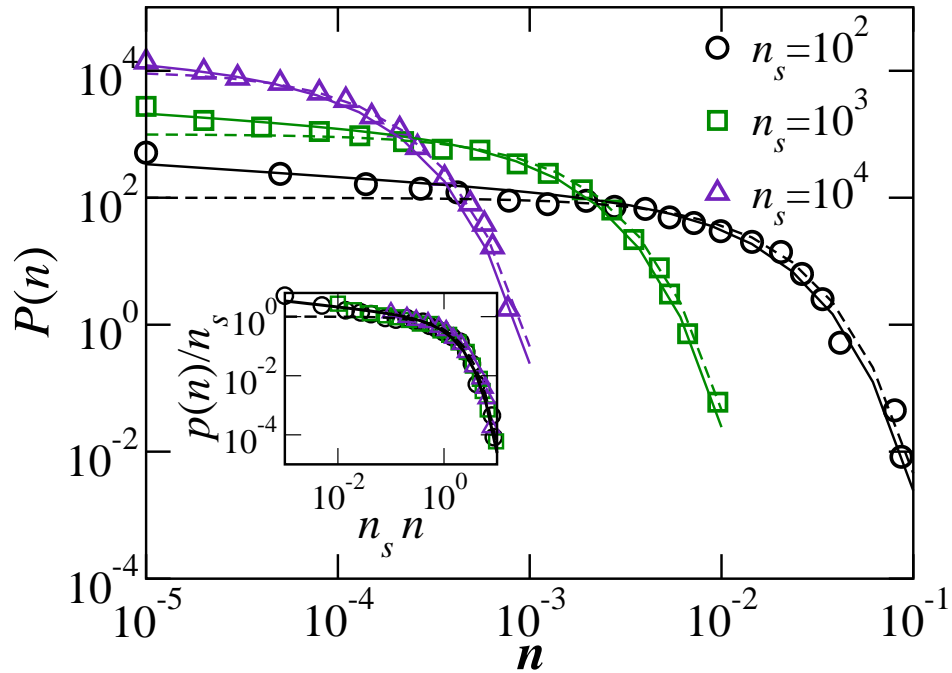


Figura 15: Distribuições de tamanhos de agregados obtidas quando o modelo de crescimento competitivo acontece sobre uma rede do tipo ER. Essas distribuições foram obtidas com redes contendo 10^5 nós. Para garantir uma boa amostragem estatística, foram obtidos 10^5 amostras de agregados para cada curva. Isso implica que foram feitas mais realizações para os casos com menos sementes de forma a manter o número de amostras de agregados constante. As distribuições obtidas com essa topologia seguem aproximadamente uma forma exponencial com um comprimento característico dependendo do número de sementes n_s . As linhas tracejadas correspondem as funções $P(n) = n_s e^{-n_s n}$. As linhas contínuas são as funções $p(n) = C n_s^{1-\gamma} n^{-\gamma} \exp(-n_s n)$, com os parâmetros $C = 0.85 \pm 0.003$, e $\gamma = 0.2 \pm 0.05$, obtidos a partir de um ajuste linear para os dados colapsados mostrados no detalhe. A figura mostra que para as redes do tipo ER a forma da distribuição é completamente determinada pela densidade de sementes para o processo de crescimento.

conectividade obtida neste modelo de rede, pode ter um efeito dramático no crescimento dos agregados. Se algum agregado incorpora um dos nós mais conectados no começo do processo, esse agregado terá sua taxa de crescimento aumentado por um grande fator em apenas um passo e deverá, muito provavelmente, incorporar uma grande fração da rede. Devemos esperar que a distribuição de tamanho de agregados se estenda por várias ordens de magnitude.

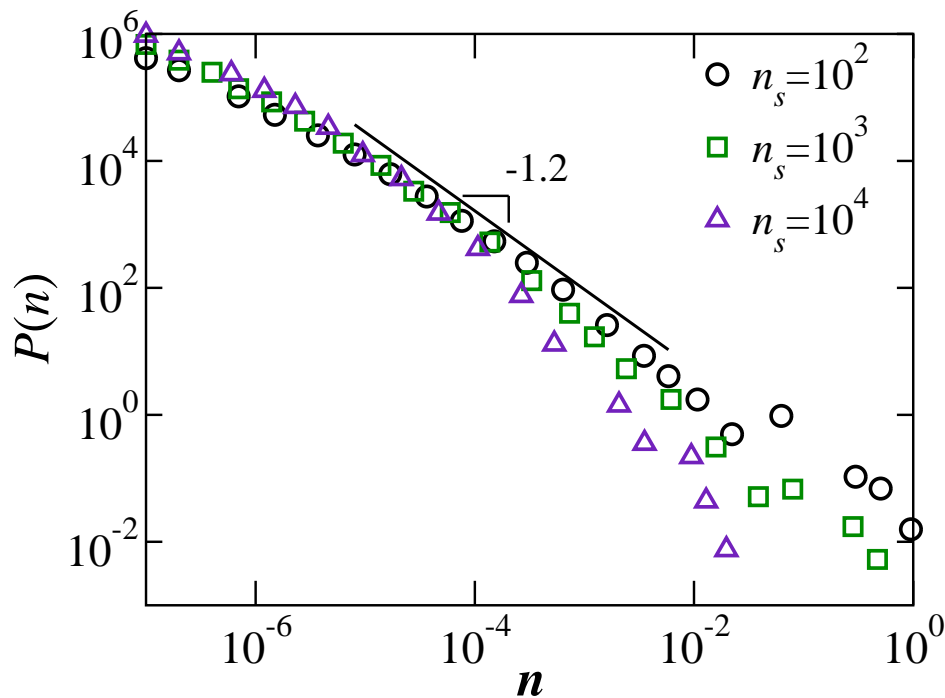


Figura 16: Distribuições de tamanhos normalizados obtidas quando o modelo é realizado sobre uma rede construída com o esquema do contato preferencial (BARABÁSI; ALBERT, 1999). Foram usados 10^7 nós e obtidos 10^5 amostras para cada valor de n_s . Diferente do observado com as redes ER não é possível colapsar as distribuições nesse caso. No entanto, nota-se que para qualquer valor de n_s são obtidas distribuições altamente dispersas com tamanhos de agregado indo de apenas alguns nós até quase toda a rede. A linha contínua é um ajuste em lei de potência, $P(n) \sim n^{-\alpha}$, com expoente $\alpha = 1.2$, obtida para a região em escala da distribuição com $n_s = 10^2$. A inclinação das curvas parece crescer a medida que o número de agregados competindo cresce.

De fato, como é mostrado na Fig. 16, temos uma larga distribuição com a maioria dos nós ocupando uma pequena fração da rede, enquanto alguns crescem até tomar quase toda a rede. Para essas simulações, utilizamos uma rede com 10^6 nós e obtivemos 10^5 amostras de agregados para cada valor de n_s . As curvas apresentam

uma região em lei de potência $P(n) \sim n^{-\alpha}$, com expoente $\alpha = 1.2$ para o caso com $n_s = 10^2$. É interessante notar que a dinâmica do crescimento competitivo magnifica o efeito da distribuição sem escala produzindo distribuições de tamanho de agregado com expoentes menores que o observado na distribuição de conectividade. Essa cauda estendida da distribuição implica que, diferente do que foi observado para as redes ER, o tamanho médio de agregado não pode ser mais tomado como uma escala característica para o processo, já que ocorrem casos de agregados com tamanho superior à média.

Apesar do modelo do contato preferencial produzir uma distribuição de conectividade similar ao que é observado em redes reais, este modelo não apresenta, a auto similaridade e estrutura hierárquica também encontrada nestas redes. Foi recentemente proposto (RAVASZ; BARABÁSI, 2003) que a estrutura hierárquica de redes pode ser medida de uma forma quantitativa por meio do coeficiente de agregação dos nós. Uma assinatura dessa estrutura seria uma dependência do coeficiente de agregação com o inverso da conectividade do nó $C(k) \sim -1$. Nenhum dos modelos de rede até aqui utilizados, para o estudo de crescimento competitivo, apresenta esta propriedade. Uma rede que apresenta o comportamento de pequeno mundo, uma distribuição sem escala, assim como uma estrutura hierárquica, é a recentemente proposta rede Apoloniana (ANDRADE et al., 2004).

Seguindo o modelo de rede Apoloniana, apresentada na Seção 1.7 do Capítulo 1, geramos a Fig. 17. Nela mostramos as distribuições obtidas com a 15ª geração da rede, que corresponde a $N = 7.174.456$. Cada curva foi calculada a partir de uma amostra de 10^5 agregados. Neste caso, as distribuições mostram um decaimento em lei de potência com um expoente $\alpha = -1$, independentemente do número inicial de sementes. Este comportamento pode ser entendido com o auxílio de um simples argumento de escala. Dividindo a rede Apoloniana nos quatro nós mais conectados, geram-se três sub-redes que representam uma rede Apoloniana de menor geração. Cada uma das três partes da rede total pode ser dividida novamente gerando nove sub-rede de geração inferior. Pode-se continuar dividindo até o nível de sub-redes que contêm apenas um nó. Para cada uma dessas gerações pode-se calcular as distribuições de tamanhos de agregados. Portanto, deve-se esperar que à medida que se aumenta o número de gerações, a distribuição se aproxime de uma forma

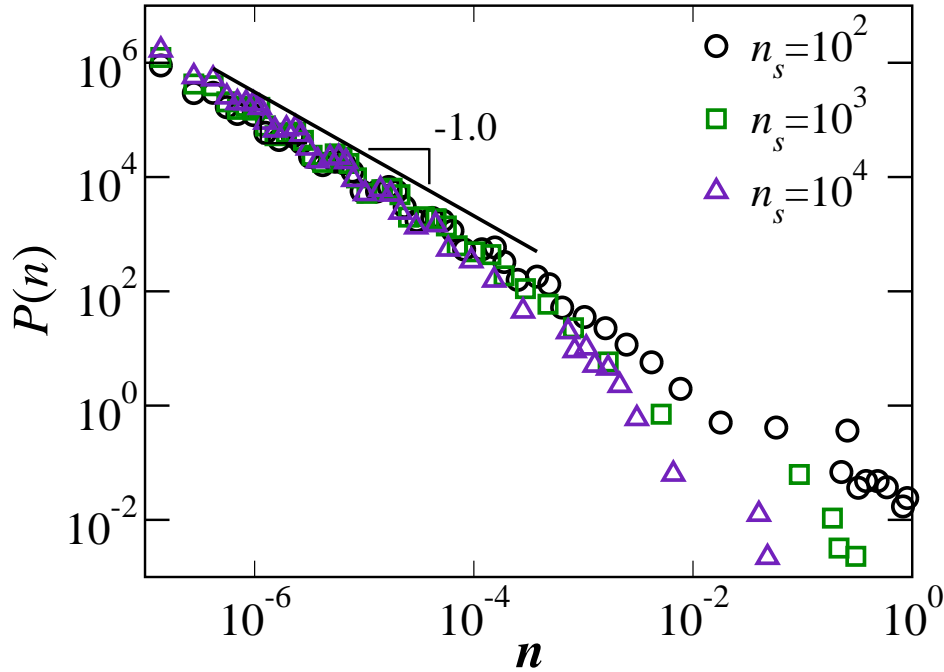


Figura 17: Distribuição de tamanhos normalizados de agregados para o caso do crescimento sobre a rede Apoloniana (ANDRADE et al., 2004). As distribuições foram obtidas para a 15ª geração da rede Apoloniana, o que corresponde a $N = 7174456$ nós. Cada curva é obtida de uma amostra de 10^5 agregados. Neste caso as distribuições apresentam a forma de uma lei de potência, $P(n) \sim n^{-\alpha}$ com um expoente $\alpha \approx 1.0$, independente do número de sementes. A linha contínua é um ajuste linear para a região em escala para os dados com $n_s = 10^2$ sementes. A forma em degraus periódicos das distribuições é remanescente da estrutura auto similar resultante da construção hierárquica da rede Apoloniana.

limite. Note que como cada partição foi separada apenas em quatro pontos, apenas os agregados que tocam esses pontos podem mudar de tamanho quando se vai a uma geração acima. Portanto, essa renormalização só pode mudar a forma da distribuição no limite dos grandes tamanhos, onde a probabilidade de um agregado é da ordem do inverso do tamanho da rede. Isso significa que a distribuição de tamanhos deve obedecer à seguinte relação de escala,

$$P(n) = 3P(3n) \quad (2.2)$$

Uma solução trivial para essa relação é a distribuição delta de Dirac $\delta(n)$. Esse distribuição deveria ser observada se para todas as realizações, um único agregado

crecesse até o limite em que este incorpore quase toda a rede, com todos os demais agregados juntos ocupando uma fração que vai a zero a medida que o número de nós N cresce. Além da função delta, qualquer outra solução para a relação de escala deve ser da forma $P(n) = C/n$. Apesar de não apresentarmos uma demonstração formal de que um agregado “gigante” não emerge no limite de grande redes, nossos resultados numéricos indicam que, pelo menos na região de densidade de sementes que nos simulamos, isso não acontece.

2.4 Conclusões

Neste capítulo, introduzimos um modelo de crescimento competitivo de agregados em redes complexas. Utilizando simulação computacional, mostramos que a fração da rede tomada por cada agregado segue uma distribuição característica, que depende da topologia particular da rede. Para o caso do grafo de rede aleatórias de ER , encontramos um decaimento exponencial, enquanto que para as redes “sem escala”, encontramos distribuições que se estendem por muitas ordens de magnitude de tamanho do agregado. Para o modelo hierárquico da rede Apoloniana, encontramos um decaimento em lei de potência com um expoente $\alpha = -1$. As distribuições obtidas, segundo esse modelo, são similares às distribuições obtidas para as frações de votos por candidato observada nas eleições proporcionais no Brasil (COSTA et al., 2002), o que nos leva a sugerir que os processos de propagação e formação de opinião talvez sejam mediados por uma estrutura hierárquica de interações entre indivíduos e comunidades.

3 *Dinâmica de Redes Neurais Complexas*

3.1 Introdução

A pesquisa científica e tecnológica em redes neuronais artificiais, usualmente denominadas “redes neurais”, tem sido motivada desde o começo pelo reconhecimento de que o cérebro humano processa informações de forma inteiramente diferente do computador digital convencional. O cérebro é um *computador* (sistema de processamento de informação) altamente *complexo, não-linear e paralelo*. Ele tem a capacidade de organizar seus constituintes estruturais, conhecidos por *neurônios*, de forma a realizar certos processamentos (por exemplo, reconhecimento de padrões, percepção e controle motor) muito mais rapidamente que o mais rápido computador digital hoje existente. Considere, por exemplo, a visão humana, que é uma tarefa de processamento de informação (MARR, 1982; LEVINE, 1985; CHURCHLAND; SEJNOWSKI, 1992). A função do sistema visual é fornecer uma representação, ou *leitura*, do ambiente à nossa volta e, mais importante que isso, fornecer a informação de que necessitamos para *interagir* com o ambiente. Para sermos específicos, o cérebro realiza rotineiramente tarefas de reconhecimento perceptivo (p. ex., reconhecendo um rosto familiar inserido em uma cena não-familiar) em aproximadamente 150ms, ao passo que tarefas de complexidade muito menor podem levar dias para serem executadas em um computador convencional. Como outro exemplo, considere o *sonar* de um morcego. O sonar é um sistema ativo de localização por eco. Além de fornecer informações sobre a distância até um alvo (um inseto por exemplo), o sonar de um morcego transmite também informação sobre a velocidade relativa do alvo (SUGA, 1990). A complexa computação neural necessária para extrair toda essa informação do eco do alvo ocorre no interior de um cérebro do tamanho de uma ameixa.

Como, então, um cérebro humano ou de um morcego faz isso? No momento do nascimento, um cérebro tem uma grande estrutura e habilidade de desenvolver suas próprias regras através do que usualmente denominamos "experiência". Na verdade, a experiência vai sendo acumulada com o tempo, sendo que o mais dramático desenvolvimento (i. e., por ligações físicas) do cérebro humano acontece durante os dois primeiros anos de vida; mas o desenvolvimento continua para muito além desse estágio.

3.2 O cérebro humano

O sistema nervoso humano pode ser visto como um sistema de três estágios, como mostrado no diagrama em blocos da Fig. 18 (ARBIB, 1987). O centro do sistema é o cérebro, representado pela rede neural (nervosa), que recebe a informação, percebe-a e toma as decisões apropriadas. Dois conjuntos de setas são mostrados na figura. Aquelas que apontam da esquerda para a direita indicam a transmissão para frente do sinal portador de informação, através do sistema. As setas apontando da direita para a esquerda indicam a presença de realimentação no sistema. Os receptores convertem estímulos do corpo humano ou do ambiente externo em impulsos elétricos que transmitem informação para a rede neural (cérebro). Os atuadores convertem impulsos elétricos gerados pela rede neural em respostas discerníveis como saídas do sistema.

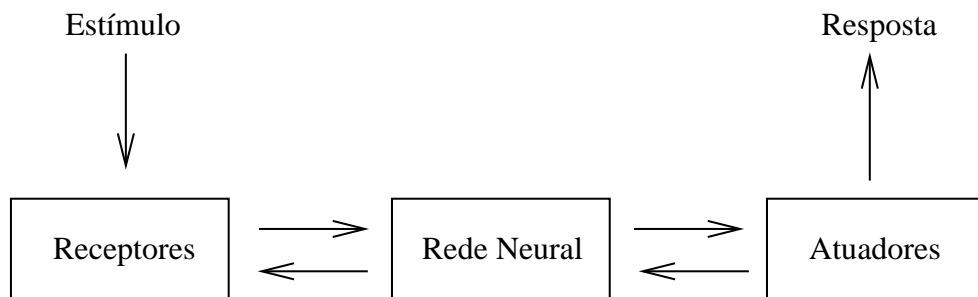


Figura 18: Representação em diagrama em blocos do sistema nervoso.

O esforço para entender o cérebro se tornou mais fácil pelo trabalho de (RAMÓN; CAJÁL, 1911), que introduziu a idéia dos neurônios como constituintes estruturais do

cérebro. Tipicamente, os neurônios são de cinco a seis ordens de grandeza mais lentos que as portas lógicas em silício; os eventos em um circuito de silício acontecem na ordem de nanossegundos, enquanto que eventos neurais acontecem na ordem de milissegundos. Entretanto, o cérebro compensa a taxa de operação relativamente lenta de um neurônio pelo número realmente espantoso de neurônios (células nervosas), com conexões maciças entre si. Estima-se que haja aproximadamente 10 bilhões de neurônios no córtex humano e 60 trilhões de sinapses ou conexões (SHEPHERD; KOCH, 1990). Mesmo com essa magnitude de complexidade, o cérebro apresenta uma estrutura extremamente eficiente. Mais especificamente, a eficiência energética do cérebro é de aproximadamente 10^{-16} joules (J) por operação por segundo, enquanto que o valor correspondente para os melhores computadores em uso em nossos dias é de cerca de 10^{-6} joules por operação por segundo (FAGGIN, 1991).

Os principais componentes dos neurônios são:

- Os dendritos, que tem por função, receber os estímulos transmitidos pelos outros neurônios;
- O corpo de neurônio (núcleo), também chamado de *somma*, que é responsável por coletar e combinar informações vindas de outros neurônios;
- E finalmente o axônio, que é constituído de uma fibra tubular que pode alcançar até alguns metros, e é responsável por transmitir os estímulos para outras células, como mostrado na Fig. 19.

Um *neurônio* em “desenvolvimento” é sinônimo de um cérebro plástico: a plasticidade permite que o sistema nervoso em desenvolvimento se adapte ao seu meio ambiente. Assim como a plasticidade parece essencial para o funcionamento dos neurônios como unidades de processamento de informação do cérebro humano, também ela é o com relação às redes neurais construídas com neurônios artificiais. Na sua forma mais geral, uma rede neural é uma máquina que é projetada para modelar a maneira como o cérebro realiza uma tarefa particular ou função de interesse; a rede é normalmente implementada utilizando-se componentes eletrônicos ou é simulada por programação em um computador digital. Nós podemos então oferecer a seguinte definição de uma rede neural vista como uma máquina adaptativa: Uma rede neural

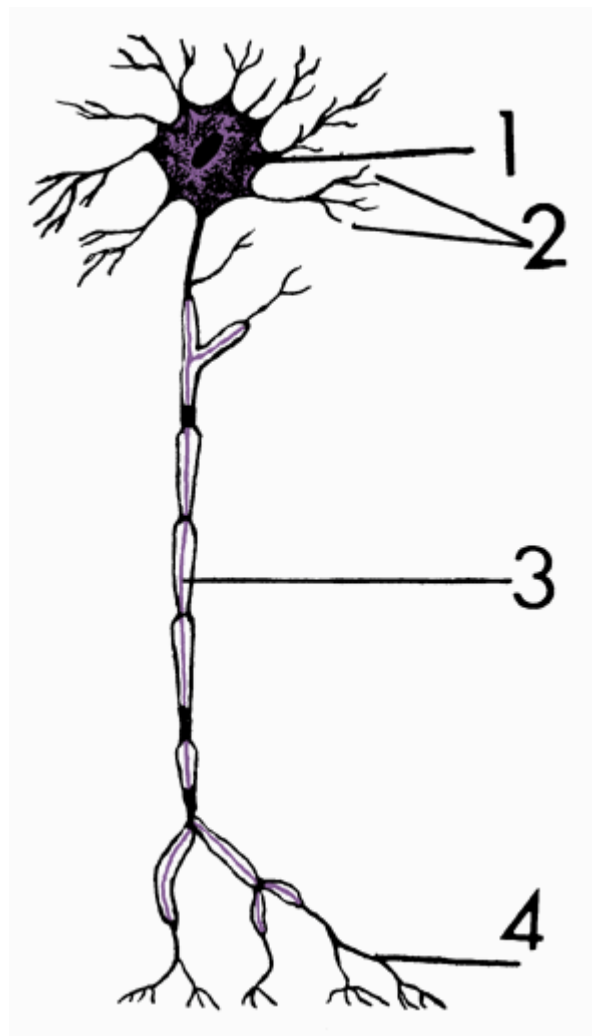


Figura 19: Ilustração de uma célula nervosa. Esta célula é formada por: (1) O corpo de neurônio ou Soma, (2) Dendritos, (3) Axônio e (4) Terminais Sinápticos.

é um processador paralelamente distribuído e composto maciçamente por unidades de processamento simples, que têm a propensão natural para armazenar conhecimento experimental e torná-lo disponível para o uso. Ela se assemelha ao cérebro em dois aspectos:

1. O conhecimento é adquirido pela rede a partir de seu ambiente através de um processo de aprendizagem.
2. Forças de conexão entre neurônios, conhecidas como pesos sinápticos, são utilizadas para armazenar o conhecimento adquirido.

As sinapses são unidades estruturais e funcionais elementares que medeiam as interações entre os neurônios. O tipo mais comum de sinapse é a sinapse química, que opera da seguinte forma: um processo pré-sináptico libera uma substância transmissora que se difunde através da junção sináptica entre neurônios e então age sobre um processo pós-sináptico. Assim, uma sinapse converte um sinal elétrico pré-sináptico em um sinal químico e então de volta em um sinal elétrico pós-sináptico (SHEPHERD; KOCH, 1990). Na terminologia elétrica, um elemento assim é chamado de um dispositivo de dois terminais não-recíprocos. Nas descrições tradicionais da organização neural, assume-se que uma sinapse é uma conexão simples que pode impor ao neurônio receptivo excitação ou inibição, mas não ambas.

Anteriormente, mencionamos que a plasticidade permite que o sistema nervoso em desenvolvimento se adapte ao seu meio ambiente (EGGERMONT, 1990). Em um cérebro adulto, a plasticidade pode ser atribuída a dois mecanismos: a criação de novas conexões sinápticas entre neurônios e a modificação das sinapses existentes. Os axônios, as linhas de transmissão, e os dendritos, as zonas receptivas, constituem dois tipos de filamentos celulares que são distinguíveis por razões morfológicas; um axônio tem uma superfície mais lisa, menos ramificações e maior comprimento, enquanto que um dendrito (assim chamado pela sua semelhança com uma árvore) tem uma superfície irregular e mais ramificações (FREEMAN, 1975). A maioria dos neurônios codifica suas saídas como uma série de pulsos breves de tensão. Estes pulsos, usualmente conhecidos como potenciais de ação ou impulsos, originam-se no corpo celular dos neurônios, ou perto dele, e então se propagam através dos neurônios individuais a velocidade e amplitude constantes. As razões para o uso de potenciais de ação para a comunicação entre neurônios se baseiam na física dos axônios. O axônio de um neurônio é muito longo e fino e é caracterizado por uma alta resistência elétrica e uma capacitância muito grande. Estes dois elementos estão distribuídos ao longo do axônio. O axônio pode assim ser modelado como uma linha de transmissão, daí o uso comum da "equação de linha" como a terminologia para descrever a propagação do sinal ao longo de um axônio. A análise deste mecanismo de propagação revela que, quando uma tensão é aplicada a uma extremidade do axônio, ela decai exponencialmente com a distância, caindo a um nível insignificante no momento em que ela atinge a outra extremidade. Os potenciais de ação fornecem uma maneira de evitar este problema de transmissão (ANDERSON, 1995).

No cérebro há organizações anatômicas tanto em pequena escala como em grande escala, e funções diferentes ocorrem nos níveis mais baixos e nos mais altos. A Fig. 20 mostra uma hierarquia de níveis entrelaçados de organização, emergente do extenso trabalho sobre a análise de regiões localizadas no cérebro. As sinapses representam o nível mais fundamental, dependente de moléculas e íons para sua ação.

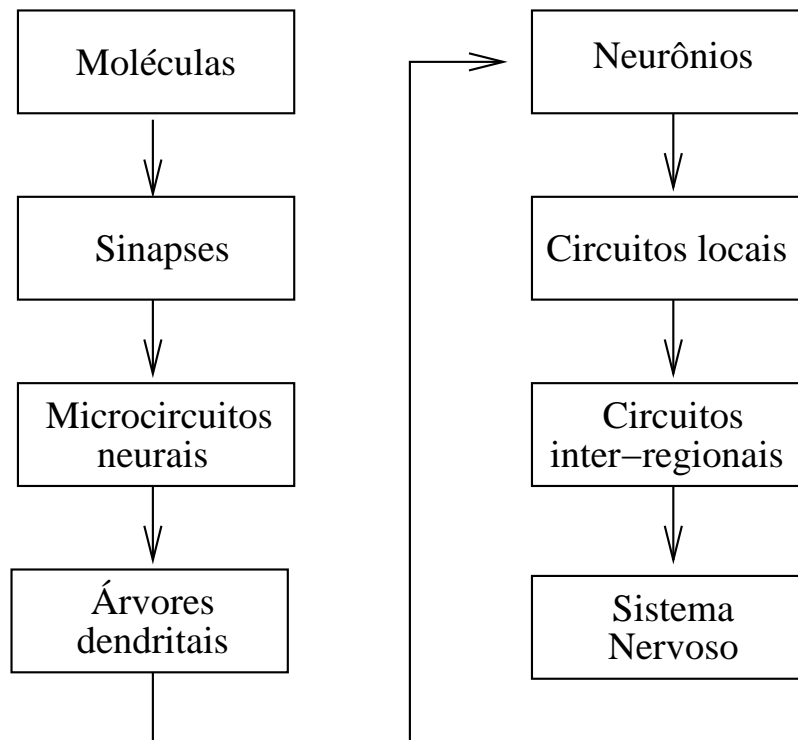


Figura 20: Organização estrutural dos níveis no cérebro

Nos níveis seguintes, temos os microcircuitos neurais, as árvores dendritais e então os neurônios. Um microcircuito neural se refere a um agrupamento de sinapses organizadas em padrões de conectividade para produzir uma operação funcional de interesse. Um microcircuito neural pode ser comparado a um circuito de silício constituído por um agrupamento de transistores. O menor tamanho dos microcircuitos é medido em micrômetros, e a sua velocidade de operação mais rápida é medida em milissegundos. Os microcircuitos neurais são agrupados para formar subunidades dendritais dentro das árvores dendritais dos neurônios individuais. O neurônio completo, com tamanho de área de 100 micrômetros, contém várias subunidades dendritais. No nível seguinte de complexidade temos circuitos locais (cerca de 1 mm

de tamanho) constituídos por neurônios com propriedades similares ou diferentes; estes agrupamentos neurais realizam operações características de uma região localizada no cérebro. Eles são seguidos por circuitos inter-regionais constituídos por caminhos, colunas e mapas topográficos, que envolvem regiões múltiplas localizadas em partes diferentes do cérebro. Os mapas topográficos são organizados para responder à informação sensorial incidente. Estes mapas são freqüentemente arranjados em folhas, como no colículo superior, onde os mapas visual, auditivo e somestésico estão empilhados em camadas adjacentes de tal modo que estímulos advindos de pontos correspondentes no espaço se localizem acima ou abaixo de cada um deles. A Fig. 21 apresenta um mapa citoarquitetural do córtex cerebral como apurado por Brodmann (BRODAL, 1981).

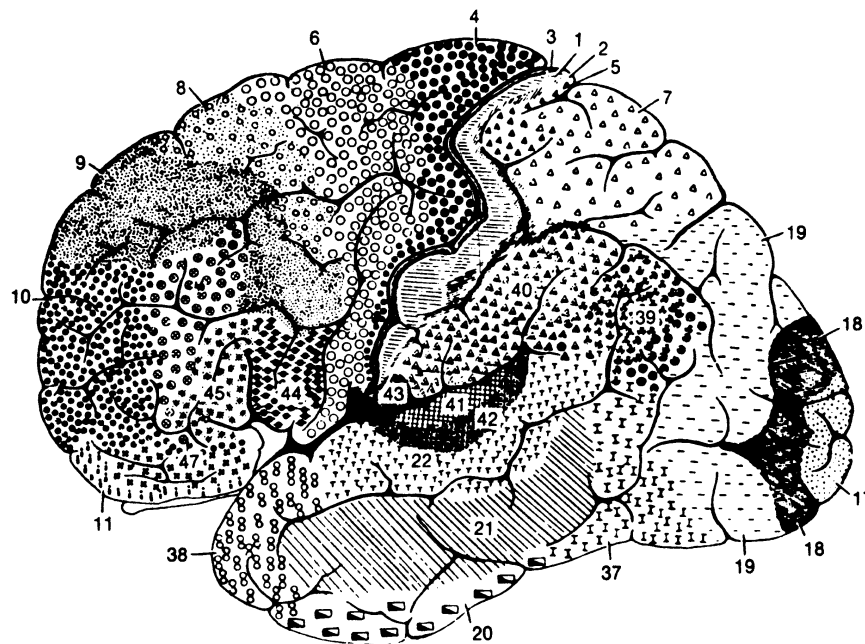


Figura 21: Mapa citoarquitetural do córtex cerebral. As diferentes áreas são identificadas pela espessura de suas camadas e tipos de células nelas contidas. Algumas das áreas específicas mais importantes são como segue. Córtex motor: banda motora, área 4; área pré-motora, área 6; campos oculares frontais, área 8. Córtex somestésico: áreas 3, 1, 2. Córtex visual: áreas 17, 18, 19. Córtex auditivo: áreas 41 e 42 (BRODAL, 1981).

As pesquisas correntes sobre este assunto foram desenvolvidas através de uma

longa história de esforços para capturar os princípios de computações biológicas em modelos matemáticos. Estes esforços começaram com investigações pioneiras de neurônios como aparelhos lógicos realizados por Warren S. McCulloch e Walter H. Pitts (MCCULLOCH; PITTS, 1943). Em 1960, Frank Rosenblatt e Bernard Widrow criaram os “neurônios adaptivos” e uma rede simples que tinha a capacidade de aprender. A Adaline (neurônios lineares adaptivos), criada por Widrow, consiste em um sistema de neurônios simples que pode aprender a reconhecer um objeto simples, uma letra por exemplo. Entre 1960 e 1970 um pequeno número de pesquisadores, como Shunichi Amari, Leon N. Cooper, Kunihiko Fukushima e Stephen Grossberg tentaram modelar o comportamento de neurônios reais em redes computacionais mais sofisticadas. Desenvolveram paradigmas matemáticos para a extração de características de modelos, classificação de modelos e “memória associativa”, na qual pedaços de informação servem para recuperar uma memória inteira. A partir de 1980 surgiu um grande interesse por modelos neurais e suas propriedades computacionais. Isto se deu porque os neurobiologistas foram adquirindo mais entendimento de como informações eram processadas na natureza e devido a fabricação de potentes computadores que permitiram a implantação de circuitos neurais. Nós simples (neurônios) são interligados para formar uma rede de nós, daí o termo “rede neuronal”. A inspiração original para este modelo advém do exame das estruturas do cérebro, em particular de estudos em eletroencefalogramas de humanos e de animais (GRUNEIS; YAMAMOTO; NAKAHAMA, 1989; BABLOYANTZ; SALAZAR; NICOLIS, 1985).

3.3 Eletroencefalograma - EEG

Os desenvolvimentos técnicos no campo das medidas e do registro de fenômenos elétricos realizados nos últimos 25 anos do século XIX tornaram possível um dos maiores triunfos da neurociência moderna: a descoberta, feita pelo psiquiatra alemão Hans Berger, em 1929, de que o cérebro humano também gera atividade elétrica contínua, e que tal atividade pode ser registrada. O registro eletroencefalográfico é usualmente realizado através de eletrodos (pequenos discos metálicos) afixados com um gel condutor de eletricidade à pele do crânio. Um poderoso amplificador eletrônico aumenta milhares de vezes a amplitude do fraco sinal elétrico que é gerado

pelo cérebro e que pode ser captado (geralmente menos do que alguns microvolts). O galvanômetro, que tem uma pena inscritora presa ao seu ponteiro, registra o sinal sobre a superfície de uma tira de papel, que se desloca a velocidade constante. Assim, o EEG é um registro da atividade elétrica cerebral, em que os eletrodos captam qualquer alteração na atividade neural. Conseqüentemente, os sinais obtidos são apenas uma medida grosseira desta atividade em um volume cerebral funcionalmente grande e o resultado desta medida é a inscrição de uma onda tortuosa, como apresentada na Fig. 22.

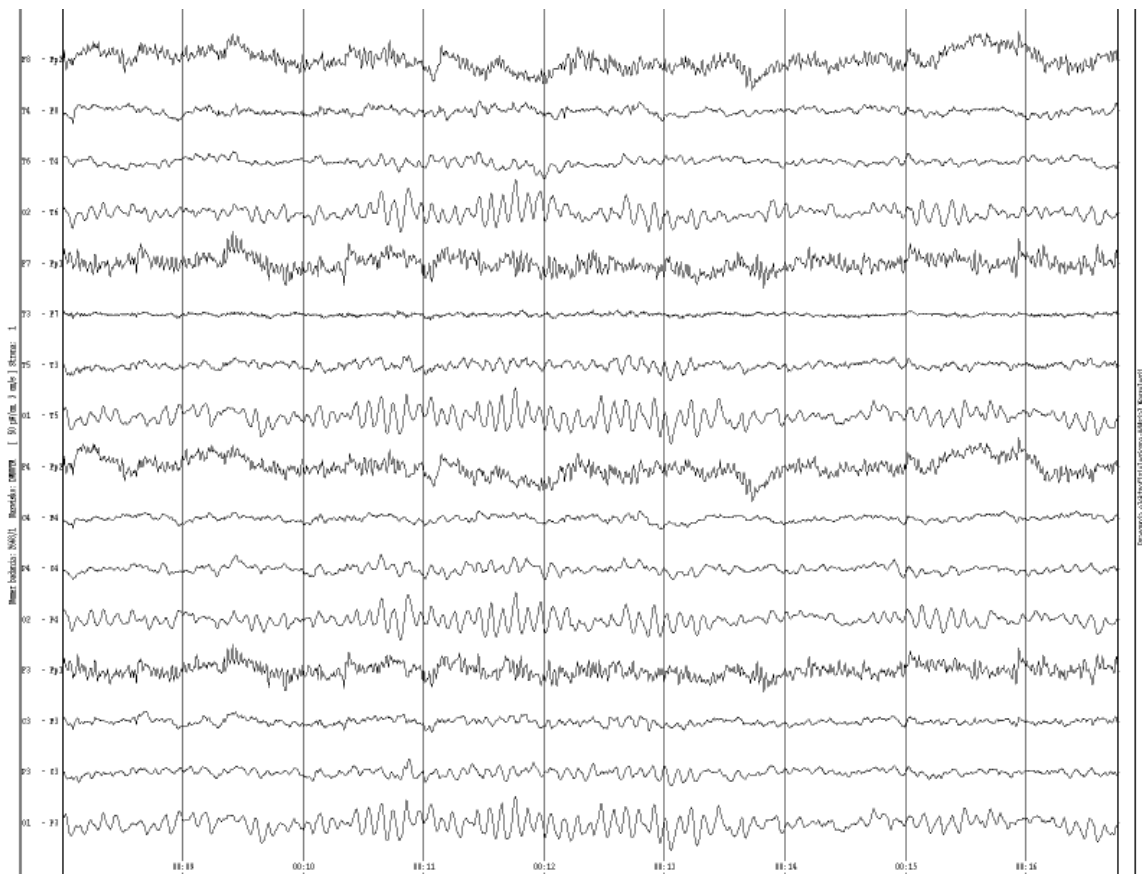


Figura 22: Registro eletroencefalográfico real típico.

3.4 Modelo da atividade neural

Assim como o sistema nervoso é composto por bilhões de células nervosas, a rede neural artificial também seria formada por unidades que nada mais são do que pequenos módulos que simulam o funcionamento de um neurônio. Estes módulos devem funcionar de acordo com os elementos em que foram inspirados, recebendo e retransmitindo informações. Para tal, nós utilizamos um modelo típico de rede neural, onde o estado de cada neurônio depende da contribuição de alguns outros neurônios, que enviam sinais modificados por um peso. Embora muito simples, este modelo imita a dinâmica de sistemas neurais reais.

O modelo de rede neural utilizado neste trabalho é uma variação do modelo original criado por McCulloch e Pitts (MCCULLOCH; PITTS, 1943). A rede é formada por N unidades de neurônios, onde cada neurônio está acoplado a n outros neurônios similares. No entanto, é proibida a autoconexão, ou seja, um neurônio não pode influenciar a si mesmo. As conexões que são usadas para acoplar os neurônios, como já mencionado, são chamadas de sinapses. A estas, associam-se pesos ou eficácia sinápticas S_{ij} para caracterizar a intensidade da conexão entre estes neurônios. Um neurônio é tratado como sendo um simples número binário com dois estados, $x = 0$ (inativo) ou $x = 1$ (ativo), cujos valores são atribuídos de forma aleatória no início da simulação para cada neurônio. O estado de um neurônio i é atualizado no tempo de acordo com as expressões

$$x_i(t+1) = \Theta(h_i + L(t)), \quad (3.1)$$

e

$$h_i = \sum_{j \in (i)}^n S_{ij} x_j(t), \quad (3.2)$$

onde h_i , o potencial pós-sináptico (AMIT, 1989), é a soma de todas as eficácias sinápticas dos canais chegando ao neurônio i , cada um multiplicado pelo correspondente estado x_j dos neurônios a ele conectado. Isto garante que somente os neurônios de canais ativados contribuem para a evolução do estado do neurônio x_i a um passo

de tempo $t + 1$. A função limiar do neurônio i , $L(t)$, que estabelece um valor limite para a atualização do estado do neurônio i a um passo de tempo t , ou seja, indica a sensibilidade dos neurônios aos estímulos. Θ é a função de Heaviside, descrita por:

$$\Theta(z) = \begin{cases} 1 & \text{se } z \geq 0 \\ 0 & \text{se } z < 0 \end{cases}, \quad (3.3)$$

onde n é o número de conexões de cada neurônio, S_{ij} é a intensidade da sinapse entre os neurônios i e j , as vezes descritos como sinapses e análogos aos elementos da matriz de acoplamento no sistema spin de Ising. Os pesos são escolhidos de maneira aleatória e não são necessariamente simétricos, isto é, $S_{ij} \neq S_{ji}$. Portanto a influência que o neurônio i exerce sobre o neurônio j não é igual à influência que o neurônio j exerce sobre o neurônio i . Estes pesos podem ser positivos (excitadores) ou negativos (inibidores) e são distribuídos uniformemente no intervalo $[-1,1]$ (MOREIRA; LIMA; ANDRADE, 1995).

A dinâmica utilizada neste modelo para a atualização do estado de um neurônio é sincrônica ou paralela, ou seja, cada neurônio é processado simultaneamente a passos discretos de tempo n_p , onde $n_p = 1, 2, 3, \dots$, pela dinâmica descrita na expressão 3.1. Isto significa que os *inputs* de cada neurônio na rede são determinados por um mesmo estado de atividade da rede em um intervalo de tempo ($n_p - 1 < t < n_p$), onde a decisão de cada neurônio de ativar ou não ativar a um mesmo instante de tempo não depende da decisão dos outros neurônios da rede. Assim, quando h_i , total dos pesos dos *inputs* que chegam a um neurônio i , exceder o limiar $L(t)$ a um passo de tempo t , este neurônio estará ativo a um passo de tempo $t + 1$. Neste modelo, o limiar instantâneo é o mesmo para todos os neurônios da rede e faz-se $L(t) = L$, ou seja, o limiar é considerado como sendo uma constante.

O estado da rede é definido por uma coleção de atividades instantâneas dos neurônios individuais descritos pela Eq. 3.1 e este pode ser representado como uma palavra de N bits, cujos elementos são x_i^E , onde o superescrito E classifica um estado particular da rede e o subscrito i classifica um neurônio particular. Assim esta rede possuindo N bits com cada um correspondendo a um neurônio específico com valores discretos 1 e 0 apresenta um total de 2^N estados, e a cada momento a rede estará em

um destes estados. A evolução do estado da rede gera uma sucessão de estados que são chamados de *trajetória da rede*. Como o número de estados da rede é finito, o sistema deve eventualmente contemplar um estado já visitado anteriormente. Desta maneira, o sistema procederá da mesma maneira para os estados sucessores deste e gerará ciclos de repetições de estados, que são chamados de atratores dinâmicos da rede.

Num dado instante t , a atividade da rede $A(t)$ é definida pelo número de neurônios ativos dividido pelo número total de neurônios da rede. Ou seja, $A(t)$ é a média dos valores assumidos pelas variáveis de estado $x_i(t)$, ficando portanto confinada ao intervalo $[0,1]$,

$$A(t) = \frac{\sum_{i=1}^N x_i(t)}{N}. \quad (3.4)$$

Os resultados publicados anteriormente por Moreira e Auto (MOREIRA; AUTO, 1993) e Moreira e Andrade (MOREIRA; ANDRADE, 1994) mostram que a dinâmica desse tipo de modelo pode exibir uma variedade de comportamentos. Modificando-se o limiar, L , a atividade pode ser caracterizada como um ponto fixo, periódica, intermitente ou caótica.

Sistemas que apresentam comportamento caótico são abundantes tanto na natureza como nos aparelhos construídos pelo homem. Estes sistemas são caracterizados por uma extrema sensibilidade a pequenas e suaves perturbações. Esta característica, conhecida como “efeito borboleta”, em algumas ocasiões é vista como benéfica quando, por exemplo, acelera misturas, reações químicas e viabiliza um mecanismo vigoroso para o transporte de massa e calor. Entretanto, em outras ocasiões, esta característica é vista como incômoda e inoportuna, tornando o caos um fenômeno indesejável que pode levar a vibrações, operações irregulares, falhas devido à fadiga de sistemas mecânicos, oscilações de temperatura que podem exceder o limite de segurança de condições operacionais em sistemas térmicos, e aumento na resistência em sistemas de escoamento.

Durante muito anos acreditou-se que os movimentos caóticos nunca são previsíveis nem controláveis. A primeira referência que encontramos apresentando um ponto de vista diferente foi devida a John Von Neumann, por volta de 1950. Segundo

ele, pequenos distúrbios, cuidadosamente escolhidos e pré-planejados, poderiam levar, após algum tempo, a mudanças de larga escala de tempo. O conceito básico aqui envolvido é que um atrator caótico tem embutido um grande número de órbitas periódicas instáveis.

3.5 Resultados e Discussões

A etapa inicial para elaboração de uma rede neural é a definição de sua topologia, ou seja, uma rede contendo nós, os neurônios, com toda a sua vizinhança conectada através de ligações, as sinapses. Neste estudo, realizamos simulações com dois tipos diferentes de topologias de rede, ou seja, redes geradas segundo o modelo de Watts-Strogatz e redes geradas segundo o modelo do “contato preferencial”.

3.5.1 Topologia de Watts-Strogatz (WS)

A partir do algoritmo *WS* apresentado na Seção 1.4, fizemos variar a probabilidade de realocação p , lembrando que esta define como serão distribuídas as ligações, ou seja, com que probabilidade as conexões existentes serão redirecionadas (inexistência de novas conexões) para os outros nós como é mostrado na Fig. 4 no capítulo 1. O valor dessa probabilidade varia entre zero (configuração de uma rede regular) e um (configuração de uma rede aleatória). Como já mencionado anteriormente, para $p = 0$ não há redistribuição de conexões entre os nós, enquanto que, para $p = 1$, todas as conexões serão realocadas, resultando em uma rede formada por conexões totalmente aleatórias. Para cada valor de p geramos 10^3 configurações de rede, todas com o mesmo número de nós, mas com diferentes conexões entre eles, ou seja, para cada geração, cada nó tem vizinhos diferentes, e para cada nova configuração de rede, calculamos a atividade neural através da Eq. 3.4.

Na Fig. 23 mostramos parte da evolução temporal da atividade neural $A(t)$ para uma rede do tipo Watts-Strogatz com 2048 nós e com uma probabilidade de realocação igual a zero, $p = 0$.

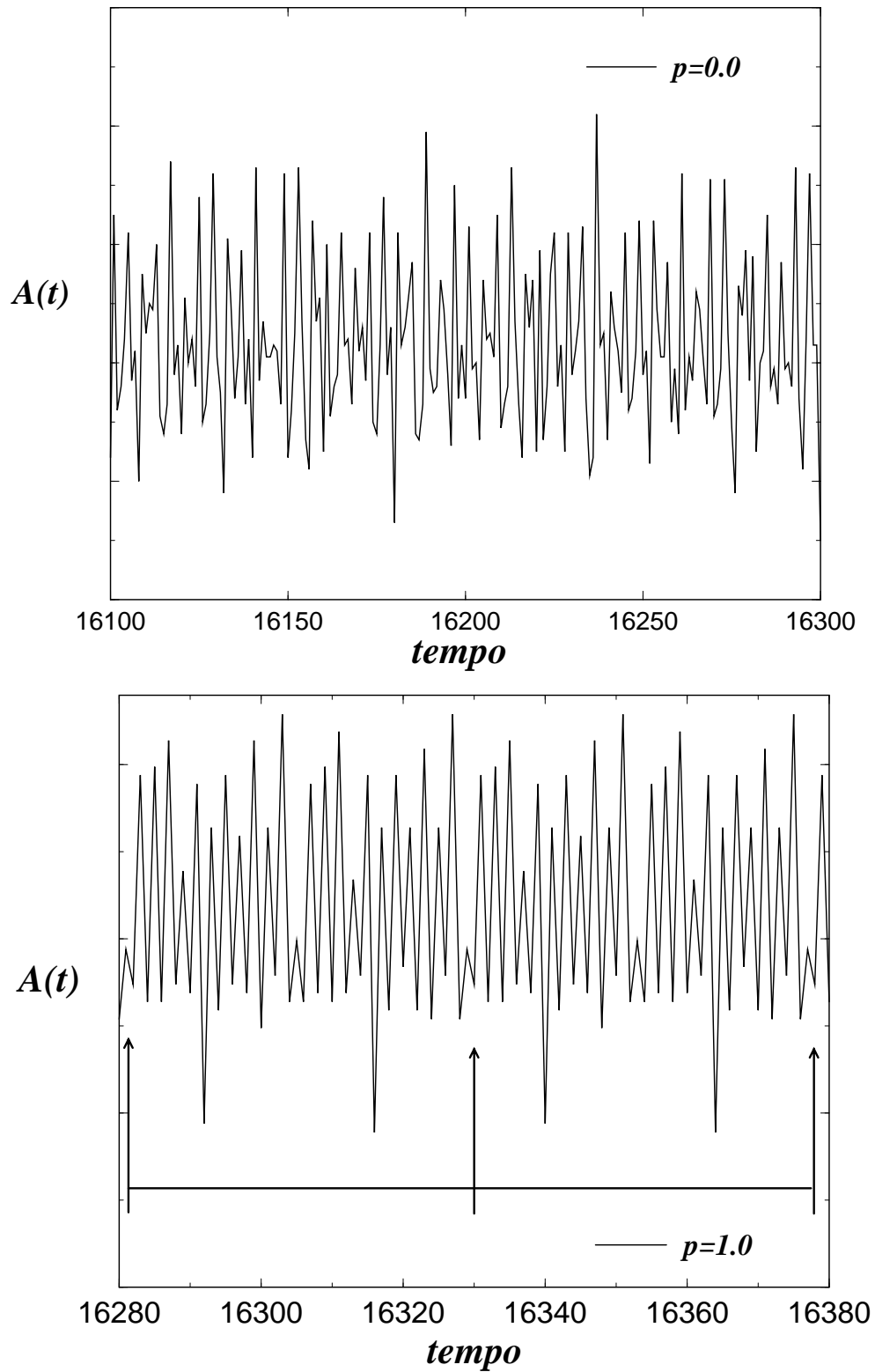


Figura 23: Parte da evolução temporal da atividade neural $A(t)$ em uma rede WS contendo 2048 nós, com a probabilidades de realocação (rewire) igual a zero, $p = 0$, na curva do topo, e com $p = 1$, na curva abaixo.

Podemos observar que nesta topologia, que é regular, a série temporal da atividade neural, nesta configuração de rede, apresenta um estado não periódico, ou seja, não observamos formação de períodos. Na Fig. 23.b, observamos que quando o valor da probabilidade de relação é igual a um, $p = 1$ (rede totalmente aleatória), a série temporal torna-se periódica, ou seja, verificamos claramente a formação de períodos. Para uma melhor visualização da formação dos períodos, fizemos um corte em nossa série temporal em três partes consecutivas, que podem ser observados na Fig. 24 mostrando a nossa série temporal em três momentos distintos, no intervalo entre 0 e 24 Fig. 24.a, no intervalo entre 24 e 48 Fig. 24.b e no intervalo entre 48 e 72 Fig. 24.c, podemos confirmar visualmente a formação de períodos.

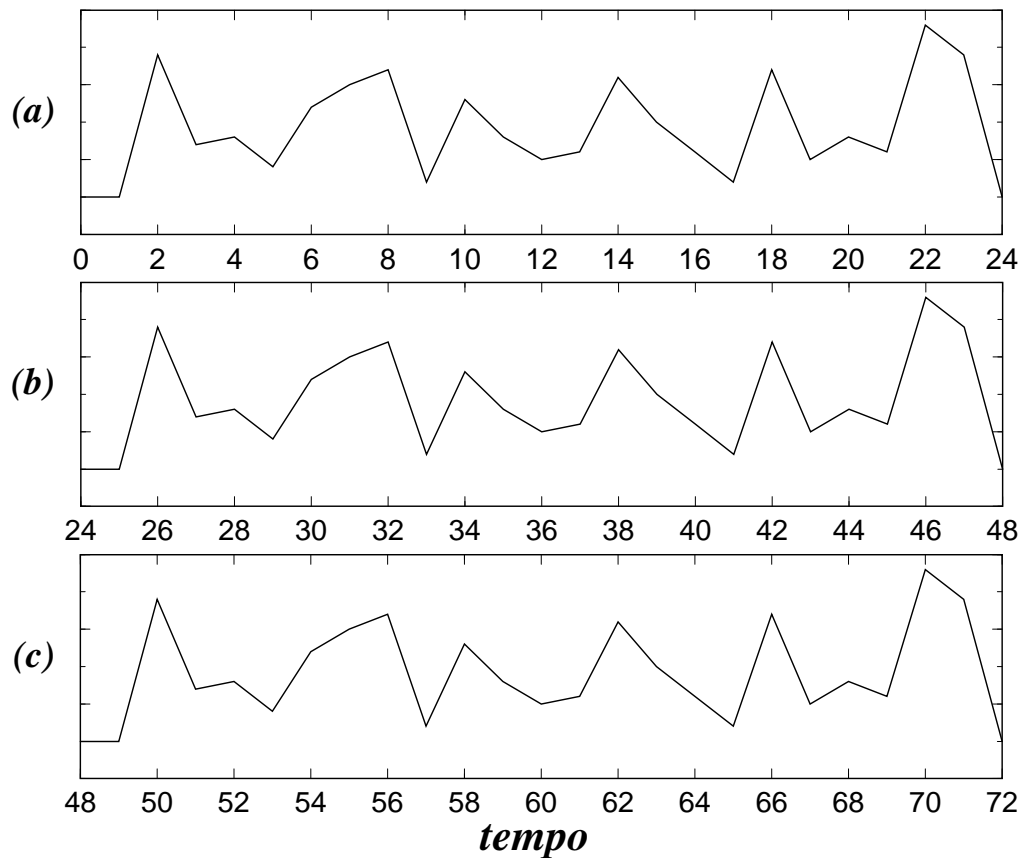


Figura 24: Visualização da formação de períodos, em que (a), (b) e (c) estão em intervalos de tempo distintos e consecutivos exibindo um período de 24.

Através de uma rotina computacional, investigamos de maneira sistemática a possível existência de periodicidade nas séries temporais da atividade neural. Podemos observar, a partir da Fig. 25, que representa a quantidade de redes em regime periódico com T períodos, $P(T)$, que em todas as simulações, o valor do período, quando existe, não ultrapassa o valor de 80 pontos desta escala, nos levando a fazer a análise somente dos últimos 1024 pontos das séries, as quais continham 16384 pontos no total.

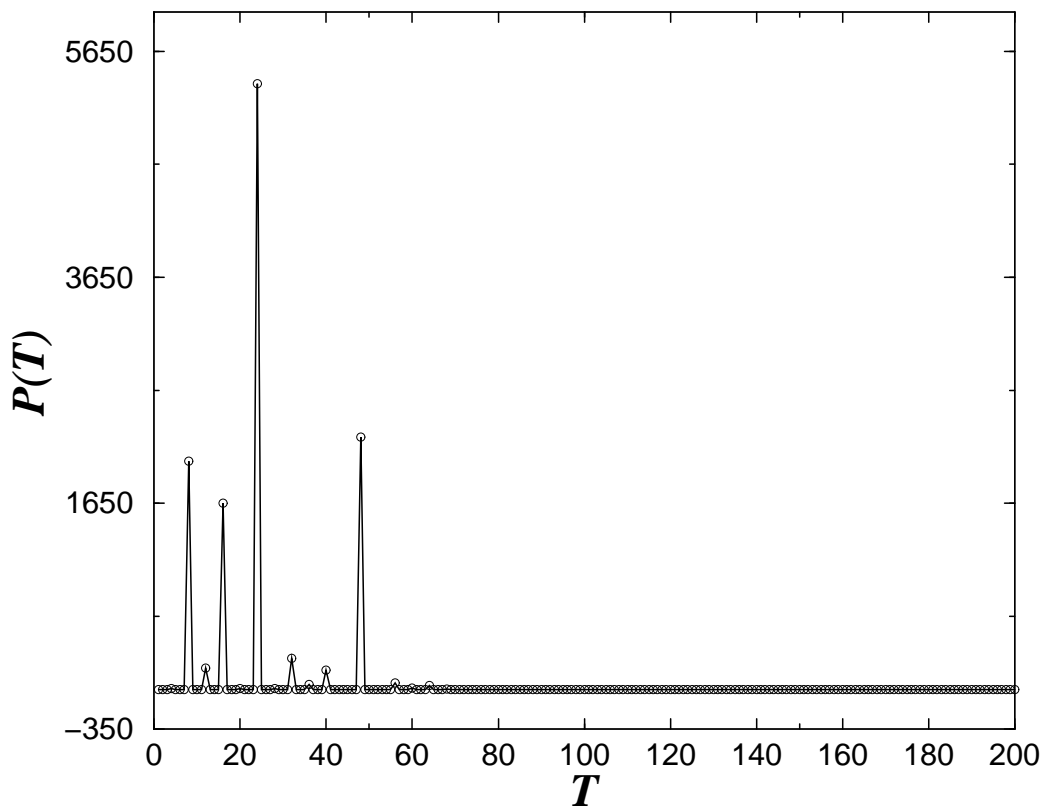


Figura 25: Quantidade de redes em regime periódico com T períodos $P(T)$, pelo período, T .

Para verificar a taxa de periodicidade ϕ , ou seja, a fração de redes periódicas pelo número total de redes que foram geradas para um dado valor de probabilidade de realocação, p , realizamos simulações com 1000 realizações diferentes de redes. Além disto, fizemos essas simulações para redes com diferentes números de nós, $N = 512, 1024, 2048, 4096$ e 8192 nós.

A Fig. 26 mostra a fração de redes que entram em regime periódico, ϕ , pelo número de nós da rede N , para distintos valores de probabilidade de realocação, p . Podemos verificar nesta figura que a taxa de periodicidade ϕ decai com o aumento do tamanho da rede. Isto também é equivalente a afirmar que a taxa de periodicidade ϕ decai com o aumento da regularidade das conexões, ou seja, quanto maior o número de nós da rede, maior é quantidade de redes que estão em estado não periódico. Além disso, podemos observar que quanto menor o valor de p , menor será o número de redes apresentando em sua série temporal estados periódicos.

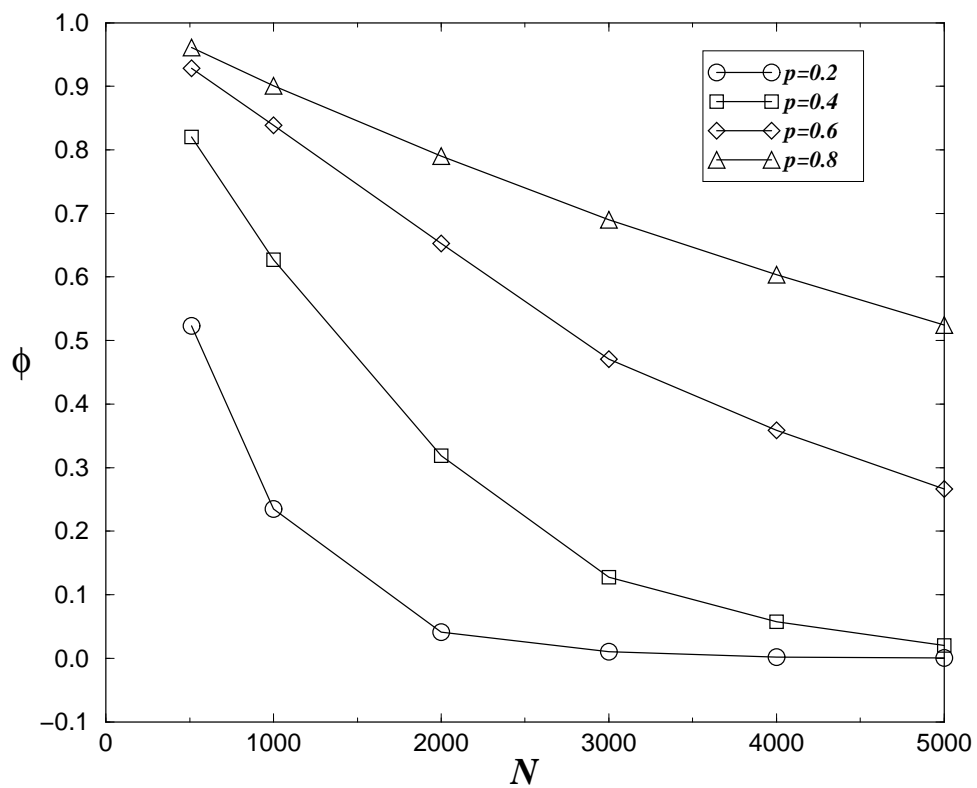


Figura 26: Fração de redes periódicas, ϕ , pelo número de nós, N , para diferentes valores de probabilidade de realocação p ou *rewire*.

A Fig. 27, mostra a fração ϕ de redes que eventualmente entram em regime periódico em função do valor da probabilidade de realocação p . Claramente, verificamos que, independente do tamanho nenhuma rede atinge o regime periódico para o valor de $p = 0$. Além disto, como demonstram as linhas contínuas no gráfico, o comportamento da fração ϕ em função de p poder ser perfeitamente descrito pela expressão,

$$\phi(p, N) = a_0 \left[\tanh\left(\frac{p}{a_1} + a_2\right) - \tanh(a_2) \right], \quad (3.5)$$

onde supomos que os parâmetros a_0, a_1 e a_2 são somente função do tamanho do sistema N , sendo obtidos por regressão não-linear a partir dos dados de simulação.

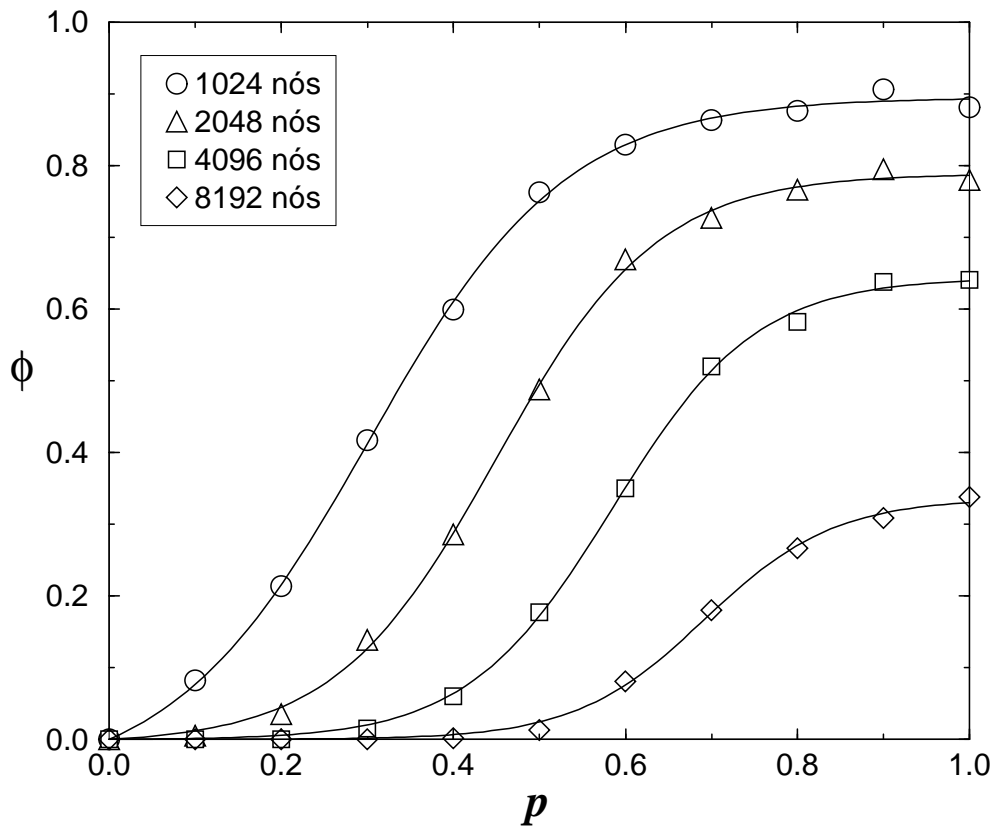


Figura 27: Fração de redes periódicas ϕ pela probabilidade de realocação p , ou rewiring, para vários tamanhos de rede.

Por sua vez, a Fig. 28 mostra que as dependências dos parâmetros a_0 , a_1 e a_2 com o tamanho do sistema seguem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} a_0(N) &= \alpha_0 + \beta_0 N; \\ a_1(N) &= \alpha_1 + \beta_1 \ln N; \\ a_2(N) &= \alpha_2 + \beta_2 \ln N, \end{aligned} \quad (3.6)$$

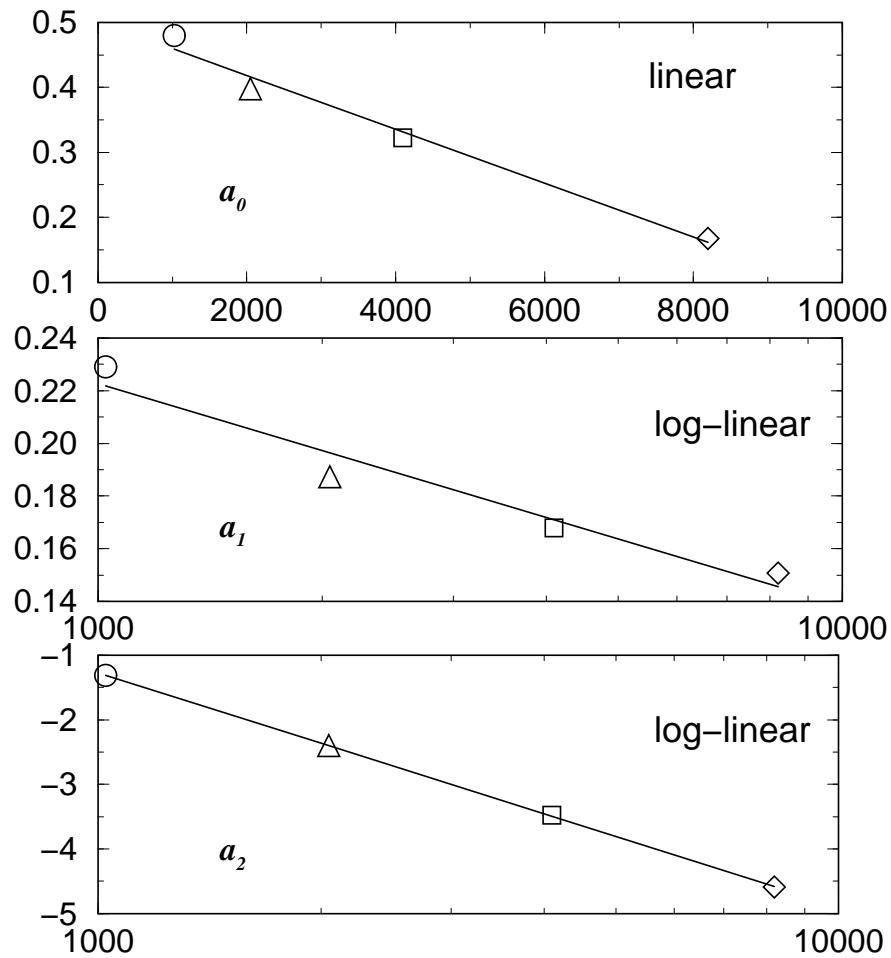


Figura 28: Representação gráfica dos parâmetros a_0 , a_1 e a_2 com função de N .

onde os valores numéricos encontrados para as constantes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1$ e β_2 são

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0.501 & \beta_0 &= -41.46 \times 10^{-6} \\ \alpha_1 &= 0.476 & \beta_1 &= -0.036 \\ \alpha_2 &= 9.610 & \beta_2 &= -1.576 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Empregando estas relações podemos obter o colapso de todas as curvas $\phi(p)$ para diferentes valores de N , através das seguintes transformações:

$$\phi' = \frac{\phi}{a_0} + \tanh(a_2) \quad (3.8)$$

e

$$p' = \frac{p}{a_1} + (a_2). \quad (3.9)$$

Tal colapso pode ser observado na Fig. 29, confirmando assim, a validade de nossa abordagem.

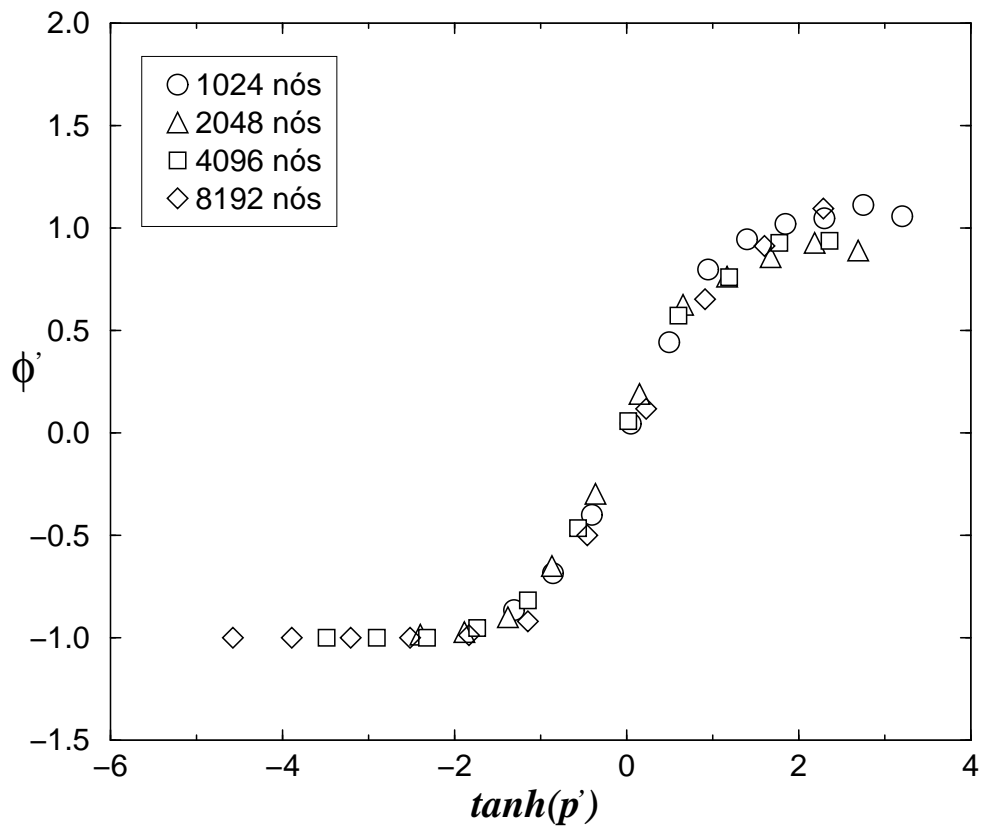


Figura 29: Renormalização da fração de redes periódicas ϕ' como função da \tanh de renormalização da probabilidade de realocação p' .

Finalmente, mostramos na Fig. 30 o gráfico log-log do tamanho do período como função do tamanho da rede, N , para um valor fixo da probabilidade de realocação, $p = 0.9$. Para tal, geramos 1000 diferentes realizações de redes para cada valor de N

e analisamos os últimos 1024 pontos de séries com um total de 16384 pontos. Esta figura mostra que o comprimento médio do período cresce de maneira proporcional a \sqrt{N} .

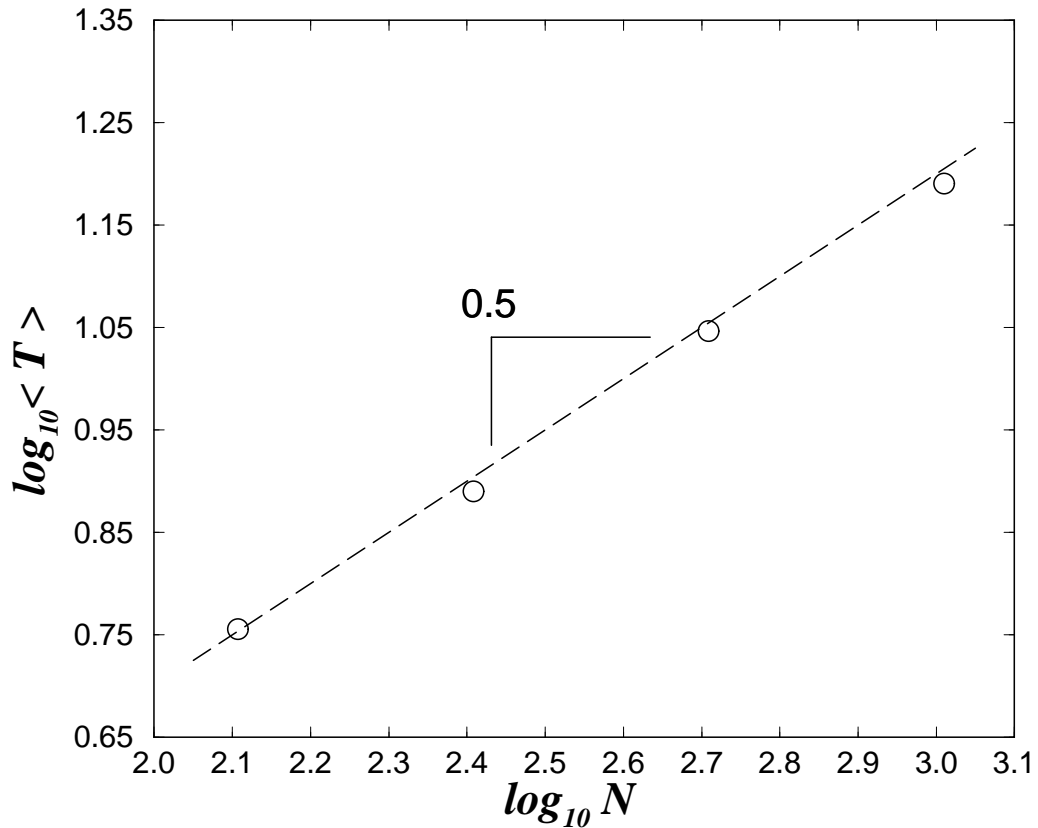


Figura 30: Período Médio para cada tamanho de rede, em escala logarítmica, 1000 diferentes gerações de rede, e para um valor de probabilidade de realocação igual para todos, $p = 0.9$. A linha tracejada corresponde a $T \sim \sqrt{N}$.

3.5.2 Topologia do Contato Preferencial

Seguindo o modelo do contato preferencial apresentado na Seção 1.5 do Capítulo 1, geramos 10^3 realizações distintas de redes, para $N = 512, 1024, 2048$ e 4096 nós. Para cada nova configuração de rede, calculamos a atividade neural, que é feita através da Eq. 3.4. Em analogia ao caso do modelo de *WS*, a variabilidade da atividade neural pode ser associada a uma série temporal, como podemos observar na Fig. 31. A Fig. 32.a mostra a dependência da fração de redes que entram em regime periódico, ϕ , com o número de nós da rede N . Verifica-se que a taxa de periodicidade,

ϕ , decai com o aumento da rede, ou seja, quanto maior o número de nós, maior será a quantidade de redes que estão em estado não periódico. Na Fig. 32.b mostramos o tamanho médio dos períodos como função do tamanho da rede, N . Podemos observar que o comprimento médio do período cresce aproximadamente de forma linear com o tamanho da rede, ou seja, quanto maior a rede, maior será o intervalo para a repetição dos ciclos da série temporal da atividade neural.

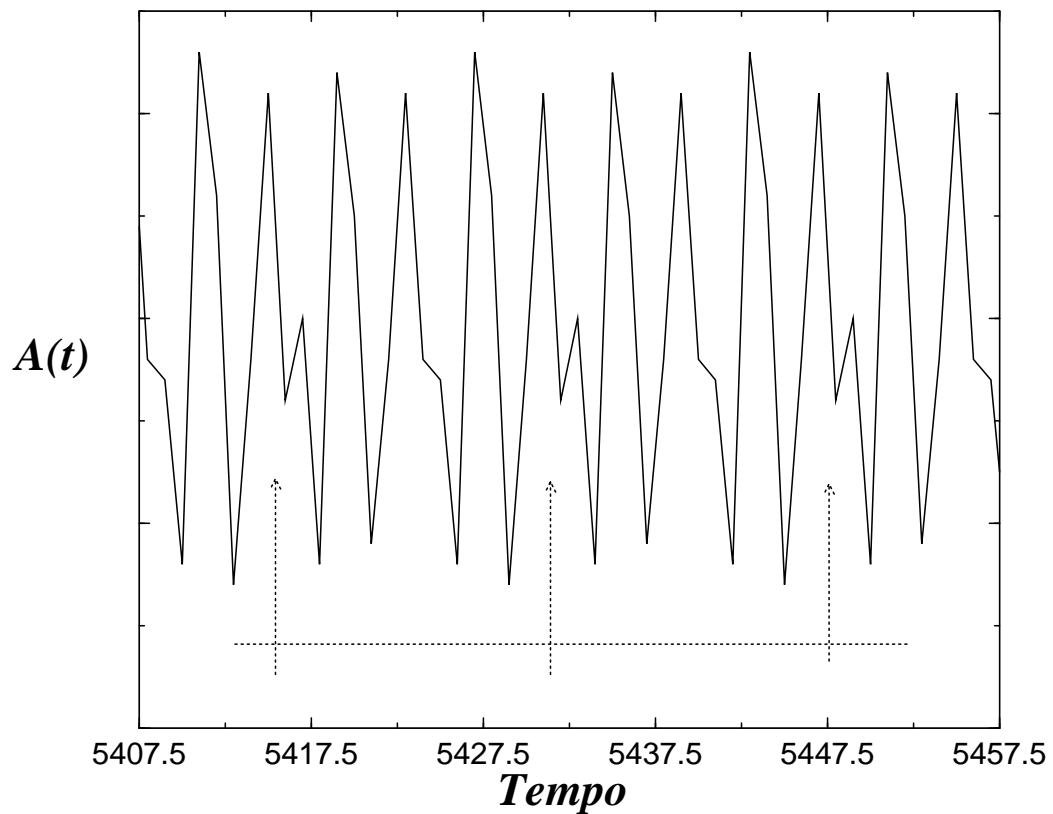


Figura 31: Evolução temporal da atividade neural em rede construída segundo o modelo do contato preferencial contendo 2048 nós.

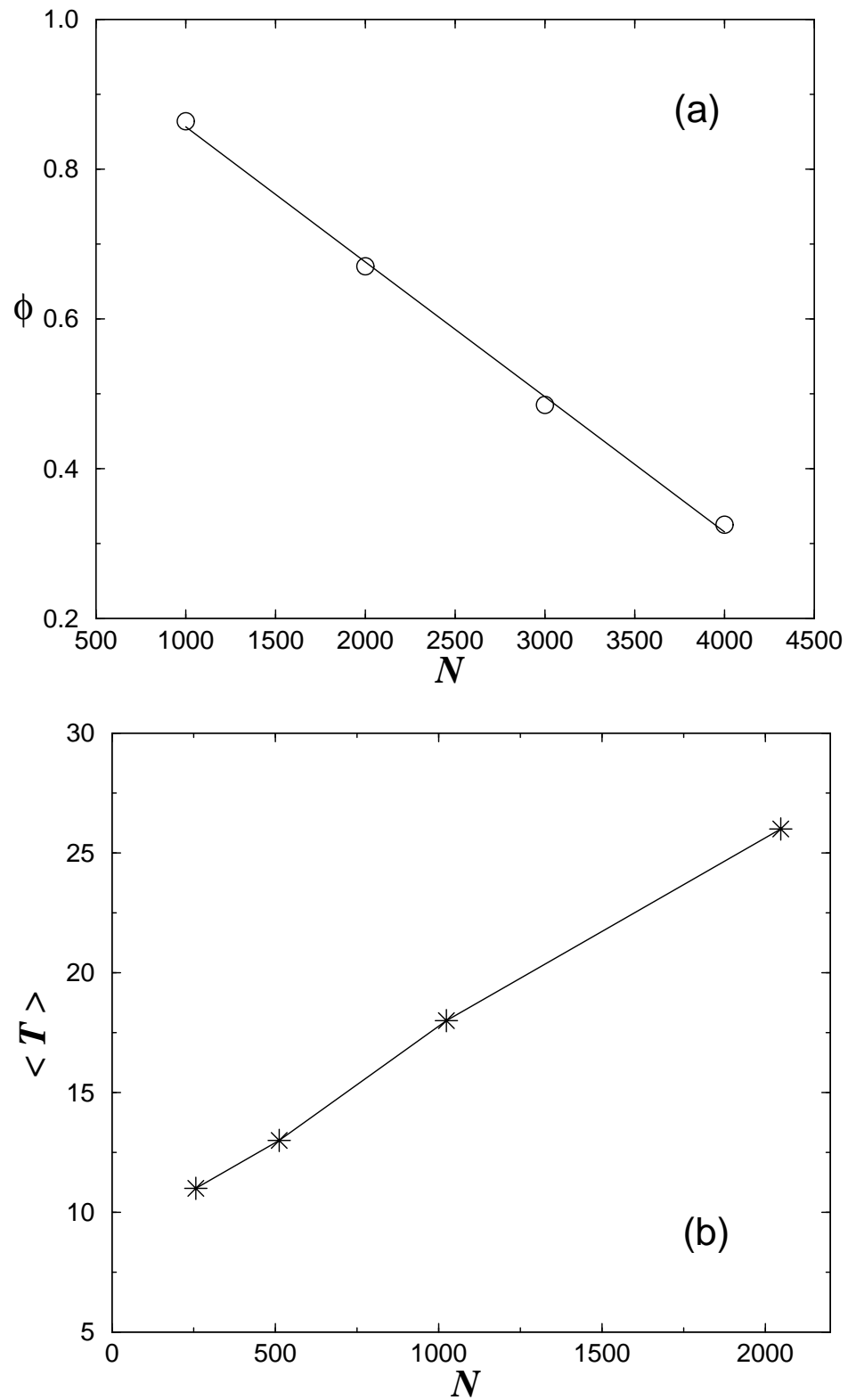


Figura 32: A curva do topo (a), mostra a fração de redes periódica ϕ pelo tamanho da rede N , e a curva abaixo (b) mostra o tamanho médio dos períodos $\langle T \rangle$ como função do tamanho da rede, N .

3.6 Conclusões

Neste capítulo, mostramos que um modelo neural simples em uma rede de Watts-Strogatz e do “contato preferencial” pode gerar sinais periódicos da atividade neural em redes contendo um número reduzido de neurônios. Estes ciclos tornam-se mais frequentes quando se aumenta o alcance das conexões. Observou-se também que o comprimento dos períodos aumenta com o a raiz quadrada do número de neurônios para redes construídas segundo o algoritmo de WS. No caso do modelo do contato preferencial, este comprimento cresce de maneira aproximadamente linear com o tamanho do sistema. Considerando que o cérebro humano é constituído por milhares de neurônios, não podemos esperar que o nosso modelo seja aplicado em redes com tamanha magnitude. É factível imaginar no entanto que os nossos resultados sejam relevantes para explicar sinais periódicos em sistemas formados por pequenas unidades de neurônios.

4 *Conclusões*

Compreender o processo de sedimentação de novas tendências e idéias em comunidades sociais pode ter um profundo impacto na vida dos indivíduos. Na primeira parte deste trabalho, nós propusemos um modelo idealizado para o crescimento competitivo de agregados em redes complexas. Pode-se imaginar que cada agregado representa uma fração de uma comunidade que compartilha alguma opinião em comum. Nossos resultados mostram que a distribuição de tamanho dos agregados depende da escolha particular da topologia com que a rede é construída. Mais precisamente, quando nosso modelo de crescimento é construído a partir de uma rede hierárquica como a Apoloniana, as distribuições de tamanhos de agregados apresentam um decaimento em lei de potência com um expoente $\alpha = -1$. Resultados similares foram observados com as distribuições obtidas para as frações de votos por candidato nas eleições proporcionais no Brasil em 1998 e 2002 (COSTA et al., 2002). Este fato nos leva a crer que os processos de propagação e formação de opinião talvez sejam mediados por uma estrutura hierárquica de interações entre indivíduos e comunidades.

Em trabalhos futuros, pretendemos introduzir o efeito da “mídia” neste modelo de agregação por meio de um mecanismo regulador não-local e verificar se o processo de crescimento é suscetível a este novo ingrediente. Dentro deste mesmo contexto, temos como objetivo introduzir também alguma forma de “reversibilidade” nos estados dos sítios durante a formação dos agregados. Este fator tornaria o modelo de certa maneira mais flexível para a descrição de outros processos de propagação e crescimento reais.

Sistemas que apresentam comportamento caótico são abundantes tanto na natureza como nos aparelhos construídos pelo homem. Por exemplo, podemos constatar através de registros de eletroencefalogramas (EGG) que a atividade cortical gera

padrões caóticos em sua série temporal. O comportamento caótico é definido como sendo um atrator contendo, embutidas neste, um grande número de órbitas periódicas instáveis. Na segunda parte deste trabalho, nós estudamos o comportamento temporal da atividade neural (MOREIRA; LIMA; ANDRADE, 1995) em redes complexas com características de mundo pequeno (WATTS; STROGATZ, 1998) bem como em redes construídas segundo o modelo de contato preferencial (BARABÁSI; ALBERT, 1999).

Constatamos que a atividade neural pode exibir espontaneamente sinais periódicos em sua série temporal e que este efeito existe somente em redes contendo pequenos números de nós. No caso específico de redes WS, onde o alcance das conexões pode ser controlado através da probabilidade de realocação (ver a Seção 1.4), fica claro que a fração de redes que entram em regime periódico é simplesmente proporcional ao alcance das ligações. Observou-se também que o comprimento dos períodos aumenta com o a raiz quadrada do número de neurônios para redes construídas segundo esse mesmo modelo de rede. No caso do modelo de contato preferencial, este comprimento cresce aproximadamente de maneira linear com o tamanho do sistema.

A possibilidade da identificação e estabilização dos períodos de um reservatório espaço-temporal caótico abre uma nova perspectiva para a compreensão de certos processos cognitivos. Para tanto, em futuros trabalhos, pretendemos utilizar métodos de controle para regimes caóticos nessa redes complexas. Em especial, estamos interessados no método originalmente proposto por (MOREIRA; LIMA; ANDRADE, 1995), que consiste na aplicação de uma pequena perturbação interna ao sistema (rede neural). Especificamente, pretendemos realizar a “pinagem” de alguns elementos, ou seja, promover a fixação do estado de alguns neurônios durante várias iterações da rede neural e verificar se há alterações no seu comportamento ao longo do tempo.

Referências

- ADLER, P. M. *Int. J. Multiphase Flow*, v. 11, n. 91, 1985.
- ALBERT, R.; BARABÁSI, A. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, v. 74, n. 47, p. 47–97, January 2002.
- ALBERT, R.; JEONG, H.; BARABÁSI, A. *Nature*, v. 401, n. 130, 1999.
- ALBERT, R.; JEONG, H.; BARABÁSI, A. *Nature*, v. 409, n. 542, 2000.
- AMARAL, L. *PNAS-USA*, v. 97, n. 11149, 2000.
- AMARAL, L. A. N. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, v. 97, n. 11149, 2000.
- AMIT, D. Modeling brain function. *Cambridge University Press*, 1989.
- ANDERSON, J. A. Introduction to neural networks. *Cambridge, MA: MIT Press*, 1995.
- ANDRADE, J. S. et al. *cond-mat/0406295*, 2004.
- ARBIB, M. A. Brains, machines, and mathematics. *Springer-Verlat*, 1987.
- BABLOYANTZ, A.; SALAZAR, J. M.; NICOLIS, C. *Phys. Rev. Lett.*, v. 111, n. 152, 1985.
- BAK, P. How nature works:the science of self-organized criticality. *Springer-Verlag*, 1996.
- BAK, P. *New Scientist*, 2000.
- BAK, P.; TANG, C.; WIESENFELD, K. *Physics Review Letters*, v. 59, n. 381, 1987.
- BARABÁSI, L.; ALBERT, R. *Science*, v. 286, n. 509, 1999.
- BARAM, R. M.; HERRMANN, H. J.; RIVIER, N. *Phys. Rev. Lett*, v. 92, n. 044301, 2004.
- BOYD, D. W.; MATH, C. J. 1973.
- BRODAL, A. Neurological anatomy in relation to clinical medicine. *New York:Oxford University Press*, 1981.

- BUCHANAN, M. *New Statesman*, 2000.
- CAMACHO, J.; GUIMERA, R.; AMARAL, L. A. *Phys. Rev. E*, v. 65, n. 030901, 2002.
- CHURCHLAND, P. S.; SEJNOWSKI, T. J. *The computational brain. Cambridge, MA: MIT Press*, 1992.
- COSTA, R. N. et al. *cond-mat*, n. 0211212 v2, 2002.
- DIESTEL, R. *Graph theory. Graduate Texts in Mathematics*, v. 173, February 2000.
- DOROGOVTSEV, S.; GOLTSEV, A.; MENDES, J. F. F. *Phys. Rev. E*, v. 65, n. 066122, 2002.
- DOROGOVTSEV, S.; MENDES, J.; SAMUKHIN, A. *Phys. Rev. Lett.*, v. 85, n. 4633, 2000.
- DOROGOVTSEV, S.; MENDES, J.; SAMUKHIN, A. N. *Phys. Rev. E*, v. 63, n. 062101, 2001.
- DOYE, J. P. K. *Phys. Rev. Lett.*, v. 88, n. 23701, 2002.
- EGGERMONT, J. J. *The correlative brain: Theory and experiment in neural interecton. New York: Springer-Verlag*, 1990.
- ERDÖS, P.; RÉNYI, A. *Public. math. (debrecen)*. v. 6, n. 290, 1959.
- FAGGIN, F. *Vlsi implementation of neural networks. New York: Academic Press*, 1991.
- FEDER, J. *Fractals. Springer-Verlag*, 1988.
- FREEMAN, W. J. *Mass action in the nervous system. New York: Academic Press*, 1975.
- FUKUYAMA, F. *The End of History and the Last Man*, 1992.
- GELLER, R. J. *Geophysical Journal International*, v. 131, n. 425, 1997.
- GRUNEIS, F.; YAMAMOTO, M.; NAKAHAMA, H. *Biol. Cybern.*, v. 60, n. 161, 1989.
- HERRMANN, H. J.; MANTICA, G.; BESSIS, D. *Phys. Rev. Lett*, v. 65, n. 3223, 1990.
- JEONG, H. et al. *Nature*, v. 407, n. 651, 2000.
- JUNG, S. K. S.; KAHNG, B. *cond-mat/0112361*, 2001.
- KENNEDY, P. *The Rise and Fall of the Great Powers*, 1987.

- KRAPIVSKY, P.; REDNER, S.; LEYVRAZ, S. *Phys. Rev. Lett.*, v. 85, n. 4629, 2000.
- LEVINE, M. Man and machine vision. *MacGraw-Hill*, 1985.
- LEVY, J. *War in the Modern Great Power System 1495-1975*, 1983.
- LIJEROS, F. et al. *Nature*, v. 411, n. 907, 2001.
- MALAMUD, B.; MOREIN, G.; TURCOTTE, D. *Science*, v. 281, n. 1840, 1998.
- MARR, D. Vision. *W. H. Freeman and Company*, 1982.
- MCCULLOCH, W.; PITTS, W. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, v. 5, n. 1115-133, 1943.
- MILGRAM, S. The small world problem. *Psychology Today*, v. 2, n. 60, 1967.
- MOREIRA, J. E.; ANDRADE, J. S. *Physica A*, v. 206, n. 271, 1994.
- MOREIRA, J. E.; AUTO, D. M. *Europhys. Lett.*, v. 21, n. 693, 1993.
- MOREIRA, J. E.; LIMA, F. W. S.; ANDRADE, J. S. *Phys. Rev. E.*, v. 52, n. 3, 1995.
- MOSSA, S.; AMARAL, L. A. N. *Phys. Rev. Lett.*, v. 88, n. 138701, 2002.
- NEWMAN, M. E. J. *Phys. Rev. E*, v. 64, n. 016131, 2001.
- PASTOR-SATORRAS, R.; VESPIGNANI, A. *Phys. Rev. Lett.*, v. 86, n. 3200, 2001.
- PASTOR-SATORRAS, R.; VESPIGNANI, A. *Phys. Rev. E.*, v. 83, n. 066117, 2001.
- RAMÓN; CAJÁL, S. Histologie du systémn nerveux de i'homme et des vertébrés. *Paris:Maloine*, 1911.
- RAPOPORT, A. A contribution to the theory of random and biased nets. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, v. 19, n. 257, 1957.
- RAVASZ, E. *Science*, v. 297, n. 1551, 2002.
- RAVASZ, E.; BARABÁSI, A. L. *Phys. Rev. E*, v. 67, n. 026112, 2003.
- SHEPHERD, G. M.; KOCH, C. Introduction to synaptic circuits. *Oxford University Press*, 1990.
- STANLEY, H. E. 1987.
- STANLEY, H. E. *Rev. Mod. Phys.*, v. 71, n. S358, 1999.

STROGATZ, S. H. *Nature*, v. 411, 2001.

SUGA, N. Computations of velocity and range in the bat auditory system for eco location. *Computational Neuroscience*, 1990.

TURCOTTE, D. L. *Reports on Progress in Physics*, v. 62, n. 1377, 1999.

WATTS, D. J.; STROGATZ, S. Collective dynamics of “small-world” networks. *Nature*, v. 393, n. 440, 1998.

5 *Apêndice*

Artigos Publicados

PHYSICAL REVIEW E **73**, 065101(R)(2006)

PHYSICAL REVIEW E **74**, 017102 (2006)