



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE TELEINFORMÁTICA**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO**

**IGOR TORQUATO MAIA SALES**

**HOMOMORFISMO EM GRAFOS: GENERALIZAÇÃO DE CONCEITOS  
PRIMITIVOS E APLICAÇÃO EM COLORAÇÃO**

**FORTALEZA**

**2025**

IGOR TORQUATO MAIA SALES

HOMOMORFISMO EM GRAFOS: GENERALIZAÇÃO DE CONCEITOS PRIMITIVOS E  
APLICAÇÃO EM COLORAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia de Computação do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Engenharia de Computação.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Ana Karolinn  
Maia de Oliveira

FORTALEZA

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

S155h Sales, Igor Torquato Maia.  
Homomorfismo em Grafos : Generalização de Conceitos Primitivos e Aplicação em Coloração / Igor Torquato Maia Sales. – 2025.  
68 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Curso de Engenharia de Computação, Fortaleza, 2025.  
Orientação: Profa. Dra. Ana Karolinnna Maia de Oliveira.

1. Teoria dos Grafos. 2. Homomorfismo. 3. Coloração. 4. Ordem Parcial. I. Título.

CDD 621.39

---

IGOR TORQUATO MAIA SALES

HOMOMORFISMO EM GRAFOS: GENERALIZAÇÃO DE CONCEITOS PRIMITIVOS E  
APLICAÇÃO EM COLORAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia de Computação do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Engenharia de Computação.

Aprovada em: 16 de Dezembro de 2025

BANCA EXAMINADORA

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Ana Karolinna Maia de  
Oliveira (Orientadora)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Cláudia Linhares Sales  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Júlio César Silva Araújo  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À minha mãe, Aila; às minhas avós, Genésia e Cleyde; aos meus irmãos, Ítalo, Luciana e Letícia; e ao meu pai, Cleytonio, que nunca duvidaram de onde eu poderia chegar.

À Adria, minha amiga, namorada e futura esposa, que me cobrou e me distraiu nas medidas certas.

À Sonho, à Franciclêuda, ao Francisco, à Gertrudes, ao Deleite, à Genoveva, à Caos e ao Acaso, meus oito gatos que estiveram comigo durante todo o processo de escrita deste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC).

E a todos os meus amigos que estiveram presentes nesta jornada.

## AGRADECIMENTOS

À Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Ana Karolinnna Maia de Oliveira, por me orientar em meu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) com paciência e profissionalismo.

À Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Cláudia Linhares Sales e ao Prof. Dr. Júlio César Silva Araújo, por aceitarem fazer parte da banca deste TCC.

Ao Prof. Dr Carlos Eduardo Fisch de Brito, por compartilhar comigo todo o seu conhecimento didático, essencial na elaboração deste trabalho.

À coordenação do curso de Engenharia da Computação da Universidade Federal do Ceará (Universidade Federal do Ceará (UFC)), representada pelo Prof. Ricardo Jardel Nunes da Silveira, por disponibilizar a infraestrutura necessária para minha graduação.

À Thais Jucá Avelar, secretária da coordenação do curso de Engenharia da Computação da UFC, por sanar todas as minhas dúvidas burocráticas

Ao Doutor em Engenharia Elétrica, Ednardo Moreira Rodrigues, e seu assistente, Alan Batista de Oliveira, Bacharel em Engenharia Elétrica, pela adequação do *template* utilizado neste trabalho para que estivesse de acordo com as normas da biblioteca da Universidade Federal do Ceará.

Por fim, agradeço a todos os professores do Departamento de Teleinformática e do Departamento de Ciência da Computação da Universidade Federal do Ceará, com os quais tive o prazer de estudar, por me ensinarem com dedicação, carisma, experiência e conhecimento, me inspirando e permitindo que eu pudesse sonhar em seguir os mesmos passos em um futuro próximo.

## RESUMO

Sejam  $D$  e  $F$  digrafos. Um homomorfismo de  $D$  para  $F$ , denotado por  $f : D \rightarrow F$ , é uma função com domínio nos vértices de  $D$  e contra-domínio nos vértices de  $F$  tal que  $\vec{uv} \in A(D) \Rightarrow \overrightarrow{f(u)f(v)} \in A(F)$ . Nesta monografia de caráter exploratório, foi feita uma revisão de literatura, concluindo que o conceito de homomorfismo pode ser usado para generalizar conceitos primitivos da teoria dos grafos, como passeios, caminhos, caminhos fechados, ciclos, trilhas eulerianas, circuitos eulerianos, isomorfismo, automorfismo, coloração e ordenação topológica. Além disso, foi encontrado que a classe de todos os digrafos é uma quasi-ordem e, a partir da definição do núcleo de um digrafo, é transformada em uma ordem parcial na família dos núcleos  $\mathcal{C}$ . O conceito de coloração clássica foi redefinido como um homomorfismo para o grafo completo de menor ordem na família  $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, K_3, \dots\}$ . Por fim, foram apresentadas duas métricas que refinam o Número Cromático: O Número Cromático Circular e o Número Cromático Fracionário.

**Palavras-chave:** teoria dos grafos; homomorfismo; coloração; ordem parcial.

## ABSTRACT

Let  $D$  and  $F$  be digraphs. A homomorphism from  $D$  to  $F$ , denoted by  $f : D \rightarrow F$ , is a function with domain in the vertices of  $D$  and codomain in the vertices of  $F$  such that  $\vec{uv} \in A(D) \Rightarrow \overrightarrow{f(u)f(v)} \in A(F)$ . In this exploratory monograph, a literature review was conducted, concluding that the concept of homomorphism can be used to generalize primitive concepts of graph theory, such as walks, paths, closed walks, cycles, Eulerian trails, Eulerian circuits, isomorphism, automorphism, coloring, and topological sorting. Furthermore, it was found that the class of all digraphs is a quasi-order and, from the definition of the core of a digraph, it is transformed into a partial order on the family of cores  $\mathcal{C}$ . The concept of classical coloring was redefined as a homomorphism to the complete graph of smallest order in the family  $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, K_3, \dots\}$ . Finally, two metrics that refine the Chromatic Number were presented: The Circular Chromatic Number and the Fractional Chromatic Number.

**Keywords:** graph theory; homomorphism; coloring; partial order.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – O Grafo de Petersen, com vértices rotulados como $ij$ . . . . .	20
Figura 2 – Diferença entre (b) um subgrafo geral e (c) um subgrafo induzido de (a) $G$ , com base no conjunto de vértices $\{a, b, d\}$ . . . . .	22
Figura 3 – Grafo com arestas múltiplas baseado no problema das Pontes de Königsberg.	25
Figura 4 – O Grafo Completo $K_5$ . . . . .	29
Figura 5 – Exemplo de um Grafo Bipartido Completo, o $K_{3,3}$ , com suas partições $X$ e $Y$ .	30
Figura 6 – Exemplo de uma árvore de altura 3. . . . .	31
Figura 7 – Exemplos de um grafo caminho e sua versão direcionada. . . . .	31
Figura 8 – Exemplos de um grafo ciclo e sua versão direcionada. . . . .	32
Figura 9 – O Grafo Racional Completo $K_{5/2}$ . . . . .	32
Figura 10 – O torneio transitivo $\vec{T}_4$ . . . . .	34
Figura 11 – Exemplo de homomorfismo $f : \vec{C}_4 \rightarrow K_2$ , onde vértices opostos em $\vec{C}_4$ são mapeados para o mesmo vértice em $K_2$ . . . . .	38
Figura 12 – Exemplo de homomorfismo $f : C_3 \rightarrow K_4$ . . . . .	39
Figura 13 – Exemplo de um homomorfismo bijetivo $f : C_5 \rightarrow K_{5/2}$ . . . . .	42
Figura 14 – Exemplo de um homomorfismo entre ciclos ímpares $f : C_7 \rightarrow C_3$ . . . . .	46
Figura 15 – Ilustração do homomorfismo trivial (constante) de um grafo complexo ( $K_5$ ) para um grafo $H$ com um laço. . . . .	49
Figura 16 – Um homomorfismo $f : D \rightarrow \vec{T}_4$ como uma ordenação topológica. . . . .	53
Figura 17 – A Ordem Total dos Grafos Completos . . . . .	59

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CSP	Problema de Satisfação de Restrições ( <i>Constraint Satisfaction Problem</i> )
DAG	Digrafo Acíclico ( <i>Directed Acyclic Graph</i> )
GNN	Redes Neurais de Grafos ( <i>Graph Neural Networks</i> )
IEEE	<i>Institute of Electrical and Electronics Engineers</i>
MoSE	<i>Motif Structural Encoding</i>
NP	<i>Nondeterministic Polynomial time</i>
P	<i>Polynomial time</i>
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
UFC	Universidade Federal do Ceará

## SUMÁRIO

1	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	12
1.1	<b>Justificativa e Relevância</b> . . . . .	13
1.2	<b>Objetivos da Monografia</b> . . . . .	15
1.3	<b>Metodologia</b> . . . . .	16
1.4	<b>Estrutura da Monografia</b> . . . . .	17
2	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> . . . . .	18
2.1	<b>Grafos: Definição e Conceitos Primitivos</b> . . . . .	18
2.2	<b>Adjacência, Grau e Vizinhaça</b> . . . . .	19
2.3	<b>Isomorfismo</b> . . . . .	20
2.4	<b>Subgrafos e Estruturas Derivadas</b> . . . . .	21
2.5	<b>Caminhos, Conectividade e Distância</b> . . . . .	22
2.6	<b>Passeios e Circuitos Eulerianos</b> . . . . .	24
2.7	<b>Grafos Direcionados (Digrafos)</b> . . . . .	25
2.7.1	<i>Passeios e Conectividade em Digrafos</i> . . . . .	27
2.8	<b>Coloração de Vértices</b> . . . . .	28
2.9	<b>Classes Especiais de Grafos</b> . . . . .	28
2.9.1	<i>Classes de Digrafos Especiais</i> . . . . .	33
2.10	<b>Complexidade Computacional</b> . . . . .	34
3	<b>HOMOMORFISMO DE GRAFOS COMO GENERALIZAÇÃO CON- CEITUAL</b> . . . . .	37
3.1	<b>Definição Formal em Digrafos</b> . . . . .	37
3.2	<b>O Grafo como um Caso Particular</b> . . . . .	38
3.3	<b>Classificação de Homomorfismos</b> . . . . .	39
3.4	<b>Preservação de Estruturas</b> . . . . .	43
3.4.1	<i>Generalização para Digrafos</i> . . . . .	47
3.5	<b>O Caso Trivial: Homomorfismos para Grafos com Laços</b> . . . . .	48
3.6	<b>Isomorfismo como um Homomorfismo Bijetor</b> . . . . .	49
3.7	<b>Coloração como um Homomorfismo</b> . . . . .	51
3.8	<b>Ordenação Topológica como um Homomorfismo</b> . . . . .	52
3.9	<b>Dualidades de Existência e Dicotomias de Complexidade</b> . . . . .	53

3.9.1	<i>Dualidades de Homomorfismo</i> . . . . .	54
3.9.2	<i>A Dicotomia de Complexidade</i> . . . . .	54
4	<b>APLICAÇÃO EM COLORAÇÃO E A ORDEM PARCIAL DE GRAFOS</b>	56
4.1	<b>A Ordem Parcial de Homomorfismos</b> . . . . .	56
4.1.1	<i>O Problema: Uma Quasi-Ordem</i> . . . . .	56
4.1.2	<i>A Solução: Equivalência Homomórfica e Núcleos</i> . . . . .	57
4.1.3	<i>O Resultado: A Família <math>\mathcal{C}</math></i> . . . . .	58
4.2	<b>A Escala dos Grafos Completos e a Coloração Clássica</b> . . . . .	58
4.3	<b>O Refinamento da Escala: Coloração Circular e Grafos Racionais Completos (<math>K_{p/q}</math>)</b> . . . . .	60
4.3.1	<i>Grafos Racionais Completos (<math>K_{p/q}</math>)</i> . . . . .	60
4.3.2	<i>A Métrica Circular e os Ciclos Ímpares</i> . . . . .	61
4.4	<b>Coloração Fracionária e Grafos de Kneser (<math>K(n, k)</math>)</b> . . . . .	62
4.4.1	<i>Grafos de Kneser (<math>K(p, q)</math>)</i> . . . . .	62
4.4.2	<i>O Número Cromático Fracionário (<math>\chi_f(G)</math>)</i> . . . . .	63
5	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	64
5.1	<b>Recapitulação e Objetivos</b> . . . . .	64
5.2	<b>Conclusões Chave</b> . . . . .	65
5.3	<b>Contribuição Exploratória e Contextualização no Estado da Arte</b> . . . . .	66
5.4	<b>Trabalhos Futuros</b> . . . . .	67
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	68

## 1 INTRODUÇÃO

As ruas, avenidas e cruzamentos de uma cidade; os perfis e seus seguidores e seguidos em uma rede social; as rotas entre centros de distribuição de um varejista multinacional; as disciplinas e seus pré-requisitos na grade curricular de um curso de graduação. Todas essas (e inúmeras outras) situações possuem algo em comum: elas podem ser modeladas por **Grafos**.

Um grafo, de forma bem simplificada, é um conjunto de pontos, chamados de vértices, junto a um conjunto de linhas, chamadas de arestas, que representam a relação entre pares de vértices. Em sua versão direcionada, chamada de digrafo, a relação entre dois vértices possui sentido, é chamada de arco e é representada por uma seta. As ruas, nesse caso, seriam representadas por arestas e os cruzamentos entre elas, por vértices; Os perfis são representados por vértices e a relação de "seguir" por arcos; as disciplinas seriam os vértices e a relação de pré-requisito, os arcos; e assim por diante. Comunicação, transporte, distribuição, hierarquia, relacionamentos, etc. Todas podem ser modeladas por essa construção inicialmente simples, mas que esconde uma complexidade monumental.

A história da **Teoria dos Grafos** começou em Königsberg, hoje Kaliningrado, uma cidade prussiana cortada pelo rio Prególia, que dividia seu território em quatro partes: a margem esquerda, a margem direita e duas ilhas. Para que os moradores de Königsberg pudessem transitar pela cidade, foram construídas sete pontes que ligavam suas porções de terra. A partir daí, surge o **Problema das Pontes de Königsberg**. O problema consistia em: é possível atravessar as sete pontes de Königsberg exatamente uma vez, sem repetições, voltando ao ponto de partida?

Este problema foi resolvido em 1736 pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707 - 1783), que, para resolvê-lo, modelou a cidade como... um grafo. As porções de terra eram os vértices, e as pontes, as arestas. Como resultado, ele demonstrou que era impossível realizar tal feito. Como consequência, criou uma área fundamental da Matemática Discreta e da Ciência da Computação.

Com o amadurecimento da Teoria dos Grafos, outros conceitos matemáticos foram incorporados à teoria, gerando contribuições importantes. Um desses conceitos é o de **Homomorfismo**.

Com raízes profundas na Álgebra Abstrata e na Teoria das Categorias, o homomorfismo é definido na Teoria dos Grupos como uma função que relaciona os elementos de dois grupos, preservando a relação binária definida em cada um deles.

**Definição 1.0.1** (Grupo). Um **grupo** é um par ordenado  $(G, *)$ , onde  $G$  é um conjunto e  $*$  é uma relação binária em  $G$  que satisfaz os três axiomas a seguir:

1. é **associativa**, ou seja,  $(a * b) * c = a * (b * c)$ , para todo  $a, b, c, \in G$ ;
2. existe um elemento  $e \in G$ , chamado de **identidade** ou **elemento neutro**, tal que  $e * a = a * e = e$ , para todo  $a \in G$ ;
3. e, para todo  $a \in G$ , existe um elemento  $a^{-1} \in G$ , chamado de **inverso** de  $a$ , tal que  $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$  (DUMMIT; FOOTE, 2009).

**Definição 1.0.2** (Homomorfismo de Grupos). Sejam  $(G, \cdot)$  e  $(H, *)$  dois grupos. Uma função  $\phi : G \rightarrow H$  é dita um **homomorfismo de grupos** se:

$$\phi(x \cdot y) = \phi(x) * \phi(y), \forall x, y \in G \quad (1.1)$$

(DUMMIT; FOOTE, 2009).

A ideia é que não importa se a operação é realizada antes ou depois do mapeamento: o resultado estrutural é o mesmo. Nesse contexto, o homomorfismo atua como uma ponte que relaciona estruturas algébricas, mantendo suas propriedades essenciais inalteradas.

A Teoria dos Grafos, então, absorve o termo "homomorfismo", mantendo sua ideia de preservação de estruturas: em vez de preservar uma operação binária entre os conjuntos definidos nos grupos, o homomorfismo em grafos preserva a relação binária de adjacência entre os vértices.

Nesse caso, as estruturas de conectividade são respeitadas, ou seja, se dois vértices de um grafo de partida estão conectados de alguma forma, suas imagens no grafo de destino estarão conectadas de forma semelhante.

A simplicidade desta definição, apresentada aqui de maneira intuitiva, confere um grande poder de generalização. Ao longo desta monografia, vamos mostrar que homomorfismos unificam diversos conceitos primitivos na teoria dos grafos: as ideias de passeio, caminho, isomorfismos, coloração, aciclicidade, dentre várias outras, podem ser vistas, a partir de então, sob uma mesma ótica.

## 1.1 Justificativa e Relevância

Na história da Teoria dos Grafos, diversos conceitos primitivos de crucial importância foram definidos de forma isolada, como, por exemplo, o isomorfismo e a coloração. O estudo

de homomorfismos permite redefinir esses e outros conceitos de maneira unificada, partindo de um mesmo arcabouço teórico. Dessa forma, podemos demonstrar que vários conceitos teóricos distintos podem ser reduzidos à homomorfismos partindo de (ou chegando a) alvos específicos.

Uma das principais métricas para a classificação de grafos é a **coloração de vértices**, representada pelos **números cromáticos**. Porém, a principal limitação da coloração clássica é sua natureza discreta. grafos com complexidades estruturais distintas, como ciclos ímpares, podem ter o mesmo número cromático. A aplicação de homomorfismos nessa área de estudo permite a expansão dessa escala para além dos números inteiros, possibilitando generalizações que exploram a densidade da **Ordem Parcial dos Grafos**. O **Número Cromático Circular** e o **Número Cromático Fracionário** são duas dessas expansões que serão abordadas nesta monografia.

Além disso, o homomorfismo em grafos não se limita à teoria pura. Ele é uma importante ferramenta em questões emergentes de áreas como Combinatória, Física, Aprendizado de Máquinas e Banco de Dados:

1. **Aprendizado de Máquina e Redes Neurais de Grafos (Redes Neurais de Grafos (*Graph Neural Networks*) (GNN)s):** Recentemente, a contagem de homomorfismos surgiu como uma importante técnica em modelos de aprendizado de máquina. Bao *et al.* (2025) demonstram como vetores de contagem de homomorfismos, por eles denominados Motif Structural Encoding (*Motif Structural Encoding* (MoSE)), podem ser empregados como codificações estruturais poderosas e flexíveis em modelos de aprendizado de grafos (GNNs).
2. **Otimização de Consultas em Bancos de Dados:** Na Teoria de Bancos de Dados, a contagem de homomorfismos é fundamental para o desenvolvimento de **algoritmos de consulta mais eficientes**. Cate *et al.* (2024) mostraram que a análise da contagem de subgrafos (que é uma forma de homomorfismo) permite que os algoritmos determinem se uma propriedade é satisfeita, otimizando significativamente a execução de consultas complexas.
3. **Física Estatística e Combinatória Extremal:** O problema de contagem de homomorfismos possui uma conexão intrínseca com a função de partição em modelos de **Física Estatística**, como os Campos Aleatórios de Markov. Borgs *et al.* (2006) exploraram essa conexão, definindo a distância entre dois grafos em termos de suas similaridades estruturais e utilizando essa definição para calcular aproximações para o número de homomorfismos.

Mais recentemente, Csikvári *et al.* (2022) mostraram que essa ligação fornece um arcabouço para investigar problemas abertos complexos em combinatória, como a **Conjectura de Sidorenko**, utilizando ferramentas analíticas da teoria de modelos gráficos.

4. **Conexões com Lógica e Teoria da Complexidade:** A questão fundamental sobre o quão bem a contagem de homomorfismos consegue distinguir diferentes grafos foi explorada por Atserias *et al.* (2021). Eles estabeleceram uma equivalência formal entre o poder expressivo dessas contagens e o poder de testes clássicos de isomorfismo, como o algoritmo de Weisfeiler-Leman.

A relevância desta monografia, então, consiste em observar a Teoria dos Grafos sob a lente da Álgebra Relacional, utilizando o homomorfismo como um conceito unificador e um recurso importante no entendimento de certas métricas estruturais.

Ao utilizar o livro de Hell e Nešetřil (2008) como base, este trabalho visa fornecer um panorama formal que permita a compreensão e a futura aplicação desses resultados em contextos da Teoria da Computação.

## 1.2 Objetivos da Monografia

Esta monografia de natureza **exploratória** procura estabelecer a relação de homomorfismo como o **princípio unificador** para a análise estrutural de grafos, formalizar a **Ordem Parcial de Homomorfismos** ( $\mathcal{C}$ ) e explorar suas implicações diretas no refinamento das métricas de coloração clássicas ( $\chi(G)$ ).

Para atingir o objetivo geral, esta monografia propõe-se a:

1. **Apresentar uma Base Teórica:** Definir o conceito de **Grafo** e suas estruturas primitivas de forma que melhor se encaixe no estudo de homomorfismos, apresentando a fundamentação teórica que sustenta a introdução desse conceito na Teoria dos Grafos.
2. **Demonstrar a Unificação Conceitual:** Analisar como conceitos primitivos, como isomorfismo, coloração e ordenação topológica, podem ser reinterpretados e generalizados sob a ótica dos homomorfismos.
3. **Explorar sua Aplicação em Coloração:** Formalizar as métricas de coloração que exploram a densidade da ordem  $\mathcal{C}$ , com foco na definição e nas propriedades do **Número Cromático** ( $\chi(G)$ ), do **Número Cromático Circular** ( $\chi_c(G)$ ) e do **Número Cromático Fracionário** ( $\chi_f(G)$ ).
4. **Contextualizar a Complexidade:** Apresentar os resultados da **Dualidade de Existência**

e da **Dicotomia de Complexidade** que governam os homomorfismo, posicionando o tema na fronteira da pesquisa em combinatória e teoria da computação.

Para além dos objetivos acadêmicos e analíticos, esta monografia almeja as seguintes contribuições secundárias:

5. **Consolidação da Literatura em Língua Portuguesa:** Servir como um ponto de acesso e referência estruturada para o estudo da **Homomorfismos** e suas aplicações na **Ordem Parcial de Homomorfismos** ( $\mathcal{C}$ ) e nas **Métricas Racionais de Coloração** ( $\chi_c(G)$  e  $\chi_f(G)$ ), conceitos frequentemente restritos a artigos e livros-texto em língua inglesa (como o de Hell e Nešetřil).
6. **Disseminação Didática:** Promover a integração do homomorfismo como um tema central nos cursos de Teoria dos Grafos e Teoria da Computação, facilitando a compreensão da complexidade e das dualidades de problemas clássicos.

### 1.3 Metodologia

A presente monografia caracteriza-se como uma pesquisa de natureza **bibliográfica**, pautada na análise crítica e sistemática da literatura acadêmica consolidada e de artigos de ponta na área de Teoria dos Grafos. As seguintes abordagens serão adotadas:

- **Abordagem Dedutiva:** O trabalho parte de conceitos teóricos fundamentais (como o de grafo e o de homomorfismo) para demonstrar as relações estruturais em famílias específicas de grafos (como  $K_{p/q}$  e  $K(n, k)$ ) e conceitos primitivos (como isomorfismo e aciclicidade).
- **Abordagem Comparativa:** Utiliza a comparação entre diferentes métricas de coloração ( $\chi(G)$ ,  $\chi_c(G)$ ,  $\chi_f(G)$ ) para justificar a densidade e o refinamento da Ordem Parcial de Homomorfismos ( $\mathcal{C}$ ).

A base teórica central desta monografia é o livro *Graphs and Homomorphisms*, de Pavol Hell e Jaroslav Nešetřil. Além disso, para criar uma fundamentação teórica forte, foram consultados livros relevantes na área de Teoria dos Grafos, como o *Graph Theory*, de Adrian Bondy e U. S. R. Murty, o *Introduction to graph theory*, de Douglas B. West, entre outros. Livros nas áreas de **Matemática Discreta** e **Álgebra** também foram consultados.

Adicionalmente, foram consultados artigos de relevância para contextualizar a importância do tema na fronteira da pesquisa e no estado da arte. As principais bases de dados utilizadas foram o Semantic Scholar, o ScienceDirect e o *Institute of Electrical and Electronics Engineers* (IEEE) Xplore, com o auxílio da ferramenta de pesquisa Google Scholar. O termo

"*graph homomorphism*" foi combinado com o tema central de cada uma das seções e subseções dos capítulos 3 e 4.

O processo metodológico incluiu a **consolidação e tradução rigorosa** desses conceitos complexos, visando o objetivo secundário de fornecer um ponto de acesso estruturado e didático em língua portuguesa sobre a aplicação de homomorfismos em grafos.

#### 1.4 Estrutura da Monografia

Este trabalho está estruturado em cinco capítulos, organizados de forma progressiva para guiar o leitor desde os conceitos fundamentais até as aplicações mais avançadas da pesquisa.

- **Capítulo 1: Introdução:** Apresenta o tema, o objeto de estudo (homomorfismo), a justificativa e os objetivos da pesquisa.
- **Capítulo 2: Fundamentação Teórica:** Consolida as definições básicas da Teoria dos Grafos necessárias para o entendimento do trabalho, incluindo conceitos primitivos, classes especiais de grafos e a coloração clássica.
- **Capítulo 3: Homomorfismo como Generalização Conceitual:** Dedicado a formalizar e classificar a relação de homomorfismo e suas consequências estruturais em grafos e digrafos. Demonstra como ela unifica o isomorfismo, a coloração e a ordenação topológica, além de apresentar as fronteiras de Dualidade e Complexidade.
- **Capítulo 4: Aplicação em Coloração e a Ordem Parcial de Grafos:** Onde a Ordem Parcial  $\mathcal{C}$  é formalizada e são exploradas as métricas de coloração que a utilizam, como o Número Cromático Circular ( $\chi_c$ ) e o Número Cromático Fracionário ( $\chi_f$ ), utilizando as famílias  $K_{p/q}$  e  $K(n, k)$ , respectivamente.
- **Capítulo 5: Conclusão:** Apresenta uma síntese dos resultados obtidos, discute as contribuições alcançadas em relação aos objetivos propostos e sugere direções para trabalhos futuros na área de homomorfismos e complexidade.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo apresenta a fundamentação teórica que servirá como base para o desenvolvimento desta monografia. As definições aqui apresentadas são essenciais para a compreensão do conceito de homomorfismo e suas aplicações em Teoria dos Grafos, que serão exploradas nos capítulos seguintes.

### 2.1 Grafos: Definição e Conceitos Primitivos

Um grafo é uma estrutura matemática utilizada para modelar relações entre objetos de um determinado conjunto (FEOFILOFF, 2009). A literatura apresenta formalismos distintos para sua definição. Normalmente, um grafo é definido como uma tripla  $G = (V, E, \psi)$ , onde  $\psi$  é a função de incidência que relaciona uma aresta a um par de vértices (BONDY; MURTY, 2008; WEST, 2001). Esta definição é interessante, pois permite, naturalmente, a existência de arestas múltiplas e de laços, que serão definidos mais adiante.

Porém, vamos utilizar uma definição mais parecida com as utilizadas por Hell e Nešetřil (2008) e Feofiloff (2009):

**Definição 2.1.1** (Grafo). *Um **Grafo**  $G = (V, E)$  é um par ordenado formado pelo conjunto não vazio  $V = V(G)$  de **vértices** e o conjunto  $E = E(G)$  de **arestas**. Cada aresta  $e$  é um conjunto  $\{u, v\}$  de vértices.*

Dizemos que os vértices  $u$  e  $v$  são extremidades da aresta  $\{u, v\}$ , que, por sua vez, incide nos vértices  $u$  e  $v$ . Hell e Nešetřil (2008) consideram a possibilidade do conjunto  $V$  ser vazio em sua definição, mas desconsideram essa possibilidade em demonstrações de teoremas para evitar complicações desnecessárias. Por isso, faremos como em Bondy e Murty (2008) e consideraremos que  $V$  é não vazio. Por comodidade, em situações em que apenas um grafo  $G$  é citado, denominaremos os conjuntos de vértices e de arestas de  $G$  apenas como  $V$  e  $E$ , respectivamente. Em casos em que mais de um grafo seja citado, utilizaremos as representações  $V(G)$  e  $E(G)$ . A cardinalidade do conjunto de vértices  $n(G) = |V(G)|$ , ou apenas  $n$ , é chamada de **ordem** do grafo, e a cardinalidade do conjunto de arestas  $m(G) = |E(G)|$ , ou apenas  $m$ , é chamada de **tamanho** do grafo.

Note que a representação de uma aresta como um conjunto  $\{u, v\}$  na definição escolhida implica que os grafos representados nesta monografia não permitem arestas múltiplas

nem laços, o que seria chamado de **grafos simples** pela definição de West (2001). Por isso, é necessária a definição formal das estruturas que nossa definição de grafo exclui e, além disso, dos tipos de grafo que permitam essas estruturas.

**Definição 2.1.2** (Grafo que permite laço, Laço). *Um grafo que permite laços é um grafo  $G = (V, E)$  onde o conjunto  $E$  permite arestas que possuem ambas as extremidades no mesmo vértice. Uma aresta desse tipo é chamada de **laço**. Um grafo com laço é um grafo que possui pelo menos um laço.*

No caso de grafos com laço, dizemos que o laço  $\{u\}$  incide duas vezes no vértice  $u$ . É uma convenção comum na literatura representar a aresta  $\{u, v\}$  simplesmente como  $uv$  e o laço  $\{u\}$  como  $uu$ .

**Definição 2.1.3** (Multigrafo, Arestas múltiplas). *Um multigrafo é um grafo  $G = (V, E)$  onde o conjunto  $E$  permite arestas distintas que incidem no mesmo par de vértices. Arestas desse tipo são chamadas de **arestas múltiplas**.*

Um grafo  $G = (V, E)$  pode ser representado visualmente como um diagrama onde cada vértice de  $V$  é representado por um ponto e cada aresta de  $E$  é representada por uma curva que conecta suas extremidades. Um exemplo icônico de grafo, frequentemente utilizado na literatura por suas propriedades, é o Grafo de Petersen, representado na Figura 1. Este é um grafo amplamente conhecido por ser contra-exemplo de várias conjecturas em Teoria dos Grafos (WEST, 2001; BONDY; MURTY, 2008).

A nomenclatura dos vértices na Figura 1 foi escolhida para referenciar uma classe de grafos chamada de Grafos de Kneser, que será definida mais adiante.

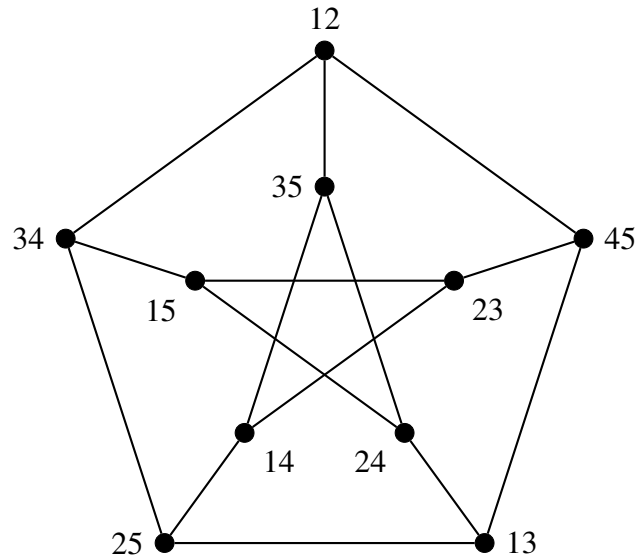
## 2.2 Adjacência, Grau e Vizinhança

A partir da definição inicial de grafos, é possível estabelecer a relação fundamental entre seus vértices:

**Definição 2.2.1** (Vizinhança). *Dois vértices  $u$  e  $v$  de um grafo  $G = (V, E)$  são ditos **adjacentes** se existe uma aresta  $uv \in E$ . Se dois vértices são adjacentes, dizemos que são **vizinhos**. O conjunto  $N_G(v)$ , ou apenas  $N(v)$ , de todos os vizinhos de um vértice  $v$  em um grafo  $G$  é chamado de **Vizinhança** de  $v$ .*

É importante identificar, em muitos casos, o tamanho da vizinhança de um vértice:

Figura 1 – O Grafo de Petersen, com vértices rotulados como  $ij$ .



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

**Definição 2.2.2** (Grau, Grafo Regular). *Dado um grafo  $G = (V, E)$  e um vértice  $v \in V$ , o grau de  $v$ , denotado por  $d_G(v)$ , ou apenas por  $d(v)$ , é a quantidade de arestas que incidem em  $v$ . No caso de um grafo que permite laços, um laço contribui com 2 para o grau do vértice. No caso de um multigrafo, cada aresta múltipla contribui com 1 para o grau do vértice. Um grafo em que todos os vértices possuem o mesmo grau é chamado de **regular**.*

No caso específico de um grafo, o grau de  $v$  corresponde à cardinalidade de sua vizinhança, ou seja,  $d(v) = |N_G(v)|$ .

A partir desta definição, formula-se um resultado fundamental, conhecido como o Primeiro Teorema da Teoria dos Grafos (BONDY; MURTY, 2008) ou, mais coloquialmente, como o Lema do Aperto de Mão:

**Teorema 2.2.1** (Lema do Aperto do Mão). *Seja  $G = (V, E)$  um grafo. Então:*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m(G) \quad (2.1)$$

Um corolário direto desse teorema é que, em qualquer grafo, o número de vértices de grau ímpar é sempre par.

### 2.3 Isomorfismo

Um conceito presente em todos os livros introdutórios à Teoria dos Grafos e em todas as disciplinas que se propõem a discutir o tema é o Isomorfismo. Intuitivamente, dois

grafos são isomorfos se eles são "o mesmo grafo", mas desenhados de maneiras diferentes. Este conceito é a relação de equivalência mais forte da Teoria dos Grafos e define a condição sob qual dois grafos são estruturalmente idênticos.

Começemos com sua definição formal:

**Definição 2.3.1** (Isomorfismo). *Um **isomorfismo** entre  $G$  e  $H$  é uma bijeção  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  onde, para qualquer par de vértices  $u, v \in V(G)$ , a aresta  $uv \in E(G)$  se, e somente se, a aresta  $f(u)f(v) \in E(H)$  (WEST, 2001; BONDY; MURTY, 2008; FEOFILOFF, 2009), ou seja:*

$$uv \in E(G) \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E(H) \quad (2.2)$$

*Se existe um isomorfismo entre  $G$  e  $H$ , dizemos que eles são **isomorfos**, e denotamos por  $G \cong H$ .*

A partir disso, podemos definir um tipo específico de isomorfismo.

**Definição 2.3.2** (Automorfismo). *Um **automorfismo** é um isomorfismo de um grafo em si mesmo (BONDY; MURTY, 2008; WEST, 2001; FEOFILOFF, 2009).*

A função identidade é sempre um automorfismo. A existência de um automorfismo diferente da função identidade em um grafo reflete uma simetria estrutural desse grafo. Quando essa simetria estrutural se expande para todos os vértices de um grafo, sendo todos eles semelhantes, dizemos que esse grafo é **vértice-transitivo** (BONDY; MURTY, 2008), ou seja, para qualquer par de vértices  $u, v \in V(G)$ , existe algum automorfismo  $f : V(G) \rightarrow V(G)$  tal que  $f(u) = v$ . Os grafos completos  $K_k$ , definidos mais adiante, são exemplos de grafos vértice-transitivos.

## 2.4 Subgrafos e Estruturas Derivadas

Frequentemente, em Teoria dos Grafos, o objeto de estudo é uma porção do grafo. Para essa porção, damos o nome de Subgrafo:

**Definição 2.4.1** (Subgrafo). *Um grafo  $H$  é um **subgrafo** de um grafo  $G$  se  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $E(H) \subseteq E(G)$ , ou seja, o conjunto de vértices de  $H$  é um subconjunto dos vértices de  $G$ , e o conjunto de arestas de  $H$  é um subconjunto das arestas de  $G$  (FEOFILOFF, 2009; BONDY; MURTY, 2008; WEST, 2001).*

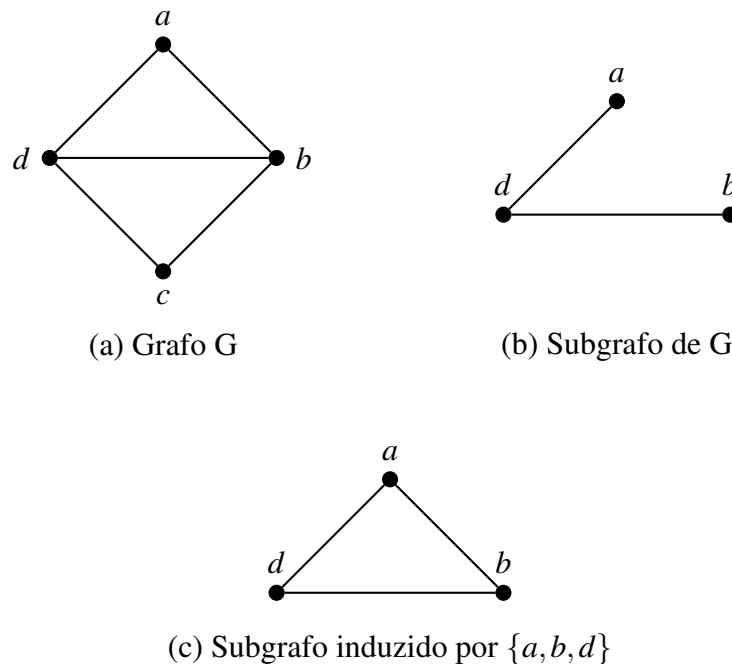
Dentre os subgrafos de um grafo  $G$ , dois tipos especiais se destacam pela sua aplicabilidade em demonstrações e usabilidade. São eles:

**Definição 2.4.2** (Subgrafo Gerador). *Um subgrafo  $H$  de  $G$  é um **subgrafo gerador** se  $V(H) = V(G)$ , ou seja, se ele contém todos os vértices de  $G$  (FEOFILOFF, 2009; BONDY; MURTY, 2008; WEST, 2001).*

**Definição 2.4.3** (Subgrafo Induzido). *Seja  $S \subseteq V$  um subconjunto dos vértices de um grafo  $G = (V, E)$ . O **subgrafo induzido** por  $S$ , denotado por  $G[S]$ , é o grafo que tem  $S$  como seu conjunto de vértices e cujo conjunto de arestas é formado por todas as arestas de  $G$  que possuem ambas as extremidades em  $S$  (FEOFILOFF, 2009; BONDY; MURTY, 2008; WEST, 2001).*

Note que todo subgrafo induzido é um subgrafo, mas o contrário não é verdade. Isso é evidenciado na Figura 2.

Figura 2 – Diferença entre (b) um subgrafo geral e (c) um subgrafo induzido de (a)  $G$ , com base no conjunto de vértices  $\{a, b, d\}$ .



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

## 2.5 Caminhos, Conectividade e Distância

Com as definições apresentadas até então, já é possível analisar e reconhecer vértices vizinhos. Porém, para analisar um par de vértices  $u$  e  $v$  que não são diretamente adjacentes, é interessante formalizar o conceito de um vértice alcançável por outro, ou seja, a ideia de partir de um vértice e chegar a outro "percorrendo" o grafo. A literatura define várias estruturas para

representar tal conceito, sendo as mais conhecidas o passeio, o caminho e a trilha (WEST, 2001; FEOFILOFF, 2009).

**Definição 2.5.1** (Passeio, Passeio Fechado). *Um passeio  $W$  em um grafo  $G$  é uma sequência finita e não vazia de vértices e arestas  $W = (v_0, v_0v_1, v_1, v_1v_2, v_2, \dots, v_{n-1}, v_{n-1}v_n, v_n)$ . Denotamos a quantidade de arestas em um passeio, contando repetições, como seu **comprimento**. Se  $v_0 = v_n$ , ou seja, o vértice inicial e o final são os mesmos, dizemos que o passeio é um **passeio fechado**. Um  $uv$ -passeio é um passeio de  $u$  para  $v$  (BONDY; MURTY, 2008; WEST, 2001; FEOFILOFF, 2009).*

Como a definição de grafo escolhida não permite arestas múltiplas, um passeio pode ser unicamente representado pela sua sequência de vértices  $W = (v_0, v_1, \dots, v_k)$  (WEST, 2001). Restrições sobre a repetição de vértices e arestas definem os conceitos de trilha e caminho.

**Definição 2.5.2** (Trilha e Caminho). *Uma **trilha** é um passeio no qual todas as arestas são distintas. Um **caminho** é uma trilha na qual todos os vértices são distintos. Um  **$u, v$ -caminho** é um caminho de  $u$  até  $v$ .*

Note que uma consequência da definição de caminho é que todo caminho é uma trilha, mas nem toda trilha é um caminho.

**Definição 2.5.3** (Ciclo). *Um ciclo é uma trilha fechada com todos os vértices distintos, exceto o inicial e o final, que são iguais (BONDY; MURTY, 2008; WEST, 2001; FEOFILOFF, 2009).*

Outra consequência da definição escolhida para grafo é a de que todo ciclo possui comprimento pelo menos 3, naturalmente. A existência de caminhos entre vértices define a noção de conectividade de um grafo.

**Definição 2.5.4** (Grafo Conexo, Grafo Desconexo, Componente). *Um grafo  $G = (V, E)$  é dito **conexo** se, para cada par de vértices distintos  $u, v \in V$  existe um  $u, v$ -caminho em  $G$ . Caso contrário,  $G$  é **desconexo**. Os subgrafos conexos maximais de um grafo desconexo são suas **componentes**. (BONDY; MURTY, 2008; WEST, 2001; FEOFILOFF, 2009).*

Finalmente, em um grafo conexo, podemos definir uma métrica de distância entre os vértices.

**Definição 2.5.5** (Distância). *Em um grafo  $G = (V, E)$ , a **distância**  $d_G(u, v)$ , ou apenas  $d(u, v)$ , entre dois vértices distintos  $u, v \in V$  é o comprimento do caminho mais curto entre eles. Se não*

houver um  $u,v$ -caminho, a distância é considerada infinita (BONDY; MURTY, 2008; WEST, 2001; FEOFILOFF, 2009).

Note-se que distâncias infinitas entre vértices só ocorrem em grafos desconexos e quando os vértices estão em componentes distintas.

A noção de conectividade pode ser aprofundada ao se questionar não apenas se dois vértices  $u, v \in V$  estão conectados, mas o quão conectados eles estão, ou seja, quantos  $u,v$ -caminhos independentes existem. Para isso, é importante definir a noção de caminhos independentes.

**Definição 2.5.6** (Caminhos Internamente Disjuntos). *Dois  $u,v$ -caminhos são ditos **internamente disjuntos**, ou **vértice disjuntos**, se eles não possuem vértices em comum, exceto por  $u$  e  $v$  (BONDY; MURTY, 2008; WEST, 2001).*

A relação entre o número máximo de caminhos internamente disjuntos entre dois vértices e a força da conexão entre eles foi descrita por Menger em 1927, cuja versão de vértice-conectividade é descrita a seguir:

**Teorema 2.5.1** (Teorema de Menger (1927)). *Sejam  $u, v \in V$  dois vértices não adjacentes do grafo  $G = (V, E)$ . O número máximo de  $u,v$ -caminhos internamente disjuntos é igual ao número mínimo de vértices que precisam ser retirados de  $V$  para desconectar  $u$  e  $v$ . (BONDY; MURTY, 2008; WEST, 2001).*

## 2.6 Passeios e Circuitos Eulerianos

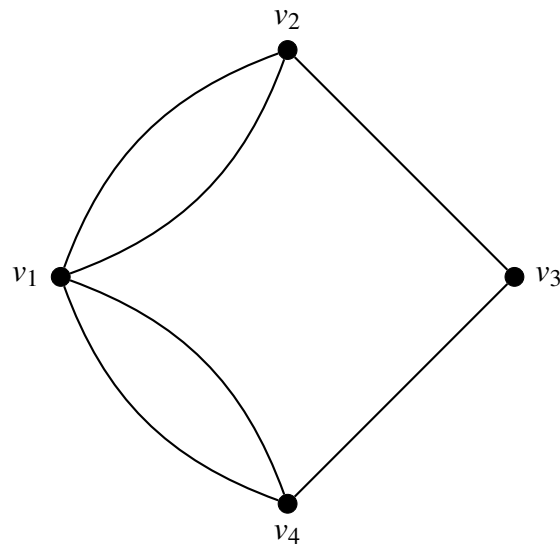
O problema histórico das Pontes de Königsberg, dito como o berço da Teoria dos Grafos (WEST, 2001), deu origem a uma classe especial de trilhas que percorrem toda a estrutura de um grafo.

**Definição 2.6.1** (Trilha e Circuito Euleriano). *Uma **trilha euleriana** em um grafo é uma trilha que contém todas as arestas do grafo. Um **circuito euleriano** é uma trilha euleriana fechada (FEOFILOFF, 2009; BONDY; MURTY, 2008; WEST, 2001).*

Um grafo que possui um circuito euleriano é chamado de **grafo euleriano**.

O Grafo de Königsberg, ilustrado na Figura 3 é um multigrafo, ou seja, possui arestas distintas que possuem o mesmo par de vértices como suas extremidades. É importante citar que a definição de grafo escolhida não permite esta construção.

Figura 3 – Grafo com arestas múltiplas baseado no problema das Pontes de Königsberg.



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

A existência de tais estruturas está diretamente ligada aos graus dos vértices do grafo, um dos resultados mais clássicos da teoria.

**Teorema 2.6.1** (Caracterização de Grafos Eulerianos). *Um grafo conexo  $G$  é euleriano se, e somente se, todo vértice de  $G$  possui grau par (FEOFILOFF, 2009; BONDY; MURTY, 2008; WEST, 2001).*

## 2.7 Grafos Direcionados (Digrafos)

Até então, a discussão concentrou-se nos grafos, nos quais a relação entre dois vértices é naturalmente simétrica. Porém, muitos sistemas e problemas são modelados levando em consideração o sentido da relação entre os vértices. Para representar tais sistemas, a Teoria dos Grafos utiliza o conceito de grafo direcionado, ou apenas digrafo (WEST, 2001; HELL; NEŠETŘIL, 2008; BANG-JENSEN; GUTIN, 2009).

**Definição 2.7.1** (Digrafo). *Um **digrafo**  $D = (V, A)$  é um par ordenado formado pelo conjunto não vazio  $V = V(D)$  de vértices e o conjunto  $A = A(D) \subseteq V \times V$  de arcos. Na prática, cada arco é um par ordenado entre dois vértices. Um arco  $a = (u, v)$  é direcionado de  $u$  para  $v$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008; BANG-JENSEN; GUTIN, 2009).*

Em um digrafo, o vértice  $u$  é denotado como origem, ou cauda, e o vértice  $v$  como destino, ou cabeça, de um arco  $(u, v)$  (FEOFILOFF, 2009). Dizemos que o arco  $(u, v)$  parte de  $u$  e chega a  $v$ . Uma consequência da definição é que, semelhante ao que acontece em grafos,

não existe um par de arcos com a mesma origem e o mesmo destino ao mesmo tempo. A existência de um arco  $(u, v)$  não implica na existência do arco  $(v, u)$ . Para evitar ambiguidades nas representações, grafos serão usualmente denotados por  $G, H, I$ , já os digrafos serão denotados por  $D, F, J$ .

Assim como uma aresta, um arco  $(u, v)$  é comumente denotado por  $uv$ . Para evitar dualidade com a representação usual de uma aresta, a representação usual adotada para o arco  $(u, v)$  será  $\vec{uv}$ . Essa representação evidencia a natureza direcionada de um arco. A noção de grau também é refinada para um digrafo:

**Definição 2.7.2** (Grau de entrada, Grau de saída). *Seja  $D = (V, A)$  um digrafo. O grau de saída de um vértice  $v \in V$ , denotado por  $d_D^+(v)$  ou simplesmente  $d^+(v)$ , é o número de arcos que partem de  $v$ . O grau de entrada de um vértice  $v$ , denotado por  $d_D^-(v)$  ou  $d^-(v)$ , é o número de arcos que chegam a  $v$ . O grau de  $v$ , denotado por  $d_D(v)$ , ou apenas por  $d(v)$ , é a soma de seus grau de entrada e de saída, ou seja,  $d(v) = d^+(v) + d^-(v)$  (BONDY; MURTY, 2008; WEST, 2001; BANG-JENSEN; GUTIN, 2009).*

A escolha da definição de digrafo, onde o conjunto  $A$  de arestas é uma relação binária no conjunto  $V$  de vértices, permite-nos interpretar os grafos e grafos que permitem laços como casos particulares de digrafos:

- **Grafos como Digrafos Simétricos Irreflexivos:** um grafo  $G = (V, E)$  pode ser visto como um digrafo  $D = (V, A)$  onde a relação de adjacência é simétrica e irreflexiva. Ou seja, para cada arco  $\vec{uv} \in A$ , o arco reverso  $\vec{vu}$  também deve estar em  $A$ . Além disso,  $D$  não permite laços. Nesse modelo, a aresta não orientada  $uv$  de um grafo corresponde ao par de arcos  $\{\vec{uv}, \vec{vu}\}$  no digrafo simétrico (HELL; NEŠETŘIL, 2008).
- **Grafos que permitem laços como Digrafos Simétricos não Irreflexivos:** um laço  $uu$  em um vértice  $u$  corresponde a um arco reflexivo  $\vec{uu}$  no digrafo. Se todo vértice de um digrafo simétrico possui um laço, ele é dito um digrafo reflexivo (HELL; NEŠETŘIL, 2008).

Nesse sentido, a escolha de iniciar este capítulo com a definição de grafos foi uma escolha didática para construir a intuição sobre os conceitos mais comuns, respeitando a ordem apresentada na literatura escolhida para a base teórica (BONDY; MURTY, 2008; WEST, 2001). Porém, o digrafo representa uma estrutura mais geral e fundamental, especialmente para o estudo de homomorfismos (HELL; NEŠETŘIL, 2008), como será visto no capítulo seguinte.

### 2.7.1 Passeios e Conectividade em Digrafos

A orientação inerente aos arcos de um digrafo torna a noção de "percorrer" um digrafo mais complexa do que em um grafo, pois a direção dos arcos passa a importar. Isso implica em diferentes definições de passeios e, conseqüentemente, em diferentes noções de conectividade (HELL; NEŠETŘIL, 2008).

**Definição 2.7.3** (Passeio Orientado). *Um passeio orientado em um digrafo  $D = (V, A)$  é uma seqüência de vértices  $(v_0, v_1, \dots, v_k)$  onde, para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ , ou  $\overrightarrow{v_{i-1}v_i} \in A$  ou  $\overleftarrow{v_i v_{i-1}} \in A$  é um arco de  $D$ .*

- Se  $\overrightarrow{v_{i-1}v_i} \in A$ , ele é chamado de **arco de avanço** do passeio.
- Se  $\overleftarrow{v_i v_{i-1}} \in A$ , ele é chamado de **arco de recuo** do passeio (HELL; NEŠETŘIL, 2008).

*De forma análoga, definem-se a trilha orientada, o caminho orientado e o ciclo orientado.*

A partir desta definição, podemos quantificar o "progresso" de um passeio em um digrafo.

**Definição 2.7.4** (Comprimento, Comprimento Efetivo). *O comprimento de um passeio orientado é a soma entre o número de arcos de avanço e o número de arcos de recuo. Já o comprimento efetivo de um passeio orientado é a diferença entre o número de arcos de avanço e o número de arcos de recuo (HELL; NEŠETŘIL, 2008).*

Um caso particular em que todos os arcos do passeio são de avanço é chamado de passeio direcionado:

**Definição 2.7.5** (Passeio Direcionado). *Um passeio direcionado é um passeio orientado que consiste apenas de arcos de avanço (HELL; NEŠETŘIL, 2008). De forma análoga, definem-se a trilha direcionada, o caminho direcionado e o ciclo direcionado (ou circuito).*

No caso de um passeio direcionado, seu comprimento é equivalente ao seu comprimento efetivo, já que não existem arcos de recuo.

Cada uma dessas definições de passeio leva a uma definição correspondente de conectividade.

**Definição 2.7.6** (Conectividade em Digrafos). *Um digrafo  $D = (V, A)$  é dito conexo se, para todo par de vértices  $u, v \in V$ , existe um caminho orientado de  $u$  para  $v$ . Um digrafo é fortemente*

*conexo se, para todo par de vértices  $u, v \in V$ , existe um caminho direcionado de  $u$  para  $v$  e um caminho direcionado de  $v$  para  $u$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008; FEOFILOFF, 2009; WEST, 2001).*

## 2.8 Coloração de Vértices

Um dos problemas mais clássicos e estudados na Teoria dos Grafos é o de coloração de vértices, além de ser uma das principais áreas em que o estudo de homomorfismos demonstra sua importância. Logo, é importante definirmos formalmente esse conceito:

**Definição 2.8.1** (Coloração de Vértices, Coloração Própria,  $k$ -Coloração). *Uma **coloração de vértices** de um grafo  $G = (V, E)$  é uma atribuição de cores aos vértices  $V(G)$ . As cores são nada mais que rótulos para esses vértices. Uma coloração é **própria** quando, para qualquer par de vértices  $u, v \in V(G)$ , se  $u$  e  $v$  são adjacentes, então as cores atribuídas a  $u$  e  $v$  são distintas. Uma  **$k$ -coloração** é uma coloração própria que possui  $k$  cores e, se um grafo possui uma  $k$ -coloração, dizemos que ele é  $k$ -colorível. (BONDY; MURTY, 2008; WEST, 2001; FEOFILOFF, 2009; HELL; NEŠETŘIL, 2008).*

Usualmente, o conjunto de cores de uma  $k$ -coloração é definido pelo conjunto  $\{1, 2, \dots, k\}$ . Além disso, em um grafo  $G = (V, E)$ , uma  $k$ -coloração pode ser definida como uma função  $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ , onde a cor de um vértice  $v \in V$  é denotada por  $c(v)$ . Uma  $k$ -coloração também define uma partição  $(V_1, V_2, \dots, V_k)$  do conjunto dos vértices de  $V$ , onde  $V_i = \{v \mid c(v) = i\}$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

O interesse principal no estudo de colorações é, geralmente, encontrar o menor valor de  $k$  tal que exista uma  $k$ -coloração própria.

**Definição 2.8.2** (Número Cromático). *O **número cromático** de um grafo  $G$ , denotado por  $\chi(G)$ , é o menor valor possível de  $k$  tal que  $G$  seja  $k$ -colorível (WEST, 2001; BONDY; MURTY, 2008; FEOFILOFF, 2009; HELL; NEŠETŘIL, 2008)*

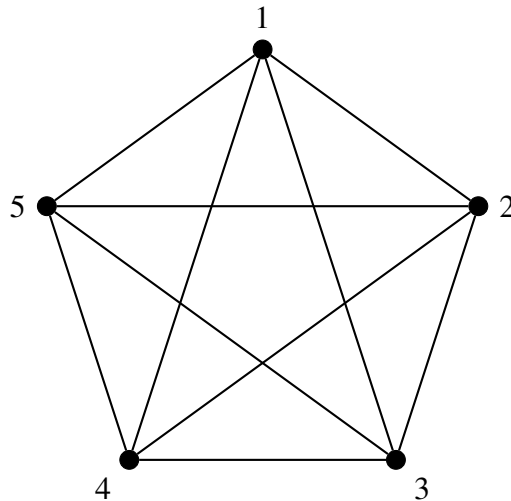
## 2.9 Classes Especiais de Grafos

Para concluir a fundamentação teórica desta monografia, é importante conhecermos algumas classes de grafos que serão fundamentais para o estudo de coloração, homomorfismo e suas correlações, iniciando com o mais fundamental:

**Definição 2.9.1** (Grafo Completo). *Um grafo  $G = (V, E)$  é dito **completo** quando todos os seus vértices são vizinhos entre si, ou seja, para cada par de vértices  $u, v \in V$ , com  $u \neq v$ , existe uma aresta  $u, v \in E$ . O grafo completo com  $k$  vértices será denotado como  $K_k = (V, E)$ , onde  $V(K_k) = \{1, 2, \dots, k\}$  e  $E(K_k) = \{ij \mid i, j \in V, i \neq j\}$  (FEOFILOFF, 2009; BONDY; MURTY, 2008; WEST, 2001).*

O grafo  $K_n$  possui  $\binom{n}{2}$  arestas e é regular de grau  $n - 1$ . Como será apresentado no Capítulo 3, quando vistos sob a lente dos homomorfismos, os grafos completos são os principais alvos para o problema da coloração de vértices. A Figura 4 representa o grafo completo  $K_5$ .

Figura 4 – O Grafo Completo  $K_5$ .



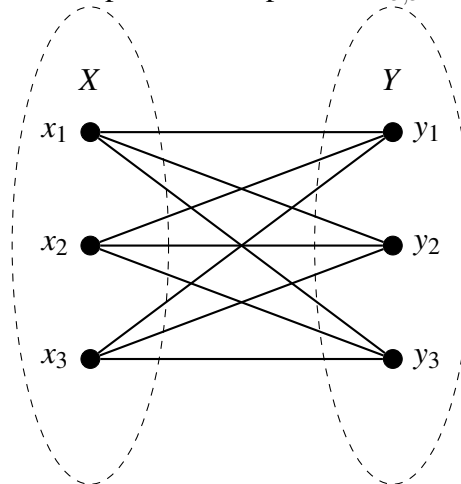
Fonte: elaborado pelo autor (2025).

A segunda classe fundamental de grafos é definida por uma propriedade estrutural de partição de seus vértices.

**Definição 2.9.2** (Grafo Bipartido, Grafo Bipartido Completo). *Um grafo  $G = (V, E)$  é dito **bipartido** se seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos disjuntos não vazios de forma que toda aresta em  $G$  incida em vértices de partições distintas, ou seja,  $V = X \cup Y$ , com  $X \cap Y = \emptyset$ , e  $E \subseteq \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$ . Um grafo bipartido é **completo** quando  $E = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$  (FEOFILOFF, 2009; BONDY; MURTY, 2008; WEST, 2001).*

Na Figura 5 está representado o grafo bipartido completo  $K_{3,3}$ . Uma característica notável dos grafos bipartidos, sempre presente na literatura, é a de que eles são 2-coloríveis, ou seja, podem ser coloridos com exatamente duas cores. Voltaremos a falar sobre essa característica no próximo capítulo, relacionando-a à noção de coloração pela lente dos homomorfismos.

Figura 5 – Exemplo de um Grafo Bipartido Completo, o  $K_{3,3}$ , com suas partições X e Y.



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Uma consequência imediata desta definição é que não existem arestas com ambas as extremidades em X ou ambas em Y. Grafos bipartidos são caracterizados por uma propriedade estrutural relacionada aos seus ciclos.

**Teorema 2.9.1** (Caracterização de Grafos Bipartidos). *Um grafo é bipartido se, e somente se, não possui ciclos de comprimento ímpar (FEOFILOFF, 2009; BONDY; MURTY, 2008; WEST, 2001).*

Outra classe de grafos essencial para a Teoria dos Grafos é definida pela sua ausência de ciclos:

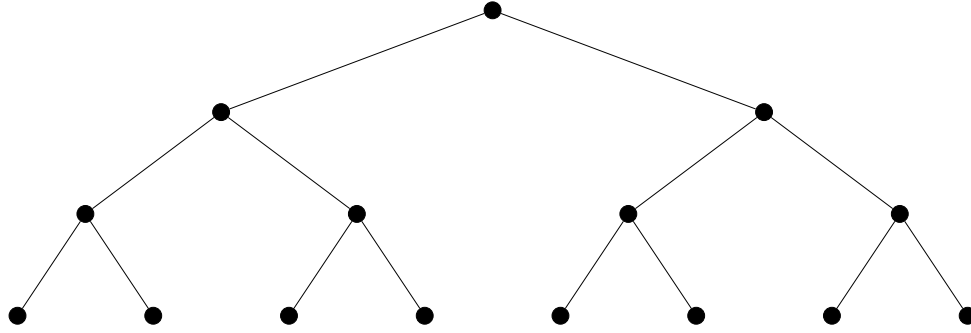
**Definição 2.9.3** (Floresta, Árvore). *Um grafo que não contém ciclos é chamado de **acíclico**. Um grafo acíclico é conhecido como uma **floresta**. Um grafo acíclico conexo, é chamado de **árvore**. Uma árvore com  $m$  vértices é denotada por  $T_m$  (FEOFILOFF, 2009; BONDY; MURTY, 2008; WEST, 2001).*

Note que, como consequência da definição de floresta, cada uma de suas componentes é uma árvore. A Figura 6 mostra a representação de uma árvore.

Além dos grafos completos, bipartidos, florestas e árvores, outras famílias de grafos servem como blocos de construção e exemplos fundamentais em toda a teoria.

**Definição 2.9.4** (Grafo Caminho e Grafo Caminho Direcionado). *O **grafo caminho** de tamanho  $k$ , denotado por  $P_k = (V, E)$ , é o grafo com conjunto de vértices  $V(P_k) = \{0, 1, \dots, k\}$  e conjunto de arestas  $E(P_k) = \{i(i+1) \mid 0 \leq i \leq k-1\}$ . O **grafo caminho direcionado**, denotado por*

Figura 6 – Exemplo de uma árvore de altura 3.

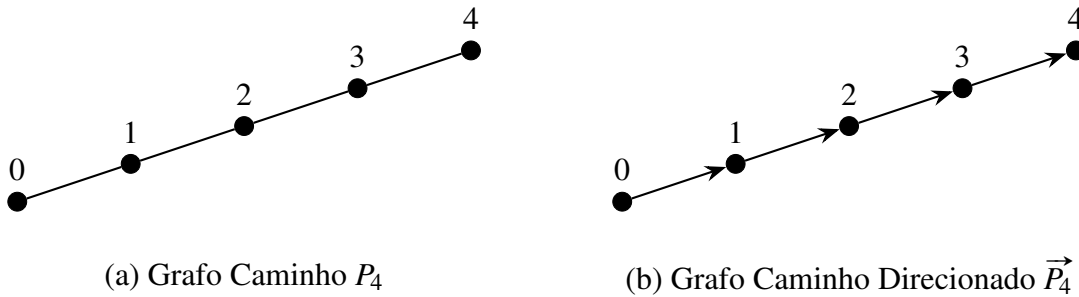


Fonte: elaborado pelo autor (2025).

$\vec{P}_k = (V, A)$ , é definido de forma análoga, com o mesmo conjunto de vértices e o conjunto de arcos  $A = \{\overrightarrow{i(i+1)} \mid 0 \leq i \leq k-1\}$  (HELL; NEŠETRĚL, 2008).

Na Figura 7 estão os diagramas do grafo caminho  $P_4$  e do digrafo caminho direcionado  $\vec{P}_4$ .

Figura 7 – Exemplos de um grafo caminho e sua versão direcionada.



(a) Grafo Caminho  $P_4$

(b) Grafo Caminho Direcionado  $\vec{P}_4$

Fonte: elaborado pelo autor (2025).

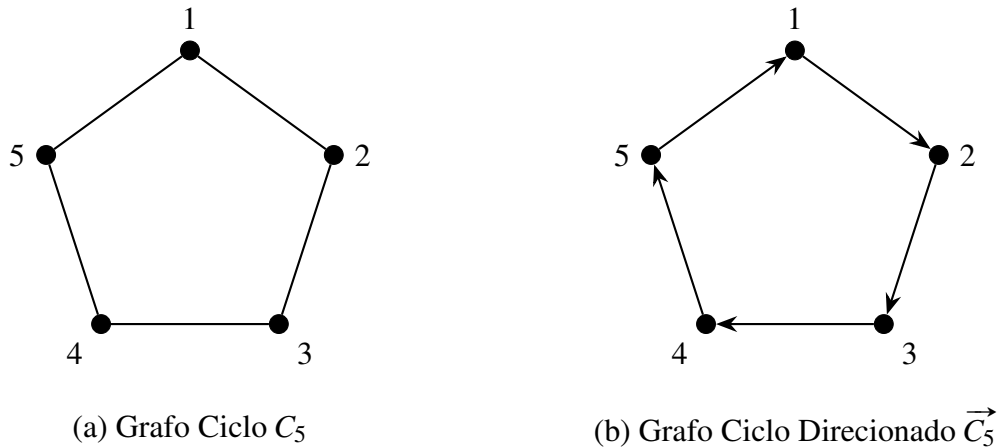
É importante ressaltar que o grafo  $P_k$  é caracterizado pelo seu tamanho, e não pela sua ordem (HELL; NEŠETRĚL, 2008), ou seja, seu tamanho é  $m = k$  e sua ordem é  $n = k + 1$ . Essa escolha foi feita levando em consideração os resultados que serão demonstrados no próximo capítulo.

De forma análoga, podemos definir as variações fechadas de ambos esses grafos:

**Definição 2.9.5** (Grafo Ciclo e Grafo Ciclo Direcionado). *O grafo ciclo de tamanho  $k$ , denotado por  $C_k = (V, E)$ , é o grafo com conjunto de vértices  $V(C_k) = \{1, \dots, k\}$  e conjunto de arestas  $E(P_k) = \{12, 23, \dots, (k-1)k, k1\}$ . O grafo ciclo direcionado, denotado por  $\vec{C}_k = (V, A)$ , é definido de forma análoga, com o mesmo conjunto de vértices e o conjunto de arcos  $A = \{\vec{12}, \vec{23}, \dots, \overrightarrow{(k-1)k}, \vec{k1}\}$  (HELL; NEŠETRĚL, 2008).*

Na Figura 8 estão representados o grafo ciclo  $C_5$  e o digrafo ciclo direcionado  $\vec{C}_5$ .

Figura 8 – Exemplos de um grafo ciclo e sua versão direcionada.



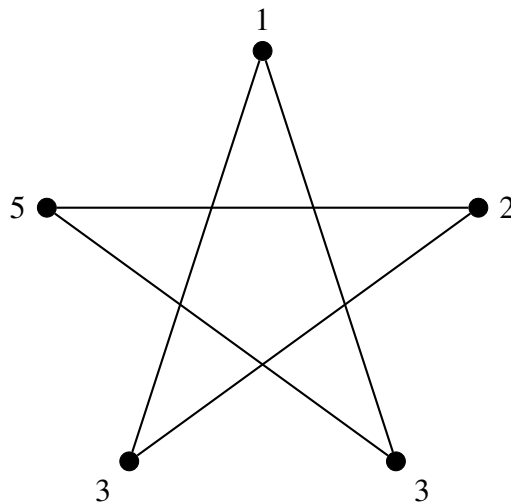
Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Além dessas classes clássicas, o estudo de homomorfismos explora variações do grafo completo, bem como suas respectivas variações do problema de coloração.

**Definição 2.9.6** (Grafo Racional Completo). *Sejam  $p$  e  $q$  inteiros com  $p \geq 2q > 0$ . O Grafo Racional Completo, denotado por  $K_{p/q}$ , tem como conjunto de vértices  $V = \{1, 2, \dots, p\}$  e como conjunto de arestas  $E = \{ij \mid q \leq |i - j| \leq p - q\}$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008).*

Essa classe de grafos generaliza tanto os grafos completos (onde  $K_p \cong K_{p/1}$ ) quanto os ciclos ímpares (onde  $C_{2k+1} \cong K_{(2k+1)/k}$ ). Eles serão o objeto central na discussão sobre coloração circular no Capítulo 4. Na Figura 9 está representado o grafo racional completo  $K_{5/2}$ , que é isomorfo a  $C_5$ .

Figura 9 – O Grafo Racional Completo  $K_{5/2}$ .



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

É importante citar que Hell e Nešetřil (2008) definem o conjunto de vértices dos

grafos ciclo, ciclo direcionado e racional completo com  $k$  vértices iniciando no vértice 0 e terminando no vértice  $k - 1$ , porém, para facilitar a intuição e a visualização de tais grafos, as definições desta monografia definem o conjunto de vértices iniciando no vértice 1 e terminando no vértice  $k$ .

**Definição 2.9.7** (Grafo de Kneser). *Sejam  $n$  e  $k$  inteiros com  $n \geq 2k$ . O Grafo de Kneser, denotado por  $K(n, k)$ , é um grafo cujos vértices correspondem aos subconjuntos de  $k$  elementos de um conjunto de  $n$  elementos (usualmente  $\{1, 2, \dots, n\}$ ). Dois vértices em  $K(n, k)$  são adjacentes se, e somente se, os subconjuntos correspondentes são disjuntos (HELL; NEŠETŘIL, 2008).*

Como um exemplo notável, o Grafo de Petersen, apresentado na Figura 1, é isomorfo ao Grafo de Kneser  $K(5, 2)$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008).

### 2.9.1 Classes de Digrafos Especiais

Assim como no caso não direcionado, existem classes de digrafos com propriedades estruturais notáveis. Duas delas, os digrafos acíclicos e os torneios transitivos, são particularmente importantes no estudo de homomorfismos.

**Definição 2.9.8** (Digrafo Acíclico). *Um **digrafo acíclico** (ou Digrafo Acíclico (Directed Acyclic Graph) (DAG), do inglês Directed Acyclic Graph) é um digrafo que não contém ciclos direcionados (FEOFILOFF, 2009; WEST, 2001).*

É importante ressaltar que não existe nenhuma restrição quanto a ciclos orientados, apenas quanto a ciclos direcionados. Digrafos acíclicos são fundamentais em computação para modelar tarefas com pré-requisitos, pois admitem uma ordenação linear de seus vértices.

**Definição 2.9.9** (Ordenação Topológica). *Uma **ordenação topológica** de um digrafo acíclico  $D = (V, A)$  é uma ordenação linear de todos os seus vértices tal que, para todo arco  $(u, v) \in A$ , o vértice  $u$  aparece antes do vértice  $v$  na ordenação (FEOFILOFF, 2009; WEST, 2001).*

Hell e Nešetřil (2008) definem uma ordenação topológica sob a ótica do homomorfismo, como veremos no próximo capítulo. Outra classe importante de digrafos é obtida através da orientação de um grafo completo.

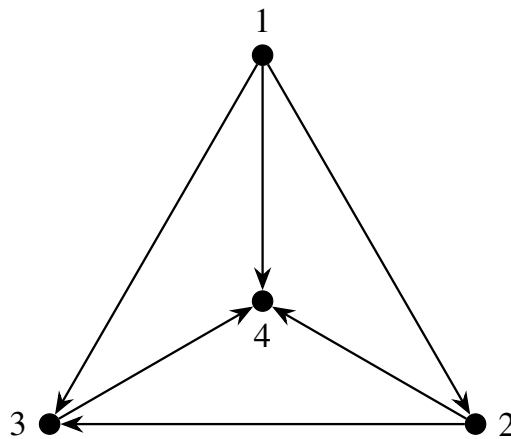
**Definição 2.9.10** (Torneio e Torneio Transitivo). *Um **torneio** é um digrafo obtido ao atribuir uma orientação para cada aresta de um grafo completo, ou seja, a aresta  $uv$  é substituída pelo*

arco  $\vec{uv}$  ou pelo arco  $\vec{vu}$  (WEST, 2001; BONDY; MURTY, 2008). Um caso particular de torneio é quando o digrafo obtido é acíclico.

Um **torneio transitivo** com  $n$  vértices, denotado por  $\vec{T}_n = (V, A)$ , é um torneio acíclico com conjunto de vértices  $V(\vec{T}_n) = \{1, 2, \dots, n\}$  e conjunto de arcos  $A(\vec{T}_n) = \{\vec{ij} \mid i, j \in V, i < j\}$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008).

A Figura 10 ilustra o torneio transitivo  $\vec{T}_4$ , com 4 vértices e 6 arestas.

Figura 10 – O torneio transitivo  $\vec{T}_4$ .



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

## 2.10 Complexidade Computacional

Segundo Papadimitriou (1994, p. v, tradução do autor), “Complexidade computacional é a área da ciência da computação que contempla os motivos pelos quais alguns problemas são tão difíceis de serem resolvidos por computadores”. Vários dos fatos que serão apresentados no próximo capítulo geram problemas computacionais bastante interessantes, e boa parte das citações apresenta resultados para alguns desses problemas. Para entender tais citações, é importante conhecer as classes de complexidade.

Para facilitar o entendimento, serão priorizadas definições intuitivas e algorítmicas (como na abordagem de Cormen *et al.* (2022)), recorrendo ao formalismo das Máquinas de Turing apenas quando necessário para definir classes mais específicas (como na abordagem de Papadimitriou (1994)).

Vamos começar classificando um tipo de problema clássico: os **Problemas de Decisão** são os problemas que esperam como resposta “sim” ou “não” (CORMEN *et al.*, 2022). “Um grafo  $G$  é bipartido?”, “Um grafo  $H$  é 3-colorível?” e “Um digrafo  $D$  é acíclico?” são

exemplos desse tipo de problema. A partir daí, conseguimos classificar esses problemas pelo “quão difíceis” eles são de resolver.

**Definição 2.10.1** (*Polynomial time (P)*). A classe de **Tempo Polinomial** (P) é a classe de todos os problemas que podem ser resolvidos por um algoritmo determinístico em tempo polinomial em relação ao tamanho da entrada ( $O(n^k)$ ) (CORMEN et al., 2022).

Um fato interessante é que vários problemas podem ser resolvidos utilizando a solução de outro. Para formalizar isso, precisamos definir o conceito de redução.

**Definição 2.10.2** (*Redução Polinomial*). Sejam  $A$  e  $B$  problemas de decisão. Dizemos que  $A$  é **reduzível** a  $B$  em tempo polinomial, denotado por  $A \leq_p B$ , se conseguimos transformar qualquer instância de  $A$  em uma instância equivalente de  $B$  em tempo polinomial (CORMEN et al., 2022).

Isso significa que, se  $A \leq_p B$ , existe uma função das instâncias de  $A$  nas instâncias de  $B$  tal que a resposta para uma instância de  $A$  é “sim” se, e somente se, a resposta para sua imagem em  $B$  é “sim”. Outros tipos de redução vão ser utilizados a seguir, mas, intuitivamente, eles funcionam da maneira análoga.

Os problemas “mais difíceis” em P são chamados de P-Completo.

*-Completo]* Dizemos que um problema é **P-Completo** se ele pertence à classe P e se todo problema em P pode ser **reduzido** a ele utilizando uma **redução em espaço logarítmico** (PAPADIMITRIOU, 1994).

Além da classe polinomial, existem problemas para os quais as soluções são fáceis de verificar.

**Definição 2.10.4** (*Nondeterministic Polynomial time (NP)*). A classe **Polinomial Não-Determinístico** (NP, de *Nondeterministic Polynomial*) contém os problemas para os quais uma solução proposta (um certificado) pode ser verificada por um algoritmo determinístico em tempo polinomial (CORMEN et al., 2022).

Papadimitriou (1994) define formalmente a classe NP como a classe dos problemas de decisão que podem ser resolvidos por uma Máquina de Turing Não-Determinística. Como toda máquina de Turing determinística possui uma versão não determinística equivalente, podemos dizer que  $P \subseteq NP$ .

Uma variação direta dessa classe diz respeito aos problemas em que a resposta “não” é fácil de verificar.

**Definição 2.10.5** (coNP). *A classe coNP contém os problemas cujos complementos estão em NP. Ou seja, para esses problemas, existe um contraexemplo fácil de verificar para cada resposta negativa (PAPADIMITRIOU, 1994).*

A grande questão ainda não respondida na Ciência da Computação é se  $P = NP$ . Para discutirmos mais sobre isso, vamos definir as classes de maior dificuldade.

**Definição 2.10.6** (NP-Difícil, NP-Completo). *Um problema é NP-Difícil se todo problema em NP pode ser reduzido a ele em tempo polinomial.*

*Um problema é NP-Completo se:*

1. *pertence à classe NP;*
2. *é NP-Difícil (CORMEN et al., 2022).*

Intuitivamente, os problemas NP-Completos são os “mais difíceis” na classe NP. Não se conhecem algoritmos polinomiais para os problemas NP-Completos. Se algum algoritmo do tipo for encontrado, todos os outros problemas em NP também poderiam ser resolvidos em tempo polinomial, provando que  $P = NP$ .

Por fim, como alguns problemas deste trabalho envolvem a contagem de subestruturas em grafos, define-se a classe relacionada a problemas de contagem.

**Definição 2.10.7** (#P, #P-Completo). *A classe #P (lê-se Sharp-P) consiste nas funções que contam o número de caminhos de aceitação de uma Máquina de Turing Não-Determinística polinomial, ou seja, é a classe dos problemas de contagem relacionados aos problemas em NP (PAPADIMITRIOU, 1994).*

*Um problema é #P-Completo se pertence a #P e se todo problema em #P pode ser reduzido a ele por uma **redução de Turing em tempo polinomial** (PAPADIMITRIOU, 1994).*

### 3 HOMOMORFISMO DE GRAFOS COMO GENERALIZAÇÃO CONCEITUAL

Após a apresentação dos fundamentos de Teoria dos Grafos no capítulo anterior, este capítulo introduz o principal objeto de estudos desta monografia: o **Homomorfismo**. Como na obra de Hell e Nešetřil (2008), o conceito será apresentado em sua forma mais geral, como um mapeamento de vértices entre digrafos. Esta perspectiva permite que o homomorfismo entre grafos seja interpretado como um caso particular.

O objetivo deste capítulo é demonstrar como esta definição unificadora permite que conceitos clássicos de Teoria dos Grafos, como isomorfismo e coloração, sejam reinterpretados sob uma única ótica, o que confere maior coesão estrutural à teoria.

#### 3.1 Definição Formal em Digrafos

O conceito mais fundamental de homomorfismo é definido sobre digrafos. Um homomorfismo, neste contexto, é um mapeamento entre os vértices de dois digrafos que preserva a relação de adjacência (HELL; NEŠETŘIL, 2008).

**Definição 3.1.1** (Homomorfismo em Digrafos). *Sejam  $D$  e  $F$  digrafos. Um **homomorfismo** de  $D$  em  $F$ , denotado como  $f : D \rightarrow F$ , é uma função  $f : V(D) \rightarrow V(F)$  tal que, se  $\vec{uv}$  é um arco de  $D$ , então  $\overrightarrow{f(u)f(v)}$  é um arco de  $F$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008), ou seja:*

$$\vec{uv} \in A(D) \Rightarrow \overrightarrow{f(u)f(v)} \in A(F). \quad (3.1)$$

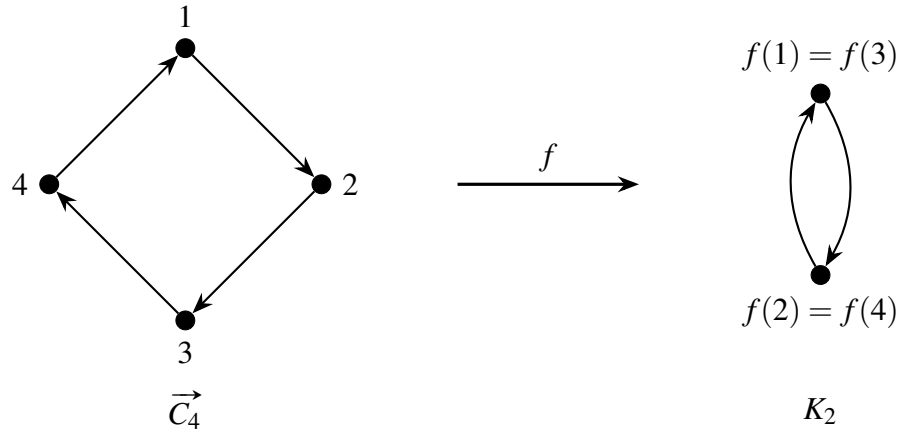
Em outras palavras, um homomorfismo de digrafos deve preservar não apenas a adjacência, mas também a orientação dos arcos.

Se um homomorfismo de  $f : D \rightarrow F$  existe, dizemos que  $D$  é homomórfico a  $F$ , e usamos a notação  $D \rightarrow F$ . A não existência de tal homomorfismo é denotada por  $D \not\rightarrow F$ . Dizemos que este homomorfismo parte de  $D$  e chega em  $F$ , que  $D$  é o digrafo de partida de  $f$  e que  $F$  é seu digrafo de destino. O mesmo também pode ser denotado como uma  $F$ -coloração de  $D$ , que será definido mais à frente neste capítulo. O conjunto de todos os homomorfismos de  $D$  em  $F$  é denotado por  $HOM(D, F)$  e a cardinalidade deste conjunto é denotada por  $hom(D, F) = |HOM(D, F)|$ . Além disso, homomorfismos são transitivos, ou seja, se  $D \rightarrow F$  e  $F \rightarrow J$ , então  $D \rightarrow J$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008).

A Figura 11 exemplifica um homomorfismo de  $\vec{C}_4$  para  $K_2$ . É importante notar que o grafo completo  $K_2$ , inicialmente definido como um grafo não direcionado, está sendo

representado como um digrafo irreflexivo simétrico, como visto na Seção 2.7 do capítulo anterior.

Figura 11 – Exemplo de homomorfismo  $f : \vec{C}_4 \rightarrow K_2$ , onde vértices opostos em  $\vec{C}_4$  são mapeados para o mesmo vértice em  $K_2$ .



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

### 3.2 O Grafo como um Caso Particular

A abordagem escolhida de definir homomorfismo em digrafos, e não em grafos, foi feita principalmente por seu poder de generalização. Porém, Hell e Nešetřil (2008) iniciam sua investigação das propriedades dos homomorfismos em grafos por sua simplicidade. De fato, por grafos terem um grau a menos de complexidade em relação aos digrafos (a ausência de orientação), eles são frequentemente objetos de estudo anteriores em Teoria dos Grafos. Felizmente, é perfeitamente possível estender a definição de homomorfismo para grafos.

Conforme estabelecido na Seção 2.7, um grafo pode ser visto como um digrafo simétrico e irreflexivo, onde cada aresta não orientada  $uv$  corresponde a um par de arcos opostos,  $\vec{uv}$  e  $\vec{vu}$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008). Ao aplicarmos a Definição 3.1.1 a este caso, obtemos uma definição equivalente para grafos.

Sejam  $G$  e  $H$  grafos e  $D_G$  e  $D_H$  seus digrafos simétricos irreflexivos correspondentes. Se  $uv \in E(G)$ , então os arcos  $\vec{uv}, \vec{vu} \in A(D_G)$ . Seja  $f : D_G \rightarrow D_H$  um homomorfismo. Logo, pela definição de homomorfismo em digrafos,  $\vec{f(u)f(v)}, \vec{f(v)f(u)} \in A(D_H)$ . Como  $D_H$  também é simétrico, os arcos  $\vec{f(u)f(v)}$  e  $\vec{f(v)f(u)}$  correspondem a uma única aresta  $f(u)f(v) \in E(H)$ .

Isso nos leva a um caso particular na definição de homomorfismo aplicada a grafos:

**Definição 3.2.1** (Homomorfismo em Grafos). *Sejam  $G$  e  $H$  dois grafos. Um **homomorfismo** de  $G$  para  $H$ , ou  $f : G \rightarrow H$ , é uma função  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  tal que, se  $uv \in E(G)$ , então*

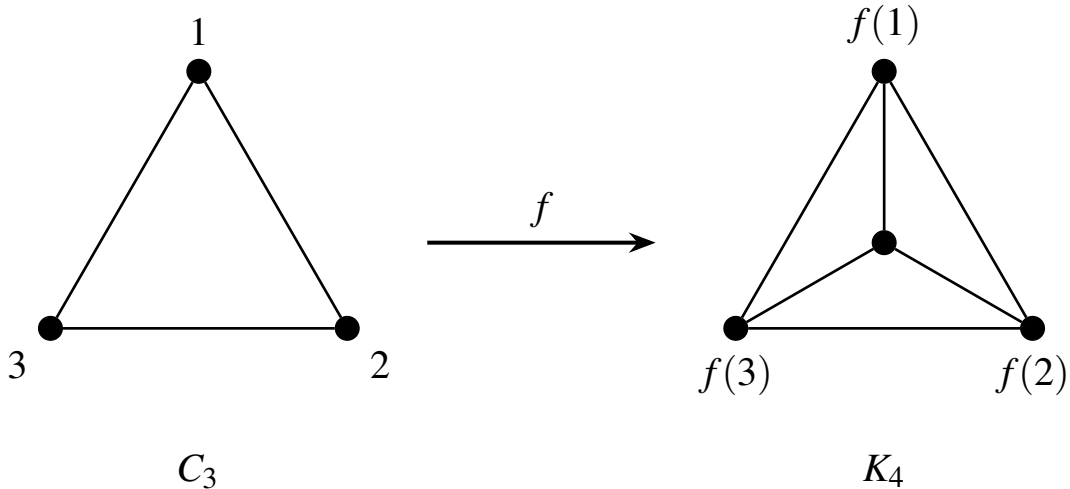
$f(u)f(v) \in E(H)$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008), ou seja:

$$uv \in E(G) \Rightarrow f(u)f(v) \in E(H) \quad (3.2)$$

Esta equivalência é fundamental no estudo de homomorfismos em grafos, pois garante que os resultados e ferramentas desenvolvidos para o caso mais geral da definição também funcionem em seus casos particulares. A partir de então, sempre que o texto citar  $G, H, I$ , considere que o homomorfismo é entre grafos. De forma análoga, sempre que o texto citar  $D, E, J$ , considere que o homomorfismo é entre digrafos. Utilizaremos a definição mais direta de homomorfismos em grafos, mas sempre tendo em mente que se trata de um caso particular da definição mais geral para digrafos.

A Figura 12 representa um homomorfismo  $f : C_3 \rightarrow K_4$ . Ainda neste capítulo, veremos que esse homomorfismo pode ser considerado uma 4-coloração válida para o grafo ciclo  $C_3$ .

Figura 12 – Exemplo de homomorfismo  $f : C_3 \rightarrow K_4$ .



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

### 3.3 Classificação de Homomorfismos

Após a definição formal de homomorfismo em digrafos ser apresentada e, em seguida, a definição de homomorfismo em grafos, seu principal caso particular, é importante notar que um homomorfismo  $f : D \rightarrow F$  é, fundamentalmente, uma função com  $V(D)$  como domínio e  $V(F)$  como contradomínio. E, por ser função, pode ser classificado segundo as propriedades clássicas das funções: injetividade, sobrejetividade e bijetividade.

Para isso, é preciso lembrar esses conceitos: uma função é **injetiva** se elementos distintos no domínio possuem imagens distintas no contradomínio, é **sobrejetiva** se a imagem é equivalente ao contradomínio e é **bijetiva** se é injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo.

Além disso, uma consequência direta da definição de homomorfismo, junto com a definição de digrafo apresentada (que não permite arcos múltiplos), é a de que, se  $f : D \rightarrow F$  é um homomorfismo e  $u, v \in V(D)$  são adjacentes de  $u$  para  $v$ , então o arco  $\vec{uv} \in A(D)$  é único e o arco  $\overrightarrow{f(u)f(v)} \in A(F)$  também.

Isso implica que esse homomorfismo naturalmente define um mapeamento  $f^\#$  de  $A(D)$  para  $A(F)$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008), de forma que:

$$f^\# : A(D) \rightarrow A(F) \mid f^\#(\vec{uv}) = \overrightarrow{f(u)f(v)} \quad (3.3)$$

Isso implica na definição de um conceito importante: a estrutura que um homomorfismo gera no grafo de destino.

**Definição 3.3.1** (Imagem Homomórfica). *Seja  $f : D \rightarrow F$  um homomorfismo. A **imagem homomórfica** de  $D$  sob  $f$ , denotado por  $f(D)$ , é o digrafo com vértices  $f(v), \forall v \in V(D)$  e arcos  $f(u)f(v), \forall uv \in A(D)$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008).*

De forma mais intuitiva, a imagem homomórfica de  $D$  é o subgrafo de  $F$  que é "coberto" pelo homomorfismo.

Após essas observações, podemos classificar os homomorfismos de acordo com a natureza das funções  $f$  e  $f^\#$ :

**Definição 3.3.2** (Classificação de Homomorfismos). *Seja  $f : D \rightarrow F$  um homomorfismo e  $f^\#$  sua função induzida nos arcos. Um homomorfismo é **vértice-injetivo**, **vértice-sobrejetivo** ou **vértice-bijetivo** se a função  $f$  é injetiva, sobrejetiva ou bijetiva, respectivamente. Analogamente, um homomorfismo é **arco-injetivo**, **arco-sobrejetivo** ou **arco-bijetivo** se a função  $f^\#$  é injetiva, sobrejetiva ou bijetiva, respectivamente. Um homomorfismo é dito **injetivo** se ele é vértice-injetivo e arco-injetivo. Análogo para homomorfismo **sobrejetivo** ou **bijetivo** (HELL; NEŠETŘIL, 2008).*

Porém, algumas sutilezas nessa definição devem ser observadas:

**Proposição 3.3.1.** *Seja  $f : D \rightarrow F$  um homomorfismo entre digrafos irreflexivos. Então:*

1. Se  $f$  é vértice-injetivo, então  $f$  é também arco-injetivo.
2. Se  $f$  é arco-sobrejetivo e  $F$  não possui vértices isolados, então  $f$  é também vértice-sobrejetivo (HELL; NEŠETŘIL, 2008).

*Demonstração.* (i) Suponha que  $f$  seja vértice-injetivo. Para provar que  $f$  também é arco-injetivo, precisamos provar que a função induzida  $f^\#$  também é injetiva. Sejam os arcos distintos  $\vec{uv}, \vec{u'v'} \in A(D)$ . Suponha, por absurdo, que  $f^\#(\vec{uv}) = f^\#(\vec{u'v'})$ . Isso significa, pela definição de  $f^\#$ , que  $(f(u), f(v)) = (f(u'), f(v'))$ . Pela igualdade entre pares ordenados, isso implica que  $f(u) = f(u')$  e que  $f(v) = f(v')$ , o que indica que  $\vec{uv} = \vec{u'v'}$ . Absurdo! Logo,  $f$  é arco-injetivo.

(ii) Agora, seja  $f$  um homomorfismo arco-sobrejetivo e  $F$  um digrafo livre de vértices isolados. Seja o vértice  $h \in V(F)$ . Como  $F$  não possui vértices isolados, então existe pelo menos um arco partindo ou chegando em  $h$ . Seja o arco  $\vec{ih}$  chegando em  $h$ . Como  $f^\#$  é uma função sobrejetiva, então este arco é imagem de um arco  $\vec{uv} \in E(D)$ . Logo, pela definição da função  $f^\#$ ,  $h = f(v)$ . O raciocínio é análogo para o caso de haver um arco  $\vec{hj}$  partindo de  $h$ . Isso implica que  $f$  também é vértice-sobrejetivo. ■

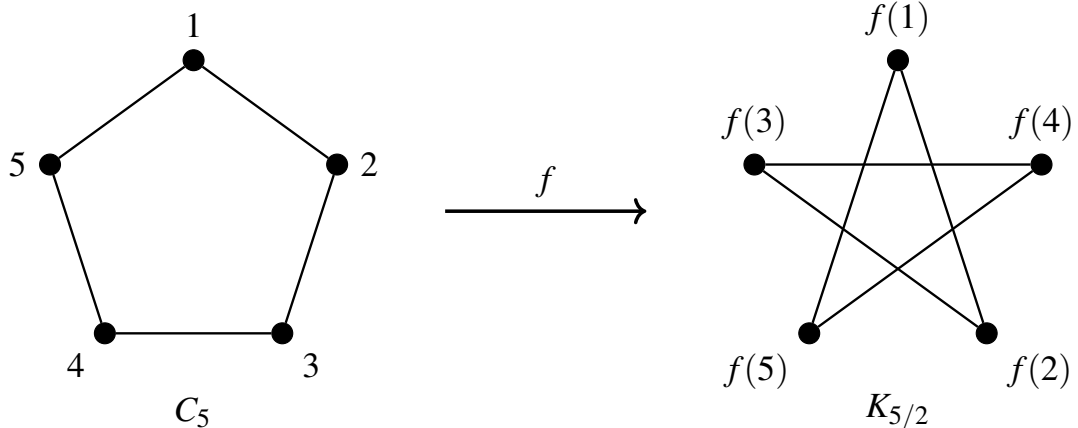
Isso significa que, para um homomorfismo ser injetivo, basta que ele seja vértice-injetivo. Além disso, para um homomorfismo ser sobrejetivo, basta que ele seja arco-sobrejetivo e que  $F$  não possua vértices isolados. Note, além disso, que um homomorfismo  $f : D \rightarrow F$  é sobrejetivo quando a imagem homomorfica de  $f$  é o próprio grafo  $F$ , ou seja,  $f(D) = F$ . Denotamos os conjuntos  $INJ(D, F)$ ,  $SUR(D, F)$  e  $BIJ(D, F)$ , e suas respectivas cardinalidades  $inj(D, F)$ ,  $sur(D, F)$  e  $bij(D, F)$ , como o conjunto de todos os homomorfismos injetivos, sobrejetivos e bijetivos, respectivamente.

A Figura 11 representa um homomorfismo vértice-sobrejetivo, a Figura 12 representa um homomorfismo vértice-injetivo, ou apenas injetivo, e a Figura 13 representa um homomorfismo vértice-bijetivo, ou apenas bijetivo. Mais adiante neste capítulo, iremos explorar uma característica importante dos homomorfismos bijetivos como uma generalização de um importante conceito em Teoria dos Grafos.

A introdução dos conjuntos  $HOM(G, H)$  e da sua cardinalidade,  $hom(G, H)$ , abre uma área de pesquisa inteira dedicada não apenas à *existência*, mas à *contagem* do número de homomorfismos.

A complexidade computacional de contar homomorfismos é, em grande parte das vezes, intratável, ou seja, não se conhece nenhum algoritmo que resolva o problema em tempo polinomial. O trabalho de Dyer e Greenhill (2000), por exemplo, estabeleceu uma dicotomia de

Figura 13 – Exemplo de um homomorfismo bijetivo  $f : C_5 \rightarrow K_{5/2}$



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

complexidade para o problema de contagem exata em grafos, mostrando que ele é quase sempre  $\#P$ -completo, a não ser que o grafo de destino possua conjunto de arestas vazio, seja um grafo completo com laço em todos os vértices ou um grafo bipartido completo irreflexivo. Nesses casos, o problema é  $P$ -completo.

Artigos como os de Focke *et al.* (2019) e Curticapean *et al.* (2019) analisam a complexidade de contar apenas os homomorfismos sobrejetivos e aresta-injetivos, respectivamente, revelando que essas restrições alteram fundamentalmente a natureza computacional do problema. Hell e Nešetřil (2008) também investigam a contagem de homomorfismos injetivos e sua aplicabilidade na Conjectura da Reconstrução de Arestas.

Já Amini *et al.* (2012) investigaram a utilização da contagem de homomorfismos na contagem de subgrafos em um grafo. Essa abordagem resultou em novos algoritmos e resultados no cálculo do polinômio cromático, na contagem de ciclos hamiltonianos, em ligações perfeitas em grafos bipartidos e em algoritmos de codificação por cores.

A relevância deste campo de estudo foi amplificada por suas aplicações práticas em diversos campos do conhecimento, alguns dos quais foram citados na introdução desta monografia. Esses trabalhos demonstram que a contagem de homomorfismos é um conceito central que conecta a teoria estrutural de grafos com complexidade computacional, inteligência artificial, bancos de dados, lógica, física e matemática, justificando sua importância como um campo de pesquisa ativo e frutífero.

### 3.4 Preservação de Estruturas

Agora, vamos iniciar a exploração da consequência mais importante da definição de homomorfismo: a preservação de adjacência. Essa característica fundamental implica que as estruturas de adjacência locais são mantidas entre o grafo de origem e o de destino. A seguir, veremos como essa propriedade se estende para estruturas maiores, como os passeios, que são definidos como uma sequência de vértices adjacentes. Assim como Hell e Nešetřil (2008), iniciaremos essa exploração em grafos, para depois generalizarmos para os digrafos, deixando a intuição sobre esses conceitos mais fluida durante a leitura.

**Proposição 3.4.1.** *O mapeamento  $f : P_k \rightarrow G$  é um homomorfismo de  $P_k$  em  $G$  se, e somente se, a sequência  $(f(0), f(1), \dots, f(k))$  é um passeio em  $G$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008).*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Pela definição de  $P_k$ , temos que, para todo  $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ ,  $i(i+1) \in E(P_k)$ . Logo, como homomorfismo preserva adjacência, para todo  $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ ,  $f(i)f(i+1) \in E(G)$ , o que, por definição, constitui um passeio em  $G$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $f : V(P_k) \rightarrow V(G)$ . Se  $(f(0), f(1), \dots, f(k))$  é um passeio em  $G$ , então os vértices  $f(i)$  e  $f(i+1)$  são adjacentes para todo  $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ . Logo, como a função  $f$  mapeia pares de vértices adjacentes em  $P_k$  para pares de vértices adjacentes em  $G$ ,  $f$  é homomorfismo. ■

Em particular, a Proposição 3.4.1 indica que o homomorfismo  $f : G \rightarrow H$  mapeia caminhos em  $G$  para passeios em  $H$ : sejam  $u, v \in V(G)$  um par de vértices tal que exista um  $u, v$ -caminho de tamanho  $k$ , denotado por  $W$ . Basta tomar o subgrafo induzido pelo caminho  $G[W]$ . Mantendo a mesma função  $f$ , o homomorfismo  $f : G[W] \rightarrow H$  é equivalente a um homomorfismo  $g : P_k \rightarrow H$ .

Porém, é importante notar que um homomorfismo não necessariamente preserva a identidade da estrutura, de forma que um caminho em  $G$  pode ser mapeado para um passeio ou até para um ciclo em  $H$ . A Figura 11 ilustra exatamente este ponto, onde o ciclo  $C_4$  é mapeado para um passeio que percorre as arestas do  $K_2$  duas vezes.

Apesar dessa nuance, a preservação do comprimento dos passeios tem uma implicação direta e importante na relação entre as distâncias nos dois grafos.

**Corolário 3.4.1.** *Seja  $f : G \rightarrow H$  um homomorfismo e sejam os vértices  $u, v \in V(G)$ . A distância  $d_G(u, v)$  entre  $u$  e  $v$  é pelo menos tão grande quanto a a distância entre suas imagens*

$d_H(f(u), f(v))$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008), ou seja:

$$d_H(f(u), f(v)) \leq d_G(u, v). \quad (3.4)$$

*Demonstração.* Se  $(u = v_0, v_1, \dots, v_k = v)$  é um caminho entre  $u$  e  $v$ , pela Proposição 3.4.1,  $(f(u) = f(v_0), f(v_1), \dots, f(v_k) = f(v))$  é um passeio em  $H$ . Logo, como todo passeio possui um caminho de tamanho menor ou igual (bastando remover os ciclos causados pela repetição de vértices), temos que  $d_G(u, v) = k$  e que  $d_H(f(u), f(v)) \leq k$ . Logo,  $d_H(f(u), f(v)) \leq d_G(u, v)$ . ■

A partir desses resultados, apresentando uma percepção que não é abordada por Hell e Nešetřil, podemos generalizar os conceitos de Passeio e Caminho sob a lente dos homomorfismos:

Seja  $G = (V, E)$  um grafo e  $u, v \in V(G)$  vértices desse grafo.

1. Um  $u, v$ -passeio de tamanho  $k$  pode ser visto como um homomorfismo  $f : P_k \rightarrow G$ , onde  $u = f(0)$  e  $v = f(k)$ .
2. Um  $u, v$ -caminho de tamanho  $k$  pode ser visto como um homomorfismo injetivo  $f : P_k \rightarrow G$ , onde  $u = f(0)$  e  $v = f(k)$ . A condição de injetividade da função  $f$  garante a não repetição de vértices, que caracteriza o caminho.

Quando tratamos de passeios fechados e ciclos, um resultado similar aparece:

**Proposição 3.4.2.** *O mapeamento  $f : C_k \rightarrow G$  é um homomorfismo de  $C_k$  em  $G$  se, e somente se, a sequência  $(f(0), f(1), \dots, f(k))$  é um passeio fechado em  $G$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008).*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Pela definição de  $C_k$ , temos que, para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ ,  $i(i+1) \in E(C_k)$ , além de  $k1 \in E(C_k)$ . Logo, como homomorfismo preserva adjacência, para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ ,  $f(i)f(i+1) \in E(G)$ , além de  $f(k)f(1) \in E(G)$ , o que, por definição, constitui um passeio fechado em  $G$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $f : V(C_k) \rightarrow V(G)$ . Se  $(f(1), f(2), \dots, f(k), f(1))$  é um passeio fechado em  $G$ , então os vértices  $f(i)$  e  $f(i+1)$  são adjacentes para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ , além dos vértices  $f(k)$  e  $f(1)$ . Logo, como a função  $f$  mapeia pares de vértices adjacentes em  $C_k$  para pares de vértices adjacentes em  $G$ ,  $f$  é homomorfismo de  $P_k$  em  $G$ . ■

Perceba que a demonstração da Proposição 3.4.2 é análoga à demonstração da Proposição 3.4.1. E, adicionando mais uma percepção que não é abordada por Hell e Nešetřil, podemos generalizar os conceitos de passeio fechado e ciclos sob a lente dos homomorfismos:

Seja  $G = (V, E)$  um grafo. Logo:

1. Um caminho fechado de tamanho  $k$  em  $G$  pode ser visto como um homomorfismo  $f : C_k \rightarrow G$ .
2. Um ciclo de tamanho  $k$  em  $G$  pode ser visto como um homomorfismo injetivo  $f : C_k \rightarrow G$ .  
A condição de injetividade da função  $f$  garante a não repetição de vértices (exceto nas extremidades), o que caracteriza o ciclo.

Note que, quando falamos de ciclos pares, a existência de um homomorfismo é definida pela seguinte proposição:

**Proposição 3.4.3.**  $C_{2k} \rightarrow H$  sempre que  $H$  possui um par de vértices adjacentes, para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Sejam  $u, v \in V(H)$  vértices adjacentes em  $H$ . Logo, a função  $f$  que mapeia os vértices pares de  $C_{2k}$  para o vértice  $u$  e os vértices ímpares de  $C_{2k}$  para o vértice  $v$  é um homomorfismo. ■

Em particular,  $C_{2k} \rightarrow K_2$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Mais a frente neste capítulo veremos que isso é equivalente a um resultado conhecido em Teoria dos Grafos: a de que todo ciclo par é 2-colorível. A Figura 11 é a versão orientada dessa construção. Porém, quando as orientações são retiradas, o resultado permanece.

Quando falamos de ciclos ímpares, um resultado diferente é observado:

**Proposição 3.4.4.**  $C_{2k+1} \rightarrow C_{2l+1}$  se, e somente se,  $k \geq l$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008).

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Em um ciclo ímpar, não existem passeios fechados de tamanho ímpar menores do que seu tamanho. Logo, se  $C_{2k+1} \rightarrow C_{2l+1}$ , então  $k \geq l$ .

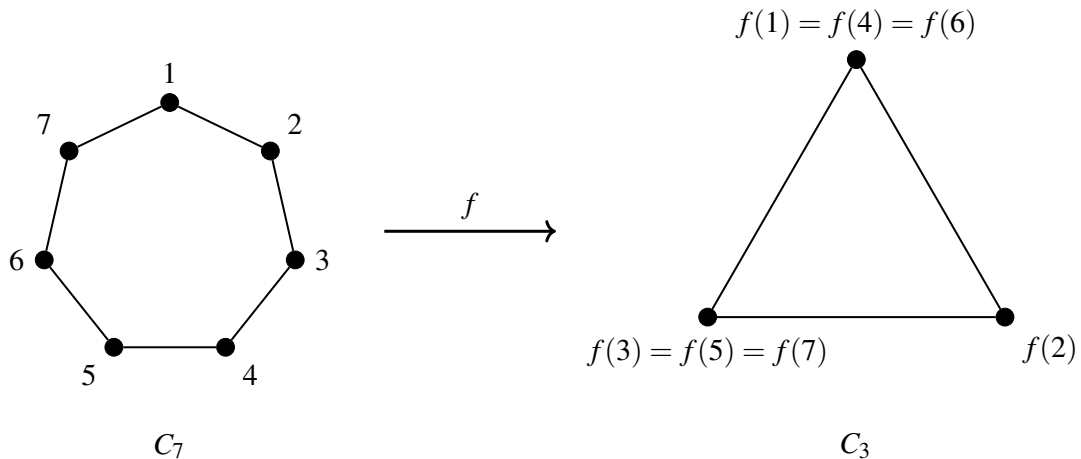
( $\Leftarrow$ ) Se  $k \geq l$ , basta encontrarmos um homomorfismo de  $C_{2k+1}$  em  $C_{2l+1}$ . A função  $f : V(C_{2k+1}) \rightarrow V(C_{2l+1})$  definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 1 \leq x \leq 2l+1 \\ 1, & \text{se } x > 2l+1 \text{ e } x \text{ par} \\ 2l+1, & \text{se } x > 2l+1 \text{ e } x \text{ ímpar} \end{cases} \quad (3.5)$$

é um homomorfismo. ■

A Figura 14 representa um homomorfismo entre ciclos ímpares construído a partir da função definida na demonstração da Proposição 3.4.4.

Figura 14 – Exemplo de um homomorfismo entre ciclos ímpares  $f : C_7 \rightarrow C_3$ .



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

A relação de homomorfismos entre ciclos ímpares é parte de um problema mais amplo e clássico na teoria: caracterizar quais grafos admitem um homomorfismo para um ciclo ímpar  $C_{2k+1}$ . Um resultado fundamental de Gerards (1988) fornece uma caracterização para a classe dos grafos que são homomórficos a seus próprios ciclos ímpares mais curtos: para cada subdivisão ímpar  $G'$  de um grafo  $G$  na família, existe um homomorfismo  $f : G' \rightarrow C'$ , onde  $C'$  é o menor ciclo ímpar de  $G'$ .

A partir das Proposições 3.4.1 e 3.4.2, podemos observar mais dois conceitos fundamentais da Teoria dos Grafos sob a lente dos homomorfismos:

**Proposição 3.4.5.** *Se  $G = (V, E)$  é um grafo e  $m$  seu tamanho, então:*

1. *Uma trilha euleriana de  $G$  é um homomorfismo arco-bijetivo  $f : P_m \rightarrow G$ .*
2. *Um circuito euleriano de  $G$  é um homomorfismo arco-bijetivo  $f : C_m \rightarrow G$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008).*

O estudo de homomorfismos partindo de outras classes de grafos também é objeto de vários estudos. O trabalho de Csikvári e Lin (2014), por exemplo, explorou a existência de homomorfismos entre uma árvore e um grafo qualquer  $T_m \rightarrow G$ . Essa pesquisa resultou em um algoritmo para encontrar a quantidade de homomorfismos  $hom(T_m, G)$ , resultados em problemas extremais no número de homomorfismos em árvores e até uma generalização do problema de Bollobás e Tyomkyn sobre a contagem do número de caminhos em uma árvore. Em um artigo posterior, eles investigam o número de homomorfismos de uma árvore para um caminho  $hom(T_m, P_n)$ , e provam que  $hom(P_m, P_n) \leq hom(T_m, P_n) \leq hom(S_m, P_n)$ , onde  $S_m$  denota o grafo estrela com  $m$  vértices (CSIKVÁRI; LIN, 2015).

Já Sason (2024) explorou a existência de homomorfismos entre grafos bipartidos completos e grafos bipartidos arbitrários, encontrando uma fórmula exata para o número de homomorfismos entre esses grafos bipartidos e definindo limites inferiores para os mesmos.

### 3.4.1 Generalização para Digrafos

Quando os objetos de investigação são os digrafos, todos os resultados vistos até então são análogos para os passeios direcionados  $\vec{P}_k$  e ciclos direcionados  $\vec{C}_k$ . Porém, existe um conceito definido apenas em digrafos que merece um pouco mais de atenção.

**Proposição 3.4.6.** *Seja  $f : D \rightarrow F$  um homomorfismo entre digrafos. Se  $(v_0, v_1, \dots, v_k)$  é um passeio em  $D$ , então  $(f(v_0), f(v_1), \dots, f(v_k))$  é um passeio em  $F$  de mesmo comprimento efetivo.*

A preservação do comprimento efetivo é uma ferramenta poderosa, exclusiva dos digrafos, muito utilizada para provar a existência ou não de certos homomorfismos, além de algumas importantes dicotomias no problema da existência de homomorfismos. Um bom exemplo da utilização do comprimento efetivo é o seguinte: um ciclo direcionado  $\vec{C}_k$  possui um passeio fechado  $(1, 2, \dots, k)$  de comprimento efetivo  $k$ . Logo, se existe um homomorfismo  $f : C_k \rightarrow C_j$ , então o passeio fechado  $(f(1), f(2), \dots, f(k))$  deve possuir o mesmo comprimento efetivo. Isso só é possível quando  $k$  é múltiplo de  $j$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008).

Aprofundando ainda mais no tema, Hell *et al.* (1993) forneceram caracterizações para a existência de homomorfismos para a família  $\mathcal{B}$ -cycle, a família dos ciclos orientados  $C = (c_0, c_1, \dots, c_n, c_{n+1}, \dots, c_m, c_0)$ , com  $n \geq 2$ , onde  $(c_0, c_1, \dots, c_n)$  é um caminho direcionado de  $c_0$  para  $c_n$  de comprimento  $n$  e  $(c_0, c_m, c_{m-1}, \dots, c_{n+1}, c_n)$  é um caminho orientado de comprimento efetivo  $n - 1$  que não possui intervalo de comprimento efetivo  $n$ . Seu trabalho demonstrou que a complexidade do problema da existência do homomorfismo de um digrafo  $D$  para um  $\mathcal{B}$ -cycle está na interseção entre NP e co-NP.

Além disso, Guzmán-Pro e Hernández-Cruz (2021) acharam em sua pesquisa que, para cada ciclo  $C$ , existe uma dualidade de existência  $(P', C')$  entre uma orientação  $C'$  desse ciclo e um caminho orientado  $P'$ . Com isso, eles encontram uma condição de existência para o homomorfismo entre um grafo e um ciclo.

### 3.5 O Caso Trivial: Homomorfismos para Grafos com Laços

Nas seções anteriores investigamos como a existência de um homomorfismo entre grafos  $f : G \rightarrow H$  impõe conservações estruturais entre os grafos de origem e destino. Além disso, vimos como esses conceitos podem ser generalizados no caso de um homomorfismo entre digrafos  $f : D \rightarrow F$  e como vários conceitos primitivos de Teoria dos Grafos podem ser redefinidos tendo o conceito de homomorfismo como base. Porém, nossa discussão concentrou-se em grafos e digrafos. A pergunta que fica, e que não é abordada por Hell e Nešetřil com profundidade, é: como os homomorfismos se comportam em grafos com laços?

Primeiramente, vamos analisar a questão sob a ótica da coloração clássica. A regra fundamental é a de que um grafo é  $k$ -colorível, ou seja, ele possui uma  $k$ -coloração própria, se vértices adjacentes possuem cores distintas. Logo, seja  $G$  um grafo com laço e seja  $v \in V(G)$  um vértice de  $G$  que possui um laço. Logo,  $v$  é adjacente de si mesmo. Nesse sentido, pela definição clássica de coloração própria, o vértice  $v$  não poderia ter a mesma cor que ele mesmo. Nesse sentido, dizemos que grafos com laço são não-coloríveis (WEST, 2001).

Quando traduzimos isso para a linguagem de homomorfismos, a existência de um laço em  $H$  torna a questão da existência de um homomorfismo  $f : G \rightarrow H$  trivial.

É importante perceber que, se  $f : G \rightarrow H$  é um homomorfismo e  $G$  é um grafo com um laço  $vv$  no vértice  $v \in V(G)$ , pela propriedade de preservação de adjacência inerente aos homomorfismos, é necessário que  $f(v)f(v)$  também seja um laço no grafo  $H$ . A partir daí, podemos formalizar a seguinte proposição:

**Proposição 3.5.1.** *Se um grafo  $H$  possui ao menos um vértice com um laço, então para qualquer grafo  $G$ , existe um homomorfismo  $f : G \rightarrow H$ .*

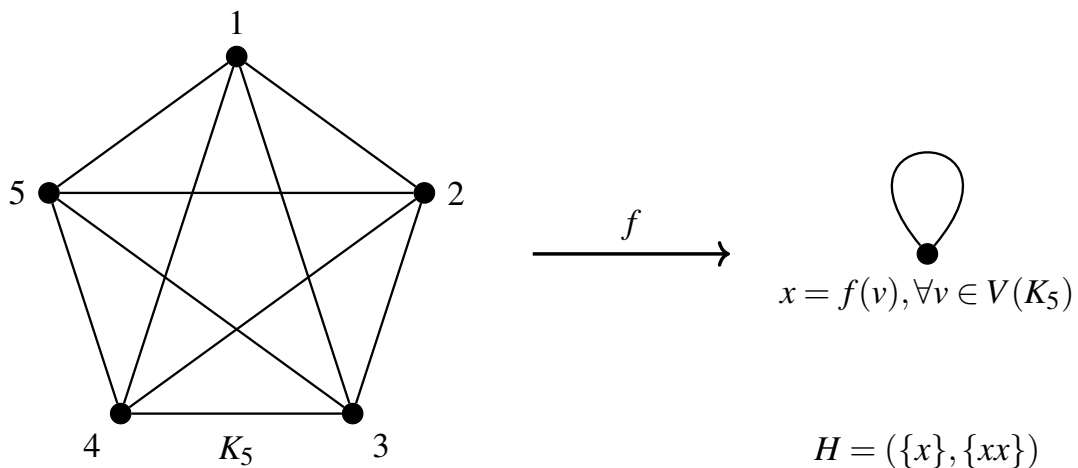
*Demonstração.* Para provar tal proposição, basta construirmos um homomorfismo genérico para qualquer que seja o grafo de partida  $G$ . Seja  $x \in V(H)$  um vértice de  $H$  que possui um laço, ou seja,  $xx \in E(H)$ . Então, a função constante  $f : V(G) \rightarrow V(H)$ , definida por  $f(v) = x$ , para todo  $v \in V(G)$  é um homomorfismo. Basta perceber que cada par de vértices adjacentes  $u, v \in V(G)$  é mapeado para os vértices  $f(u) = f(v) = x \in V(H)$ . Como  $x$  possui um laço, esse homomorfismo preserva a adjacência. ■

A existência garantida desse homomorfismo trivial significa que a pergunta "Existe um homomorfismo de  $G$  para  $H$ ?" tem sempre a resposta "sim" se  $H$  possui um laço. Consequentemente, a existência de tal homomorfismo não nos fornece nenhuma informação sobre a

estrutura do grafo  $G$ . É por essa razão que o estudo de homomorfismos se torna interessante e desafiador apenas quando o grafo de destino  $H$  é irreflexivo, ou seja, não possui laços.

A Figura 15 representa um homomorfismo trivial do grafo completo  $K_5$  para o grafo  $H = (\{x\}, \{xx\})$ . Note que, nesse caso, todas as estruturas do grafo de origem se perdem no grafo de destino, sobrando apenas um vértice com laço.

Figura 15 – Ilustração do homomorfismo trivial (constante) de um grafo complexo ( $K_5$ ) para um grafo  $H$  com um laço.



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

### 3.6 Isomorfismo como um Homomorfismo Bijetor

Na Seção 2.3, definimos a relação de equivalência entre grafos, que também pode ser expandida para digrafos. Dois digrafos  $D$  e  $F$  são isomorfos quando existe uma função  $f : V(D) \rightarrow V(F)$  tal que  $\vec{uv} \in A(D) \iff \vec{f(u)f(v)} \in A(F)$ .

Perceba que, enquanto um homomorfismo descreve a preservação de estruturas em apenas uma direção, o isomorfismo descreve em ambas as direções, preservando tanto as adjacências quanto as não adjacências. A única diferença entre as definições de homomorfismo e isomorfismo é que o primeiro é uma relação de "se, então", enquanto o segundo é uma relação de "se, e somente se". Porém, existe um caso particular de homomorfismo que atende a esse requisito, citado, mas não demonstrado, por Hell e Nešetřil:

**Proposição 3.6.1.** *Uma função  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  é um isomorfismo se, e somente se, é um homomorfismo bijetivo (HELL; NEŠETŘIL, 2008).*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $f$  é um isomorfismo de  $G$  para  $H$ . Por definição,  $f$  é uma

bijeção no conjunto de vértices, logo é vértice-bijetivo. A definição de isomorfismo exige que  $uv \in E(G) \implies f(u)f(v) \in E(H)$ . Isso satisfaz exatamente a definição de homomorfismo. Como  $f$  é um homomorfismo vértice-bijetivo, ele é vértice-injetivo. Logo, pela Proposição 3.3.1, ele também é arco-injetivo. Basta provar que  $f$  também é arco-sobrejetivo.

É importante notar que, pela definição de isomorfismo, o tamanho de dois grafos isomorfos é o mesmo, ou seja,  $m(G) = m(H)$ . Como cada arco de  $G$  é mapeado para um arco diferente de  $H$  (por ser arco-injetivo), não sobra nenhum arco de  $G$  fora da imagem de  $f^\#$ . Logo,  $f$  também é arco-sobrejetivo.

( $\Leftarrow$ ) Suponha agora que  $f : G \rightarrow H$  é um homomorfismo bijetivo. Por ser bijetivo em vértices,  $f$  satisfaz a primeira parte da definição de isomorfismo. Por ser um homomorfismo, ele preserva a adjacência, satisfazendo a implicação "ida" da condição:  $uv \in E(G) \implies f(u)f(v) \in E(H)$ .

Resta provar que  $f$  também preserva a não adjacência. Suponha, por absurdo, que  $u$  e  $v$  não são adjacentes em  $G$  (ou seja,  $uv \notin E(G)$ ), mas suas imagens  $f(u)$  e  $f(v)$  são adjacentes em  $H$  (ou seja,  $f(u)f(v) \in E(H)$ ).

Como  $f$  é um homomorfismo bijetor, a função induzida  $f^\# : E(G) \rightarrow E(H)$  também é uma bijeção. Isso implica que  $|E(G)| = |E(H)|$ . No entanto, se  $f$  mapeia um par não adjacente para um par adjacente, e já sabemos que ele mapeia todas as  $|E(G)|$  arestas de  $G$  para arestas distintas em  $H$ , isso significaria que o conjunto de arestas de  $H$  teria pelo menos  $|E(G)| + 1$  arestas. Absurdo!

Portanto,  $f$  deve preservar a não adjacência. Como  $f$  é uma bijeção que preserva adjacência e não adjacência, ela é, por definição, um isomorfismo. ■

Esta equivalência solidifica a posição do homomorfismo como uma generalização do isomorfismo. Enquanto um isomorfismo exige uma correspondência estrutural perfeita, um homomorfismo representa um relaxamento dessa condição, permitindo que estruturas sejam "dobradas" ou "colapsadas", desde que a adjacência seja preservada.

Outro conceito que pode ser redefinido a partir disso é o **automorfismo**. Nesse contexto, um automorfismo é um homomorfismo bijetivo de um grafo  $G$  (ou digrafo  $D$ ) em si mesmo.

### 3.7 Coloração como um Homomorfismo

Retomando o conceito de que um homomorfismo de  $D$  para  $F$  pode ser denotado como uma  $F$ -coloração de  $D$ , citado inicialmente na Seção 3.1, é importante entender o motivo desta denotação:

**Proposição 3.7.1.** *Um grafo  $G$  é  $k$ -colorível se, e somente se, existe um homomorfismo  $f : G \rightarrow K_k$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008).*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $G$  é  $k$ -colorível. Então, por definição, existe uma função de coloração  $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  tal que  $uv \in E(G) \implies c(u) \neq c(v)$ . Vamos definir uma função  $f : V(G) \rightarrow V(K_k)$  da seguinte maneira: para cada vértice  $u \in V(G)$ , associamos  $f(u) = c(u)$ , ou seja, o vértice  $u \in V(G)$  é mapeado para o vértice de  $K_k$  cujo índice é a cor de  $u$ .

Para mostrar que  $f$  é um homomorfismo, devemos verificar se a adjacência é preservada. Considere uma aresta qualquer  $uv \in E(G)$ . Como  $c$  é uma  $k$ -coloração, sabemos que  $c(u) \neq c(v)$ . Pela nossa construção de  $f$ , isso significa que  $f(u) = c(u)$  e  $f(v) = c(v)$  são vértices distintos em  $K_k$ . Pela definição de um grafo completo, quaisquer dois vértices distintos são adjacentes. Portanto,  $f(u)f(v) \in E(K_k)$ . Logo,  $f$  é homomorfismo.

( $\Leftarrow$ ) Suponha que existe um homomorfismo  $f : G \rightarrow K_k$ . Podemos identificar os vértices de  $K_k$  com o conjunto de cores  $\{1, 2, \dots, k\}$ . Defina uma função de coloração  $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  tal que, para cada  $u \in V(G)$ , a cor  $c(u)$  é o vértice de  $K_k$  para o qual  $f$  mapeia  $u$ , ou seja,  $c(u) = f(u)$ .

Para mostrar que  $c$  é uma  $k$ -coloração, devemos verificar se vértices adjacentes em  $G$  recebem cores diferentes. Considere uma aresta qualquer  $uv \in E(G)$ . Como  $f$  é um homomorfismo, ele deve preservar a adjacência, logo  $f(u)f(v) \in E(K_k)$ . Pela definição de  $K_k$ , isso significa que  $f(u)$  e  $f(v)$  são vértices distintos. Ou seja,  $f(u) \neq f(v)$ . Pela nossa definição de  $c$ , isso implica diretamente que  $c(u) \neq c(v)$ . Portanto,  $c$  é uma  $k$ -coloração própria. ■

Esta proposição é um dos conceitos fundamentais explorados por Hell e Nešetřil. Utilizando essa definição, eles unificam os conceitos de homomorfismo e coloração, criando mais uma generalização poderosa e mais um conceito que os homomorfismos conseguem descrever com precisão. Além disso, após essa conexão ser feita, é possível utilizar todas as ferramentas desenvolvidas a partir de homomorfismos na investigação de problemas de coloração. Um conceito chave, por exemplo, é que o número cromático  $\chi(G)$  pode ser visto como o menor inteiro  $k$  para o qual existe um homomorfismo  $f : G \rightarrow K_k$ . No próximo capítulo, veremos que

isso gera uma **ordem parcial** na família dos grafos completos e como podemos generalizar esse conceito para outras famílias de grafos, gerando variantes inteiras de colorações.

Outro resultado que vale a pena mencionar é o seguinte:

**Corolário 3.7.1.** *Se  $G$  é homomórfico a  $H$ , ou  $G \rightarrow H$ , então  $\chi(G) \leq \chi(H)$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008).*

*Demonstração.* Seja  $f : H \rightarrow K_k$  um homomorfismo de  $H$  para o menor grafo completo possível, de forma que  $\chi(H) = k$ . Logo, o homomorfismo  $f$  é uma  $k$ -coloração de  $H$ . Seja  $g : G \rightarrow H$  um homomorfismo. Como homomorfismos são transitivos, significa que a função  $g \circ f : G \rightarrow K_k$  é precisamente uma  $k$ -coloração de  $G$ . Como uma  $k$ -coloração não precisa necessariamente utilizar todas as  $k$  cores, então  $\chi(G) \leq k$ . Logo,  $\chi(G) \leq \chi(H)$ . ■

### 3.8 Ordenação Topológica como um Homomorfismo

Conforme antecipado na Seção 2.9, esta seção conclui o arco de generalizações conceituais, conectando a noção de ordenação topológica à teoria dos homomorfismos.

A conexão central é que um digrafo é acíclico se, e somente se, ele admite um homomorfismo para um torneio transitivo. Esta equivalência é formalizada na proposição a seguir:

**Proposição 3.8.1.** *Um digrafo  $D = (V, A)$  com  $n$  vértices é acíclico se, e somente se,  $D \rightarrow \vec{T}_n$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008).*

*Demonstração.* ( $\Leftarrow$ ) Suponha que  $f : G \rightarrow \vec{T}_n$  é um homomorfismo. Se  $G$  contivesse um ciclo direcionado  $(v_0, v_1, \dots, v_k = v_0)$ , pela generalização da Proposição 3.4.2 para digrafos, teríamos um passeio direcionado fechado em  $\vec{T}_n$ . Absurdo! Já que os torneios transitivos, por definição, são acíclicos. Logo,  $G$  é acíclico.

( $\Rightarrow$ ) Reciprocamente, suponha que  $D$  é um digrafo acíclico de grau  $n$ . Seja a função  $g : V(D) \rightarrow \{0, 1, \dots, n-1\}$  tal que  $g(v)$  seja o comprimento do maior caminho direcionado terminado em  $v$ , para todo  $v \in V(D)$ . Como  $D$  é acíclico, a função  $g$  é bem definida.

Seja  $\vec{uv} \in A(D)$  um arco de  $D$ . Qualquer que seja o caminho direcionado que termine em  $u$ , adicionando o arco  $\vec{uv}$ , obtem-se um caminho direcionado maior que termina em  $v$ . Logo,  $g(u) < g(v)$ , para todo  $\vec{uv} \in A(D)$ .

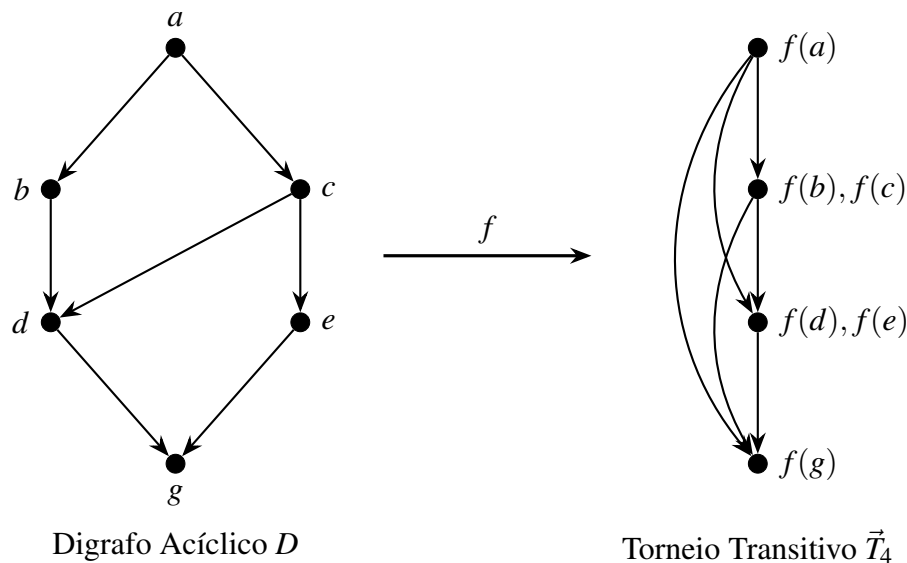
Agora, seja a função  $f : V(G) \rightarrow V(\vec{T}_n)$  tal que  $f(v) = 1 + g(v)$ , ou seja, se o maior caminho direcionado terminado em um vértice  $v \in V(D)$  é  $i$ , então esse vértice é mapeado para o

vértice  $i + 1 \in V(\vec{T}_n)$ . Perceba que  $f(u) < f(v)$ , para todo  $\vec{uv} \in V(D)$ . Como, pela definição de torneio transitivo,  $\vec{ij} \in A(V(\vec{T}_n))$  se, e somente se,  $i < j$ , a função  $f$  preserva adjacência. Logo, é um homomorfismo. ■

Perceba que o homomorfismo da demonstração da Proposição 3.8.1 não utiliza necessariamente todos os vértices de  $\vec{T}_n$ . Na verdade, seja  $i = \max\{f(v) \mid v \in V(D)\}$ , ou seja, o maior valor que a função  $f$  pode assumir. Assim, a mesma construção utilizada é suficiente para mostrar que  $D \rightarrow \vec{T}_i$ . A partição de  $V(D)$  definida pelo homomorfismo  $f$  é precisamente uma ordenação topológica de  $D$  (HELL; NEŠETRIL, 2008). Assim, podemos concluir a última das generalizações dos conceitos primitivos da Teoria dos Grafos sob a lente dos homomorfismos abordados nesta monografia.

Seja  $D = (V, A)$  um digrafo acíclico de grau  $n$ . Uma ordenação topológica de  $D$  é a partição de  $D$  definida por um homomorfismo  $f : V(D) \rightarrow V(\vec{T}_n)$ . A Figura 16 representa uma ordenação topológica de um digrafo acíclico genérico para o torneio transitivo  $\vec{T}_4$ .

Figura 16 – Um homomorfismo  $f : D \rightarrow \vec{T}_4$  como uma ordenação topológica.



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

### 3.9 Dualidades de Existência e Dicotomias de Complexidade

Neste capítulo, o homomorfismo é introduzido como um conceito unificador em Teoria dos Grafos, sendo capaz de generalizar vários conceitos importantes. Porém, tão importante quanto a definição e suas consequências mais imediatas, é o problema da  $F$ -coloração: dado

um digrafo  $F$  fixo, quão difícil é descobrir se um digrafo  $D$  qualquer admite um homomorfismo  $D \rightarrow F$ ?

Esta seção introduz brevemente dois tópicos centrais da teoria de homomorfismos, ambos explorados por Hell e Nešetřil: as **dualidades de homomorfismos** e as **dicotomias de complexidade**. Embora as demonstrações completas desses resultados fujam do objetivo desta monografia, o conhecimento dos resultados a seguir pode servir de pontapé para pesquisas futuras na área.

### 3.9.1 Dualidades de Homomorfismo

Explorando a transitividade entre homomorfismos, uma das ferramentas mais importantes para se mostrar a não existência de um homomorfismo é provar a existência de outro homomorfismo.

**Definição 3.9.1** (Dualidade de homomorfismos). *Sejam  $D, F$  e  $J$  digrafos, tal que  $J \not\rightarrow F$ . Um par  $(J, F)$  forma uma **dualidade de homomorfismos** se, para todo  $D$ ,  $D \not\rightarrow F \iff J \rightarrow D$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008).*

O exemplo mais clássico, baseado no Teorema 2.9.1, é a dualidade de grafos bipartidos, onde  $(K_2, C_k)$  é uma dualidade do tipo:  $G \rightarrow K_2 \iff C_k \not\rightarrow G$  para todo  $k$  ímpar (HELL; NEŠETŘIL, 2008).

Para digrafos, Hell e Nešetřil apresentam diversas dualidades simples, como a caracterização de digrafos acíclicos da Proposição 3.8.1, que pode ser reescrita como uma dualidade:  $D \not\rightarrow \vec{T}_n \iff \vec{P}_n \rightarrow D$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008).

O trabalho de Fomin et al. contribui para o estado da arte, apresentando algoritmos exatos otimizados para o problema de existência de homomorfismos. Estes algoritmos resolvem instâncias de tamanho fixo em tempo exponencial eficiente e frequentemente utilizam parâmetros estruturais, como a largura de árvore, para encontrar soluções ótimas mais rapidamente do que os algoritmos de força bruta convencionais, explorando inicialmente resultados para um ciclo de tamanho 5 e estendendo a pesquisa para outros alvos (FOMIN *et al.*, 2007).

### 3.9.2 A Dicotomia de Complexidade

O problema de  $F$ -coloração é o problema de decisão que pergunta se um digrafo  $D$  de entrada admite um homomorfismo para um grafo  $F$  fixo.

Para grafos, Hell e Nešetřil (2008) provaram um teorema de dicotomia completo: o problema da  $H$ -coloração é tratável em tempo polinomial se  $H$  for bipartido ou possuir um laço, e é NP-completo em todos os outros casos.

Para digrafos, o problema da  $F$ -coloração pode ser generalizado para o Problema da Satisfação de Restrições (Problema de Satisfação de Restrições (*Constraint Satisfaction Problem*) (CSP)), que se relaciona com a Conjectura da Dicotomia, de Feder e Valdi, concluindo que o problema da  $F$ -coloração é P ou NP-completo, sem casos intermediários (HELL; NEŠETŘIL, 2008).

Além disso, muitos dos estudos citados nesta monografia caem em outras dicotomias de complexidade, mostrando que isso é uma constante no estudo de homomorfismos.

## 4 APLICAÇÃO EM COLORAÇÃO E A ORDEM PARCIAL DE GRAFOS

No Capítulo 3, estabelecemos que o conceito de homomorfismo generaliza a coloração de grafos. Especificamente, vimos na Proposição 3.7.1 que um grafo  $G$  é  $k$ -colorível se, e somente se, existe um homomorfismo  $G \rightarrow K_k$ .

A partir desta observação, surge uma possível mudança de perspectiva: ao invés de encararmos a coloração como uma partição dos vértices de um grafo, podemos encarar a família dos grafos completos  $\{K_1, K_2, K_3, \dots\}$  como uma **escala de medida**. A partir de então, colorir um grafo  $G$  torna-se o problema de onde  $G$  se encaixa nessa escala, ou seja, encontrar o menor  $K_k$  tal que  $G \rightarrow K_k$ . Nesse caso, o número cromático de  $G$  seria  $\chi(G) = k$ .

Este capítulo explora e formaliza essa perspectiva. Veremos que a relação  $D \rightarrow F$  define uma ordem parcial sobre o universo dos digrafos (HELL; NEŠETŘIL, 2008). A partir dessa estrutura, podemos substituir a escala de grafos completos por outras famílias de grafos (como os grafos racionais completos e os grafos de Kneser), permitindo definir variantes inteiras de coloração que, inclusive, podem expandir essa escala de medida.

### 4.1 A Ordem Parcial de Homomorfismos

#### 4.1.1 O Problema: Uma Quasi-Ordem

Para que possamos definir uma ordem parcial na família dos grafos, primeiro devemos definir uma relação binária que dará forma à essa ordem.

**Definição 4.1.1** (A relação  $\leq$ , Ordem Parcial). *A relação  $\leq$  define uma **ordem parcial** em um conjunto  $\mathcal{P}$  quando, para os elementos desse conjunto, essa relação é:*

- **Transitiva:** Para quaisquer  $D, F, J \in \mathcal{P}$ , se  $D \leq F$  e  $F \leq J$ , então  $D \leq J$ .
- **Reflexiva:** Para todo  $D \in \mathcal{P}$ ,  $D \leq D$ .
- **Antissimétrica:** Para quaisquer  $D, F \in \mathcal{P}$ , se  $D \leq F$  e  $F \leq D$ , então  $D = F$ . (DAVEY; PRIESTLEY, 2002)

*Sejam  $D$  e  $F$  dois digrafos. Dizemos que  $D \leq F$  se, e somente se, existe um homomorfismo  $D \rightarrow F$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008).*

Como visto na Seção 3.1, homomorfismos são transitivos. Além disso, como a função identidade é um homomorfismo de um grafo em si mesmo, homomorfismos são reflexivos. Porém,

homomorfismos não são antissimétricos. Isso define a família de todos os homomorfismos como uma **quasi-ordem** (HELL; NEŠETŘIL, 2008; DAVEY; PRIESTLEY, 2002).

#### 4.1.2 A Solução: Equivalência Homomórfica e Núcleos

Para resolver esse problema, surge a necessidade de identificarmos quando dois grafos são estruturalmente idênticos sob a ótica dos homomorfismos.

**Definição 4.1.2** (Equivalência Homomórfica). *Dois digrafos  $D$  e  $F$  são **homomorficamente equivalentes**, denotado  $D \sim F$ , se existe um homomorfismo  $f : D \rightarrow F$  e um homomorfismo  $g : F \rightarrow D$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008).*

A equivalência homomórfica é, de fato, uma relação de equivalência: é reflexiva, pois a função identidade é um homomorfismo de um digrafo  $D$  para si mesmo; é simétrica, por definição; e é transitiva, pela transitividade dos homomorfismos. Assim sendo, essa relação particiona o conjunto formado por todos os digrafos. Para cada uma dessas partições, também chamadas de classes de equivalência, podemos identificar um representante mínimo e único. Para isso, precisamos definir um tipo específico de homomorfismo.

**Definição 4.1.3** (Retração). *Dado um digrafo  $D$  e um de seus subgrafos  $F$ , uma **retração** de  $D$  para  $F$  é um homomorfismo  $r : D \rightarrow F$  tal que  $r(v) = v$ , para todo  $v \in V(F)$ .*

Ou seja, uma retração de  $D$  é um homomorfismo de  $D$  para um subgrafo  $F$  de si mesmo. Perceba que  $D$  e  $F$  são homomorficamente equivalentes, já que a retração é um homomorfismo de  $D$  para  $F$  e a função identidade é um homomorfismo de  $F$  para  $D$ .

Definida a ideia de retração, podemos definir o menor grafo possível para o qual  $D$  pode ser retraído:

**Definição 4.1.4** (Núcleo). *Um digrafo  $F$  é um **núcleo** se não pode ser retraído para um subgrafo próprio de si mesmo, ou seja, se todo homomorfismo  $f : F \rightarrow F$  é um automorfismo (HELL; NEŠETŘIL, 2008).*

Agora, para que um núcleo seja, de fato, um representante de uma classe de equivalência definida pela equivalência homomórfica, é necessário mostrar que ele é único.

**Corolário 4.1.1.** *Todo digrafo é homomorficamente equivalente a um único núcleo, exceto isomorfismos (HELL; NEŠETŘIL, 2008).*

*Demonstração.* Seja  $D$  um digrafo e  $F$  e  $J$  dois núcleos de  $D$ . Logo, por definição,  $D \sim F$  e  $D \sim J$ . Logo,  $J$  e  $F$  fazem parte da mesma classe de equivalência, em outras palavras,  $F \sim J$ . Sejam  $f : F \rightarrow J$  e  $g : J \rightarrow F$  homomorfismos, então  $f \circ g : J \rightarrow J$  e  $g \circ f : F \rightarrow F$  são automorfismos. Para que isso seja possível, ambas as funções  $f$  e  $g$  precisam ser bijetoras. Logo, pela Proposição 3.6.1,  $F \cong J$ . ■

#### 4.1.3 O Resultado: A Família $\mathcal{C}$

No contexto de homomorfismos,  $D \leq F$  e  $F \leq D$  significam que os digrafos são homomorficamente equivalentes, mas não necessariamente isomorfos. Para solucionar isso e obter uma ordem parcial verdadeira, Hell e Nešetřil propõem restringir o universo de grafos aos seus **núcleos**.

Seja  $\mathcal{C}$  o conjunto de todos os núcleos não isomorfos de digrafos. Nessa família, dados dois digrafos  $D, F \in \mathcal{C}$ , temos que  $D \leq F$  e  $F \leq D \iff D = F$ . Logo, a relação  $\leq$  também é antissimétrica na família  $\mathcal{C}$ .

**Teorema 4.1.1** (Ordem Parcial de Homomorfismos). *A relação  $\leq$  define uma ordem parcial no conjunto  $\mathcal{C}$  dos núcleos de digrafos. Dizemos que  $D \leq F$ , com  $D, F \in \mathcal{C}$  se existe um homomorfismo de  $D$  para  $F$ , ou seja,  $D \rightarrow F$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008).* ■

## 4.2 A Escala dos Grafos Completos e a Coloração Clássica

Antes de iniciarmos a discussão sobre a escala dos grafos completos, precisamos definir algumas nuances da relação de ordem.

**Definição 4.2.1** (A relação  $<$ ). *Sejam  $D$  e  $F$  dois digrafos. Dizemos que  $D < F$  se, e somente se,  $D \rightarrow F$  e  $F \not\rightarrow D$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008).*

**Definição 4.2.2** (Ordem Total, Ordem Total Linear). *Uma **ordem total**, ou **cadeia**, é uma ordem parcial  $\mathcal{P}$  tal que,  $\forall D, F \in \mathcal{P}$ ,  $D \leq F$  ou  $F \leq D$  (ou ambos). Já uma **ordem total linear** é uma ordem parcial  $\mathcal{P}$  tal que,  $\forall D, F \in \mathcal{P}$ ,  $D \leq F \iff F \not\leq D$ . Nesse caso, podemos dizer que a relação  $<$  define uma ordem total linear nesse conjunto (HELL; NEŠETŘIL, 2008; DAVEY; PRIESTLEY, 2002).*

Nesse contexto, para que possamos definir a família dos grafos completos  $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, K_3, \dots\}$  como uma escala de medida, é importante mostrar que essa família é uma ordem

total linear.

**Proposição 4.2.1.** *Sejam  $K_n$  e  $K_m$  dois grafos completos. Então  $K_n \rightarrow K_m$  se, e somente se,  $n \leq m$ .*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Sabendo que  $\chi(K_n) = n$  e que  $\chi(K_m) = m$ , pelo Corolário 3.7.1, se  $K_n \rightarrow K_m$  então  $n \leq m$ .

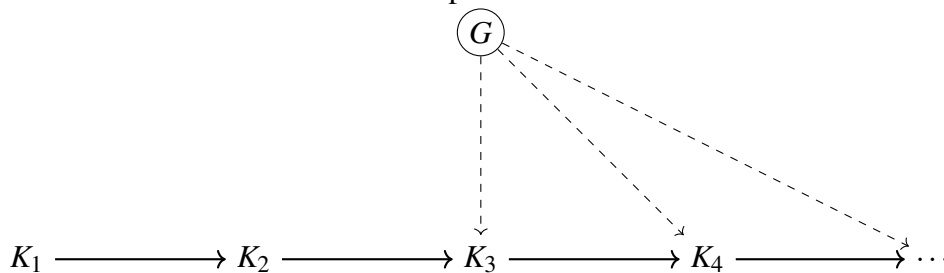
( $\Leftarrow$ ) Por contra-positiva, seja  $n > m$ . Nesse caso, um homomorfismo  $f$  de  $K_n$  para  $K_m$  precisaria mapear dois vértices  $i, j \in V(K_n)$  para o mesmo vértice  $k \in V(K_m)$ , ou seja,  $f(i) = f(j) = k$ . Porém, como  $ij \in E(K_n)$  por definição, isso só seria possível se existisse um laço em  $k$ . Como esse não é o caso, então  $K_n \not\rightarrow K_m$ . ■

A partir disso, podemos dizer que  $K_n < K_m$ , para todo  $n < m$ . Além disso, como os grafos completos são núcleos, podemos concluir que a família  $\mathcal{K}$  dos grafos completos é uma ordem total linear.

$$K_1 < K_2 < K_3 < \dots < K_n < \dots \quad (4.1)$$

Esta cadeia, ilustrada na Figura 17, atua como a régua padrão para a coloração clássica.

Figura 17 – A Ordem Total dos Grafos Completos



Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Neste contexto, o número cromático  $\chi(G)$  pode ser redefinido formalmente em termos da ordem total  $\mathcal{K}$ :

$$\chi(G) = \min\{k \mid G \leq K_k\} \quad (4.2)$$

Esta definição destaca que o número cromático é uma propriedade monótona em relação à ordem de homomorfismo, ou seja, ela é crescente ou decrescente. Se  $D \rightarrow F$  (ou seja,

$D \leq F$ ), então necessariamente  $\chi(D) \leq \chi(F)$ , conforme demonstrado no Corolário 3.7.1 (HELL; NEŠETŘIL, 2008).

### 4.3 O Refinamento da Escala: Coloração Circular e Grafos Racionais Completos ( $K_{p/q}$ )

A Seção 3.2 estabeleceu que a família dos grafos completos  $\mathcal{K}$  define uma ordem total linear, fornecendo o número cromático  $\chi(G)$  em valores inteiros. Contudo, a Ordem Parcial de Homomorfismos ( $\mathcal{C}$ ) é densa, ou seja, entre quaisquer dois digrafos  $D, F \in \mathcal{C}$ , tal que  $D \leq F$  existe um terceiro digrafo  $J$  tal que  $D \leq J \leq F$  (exceto entre  $K_1$  e  $K_2$ ) (HELL; NEŠETŘIL, 2008).

Um exemplo disso é a família dos ciclos ímpares  $\mathcal{C}_i = \{\dots, C_7, C_5, C_3\}$ . A família  $\mathcal{C}_i$  também é uma ordem total linear, o que pode ser conferido utilizando a Proposição 3.4.4, de forma análoga a demonstração da Proposição 4.2.1. Porém, perceba que  $C_3 \cong K_3$  e que ciclos ímpares não podem ser bipartidos. Tendo isso em mente, podemos encaixar a família  $\mathcal{C}_i$  entre os grafos completos  $K_2$  e  $K_3$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008).

$$K_2 < \dots < C_7 < C_5 < C_3 = K_3 \quad (4.3)$$

A **Coloração Circular** explora essa densidade ao utilizar a escala dos **Grafos Racionais Completos**.

#### 4.3.1 Grafos Racionais Completos ( $K_{p/q}$ )

Relembrando a Definição 2.9.6, um grafo racional completo  $K_{p/q}$ , com  $p \geq 2q > 0$ , tem como conjunto de vértices  $V = \{1, 2, \dots, p\}$  e como conjunto de arestas  $E = \{ij \mid q \leq |i - j| \leq p - q\}$ . Como mencionado na Seção 2.9, essa classe de grafos engloba tanto os grafos completos, já que  $K_p \cong K_{p/1}$ , quanto a classe dos ciclos ímpares, já que  $C_{2k+1} \cong K_{(2k+1)/k}$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008).

Logo, para que a família  $\mathcal{D}$  dos grafos racionais completos seja uma escala que generalize a ordem  $\mathcal{K}$ , precisamos de um resultado semelhante à Proposição 3.4.4 e à Proposição 4.2.1. Este resultado é mostrado na proposição a seguir.

**Proposição 4.3.1.** *Sejam  $K_{p/q}$  e  $K_{p'/q}$  grafos racionais completos. Então (HELL; NEŠETŘIL,*

2008):

$$K_{p/q} \rightarrow K_{p'/q'} \iff \frac{p}{q} \leq \frac{p'}{q'}. \quad (4.4)$$

Embora a demonstração desta proposição fuja do escopo desta monografia por utilizar resultados que não foram demonstrados neste texto, esse resultado é o suficiente para provar que a família dos grafos racionais completos  $\mathcal{Q}$  forma uma subordem de  $\mathcal{C}$  que é, também, uma ordem total linear, englobando tanto a família dos grafos completos  $\mathcal{K}$  quanto a família dos ciclos ímpares  $\mathcal{C}_i$ .

### 4.3.2 A Métrica Circular e os Ciclos Ímpares

Para que possamos entender como a ordem  $\mathcal{Q}$  pode generalizar a coloração clássica, precisamos definir, nos grafos racionais completos, um conceito equivalente aos números cromáticos para os grafos completos.

**Definição 4.3.1** (Número Cromático Circular). *O número cromático circular de um grafo  $G$ , denotado por  $\chi_c(G)$ , é o valor mínimo da razão  $p/q$  tal que  $G$  admita um homomorfismo para o grafo racional completo  $K_{p/q}$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008), ou seja:*

$$\chi_c(G) = \min \left\{ \frac{p}{q} \mid G \rightarrow K_{p/q} \right\} \quad (4.5)$$

Um homomorfismo  $G \rightarrow K_{p/q}$  pode ser denotado como uma  $(p/q)$ -coloração circular de  $G$ . Além disso, um grafo  $G$  é  $(p/q)$ -colorível se ele admite uma  $(p/q)$ -coloração circular.

**Proposição 4.3.2.** *Se  $G \rightarrow H$ , então  $\chi_c(G) \leq \chi_c(H)$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008).*

*Demonstração.* Se  $G \rightarrow H$  e  $H \rightarrow K_{p'/q'}$ , então  $G \rightarrow K_{p'/q'}$ . Se  $\chi_c(H) = p'/q'$ , então, pela Proposição 4.3.1, temos que  $\chi_c(G) \leq \chi_c(H)$ . ■

Este resultado demonstra a monotonicidade do número cromático circular. Além disso, o número cromático circular é o valor racional que melhor aproxima  $\chi(G)$  por baixo. Para o ciclo  $C_5$ , por exemplo,  $\chi(C_5) = 3$ , mas, como  $C_5 \cong K_{5/2}$ , então  $\chi_c(C_5) = 2,5$ . Este resultado ilustra como a escala racional é capaz de distinguir graus de colorabilidade que a escala inteira  $\{K_k\}$  definida pelos números cromáticos não consegue.

Feder *et al.* (2003) exploraram uma variação de homomorfismo, o homomorfismo acíclico, encontrando uma dicotomia de complexidade: descobrir se existe um homomorfismo

acíclico de um digrafo  $D$  para um digrafo  $F$  é NP-completo, a não ser que  $F$  seja acíclico, sendo assim polinomial. A partir disso, o trabalho conclui que decidir se o número cromático circular de um digrafo é pelo menos  $q$ , para  $q > 1$ , é NP-completo.

#### 4.4 Coloração Fracionária e Grafos de Kneser ( $K(n, k)$ )

Uma generalização de coloração interessante é definida ao atribuir a cada vértice de um grafo não apenas uma cor, mas  $k$  cores, de forma que dois vértices adjacentes possuam conjuntos disjuntos de cores. Essa atribuição é definida a seguir:

**Definição 4.4.1** (*k-Tupla n-Coloração*). *dado um grafo  $G = (V, E)$ , uma **k-tupla n-coloração** é uma atribuição de um conjunto de  $k$  cores entre  $n$  disponíveis para cada vértice  $v \in V$  de forma que vértices adjacentes recebam um conjunto disjunto de cores, ou seja, sejam  $u, v \in V$  dois vértices de  $G$  tal que  $uv \in E$ . Se  $c(u)$  e  $c(v)$  são os conjuntos de cores atribuídos a  $u$  e  $v$ , respectivamente, então  $c(u) \cap c(v) = \emptyset$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008).*

Perceba que, a partir desta definição, uma  $n$ -coloração pode ser vista como uma 1-tupla  $n$ -coloração.

Seria interessante, então, encontrar uma classe de grafos que possa agir como uma métrica para essa coloração, assim como a família  $\mathcal{K}$  dos grafos completos para a coloração clássica e a família  $\mathcal{Q}$  dos grafos racionais completos para a a coloração circular. Este é o papel dos **Grafos de Kneser**.

##### 4.4.1 Grafos de Kneser ( $K(p, q)$ )

Relembrando a Definição 2.9.7, dados dois inteiros  $k$  e  $n$ , com  $n \geq 2k$ , o grafo de Kneser  $K(n, k) = (V, E)$  é o grafo cujo conjunto de vértices  $V$  é formado por todos os subconjuntos possíveis de  $k$  cores entre as  $n$  disponíveis. Dois vértices são adjacentes se, e somente se, esses subconjuntos são disjuntos. Nesse caso,  $K(k, 1) \cong K_k$ . Além disso, podemos relacionar os grafos racionais completos com os grafos de Kneser:

**Proposição 4.4.1.** *Um grafo racional completo  $K_{p/q}$  é isomorfo à um subgrafo induzido do grafo de Kneser  $K(p, q)$ .*

Esta proposição não será demonstrada nesta monografia por utilizar conceitos que não foram abordados. Contudo, ela é a base para utilizar a família dos grafos de Kneser como

mais um refinamento da coloração clássica.

#### 4.4.2 O Número Cromático Fracionário ( $\chi_f(G)$ )

A métrica para uma  $k$ -tupla  $n$ -coloração de um grafo  $G$  pode ser definida de modo análogo às outras colorações citadas até então.

**Definição 4.4.2** (Número Cromático Fracionário). *O número cromático fracionário de um grafo  $G$ , denotado por  $\chi_f(G)$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008), é o valor:*

$$\chi_f(G) = \inf \left\{ \frac{n}{k} \mid G \rightarrow K(n, k) \right\} \quad (4.6)$$

A coloração fracionária, embora definida por uma família de grafos alvo diferente ( $K(n, k)$ ), também refina a medida de  $\chi(G)$ . A importância desta família de grafos foi consolidada pelo Teorema de Kneser, provado por Lovász, que afirma que  $\chi(K(n, k)) = n - 2k + 2$  (HELL; NEŠETŘIL, 2008).

As três principais métricas de coloração se relacionam na Ordem Parcial de Homomorfismos ( $\mathcal{C}$ ) da seguinte forma:

$$\chi_f(G) \leq \chi_c(G) \leq \chi(G). \quad (4.7)$$

Este resultado demonstra que  $\chi_f(G)$  fornece o limite inferior mais rigoroso para o número cromático, sendo uma das medidas mais refinadas disponíveis na teoria.

## 5 CONCLUSÃO

Após uma longa jornada no estudo exploratório do conceito de **Homomorfismos em Grafos**, suas consequências estruturais, seu poder de generalização e sua aplicação em problemas de coloração, o presente capítulo tem como objetivo recapitular os objetivos deste estudo, apresentar os resultados obtidos e abrir portas para futuros estudos na área.

### 5.1 Recapitulação e Objetivos

A presente monografia teve como objetivo geral analisar formal e sistematicamente os **Homomorfismos em Grafos** como objeto unificador de conceitos primitivos em Teoria dos Grafos e apresentar sua utilização como ferramenta essencial para o desenvolvimento de métricas refinadas de Coloração. Durante os capítulos anteriores, foi demonstrado que homomorfismos oferecem um arcabouço teórico coeso que pode ser utilizado como ferramenta auxiliar na definição de conceitos centrais na teoria dos grafos, como caminhos dos mais diversos tipos, isomorfismo, coloração e ordenação topológica.

A metodologia dedutiva adotada foi estruturada em torno da obra de Hell e Nešetřil (2008), *Graphs and Homomorphisms*.

No Capítulo 2, foram apresentadas definições fundamentais da Teoria dos Grafos, necessárias para o rigor formal do trabalho. O Capítulo 3 introduziu o homomorfismo em sua forma mais geral em digrafos e a aplicação dessa definição em grafos, demonstrando como ele unifica conceitos clássicos de preservação de estruturas e seu poder de generalização de outros conceitos da Teoria dos Grafos. No Capítulo 4, foi analisada a utilização de homomorfismos para a definição de uma Ordem Parcial na família dos núcleos, bem como os conceitos de núcleo e equivalência homomórfica, essenciais para essa definição. Também foram introduzidas outras métricas de classificação dos grafos que vão além da Coloração Clássica (representada pelo Número Cromático  $\chi(G)$ ), como a Coloração Circular (representada pelo Número Cromático Circular  $\chi_c(G)$ ) e a Coloração Fracionária (representada pelo Número Cromático Fracionário  $\chi_f(G)$ ).

A conclusão a seguir revisitará as contribuições centrais desta monografia e apontará a importância do homomorfismo na fronteira da pesquisa atual, tanto em complexidade computacional quanto em aplicações práticas.

## 5.2 Conclusões Chave

Os estudos confirmaram o poder do homomorfismo como um princípio unificador e demonstraram o poder de se estudar coloração sob uma ótica relacional. As principais conclusões e contribuições técnicas desta monografia são:

1. **Unificação pelo Princípio de Preservação:** O homomorfismo foi formalmente estabelecido como o operador algébrico que unifica conceitos estruturais.
  - **Passeios, Caminhos, Caminhos Fechados, Ciclos, Trilhas Eulerianas e Circuitos Eulerianos** são reinterpretados como homomorfismos que partem de classes de grafos específicos, demonstrando o domínio estrutural do conceito de homomorfismo.
  - **Isomorfismos e Automorfismos** são reinterpretados como homomorfismos bijetores, garantindo a preservação da adjacência.
  - A **Coloração Clássica** ( $\chi(G)$ ) é reduzida ao problema de homomorfismo para a cadeia de grafos completos ( $G \rightarrow K_k$ ).
  - A **Ordenação Topológica** em dígrafos acíclicos é generalizada como um homomorfismo para o torneio transitivo ( $\vec{T}_n$ ).
2. **Estabelecimento da Ordem Parcial ( $\mathcal{C}$ ):** A unicidade do **Núcleo** foi provada, justificando a restrição da relação de homomorfismo ao conjunto  $\mathcal{C}$ . Esta restrição foi fundamental para transformar a quasi-ordem de homomorfismos em uma **Ordem Parcial**, permitindo um sistema estável para a classificação estrutural dos grafos.
3. **Refinamento da Escala Métrica de Coloração:** Demonstrou-se que a Ordem  $\mathcal{C}$  é densa, o que motivou o refinamento das métricas de coloração:
  - O **Número Cromático Circular** ( $\chi_c(G)$ ): Utiliza a escala densa dos grafos racionais  $K_{p/q}$ , preenchendo as lacunas inteiras da escala  $\mathcal{K}$  e fornecendo uma medida  $\chi_c(G) \leq \chi(G)$ .
  - O **Número Cromático Fracionário** ( $\chi_f(G)$ ): Representa o limite inferior mais rigoroso ( $\chi_f(G) \leq \chi_c(G) \leq \chi(G)$ ), utilizando os grafos de Kneser ( $K(n, k)$ ).
4. **Dualidades e Dicotomias:** Resultados sobre **Dualidades de Existência e Dicotomias de Complexidade** foram apresentados por toda a monografia nas citações de trabalhos que representam o estado da arte dessa área de pesquisa.

### 5.3 Contribuição Exploratória e Contextualização no Estado da Arte

A principal contribuição desta monografia, de caráter fundamentalmente **exploratório e didático**, reside na estruturação e apresentação, em língua portuguesa, do arcabouço formal do homomorfismo de grafos. Considerando que a literatura primária sobre a Ordem Parcial de Homomorfismos ( $\mathcal{C}$ ) está concentrada em obras internacionais de Combinatória e Álgebra Relacional, este trabalho realiza a:

1. **Apresentação Estruturada do Homomorfismo:** Formaliza e contextualiza a definição de homomorfismo a partir de digrafos, garantindo a solidez do conceito antes de sua aplicação em grafos, conferindo a ele a posição de operador unificador central.
2. **Tradução e Acessibilidade Conceitual:** Serve como uma síntese rigorosa, tornando os conceitos algébricos avançados (como núcleo, retratabilidade e as generalizações de coloração  $\chi_c(G)$  e  $\chi_f(G)$ ) acessíveis à comunidade acadêmica brasileira de Engenharia, Ciência da Computação e Matemática, facilitando futuras investigações na área.

Para além do caráter introdutório, esta monografia estabelece a relevância do tema ao conectá-lo diretamente à fronteira da pesquisa global. O homomorfismo está no centro de diversos desafios contemporâneos. Alguns exemplos são:

- **Complexidade Computacional:** O problema de existência de homomorfismos ( $F$ -Coloração) define a fronteira entre problemas P e NP-completos, conforme o Teorema da Dicotomia, sendo essencial para o desenvolvimento de **algoritmos exatos** e a compreensão da complexidade de **contagem**.
- **Aprendizado de Máquina (AI/GNNs):** A contagem de homomorfismos (contagem de subgrafos) está sendo usada como uma **codificação estrutural (MoSE)** poderosa para fornecer vieses indutivos em *Graph Neural Networks* (GNNs), superando codificações tradicionais na previsão de propriedades de grafos (BAO *et al.*, 2025).
- **Modelagem Matemática:** O problema de contagem de homomorfismos serve como ponte analítica entre a Combinatória e a Física Estatística, relacionando-se à função de partição em Campos Aleatórios de Markov e sendo utilizado na investigação de grandes conjecturas, como a de Sidorenko (CSIKVÁRI *et al.*, 2022).

Desta forma, esta monografia justifica o estudo da teoria pura como um passo fundamental para o avanço em áreas de alto impacto tecnológico.

## 5.4 Trabalhos Futuros

A análise estrutural e a síntese conceitual apresentadas nessa monografia iluminam diversas áreas de pesquisa que vêm se mostrando expressivas para o estado da arte de Ciência da Computação e Teoria dos Grafos. As seguintes linhas de investigação são sugeridas:

### 1. Exploração das Fronteiras Algorítmicas e de Contagem:

- Investigar algoritmos exatos para o problema de  $F$ -Coloração em classes de grafos de difícil tratamento (NP-completo), aprofundando os conhecimentos algorítmicos na área.
- Aprofundar o estudo da complexidade de **Contagem de Homomorfismos** em cenários restritos (e.g., cenários bipartidos, árvores, grafos ponderados, etc), refinando as fronteiras de tratabilidade algorítmica e da enumeração.

### 2. Investigação de Novas Dualidades Estruturais:

- Sugere-se investigar a existência e as propriedades de **Pares de Dualidade Simples** para famílias de núcleos mais complexos do que caminhos e ciclos, buscando novas "boas caracterizações".

### 3. Aprofundamento no Estudo das Métricas de Homomorfismo:

- Realizar estudos que utilizem homomorfismos em outros conceitos de coloração além dos explorados neste trabalho, utilizando classes de grafos diferentes. O Número B-Cromático ( $\chi_b(G)$ ), a B-coloração e uma variação de homomorfismo chamada de B-Homomorfismo, explorados por Sales *et al.* (2017) e Silva (2016), são possíveis portas de entrada para estudos mais aprofundados na área.
- A tese de Sen (2014) explora quatro variações para o **Número Cromático**, o **Número de Cliques Relativos** e o **Número de Cliques Absolutos**, servindo como uma porta de entrada para a exploração de homomorfismos em outros tipos de coloração.

O estudo do homomorfismo, portanto, não apenas oferece uma reinterpretação elegante da teoria clássica, mas também serve como uma **agenda de pesquisa** promissora na interseção entre a matemática discreta e a complexidade computação.

Dessa forma, os objetivos propostos para esta monografia foram integralmente alcançados. A análise estrutural, as formalizações conceituais e a contextualização no estado da arte, baseadas no rigor da Teoria dos Grafos e da Álgebra Relacional, fornecem um ponto de partida sólido para novas investigações sobre a tratabilidade algorítmica e o poder das métricas homomórficas, contribuindo para o avanço da Ciência da Computação e da Teoria dos Grafos.

## REFERÊNCIAS

- AMINI, O.; FOMIN, F. V.; SAURABH, S. Counting subgraphs via homomorphisms. **SIAM Journal on Discrete Mathematics**, SIAM, Philadelphia, v. 26, n. 2, p. 695–717, 2012.
- ATSERIAS, A.; KOLAITIS, P. G.; WU, W.-L. On the expressive power of homomorphism counts. In: IEEE. **ANNUAL ACM/IEEE SYMPOSIUM ON LOGIC IN COMPUTER SCIENCE (LICS)**, 36. Rome, 2021. p. 1–13.
- BANG-JENSEN, J.; GUTIN, G. Z. **Digraphs: Theory, Algorithms and Applications**. 2. ed. London: Springer, 2009.
- BAO, L.; JIN, E.; BRONSTEIN, M.; CEYLAN, I. I.; LANZINGER, M. Homomorphism counts as structural encodings for graph learning. In: **THE THIRTEENTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON LEARNING REPRESENTATIONS (ICLR)**. Singapore: [s.n.], 2025.
- BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. **Graph Theory**. London: Springer, 2008. v. 244. (Graduate Texts in Mathematics, v. 244).
- BORGS, C.; CHAYES, J.; LOVÁSZ, L.; SÓS, V. T.; VESZTERGOMBI, K. Counting graph homomorphisms. In: **Topics in Discrete Mathematics**. Berlin: Springer, 2006. v. 26, p. 315–371.
- CATE, B. T.; DALMAU, V.; KOLAITIS, P. G.; WU, W.-L. When do homomorphism counts help in query algorithms? **ACM Transactions on Database Systems**, ACM, New York, v. 49, n. 2, p. 1–44, 2024.
- CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; STEIN, C. **Introduction to Algorithms**. 4. ed. Cambridge: MIT Press, 2022.
- CSIKVÁRI, P.; LIN, Z. Graph homomorphisms between trees. **The Electronic Journal of Combinatorics**, [S.l.], v. 21, n. 4, p. P4.9, 2014.
- CSIKVÁRI, P.; LIN, Z. Homomorphisms of trees into a path. **SIAM Journal on Discrete Mathematics**, SIAM, Philadelphia, v. 29, n. 3, p. 1406–1422, 2015.
- CSIKVÁRI, P.; RUOZZI, N.; SHAMS, S. Markov random fields, homomorphism counting, and sidorenko’s conjecture. **IEEE Transactions on Information Theory**, IEEE, New York, v. 68, n. 9, p. 6052–6062, 2022.
- CURTICAPEAN, R.; DELL, H.; ROTH, M. Counting edge-injective homomorphisms and matchings on restricted graph classes. **Theory of Computing Systems**, Springer, New York, v. 63, n. 5, p. 987–1026, 2019.
- DAVEY, B. A.; PRIESTLEY, H. A. **Introduction to Lattices and Order**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- DUMMIT, D. S.; FOOTE, R. M. **Abstract Algebra**. 3. ed. New York: Wiley, 2009.
- DYER, M.; GREENHILL, C. The complexity of counting graph homomorphisms. **Random Structures & Algorithms**, Wiley, New York, v. 17, n. 3-4, p. 260–289, 2000.
- FEDER, T.; HELL, P.; MOHAR, B. Acyclic homomorphisms and circular colorings of digraphs. **SIAM Journal on Discrete Mathematics**, SIAM, Philadelphia, v. 17, n. 1, p. 161–169, 2003.

FEOFILOFF, P. **Introdução à teoria dos grafos**. São Paulo: Instituto de Matemática e Estatística da USP, 2009. Disponível em: <<https://www.ime.usp.br/~pf/teoriadosgrafos/>>. Acesso em: 20 out. 2025.

FOCKE, J.; GOLDBERG, L. A.; ŽIVNÝ, S. The complexity of counting surjective homomorphisms and compactons. **SIAM Journal on Discrete Mathematics**, SIAM, Philadelphia, v. 33, n. 2, p. 1006–1043, 2019.

FOMIN, F. V.; HEGGERNES, P.; KRATSCH, D. Exact algorithms for graph homomorphisms. **Theory of Computing Systems**, Springer, New York, v. 41, n. 2, p. 381–393, 2007.

GERARDS, A. M. H. Homomorphisms of graphs into odd cycles. **Journal of Graph Theory**, Wiley, New York, v. 12, n. 1, p. 73–83, 1988.

GUZMÁN-PRO, S.; HERNÁNDEZ-CRUZ, C. Duality pairs and homomorphisms to oriented and unoriented cycles. **The Electronic Journal of Combinatorics**, [S.l.], v. 28, n. 3, p. P3.17, 2021.

HELL, P.; NEŠETŘIL, J. **Graphs and Homomorphisms**. Oxford: Oxford University Press, 2008. v. 28. (Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, v. 28).

HELL, P.; ZHOU, H.; ZHU, X. Homomorphisms to oriented cycles. **Combinatorica**, Springer, Heidelberg, v. 13, n. 4, p. 421–433, 1993.

PAPADIMITRIOU, C. H. **Computational Complexity**. Reading: Addison-Wesley, 1994.

SALES, C. L.; SAMPAIO, L.; SILVA, A. On the b-continuity of the lexicographic product of graphs. **Graphs and Combinatorics**, Springer, Tokyo, v. 33, n. 5, p. 1165–1180, 2017.

SASON, I. Counting graph homomorphisms in bipartite settings. **arXiv**, 2024. Preprint. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2408.06734>>. Acesso em: 20 out. 2025.

SEN, S. **A Contribution to the Theory of Graph Homomorphisms and Colorings**. Tese (Doutorado em Informática) — Université de Bordeaux, Bordeaux, 2014.

SILVA, A. Fall-colorings and b-colorings of graph products. **arXiv**, 2016. Preprint. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1607.08453>>. Acesso em: 20 out. 2025.

WEST, D. B. **Introduction to Graph Theory**. 2. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2001.