



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE FÍSICA**

GISLANY QUEIROZ SALES

**ANÁLISE DE UMA POSSÍVEL TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DO PARADOXO DE
KLEIN PARA O ENSINO MÉDIO**

FORTALEZA

2026

GISLANY QUEIROZ SALES

ANÁLISE DE UMA POSSÍVEL TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DO PARADOXO DE
KLEIN PARA O ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentada à Coordenação da Graduação do Curso de Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva.

FORTALEZA
2026

GISLANY QUEIROZ SALES

ANÁLISE DE UMA POSSÍVEL TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DO PARADOXO DE
KLEIN PARA O ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentada à Coordenação da Graduação do Curso de Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Bacharel em Física.

Aprovada em 29/06/2026.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Ramos Gonçalves
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Daniel Brito de Freitas
Universidade Federal do Ceará (UFC)

"Profundidade e simplicidade não são excluídas."

Prof. Dr. Ciro Nogueira Filho

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família por todo o apoio ao longo da minha graduação. Sou grata ao meu orientador, José Euclides Gomes da Silva, pelos ensinamentos e orientação. Ao professor, José Ramos Gonçalves, agradeço pelos ensinamentos, pelas conversas enriquecedoras e por sempre acreditar em mim. Ao professor Ciro Nogueira Filho agradeço por ter me mostrado que é possível ensinar tópicos abstratos com simplicidade, exatamente o que tento fazer neste trabalho. Nada disso teria sido possível sem vocês.

Sou grata, também, pelas amizades que cultivei ao longo da graduação: Alana Carolina, Ana Lívia, Anna Beatriz, Antônio Levi, Eduardo de Moraes, Erick Damasceno, Hugo Marques, Julia Gregório, Júlio Tito, Marcos Melo, Mariana de Araújo, Patrick Carneiro, Pedro Victor Braga, Thiago Albuquerque e Vitória Fortuna. As conversas, os momentos compartilhados e os estudos ao lado de vocês contribuíram significativamente para a formação da física que sou hoje.

Aos meus amigos Ana Teresa, Ana Carolina, Breno de Andrade, Davilla Mariano, Everton Gadelha, Gabriela Kogan, Hariel Abreu, Isabele Silva, José Felipe Braga, Lucas Carvalho, Martan Castelo Branco, Pedro Victor Lima, Pedro Victor Pereira, Samia Dantas e Thayná Saldanha, como escreveu Madeline Miller, “há raros momentos em que outra alma se aproxima da sua, como estrelas que, uma vez por ano, tocam a Terra”. Vocês foram, para mim, essas raras constelações.

Aos meus amigos do estágio: Eduarda Abreu, Emanuele Souza, Higor Gomes, Maria Clara, Mariana Ferreira, Paulo Borges e Priscilla Nascimento agradeço pelos momentos compartilhados, pelas trocas e aprendizados que, com delicadeza, foram lapidando minha forma de ensinar. Com vocês, a didática deixou de ser apenas técnica e se tornou encontro, assim, fui me tornando, pouco a pouco, uma professora melhor.

Ao meu primo João Levi, a quem eu sonhava ensinar um dia. Embora você não esteja mais aqui, levo comigo essa promessa e sigo me esforçando, todos os dias, para me tornar uma excelente professora.

Agradeço especialmente às professoras Hilma Vasconcelos, Áurea Holanda e Raquel Filiage, cujas trajetórias, ensinamentos e acolhimento foram fundamentais para minha formação acadêmica e pessoal. Por meio do projeto Mulheres em Ciência e Tecnologia, aprendi não apenas sobre pesquisa e atuação científica, mas também sobre a força, a resistência e a importância de ser mulher na ciência.

Por fim, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), à Pró-Reitoria de Assistência Estudantil (PRAE) e à Pró-Reitoria de Extensão (PREX) da Universidade Federal do Ceará pelo apoio financeiro concedido ao longo da minha trajetória acadêmica, por meio de bolsas e programas de fomento que foram fundamentais para a minha permanência no curso.

RESUMO

Em 2025 celebrou-se o centenário da proposta da equação de Schrodinger a qual lançou os fundamentos da mecânica quântica, que, apesar de revolucionária, mostra limitações em altas energias, onde efeitos relativísticos são indispensáveis. A resposta inicial a esse desafio veio com a equação de Klein-Gordon (1926-1927), que foi a primeira tentativa de uma teoria quântica relativística. Seus problemas conceituais, como a densidade de probabilidade negativa, motivaram Dirac a desenvolver sua equação para partículas com spin (1928), introduzindo naturalmente antipartículas, dessa forma abrindo caminho para a Teoria Quântica de Campos (TQC). Este trabalho objetiva fazer uma transposição didática do paradoxo de Klein para o ensino médio, por meio de uma revisão bibliográfica dos livros de física mais utilizados no Brasil, fundamentada na teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel e na teoria da transposição didática de Yves Chevallard. Foram analisadas seis coleções didáticas, investigando a presença de física moderna e relativística, o nível de contextualização e os indícios de aprendizagem significativa. Os resultados indicam que a física moderna ainda é tratada de forma periférica e fragmentada, com predominância de abordagens tradicionais e mecânicas. A partir dessa análise, elaborou-se uma proposta didática conceitual e acessível para o ensino médio, utilizando analogias, mapas conceituais, simulações e contextualizações tecnológicas, como o grafeno e o tunelamento quântico, para introduzir o paradoxo de Klein de maneira qualitativa e significativa, respeitando os subsunçores dos estudantes e as orientações da BNCC.

Palavras-chave: mecânica quântica relativística; ensino de física moderna para o ensino médio; equação de Klein-Gordon; aprendizagem significativa; coeficientes de reflexão e transmissão

ABSTRACT

The year 2025 marked the centenary of the proposition of the Schrödinger equations, which laid the foundations of quantum mechanics, which, despite being revolutionary, shows limitations at high energies where relativistic effects are indispensable. The initial response to this challenge came with the Klein-Gordon equation (1926-1927), the first attempt at a relativistic quantum theory. Its conceptual problems, such as negative probability density, motivated Dirac to develop his equation for spin-1/2 particles (1928), naturally introducing antiparticles and paving the way for Quantum Field Theory (QFT). This work aims to carry out a didactic transposition of the Klein paradox for high school education, through a bibliographical review of the most used physics textbooks in Brazil, grounded in David Ausubel's theory of meaningful learning and Yves Chevallard's theory of didactic transposition. Six textbook collections were analyzed, investigating the presence of modern and relativistic physics, the level of contextualization, and evidence of meaningful learning. The results indicate that modern physics is still treated in a peripheral and fragmented manner, with a predominance of traditional and rote learning approaches. Based on this analysis, a didactic proposal was developed, conceptually accessible for high school, using analogies, concept maps, simulations, and technological contextualizations, such as graphene and quantum tunneling, to introduce the Klein paradox qualitatively and meaningfully, respecting students' subsumers and the guidelines of the Brazilian National Common Curricular Base (BNCC).

Keywords: relativistic quantum mechanics; teaching of modern physics for high school; Klein-Gordon equation; meaningful learning reflection and transmission coefficients

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação do potencial degrau para a equação de Schrödinger	19
Figura 2 – Coeficientes de reflexão e transmissão com Schrödinger e Klein-Gordon . . .	34
Figura 3 – Quadrado da função de onda em função da posição em $x = 0$	35
Figura 4 – Paradoxo de Klein: comparação entre as equações de Schrödinger e Klein-Gordon (unidades naturais: $\hbar = c = 1, m = 1, V_0 = 4.0 = 4m$)	38

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Comparação de escalas de energia para o paradoxo de Klein	37
Tabela 2 – Comparação entre a Equação de Schrödinger e a Equação de Klein-Gordon no problema do potencial degrau	38
Tabela 3 – Análise comparativa dos livros didáticos de Física do Ensino Médio	53
Tabela 4 – Identificação do livro Máximo e Alvarenga	62
Tabela 5 – Análise do livro Máximo e Alvarenga	62
Tabela 6 – Identificação do livro Sampaio e Calçada	63
Tabela 7 – Análise do livro Sampaio e Calçada	63
Tabela 8 – Identificação do livro Gaspar	64
Tabela 9 – Análise do livro Gaspar	64
Tabela 10 – Identificação do livro Física: Ciência e Tecnologia	65
Tabela 11 – Análise do livro Física: Ciência e Tecnologia	65
Tabela 12 – Identificação do livro Ser Protagonista	66
Tabela 13 – Análise do livro Ser Protagonista	66
Tabela 14 – Identificação do livro Os Fundamentos da Física	67
Tabela 15 – Análise do livro Os Fundamentos da Física	67

LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
CERN	Organização Europeia para a Pesquisa Nuclear
MNPEF	Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física
EKG	Equação de Klein-Gordon
EM	Ensino Médio
ES	Equação de Schrödinger
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCN+	Parâmetros Curriculares Nacionais Complementares
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PRAE	Pró-Reitoria de Assistência Estudantil
PREX	Pró-Reitoria de Extensão
TQC	Teoria Quântica de Campos
UEPS	Unidade de Ensino Potencialmente Significativa
UFC	Universidade Federal do Ceará
UFPI	Universidade Federal do Piauí

LISTA DE SÍMBOLOS

α	Partícula alfa
β	Partícula beta
γ	Fator de Lorentz
κ	Número de onda imaginário
μ	Parâmetro de massa
ω	Frequência angular
ψ	Função de onda
ψ_I	Função de onda na região I ($x < 0$)
ψ_{II}	Função de onda na região II ($x \geq 0$)
$\square$	Operador d'Alembertiano ($\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$)
∇	Operador Nabla (gradiente)
$\hat{H}$	Operador Hamiltoniano
A	Amplitude da onda incidente
B	Amplitude da onda refletida
C	Amplitude da onda transmitida
E	Energia total da partícula
R	Coefficiente de reflexão
T	Coefficiente de transmissão
$V(x)$	Energia potencial em função da posição
V_0	Altura do potencial degrau
c	Velocidade da luz no vácuo ($\approx 3 \times 10^8$ m/s)
i	Unidade imaginária ($i^2 = -1$)
j	Corrente de probabilidade
k	Número de onda
k_1	Número de onda na região I ($x < 0$)
k_2	Número de onda na região II ($x \geq 0$)
m	Massa de repouso da partícula
p	Momento linear
t	Tempo
x	Posição (coordenada espacial)
$\vec{k}$	Número de onda vetorial
$\vec{p}$	Momento linear vetorial
$\vec{r}$	Vetor posição
p^μ	Quadrivetor energia-momento
$\hbar$	Constante de Planck reduzida ($h/2\pi$)
$\left. \frac{d\psi_I}{dx} \right _0$	Derivada da função de onda na interface $x = 0$

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	16
2.1	Mecânica Quântica Relativística	16
2.1.1	<i>Procedimento de quantização</i>	16
2.1.2	<i>Equação de Schrödinger</i>	17
2.1.3	<i>A equação de onda não relativística</i>	17
2.1.4	<i>Limitações da equação de Schrödinger</i>	18
2.2	Espalhamento em um potencial degrau: caso não relativístico	18
2.2.1	<i>Definição do potencial degrau</i>	18
2.2.2	<i>Solução da equação de Schrödinger independente do tempo</i>	19
2.2.2.1	<i>Região I: $x < 0$ ($V = 0$)</i>	19
2.2.2.2	<i>Região II: $x \geq 0$ ($V = V_0$)</i>	19
2.2.3	<i>Condições de contorno</i>	20
2.2.3.1	<i>Condição de continuidade da função de onda</i>	20
2.2.3.2	<i>Condição de continuidade da derivada</i>	20
2.2.3.3	<i>Justificativa matemática e física</i>	21
2.2.3.4	<i>Resumo das condições aplicadas</i>	21
2.2.4	<i>Coefficientes de reflexão e transmissão</i>	21
2.2.5	<i>Análise dos regimes de energia</i>	22
2.2.5.1	<i>Regime I: $E > V_0$</i>	22
2.2.5.2	<i>Regime II: $E < V_0$ (Tunelamento quântico)</i>	22
2.2.6	<i>Síntese dos resultados não relativísticos</i>	23
2.3	Equação de Klein-Gordon	23
2.3.1	<i>Limitações da Equação de Schrödinger</i>	23
2.3.2	<i>Relação energia-momento na relatividade</i>	24
2.3.3	<i>Construção da equação de onda relativística</i>	24
2.3.4	<i>Forma covariante</i>	25
2.3.5	<i>Soluções de onda plana</i>	25
2.4	Espalhamento em um potencial degrau	26
2.4.1	<i>Equação de Klein-Gordon com potencial</i>	26
2.4.2	<i>Soluções por regiões</i>	26
2.4.2.1	<i>Região I ($x < 0$)</i>	26
2.4.2.2	<i>Região II ($x \geq 0$)</i>	27
2.4.3	<i>Condições de contorno</i>	27
2.4.4	<i>Derivação do coeficiente de reflexão</i>	28
2.4.5	<i>Derivação do coeficiente de transmissão</i>	28
2.4.6	<i>Interpretação física e o paradoxo de Klein</i>	29
2.4.7	<i>Análise dos regimes de energia</i>	29
2.4.7.1	<i>Regime I: $E > V_0 + mc^2$ (regime clássico relativístico)</i>	30

2.4.7.2	<i>Regime II: $mc^2 < E < V_0 - mc^2$ (regime de tunelamento)</i>	30
2.4.7.3	<i>Regime III: $E < V_0 - mc^2$ com $V_0 > E + mc^2$ (regime do paradoxo de Klein)</i>	30
2.4.8	<i>Comparação com a equação de Schrödinger</i>	31
2.4.8.1	<i>Regimes de energia na mecânica quântica não relativística</i>	32
2.4.8.2	<i>Comparação com a Equação de Klein-Gordon</i>	32
2.4.9	<i>Análise gráfica dos coeficientes de reflexão e transmissão</i>	32
2.4.10	<i>Estimativa numérica para elétrons</i>	35
2.4.11	<i>Por que o paradoxo não é observado em átomos</i>	36
2.4.12	<i>Condições para observar o paradoxo</i>	36
2.4.13	<i>Comparação numérica</i>	36
2.4.14	<i>Implicações para o ensino médio</i>	36
2.4.14.1	<i>Interpretação física das diferenças</i>	37
2.4.14.2	<i>Síntese comparativa</i>	37
2.4.15	<i>Discussão geral</i>	38
2.4.16	<i>Interpretação física e limitações</i>	39
2.4.16.1	<i>O tunelamento quântico e sua relação com o paradoxo de Klein</i>	39
2.4.16.2	<i>O grafeno como plataforma para o estudo do paradoxo de Klein</i>	39
2.4.16.3	<i>Limitações do formalismo de primeira quantização</i>	40
2.5	<i>Aprendizagem significativa</i>	40
2.5.1	<i>Subsunçores e estrutura cognitiva</i>	41
2.5.2	<i>Organizadores prévios</i>	41
2.5.3	<i>Sequência didática Ausubeliana</i>	41
2.5.4	<i>Tipos de aprendizagem significativa</i>	42
2.5.5	<i>Condições para a aprendizagem significativa</i>	42
2.5.6	<i>Implicações para o ensino de Física</i>	43
2.5.7	<i>Transposição didática do paradoxo de Klein</i>	43
2.6	<i>A Base Nacional Comum Curricular e o Ensino de Física</i>	43
2.6.1	<i>A Física Moderna na BNCC</i>	44
2.6.2	<i>Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN e PCN+)</i>	44
2.6.3	<i>Física Moderna no Ensino Médio</i>	45
2.6.4	<i>Justificativa da proposta didática</i>	45
3	<i>OBJETIVOS</i>	46
3.1	<i>Objetivo Geral</i>	46
3.2	<i>Objetivos Específicos</i>	46
4	<i>METODOLOGIA</i>	47
4.1	<i>Natureza da pesquisa</i>	47
4.2	<i>Procedimentos metodológicos</i>	47
4.3	<i>Análise dos dados</i>	48
4.4	<i>Instrumento de investigação</i>	48
4.5	<i>Elaboração da proposta didática</i>	49
4.6	<i>Limitações da pesquisa</i>	49
5	<i>RESULTADOS</i>	50
5.1	<i>Análise bibliográfica dos livros didáticos</i>	50

5.1.1	<i>Máximo e Alvarenga</i>	50
5.1.2	<i>Sampaio e Calçada</i>	50
5.1.3	<i>Torres e Penteado</i>	51
5.1.4	<i>Gaspar</i>	51
5.1.5	<i>Ser Protagonista - Física</i>	52
5.1.6	<i>Os Fundamentos da Física</i>	52
5.1.7	<i>Comparação dos livros didáticos</i>	52
5.2	Proposta de transposição didática do Paradoxo de Klein	53
6	CONCLUSÃO	56
	REFERÊNCIAS	58
	APÊNDICE A -INSTRUMENTO DE ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS	60
	APÊNDICE B - ANÁLISE DOS LIVROS	62

1 INTRODUÇÃO

A Física ensinada no Ensino Médio brasileiro continua predominantemente baseada em conteúdos desenvolvidos até o século XIX, com ênfase em mecânica clássica, termodinâmica e eletromagnetismo. Embora esses conteúdos sejam fundamentais, observa-se uma falta significativa no que se refere à abordagem de tópicos de Física Moderna, como mecânica quântica e relatividade (?).

De acordo com a Base Nacional Curricular Comum (BNCC), o ensino de Ciências da Natureza deve promover a compreensão de modelos científicos, bem como a relação entre ciência, tecnologia e sociedade. Dessa forma, o ensino de ciências pode abrir espaços para a inserção de temas contemporâneos, ao enfatizar a necessidade de contextualização e atualização dos conteúdos científicos. No entanto, a BNCC não estabelece de forma explícita a obrigatoriedade da abordagem de conceitos fundamentais da Física Moderna, o que contribui para sua limitada presença no currículo do Ensino Médio (1).

Esse cenário evidencia uma divergência entre o desenvolvimento da Física e sua efetiva inserção no contexto educacional, reduzindo o contato dos estudantes com ideias que são essenciais para a compreensão do mundo contemporâneo e suas tecnologias. Diante disso, torna-se relevante a proposição de estratégias que viabilizem a transposição didática de conceitos avançados para o nível médio, tornando-os acessíveis e pedagogicamente significativos.

Além disso, a escolha do tema deste trabalho se justifica também por seu valor histórico e científico. O ano de 2025 marca o centenário da proposição da equação de Schrödinger, que lançou os fundamentos da mecânica quântica e revolucionou a física ao introduzir uma descrição ondulatória para partículas materiais, consolidando uma nova visão de mundo (2, 3). Apesar de seu sucesso inegável no domínio não relativístico, a equação de Schrödinger revelou-se insuficiente para descrever partículas em altas energias, o que motivou a busca por uma teoria quântica compatível com a relatividade restrita. Dessa forma, a formulação da Equação de Klein-Gordon, desenvolvida no contexto da mecânica quântica relativística na década de 1920, completou o seu centenário, destacando sua importância como um dos primeiros esforços de unificação entre a mecânica quântica e a relatividade restrita, reforçando a pertinência de sua abordagem no contexto educacional, mediada por uma proposta de transposição didática voltada ao Ensino Médio (2).

Nesse sentido, este trabalho tem como objetivo geral analisar como ocorre a transposição didática dos conteúdos de Física Moderna, especialmente Física Quântica e Relatividade, em livros didáticos de Física do Ensino Médio, investigando em que medida essas obras favorecem a Aprendizagem Significativa proposta por Ausubel. A partir dessa análise, propõe-se uma adaptação pedagógica do Paradoxo de Klein fundamentada na teoria ausubeliana, visando contribuir para a inserção de temas de Física Moderna no currículo escolar de forma contextualizada, acessível e significativa.

Para atingir tais objetivos, a pesquisa foi estruturada em uma revisão bibliográfica e análise documental de seis coleções didáticas amplamente utilizadas no Brasil, com base nos referenciais da transposição didática de Chevallard e da aprendizagem significativa de Ausubel. Os resultados obtidos permitiram identificar as principais lacunas e potencialidades desses

materiais, orientando a elaboração de uma sequência didática que utiliza analogias, mapas conceituais e contextualizações tecnológicas — como o grafeno e o tunelamento quântico — para introduzir o paradoxo de Klein de maneira qualitativa e conceitualmente acessível ao Ensino Médio.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Mecânica Quântica Relativística

A mecânica quântica e a teoria da relatividade surgiram no início do século XX como respostas a limitações fundamentais da física clássica, marcando uma profunda reformulação dos conceitos físicos até então estabelecidos. Fenômenos como a radiação do corpo negro e o efeito fotoelétrico salientaram a incoerência da descrição clássica da interação entre matéria e radiação, impulsionando o desenvolvimento da teoria quântica. Por outro lado, a discrepância observada na precessão do periélio de Mercúrio revelou limitações na teoria gravitacional newtoniana, orientando à formulação da relatividade restrita e geral (3).

Apesar do êxito dessas teorias, rapidamente se tornou evidente que suas formulações eram incompatíveis. Em particular, a mecânica quântica não relativística, não é capaz de descrever adequadamente partículas em regimes de altas energias ou velocidades próximas à da luz, uma vez que não incorpora os princípios da invariância relativística (3).

Nesse contexto, motivados pelos trabalhos pioneiros de Albert Einstein sobre a estrutura da relatividade restrita, diversos esforços foram direcionados à construção de uma teoria quântica compatível com os postulados relativísticos. Esta teoria deveria ser capaz de descrever o comportamento de partículas em regimes nos quais os efeitos quânticos e relativísticos são simultaneamente relevantes, preservando a covariância relativística e a estrutura probabilística da mecânica quântica (2).

Nesse cenário, uma das primeiras tentativas de formular uma equação de onda relativística consistiu na substituição da relação clássica de energia pela relação relativística entre energia e momento no procedimento de quantização. Essa abordagem levou, de forma independente, aos trabalhos de Oskar Klein e Waler Gordon, que propuseram uma equação diferencial de segunda ordem no tempo e no espaço, atualmente conhecida como Equação de Klein-Gordon (2).

Diferentemente da equação de Schrödinger, que possui caráter não relativístico e é de primeira ordem na derivada temporal, a Equação de Klein-Gordon é construída de modo a respeitar a invariância de Lorentz, constituindo, um dos primeiros formalismos matemáticos capazes de descrever partículas em um contexto relativístico. Entretanto, como discutido na literatura, essa formulação apresenta dificuldades interpretativas, particularmente no que se refere à definição de uma densidade de probabilidade positiva definida, o que motivou o desenvolvimento de teorias mais abrangentes, como a equação de Dirac e a teoria quântica de campos (4).

2.1.1 Procedimento de quantização

Na mecânica quântica, as grandezas dinâmicas são promovidas a operadores que atuam sobre funções de onda. Esse procedimento, conhecido como quantização canônica, estabelece as seguintes correspondências:

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar\nabla \quad (2.2)$$

Essas relações decorrem da exigência de que a função de onda represente uma onda plana do tipo:

$$\psi(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad (2.3)$$

para a qual:

$$E = \hbar\omega, \quad \vec{p} = \hbar\vec{k} \quad (2.4)$$

Aplicando os operadores diferenciais sobre essa função, obtem-se:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = E\psi \quad (2.5)$$

$$-i\hbar\nabla\psi = \vec{p}\psi \quad (2.6)$$

justificando, assim, as substituições operatoriais.

2.1.2 Equação de Schrödinger

Antes de abordar a formulação relativística, é fundamental lembrar a estrutura da equação de Schrödinger, que constitui a base da mecânica quântica não relativística e serve como ponto de partida conceitual para a compreensão dos avanços posteriores (5). Todos os cálculos realizados nesta seção foram obtidos em (2–6).

2.1.3 A equação de onda não relativística

A equação de Schrödinger dependente do tempo para uma partícula de massa m sob ação de um potencial $V(\vec{r}, t)$ é dada por:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \hat{H}\Psi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}, t) \right] \Psi(\vec{r}, t) \quad (2.7)$$

Para uma partícula livre ($V = 0$), a equação se reduz a:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) \quad (2.8)$$

Buscando soluções na forma de ondas planas:

$$\Psi(\vec{r}, t) = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad (2.9)$$

obtém-se a relação de dispersão não relativística:

$$E = \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} \quad (2.10)$$

2.1.4 Limitações da equação de Schrödinger

A equação de Schrödinger, que descreve a dinâmica de partículas não relativísticas, é dada por:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \hat{H} \psi(\vec{r}, t) \quad (2.11)$$

onde o operador Hamiltoniano para uma partícula livre é:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad (2.12)$$

Essa equação apresenta duas características fundamentais:

- É de primeira ordem na derivada temporal;
- Não é invariante sob transformações de Lorentz.

A ausência da invariância de Lorentz implica que a equação de Schrödinger não é adequada para descrever partículas com velocidades próximas à da luz, pois sua estrutura baseia-se na expressão clássica da energia cinética:

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (2.13)$$

que é válida apenas no regime não relativístico.

2.2 Espalhamento em um potencial degrau: caso não relativístico

O problema do potencial degrau é um dos exemplos fundamentais no estudo da mecânica quântica, pois ilustra fenômenos como reflexão e transmissão de ondas de matéria, além do tunelamento quântico. Este problema servirá como base conceitual para compreendermos, posteriormente, as diferenças introduzidas pelo tratamento relativístico.

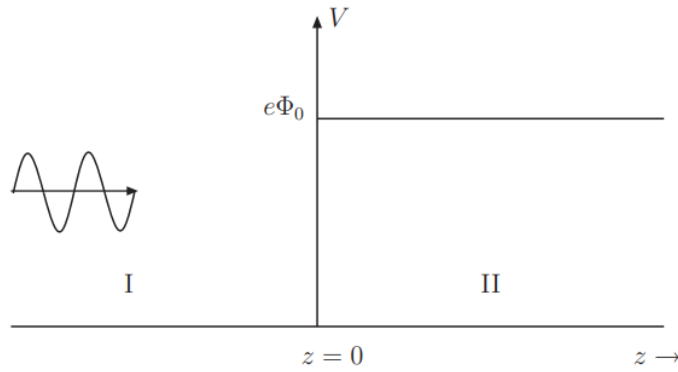
2.2.1 Definição do potencial degrau

Considere uma partícula de massa m incidindo da esquerda para a direita sobre um potencial unidimensional do tipo degrau definido por:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V_0, & x \geq 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

com $V_0 > 0$. Classicamente, se a energia da partícula $E > V_0$, ela ultrapassaria o degrau com velocidade reduzida; se $E < V_0$, ela seria refletida. O comportamento quântico é bem mais rico.

Figura 1: Representação do potencial degrau para a equação de Schrödinger



Fonte: DAS, Ashok. *Lectures on Quantum Field Theory*. World Scientific, 2021.

2.2.2 Solução da equação de Schrödinger independente do tempo

A equação de Schrödinger independente do tempo para este sistema é:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x) \psi = E \psi \quad (2.15)$$

2.2.2.1 Região I: $x < 0$ ($V = 0$)

Nesta região, a equação se reduz a:

$$\frac{d^2 \psi_I}{dx^2} + k_1^2 \psi_I = 0 \quad (2.16)$$

onde definimos o número de onda:

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (2.17)$$

A solução geral é uma combinação linear de ondas planas:

$$\psi_I(x) = Ae^{ik_1 x} + Be^{-ik_1 x} \quad (2.18)$$

onde o termo $Ae^{ik_1 x}$ representa a onda incidente (propagando-se da esquerda para a direita) e $Be^{-ik_1 x}$ representa a onda refletida.

2.2.2.2 Região II: $x \geq 0$ ($V = V_0$)

Nesta região, a equação de Schrödinger torna-se:

$$\frac{d^2 \psi_{II}}{dx^2} + k_2^2 \psi_{II} = 0 \quad (2.19)$$

com:

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar} \quad (2.20)$$

A solução geral é:

$$\psi_{II}(x) = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x} \quad (2.21)$$

Impondo a condição física de que não há onda incidente vindo de $x \rightarrow +\infty$, devemos ter $D = 0$, resultando:

$$\psi_{II}(x) = Ce^{ik_2x} \quad (2.22)$$

É importante notar que k_2 pode ser real ou imaginário dependendo da relação entre E e V_0 , o que determinará o comportamento qualitativo da solução.

2.2.3 Condições de contorno

As condições de contorno em $x = 0$ expressam exigências físicas fundamentais que a função de onda deve satisfazer para que a descrição quântica seja consistente (5).

2.2.3.1 Condição de continuidade da função de onda

A primeira condição de contorno exige que a função de onda seja contínua em $x = 0$:

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \Rightarrow A + B = C \quad (2.23)$$

A função de onda $\psi(x)$ está associada à probabilidade de encontrar a partícula em uma dada posição. A descontinuidade da função de onda implicaria em dois valores diferentes para a probabilidade no mesmo ponto, o que é fisicamente inaceitável. Além disso, a equação de Schrödinger é uma equação diferencial de segunda ordem, e sua solução requer que $\psi(x)$ seja contínua e diferenciável. Uma descontinuidade violaria a própria estrutura matemática da teoria (5).

2.2.3.2 Condição de continuidade da derivada

A segunda condição de contorno exige que a derivada primeira da função de onda também seja contínua em $x = 0$:

$$\left. \frac{d\psi_I}{dx} \right|_0 = \left. \frac{d\psi_{II}}{dx} \right|_0 \Rightarrow ik_1(A - B) = ik_2C \quad (2.24)$$

Simplificando:

$$k_1(A - B) = k_2C \quad (2.25)$$

A continuidade da derivada primeira está relacionada à conservação da corrente de probabilidade. Na mecânica quântica, a corrente de probabilidade é definida como:

$$j = \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi^* \frac{d\psi}{dx} - \psi \frac{d\psi^*}{dx} \right) \quad (2.26)$$

Se a derivada primeira fosse descontínua, a corrente de probabilidade não seria bem definida na interface, o que violaria a conservação da probabilidade (ausência de fontes ou sumidouros no ponto $x = 0$). Em outras palavras, a partícula não pode ser criada ou destruída

ao cruzar a descontinuidade do potencial (5).

2.2.3.3 Justificativa matemática e física

Do ponto de vista matemático, a equação de Schrödinger independente do tempo tem a forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi \quad (2.27)$$

Reorganizando:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}(V(x) - E)\psi \quad (2.28)$$

Se $V(x)$ tem uma descontinuidade finita, como no caso do degrau, o lado direito da equação permanece finito. Portanto, $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ é finita, o que implica que $\frac{d\psi}{dx}$ é contínua. Consequentemente, ψ também deve ser contínua. Esta é uma exigência matemática decorrente da própria equação diferencial (5).

2.2.3.4 Resumo das condições aplicadas

Substituindo as soluções obtidas anteriormente:

$$\psi_I(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \quad (2.29)$$

$$\psi_{II}(x) = Ce^{ik_2x} \quad (2.30)$$

As condições de contorno fornecem o sistema:

$$\boxed{A + B = C} \quad (2.31)$$

$$\boxed{k_1(A - B) = k_2C} \quad (2.32)$$

Este sistema determina completamente as amplitudes B e C em termos da amplitude incidente A , permitindo o cálculo dos coeficientes de reflexão e transmissão. A interpretação física é clara: a onda incidente se divide parcialmente em onda refletida e onda transmitida, e as condições de contorno garantem que este processo respeite a continuidade da função de onda e a conservação da probabilidade (5).

2.2.4 Coeficientes de reflexão e transmissão

O coeficiente de reflexão R é definido como a razão entre a corrente de probabilidade refletida e a incidente. Para a equação de Schrödinger, a corrente de probabilidade é dada por:

$$j = \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi^* \frac{d\psi}{dx} - \psi \frac{d\psi^*}{dx} \right) \quad (2.33)$$

Para ondas planas do tipo $\psi = Ae^{ikx}$, a corrente é $j = \frac{\hbar k}{m} |A|^2$, resultando:

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2, \quad T = \frac{k_2}{k_1} \left| \frac{C}{A} \right|^2 \quad (2.34)$$

Resolvendo o sistema formado pelas condições de contorno:

Da equação 2.23: $C = A + B$.

Substituindo em 2.25:

$$k_1(A - B) = k_2(A + B) \quad (2.35)$$

$$k_1A - k_1B = k_2A + k_2B \quad (2.36)$$

$$(k_1 - k_2)A = (k_1 + k_2)B \quad (2.37)$$

Portanto:

$$\frac{B}{A} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \quad (2.38)$$

E para a onda transmitida:

$$\frac{C}{A} = 1 + \frac{B}{A} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \quad (2.39)$$

Logo, os coeficientes são:

$$R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \quad (2.40)$$

$$T = \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{2k_1}{k_1 + k_2} \right)^2 = \frac{4k_1k_2}{(k_1 + k_2)^2} \quad (2.41)$$

Verifica-se imediatamente que:

$$R + T = 1 \quad (2.42)$$

garantindo a conservação da probabilidade.

2.2.5 Análise dos regimes de energia

2.2.5.1 Regime I: $E > V_0$

Neste caso, k_2 é real e positivo. Ambos os coeficientes são positivos e menores que 1, com $R + T = 1$. A partícula tem probabilidade não nula de ser transmitida, embora seu momento seja reduzido na região II. Este comportamento não possui análogo clássico, onde a partícula sempre seria transmitida (5).

2.2.5.2 Regime II: $E < V_0$ (Tunelamento quântico)

Aqui, $E - V_0$ é negativo, tornando k_2 imaginário puro. Definindo:

$$\kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \Rightarrow k_2 = i\kappa \quad (2.43)$$

A solução na região II torna-se exponencialmente decrescente:

$$\psi_{II}(x) = Ce^{-\kappa x} \quad (2.44)$$

O coeficiente de reflexão, nesse caso, é $R = 1$ (reflexão total), e o coeficiente de transmissão é $T = 0$. No entanto, existe uma probabilidade não nula de encontrar a partícula na região classicamente proibida, decaindo exponencialmente com a distância. Este fenômeno é conhecido como tunelamento quântico (5).

2.2.6 Síntese dos resultados não relativísticos

Em resumo, para o potencial degrau na mecânica quântica não relativística:

- Para $E > V_0$: transmissão parcial com $0 < T < 1$ e $0 < R < 1$;
- Para $E < V_0$: tunelamento, com $R = 1$, $T = 0$ e penetração evanescente;
- A probabilidade é sempre conservada: $R + T = 1$;
- Não há qualquer possibilidade de $R > 1$ ou $T < 0$.

Este panorama será contrastado com os resultados obtidos a partir da equação de Klein-Gordon, onde efeitos relativísticos introduzem fenômenos notavelmente distintos, como o paradoxo de Klein (2, 4).

2.3 Equação de Klein-Gordon

Conforme discutido anteriormente, a principal dificuldade reside na construção de uma equação de onda que preserve simultaneamente a estrutura probabilística da mecânica quântica e a invariância relativística imposta pela teoria de Einstein. Todos os cálculos realizados nesta seção foram obtidos em (2–6).

2.3.1 Limitações da Equação de Schrödinger

A equação de Schrödinger, que descreve a dinâmica de partículas não relativísticas, é dada por:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \hat{H} \psi(\vec{r}, t) \quad (2.45)$$

onde o operador Hamiltoniano para uma partícula livre é:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad (2.46)$$

Essa equação apresenta duas características fundamentais:

- É de primeira ordem na derivada temporal;

- Não é invariante sob transformações de Lorentz.

A ausência da invariância de Lorentz implica que a equação de Schrödinger não é adequada para descrever partículas com velocidades próximas à da luz, pois sua estrutura baseia-se na expressão clássica da energia cinética:

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (2.47)$$

que é válida apenas no regime não relativístico.

2.3.2 Relação energia-momento na relatividade

Na relatividade restrita, a energia total de uma partícula livre está relacionada ao momento linear pela expressão:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (2.48)$$

Essa equação pode ser obtida a partir da definição do quadrivetor energia-momento:

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \quad (2.49)$$

cujo invariante de Lorentz é:

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2 \quad (2.50)$$

Multiplicando ambos os lados por c^2 , recupera-se a relação:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

Essa relação substitui a antiga expressão de energia e estabelece o ponto de partida para a construção de uma equação de onda relativística.

2.3.3 Construção da equação de onda relativística

Substituindo os operadores correspondentes na relação energia-momento relativística encontra-se:

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \psi = [(-i\hbar \nabla)^2 c^2 + m^2 c^4] \psi \quad (2.51)$$

Calculando explicitamente os termos:

$$(i\hbar)^2 = -\hbar^2 \quad (2.52)$$

$$(-i\hbar)^2 = -\hbar^2 \quad (2.53)$$

logo:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = [-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4] \psi \quad (2.54)$$

Dividindo ambos os lados por $-\hbar^2$:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \psi - \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \psi \quad (2.55)$$

Reorganizando os termos:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \nabla^2 \psi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0 \quad (2.56)$$

Essa é a Equação de Klein-Gordon.

2.3.4 Forma covariante

Uma das principais vantagens dessa equação é sua invariância sob transformações de Lorentz. Para evidenciar essa propriedade, define-se o operador d'Alembertiano:

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (2.57)$$

De modo que a equação pode ser escrita como:

$$(\square + \mu^2) \psi = 0 \quad (2.58)$$

onde:

$$\mu^2 = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \quad (2.59)$$

Essa forma evidencia que a equação é escalar sob transformações de Lorentz, sendo, portanto, consistente com a relatividade restrita.

2.3.5 Soluções de onda plana

Buscando soluções do tipo:

$$\psi(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (2.60)$$

substituindo na equação, obtém-se a relação de dispersão:

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \quad (2.61)$$

ou, em termos de energia e momento:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

o que demonstra a consistência da equação com a relatividade.

2.4 Espalhamento em um potencial degrau

Uma das aplicações mais relevantes da Equação de Klein-Gordon consiste no estudo do espalhamento de partículas relativísticas em potenciais. Esse tipo de problema é fundamental para compreender como partículas se comportam ao interagir com regiões de energia potencial distinta, sendo amplamente utilizado como modelo idealizado (5).

No contexto da mecânica quântica não relativística, o problema do potencial degrau já apresenta características interessantes, como o tunelamento. No entanto, quando analisado no âmbito da mecânica quântica relativística, surgem fenômenos novos, que não possuem análogo clássico direto. Entre esses fenômenos destaca-se o chamado paradoxo de Klein, no qual a reflexão pode exceder a unidade, indicando a necessidade de uma interpretação mais profunda baseada na teoria quântica de campos (2, 4).

Para investigar esse comportamento, considera-se um potencial unidimensional do tipo degrau, já definido na Figura 1.

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V_0, & x \geq 0 \end{cases} \quad (2.62)$$

Esse potencial representa uma região onde a partícula incidente, vinda de $x < 0$, encontra uma mudança abrupta de energia potencial ao atingir a interface em $x = 0$.

2.4.1 Equação de Klein-Gordon com potencial

Para incluir a interação com o potencial, utiliza-se o acoplamento mínimo, no qual a energia da partícula é modificada conforme:

$$E \rightarrow E - V(x) \quad (2.63)$$

Substituindo essa relação na equação de Klein-Gordon estacionária, obtém-se:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{\hbar^2 c^2} [(E - V)^2 - m^2 c^4] \psi = 0 \quad (2.64)$$

Essa equação descreve o comportamento espacial da função de onda em cada região do espaço.

2.4.2 Soluções por regiões

Devido à descontinuidade do potencial em $x = 0$, o problema é resolvido separadamente em duas regiões.

2.4.2.1 Região I ($x < 0$)

Nesta região, $V = 0$, de modo que a equação se reduz a:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k_1^2 \psi = 0 \quad (2.65)$$

onde:

$$k_1 = \frac{1}{\hbar c} \sqrt{E^2 - m^2 c^4} \quad (2.66)$$

A solução geral é:

$$\psi_I(x) = Ae^{ik_1 x} + Be^{-ik_1 x} \quad (2.67)$$

O termo $Ae^{ik_1 x}$ representa uma onda incidente propagando-se no sentido positivo de x , enquanto $Be^{-ik_1 x}$ representa a onda refletida.

2.4.2.2 Região II ($x \geq 0$)

Nesta região, o potencial é constante e igual a V_0 , resultando em:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + k_2^2 \psi = 0 \quad (2.68)$$

com:

$$k_2 = \frac{1}{\hbar c} \sqrt{(E - V_0)^2 - m^2 c^4} \quad (2.69)$$

A solução geral seria:

$$\psi_{II}(x) = Ce^{ik_2 x} + De^{-ik_2 x} \quad (2.70)$$

No entanto, impõe-se a condição física de que não há ondas incidentes vindas de $x \rightarrow +\infty$, o que implica:

$$\psi_{II}(x) = Ce^{ik_2 x} \quad (2.71)$$

2.4.3 Condições de contorno

De maneira análoga ao caso não relativístico, as condições de continuidade da função de onda e de sua derivada em $x = 0$ garantem a consistência física da solução (4,5):

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \quad (2.72)$$

$$\left. \frac{d\psi_I}{dx} \right|_0 = \left. \frac{d\psi_{II}}{dx} \right|_0 \quad (2.73)$$

Embora a equação de Klein-Gordon seja de segunda ordem no tempo e no espaço, as condições de contorno para problemas de espalhamento unidimensional mantêm a mesma estrutura do caso não relativístico. A continuidade da função de onda e de sua derivada primeira assegura que a corrente de probabilidade relativística seja conservada na interface, na medida em que o formalismo de uma partícula ainda é aplicável. Entretanto, como veremos adiante, no regime do paradoxo de Klein ($V_0 > E + mc^2$), a interpretação física dessas condições se torna mais sutil, pois a criação de pares partícula-antipartícula introduz novos canais de espalhamento não contemplados na descrição de uma única partícula.

Substituindo as soluções obtidas:

$$A + B = C \quad (2.74)$$

$$k_1(A - B) = k_2C \quad (2.75)$$

2.4.4 Derivação do coeficiente de reflexão

O coeficiente de reflexão é definido como a razão entre as intensidades da onda refletida e da onda incidente:

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 \quad (2.76)$$

Para determinar essa razão, utiliza-se o sistema obtido das condições de contorno. Substituindo $C = A + B$ na segunda equação, obtém-se:

$$k_1(A - B) = k_2(A + B) \quad (2.77)$$

Expandindo:

$$k_1A - k_1B = k_2A + k_2B \quad (2.78)$$

Reorganizando os termos:

$$(k_1 - k_2)A = (k_1 + k_2)B \quad (2.79)$$

Isolando a razão:

$$\frac{B}{A} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \quad (2.80)$$

Portanto:

$$R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \quad (2.81)$$

Esse resultado mostra que o coeficiente de reflexão depende diretamente da relação entre os números de onda nas duas regiões, refletindo a mudança nas propriedades dinâmicas da partícula ao atravessar a interface.

2.4.5 Derivação do coeficiente de transmissão

Diferentemente do caso não relativístico, o coeficiente de transmissão deve ser definido em termos da corrente de probabilidade, e não apenas das amplitudes.

Para a Equação de Klein-Gordon, a corrente associada é proporcional a:

$$j \propto k|\psi|^2 \quad (2.82)$$

Assim, o coeficiente de transmissão é:

$$T = \frac{j_{trans}}{j_{inc}} = \frac{k_2 |C|^2}{k_1 |A|^2} \quad (2.83)$$

Para determinar $\frac{C}{A}$, utiliza-se novamente a relação:

$$C = A + B \quad (2.84)$$

Dividindo por A:

$$\frac{C}{A} = 1 + \frac{B}{A} \quad (2.85)$$

Substituindo o resultado obtido anteriormente:

$$\frac{C}{A} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \quad (2.86)$$

Logo:

$$T = \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{2k_1}{k_1 + k_2} \right)^2 \quad (2.87)$$

$$T = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} \quad (2.88)$$

2.4.6 Interpretação física e o paradoxo de Klein

Os resultados obtidos apresentam comportamento incomum quando o potencial satisfaz:

$$V_0 > E + mc^2 \quad (2.89)$$

Nesse regime, $(E - V_0)$ torna-se negativo, levando a soluções associadas a estados de energia negativa. Consequentemente:

$$R > 1 \quad (2.90)$$

Esse resultado, aparentemente paradoxal, indica que a onda refletida possui intensidade maior que a onda incidente. A interpretação física correta envolve a criação de pares partícula-antipartícula na região do potencial, um fenômeno que não pode ser descrito adequadamente no formalismo de uma única partícula.

Esse comportamento constitui o paradoxo de Klein e evidencia os limites da mecânica quântica relativística de primeira quantização, apontando para a necessidade de uma descrição mais completa fornecida pela teoria quântica de campos (2, 4).

2.4.7 Análise dos regimes de energia

A interpretação dos coeficientes de reflexão e transmissão obtidos anteriormente torna-se mais clara ao se analisar separadamente os diferentes regimes de energia da partícula em relação à altura do potencial V_0 . Cada regime apresenta características físicas distintas,

evidenciando a riqueza do comportamento relativístico descrito pela Equação de Klein-Gordon (2,4).

2.4.7.1 Regime I: $E > V_0 + mc^2$ (regime clássico relativístico)

Neste caso, a energia da partícula é suficientemente alta para superar o potencial mesmo considerando sua energia de repouso. Assim, o termo $(E - V_0)^2 - m^2c^4$ é positivo, o que implica:

$$k_2 \in \mathbb{R} \quad (2.91)$$

Consequentemente, a solução na região II é oscilatória, caracterizando uma onda propagante. Esse comportamento é análogo ao caso clássico, no qual a partícula atravessa o potencial com uma redução em seu momento.

Os coeficientes de reflexão e transmissão satisfazem:

$$R < 1, \quad T > 0, \quad R + T = 1 \quad (2.92)$$

Nesse regime, não há efeitos tipicamente relativísticos não triviais, e a interpretação é semelhante à da mecânica quântica não relativística.

2.4.7.2 Regime II: $mc^2 < E < V_0 - mc^2$ (regime de tunelamento)

Neste intervalo de energia, tem-se:

$$(E - V_0)^2 - m^2c^4 < 0 \quad (2.93)$$

o que implica:

$$k_2 = i\kappa, \quad \kappa \in \mathbb{R} \quad (2.94)$$

Assim, a solução na região II torna-se exponencial:

$$\psi_{II}(x) = Ce^{-\kappa x} \quad (2.95)$$

Esse comportamento corresponde a uma onda evanescente, caracterizando o fenômeno de tunelamento quântico. A partícula possui uma probabilidade não nula de penetrar na região proibida classicamente, mas essa probabilidade decai exponencialmente com a distância.

Neste regime:

$$T \approx 0, \quad R \approx 1 \quad (2.96)$$

Esse resultado é análogo ao obtido na mecânica quântica não relativística, não apresentando comportamento paradoxal.

2.4.7.3 Regime III: $E < V_0 - mc^2$ com $V_0 > E + mc^2$ (regime do paradoxo de Klein)

Neste regime, ocorre uma situação atípica: embora a energia da partícula seja menor que a altura do potencial, o termo $(E - V_0)$ torna-se suficientemente negativo de modo que:

$$(E - V_0)^2 - m^2 c^4 > 0 \quad (2.97)$$

Portanto:

$$k_2 \in \mathbb{R} \quad (2.98)$$

Isso implica que, diferentemente do caso não relativístico, a solução na região II volta a ser oscilatória, indicando a presença de ondas propagantes dentro da região de potencial elevado.

Esse resultado físico é surpreendente, pois sugere que a partícula pode atravessar uma barreira de potencial maior que sua energia total. Ademais, ao calcular os coeficientes, obtém-se:

$$R > 1 \quad (2.99)$$

$$T < 0 \quad (2.100)$$

Esse comportamento contraditório caracteriza o paradoxo de Klein.

A interpretação física correta desse regime envolve a criação de pares partícula-antipartícula na região do potencial. A onda transmitida está associada a estados de energia negativa, que, no formalismo da teoria quântica de campos, são reinterpretados como antipartículas propagando-se no sentido oposto.

Assim, o excesso de reflexão ($R > 1$) pode ser entendido como resultado da contribuição de partículas adicionais criadas no processo.

2.4.8 Comparação com a equação de Schrödinger

Na mecânica quântica não relativística, a equação de Schrödinger independente do tempo para uma partícula em um potencial $V(x)$ é dada por:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x) \psi = E \psi \quad (2.101)$$

Para o potencial degrau, a equação nas duas regiões assume formas distintas.

Na região I ($x < 0$, $V = 0$):

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + k^2 \psi = 0 \quad (2.102)$$

com:

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (2.103)$$

Na região II ($x \geq 0$, $V = V_0$):

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + k_2^2 \psi = 0 \quad (2.104)$$

onde:

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar} \quad (2.105)$$

2.4.8.1 Regimes de energia na mecânica quântica não relativística

No caso de Schrödinger, existem apenas dois regimes fisicamente distintos:

- $E > V_0$: a solução na região II é oscilatória, e ocorre transmissão parcial;
- $E < V_0$: a solução torna-se exponencial, caracterizando tunelamento.

Importante destacar que, nesse formalismo:

$$0 \leq R \leq 1, \quad 0 \leq T \leq 1 \quad (2.106)$$

e sempre:

$$R + T = 1 \quad (2.107)$$

Não há qualquer possibilidade de comportamento paradoxal.

2.4.8.2 Comparação com a Equação de Klein-Gordon

A principal diferença surge quando se considera a relação energia-momento utilizada em cada teoria. Enquanto a equação de Schrödinger baseia-se na expressão clássica:

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (2.108)$$

a Equação de Klein-Gordon utiliza a relação relativística:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (2.109)$$

Essa diferença estrutural implica nas diferenças dos regimes apresentados.

Na mecânica quântica relativística, surgem três regimes de energia, sendo que, no regime do paradoxo de Klein, a solução na região do potencial volta a ser oscilatória, mesmo quando $E < V_0$. Isso não ocorre na teoria não relativística.

Além disso, os coeficientes de reflexão e transmissão apresentam comportamento distintos:

- Na equação de Schrödinger: $R \leq 1$ e $T \geq 0$;
- Na equação de Klein-Gordon: pode ocorrer $R > 1$ e $T < 0$.

2.4.9 Análise gráfica dos coeficientes de reflexão e transmissão

No regime de altas energias, definido por $E > V_0 + mc^2$, os coeficientes apresentam comportamento semelhante ao caso não relativístico. O coeficiente de reflexão é menor que a unidade, enquanto o coeficiente de transmissão é positivo, satisfazendo a relação:

$$R + T = 1 \quad (2.110)$$

Nesse regime, a partícula possui energia suficiente para atravessar a barreira de potencial, e o comportamento é essencialmente clássico.

No regime intermediário, caracterizado por $mc^2 < E < V_0 - mc^2$, observa-se o fenômeno de tunelamento quântico. A solução na região do potencial torna-se evanescente, resultando em uma transmissão fortemente suprimida:

$$T \approx 0, \quad R \approx 1 \quad (2.111)$$

Esse comportamento é análogo ao observado na mecânica quântica não relativística, não apresentando características paradoxais.

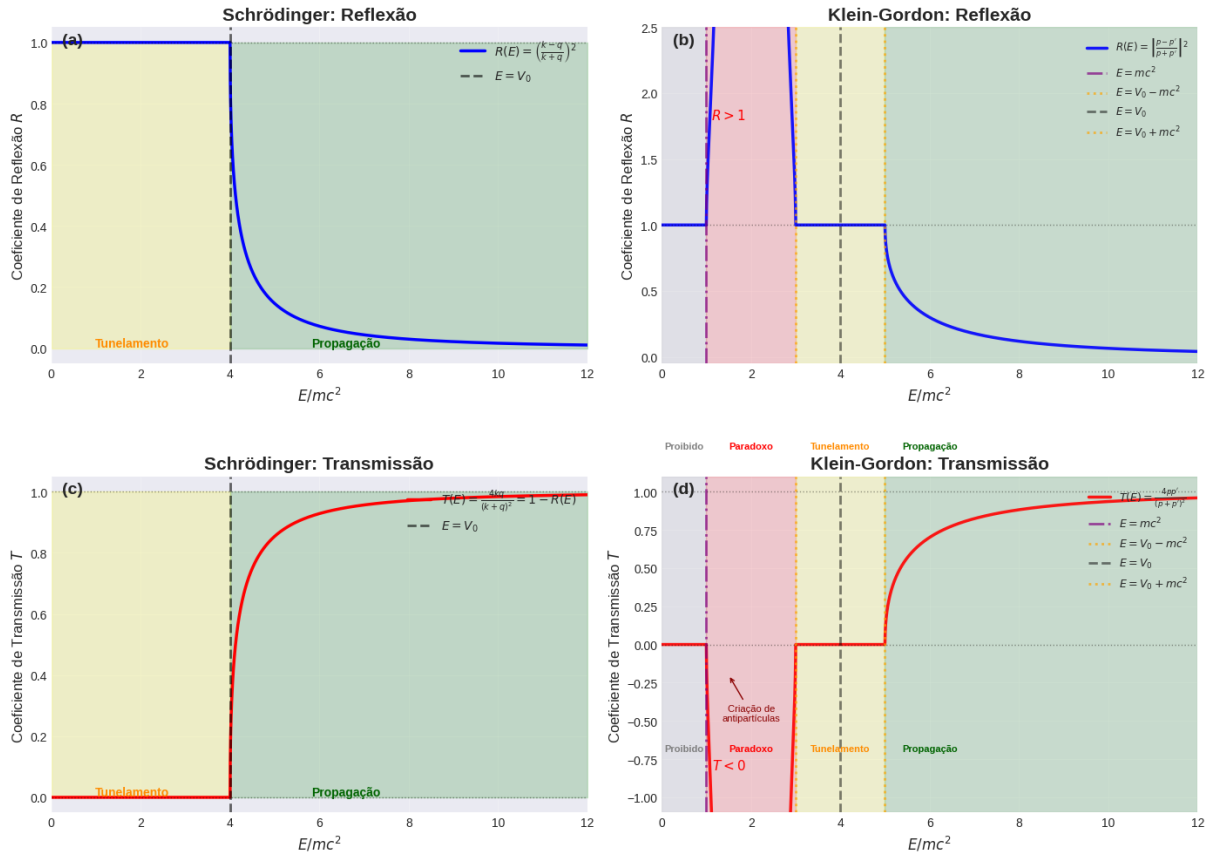
Entretanto, no regime de baixas energias com potenciais intensos, definido por $V_0 > E + mc^2$, surge o comportamento mais notável. Nesse caso, os coeficientes apresentam resultados não intuitivos:

$$R > 1 \quad (2.112)$$

$$T < 0 \quad (2.113)$$

Graficamente, isso se manifesta como uma elevação do coeficiente de reflexão acima da unidade e valores negativos para o coeficiente de transmissão. Esse comportamento aparentemente contraditório não pode ser interpretado no contexto da mecânica quântica de uma única partícula.

Figura 2: Coeficientes de reflexão e transmissão com Schrödinger e Klein-Gordon



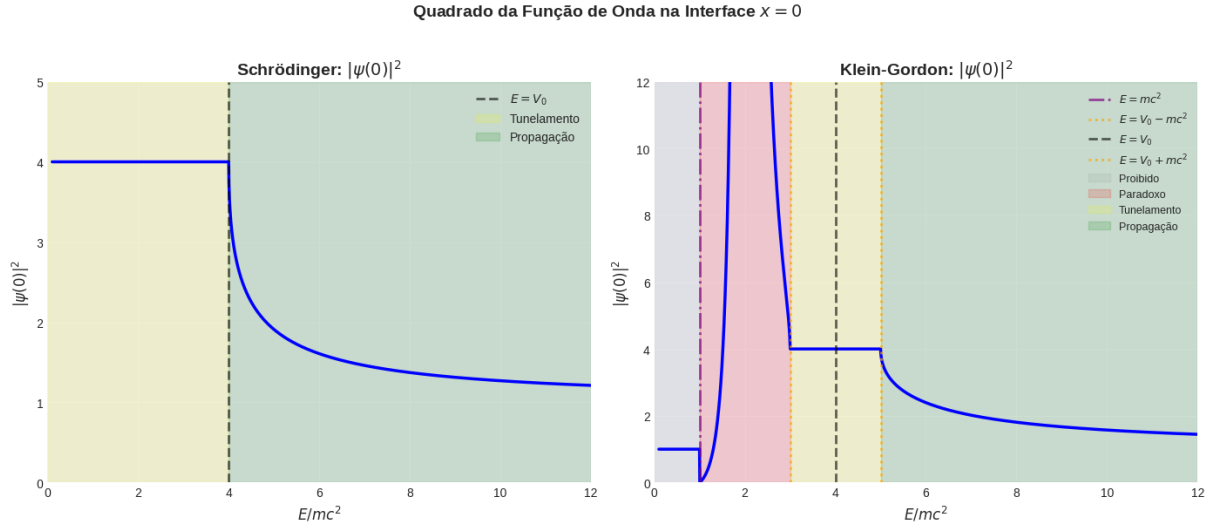
Fonte: Elaborado pela autora.

A explicação física adequada envolve a criação de pares partícula-antipartícula na região do potencial. A contribuição dessas partículas adicionais resulta em um aumento efetivo da corrente refletida, justificando valores de R superiores a 1.

Assim, os gráficos de R e T não apenas ilustram os diferentes regimes de energia, mas também evidenciam a limitação do formalismo da Equação de Klein-Gordon e a necessidade de uma abordagem mais completa baseada na teoria quântica de campos (2,4).

Além disso, com os gráficos do quadrado da função de onda é possível analisar as ressonâncias e estados evanescentes.

A figura 3 complementa a análise mostrando $|\psi(0)|^2$ em função da energia. Para Schrödinger, a função é contínua e suave, com uma transição em $E = V_0$. Para Klein-Gordon, observa-se uma divergência no limiar do paradoxo ($E = V_0 - mc^2$), refletindo o caráter singular da criação de pares, e uma estrutura mais complexa na região de tunelamento, indicando a riqueza fenomenológica introduzida pela relatividade. Esse limar define a mudança do estado de tunelamento para o estado do paradoxo e mostra que é necessário que o potencial seja mc^2 a mais que a energia da partícula.

Figura 3: Quadrado da função de onda em função da posição em $x = 0$ 

Fonte: Elaborado pela autora.

2.4.10 Estimativa numérica para elétrons

Para compreender a magnitude do potencial necessário para observar o paradoxo de Klein, é instrutivo considerar o caso de elétrons em sistemas atômicos. A condição para o paradoxo é:

$$V_0 > E + mc^2 \quad (2.114)$$

onde $mc^2 \approx 511 \text{ keV}$ é a energia de repouso do elétron.¹ Para elétrons em estados atômicos típicos, as energias de ligação são da ordem de eV (elétron-volt), ou seja:

$$E_{\text{atômico}} \sim 1 \text{ eV} \quad \text{a} \quad 10^3 \text{ eV} \quad (2.115)$$

Comparando com a energia de repouso do elétron:

$$\frac{E_{\text{atômico}}}{mc^2} \sim \frac{1 \text{ eV}}{511 \times 10^3 \text{ eV}} \approx 2 \times 10^{-6} \quad (2.116)$$

Isso significa que a energia dos elétrons atômicos é cerca de seis ordens de magnitude menor que sua energia de repouso. Portanto, para que a condição $V_0 > E + mc^2$ seja satisfeita com $E \sim 1 \text{ eV}$, o potencial deve ser:

$$V_0 > 511 \text{ keV} + 1 \text{ eV} \approx 511 \text{ keV} \quad (2.117)$$

Ou seja, o potencial deve ser da ordem de **centenas de keV** para que o paradoxo de Klein seja observado com elétrons de baixa energia. Este valor é extremamente elevado comparado aos potenciais típicos encontrados em átomos ($V_0 \sim 10 \text{ eV}$ a 10^3 eV).

¹O eletrovolt (eV) é uma unidade de energia amplamente utilizada em física atômica e de partículas, definida como a quantidade de energia cinética adquirida por um elétron ao ser acelerado por uma diferença de potencial de 1 volt no vácuo. A relação de conversão para o Sistema Internacional (SI) é: $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$. Portanto, $1 \text{ keV} = 10^3 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-16} \text{ J}$ e $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-13} \text{ J}$

2.4.11 *Por que o paradoxo não é observado em átomos*

A razão pela qual o paradoxo de Klein não é observado em sistemas atômicos convencionais é dupla:

1. **Potenciais atômicos são muito baixos:** Os potenciais eletrostáticos típicos em átomos são da ordem de dezenas a milhares de eV, muito abaixo do limiar de 511 keV necessário para o paradoxo com elétrons não relativísticos.
2. **Elétrons atômicos são não relativísticos:** Para elétrons em estados fundamentais ($E \ll mc^2$), a aproximação não relativística é válida, e o tunelamento quântico padrão (com $R < 1$ e $T > 0$) descreve adequadamente o comportamento.

2.4.12 *Condições para observar o paradoxo*

Para que o paradoxo de Klein seja observado experimentalmente, são necessárias condições extremas:

- **Potenciais da ordem de MeV:** Apenas em núcleos pesados ($Z \gtrsim 170$) o potencial Coulombiano pode atingir valores da ordem de mc^2 , levando à chamada *catástrofe do vácuo* e à criação espontânea de pares.
- **Elétrons relativísticos:** Se a energia do elétron incidente for relativística ($E \gg mc^2$), a condição para o paradoxo torna-se $V_0 > E + mc^2 \approx E$, o que ainda requer potenciais extremamente altos.
- **Sistemas de matéria condensada:** Em materiais como o **grafeno**, os elétrons se comportam como partículas relativísticas sem massa efetiva ($m^* \rightarrow 0$). Nesse caso, a condição para o paradoxo é $V_0 > E$, e potenciais da ordem de eV já são suficientes para observar o fenômeno. Este é um dos principais motivos pelo qual o grafeno tem sido extensivamente estudado como um sistema para observação do paradoxo de Klein (2, 7).

2.4.13 *Comparação numérica*

A Tabela 1 apresenta uma comparação entre as escalas de energia envolvidas.

2.4.14 *Implicações para o ensino médio*

Ao propor a transposição didática do paradoxo de Klein para o ensino médio, é importante que os estudantes compreendam que:

- O paradoxo de Klein não é observado em situações cotidianas ou em átomos convencionais;
- O fenômeno requer condições extremas (potenciais da ordem de MeV) ou sistemas especiais como o grafeno;
- A existência do paradoxo é uma previsão teórica da mecânica quântica relativística que aponta para a necessidade da teoria quântica de campos;

Tabela 1: Comparação de escalas de energia para o paradoxo de Klein

Sistema	Energia do elétron (E)	Potencial necessário (V_0)	Paradoxo
Átomo de Hidrogênio	13.6 eV	$> 511 \text{ keV}$	Não
Átomos pesados	$10^2 - 10^3 \text{ eV}$	$> 511 \text{ keV}$	Não
Elétrons relativísticos	$1 - 10 \text{ MeV}$	$> 1 - 10 \text{ MeV}$	Sim (em princípio)
Núcleos superpesados	$E \sim mc^2$	$V_0 \sim mc^2$	Sim (catástrofe do vácuo)
Grafeno ($v_F \approx c/300$)	$E \sim 1 \text{ eV}$	$V_0 \sim 1 \text{ eV}$	Sim!

Fonte: Elaborado pela autora com base em (2, 4, 7).

- Materiais como o grafeno oferecem uma possibilidade de observar efeitos relativísticos com potenciais muito menores, devido à velocidade de Fermi efetiva.

Essa discussão permite conectar o formalismo abstrato do paradoxo de Klein com aplicações tecnológicas contemporâneas, como a eletrônica baseada em grafeno, alinhando-se com as diretrizes da BNCC para contextualização do ensino de Física (1, 8).

2.4.14.1 Interpretação física das diferenças

A ausência do paradoxo de Klein na mecânica quântica não relativística deve-se ao fato de que essa teoria não permite a criação de partículas. O número de partículas é conservado, e a função de onda possui interpretação probabilística bem definida.

Por outro lado, a Equação de Klein-Gordon, ao incorporar a relatividade, admite soluções associadas a energias negativas. Essas soluções não possuem interpretação direta no contexto de uma única partícula, mas podem ser reinterpretadas, no âmbito da teoria quântica de campos, como estados de antipartículas.

Assim, o comportamento paradoxal observado no regime relativístico está intimamente relacionado à possibilidade de criação de pares partícula-antipartícula, fenômeno completamente ausente na mecânica quântica não relativística.

2.4.14.2 Síntese comparativa

Em síntese, enquanto a equação de Schrödinger fornece uma descrição consistente para sistemas de baixa energia, a Equação de Klein-Gordon revela novos fenômenos em regimes relativísticos, destacando os limites do formalismo não relativístico e a necessidade de uma teoria mais abrangente.

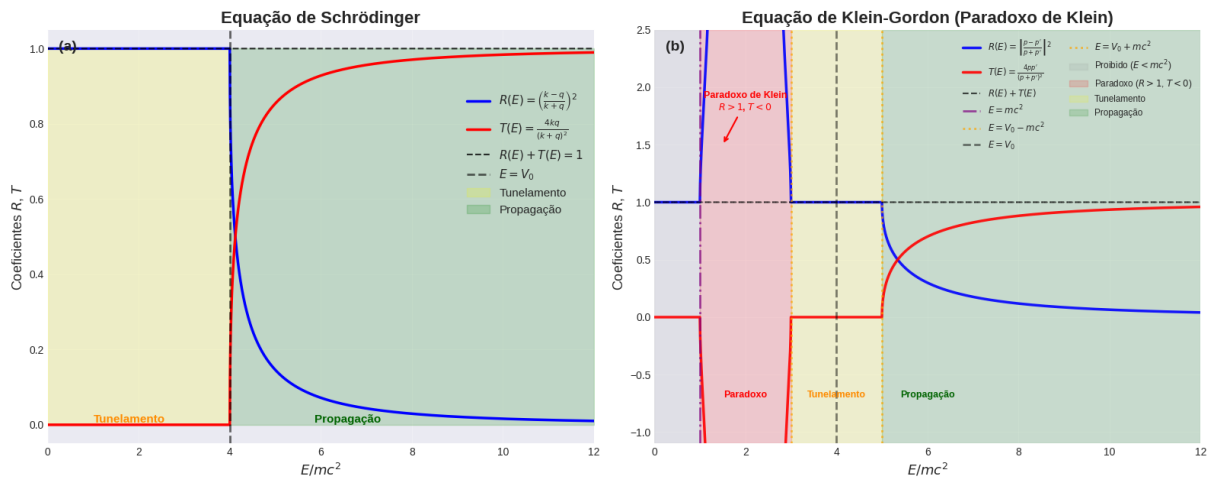
Essa comparação evidencia que o paradoxo de Klein não é uma inconsistência da teoria, mas sim um indicativo de sua incompletude no contexto de uma única partícula.

Tabela 2: Comparação entre a Equação de Schrödinger e a Equação de Klein-Gordon no problema do potencial degrau

Aspecto	Schrödinger	Klein-Gordon
Natureza da teoria	Não relativística	Relativística
Relação energia-momento	$E = \frac{p^2}{2m}$	$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$
Ordem da equação no tempo	Primeira ordem	Segunda ordem
Invariância de Lorentz	Não	Sim
Interpretação da função de onda	Densidade de probabilidade positiva	Densidade não definida positiva
Regimes de energia	Dois regimes	Três regimes
Comportamento para $E < V_0$	Tunelamento (onda evanescente)	Pode haver onda propagante
Coeficiente de reflexão	$0 \leq R \leq 1$	Pode ocorrer $R > 1$
Coeficiente de transmissão	$0 \leq T \leq 1$	Pode ocorrer $T < 0$
Conservação de probabilidade	Sim ($R + T = 1$)	Não trivial (corrente relativística)
Interpretação física	Partícula única	Necessidade de partículas e antipartículas
Fenômenos exclusivos	Derivada de 1º ordem no tempo	Paradoxo de Klein
Limitação da teoria	Não válida em altas energias	Não descreve criação de partículas completamente
Extensão teórica necessária	—	Teoria Quântica de Campos

Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 4: Paradoxo de Klein: comparação entre as equações de Schrödinger e Klein-Gordon (unidades naturais: $\hbar = c = 1$, $m = 1$, $V_0 = 4.0 = 4m$)



Fonte: Elaborado pela autora.

2.4.15 Discussão geral

A análise dos três regimes indica que o comportamento da Equação de Klein-Gordon difere da mecânica quântica não relativística em situações envolvendo potenciais intensos.

Enquanto os regimes I e II apresentam semelhanças com o comportamento clássico e não relativístico, o regime III revela a limitação fundamental do formalismo de uma partícula,

indicando a necessidade de uma descrição mais completa, fornecida pela teoria quântica de campos.

Esse resultado reforça a importância do paradoxo de Klein como um marco conceitual na compreensão da mecânica quântica relativística.

2.4.16 *Interpretação física e limitações*

Apesar de sua consistência relativística, a Equação de Klein-Gordon apresenta dificuldades na interpretação probabilística. A densidade associada à equação não é definida positiva, o que impede sua interpretação direta como densidade de probabilidade.

Essa limitação motivou o desenvolvimento de teorias mais avançadas, como a equação de Dirac e, posteriormente, a teoria quântica de campos, nas quais a criação e aniquilação de partículas são naturalmente incorporadas.

2.4.16.1 *O tunelamento quântico e sua relação com o paradoxo de Klein*

O fenômeno do tunelamento quântico, embora já presente na mecânica quântica não relativística, adquire novas dimensões quando analisado sob a ótica da equação de Klein-Gordon. No regime não relativístico, o tunelamento ocorre quando uma partícula com energia $E < V_0$ incide sobre uma barreira de potencial. Nesse caso, a função de onda na região classicamente proibida decai exponencialmente, e os coeficientes de reflexão e transmissão satisfazem $R = 1$ e $T = 0$, com $R + T = 1$ (5).

No contexto relativístico, no regime II ($mc^2 < E < V_0 - mc^2$), o tunelamento ocorre de maneira análoga ao caso não relativístico, com a função de onda tornando-se evanescente na região do potencial. Contudo, no regime III ($E < V_0 - mc^2$ com $V_0 > E + mc^2$), o tunelamento dá lugar ao paradoxo de Klein, onde a partícula pode atravessar a barreira mesmo quando sua energia é menor que a altura do potencial. Nesse caso, a solução na região II volta a ser oscilatória, indicando a presença de ondas propagantes (4).

A diferença fundamental entre o tunelamento não relativístico e o paradoxo de Klein reside na interpretação física. Enquanto no primeiro caso a partícula simplesmente "atravessa" a barreira com probabilidade exponencialmente pequena, no segundo caso o processo envolve a criação de pares partícula-antipartícula na região do potencial. A onda transmitida está associada a estados de energia negativa, que no formalismo da teoria quântica de campos são reinterpretados como antipartículas propagando-se no sentido oposto (2).

2.4.16.2 *O grafeno como plataforma para o estudo do paradoxo de Klein*

Um dos desenvolvimentos mais notáveis da física da matéria condensada nas últimas décadas foi a descoberta do grafeno, um material bidimensional constituído por uma única camada de átomos de carbono organizados em uma estrutura hexagonal. O grafeno apresenta propriedades eletrônicas notáveis, sendo os elétrons em seu interior descritos, em baixas energias, pela equação de Dirac para partículas sem massa, com uma velocidade de Fermi $v_F \approx c/300$ (9).

Essa propriedade torna o grafeno um sistema físico único para a investigação experimental de fenômenos relativísticos que, até então, eram acessíveis apenas em aceleradores

de partículas ou em regimes de altas energias. Em particular, o paradoxo de Klein pode ser observado em junções de grafeno, onde uma barreira de potencial é criada por meio de porta eletrostáticas (10).

Em uma junção de grafeno, elétrons incidentes sobre uma barreira de potencial podem apresentar transmissão perfeita ($T = 1$) para incidência normal, um fenômeno conhecido como tunelamento de Klein. Esse comportamento é uma manifestação direta do paradoxo de Klein em um sistema de matéria condensada, e tem sido confirmado experimentalmente (11, 12).

A possibilidade de estudar o paradoxo de Klein no grafeno é de grande importância para o ensino de Física Moderna. Ao conectar um conceito abstrato da mecânica quântica relativística a um material concreto e com aplicações tecnológicas reais, torna-se possível construir pontes significativas entre a física fundamental e o mundo contemporâneo. O grafeno, além de sua relevância científica, possui aplicações em dispositivos eletrônicos, sensores, armazenamento de energia e tecnologias quânticas, o que o torna um excelente ponto de partida para a contextualização didática de temas avançados (13, 14).

Dessa forma, a discussão do paradoxo de Klein no contexto do grafeno não apenas ilustra a relevância física do fenômeno, mas também demonstra que conceitos considerados excessivamente abstratos possuem manifestações concretas e mensuráveis em sistemas acessíveis experimentalmente. Essa conexão entre teoria e experimento é fundamental para uma compreensão mais autêntica da natureza da ciência e para a motivação dos estudantes no estudo da Física Moderna.

2.4.16.3 *Limitações do formalismo de primeira quantização*

É importante enfatizar que a Equação de Klein-Gordon, embora historicamente relevante e conceitualmente importante, não constitui uma teoria completa para a descrição de partículas relativísticas. Suas limitações são particularmente evidentes no regime do paradoxo de Klein, onde a interpretação de uma única partícula falha e a criação de pares deve ser considerada.

A descrição adequada desses fenômenos requer a teoria quântica de campos, na qual as partículas são tratadas como excitações de campos quânticos e a criação e aniquilação de partículas é naturalmente incorporada. Nesse formalismo, o paradoxo de Klein é resolvido: a reflexão anômala $R > 1$ é interpretada como resultado da criação de pares partícula-antipartícula no potencial, e a corrente total é conservada quando todos os canais de espalhamento são considerados (4).

Assim, o paradoxo de Klein não representa uma inconsistência da teoria, mas sim uma indicação de seus limites, apontando para a necessidade de uma descrição mais abrangente. Essa compreensão é fundamental para uma visão adequada da evolução da física no século XX, desde a mecânica quântica não relativística até a teoria quântica de campos.

2.5 **Aprendizagem significativa**

A teoria da aprendizagem significativa, desenvolvida por David Ausubel, constitui um dos pilares da abordagem cognitivista da educação, especialmente no ensino de ciências. Essa teoria parte do pressuposto de que o fator mais importante para a aprendizagem é aquilo

que o aluno já sabe, isto é, sua estrutura cognitiva prévia. Nesse sentido, o processo de ensino deve ser organizado de modo a favorecer a integração entre novos conhecimentos e conceitos já existentes (15, 16).

Segundo Ausubel, a aprendizagem significativa ocorre quando uma nova informação é relacionada, de maneira não arbitrária e substantiva, a conceitos relevantes presentes na estrutura cognitiva do indivíduo. Em suas palavras:

O fator mais importante que influencia a aprendizagem é o que o aluno já sabe. Descubra isso e ensine-o de acordo com o que ele já sabe (15)

Essa afirmação resume o cerne da teoria ausubeliana, ao destacar o papel central dos conhecimentos prévios no processo de aprendizagem. Diferentemente da aprendizagem mecânica, caracterizada pela memorização literal de informações, a aprendizagem significativa implica a construção de relações conceituais, promovendo maior retenção e capacidade de aplicação do conhecimento em novos contextos (16).

2.5.1 Subsunoçores e estrutura cognitiva

Um dos conceitos fundamentais da teoria de Ausubel é o de subsunçor, definido como ideias, conceitos ou proposições já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz, que servem como base para a incorporação de novos conhecimentos (16).

A estrutura cognitiva pode ser entendida como uma rede hierarquicamente organizada de conceitos, na qual os subsunçores ocupam posições mais gerais e inclusivas. Quando um novo conteúdo é apresentado, ele pode ser assimilado de forma significativa se houver subsunçores adequados para ancorá-lo. Caso contrário, a aprendizagem tende a ocorrer de forma mecânica (15, 17).

Esse processo de assimilação envolve a modificação tanto do novo conhecimento quanto dos subsunçores, resultando em uma reorganização da estrutura cognitiva. Dessa forma, o fator mais importante para a aprendizagem significativa são os conceitos já conhecidos pelos alunos e a forma de ligar novos conhecimentos a esses subsunçores (16, 18).

2.5.2 Organizadores prévios

Para facilitar a aprendizagem significativa, Ausubel propõe o uso de organizadores prévios, que consistem em materiais introdutórios apresentados antes do conteúdo principal, com o objetivo de ativar ou construir subsunçores relevantes.

Esses organizadores atuam como uma ponte cognitiva entre o conhecimento prévio do aluno e o novo conteúdo, favorecendo a assimilação significativa (15).

Portanto, para uma aprendizagem significativa é importante que o professor use materiais introdutórios que sirvam como pontes cognitivas para os assuntos mais complexos a serem abordados (15).

2.5.3 Sequência didática Ausubeliana

Segundo Ausubel, para a organização adequada de uma sequência didática, é crucial a criação das pontes cognitivas entre os subsunçores, a fim de que o ensino seja de fato

significativo, com esse propósito o pensador estabelece dois princípios (15):

- **Diferenciação Progressiva:** Conceitos gerais e inclusivos que devem ser apresentados primeiro, para depois serem progressivamente diferenciados em detalhes. Servindo, assim, como subsunçores para as concepções futuras.
- **Reconciliação Integrativa:** O material utilizado deve explorar relações entre as definições apresentadas, exibindo similaridades ou diferenças com as abstrações que serão introduzidas.

2.5.4 *Tipos de aprendizagem significativa*

Ausubel distingue diferentes tipos de aprendizagem significativa, dentre os quais se destacam:

- **Aprendizagem representacional:** relacionada à atribuição de significado a símbolos ou palavras;
- **Aprendizagem conceitual:** envolve a formação e diferenciação de conceitos, suas características essenciais que os definem, abstraindo-os de exemplos concretos;
- **Aprendizagem proposicional:** refere-se à compreensão de ideias expressas em proposições, ou seja, uma sentença declarativa que une dois ou mais conceitos para formar uma nova ideia composta, emerge da relação lógica entre os conceitos.

No ensino de Física, especialmente em tópicos abstratos, a aprendizagem proposicional assume papel central, uma vez que envolve a compreensão de relações entre grandezas e conceitos físicos (16).

2.5.5 *Condições para a aprendizagem significativa*

De acordo com a teoria ausubeliana, três condições são necessárias para que a aprendizagem significativa ocorra:

- O material deve ser potencialmente significativo, ou seja, logicamente estruturado e relacionável;
- O aluno deve possuir subsunçores relevantes;
- O aluno deve apresentar disposição para aprender significativamente.

A ausência de qualquer uma dessas condições compromete a construção de significados, resultando em uma aprendizagem mecânica.

2.5.6 *Implicações para o ensino de Física*

No contexto do ensino de Física, a teoria da aprendizagem significativa oferece importantes diretrizes para a organização do processo de ensino-aprendizagem. A abordagem tradicional, centrada na memorização de fórmulas e resolução mecânica de exercícios, favorece a aprendizagem mecânica, dificultando a compreensão conceitual dos fenômenos.

Por outro lado, a utilização de estratégias que valorizem os conhecimentos prévios dos estudantes, como analogias, representações gráficas e situações-problema, pode favorecer a compreensão profunda dos conceitos.

Essa abordagem torna-se especialmente relevante no ensino de Física Moderna, cujos conteúdos são frequentemente percebidos como abstratos e distantes da realidade dos alunos (17).

Ademais, a formação continuada de professores é um elemento chave para a efetiva inserção da Física Moderna na sala de aula. Nesse sentido, pesquisas sobre a formação de professores, como o estudo de (19) sobre a aprendizagem do professor pesquisador no contexto do CERN e do MNPEF, oferecem subsídios importantes para repensar a prática docente e a abordagem de temas contemporâneos no Ensino Médio.

2.5.7 *Transposição didática do paradoxo de Klein*

A construção de uma transposição didática do paradoxo de Klein para o ensino médio constitui um desafio, uma vez que envolve conceitos da mecânica quântica relativística, tradicionalmente abordados apenas em níveis avançados de ensino.

Tendo isso em vista, a aprendizagem significativa foi a abordagem pedagógica escolhida para fazer a transposição didática do paradoxo de Klein, uma vez que conceitos já presentes no currículo do ensino médio, como energia, potencial, reflexão e comportamento ondulatório, podem atuar como subsunçores para a introdução de ideias mais complexas.

Por exemplo, a análise do comportamento de uma partícula em um potencial degrau no contexto clássico pode ser utilizada como organizador prévio para a introdução do comportamento quântico e, posteriormente, relativístico. A partir dessas analogias, é possível construir uma sequência didática que leve o estudante a compreender, de forma progressiva, o caráter não intuitivo do paradoxo de Klein.

A transposição didática de conceitos abstratos como o paradoxo de Klein exige que o professor vá além do livro didático. Uma proposta de formação, inspirada no modelo do 'professor pesquisador' analisado por (19), pode capacitar o docente a desenvolver e aplicar sequências didáticas inovadoras e significativas, como a que este trabalho propõe.

Dessa forma, a aprendizagem significativa não apenas fundamenta a proposta didática, mas também orienta a seleção, organização e apresentação dos conteúdos, garantindo que o processo de ensino favoreça a construção de significados e não apenas a memorização de resultados.

2.6 A Base Nacional Comum Curricular e o Ensino de Física

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) constitui o principal documento normativo que orienta a organização dos currículos da educação básica no Brasil. No que se refere

ao ensino médio, a BNCC propõe uma abordagem baseada no desenvolvimento de competências e habilidades, superando a tradicional transmissão de conteúdos.

No componente curricular de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, a Física é abordada de forma integrada com a Química e a Biologia, privilegiando a contextualização dos fenômenos e a compreensão de modelos científicos. Nesse sentido, a BNCC destaca a importância de abordar temas contemporâneos da ciência, incluindo tópicos de Física Moderna, de modo a tornar o ensino mais significativo e conectado com a realidade dos estudantes (20).

Entre as competências específicas da área, destaca-se a capacidade de:

“Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações que contribuam para a melhoria das condições de vida.” (20).

Essa diretriz reforça a necessidade de um ensino que vá além da Física clássica, incorporando conceitos modernos que permitam ao estudante compreender fenômenos atuais, como tecnologias baseadas em semicondutores, energia nuclear e aplicações da mecânica quântica.

2.6.1 A Física Moderna na BNCC

Embora a BNCC não apresente uma divisão clara entre Física Clássica e Moderna, ela abre espaço para a introdução de conceitos da Física do século XX ao enfatizar:

- A utilização de modelos científicos para explicar fenômenos;
- A compreensão da natureza da ciência como construção histórica;
- A contextualização tecnológica e social do conhecimento científico.

Nesse contexto, temas como dualidade onda-partícula, estrutura da matéria e efeitos quânticos podem ser abordados respeitando o nível cognitivo dos estudantes.

A introdução do paradoxo de Klein, ainda que de forma adaptada, alinha-se com essa proposta, pois permite explorar limites dos modelos clássicos e discutir a evolução do pensamento científico.

2.6.2 Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN e PCN+)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e os documentos complementares conhecidos como PCN+, constituem importantes referenciais para o ensino de Física no Brasil, especialmente com relação ao ensino médio.

De acordo com os PCN+, o ensino de Física deve:

“propiciar ao aluno uma compreensão articulada dos fenômenos naturais, evitando a fragmentação do conhecimento e promovendo a construção de modelos explicativos.” (21).

Além disso, os documentos enfatizam a importância de incluir tópicos de Física Moderna e Contemporânea no currículo, destacando que:

“A Física Moderna deve ser abordada no ensino médio, ainda que de forma conceitual, permitindo ao aluno compreender os avanços científicos do século XX.” (21).

Essa orientação reforça a necessidade de superar a limitação histórica do ensino de Física, que tradicionalmente se concentra em conteúdos clássicos.

2.6.3 *Física Moderna no Ensino Médio*

A inclusão de tópicos de Física Moderna no ensino médio tem sido amplamente discutida na literatura da área de ensino de Física. Diversos estudos apontam que, apesar das dificuldades conceituais envolvidas, é possível abordar esses temas de forma significativa, desde que sejam adotadas estratégias didáticas adequadas (17).

Entre os principais desafios, destacam-se:

- O alto nível de abstração dos conceitos;
- A ausência de pré-requisitos matemáticos formais;
- A formação inicial dos professores.

Por outro lado, os benefícios incluem:

- Maior motivação dos estudantes;
- Atualização do currículo;
- Compreensão da ciência contemporânea.

2.6.4 *Justificativa da proposta didática*

A proposta de transposição didática do paradoxo de Klein para o ensino médio fundamenta-se nas diretrizes da BNCC e dos PCN, ao buscar introduzir conceitos de Física Moderna de forma contextualizada e significativa.

Ao articular conceitos já presentes no currículo, como energia e potencial, com ideias mais avançadas da mecânica quântica relativística, a proposta contribui para o desenvolvimento das competências previstas nos documentos oficiais, ao mesmo tempo em que promove a aprendizagem significativa, conforme discutido anteriormente.

Dessa forma, a inserção do paradoxo de Klein no ensino médio não é apenas viável, mas também alinhado às orientações curriculares vigentes, constituindo uma estratégia inovadora para o ensino de Física.

3 OBJETIVOS

3.1 Objetivo Geral

Analisar como ocorre a transposição didática dos conteúdos de Física Moderna, especialmente Física Quântica e Relatividade, em livros didáticos de Física do Ensino Médio, investigando em que medida essas obras favorecem a Aprendizagem Significativa proposta por Ausubel e propor uma adaptação pedagógica do Paradoxo de Klein fundamentada na teoria ausubeliana.

3.2 Objetivos Específicos

- Identificar a presença de conteúdos de Física Moderna nos livros didáticos analisados;
- Investigar como conceitos relacionados à Física Quântica e à Relatividade são apresentados no contexto escolar;
- Analisar os níveis de contextualização e adaptação pedagógica presentes nas obras;
- Verificar a presença de elementos associados à Aprendizagem Significativa de Ausubel, como conhecimentos prévios, contextualização e organizadores conceituais;
- Comparar as diferentes abordagens metodológicas utilizadas pelos autores dos livros didáticos;
- Discutir os principais desafios envolvidos na transposição didática da Física Moderna para o Ensino Médio.
- Elaborar uma proposta de transposição didática do Paradoxo de Klein para o Ensino Médio;
- Investigar possibilidades de contextualização conceitual da Mecânica Quântica Relativística no ensino básico;
- Desenvolver estratégias didáticas que favoreçam a aprendizagem significativa de conceitos abstratos da Física Moderna.

4 METODOLOGIA

4.1 Natureza da pesquisa

A presente pesquisa caracteriza-se como qualitativa, de caráter descritivo e analítico, tendo como objetivo investigar a transposição didática de conteúdos de Física Moderna em livros didáticos do Ensino Médio.

Segundo (22), pesquisas descritivas têm como objetivo analisar e interpretar fenômenos sem interferência do pesquisador, sendo adequadas para estudos documentais. A abordagem qualitativa, por sua vez, permite compreender aspectos subjetivos, como estratégias didáticas e organização conceitual.

Este estudo fundamenta-se na teoria da transposição didática proposta por (23), bem como na teoria da aprendizagem significativa de (24).

4.2 Procedimentos metodológicos

A pesquisa foi desenvolvida por meio de análise documental, tendo como corpus livros didáticos de Física amplamente utilizados no Ensino Médio brasileiro, especialmente aqueles vinculados ao Programa Nacional do Livro Didático (PNLD).

A escolha dessas obras fundamenta-se em pesquisas que apontam a centralidade do livro didático no ensino, tanto como recurso pedagógico quanto como organizador curricular das práticas docentes (25, 26). Além disso, estudos sobre o ensino de Física Moderna e Contemporânea apontam que as coleções aprovadas pelo PNLD constituem os materiais mais utilizados nas escolas públicas brasileiras, influenciando diretamente a seleção, organização e abordagem dos conteúdos científicos trabalhados em sala de aula (27, 28).

Foram selecionados seis livros didáticos considerando critérios como circulação nacional, recorrência em programas governamentais de distribuição, diversidade de abordagens pedagógicas e relevância em pesquisas da área de Ensino de Física. Segundo (27) e (28) coleções como Os Fundamentos da Física, Máximo e Alvarenga, Gaspar e Ser Protagonista estão entre as obras mais presentes em escolas brasileiras e frequentemente utilizadas em pesquisas sobre ensino de Física Moderna.

Ademais, trabalhos como os de (29) e (30) também utilizam coleções aprovadas pelo PNLD como base para suas análises da inserção de conteúdos de Física Moderna no Ensino Médio, reforçando a relevância metodológica da seleção realizada nesta pesquisa.

Para a análise dos livros, foi elaborado um instrumento estruturado baseado nas teorias de transposição didática e aprendizagem significativa. De acordo com (23), o conhecimento científico sofre adaptações ao ser transformado em conhecimento escolar. Nesse contexto, foram analisados aspectos como simplificação conceitual, uso de analogias e contextualização.

Além disso, foram considerados os princípios da aprendizagem significativa de (24), especialmente a valorização dos conhecimentos prévios e a relação entre novos e antigos conceitos.

4.3 Análise dos dados

A análise dos dados foi realizada com base na técnica de análise de conteúdo, conforme proposta por (31), estruturada em três etapas:

- Pré-análise: Realizou-se uma leitura exploratória dos livros, com o objetivo de identificar a presença de conteúdos de Física Moderna;
- Exploração do material: Os livros foram analisados sistematicamente com base no instrumento elaborado, considerando critérios como linguagem, nível matemático e estratégias didáticas;
- Tratamento e interpretação dos dados: Os dados foram organizados em categorias analíticas, permitindo a comparação entre os livros, à luz das teorias de Chevallard e Ausubel.

Foram definidos os seguintes critérios:

- Nível de transposição didática;
- Fidelidade conceitual;
- Contextualização;
- Potencial para aprendizagem significativa.

4.4 Instrumento de investigação

Para a análise dos livros didáticos, foi elaborado um instrumento de investigação fundamentado na teoria da Transposição Didática de Chevallard e na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel.

O instrumento foi estruturado nas seguintes categorias:

- Presença de conteúdos de Física Moderna;
- Nível de transposição didática;
- Estratégias pedagógicas;
- Nível de abstração conceitual;
- Índícios de aprendizagem significativa.

Essas categorias permitiram examinar a adaptação do conhecimento científico ao contexto escolar e avaliar em que medida esses materiais favorecem a construção de significados pelos estudantes.

O instrumento completo encontra-se apresentado no Apêndice A.

4.5 Elaboração da proposta didática

Para a elaboração da proposta de transposição didática do Paradoxo de Klein, adotaram-se como referenciais teóricos a Teoria da Aprendizagem Significativa de (24) e a Teoria da Transposição Didática de (23).

A construção da sequência didática fundamentou-se na noção de que conteúdos científicos abstratos podem ser adaptados para o Ensino Médio por meio de contextualizações, reorganizações conceituais e simplificações pedagógicas que preservem a essência do fenômeno científico.

Nesse sentido, buscou-se estruturar uma encadeação pedagógica que partisse de conceitos clássicos já presentes na estrutura cognitiva dos estudantes, segundo os livros analisados, utilizando-os como subsunçores para introdução dos conceitos associados à Mecânica Quântica Relativística, baseando-se em pesquisas voltadas ao ensino de Física Moderna no Ensino Médio, que utilizam conhecimentos prévios como elemento central para construção de novas concepções (28,29).

A elaboração da proposta também foi inspirada em pesquisas que discutem o uso de Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS) e sequências didáticas investigativas aplicadas ao ensino de Física Moderna e Contemporânea (32). Dessa forma, organizou-se a sequência em etapas progressivas, iniciando com o levantamento dos conhecimentos prévios dos estudantes por meio de mapas conceituais inspirados no modelo de Novak.

A escolha do uso de mapas conceituais fundamenta-se na possibilidade de representar relações hierárquicas entre conceitos e identificar estruturas cognitivas já consolidadas pelos estudantes de forma visual e interativa. A partir dessas relações iniciais, pode-se selecionar conteúdos clássicos presentes nos livros, como colisões, energia, barreiras de potencial, ondas e eletricidade, assim estabelecendo conexões progressivas entre Física Clássica e Moderna.

Além disso, considerando as discussões apresentadas por (30) e (28) acerca das dificuldades à abstração conceitual da Física Moderna no Ensino Médio, optou-se pela utilização de analogias e contextualizações tecnológicas como estratégias metodológicas para redução do formalismo matemático envolvido no Paradoxo de Klein.

A analogia envolvendo uma bola incidindo sobre uma parede foi elaborada como recurso introdutório para construção de significados relacionados aos processos de reflexão, transmissão e barreiras de potencial, funcionando como organizador prévio entre fenômenos clássicos familiares aos estudantes e conceitos abstratos da Mecânica Quântica Relativística.

Também foram inseridas contextualizações envolvendo grafeno, nanotecnologia e tunelamento quântico em dispositivos semicondutores, buscando aproximar os conteúdos científicos da realidade contemporânea dos estudantes, conforme orientações da BNCC. Dessa forma, a proposta metodológica buscou desenvolver uma abordagem conceitualmente acessível, priorizando relações significativas entre conhecimentos prévios e novos conteúdos científicos.

4.6 Limitações da pesquisa

As principais limitações do estudo incluem o número restrito de livros analisados e a natureza interpretativa da análise qualitativa, assim como a não aplicação da sequência didática proposta em uma escola de EM, caracterizando assim a pesquisa em completamente teórica.

5 RESULTADOS

5.1 Análise bibliográfica dos livros didáticos

A análise dos livros didáticos revelou diferenças significativas na forma como os conteúdos de Física Moderna são abordados no ensino médio. Apesar de usarem estruturas didáticas distintas, a abordagem tradicional, centrada na resolução mecânica de exercícios é a predominante. Os resultados demonstraram que, embora exista uma ampliação da presença desses conteúdos nos materiais didáticos, a inserção ocorre de maneira periférica, fragmentada e frequentemente subordinada à estrutura tradicional da Física Clássica.

A organização curricular dos livros analisados priorizam conteúdos clássicos como mecânica, termologia, óptica e eletromagnetismo, assim, a Física Moderna aparece predominantemente nos capítulos finais das coleções, como um complemento da formação física escolar, e não parte integrante do currículo central. Essa organização curricular influencia diretamente a forma como os estudantes entram em contato com conceitos modernos, uma vez que, em diversas escolas, os capítulos finais sequer chegam a ser trabalhados devido à limitação do calendário letivo.

5.1.1 *Máximo e Alvarenga*

Os conteúdos dos livros Máximo e Alvarenga (33) focam na educação tradicional de física, baseando-se em uma exposição teórica seguida de uma extensa resolução mecânica de exercícios centrados no formalismo matemático, dessa forma, abordando superficialmente a Física Moderna, sem fazer nenhuma articulação com os conceitos clássicos mostrados.

Apesar de assuntos da Mecânica Quântica como efeito fotoelétrico, quantização da energia e dualidade onda-partícula serem tratados, sua abordagem é feita de forma reduzida, apresentando apenas definições e fórmulas. Deste modo, os fenômenos são descritos sem discussão aprofundada sobre os problemas científicos que motivaram o surgimento dessas teorias ou suas aplicações. Evidenciando uma transposição didática sem contextualização didática ou epistemológica. A relatividade não recebe nenhum aprofundamento.

Outrossim, a falta de analogias, metáforas e recursos visuais, dificultam a compreensão dos conceitos abstratos associados a Física Moderna, especialmente considerando que muitos estudantes do Ensino Médio ainda não possuem maturidade matemática suficiente para lidar diretamente com formalismos mais complexos.

Desta maneira, sob a perspectiva de Ausubel e Chevallard, a didática do livro revela ser uma transformação simplificada e com perda de contextualização, afastando-se assim do conhecimento científico original, caracterizado por debates, rupturas conceituais e mudanças paradigmáticas, convertido em um conteúdo estático, organizado para uma educação mecânica e desvinculada de sua historicidade.

5.1.2 *Sampaio e Calçada*

A coleção de José Luiz Sampaio e Caio Sérgio Calçada (34) demonstrou preocupação com acessibilidade da linguagem em comparação às coleções mais tradicionais, assim

como uma tentativa de aproximação do conteúdo ao cotidiano dos estudantes, embora ainda de forma conteudista.

A física moderna aparece distribuída ao longo da obra, mas sem aprofundamento conceitual. Alguns capítulos apresentam contextualização tecnológica envolvendo semicondutores, telecomunicações e energia nuclear, favorecendo parcialmente a aproximação entre ciência escolar e aplicações contemporâneas, como pedido pela BNCC.

Apesar disso, verificou-se que os conceitos continuam sendo introduzidos majoritariamente por definições formais e fórmulas, sem construção gradual de significados, ou ancoramento com conhecimentos prévios dos estudantes.

Sob a perspectiva ausubeliana, identificou-se presença parcial de elementos associados à aprendizagem significativa, como a presença de atividades investigativas e problematizações conceituais ainda que de forma limitada. Entretanto, o desenvolvimento posterior do conteúdo retorna à lógica expositiva tradicional.

5.1.3 *Torres e Penteado*

A coleção Física: Ciência e Tecnologia, de Carlos Magno A. Torres e Nicolau Gilberto Ferraro (35), apresentou uma abordagem mais contextualizada, com maior integração entre ciência, tecnologia e sociedade, especialmente nos capítulos relacionados à Física Moderna.

Os conteúdos de Física Quântica foram associados a aplicações tecnológicas contemporâneas, como lasers, células fotovoltaicas e dispositivos eletrônicos. Essa estratégia contribui para redução do nível de abstração e favorece a aproximação do conteúdo à realidade dos estudantes, assim como fazem ligação com as informações prévias dos estudantes.

Além disso, verificou-se a maior utilização de recursos visuais, assim como a incorporação de discussões históricas, explorando parcialmente os contextos científicos que levaram ao surgimento das teorias modernas.

Sob a ótica da Transposição Didática, identificou-se uma adaptação maior do saber científico ao contexto escolar, priorizando acessibilidade conceitual em detrimento do formalismo matemático. Em relação à aprendizagem significativa, observou-se maior presença de contextualização e conexões conceituais, embora ainda limitada em alguns capítulos.

5.1.4 *Gaspar*

A obra de Alberto Gaspar (36) apresentou equilíbrio intermediário entre rigor conceitual e acessibilidade didática, utilizando uma linguagem relativamente clara e boa organização temática, com presença moderada de contextualização histórica e tecnológica.

A Física Moderna apareceu integrada ao restante da Física, introduzindo conceitos quânticos por meio de situações-problema e exemplos do cotidiano, favorecendo a construção de significados. Entretanto, o restante do livro ainda é focado na resolução mecânica de exercícios e formalismos matemáticos, não explorando, dessa forma, discussões investigativas ou ligação com subsunçores antecedentes.

Do ponto de vista ausubeliano, a coleção apresenta elementos parciais de aprendizagem significativa, devido a utilização de exemplos introdutórios e relações com fenômenos cotidianos. Contudo, ainda predominam práticas associadas à aprendizagem mecânica, não

apresentando uma sequência didática significativa satisfatória.

5.1.5 *Ser Protagonista - Física*

A coleção *Ser Protagonista* (37) apresentou à abordagem mais alinhada a aprendizagem significativa, como também às propostas contemporâneas da BNCC entre os materiais analisados. Observou-se forte presença de contextualização, interdisciplinaridade e relações entre Física, tecnologia e sociedade.

Os conteúdos de Física Moderna são introduzidos por meio de contextualização, problematização, recursos visuais e analogias a situações cotidianas, explorando aplicações relacionadas à medicina, telecomunicações, astronomia e computação, favorecendo maior aproximação dos estudantes com os conceitos científicos.

Ademais, as competências e habilidades requisitadas pela BNCC, priorizando interpretação, argumentação e construção de significados em detrimento da simples memorização de fórmulas, foram atendidas.

Sob a perspectiva da Aprendizagem Significativa, essa foi a coleção que apresentou maior quantidade de elementos favoráveis à aprendizagem significativa, especialmente pela utilização de contextualização inicial e retomada de conhecimentos prévios, apesar de pouco aprofundamento histórico.

5.1.6 *Os Fundamentos da Física*

A coleção *Os Fundamentos da Física*, de Francisco Ramalho Júnior, Nicolau Gilberto Ferraro e Paulo Antônio de Toledo Soares (38), apresenta didática mecânica, focada em vestibular e conteudista, com a predominância de exercícios quantitativos, extensa formalização matemática e reduzida contextualização pedagógica.

Assim como nos livros anteriores, a Física Moderna aparece de forma breve e concentrada no final da coleção, geralmente associada apenas aos conceitos mais tradicionais da Mecânica Quântica. A Relatividade recebe tratamento bastante superficial.

A transposição didática é direcionada ao rigor formal matemático, reduzindo parcialmente apenas os aspectos matemáticos mais avançados, como Cálculo. Entretanto, a adaptação pedagógica ao contexto cognitivo dos estudantes mostrou-se limitada, com baixa presença de estratégias voltadas à aprendizagem significativa. Os conteúdos são frequentemente introduzidos diretamente por definições e fórmulas, sem valorização explícita dos conhecimentos prévios dos estudantes.

Além disso, identificou-se restrita presença de interdisciplinaridade, História da Ciência e contextualização tecnológica, reforçando uma visão tradicional e mecânica do ensino de Física.

5.1.7 *Comparação dos livros didáticos*

A Tabela 3 apresenta um resumo dos principais aspectos analisados nos livros, comparando critérios relacionados à presença de conteúdos de Física Moderna, abordagem da Relatividade, contextualização pedagógica, indícios de Aprendizagem Significativa, predominância de práticas tradicionais e nível de transposição didática.

Tabela 3: Análise comparativa dos livros didáticos de Física do Ensino Médio

Livro	Física Moderna	Relatividade	Contextualização	Aprendizagem Significativa	Abordagem Tradicional	Nível de Transposição
Máximo e Alvarenga	Parcial	Baixa	Baixa	Baixa	Alta	Médio
Sampaio e Calçada	Parcial	Baixa	Média	Baixa	Alta	Médio
Gaspar	Parcial	Baixa	Média	Média	Média	Médio
Torres e Penteado	Sim	Média	Alta	Média	Média	Alto
Ser Protagonista	Sim	Média	Alta	Alta	Baixa	Alto
Os Fundamentos da Física	Parcial	Baixa	Baixa	Baixa	Alta	Médio

Fonte: Elaborado pela autora.

De maneira geral, observou-se maior ênfase na formalização matemática e na resolução mecânica de exercícios, com reduzida contextualização dos conteúdos de Física Moderna. Nessas obras, conceitos relacionados à Mecânica Quântica e à Relatividade aparecem de forma superficial e frequentemente localizados nos capítulos finais das coleções, evidenciando uma inserção periférica desses conteúdos no currículo escolar.

Entretanto, materiais mais recentes como Ser Protagonista e Física: Ciência e Tecnologia demonstraram mais contextualização, interdisciplinaridade e aproximação entre ciência, tecnologia e cotidiano, dessa forma obtendo níveis mais elevados de transposição didática e maior presença de elementos associados à Aprendizagem Significativa proposta por David Ausubel, especialmente pela utilização de situações-problema, recursos visuais e retomada de conhecimentos prévios.

Por outro lado, mesmo nas coleções mais contextualizadas, ainda foram identificadas limitações quanto ao aprofundamento histórico da Física Moderna. Em todos os livros analisados verificou-se predominância de abordagens expositivas e simplificações conceituais, evidenciando os desafios inerentes à transposição didática de conteúdos avançados para o Ensino Médio, indicando que a presença da Física Moderna nos livros didáticos brasileiros ocorre de maneira fortemente tradicional, sem propostas mais alinhadas às orientações contemporâneas da educação científica e da BNCC.

5.2 Proposta de transposição didática do Paradoxo de Klein

Com base nos conteúdos identificados nas seis obras analisadas e nos trabalhos de (28–30, 32), elaborou-se uma proposta de sequência didática voltada à transposição didática do Paradoxo de Klein para o Ensino Médio. A proposta foi estruturada segundo os princípios de aprendizagem significativa ausubeliano, considerando que a aprendizagem ocorre quando novas informações relacionam-se, de forma não arbitrária, aos conhecimentos prévios presentes na estrutura cognitiva do estudante.

A sequência didática foi organizada em quatro etapas principais.

Como primeira etapa, propõe-se a construção de mapas conceituais inspirados no modelo de Joseph Novak como instrumento para levantamento dos conhecimentos prévios dos

estudantes e também para serem utilizados como recurso diagnóstico de identificação das relações estabelecidas pelos alunos entre conceitos já estudados nos livros didáticos, como energia, ondas, potencial elétrico, colisões e barreiras. Segundo (18), os mapas conceituais ajudam a representar hierarquias conceituais e relações de significado já presentes na estrutura cognitiva dos estudantes.

Na segunda etapa, sugere-se o desenvolvimento de uma analogia didática envolvendo o comportamento de uma bola incidindo sobre uma parede, utilizada como subsunçor para introdução dos conceitos associados a Reflexão e Transmissão contidos no Paradoxo de Klein. A analogia tem como objetivo estabelecer relações iniciais entre fenômenos clássicos e conceitos abstratos da Mecânica Quântica Relativística. Além disso, propôs-se o uso de simulações e representações visuais simplificadas para reduzir o nível de abstração conceitual e favorecer a aprendizagem significativa.

Na terceira etapa, como forma de incitar a investigação e colaboração por parte dos estudantes, sugere-se dividir eles em grupos para construção de novos mapas conceituais, buscando relacionar os conhecimentos prévios, identificados na primeira etapa, com os novos conceitos apresentados durante a sequência didática, permitindo que os alunos reorganizem conceitualmente as relações entre Física Clássica e Física Moderna. O trabalho em grupo também favorece a reconciliação integrativa e a diferenciação progressiva descritas por Ausubel.

Na quarta etapa, para servir como avaliação qualitativa da aprendizagem, faz-se a análise comparativa entre os mapas conceituais iniciais e finais produzidos pelos estudantes. Considerando critérios como hierarquia conceitual, conexões entre conceitos, presença de relações válidas, contextualização e integração entre conteúdos clássicos e modernos, conforme orientações metodológicas de Novak.

A proposta didática elaborada não busca apresentar formalmente a Equação de Dirac ou o formalismo matemático do Paradoxo de Klein, mas sim construir uma abordagem qualitativa e conceitualmente acessível ao Ensino Médio, priorizando contextualização, analogias, representações visuais para que haja uma aprendizagem significativa.

Além disso, pretende-se incorporar a contextualização tecnológica do fenômeno na segunda etapa da sequência didática como estratégia para aproximar os conteúdos da Mecânica Quântica Relativística da realidade contemporânea dos estudantes, conforme orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que enfatiza a necessidade de articulação entre conhecimentos científico e sociedade. Nesse sentido, buscou-se relacionar o Paradoxo de Klein com aplicações atuais em áreas como nanotecnologia, dispositivos semicondutores e materiais bidimensionais.

A inserção dessas aplicações objetiva reduzir o nível de abstração dos conceitos trabalhados, favorecendo a construção de significados por meio da associação entre fenômenos físicos e tecnologias presentes no cotidiano dos estudantes, como pede a assimilação de (24).

Entre os exemplos utilizados na contextualização sugere-se o grafeno, material bidimensional constituído por uma única camada de átomos de carbono organizada em estrutura hexagonal, visto que os elétrons nesse material apresentam comportamento análogo ao descrito nos fenômenos associados ao tunelamento relativístico e ao Paradoxo de Klein. Dessa forma, o grafeno se estabelece como um exemplo concreto de aplicação contemporânea do conteúdo abordado, permitindo discutir propriedades eletrônicas, alta mobilidade dos portadores de carga

e possíveis aplicações tecnológicas em dispositivos eletrônicos, sensores e computação avançada, buscando demonstrar aos estudantes que conceitos considerados excessivamente abstratos possuem relevância científica e tecnológica no desenvolvimento de tecnologias emergentes.

Além do grafeno, propõe-se associar o tunelamento quântico às aplicações de nanotecnologia, como microscópios de tunelamento, dispositivos semicondutores e componentes eletrônicos em escala nanométrica. Essas contextualizações servirão como conexão para os conhecimentos prévios já presentes nos livros didáticos analisados, como eletricidade, corrente elétrica e estrutura da matéria, e novos conceitos relacionados à Física Moderna.

Essa abordagem encontra respaldo na Aprendizagem Significativa de Ausubel, uma vez que favorece a ancoragem de novos conhecimentos em estruturas cognitivas previamente estabelecidas. Outrossim, a utilização de exemplos tecnológicos contemporâneos contribui para superar a visão excessivamente teórica da Física escolar, permitindo uma compreensão mais integrada da ciência como elemento presente no desenvolvimento tecnológico e social contemporâneo, como requerido pela BNCC.

6 CONCLUSÃO

A presente pesquisa buscou analisar a transposição didática de conteúdos de Física Moderna, especialmente da Mecânica Quântica Relativística, em livros didáticos do Ensino Médio brasileiro, tendo como pano de fundo o centenário da equação de Klein-Gordon e o fenômeno conhecido como paradoxo de Klein. Ao longo do trabalho, evidenciou-se que, apesar dos avanços curriculares e das orientações da BNCC e dos PCN+, a inserção da Física Moderna no nível médio ainda ocorre de maneira periférica, fragmentada e, na maioria dos casos, subordinada à estrutura tradicional da Física Clássica.

A análise das seis coleções didáticas revelou um panorama preocupante. Livros como *Os Fundamentos da Física* e *Máximo e Alvarenga* mantêm uma abordagem fortemente centrada no formalismo matemático e na resolução mecânica de exercícios, relegando a Física Moderna a capítulos finais que raramente são trabalhados em sala de aula. Por outro lado, coleções mais recentes, como *Ser Protagonista e Física: Ciência e Tecnologia*, demonstram maior preocupação com a contextualização, o uso de analogias e a articulação entre ciência, tecnologia e sociedade, aproximando-se, ainda que de forma limitada, dos princípios da aprendizagem significativa de Ausubel.

Sob a ótica da teoria da transposição didática de Chevallard, observou-se que a transformação do saber científico em saber escolar ocorre, na maioria das obras analisadas, por meio de uma simplificação que muitas vezes sacrifica a compreensão conceitual em favor da redução da complexidade matemática. Os materiais não conseguem preservar a essência dos debates científicos e a historicidade dos conceitos, elementos essenciais para que o estudante não apenas memorize definições, mas construa uma visão mais autêntica sobre a natureza da ciência.

Diante desse diagnóstico, este trabalho propôs uma transposição didática do paradoxo de Klein fundamentada na aprendizagem significativa ausubeliana. A sequência didática elaborada parte dos conhecimentos prévios dos estudantes — identificados por meio de mapas conceituais — e utiliza analogias acessíveis, como o comportamento de uma bola incidindo sobre uma parede, para introduzir os conceitos de reflexão, transmissão e barreiras de potencial. A inclusão de simulações visuais e contextualizações tecnológicas, como o grafeno e o tunelamento quântico em dispositivos semicondutores, não apenas reduz o nível de abstração inerente à Mecânica Quântica Relativística, mas também demonstra aos estudantes que ideias consideradas excessivamente teóricas possuem aplicações concretas e revolucionárias no mundo contemporâneo.

A opção por uma abordagem qualitativa e conceitual, em vez de um tratamento matemático formal, não representa um empobrecimento do conteúdo, mas sim uma escolha pedagógica consciente. Como bem afirmou o Prof. Dr. *Ciro Nogueira Filho* na epígrafe deste trabalho, "profundidade e simplicidade não são excludentes". É possível, sim, apresentar a essência do paradoxo de Klein — a reflexão anômala e a criação de pares partícula-antipartícula em potenciais intensos — sem recorrer ao formalismo da equação de Dirac ou da teoria quântica de campos, desde que se respeitem os subsunçores disponíveis na estrutura cognitiva do aluno do Ensino Médio.

Entretanto, é necessário reconhecer as limitações deste estudo. A análise restringiu-se a seis coleções didáticas, e a proposta elaborada não foi aplicada em contexto escolar real, o que impede, neste momento, aferir sua efetividade em termos de aprendizagem. Pesquisas futuras poderão implementar a sequência didática em sala de aula, avaliando seu impacto por meio de instrumentos qualitativos e quantitativos, bem como investigar a formação docente necessária para que professores de Física se sintam preparados para abordar temas de Física Moderna de forma significativa.

Em suma, este trabalho não defende a inserção acrítica e apressada do paradoxo de Klein no currículo do Ensino Médio, mas sim uma reflexão mais ampla sobre a urgência de atualizar o ensino de Física no Brasil. O século XXI exige cidadãos capazes de compreender tecnologias baseadas em efeitos quânticos, dos transistores aos computadores quânticos, dos microscópios de tunelamento ao grafeno. Se a escola continua ensinando Física como se o século XX nunca tivesse ocorrido, estamos formando jovens com uma visão anacrônica e incompleta da ciência. A transposição didática do paradoxo de Klein, aqui esboçada, é uma pequena contribuição nessa direção, um convite para que educadores, pesquisadores e formuladores de políticas públicas repensem, com urgência e profundidade, o lugar da Física Moderna na formação básica dos nossos estudantes.

REFERÊNCIAS

- 1 BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. [S.l.]: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2018.
- 2 SANTOS, F. J. L. dos. **O paradoxo de Klein em diferentes acoplamentos**. 2022. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal do Ceará. Disponível em: <https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/70381>. Acesso em: 20 maio 2026.
- 3 LIMA, V. G. de; SILVA, L. F. P. da. Estudo e divulgação da mecânica quântica relativística da equação de klein-gordon à nível de graduação. **Revista Física no Campus**, vol. 03, N 02, 2023.
- 4 GREINER, W. **Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations**. 3. ed. Berlin: Springer, 1990.
- 5 GRIFFITHS, D. J. **Introduction to Quantum Mechanics**. 2. ed. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2005.
- 6 DAS, A. **Lectures On Quantum Field Theory**. [S.l.]: World Scientific, 2021.
- 7 KATSNELSON, M. I.; NOVOSELOV, K. S.; GEIM, A. K. Chiral tunnelling and the klein paradox in graphene. **Nature Physics**, v. 2, p. 620–625, 2006.
- 8 BEENAKKER, C. W. J. Colloquium: Andreev reflection and klein tunneling in graphene. **Reviews of Modern Physics**, v. 80, p. 1337–1354, 2008.
- 9 CASTRO NETO, A. H. et al. The electronic properties of graphene. **Reviews of Modern Physics**, v. 81, n. 1, p. 109–162, 2009.
- 10 KATSNELSON, M. I.; NOVOSELOV, K. S.; GEIM, A. K. Chiral tunnelling and the klein paradox in graphene. **Nature Physics**, v. 2, p. 620–625, 2006.
- 11 BEENAKKER, C. W. J. Colloquium: Andreev reflection and klein tunneling in graphene. **Reviews of Modern Physics**, v. 80, n. 4, p. 1337–1354, 2008.
- 12 YOUNG, A. F.; KIM, P. Quantum interference and klein tunnelling in graphene heterojunctions. **Nature Physics**, v. 5, p. 222–226, 2009.
- 13 NOVOSELOV, K. S. et al. Electric field effect in atomically thin carbon films. **Science**, v. 306, n. 5696, p. 666–669, 2004.
- 14 GEIM, A. K. Graphene: Status and prospects. **Science**, v. 324, n. 5934, p. 1530–1534, 2009.
- 15 AUSUBEL, D. P. **Educational Psychology: A Cognitive View**. [S.l.]: Holt, Rinehart and Winston, 1968.
- 16 MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel**. [S.l.]: Centauro, 2011.
- 17 MOREIRA, M. A. Aprendizagem significativa: um conceito subjacente. **Revista Currículo**, 2012.
- 18 NOVAK, J. D. **Learning how to learn**. Cambridge University Press, 1984.
- 19 COSTA, T. Q.; ARRUDA, S. d. M.; PASSOS, M. M. A formação de professores na escola de física do cern: uma análise a partir dos focos da aprendizagem do professor pesquisador. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 38, n. 1, p. 1–26, 2021. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/74782>. Acesso em: 20 maio 2026.

- 20 BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br>>. Ministério da Educação. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 20 maio 2026.
- 21 BRASIL. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. 2002. Ministério da Educação.
- 22 GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.
- 23 CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991.
- 24 AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva**. Lisboa: Plátano, 2003.
- 25 MARTINS, A. F. P. O livro didático de física e suas funções no ensino médio. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 26, n. 1, p. 150–166, 2009.
- 26 DELIZOICOV, D.; ANGOTTI, J. A.; PERNAMBUCO, M. M. **Ensino de Ciências: fundamentos e métodos**. São Paulo: Cortez, 2011.
- 27 MONTEIRO, M. A.; NARDI, R. A inserção da física moderna e contemporânea nos livros didáticos do ensino médio. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 37, n. 4, p. 1–12, 2015.
- 28 GOULART, G. S.; LEONEL, A. A. Uma revisão da literatura sobre o ensino de física moderna e contemporânea no ensino médio. **Dynamis**, Universidade Regional de Blumenau, v. 27, n. 2, p. 84–102, 2021. Disponível em: <https://ojsrevista.furb.br/ojs/index.php/dynamis/article/view/8565>. Acesso em: 20 maio 2026.
- 29 LINO, A.; FUSINATO, P. A. Conhecimentos prévios e o ensino de física moderna e contemporânea no ensino médio. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, UTFPR, v. 6, n. 1, p. 88–105, 2013. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/1050>. Acesso em: 20 maio 2026.
- 30 CARNEIRO, A. T.; PRADO, S. P. d. A transposição didática no ensino de física: contribuições teóricas e metodológicas. **Professare**, UNIARP, v. 11, n. 2, p. 150–168, 2022. Disponível em: <https://periodicos.uniarp.edu.br/index.php/professare/article/view/3065>. Acesso em: 20 maio 2026.
- 31 BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2011.
- 32 JESUS, R. T. d.; AMORIM, R. G. G. d. Unidade de ensino potencialmente significativa para o ensino de física de partículas utilizando jogos didáticos. **Revista do Professor de Física**, Universidade de Brasília, v. 3, n. 2, p. 45–60, 2019. Disponível em: <https://periodicos.unb.br/index.php/rpf/article/view/22573>. Acesso em: 20 maio 2026.
- 33 MÁXIMO, A.; ALVARENGA, B.; GUIMARÃES, C. **Física: contexto e aplicações**. 2. ed. São Paulo: Scipione, 2016. v. 1.
- 34 SAMPAIO, J. L.; CALÇADA, C. S. **Física**. 3. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 1.
- 35 TORRES, C. M. A. et al. **Física: ciência e tecnologia**. 4. ed. São Paulo: Moderna, 2016. v. 1.
- 36 GASPAR, A. **Física**. São Paulo: Ática, 2016. v. 1.
- 37 SM, E. **Ser protagonista: Física**. 3. ed. São Paulo: SM, 2016. v. 1.
- 38 JÚNIOR, F. R.; FERRARO, N. G.; TOLEDO SOARES, P. A. de. **Os Fundamentos da Física**. 11. ed. São Paulo: Moderna, 2016. v. 3.

APÊNDICE A -INSTRUMENTO DE ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

Identificação do Livro

Critério	Descrição
Título	
Autores	
Editora	
Ano/Edição	
Volume	

Presença de Física Moderna

Critério	Avaliação
Introduz Física Quântica	☐ Sim ☐ Não ☐ Parcial
Introduz Relatividade	☐ Sim ☐ Não ☐ Parcial
Conteúdo no corpo principal	☐ Sim ☐ Não
Apenas curiosidade	☐ Sim ☐ Não

Transposição Didática

Critério	Nível
Redução do formalismo matemático	☐ Baixo ☐ Médio ☐ Alto
Uso de linguagem acessível	☐ Baixo ☐ Médio ☐ Alto
Uso de analogias	☐ Baixo ☐ Médio ☐ Alto
Contextualização	☐ Baixo ☐ Médio ☐ Alto

Aprendizagem Significativa

Critério	Avaliação
Considera conhecimentos prévios	☐ Sim ☐ Não
Usa organizadores prévios	☐ Sim ☐ Não
Relaciona conceitos	☐ Sim ☐ Não
Evita memorização mecânica	☐ Sim ☐ Não

Estratégias Didáticas

Estratégia	Presença
Experimentos	☐ Sim ☐ Não
Simulações	☐ Sim ☐ Não
Contextualização	☐ Sim ☐ Não
História da ciência	☐ Sim ☐ Não

APÊNDICE B - ANÁLISE DOS LIVROS

Análise do livro Máximo e Alvarenga

Identificação do Livro

Tabela 4: Identificação do livro Máximo e Alvarenga

Critério	Descrição
Título	Física – Volume 3
Autores	Máximo e Alvarenga
Editora	Scipione
Ano/Edição	2016
Tipo	Coleção

Análise

Tabela 5: Análise do livro Máximo e Alvarenga

Critério	Avaliação
Física Quântica	Parcial
Relatividade	Não
Contextualização	Baixa
Aprendizagem Significativa	Baixa
Abordagem Tradicional	Alta
Nível de Transposição	Médio

Síntese Crítica

O livro apresenta abordagem predominantemente tradicional, com forte ênfase na resolução de exercícios e no formalismo matemático. Os conteúdos de Física Moderna aparecem apenas nos capítulos finais da obra, abordando principalmente efeito fotoelétrico, quantização da energia, modelo atômico de Bohr, dualidade onda-partícula e noções introdutórias de Física Nuclear. Não foram identificadas discussões sistemáticas sobre Relatividade Restrita. A contextualização histórica é limitada e há pouca articulação entre os conceitos modernos e os conhecimentos prévios dos estudantes, dificultando a construção de aprendizagens significativas.

Análise do livro Sampaio e Calçada

Identificação do Livro

Tabela 6: Identificação do livro Sampaio e Calçada

Critério	Descrição
Título	Universo da Física
Autores	Sampaio e Calçada
Editora	Atual
Ano/Edição	2017
Tipo	Coleção

Análise

Tabela 7: Análise do livro Sampaio e Calçada

Critério	Avaliação
Física Quântica	Parcial
Relatividade	Baixa
Contextualização	Média
Aprendizagem Significativa	Baixa
Abordagem Tradicional	Alta
Nível de Transposição	Médio

Síntese Crítica

A coleção apresenta linguagem relativamente acessível quando comparada a obras mais tradicionais, porém mantém foco na resolução mecânica de exercícios. Os conteúdos de Física Moderna incluem efeito fotoelétrico, modelo atômico de Bohr, dualidade onda-partícula, radioatividade e aplicações da Física Nuclear. A Relatividade Restrita é apresentada de forma breve, geralmente associada à equivalência massa-energia e à famosa equação $E = mc^2$, sem aprofundamento conceitual. Embora existam algumas contextualizações históricas, observa-se pouca problematização dos conceitos e reduzida valorização dos conhecimentos prévios dos estudantes.

Análise do livro Gaspar

Identificação do Livro

Tabela 8: Identificação do livro Gaspar

Critério	Descrição
Título	Física
Autor	Alberto Gaspar
Editora	Ática
Ano/Edição	2018
Tipo	Volume único

Análise

Tabela 9: Análise do livro Gaspar

Critério	Avaliação
Física Quântica	Parcial
Relatividade	Baixa
Contextualização	Média
Aprendizagem Significativa	Média
Abordagem Tradicional	Média
Nível de Transposição	Médio

Síntese Crítica

O livro apresenta equilíbrio entre formalismo matemático e linguagem didática, incluindo algumas estratégias de contextualização histórica e tecnológica. Os conteúdos de Física Moderna contemplam efeito fotoelétrico, hipótese de Planck, modelo atômico de Bohr, dualidade onda-partícula, radioatividade e Física Nuclear. A Relatividade Restrita é abordada de forma introdutória, discutindo referenciais inerciais, dilatação temporal, contração do espaço e equivalência massa-energia. Apesar de apresentar maior preocupação conceitual que outras coleções, os conteúdos modernos ainda ocupam espaço reduzido na estrutura geral da obra.

Análise do livro Física: Ciência e Tecnologia

Identificação do Livro

Tabela 10: Identificação do livro Física: Ciência e Tecnologia

Critério	Descrição
Título	Física: Ciência e Tecnologia
Autores	Torres e Penteado
Editora	Moderna
Ano/Edição	2020
Tipo	Coleção

Análise

Tabela 11: Análise do livro Física: Ciência e Tecnologia

Critério	Avaliação
Física Quântica	Sim
Relatividade	Média
Contextualização	Alta
Aprendizagem Significativa	Média
Abordagem Tradicional	Média
Nível de Transposição	Alto

Síntese Crítica

A obra apresenta elevado grau de contextualização tecnológica e aproximação entre ciência, tecnologia e sociedade. Os conteúdos de Física Moderna incluem efeito fotoelétrico, hipótese de Planck, dualidade onda-partícula, modelo atômico quântico, radioatividade, Física Nuclear e aplicações contemporâneas da Física Moderna. A Relatividade Restrita é trabalhada por meio de discussões sobre simultaneidade, dilatação temporal, contração do comprimento e equivalência massa-energia. Observa-se esforço significativo de redução do formalismo matemático e utilização de recursos visuais que favorecem a compreensão conceitual dos conteúdos.

Análise do livro Ser Protagonista

Identificação do Livro

Tabela 12: Identificação do livro Ser Protagonista

Critério	Descrição
Título	Ser Protagonista – Física
Editora	SM
Ano/Edição	2021
Tipo	Coleção

Análise

Tabela 13: Análise do livro Ser Protagonista

Critério	Avaliação
Física Quântica	Sim
Relatividade	Média
Contextualização	Alta
Aprendizagem Significativa	Alta
Abordagem Tradicional	Baixa
Nível de Transposição	Alto

Síntese Crítica

A coleção apresenta forte alinhamento com as competências previstas pela BNCC, privilegiando situações-problema, contextualização tecnológica e integração entre ciência e cotidiano. Os conteúdos de Física Moderna incluem quantização da energia, efeito fotoelétrico, dualidade onda-partícula, estrutura atômica moderna, radioatividade, Física Nuclear e aplicações tecnológicas contemporâneas. A Relatividade Restrita é abordada por meio de discussões qualitativas sobre espaço-tempo, dilatação temporal, contração espacial e equivalência massa-energia. A obra apresenta diversos elementos compatíveis com a Aprendizagem Significativa, favorecendo relações entre conhecimentos prévios e novos conceitos científicos.

Análise do livro Os Fundamentos da Física

Identificação do Livro

Tabela 14: Identificação do livro Os Fundamentos da Física

Critério	Descrição
Título	Os Fundamentos da Física
Autores	Ramalho, Ferraro e Soares
Editora	Moderna
Ano/Edição	2016
Tipo	Coleção

Análise

Tabela 15: Análise do livro Os Fundamentos da Física

Critério	Avaliação
Física Quântica	Parcial
Relatividade	Baixa
Contextualização	Baixa
Aprendizagem Significativa	Baixa
Abordagem Tradicional	Alta
Nível de Transposição	Médio

Síntese Crítica

A coleção apresenta forte caráter tradicional e vestibular, priorizando a resolução quantitativa de exercícios e a formalização matemática dos conteúdos. A Física Moderna aparece de forma resumida e localizada nos capítulos finais da obra, especialmente associada ao efeito fotoelétrico, hipótese quântica de Planck, modelo atômico de Bohr, dualidade onda-partícula, radioatividade e Física Nuclear. A Relatividade Restrita recebe tratamento superficial e predominantemente conceitual, concentrando-se na equivalência massa-energia e em breves comentários sobre dilatação temporal. Há pouca contextualização tecnológica e reduzida integração entre os conteúdos modernos e os conhecimentos prévios dos estudantes.