



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
MESTRADO EM FÍSICA

MARCIO VAZ DA SILVA JUNIOR

**INJEÇÃO DE ESFERAS MAGNÉTICAS EM UMA CAVIDADE CIRCULAR
PARCIALMENTE PREENCHIDA COM UM SUBSTRATO**

FORTALEZA

2026

MARCIO VAZ DA SILVA JUNIOR

INJEÇÃO DE ESFERAS MAGNÉTICAS EM UMA CAVIDADE CIRCULAR
PARCIALMENTE PREENCHIDA COM UM SUBSTRATO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Física do Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Física. Área de Concentração: Física.

Orientador: Prof. Dr. Ascânio Dias Araújo.

Coorientador: Prof. Dr. Michael Ferreira de Souza.

FORTALEZA

2026

MARCIO VAZ DA SILVA JUNIOR

INJEÇÃO DE ESFERAS MAGNÉTICAS EM UMA CAVIDADE CIRCULAR
PARCIALMENTE PREENCHIDA COM UM SUBSTRATO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Física do Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Física. Área de Concentração: Física.

Aprovada em: 20/02/2026

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ascânio Dias Araújo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Michael Ferreira de Souza (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dr. Izael Araújo Lima
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico este trabalho às crianças e jovens que carregam o peso de guerras que não provocaram, mas cujas consequências são forçados a viver.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha mãe, Maria Laênia, por seu incansável esforço e dedicação, muitas vezes ultrapassando limites, a fim de proporcionar-me as condições possíveis para priorizar a educação em minha vida. Sou imensamente grato também aos meus tios, tias e avó, cujo apoio financeiro e valiosos conselhos moldaram e continuam a moldar minha jornada, contribuindo significativamente para meu crescimento pessoal e ajudando-me a tornar uma pessoa melhor a cada dia.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Ascânio Dias, pela dedicação em sempre verificar e avaliar os resultados construídos, estabelecendo uma direção para a pesquisa. Agradeço ainda, pela oportunidade de participar de um projeto que, embora seja simples do ponto de vista do alcance da Física contemporânea, é desafiador e pouco explorado.

Agradeço ao meu coorientador, Prof. Dr. Michel Ferreira, por sua dedicação e paciência, muitas vezes dedicando horas para nos auxiliar na resolução de problemas, seja em aspectos técnicos ou em conversas sobre as inquietações relacionadas às nossas aspirações para o futuro.

Agradeço ao Dr. Danilo Borges, o idealizador e construtor do experimento, por sua disponibilidade, mesmo a distância, de realizar várias reuniões para tirar dúvidas, apresentar dados e fornecer orientações sobre futuras abordagens.

Agradeço ao Prof. Dr. Nildo Loiola e ao Me. Francisco Márcio pela disponibilização dos instrumentos necessários para a realização dos experimentos, bem como pela devida orientação do seu uso. Agradeço aos demais professores que se fizeram partícipes da minha jornada de conhecimento. A minha profunda e sincera admiração a todos.

Agradeço pelas amizades que desenvolvi ao longo da graduação, compartilhando momentos de tensão e alívio durante as disciplinas mais desafiadoras do curso. Em especial, expressei minha gratidão aos membros do grupo LSN, com os quais convivi intensamente nos últimos anos da minha formação acadêmica: Me. Igor Pereira, Me. Robert Bertoldo, Me. Carlos Miguel, Me. Jéssica Gomes, Thiago Sales, Alessandro Peixoto, Lucas Bezerra, Artur Paschoal e Letícia Frota. Dedico um destaque especial a Hellen de Andrade, por ser a inspiração dos meus sentimentos e planos futuros. A participação de cada um deles foi de fundamental importância para a construção desta pesquisa.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"O homem não é nada além daquilo que a
educação faz dele." (Immanuel Kant)
(Sobre a pedagogia, 1999, p. 15.)

RESUMO

O empacotamento de partículas magnéticas explora interações dipolares para a auto-organização espontânea em cadeias ou estruturas ordenadas, com aplicações em sistemas auto-responsivos e na compreensão de estruturas biológicas complexas. Este estudo investiga os padrões de compactação em uma cavidade circular bidimensional, onde cadeias lineares de esferas de neodímio são injetadas diametralmente em uma célula de Hele-Shaw contendo um substrato granular inerte. A análise revela que as configurações iniciais dos dipolos e a fração de área do substrato (η) governam a geometria emergente. Para dipolos inicialmente paralelos, o sistema forma laços (*loops*) cujas áreas seguem uma distribuição log-normal — indicando fragmentação hierárquica do espaço — e cuja quantidade escala via lei de potência, enquanto o número de contatos (N_c), entre as partículas magnéticas, permanece invariante. A análise topológica via grafos revelou que o incremento do substrato altera a conectividade da rede: a distribuição de menores caminhos transita de unimodal ($\eta = 0.0$, rede coesa) para bimodal ($\eta > 0.2$), evidenciando a formação de clusters isolados por gargalos de baixa coordenação. Através do método de minimização de energia BFGS, identificou-se que o sistema tende a se organizar em redes de simetria quadrada com domínios antiferromagnéticos, apresentando energias por partícula (u_N) próximas ao limite teórico de cadeias lineares ($u_\infty \approx -2,404$). Propriedades de transporte elétrico foram modeladas tratando os contatos como resistores e utilizando a inversa de Moore-Penrose da matriz Laplaciana. Observou-se que a resistência equivalente atinge picos em diferentes estágios de empacotamento conforme η aumenta, refletindo a transição de caminhos de condução paralelos para seriais. No regime crítico de $\eta = 0,83$, a saturação do substrato impede a nucleação de laços, resultando em um crescimento resistivo monotônico. O estudo demonstra que a distribuição de correntes concentra-se no backbone da rede, validando a integração entre a morfologia de contato e a eficiência de transporte em meios heterogêneos. O estudo amplia a compreensão sobre o comportamento de matéria magnética em sistemas confinados.

Palavras-chave: Interações dipolares magnéticas; empacotamento confinado; minimização da energia BFGS; topologia de redes; propriedades de transporte.

ABSTRACT

Magnetic particle packing exploits dipolar interactions for spontaneous self-organization into chains or ordered structures, with applications in self-responsive systems and the understanding of complex biological structures. This study investigates packing patterns in a two-dimensional circular cavity, where linear chains of neodymium spheres are injected diametrically into a Hele-Shaw cell containing an inert granular substrate. The analysis reveals that the initial dipole configurations and the substrate area fraction (η) govern the emerging geometry. For initially parallel dipoles, the system forms loops whose areas follow a log-normal distribution—indicating hierarchical fragmentation of space—and whose quantity scales via a power law, while the number of contacts (N_c), between magnetic particles, remains invariant. Topological analysis via graphs revealed that increasing the substrate alters the network connectivity: the shortest-path distribution transitions from unimodal ($\eta = 0.0$, cohesive network) to bimodal ($\eta > 0.2$), evidencing the formation of clusters isolated by low-coordination bottlenecks. Through the BFGS energy minimization method, it was identified that the system tends to organize into square symmetry networks with antiferromagnetic domains, presenting energies per particle (u_N) close to the theoretical limit of linear chains ($u_\infty \approx -2.404$). Electrical transport properties were modeled by treating contacts as resistors and utilizing the Moore-Penrose inverse of the Laplacian matrix. It was observed that the equivalent resistance reaches peaks at different packing stages as η increases, reflecting the transition from parallel to serial conduction paths. In the critical regime of $\eta = 0.83$, substrate saturation prevents loop nucleation, resulting in monotonic resistive growth. The study demonstrates that current distribution concentrates on the network backbone, validating the integration between contact morphology and transport efficiency in heterogeneous media. The study expands the understanding of magnetic matter behavior in confined systems.

Keywords: Magnetic dipolar interactions; confined packing; BFGS energy minimization; network topology; transport properties.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 – Empacotamento de fios de cobre em uma cavidade circular bidimensional. (a) Disposição final do fio de cobre confinado na cavidade na máxima taxa de empacotamento de $p_{max} \sim 15\%$; (b) Diagrama de fase morfológica em espiral, plástica e clássicas obtidas numericamente; (c) Fios empacotados em cavidades circulares, obtidas experimentalmente e em simulações, para as diferentes estruturas morfológicas do regime. 17
- Figura 2 – Empacotamento bidimensional de um colar de contas.(a) Imagem ilustrando a configuração de uma única camada de colar-de-contas com diâmetro $D = 1.80$ cm em uma cavidade quadrada; (b) Densidade de empacotamento bidimensional (p) como função da fração de empacotamento (δ) ao longo do colar-de-contas (As linhas tracejadas horizontais representam a densidade máxima de empacotamento das redes quadrada e triangular. A linha vertical, em $\delta^* = 0.688$, indica o limite onde a fração de empacotamento das contas atinge a saturação de p , independentemente de D). 18
- Figura 3 – Empacotamento de cadeias de esferas magnéticas em uma cavidade circular bidimensional. (a) Padrões obtidos por fios formados de esferas magnéticas injetando de lados diametralmente opostos, obtidos por simulação e experimentos; (b) Transições estruturais decorrentes da inclinação do aparato com a injeção do tipo central. 19
- Figura 4 – (a) Esquema para a síntese de nanopartículas de cobalto ferromagnético dipolar usando ligantes de poliestireno, semelhantes a “cílios e flagelos artificiais”; (b) Imagens obtidas por microscopia eletrônica de transmissão para campo claro e campo magnético holográfico de cadeias de partículas de Co (15 nm) de múltiplas nanopartículas de largura; (c) Imagens obtidas por microscopia eletrônica de transmissão de automontagem de ϵ -Co orientada por evaporação de nanocristais. 20

Figura 5	– (a) Tomografia crioeletrônica de cadeias de magnetossomos; (b) Representação esquemática de dois mecanismos concorrentes: força magnética empurrando para alinhar os momentos magnéticos do magnetossomo ao longo das linhas de campo parasitas das partículas vizinhas, e mecanismo baseado em lipídios/proteínas modelado como uma força de recuperação elástica agindo perpendicularmente ao eixo da cadeia	21
Figura 6	– (a) O equipamento experimental: (1) Suporte e Câmera Nikon CoolPix L810; (2) Estrutura de acrílico e madeira para alojar as esferas magnéticas ($L_x = 600\text{ mm}$, $L_y = 605\text{ mm}$); (3) Motor de passo; (4) Nivelador usado para garantir o alinhamento horizontal; (5) Fonte de alimentação controladora do motor de passo. (b) Vista superior do alinhamento inicial e das orientações dos dipolos nas esferas, para a injeção diametralmente oposta. (c) A formação do primeiro laço magnético.	23
Figura 7	– (a) Identificação das seções transversais das esferas via Transformada de Hough em um setor do arranjo (fração de empacotamento $\eta = 0,0$); (b) Representação em grafo das conexões em um setor do sistema; (c) Reconstrução do arranjo de esferas magnéticas baseada no diâmetro médio das partículas detectadas.	24
Figura 8	– Empacotamento final para as diferentes fração de substrato (η): (a) $\eta = 0.0$; (b) $\eta = 0.2$ e (c) $\eta = 0.5$	24
Figura 9	– Morfologias de esferas empacotadas em uma cavidade de Hele-Shaw, onde $\phi_{neo} = \sum A_{neo}/\pi R^2$ e $\eta = \sum A_{abs}/\pi R^2$, sendo A_{abs} a área das esferas plásticas (ABS) e A_{neo} a área da esfera cinza (NdFeB). Fileira superior: Alta concentração de substrato ($\eta = 0.50$). Fileira intermediária: concentração moderada de substrato ($\eta = 0.20$). Fileira inferior: ausência de substrato ($\eta = 0.0$).	27
Figura 10	– Propriedades dos laços no empacotamento de esferas de neodímio. (a) Relação de escala entre o número de laços (N_l) e a fração de empacotamento (ϕ_{neo}), onde os expoentes α crescem com a fração de substrato η . (b) Distribuição de probabilidade $P(A^*)$ das áreas dos laços com ajuste log-normal; as cores abaixo exemplificam a morfologia dessas áreas. O inset detalha a delimitação da região de ocupação de 90% das esferas através de linhas tracejadas amarelas.	28

Figura 11 – Configuração estrutural do sistema para uma fração de substrato $\eta = 0.50$. A ampliação ilustra a coexistência de dois regimes de coordenação: o empacotamento triangular compacto do substrato (verde) e a estrutura quadrada característica das interações dipolares (azuis).	29
Figura 12 – Configuração experimental de empacotamento em regime de saturação ($\eta = 0.83$)	30
Figura 13 – Distribuição da probabilidade das distâncias, em número de vértices d^* , entre os nós observados para as diferentes frações de substrato [$\eta = (0, 0.20, 0.50)$].	31
Figura 14 – Configuração das orientações dos momentos dos dipolos magnéticos, associado ao estado de mínima energia, evidenciando a formação de domínios magnéticos.	33
Figura 15 – Linhas de campo magnético para configurações de esferas magnéticas: (a) Fantasma magnético (Vandewalle e Dorbolo, 2014) e (d) rede triangular; (b) e (e) mostram a caracterização empírica via limalhas de ferro; (c) e (f) apresentam a caracterização analítica, conforme a equação (4.2).	34
Figura 16 – Validação da orientação de dipolos magnéticos. (a) Aparato experimental composto por plataforma de posicionamento, sensores de efeito Hall e teslômetro para medição do campo magnético local, (b) Arranjo físico de esferas magnéticas formando uma cadeia complexa sobre a superfície de ensaio, (c) Sobreposição do arranjo experimental a uma malha de referência para digitalização das coordenadas e mapeamento espacial, (d) Representação vetorial do campo magnético, correlacionando a posição física das esferas com os vetores de momento de dipolo magnético resultantes, (e) Gráfico da densidade de probabilidade $P(\theta)$ em função do ângulo θ , apresentando a comparação entre o modelo teórico (linha azul) e os dados experimentais (linha vermelha).	35
Figura 17 – Linhas de campo magnético para um empacotamento simplificado: (a) caracterização experimental (limalha de ferro) versus (b) modelagem analítica [Eq. (4.2)].	36

- Figura 18 – Perfis da energia u_N em função da fração de empacotamento ϕ_{neo} para diferentes concentrações de substrato (ϕ_{ABS}). As linhas tracejadas indicam os patamares de saturação em $u_N = \{-2.44, -2.43, -2.41\}$. **Inserção:** Magnetização média M_{avr} calculada pela soma dos momentos de dipolo numéricos m_i . O ajuste por lei de potência (linha contínua) indica um decaimento do tipo $M_{avr} \propto \phi^{-1}$ 37
- Figura 19 – Configurações dos empacotamentos: a) $\eta = 0.0$; b) $\eta = 0.2$; c) $\eta = 0.5$. Orientações dos momentos dos dipolos magnéticos associadas ao estado de mínima energia: d) $\eta = 0.0$; e) $\eta = 0.2$; f) $\eta = 0.5$ 38
- Figura 20 – Variação da resistência em redes de laços. (a) Gráfico da razão entre a resistência equivalente (R_e) e a resistência do primeiro contato entre os fios injeridos diametralmente opostos (R_o) em função de ϕ_{neo} para diferentes valores do parâmetro η . O gráfico inserido detalha o valor máximo de R_e/R_o em função de η . (b), (c) e (d) Representações esquemáticas das configurações para $\eta = 0.00$, $\eta = 0.20$ e $\eta = 0.50$, respectivamente, destacando o mínimo caminho entre os pontos extremos, pelo método de Dijkstra. 41
- Figura 21 – Representação esquemática de um circuito elétrico de resistores interconectados, emulando a rede de contatos estabelecida no empacotamento simplificado da Figura 16.b., cuja a $R_{eq} = 214 \pm 4 \Omega$ 42
- Figura 22 – Distribuição de probabilidade $P(i^*)$ das correntes normalizadas i^* para diferentes valores de η . (a) Curva principal de $P(i^*)$ em função de i^* com ajustes log-normal e corte exponencial; o *inset* apresenta os mesmos dados em escala log-log. (b), (c) e (d) Representações visuais dos fluxos de corrente, onde a coloração das arestas indica a intensidade de i^* conforme a barra de cores. 43

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA . . .	16
2.1	O fenômeno do empacotamento	16
2.2	Empacotamento bidimensional	17
2.3	Processo de auto-organização em partículas coesivas	19
2.3.1	<i>Interações Magnéticas e Sistemas Biológicos</i>	20
3	APARATO EXPERIMENTAL	22
4	RESULTADOS	25
4.1	Propriedades geométricas	25
4.1.1	<i>Fundamentos da Rigidez Magneto-Elastica</i>	25
4.1.2	<i>Morfologia e Formação de Laços (Loops)</i>	26
4.1.3	<i>Análise Estatística e Escalonamento</i>	27
4.1.4	<i>Efeito do Substrato e Restrição Geométrica</i>	29
4.1.5	<i>Topologia e Conectividade de Rede</i>	30
4.2	Propriedades físicas	32
4.2.1	<i>Modelagem do Potencial de Interação Magnética</i>	32
4.2.2	<i>Dinâmica de magnetização</i>	39
4.2.3	<i>Transporte elétrico em redes de contato</i>	39
4.2.4	<i>Distribuição de correntes e "Backbone" da rede</i>	42
5	CONCLUSÕES	44
	REFERÊNCIAS	46

1 INTRODUÇÃO

A Física em duas dimensões tem se mostrado de grande relevância tanto para a tecnologia quanto para a ciência fundamental. Um exemplo notável é a premiação de Andre Geim e Kostya Novoselov com o Prêmio Nobel de Física de 2010, em reconhecimento aos seus experimentos com o material bidimensional grafeno. A investigação de regimes de baixa dimensionalidade é particularmente pertinente em ambientes com alta densidade de elementos, onde as interações e a formação de estruturas são influenciadas por restrições espaciais. Sistemas industriais e do mundo real são frequentemente caracterizados por condições de aglomeração, e a combinação de restrições espaciais com ambientes densamente empacotados exerce um efeito significativo no comportamento estatístico de polímeros semiflexíveis, como o DNA, além de na formação de padrões em sistemas granulares fluidos (Sandnes *et al.*, 2007). Exemplos incluem a difusão de proteínas em células (Ellis, 2001; Dix e Verkman, 2008; Zhou *et al.*, 2008), processos de crescimento de raízes (Giuliani *et al.*, 2015), microatuadores magnéticos que utilizam misturas binárias de partículas ferromagnéticas e não magnéticas (Rehman *et al.*, 2024), e a penetração de solo (Khosravi *et al.*, 2019; Jiang *et al.*, 2022; Ge *et al.*, 2024). Apesar dos avanços significativos, uma compreensão consistente e universal de como ambientes aglomerados afetam a estabilidade, o dobramento, as conformações e a formação de padrões continua a ser um desafio.

Para abordar esses fenômenos sob a perspectiva da física fundamental, os teóricos desenvolveram modelos que abrangem uma ampla gama de complexidades. Um dos arcabouços conceituais mais simples e amplamente aceitos é o modelo de "contas em um fio", no qual cada monômero de um polímero é representado como uma conta, e a espinha dorsal do polímero é modelada como um fio flexível. Apesar das diferenças intrínsecas entre cadeias granulares macroscópicas, dominadas por interações dissipativas, e moléculas poliméricas microscópicas, principalmente governadas por forças elásticas, estudos experimentais demonstraram que cadeias granulares densamente empacotadas exibem comportamentos estáticos e dinâmicos notavelmente semelhantes aos previstos para moléculas lineares semiflexíveis na física de polímeros (Chou *et al.*, 2009; Safford *et al.*, 2009; Hill e Pyun, 2014). Pesquisas anteriores mostraram que interações de longo alcance, como forças eletrostáticas e magnéticas, podem induzir dobramentos em sequências de contas, análogas à ligação de hidrogênio em grampos de RNA (Reches *et al.*, 2009). Uma aplicação adicional de sistemas granulares foi demonstrada por Sun *et al.* (2016), que investigaram experimentalmente o comportamento dinâmico e estrutural do derretimento bidimensional em um modelo de sistema granular, utilizando gravação de vídeo e técnicas de

rastreamento de partículas.

Considerando a semelhança entre sistemas poliméricos e granulares, busca-se entender o processo de empacotamento de esferas rígidas para determinar características estruturais macroscópicas em meios porosos e materiais granulares. Esses empacotamentos envolvem predominantemente partículas sólidas e discretas, com tamanhos perceptíveis, que podem variar em forma, tamanho e propriedades mecânicas e químicas. Devido a suas dimensões, a dinâmica desses arranjos não é significativamente influenciada por flutuações térmicas, conferindo-lhes uma notável estabilidade em relação à temperatura (Aranson e Tsimring, 2006; Jaeger *et al.*, 1996).

Quando confinados, materiais granulares formam uma ampla gama de estruturas topológicas, desde arranjos cristalinos ordenados até arranjos amorfos ou desordenados (Francois *et al.*, 2013), impulsionados pelas interações entre suas partículas. Essas interações podem ser não coesivas (contato/atrito) ou coesivas (forças de longo alcance, como em grãos molhados ou magnetizados). Partículas coesivas podem formar cadeias através de vínculos físicos inerentes, como esferas magnéticas que criam fios ou mantas (Hall *et al.*, 2013). No entanto, a formação de cadeias também pode ocorrer com partículas não coesivas, mediada por agentes externos, semelhante a um cordão de contas (Brito *et al.*, 2004). Essas estruturas exibem propriedades de deformação e flexibilidade análogas a hastes elásticas ou metálicas (Donato *et al.*, 2002; Stoop *et al.*, 2008), permitindo a determinação de uma rigidez efetiva à flexão, que pode servir como modelo para prever a dinâmica de flambagem e vibração em arranjos lineares ou circulares (Vella *et al.*, 2014).

A automontagem de partículas coesivas do tipo magnético apresenta uma variedade de aplicações, abrangendo desde a construção de flagelos artificiais microscópicos (Hill e Pyun, 2014) e a filtragem de água (Yavuz *et al.*, 2006), até a fabricação de dispositivos eletrônicos (J *et al.*, 2000) e o design de novos vírus sintéticos (Perez *et al.*, 2003). Neste trabalho, investigamos experimentalmente misturas binárias de partículas magnéticas e não magnéticas em uma cavidade de Hele-Shaw. A formação de padrões é analisada à medida que esferas magnéticas de neodímio-ferro-boro (NdFeB) são inseridas quase estaticamente em um ambiente repleto de esferas de acrilonitrila butadieno estireno (ABS). A cavidade é homogênea e aleatoriamente preenchida com ABS, garantindo que apenas interações de contato de curto alcance ocorram entre as esferas dipolares magnetizadas e as contas de polímero. Para verificar como a fração de empacotamento influencia a geometria e a topologia das estruturas resultantes, organizamos sistematicamente o

experimento em três casos distintos, cada um definido por um número diferente de contas de ABS. Apesar das variações na adição progressiva das contas de ABS, o sistema exhibe morfologias finais semelhantes, demonstrando a robustez das estruturas em forma de laços previamente relatadas em Borges *et al.* (2021a) e Borges *et al.* (2021b).

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 O fenômeno do empacotamento

Os fenômenos relacionados ao empacotamento de diversos materiais têm demonstrado uma importância crescente e transversal nos campos científico, tecnológico e industrial. A busca pela otimização do espaço ocupado por objetos permeia desde a logística microscópica da natureza até as grandes cadeias de montagem. Em ambientes de produção industrial contemporâneos, a engenharia busca incessantemente encontrar a configuração mais densa e econômica dentro de uma geometria confinante. Esse esforço é aplicado em frentes variadas, como na instalação estratégica de redes de antenas de comunicação, onde o arranjo espacial determina a eficiência do sinal e a redução de interferências (Kazakov *et al.*, 2018).

Na biologia molecular, o empacotamento deixa de ser uma questão de custo logístico e se torna uma condição essencial para a vida. A compreensão dos processos envolvidos no confinamento do DNA em cápsulas virais — estruturas extremamente reduzidas em comparação ao comprimento da cadeia genética — revela mecanismos de pressão e organização que desafiam a física clássica (Katzav *et al.*, 2006). Embora esses arranjos ocorram em escalas tão distintas (do macro ao nanoscópico), eles compartilham princípios físicos universais: a presença de simetrias intrínsecas e a correlação direta entre as dimensões topológicas das geometrias confinantes e as propriedades dos objetos confinados.

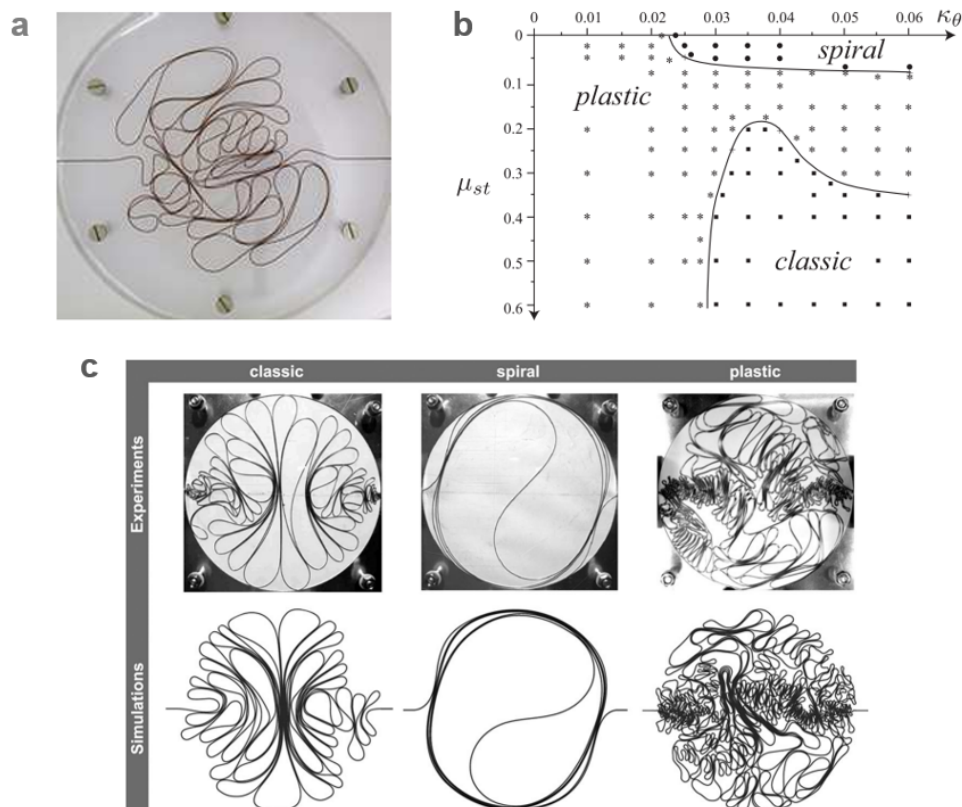
Historicamente, o rigor matemático desse tema foi consolidado por figuras como David Hilbert. Em 1900, Hilbert apresentou em Paris uma lista de 23 problemas não resolvidos que serviriam de bússola para a ciência do século XX (Hilbert, 1900). Entre eles, estava a investigação de métodos teóricos e empíricos que pudessem maximizar o preenchimento do espaço por objetos iguais, baseando-se nos princípios da geometria euclidiana. Essa busca ecoava as intuições de Johannes Kepler em 1611, que propôs que o empilhamento piramidal de faces centradas seria o arranjo mais denso possível (a Conjectura de Kepler). Somente séculos depois, em 1998, Thomas Hales apresentou uma prova assistida por computador, confirmada em 2014 pelo projeto Flyspeck, validando que a configuração mais densa para esferas de mesmo raio é, de fato, o arranjo cúbico de face centrada (Hales, 1997). Assim, o estudo de cavidades finitas e a forma como objetos se acomodam nelas permanece um pilar de interesse tanto prático quanto teórico.

2.2 Empacotamento bidimensional

Ao transitar para o domínio bidimensional, a análise do empacotamento revela-se um campo onde a busca pela eficiência geométrica converge com a ciência dos materiais e a engenharia. Essa disposição econômica de elementos em superfícies planas manifesta-se tanto em materiais contínuos quanto discretos: enquanto o manejo de rolos de papel e tecidos, por exemplo, focam na minimização de resíduos industriais, o empacotamento de peças sólidas exige uma compreensão rigorosa da geometria para reduzir o espaço vazio ao mínimo.

Um dos experimentos referenciais mais significativos neste campo foi conduzido por Donato *et al.* (2002) sobre a injeção de fios de cobre em cavidades circulares. Observou-se que o fio, ao ser confinado, organiza-se em laços de dimensões decrescentes até que o aumento da densidade promova uma rigidez estrutural crítica. Esse processo culmina em um bloqueio abrupto do sistema quando a fração máxima de empacotamento atinge $p_{max} \approx 15\%$ (Figura 1.a).

Figura 1 – Empacotamento de fios de cobre em uma cavidade circular bidimensional. (a) Disposição final do fio de cobre confinado na cavidade na máxima taxa de empacotamento de $p_{max} \sim 15\%$; (b) Diagrama de fase morfológica em espiral, plástica e clássicas obtidas numericamente; (c) Fios empacotados em cavidades circulares, obtidas experimentalmente e em simulações, para as diferentes estruturas morfológicas do regime.

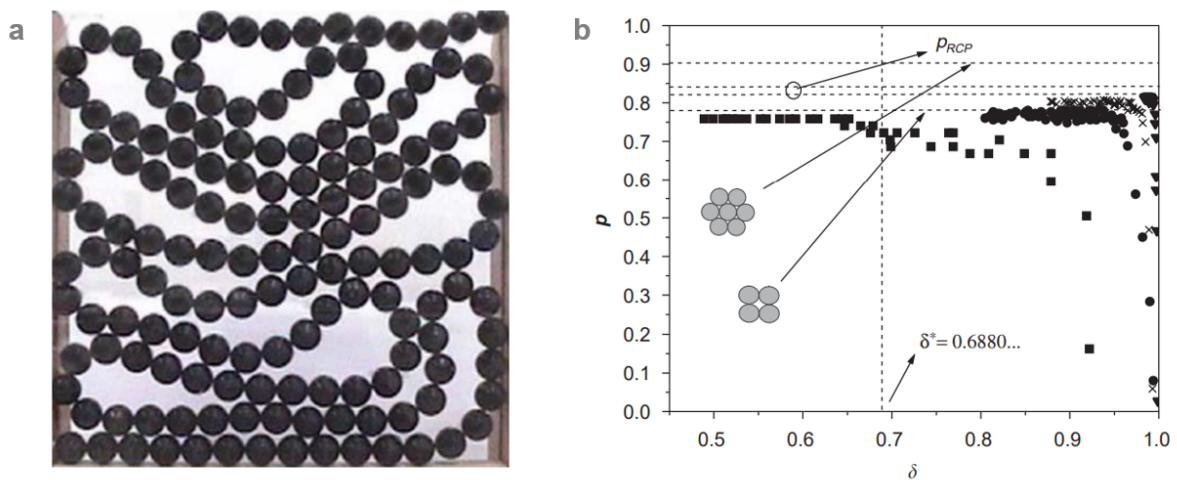


Fonte: Donato *et al.* (2002) e Stoop *et al.* (2008).

Aprofundando essa dinâmica, Stoop *et al.* (2008) introduziram diagramas de fases morfológicas (Figura 1.b), demonstrando que variáveis físicas como o atrito e o escoamento plástico são determinantes para que o material assuma configurações clássicas, espirais ou plásticas, permitindo a predição do comportamento de materiais flexíveis sob confinamento extremo (Figura 1.c).

Essa complexidade mecânica estende-se a sistemas de partículas conectadas, conhecidos como "colares de contas". Investigando o comportamento desses colares em cavidades quadradas (Figura 2.a), Brito *et al.* (2004) estabeleceram conexões entre a mecânica clássica de Bernoulli e Euler e a biologia moderna, utilizando o modelo como analogia para fibras cromossômicas (Uzman, 2001). A pesquisa demonstrou que a densidade de empacotamento (p) é intrinsecamente dependente da fração de empacotamento (δ) ao longo do próprio cordão. Identificou-se um limiar crítico em $\delta^* = 0.688$, ponto a partir do qual a densidade do sistema pode decrescer devido a restrições geométricas (Figura 2.b). Esse fenômeno evidencia que a conectividade física do cordão sacrifica a liberdade individual das partículas, subvertendo as regras convencionais aplicadas a discos independentes.

Figura 2 – Empacotamento bidimensional de um colar de contas.(a) Imagem ilustrando a configuração de uma única camada de colar-de-contas com diâmetro $D = 1.80$ cm em uma cavidade quadrada; (b) Densidade de empacotamento bidimensional (p) como função da fração de empacotamento (δ) ao longo do colar-de-contas (As linhas tracejadas horizontais representam a densidade máxima de empacotamento das redes quadrada e triangular. A linha vertical, em $\delta^* = 0.688$, indica o limite onde a fração de empacotamento das contas atinge a saturação de p , independentemente de D).

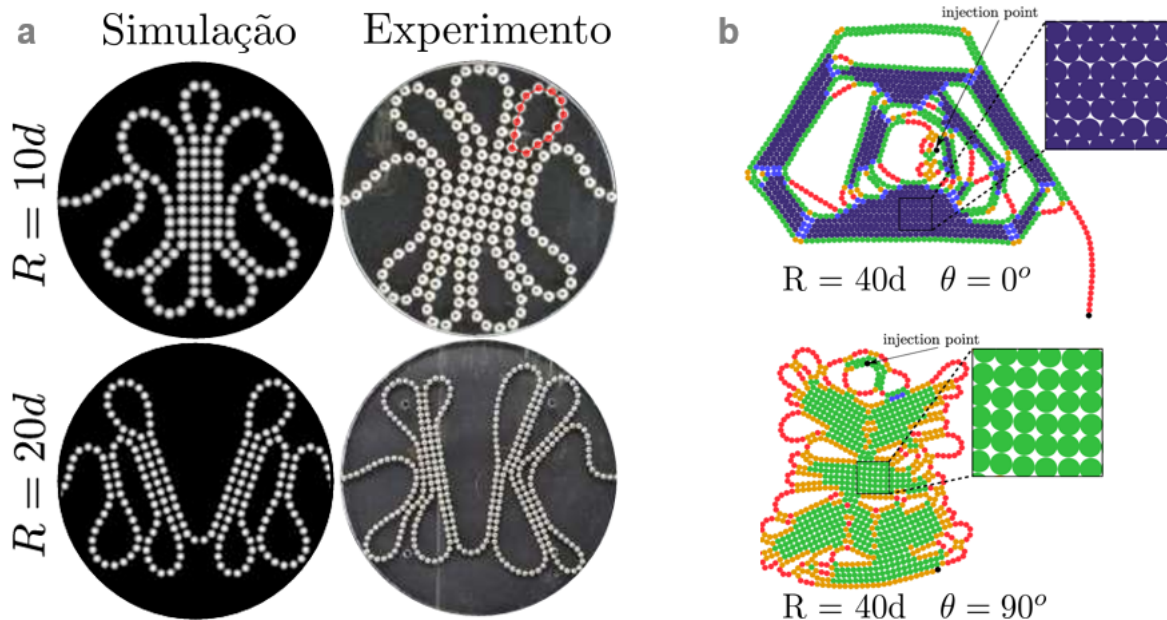


Fonte: Brito *et al.* (2004).

Complementando essa análise, o estudo de cadeias magnéticas em cavidades circulares, semelhantes às células de Hele-Shaw, revela como forças de campo influenciam a

auto-organização. Segundo Borges (2021), a interação entre dipolos magnéticos durante a injeção dessas cadeias gera padrões governados pela estabilidade energética. Quando cadeias são inseridas de lados opostos, a competição entre a rigidez elástica e a tendência a organização dos polos magnéticos resulta em redes quadradas ou triangulares que formam padrões petaloides (Figura 3.a) ou em espiral. Já a injeção central demonstra uma sensibilidade à inclinação do sistema, provocando transições estruturais de arranjos hexagonais para quadrados, consolidando a ideia de que o empacotamento 2D é um equilíbrio delicado entre restrições físicas, conectividade e forças fundamentais (Figura 3.b).

Figura 3 – Empacotamento de cadeias de esferas magnéticas em uma cavidade circular bidimensional. (a) Padrões obtidos por fios formados de esferas magnéticas injetando de lados diametralmente opostos, obtidos por simulação e experimentos; (b) Transições estruturais decorrentes da inclinação do aparato com a injeção do tipo central.



Fonte: Borges *et al.* (2021b).

2.3 Processo de auto-organização em partículas coesivas

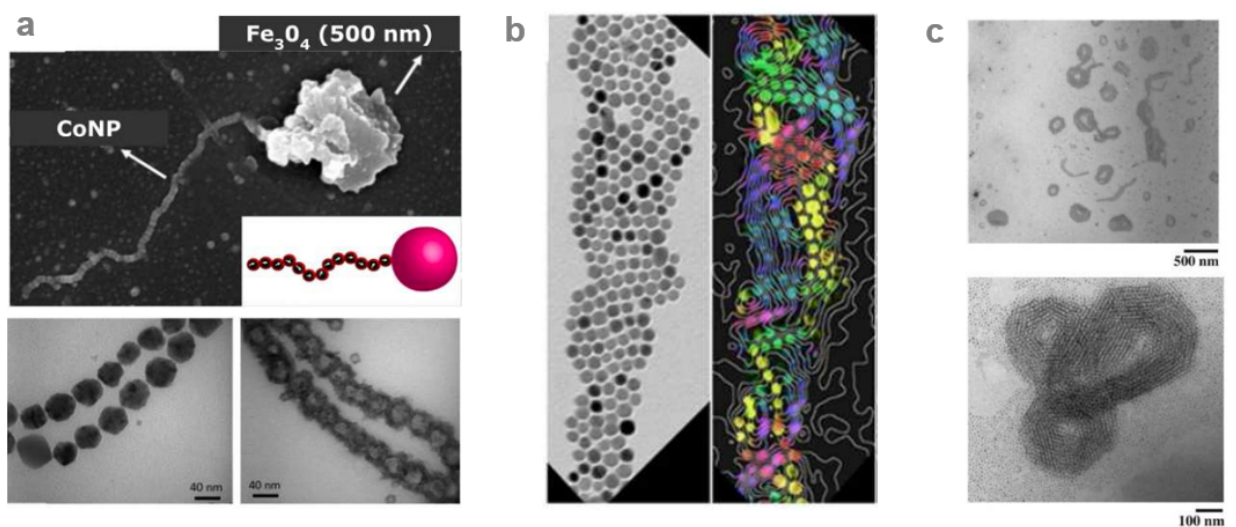
Quando se aplicam os materiais granulares ao processo de empacotamento, estes mostram-se equivalentes a muitos outros sistemas físicos, sejam eles microscópicos ou macroscópicos. De modo geral, estes materiais podem ser utilizados como modelos para o estudo das propriedades que emergem nesses sistemas, dentro e fora do equilíbrio (Borges *et al.*, 2021b). Quando os materiais granulares são do tipo coesivo, o empacotamento dessas partículas explora as interações entre si para a formação espontânea de cadeias ou estruturas ordenadas, o que se denomina processo de auto-organização.

A auto-organização de partículas desempenha um papel significativo tanto nas pesquisas científicas quanto na fabricação de sistemas de elementos em nanoescala. Esses estudos abrangem desde sistemas quânticos, que envolvem elétrons, até sistemas coloidais, que incluem partículas carregadas ou magnetizadas. Essas aplicações estimulam o desenvolvimento de dispositivos de tamanho reduzido, impactando diretamente a sociedade em questões como mobilidade e velocidade dos processos executados por aparelhos eletrônicos de diversas funções (Domingos, 2013) ou na criação de microrrobôs para o transporte direcionado de fármacos.

2.3.1 Interações Magnéticas e Sistemas Biológicos

A investigação de interações anisotrópicas, cujas propriedades variam conforme a direção, revela-se crucial na compreensão de sistemas biológicos. Exemplo disso são as bactérias magnetotáticas e os coloides magnéticos, que utilizam o magnetismo para orientação espacial. Nesse âmbito, Hill e Pyun (2014) sintetizaram "polímeros coloidais" a partir de cadeias de nanopartículas ferromagnéticas de cobalto revestidas por polímeros. Tais estruturas interagem espontaneamente e podem ser empregadas na construção de cílios e flagelos artificiais, capazes de converter energia magnética externa em trabalho mecânico (Figura 4.a).

Figura 4 – (a) Esquema para a síntese de nanopartículas de cobalto ferromagnético dipolar usando ligantes de poliestireno, semelhantes a “cílios e flagelos artificiais”; (b) Imagens obtidas por microscopia eletrônica de transmissão para campo claro e campo magnético holográfico de cadeias de partículas de Co (15 nm) de múltiplas nanopartículas de largura; (c) Imagens obtidas por microscopia eletrônica de transmissão de automontagem de ϵ -Co orientada por evaporação de nanocristais.

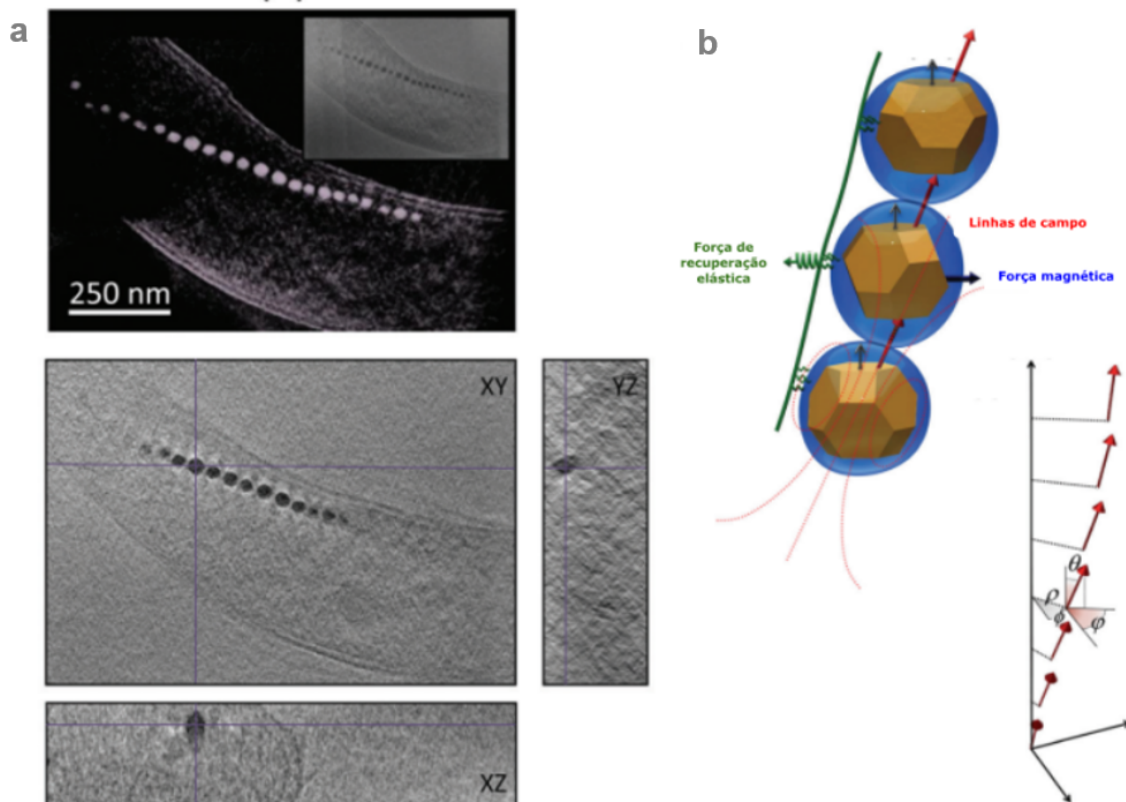


Fonte: Hill e Pyun (2014), Varón *et al.* (2013) e Ku *et al.* (2010).

Complementarmente, Varón *et al.* (2013) demonstraram que nanopartículas de cobalto podem exibir ordem ferromagnética mesmo em arranjos inicialmente desordenados, uma propriedade essencial para o desenvolvimento de sensores magnéticos avançados (Figura 4.b). Além disso, Ku *et al.* (2010) exploraram a dinâmica de não-equilíbrio durante a evaporação de solventes em soluções de nanocristais; os autores evidenciaram que a cinética do processo e a intensidade do dipolo magnético são os fatores determinantes para a emergência de morfologias que divergem dos padrões convencionais de mínima energia estática (Figura 4.c).

Por fim, o estudo de Orue *et al.* (2018), sobre a bactéria *Magnetospirillum gryphiswaldense* (Figura 5.a), oferece a conexão final entre física e biologia. As cadeias de magnetossomos sintetizadas por essas bactérias apresentam uma curvatura sutil, resultado da competição entre a energia elástica (mantida por membranas lipídicas e proteínas) e a interação magnetostática entre as partículas (Figura 5.b). Este modelo serve como base para o desenvolvimento de microrrobôs biológicos guiados por campos magnéticos para a entrega de medicamentos em seres vivos.

Figura 5 – (a) Tomografia crioelétrica de cadeias de magnetossomos; (b) Representação esquemática de dois mecanismos concorrentes: força magnética empurrando para alinhar os momentos magnéticos do magnetossomo ao longo das linhas de campo parasitas das partículas vizinhas, e mecanismo baseado em lipídios/proteínas modelado como uma força de recuperação elástica agindo perpendicularmente ao eixo da cadeia



Fonte: Orue *et al.* (2018).

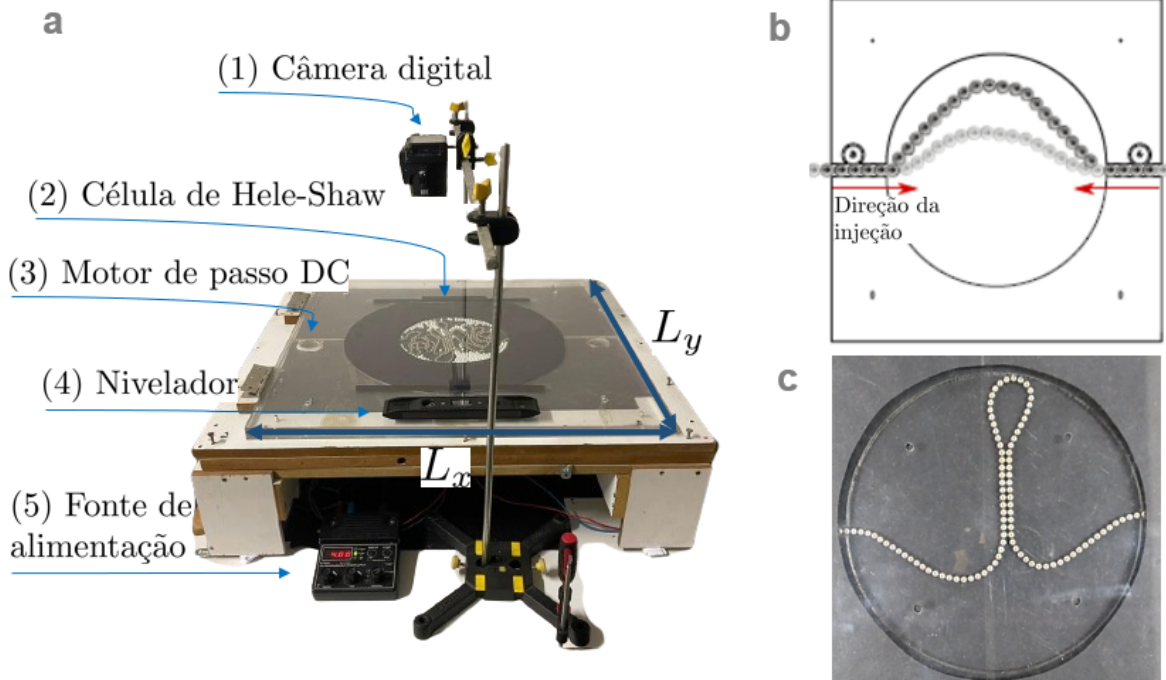
3 APARATO EXPERIMENTAL

Os experimentos foram conduzidos com a inserção homogênea e aleatória de esferas brancas de acrilonitrila butadieno estireno (ABS) em uma cavidade de Hele-Shaw. As esferas de ABS tinham um diâmetro de $d_{ABS} = 6$ mm. A cavidade de Hele-Shaw é um cilindro transparente feito de polimetil metacrilato (PMMA), composta por duas placas sobrepostas com espessura de 6 mm e fixadas sob uma placa principal de madeira (Figura 6.a). A placa inferior apresenta uma cavidade circular rígida com um raio de $R = 100$ mm. Conforme mostrado na Fig. 6.b, dois fios magnéticos compostos por esferas cinzas de neodímio alinhadas foram posicionados diametralmente opostos um ao outro em uma lacuna entre duas placas de acrílico. As esferas de neodímio tinham um diâmetro de $d_{neo} = 5$ mm e um momento de dipolo magnético de $m = 6.25 \times 10^{-2} A.m^2$ (Wafflard *et al.*, 2025). Duas engrenagens de acrílico foram ativadas por um motor de passo com torque máximo de 8.50 kgf.cm, conectado a uma fonte de tensão de 4V, promovendo a rotação em um regime quase-estático que empurrou o fio magnético linearmente para dentro da cavidade. Durante este processo, as esferas foram introduzidas a uma taxa de 0.40 cm/s, dobrando-se e compactando-se no interior da cavidade em estruturas de "laços" (Figura 6.c). Os tamanhos dos fios magnéticos inseridos foram previamente determinados, visando a iminência do entupimento do arranjo.

Aplicando as equações de Maxwell e as devidas condições de contorno, observa-se que as linhas de campo magnéticas oriundas das esferas de neodímio, não possuem origem ou destino específico, o contrário do que ocorre na eletrostática, o que do ponto de vista físico, reduz-se a $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (Griffiths, 2013). Objetos magnetizados têm polos norte e sul. Isso permite duas configurações iniciais para a injeção de fios magnéticos: orientação paralela (dipolos na mesma direção e sentido) e orientação antiparalela (dipolos na mesma direção, mas sentidos opostos). Ao impor estas condições, verificou-se a formação de arranjos morfológicamente distintos, denominados de "Loop" e "Espiral" (Borges, 2016), respectivamente. Para esse trabalho, foram utilizados as orientações paralelas como mostrado na Figura 6.b.

Os sistemas são analisados processando sequências de imagens com resoluções de aproximadamente 1280×720 pixels, adquiridas por uma câmera Nikon COOLPIX L810 a 30 fps. O campo de visão foi 380×220 mm, de modo que a resolução espacial foi de aproximadamente 3.4 px/mm. Além disso, as posições das partículas foram estimadas pela Transformada de Hough (Yuen *et al.*, 1990) usando scripts MATLAB, a fim de identificar as estruturas de empacotamento bidimensionais dentro da cavidade (Figura 7.a). Nenhuma calibração para corrigir distorções

Figura 6 – (a) O equipamento experimental: (1) Suporte e Câmera Nikon CoolPix L810; (2) Estrutura de acrílico e madeira para alojar as esferas magnéticas ($L_x = 600\text{ mm}$, $L_y = 605\text{ mm}$); (3) Motor de passo; (4) Nivelador usado para garantir o alinhamento horizontal; (5) Fonte de alimentação controladora do motor de passo. (b) Vista superior do alinhamento inicial e das orientações dos dipolos nas esferas, para a injeção diametralmente oposta. (c) A formação do primeiro laço magnético.

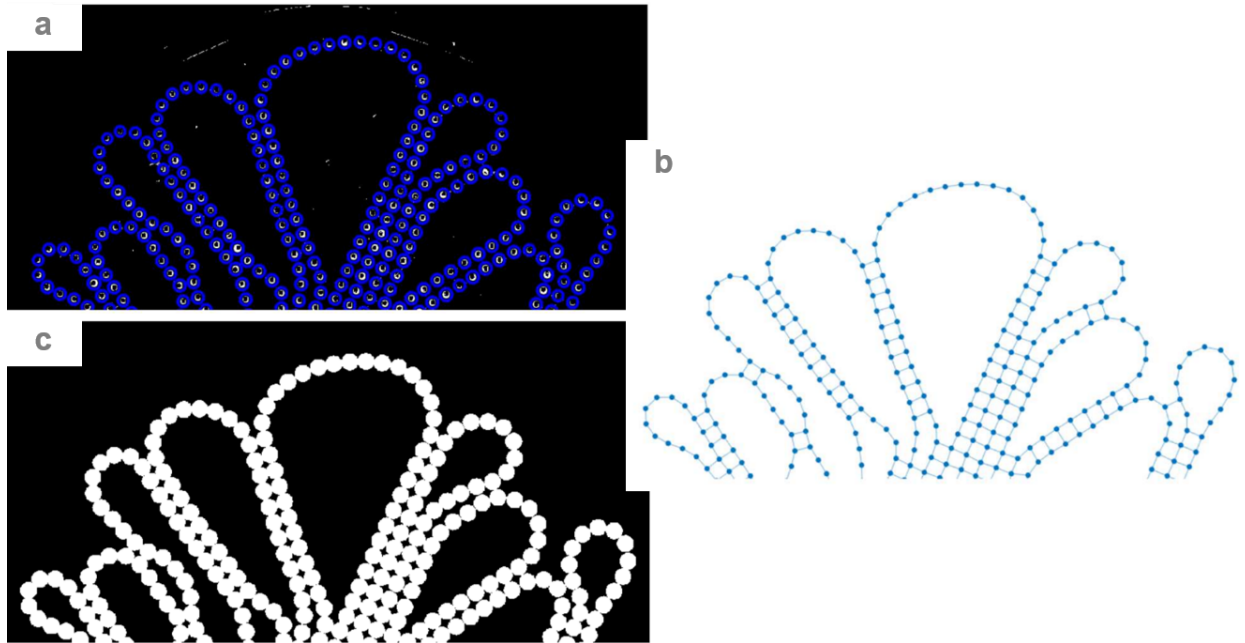


Fonte: O autor.

ópticas foi feita para manter a imagem próxima ao centro da lente. Para mitigar possíveis erros de centralidade das esferas, optou-se pela criação de uma representação computacional do arranjo. Esta representação incorpora a distância média entre os primeiros vizinhos de cada centro detectado, determinada pela construção do grafo (Figura 7.b). Cada esfera caracterizada é então preenchida com uma seção circular, cujo raio corresponde à metade do diâmetro médio calculado (Figura 7.c).

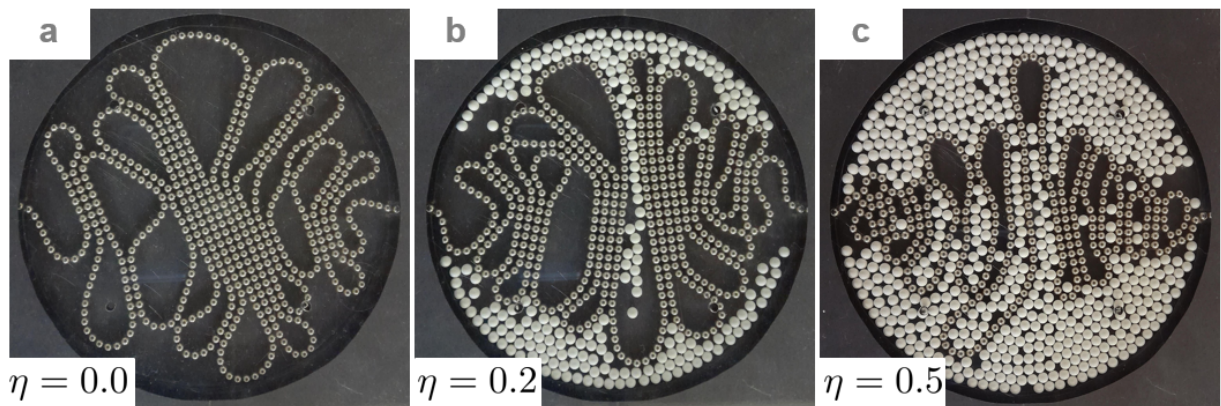
A fim de racionalizar como um ambiente aglomerado, preenchido com esferas ABS, influencia o empacotamento de neodímio, os experimentos foram estruturados em três configurações distintas. Cada caso foi caracterizado por uma quantidade específica de esferas de ABS (N_{ABS}) associada a diferentes frações de empacotamento: (i) $N_{ABS} = 0$ ($\eta = 0,0$), (ii) $N_{ABS} = 222$ ($\eta = 0,2$) e (iii) $N_{ABS} = 556$ ($\eta = 0,5$) (Figura 8). Foram realizadas 30 réplicas para cada configuração, totalizando um conjunto de 90 ensaios experimentais.

Figura 7 – (a) Identificação das seções transversais das esferas via Transformada de Hough em um setor do arranjo (fração de empacotamento $\eta = 0,0$); (b) Representação em grafo das conexões em um setor do sistema; (c) Reconstrução do arranjo de esferas magnéticas baseada no diâmetro médio das partículas detectadas.



Fonte: O autor

Figura 8 – Empacotamento final para as diferentes fração de substrato (η): (a) $\eta = 0,0$; (b) $\eta = 0,2$ e (c) $\eta = 0,5$.



Fonte: O autor

4 RESULTADOS

Nesta seção, foram investigadas as propriedades geométricas e físicas que emergem do empacotamento de fios magnéticos flexíveis em cavidades bidimensionais. Este sistema atua como um laboratório fenomenológico onde a rigidez à flexão, o confinamento geométrico e as interações dipolares competem para ditar a morfologia final do aglomerado. Através de uma abordagem multifacetada, analisou-se desde a estatística de formação de laços e as leis de escala da fração de empacotamento até a evolução da magnetização líquida e a resposta de transporte elétrico do sistema. Foi demonstrado como a presença de um substrato granular não magnético (η) atua como um parâmetro de controle crítico, capaz de induzir transições topológicas que alteram fundamentalmente a conectividade e as propriedades efetivas do meio heterogêneo resultante.

4.1 Propriedades geométricas

O empacotamento de filamentos em cavidades bidimensionais (2D) serve como um sistema-modelo para investigar a interdependência entre restrições geométricas, elasticidade e efeitos estatísticos (Donato *et al.*, 2002). Embora cadeias magnéticas sejam inerentemente discretas, as interações dipolares entre os grãos estabelecem um acoplamento que mimetiza a resposta elástica de um meio contínuo (Vella *et al.*, 2014). Essa elasticidade efetiva atua como uma força restauradora da linearidade, permitindo uma análise comparativa entre cadeias granulares magnéticas e fios elásticos convencionais.

4.1.1 Fundamentos da Rigidez Magneto-Elástica

A transição de uma cadeia granular para um comportamento de "fio elástico" é governada pela razão entre o momento fletor aplicado e a curvatura induzida (κ), denominada de rigidez à flexão (K). Para um fio polimérico homogêneo de raio r , essa rigidez é puramente mecânica, definida por $K = \frac{\pi}{4} Y r^4$, onde r é o raio da seção transversal e Y é o módulo de Young. Com base apenas em considerações dimensionais, pode-se esperar que uma cadeia magnética tenha uma rigidez à flexão efetiva da forma 4.1.

$$K_{eff} = \frac{B^2 r_{neo}^4}{\mu_0} f(r_{neo} \kappa, N) \quad (4.1)$$

onde, $f(rK, N)$ representa uma função adimensional da curvatura da cadeia e do número de esferas (N), B é a intensidade do campo magnético e $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{NA}^{-2}$ é a permeabilidade magnética do espaço livre. A rigidez efetiva (K_{eff}) pode ser derivada comparando-se a energia de deformação de um anel fechado com a de uma cadeia linear. Como o anel tem uma energia mais alta; há uma penalidade energética a ser paga ao dobrar a cadeia em um loop fechado. Ao identificar essa energia com a de um anel elástico, obtemos uma rigidez à flexão efetiva igual a $K_{eff} \approx 0.239 \frac{B^2 r_{neo}^4}{\mu_0}$. Isso corresponde a um módulo de Young efetivo $Y_{eff} \approx 400 \text{ kPa}$, indicando que o sólido magnético é um material bastante macio. (Vella *et al.*, 2014).

Este parâmetro é fundamental para compreender fenômenos macroscópicos, como a capacidade de correntes magnéticas suportarem o próprio peso ou a resistência à flexão em cilindros magnetizados, comportamentos que validam a analogia com materiais elásticos convencionais.

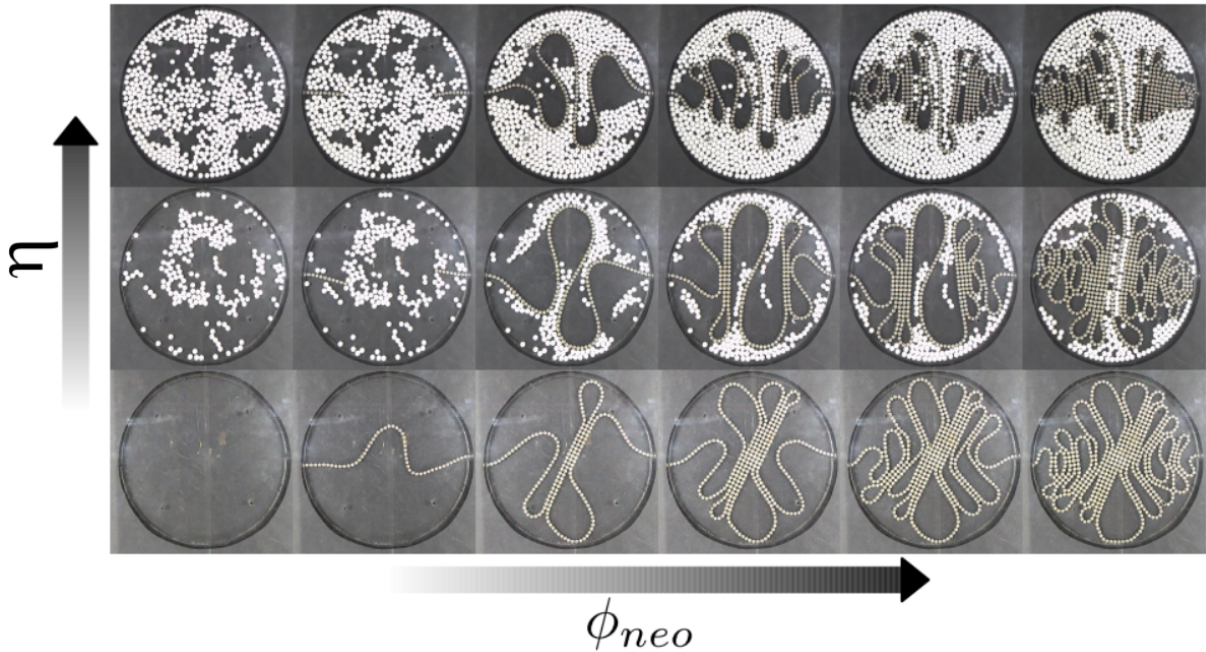
4.1.2 Morfologia e Formação de Laços (Loops)

A característica morfológica predominante nesse processo de confinamento é a formação de laços (Stoop *et al.*, 2008; Donato *et al.*, 2003). Um laço é definido como uma área fechada delimitada pelo autocontato do filamento, surgindo quando a redução do volume livre minimiza a energia elástica através de novos contatos.

Diferentemente dos sistemas puramente elásticos, os arranjos magnéticos exibem o fenômeno da frustração dipolar. Em confinamentos densos, os dipolos enfrentam impedimentos cinéticos que impossibilitam o alinhamento simultâneo com a direção da cadeia e com os vizinhos adjacentes (Wafflard *et al.*, 2024). Esse estado de frustração gera torques magnéticos internos que impedem o sistema de atingir o estado fundamental de energia mínima, uma característica ausente em fios metálicos (Donato, 2006).

A evolução estrutural do sistema é quantificado pela densidade de laços em função da fração de empacotamento (ϕ_{neo}) (Figura 9). À medida que o filamento é injetado, o sistema transita de um regime de fluxo dinâmica para o estado de bloqueio, atingindo uma densidade crítica de empacotamento (ϕ_{neo}^J).

Figura 9 – Morfologias de esferas empacotadas em uma cavidade de Hele-Shaw, onde $\phi_{neo} = \sum A_{neo}/\pi R^2$ e $\eta = \sum A_{abs}/\pi R^2$, sendo A_{abs} a área das esferas plásticas (ABS) e A_{neo} a área da esfera cinza (NdFeB). Fileira superior: Alta concentração de substrato ($\eta = 0.50$). Fileira intermediária: concentração moderada de substrato ($\eta = 0.20$). Fileira inferior: ausência de substrato ($\eta = 0.0$).



Fonte: O autor

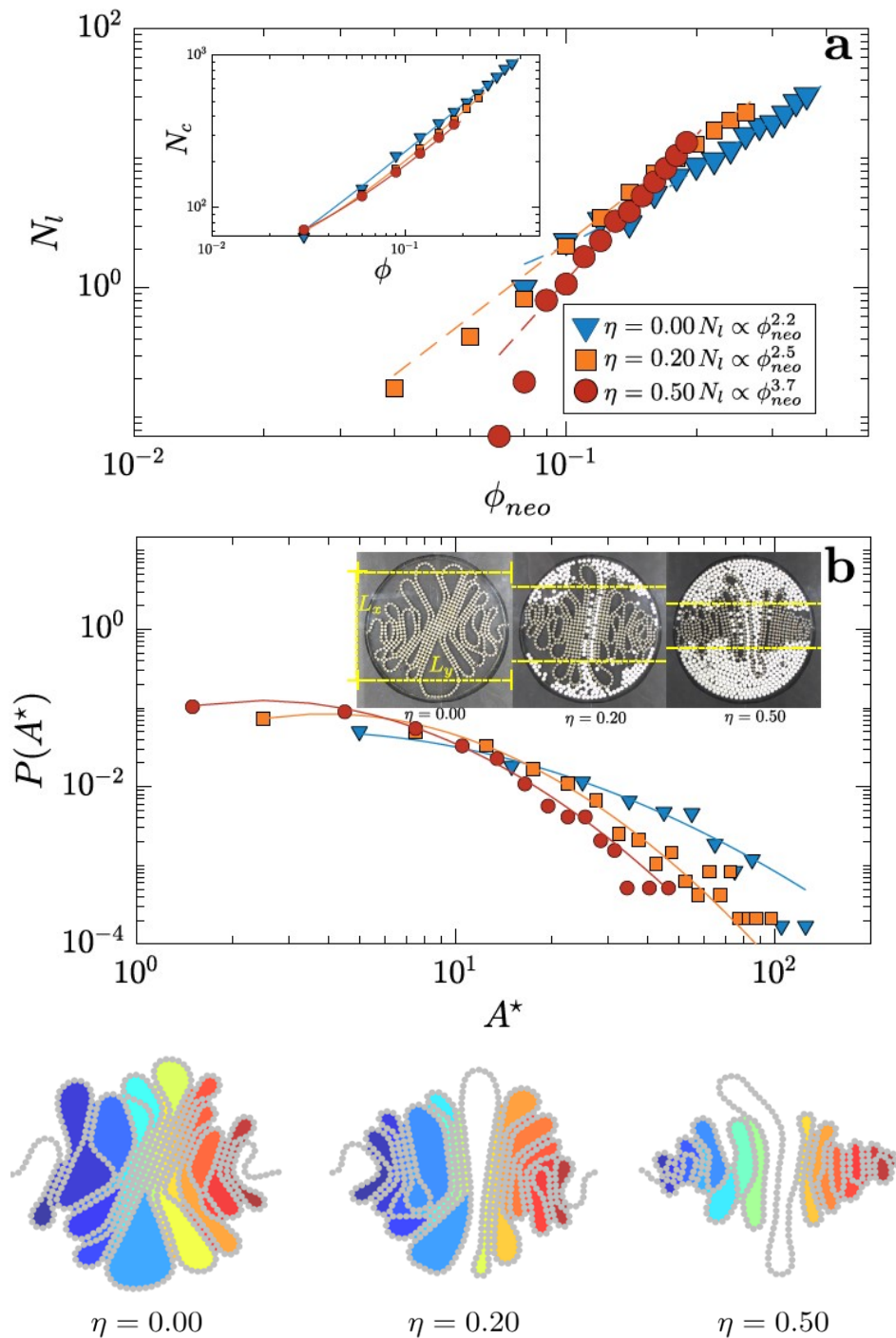
4.1.3 Análise Estatística e Escalonamento

A caracterização fenomenológica do sistema revela duas leis fundamentais:

- Lei de potência: O número total de laços (N_l) escala com a fração de empacotamento conforme $N_l \propto \phi_{neo}^\alpha$ (Borges *et al.*, 2021b). Os expoentes obtidos (α entre 2.2 e 3.7) variam com a concentração de substrato (η) (Figura 10.a), evidenciando um comportamento crítico e a ausência de uma escala de comprimento característica, típica de estruturas fractais e sistemas auto-organizados (Stanley, 1987).
- Distribuição de Áreas: A área dos laços (A^*) segue um perfil log-normal (Figura 10.b). Esta distribuição constitui uma assinatura estatística de processos multiplicativos e estocásticos, regidos pela relação de recorrência $r_n = A_{n+1}^*/A_n^* < 1$, na qual a área de um laço subsequente é uma fração da área precedente. Isso indica que a fragmentação do espaço vazio ocorre de forma hierárquica, onde a área de um novo laço é uma fração proporcional ao espaço disponível remanescente (Redner, 1990). Exemplos notáveis incluem a distribuição do comprimento da crista em papel amassado (Blair e Kudrolli, 2005; Sultan e Boudaoud, 2006) e a distribuição do tamanho do laço em fios amassados

bidimensionais (Witten, 2007; Donato *et al.*, 2002).

Figura 10 – Propriedades dos laços no empacotamento de esferas de neodímio. **(a)** Relação de escala entre o número de laços (N_l) e a fração de empacotamento (ϕ_{neo}), onde os expoentes α crescem com a fração de substrato η . **(b)** Distribuição de probabilidade $P(A^*)$ das áreas dos laços com ajuste log-normal; as cores abaixo exemplificam a morfologia dessas áreas. O *inset* detalha a delimitação da região de ocupação de 90% das esferas através de linhas tracejadas amarelas.

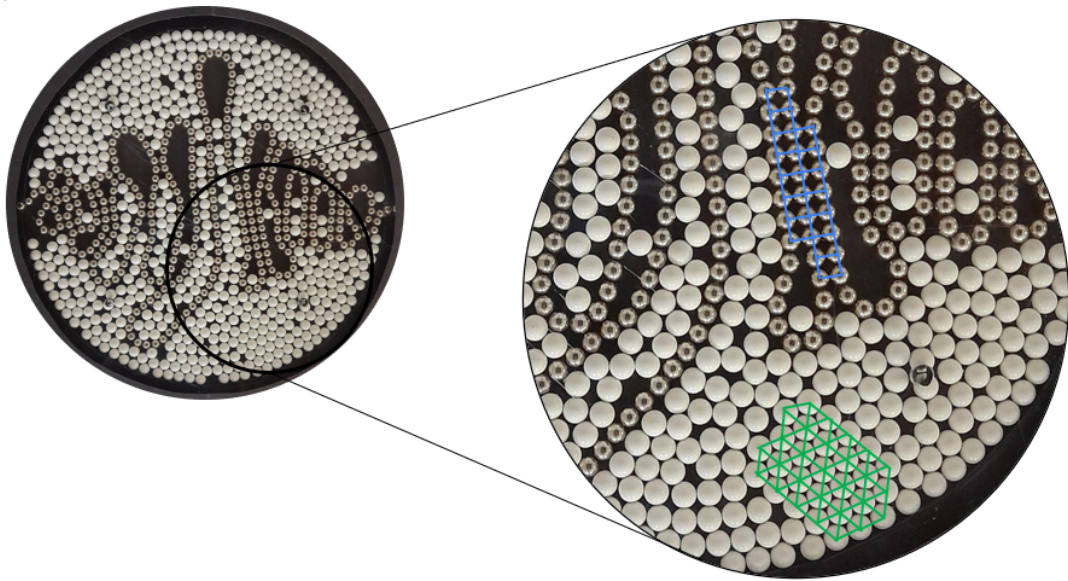


Fonte: O autor

4.1.4 Efeito do Substrato e Restrição Geométrica

A presença do substrato (η) altera drasticamente a morfologia do empacotamento (Figura 9). A rigidez à flexão efetiva dos filamentos, ao interagir com as restrições geométricas da cavidade, induz o deslocamento radial do substrato para a periferia. Este processo resulta em uma segregação estrutural evidente: enquanto o substrato converge para um empacotamento triangular de máxima densidade, as esferas dipolares auto-organizam-se em uma rede de simetria quadrada (Figura 11). Essa configuração coordenada favorece a formação de uma cascata de laços geometricamente homogêneos, cujas áreas apresentam uma distribuição estatística de baixa dispersão (Figura 10.b).

Figura 11 – Configuração estrutural do sistema para uma fração de substrato $\eta = 0.50$. A ampliação ilustra a coexistência de dois regimes de coordenação: o empacotamento triangular compacto do substrato (verde) e a estrutura quadrada característica das interações dipolares (azuis).



Fonte: O autor

O aumento de η eleva a razão de aspecto ($a_{neo} = L_y/L_x$) do espaço ocupado pelas esferas de neodímio, acelerando a formação de laços menores e mais compactos (Figura 10.b). Conseqüentemente, em ambientes altamente aglomerados, o empacotamento crítico (ϕ_{neo}^J) é reduzido e a complexidade estrutural emerge precocemente.

No limite de saturação da cavidade por substratos plásticos ($\eta = 0.83$), observa-se uma transição crítica na configuração do empacotamento. Nesta configuração de preenchimento máximo, a liberdade conformacional da cadeia magnética é severamente restringida pelo campo

de obstáculos, eliminando a capacidade do sistema de gerar laços ou estruturas complexas. A morfologia resultante (Figura 12) caracteriza-se por uma trajetória quase unidimensional, onde a cadeia é forçada a serpentear por entre os interstícios deixados pela rede densa de esferas plásticas.

Figura 12 – Configuração experimental de empacotamento em regime de saturação ($\eta = 0.83$)



Fonte: O autor

4.1.5 Topologia e Conectividade de Rede

Embora as distinções morfológicas entre os arranjos sejam qualitativamente evidentes na Figura 9, a caracterização quantitativa das propriedades de transporte requer uma análise topológica rigorosa. Para tanto, o sistema foi modelado como um grafo, onde cada esfera representa um nó e os contatos físicos definem as arestas (Figura 7.c). Investigou-se a distribuição de probabilidade das distâncias de menor caminho (d^*) que conectam um nó genérico d_j a todos os demais da rede (Figura 13). As distribuições resultantes foram ajustadas por uma sobreposição de funções gaussianas, permitindo identificar diferentes regimes de conectividade.

Na ausência de substrato ($\eta = 0.0$), a distribuição de distâncias é estritamente unimodal, apresentando um pico pronunciado em $d^* \approx 23$. O decaimento abrupto após o valor máximo indica uma estrutura altamente integrada, na qual as distâncias entre nós são curtas e

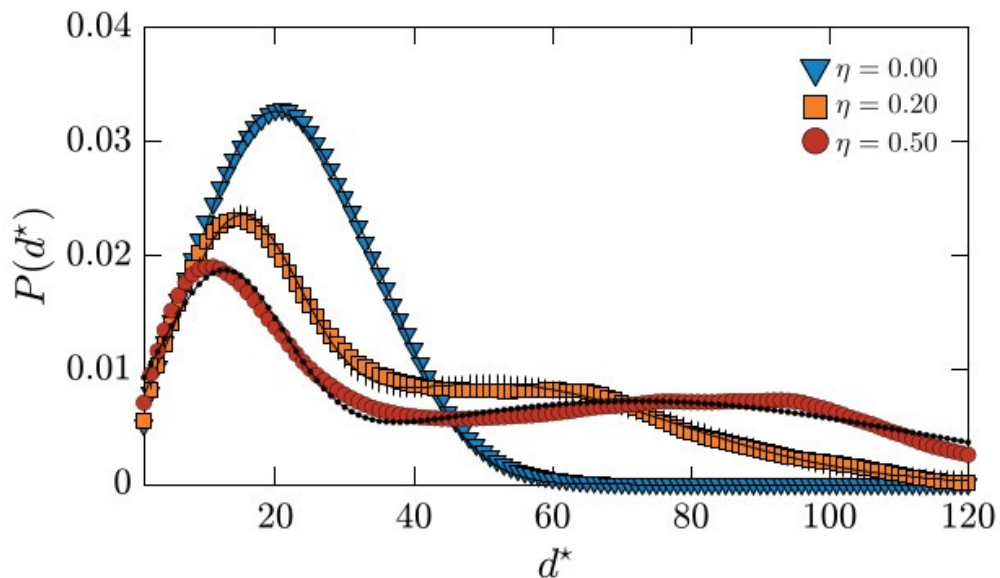
concentradas, caracterizando uma topologia de rede coesa e homogênea.

Em contrapartida, a introdução do substrato ($\eta = 0.20$ e $\eta = 0.50$) induz uma transição para uma distribuição bimodal, o que sinaliza uma mudança fundamental na organização espacial do empacotamento:

- **Regime de Curto Alcance:** Observam-se picos em distâncias reduzidas ($d_{\eta=0.2}^* \approx 15$ e $d_{\eta=0.5}^* \approx 12$), correspondentes à formação de *clusters*, locais densamente interconectados.
- **Regime de Longo Alcance:** O surgimento de um segundo pico em valores elevados ($d_{\eta=0.2}^* \approx 51$ e $d_{\eta=0.5}^* \approx 72$) revela que o caminho entre nós, situados em extremidades opostas da estrutura, torna-se significativamente mais longo.

Para $\eta > 0.20$, a conexão entre esses *clusters* principais é mediada por esferas na região central da cavidade que apresentam baixo grau de coordenação (tipicamente apenas dois contatos), como ilustrado na morfologia para $\eta = 0.50$ (Figura 9). Esse confinamento topológico impõe gargalos de conectividade que deslocam a distribuição para valores de $d^* > 40$. Portanto, a transição da distribuição de unimodal para bimodal demonstra que o substrato não apenas restringe o espaço físico, mas altera fundamentalmente a topologia de conectividade e a eficiência de transporte nos empacotamentos de esferas magnéticas.

Figura 13 – Distribuição da probabilidade das distâncias, em número de vértices d^* , entre os nós observados para as diferentes frações de substrato [$\eta = (0, 0.20, 0.50)$].



Fonte: O autor

4.2 Propriedades físicas

4.2.1 Modelagem do Potencial de Interação Magnética

Analisando a interação entre dois ímãs esféricos uniformemente magnetizados, nota-se que, devido aos seus momentos de dipolo não nulos, eles exercem maior influência em suas interações a distâncias significativas em comparação com suas dimensões individuais. Ao empregar argumentos de simetria, é possível estabelecer a equivalência entre o campo magnético fora dessas esferas e o campo resultante de um dipolo magnético pontual (Jackson, 1999). Do ponto de vista analítico (Griffiths, 2013), o campo magnético \vec{B} em uma posição \vec{r} gerado por um dipolo magnético pontual \vec{m} localizado na origem, é expresso por (4.2).

$$\vec{B}(\vec{m}, \vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right) \quad (4.2)$$

onde $r = |\vec{r}|$, com $r > 0$, e μ_0 é a permeabilidade do vácuo. Este campo deriva de um potencial escalar magnético φ que satisfaz a equação de Laplace ($\nabla^2 \varphi = 0$). Para um sistema de dois dipolos \vec{m}_i e \vec{m}_j , a energia de interação U_{ij} (4.3) é expressa pelo acoplamento entre o momento de uma partícula e o campo magnético gerado pelo outro.

$$U_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\vec{m}_i \cdot \vec{m}_j}{r_{ij}^3} - \frac{3(\vec{m}_i \cdot \vec{r}_{ij})(\vec{m}_j \cdot \vec{r}_{ij})}{r_{ij}^5} \right] \quad (4.3)$$

Dado que as esferas utilizadas no experimento são idênticas, apresentando diâmetro e magnetização semelhantes, torna-se possível estabelecer um potencial macroscópico adimensional, designado por (4.4).

$$U = \frac{2\pi D^3}{\mu m^2} \sum_{i \neq j} U_{ij} \quad (4.4)$$

onde D é o diâmetro da esfera e m o momento do dipolo magnético correspondente. É conveniente incorporar essa escala de energia, pois ela representa fisicamente o valor do potencial repulsivo entre dois dipolos paralelos quando estão em contato (Messina *et al.*, 2014).

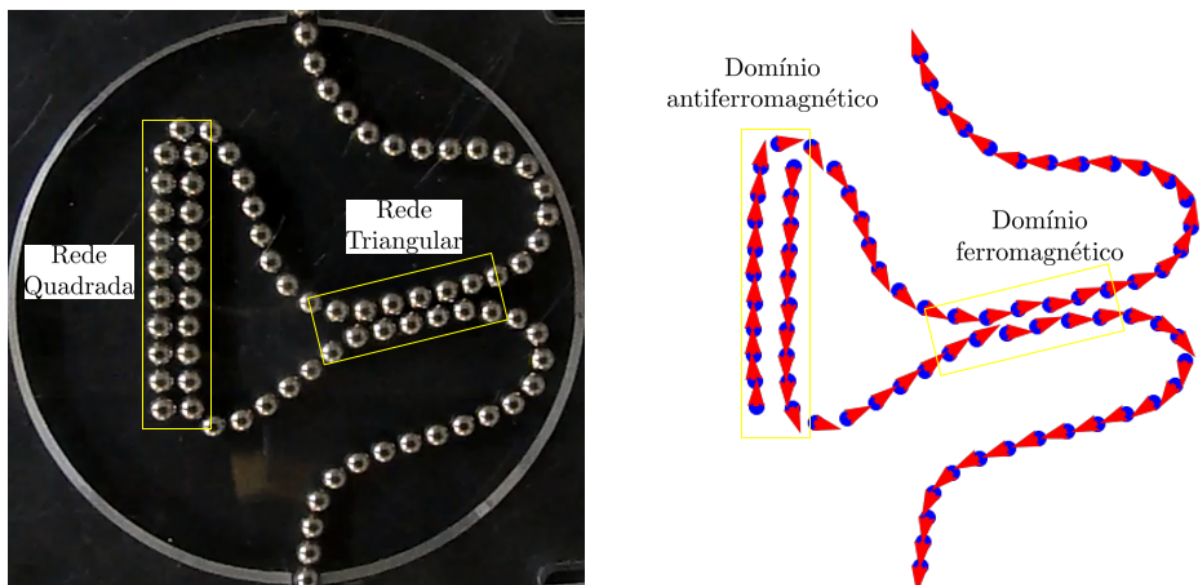
Configurações auto-organizadas de ímãs esféricos foram obtidas via simulação de Monte Carlo, fundamentadas na minimização da energia total do sistema [Eq. (4.4)]. Ao permitir a relaxação irrestrita das coordenadas cartesianas e das orientações angulares (azimutal e polar), observam-se transições de dimensionalidade e a emergência de vazios estruturais. Tais características decorrem de frustrações magnéticas inerentes às configurações de energia mínima,

manifestando-se de forma mais acentuada conforme o número de esferas (N) é incrementado (Messina *et al.*, 2014; Messina e Stanković, 2015).

Baseando-se nos princípios apresentados, este trabalho emprega um algoritmo de minimização energética para determinar as orientações de equilíbrio do sistema. Com o intuito de explorar os diversos arranjos obtidos durante o processo de empacotamento, as coordenadas espaciais (x_i, y_i) das esferas são mantidas constantes, enquanto as orientações angulares θ_i dos momentos magnéticos m_i são tratados como os únicos graus de liberdade do sistema. O processo de otimização é iniciado com uma distribuição aleatória de orientações, evoluindo iterativamente até a convergência para um mínimo de energia através do ajuste dos ângulos θ_i .

O método utilizado, denominado BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno), é um algoritmo iterativo quase-Newton para otimização não linear irrestrita. Ele aproxima a matriz Hessiana (ou sua inversa) da função objetivo, utilizando apenas informações dos gradientes sucessivos para determinar a direção de busca do mínimo. Estruturas simplificadas (Vandewalle e Dorbolo, 2014) mostraram a compatibilidade das linhas de campo magnético calculadas por (4.2). A Figura 14 ilustra as orientações dos dipolos magnéticos em um arranjo simplificado, obtido via minimização energética, evidenciando a formação de domínios magnéticos. Em sistemas dipolares densos restritos a duas dimensões, a morfologia da rede condiciona o ordenamento local: estruturas de simetria triangular favorecem um domínio ferromagnético, enquanto arranjos

Figura 14 – Configuração das orientações dos momentos dos dipolos magnéticos, associado ao estado de mínima energia, evidenciando a formação de domínios magnéticos.

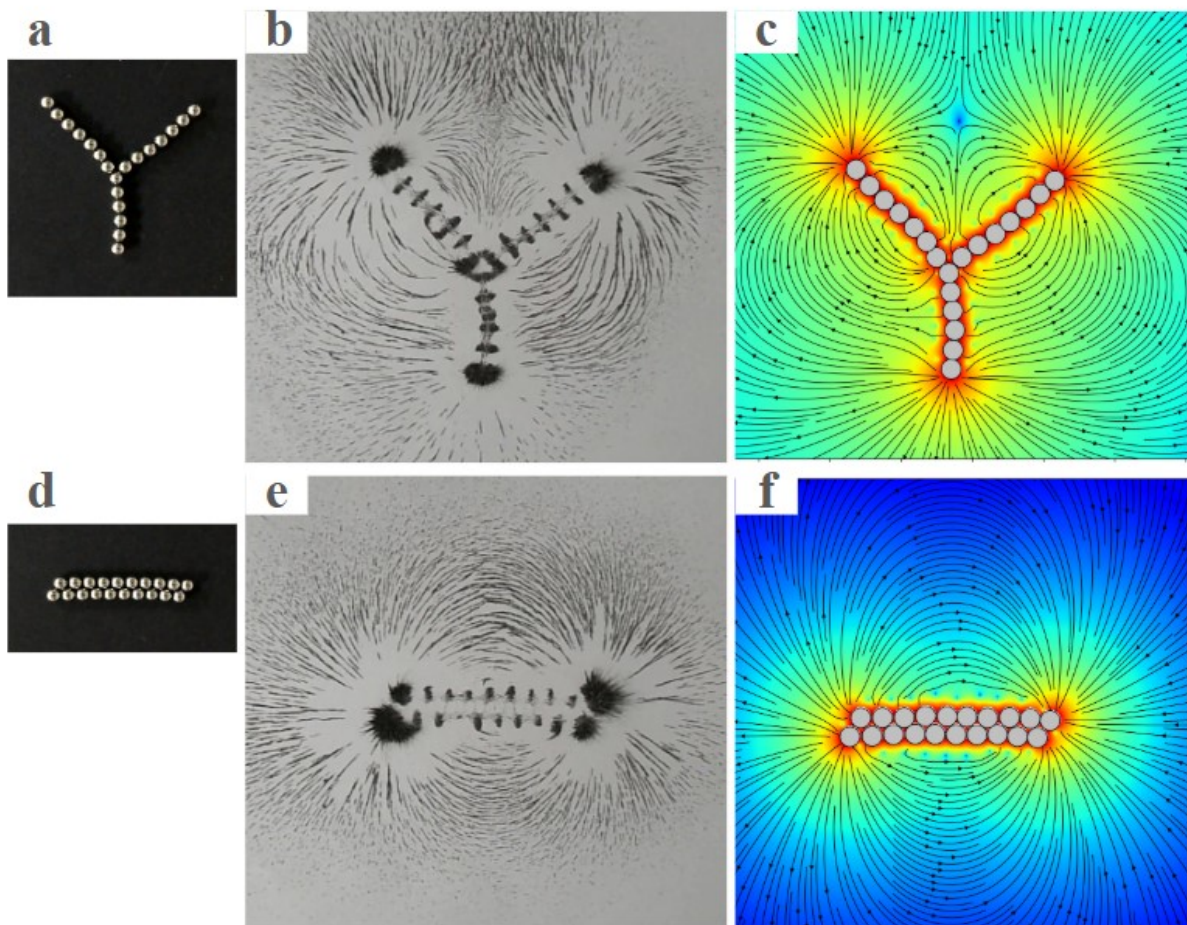


Fonte: O autor

em rede quadrada tendem a estabilizar um domínio antiferromagnético (Fazekas, 2007).

A fim de validar as orientações dos momentos magnéticos resultantes da minimização de energia, foram confeccionadas estruturas prototípicas compostas por dezenas de esferas. O mapeamento das linhas de campo foi realizado experimentalmente através da dispersão de limalha de ferro sobre um plano paralelo aos arranjos, submetido a suaves vibrações horizontais para a acomodação das partículas. Esses padrões empíricos serviram como referência comparativa para os campos magnéticos calculados analiticamente pela Equação (4.2). Como ilustrado na Figura 15, a convergência entre as linhas de campo visualizadas e os resultados teóricos fundamentados na minimização energética corrobora a eficácia do modelo adotado

Figura 15 – Linhas de campo magnético para configurações de esferas magnéticas: (a) Fantasma magnético (Vandewalle e Dorbolo, 2014) e (d) rede triangular; (b) e (e) mostram a caracterização empírica via limalhas de ferro; (c) e (f) apresentam a caracterização analítica, conforme a equação (4.2).

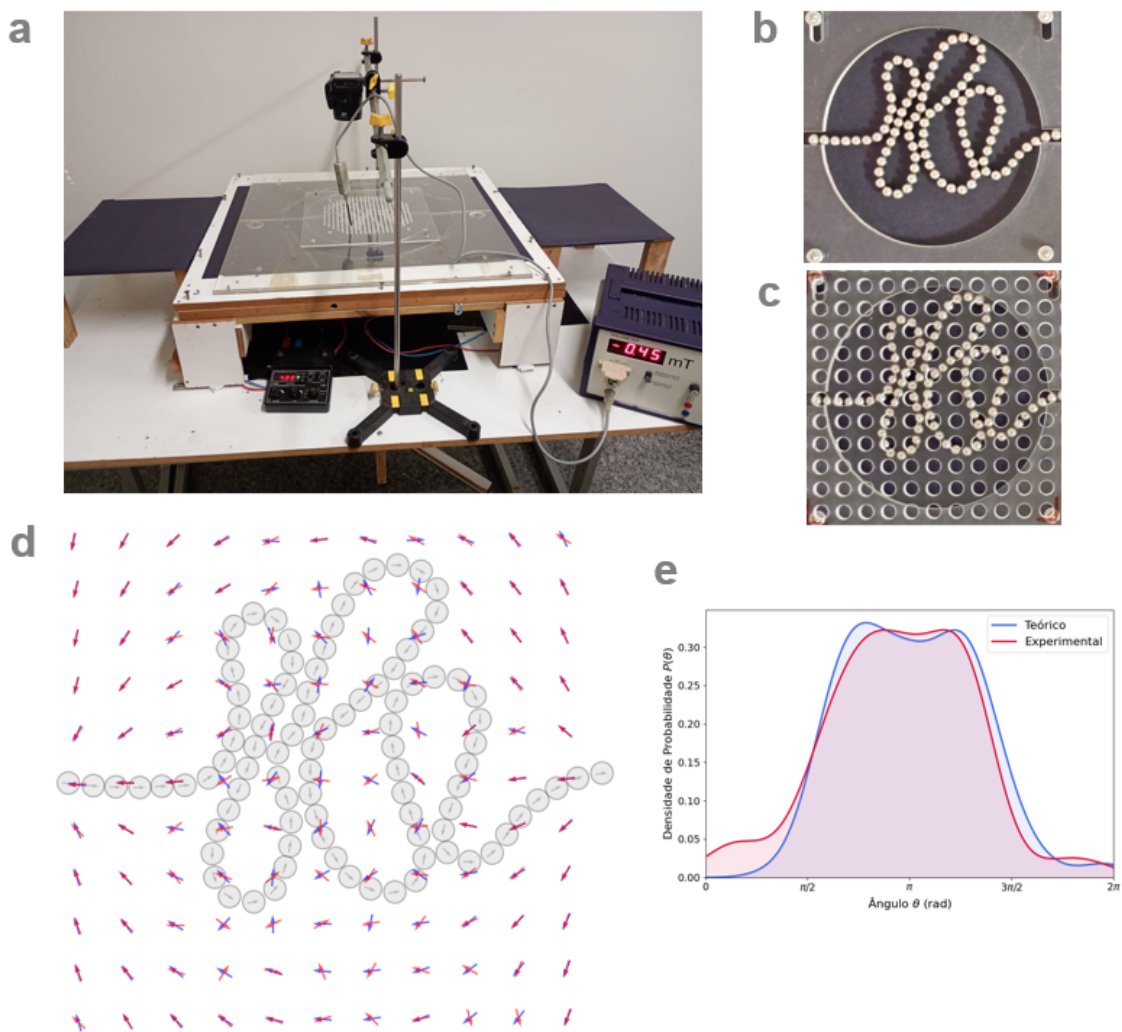


Fonte: O autor

Outra validação da orientação dos dipolos magnéticos foi realizada por meio de uma análise comparativa entre o arranjo experimental e o modelo teórico preditivo. A coleta

de dados foi executada com o auxílio de um teslômetro (Figura 16.a), cujo funcionamento baseia-se no Efeito Hall: o dispositivo utiliza um sensor semiconductor que, ao ser atravessado por uma corrente elétrica na presença de um campo magnético perpendicular, gera uma diferença de potencial (tensão Hall) proporcional à densidade do fluxo magnético. Esse mecanismo permitiu quantificar com precisão as variações de campo geradas pelas esferas magnetizadas

Figura 16 – Validação da orientação de dipolos magnéticos. (a) Aparato experimental composto por plataforma de posicionamento, sensores de efeito Hall e teslômetro para medição do campo magnético local, (b) Arranjo físico de esferas magnéticas formando uma cadeia complexa sobre a superfície de ensaio, (c) Sobreposição do arranjo experimental a uma malha de referência para digitalização das coordenadas e mapeamento espacial, (d) Representação vetorial do campo magnético, correlacionando a posição física das esferas com os vetores de momento de dipolo resultantes, (e) Gráfico da densidade de probabilidade $P(\theta)$ em função do ângulo θ , apresentando a comparação entre o modelo teórico (linha azul) e os dados experimentais (linha vermelha).

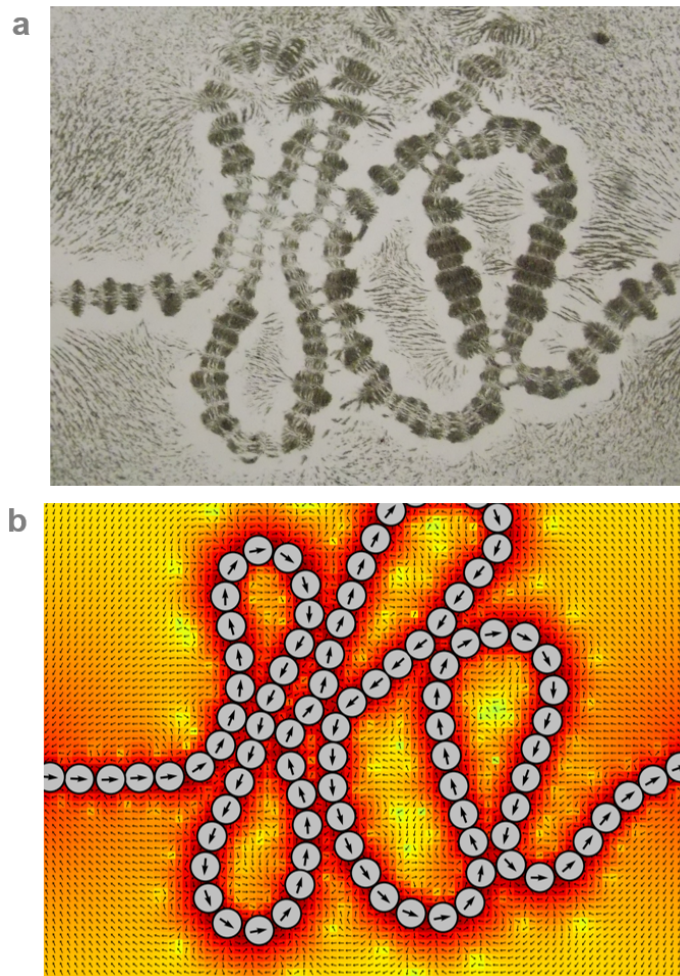


Fonte: O autor

dispostas na superfície (Figuras 16.b) e mapeadas sobre um grid de pontos (Figura 16.c). A partir desse mapeamento, foi possível reconstruir o campo vetorial resultante (Figura 16.d) e extrair a orientação individual de cada ponto. A eficácia da metodologia foi confirmada pela sobreposição das curvas de densidade de probabilidade $P(\theta)$ (Figura 16.e), que demonstram uma estreita correlação entre os ângulos medidos experimentalmente e as previsões teóricas.

Em conformidade com a metodologia exposta na Figura 15, procedeu-se ao mapeamento das linhas de campo magnético remanescentes do processo de empacotamento (Figura 17). A caracterização experimental foi realizada por meio da dispersão de limalha de ferro sobre a estrutura, permitindo a visualização da topologia do campo. Subsequentemente, os padrões obtidos foram confrontados com o modelo analítico derivado da Equação (4.2), visando validar a acurácia das orientações dipolares estimadas para o sistema denso. Um fenômeno relevante observado é a formação de uma zona de escassez de limalha de ferro nas adjacências da cadeia

Figura 17 – Linhas de campo magnético para um empacotamento simplificado: (a) caracterização experimental (limalha de ferro) versus (b) modelagem analítica [Eq. (4.2)].

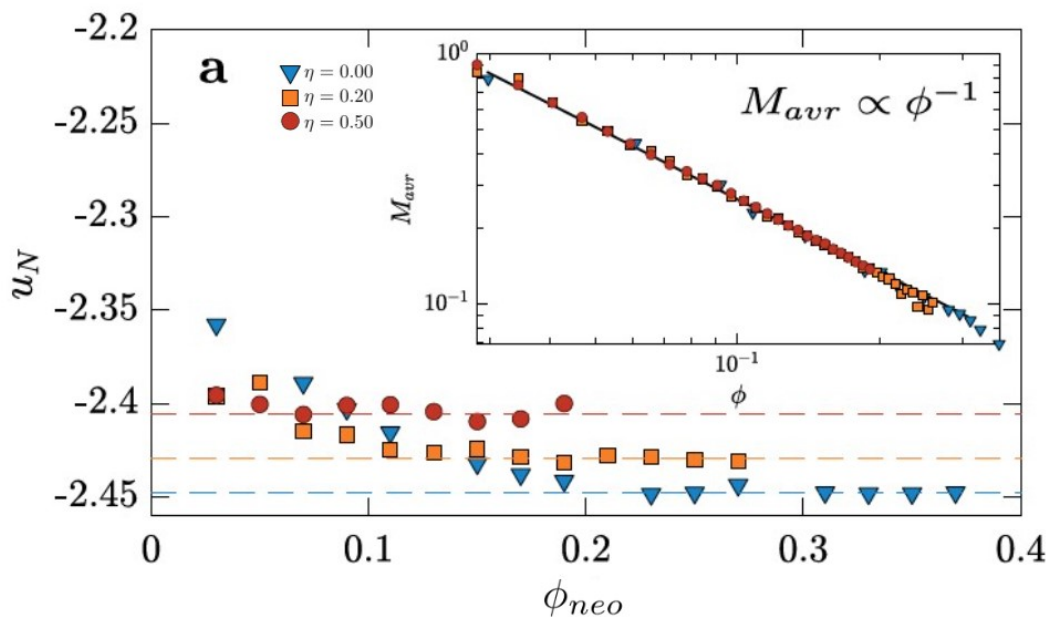


Fonte: O autor

magnética empacotada. A modelagem analítica revela que essa região coincide com uma zona de alta intensidade e elevado gradiente de campo magnético. Fisicamente, as partículas de limalha que atingem essa área são submetidas a uma força atrativa intensa, sendo capturadas pela superfície das esferas, acumulando-as. Em contrapartida, fora dessa região de captura, o gradiente de campo é suficientemente reduzido para permitir que as partículas se alinhem e descrevam a topologia das linhas de campo, características das interações dipolares.

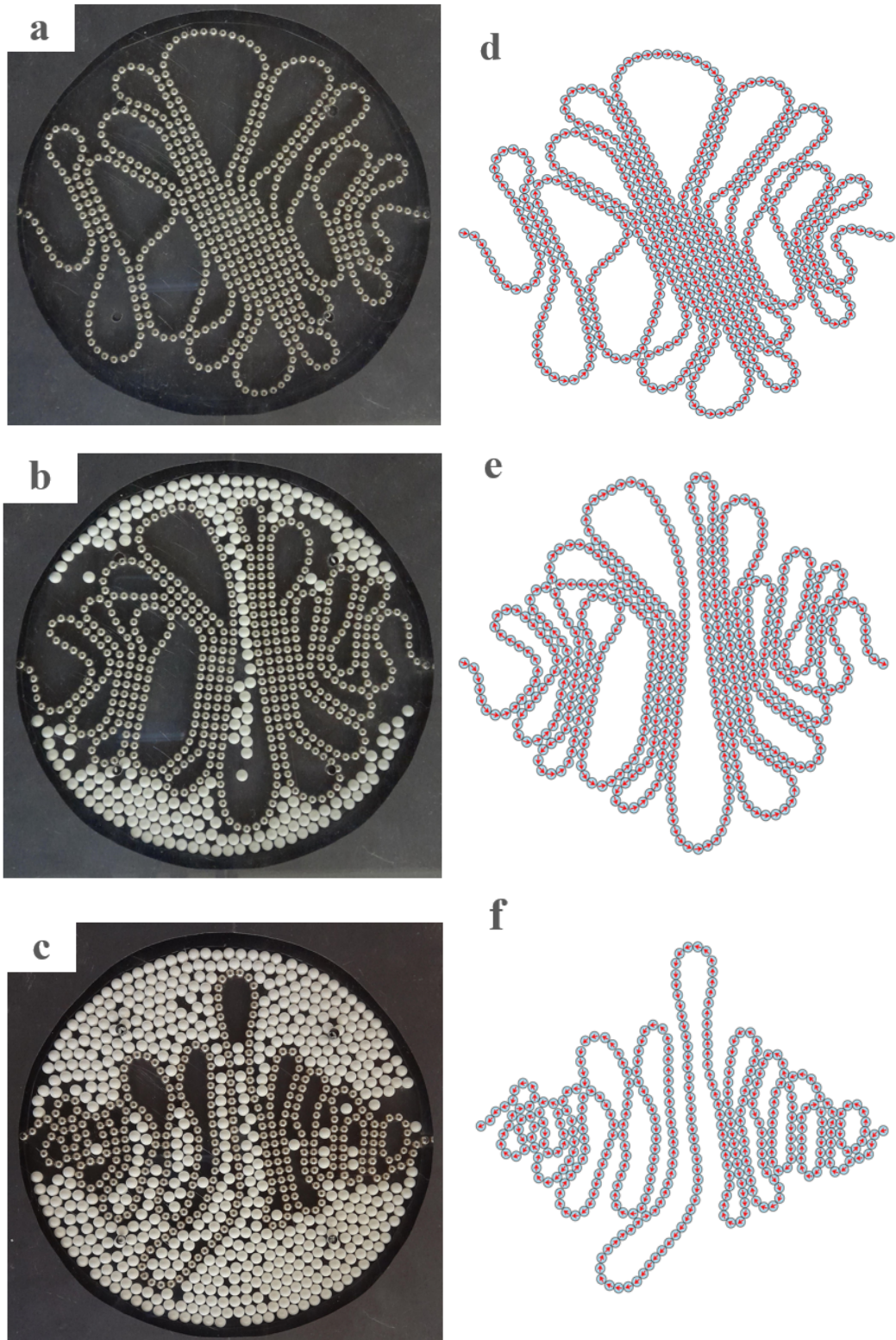
Ao considerar a energia (U) por unidade de esferas (N), $u = U/N$, os arranjos finais dos empacotamentos (Figura 19.d, 19.e e 19.f) apresentam valores característicos iguais a $u_{\eta=0.0} = -2.44$, $u_{\eta=0.2} = -2.43$ e $u_{\eta=0.5} = -2.41$ (Figura 18). Para uma cadeia infinita de partículas, o valor teórico é $u_{\infty}^{(cadeia)} \approx -2.404$, e para um plano infinito, $u_{\infty}^{(plano)} \approx -2.759$ (Messina *et al.*, 2014). Esses resultados demonstram, de modo indireto, a dimensionalidade dos arranjos. Quanto mais substrato é adicionado, a conectividade efetiva entre os nós diminui, resultando em caminhos mais longas entre distâncias curtas (Figura 13), e mais os arranjos se assemelham a cadeias lineares (Figuras 19.c e 19.f).

Figura 18 – Perfis da energia u_N em função da fração de empacotamento ϕ_{neo} para diferentes concentrações de substrato (ϕ_{ABS}). As linhas tracejadas indicam os patamares de saturação em $u_N = \{-2.44, -2.43, -2.41\}$. **Inserção:** Magnetização média M_{avr} calculada pela soma dos momentos de dipolo numéricos m_i . O ajuste por lei de potência (linha contínua) indica um decaimento do tipo $M_{avr} \propto \phi^{-1}$.



Fonte: O autor

Figura 19 – Configurações dos empacotamentos: a) $\eta = 0.0$; b) $\eta = 0.2$; c) $\eta = 0.5$. Orientações dos momentos dos dipolos magnéticos associadas ao estado de mínima energia: d) $\eta = 0.0$; e) $\eta = 0.2$; f) $\eta = 0.5$.



Fonte: O autor

4.2.2 Dinâmica de magnetização

No estágio inicial do empacotamento, caracterizado por uma baixa fração de preenchimento, a cadeia de partículas preserva uma conformação quase linear. Nessa geometria, os dipolos magnéticos das esferas encontram-se alinhados, resultando em uma magnetização média saturada, definida por $M_{avr} = |\sum m_j|/N_{neo}$, onde as contribuições dos momentos magnéticos individuais somam-se construtivamente.

Contudo, a progressiva injeção da cadeia em um espaço bidimensional confinado induz à formação de laços e dobras para acomodar as restrições espaciais. A emergência desses laços promove a reorientação angular dos dipolos em relação ao eixo de alinhamento inicial. Conseqüentemente, a magnetização líquida passa a ser o resultado de uma soma vetorial de momentos com orientações distintas, provocando cancelamentos parciais e a redução gradual de M_{avr} .

Embora o número de laços cresça conforme uma lei de potência com expoentes variáveis (dependendo da fração de substrato η), o decaimento da magnetização exibe um expoente crítico bem definido e independente de η , sugerindo uma universalidade no processo de desordem cumulativa (Figura 18).

4.2.3 Transporte elétrico em redes de contato

Ao longo das últimas décadas, as propriedades físicas de meios heterogêneos têm despertado considerável interesse na comunidade científica (McLachlan e Sauti, 2007; Mutiso e Winey, 2015), impulsionadas, em grande parte, por aplicações tecnológicas proeminentes, como o desenvolvimento de nanocompósitos funcionais (Wang e Pan, 2008). Nesse contexto, a modelagem teórica das propriedades efetivas desses sistemas é fundamental tanto para a avaliação de desempenho quanto para o *design* de novos materiais. Dentre essas características, as propriedades elétricas assumem papel de destaque.

A condutividade elétrica integra a classe das propriedades de transporte, as quais descrevem a habilidade macroscópica de um meio em transferir uma quantidade conservada, neste caso, a carga elétrica, em resposta a um gradiente de potencial imposto (Batchelor, 2003). Em meios isotrópicos, essa propriedade é adequadamente descrita por um coeficiente escalar único.

Sob a perspectiva da modelagem mesoscópica, as partículas constituintes são tra-

tadas como condutores perfeitos, de modo que a dissipação de energia e a resistência elétrica manifestam-se exclusivamente nos pontos de contato interfaciais. Essa simplificação permite mapear o sistema físico em uma rede de resistores equivalente, onde as partículas representam os nós e os contatos definem as arestas, estas últimas caracterizadas por uma resistência ôhmica constante (R) (Olsen e Kamrin, 2015). Nesse domínio, a “distância de resistência” (Klein e Randić, 1993) entre dois vértices de um grafo G é definida como a resistência elétrica equivalente estabelecida entre eles, assumindo-se, por convenção, que a resistência de cada aresta adjacente é unitária. Estudos revelam que a natureza autossimilar das Redes Apolonianas implica propriedades de transporte singulares. Ao modelar a rede como um sistema de resistores, observa-se que a condutância equivalente G evolui, conforme o número de sítios N , seguindo uma lei de potência, $G \propto N^{2/3}$ (Andrade *et al.*, 2005).

Formalmente, a topologia dessa rede é descrita pela matriz Laplaciana $L = D - A$, onde D é a matriz de graus e A é a matriz de adjacência do grafo. Sejam $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$ os autovalores de L . Para qualquer grafo, o espectro da Laplaciana apresenta $\mu_n = 0$, enquanto o autovalor μ_{n-1} (conhecido como conectividade algébrica) é estritamente positivo se, e somente se, o grafo G for conexo. Devido à natureza singular da matriz Laplaciana, sua inversa ordinária é inexistente (Xiao e Gutman, 2003). No entanto, o sistema admite uma solução via inversa generalizada de Moore-Penrose, denotada por L^\dagger (Ben-Israel e Greville, 1974). No âmbito da teoria de redes elétricas, o método canônico para derivar os elementos da matriz de resistência efetiva r_{ij} a partir de L^\dagger é expresso pela Equação 4.5:

$$r_{ij} = L_{ii}^\dagger + L_{jj}^\dagger - 2L_{ij}^\dagger \quad (4.5)$$

onde i e j são dois nós específicos do arranjo.

Complementarmente ao cálculo matricial, a resistência efetiva pode ser estimada via simulações de Monte Carlo baseadas em passeios aleatórios (Random Walks) (Doyle e Snell, 1984). Nesse modelo, a condutância de cada contato define a probabilidade de transição de um caminhante aleatório entre os nós da rede. O método fundamenta-se na relação que estabelece R_{eff} entre dois pontos, i e j , como o quociente entre o tempo médio de comutação (T_{comm}) — a soma dos tempos médios de primeira passagem entre os nós — e o volume total do grafo (dobro da soma das condutâncias (σ_{ij})).

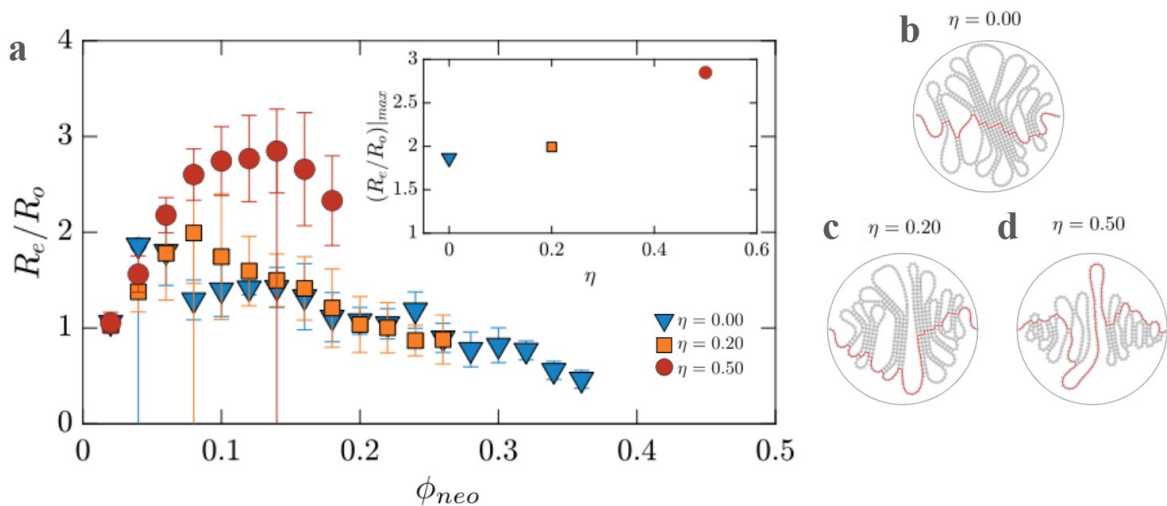
$$R_{eff}(i, j) = \frac{T_{ij} + T_{ji}}{2 \sum_{k < l} \sigma_{kl}} \quad (4.6)$$

Essa abordagem estocástica é particularmente vantajosa para capturar a influência de heterogeneidades locais, permitindo a incorporação de flutuações estatísticas nas resistências de contato através de uma distribuição normal, $R_{contato} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. A convergência entre os valores estimados por simulação e os resultados teóricos da Laplaciana corrobora a robustez do mapeamento elétrico utilizado para caracterizar o transporte no sistema granular.

A evolução da resistência equivalente (R_e) em função de ϕ_{neo} (Figura 20) indica que o aumento de η inibe a conectividade do sistema, favorecendo topologias em série que elevam a resistência global. A Figura 20.a apresenta a razão R_e/R_o , revelando que o pico resistivo ocorre em diferentes estágios do empacotamento conforme o grau de frustração magnética.

Para $\eta \leq 0,2$, a resistência máxima manifesta-se nas frações iniciais de ϕ_{neo} . Contudo, para $\eta = 0,5$, este máximo é deslocado para a vizinhança da saturação ($\phi_{neo} \approx 0,19$). Esse comportamento decorre da redução drástica no número de contatos efetivos para $\eta > 0,2$, o que impõe um regime de condução predominantemente serial em detrimento da formação de caminhos paralelos. No regime crítico de $\eta = 0,83$, a saturação do substrato impede a nucleação de laços, resultando em um crescimento resistivo monotônico.

Figura 20 – Variação da resistência em redes de laços. (a) Gráfico da razão entre a resistência equivalente (R_e) e a resistência do primeiro contato entre os fios injeridos diametralmente opostos (R_o) em função de ϕ_{neo} para diferentes valores do parâmetro η . O gráfico inserido detalha o valor máximo de R_e/R_o em função de η . (b), (c) e (d) Representações esquemáticas das configurações para $\eta = 0.00$, $\eta = 0.20$ e $\eta = 0.50$, respectivamente, destacando o mínimo caminho entre os pontos extremos, pelo método de Dijkstra.



Fonte: O autor

4.2.4 Distribuição de correntes e "Backbone" da rede

Quando uma diferença de potencial (ε) é aplicada entre dois pontos — ou entre barras condutoras em bordas opostas — de uma rede aleatória de resistores, o subconjunto de ligações que efetivamente transporta carga define o chamado *backbone* do sistema (Tarasevich *et al.*, 2018). Sob a validade da Lei de Ohm para cada conexão, a corrente elétrica I_{ij} entre dois nós adjacentes i e j é dada por (4.7):

$$I_{ij} = \sigma_{ij}(V_i - V_j) \quad (4.7)$$

onde $\sigma_{ij} = 1/r_{ij}$ representa a condutância entre os nós. Pela Lei de Kirchhoff para correntes (conservação da carga), a soma algébrica das correntes em qualquer nó i deve ser nula ($\sum_j I_{ij} = 0$), o que permite expressar o potencial local V_i como (4.8):

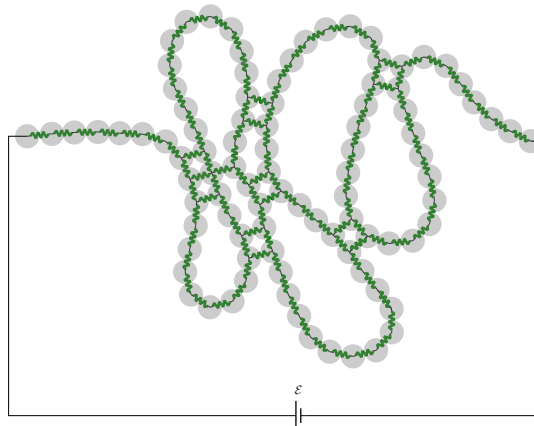
$$V_i = \frac{\sum_j \sigma_{ij} V_j}{\sum_j \sigma_{ij}} \quad (4.8)$$

Em redes onde as condutâncias de todas as ligações são uniformes ($\sigma_{ij} = 1$), o denominador da Equação 4.8 reduz-se ao grau do nó i , denotado por $deg(i)$, resultando em (4.9):

$$V_i = \frac{1}{deg(i)} \sum_{j \sim i} V_j \quad (4.9)$$

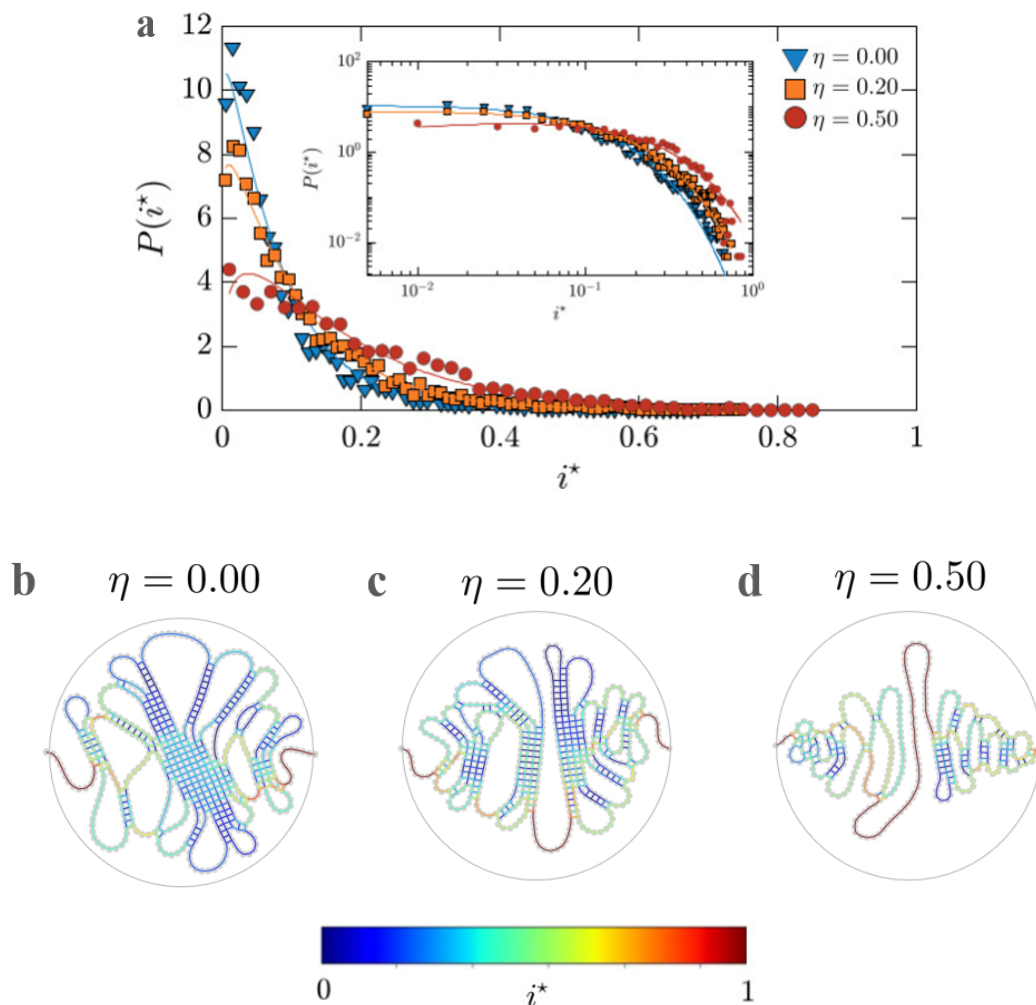
A Figura 21 ilustra a rede de resistores equivalente à estrutura de contatos de um sistema particulado. Ao submeter o circuito a uma diferença de potencial ε , estabelece-se uma distribuição de correntes cuja densidade de probabilidade, $P(i^*)$, é apresentada na Figura 22.a para diferentes valores de η no estágio do empacotamento crítico (ϕ_{neo}^J).

Figura 21 – Representação esquemática de um circuito elétrico de resistores interconectados, emulando a rede de contatos estabelecida no empacotamento simplificado da Figura 16.b., cuja a $R_{eq} = 214 \pm 4 \Omega$.



Verifica-se uma estreita correlação entre os caminhos mínimos (Figuras 20.b, c e d) e os segmentos de maior intensidade de corrente (Figuras 22.b, c e d). Tal comportamento é fisicamente consistente, dado que os caminhos topologicamente mais curtos oferecem a menor resistência equivalente ao transporte. Enquanto a distribuição de correntes locais $P(I)$ em Redes Apolonianas exibe um comportamento típico de sistemas scale-free, com um decaimento em lei de potência de expoente aproximadamente $-1,24$ (Andrade *et al.*, 2005), os sistemas de empacotamento aqui analisados seguem uma distribuição log-normal com corte exponencial (Figura 22.a). Este perfil indica que o transporte é governado por uma heterogeneidade estrutural modulada pelo parâmetro de frustração η .

Figura 22 – Distribuição de probabilidade $P(i^*)$ das correntes normalizadas i^* para diferentes valores de η . (a) Curva principal de $P(i^*)$ em função de i^* com ajustes log-normal e corte exponencial; o *inset* apresenta os mesmos dados em escala log-log. (b), (c) e (d) Representações visuais dos fluxos de corrente, onde a coloração das arestas indica a intensidade de i^* conforme a barra de cores.



5 CONCLUSÕES

Neste estudo, é apresentado uma série de experimentos relacionados ao processo de injeção de fios magnéticos dentro de uma cavidade circular rígida, onde a disposição inicial das orientações dos dipolos magnéticos nas cadeias de esferas são mantidas constantes, no regime paralelo. Diferentemente dos experimentos apresentados por Borges (2016) e Borges (2021), a cavidade a ser preenchida foi ocupada por diferentes porcentagens de um substrato não coesivo de esferas plásticas (ABS).

Nos experimentos realizados, observou-se que a quantidade de substratos na cavidade exerce influência significativa nas propriedades geométricas que emergem do processo de empacotamento. Essa variabilidade resultou na formação de laços com diferentes áreas nas estruturas empacotadas. A análise sistemática permitiu a identificação de uma tendência nas áreas correspondentes às diversas condições de contorno.

As distribuições de probabilidade associadas a essas áreas revelam que, à medida que a porcentagem de substrato plástico aumenta, as áreas acessíveis tendem a diminuir, seguindo uma distribuição do tipo log-normal. Contudo, destaca-se uma região notável situada entre as curvas que representam áreas de 10 a 20 unidades de esferas (A^*), onde as probabilidades de ocorrência das áreas permanecem semelhantes, independentemente da fração de substratos η . Supo-se que o tamanho dos laços parece ser fortemente controlado pela rigidez à flexão efetiva e pela evolução da razão de aspecto (a_{neo}) do espaço disponível. Enquanto o número de laços (N_l) escala com a fração de empacotamento (ϕ_{neo}) através de uma lei de potência ($N_c \propto \phi^\alpha$), com expoentes α variando de 2.2 a 3.7 conforme o incremento de η , o número de contatos médios permanece invariante, seguindo $N_c \propto \phi_{neo}^1$.

As diferenças qualitativas observadas visualmente nas morfologias durante o empacotamento de fios na presença de substratos plásticos ressaltou a necessidade de extrair informações quantitativas para estabelecer tais distinções. Utilizando os grafos correspondentes a cada arranjo, examinou-se a distribuição de probabilidade dos menores caminhos conectando um nó a todos os outros. No regime livre de substratos, a distribuição é unimodal, com simetria em torno do valor mais frequente. À medida que os substratos são adicionados, a distribuição torna-se bimodal, indicando a formação de dois clusters conectados por esferas de baixa conectividade. Essa transição de regime unimodal para bimodal sugere uma reorganização significativa das estruturas formadas. Propõe-se que no estágio de máximo preenchimento de esferas plásticas na cavidade, a distribuição estabiliza-se em um platô constante, caracterizado por uma estrutura

linear sem formação de laços ou quaisquer outras estruturas deformáveis.

Para determinar as configurações de equilíbrio dos momentos magnéticos, aplicou-se o método de otimização BFGS para a minimização da energia do sistema, tratando as orientações angulares como os únicos graus de liberdade. Os resultados indicam que a natureza dessas interações estabelece mínimos de energia por unidade de esfera iguais a $u_{\eta=0,0} = -2.44$, $u_{\eta=0,2} = -2.43$ e $u_{\eta=0,0} = -2.41$, valores que se aproximam do limite teórico de uma cadeia linear infinita ($u \approx -2.404$) e demonstram a redução da dimensionalidade efetiva conforme o substrato é adicionado. A análise das orientações dos dipolos magnéticos revela a predominância de domínios antiferromagnéticos no regime de empacotamento do tipo “*Loop*” e domínios ferromagnéticos no regime do tipo “*Espiral*”. Os experimentos revelam que condições iniciais de injeção paralelas resultam em empacotamentos finais de redes quadradas do tipo “*Loop*”, com domínios antiferromagnéticos, enquanto o decaimento da magnetização média exibe um comportamento universal do tipo $M_{avr} \propto \phi^{-1}$, independente da fração de substrato. Além disso, a energia acumulada no regime de laços apresenta um comportamento linear em relação ao número de esferas, assemelhando-se à dinâmica de aproximação observada em cadeias de bactérias magnetostáticas .

Explorando as propriedades elétricas do meio heterogêneo, o sistema foi mapeado em uma rede de resistores equivalente, onde as partículas são tratadas como condutores perfeitos e a dissipação ocorre exclusivamente nos contatos interfaciais. A matriz de resistência efetiva foi calculada utilizando a inversa generalizada de Moore-Penrose da matriz Laplaciana do grafo, revelando que a resistência equivalente varia significativamente com a fração de substrato. Para $\eta \leq 0,2$, a resistência máxima manifesta-se nas frações iniciais de empacotamento, enquanto para $\eta = 0,5$, o pico resistivo é deslocado para a vizinhança da saturação ($\phi_{neo} \approx 0,19$), evidenciando a inibição de caminhos paralelos em favor de uma condução predominantemente serial. Complementarmente, a análise da distribuição de correntes demonstrou uma correspondência direta entre os caminhos de menor resistência e os segmentos de maior intensidade de fluxo, validando a compreensão da rede de contatos como um backbone condutivo que dita o transporte no sistema. Este estudo proporciona, assim, uma compreensão abrangente da formação de estruturas complexas e das propriedades efetivas de meios granulares magnéticos sob confinamento.

REFERÊNCIAS

- ANDRADE, J. S.; HERRMANN, H. J.; ANDRADE, R. F. S.; SILVA, L. R. da. Apollonian networks: Simultaneously scale-free, small world, euclidean, space filling, and with matching graphs. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 94, p. 018702, Jan 2005.
- ARANSON, I. S.; TSIMRING, L. S. Patterns and collective behavior in granular media: Theoretical concepts. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 78, p. 641–692, Jun 2006.
- BATCHELOR, G. Transport properties of two-phase materials with random structure. **Annu. Rev. Fluid Mech.**, v. 6, p. 227–255, 11 2003.
- BEN-ISRAEL, A.; GREVILLE, T. **Generalized Inverses - Theory and Applications**. New York: Wiley, 1974.
- BLAIR, D. L.; KUDROLLI, A. Geometry of crumpled paper. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 94, p. 166107, Apr 2005.
- BORGES, D. S. **Um estudo sobre a injeção de fios magnéticos em cavidades**. 56 p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.
- BORGES, D. S. **Transição de fase morfológica na injeção de fios magnéticos em cavidades**. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2021.
- BORGES, D. S.; HERRMANN, H. J.; CARMONA, H. A.; ANDRADE, J. S.; ARAÚJO, A. D. Morphological transition between patterns formed by threads of magnetic beads. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 126, p. 118001, Mar 2021.
- BORGES, D. S.; HERRMANN, H. J.; CARMONA, H. A.; ANDRADE, J. S.; ARAÚJO, A. D. Patterns formed by chains of magnetic beads. **EPJ Web of Conferences**, EDP Sciences, v. 249, p. 15004, 2021. ISSN 2100-014X.
- BRITO, V.; CASTRO, W.; COELHO, A.; GOMES, M. Beads-on-a-string packing in two dimensions. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 342, n. 3, p. 419–427, 2004. ISSN 0378-4371.
- CHOU, Y.; CHO, E.; CHOU, T.-H.; HONG, T.-M. Elasticity transition and loop formation in vibrated bead chains: A simulation of polymer chains. **The European physical journal. E, Soft matter**, v. 29, p. 157–61, 07 2009.
- DIX, J.; VERKMAN, A. Crowding effects on diffusion in solutions and cells. **Annual review of biophysics**, v. 37, p. 247–63, 02 2008.
- DOMINGOS, J. L. C. **Auto-organização de partículas coloidais magnéticas**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.
- DONATO, C. C. **Estudo das propriedades físicas de estruturas heterogêneas de arames em cavidades bidimensionais**. Tese (Doutorado) – Universidade de Brasília, Brasília, 2006.
- DONATO, C. C.; GOMES, M. A. F.; SOUZA, R. E. de. Crumpled wires in two dimensions. **Physical Review E**, American Physical Society (APS), v. 66, n. 1, jul. 2002. ISSN 1095-3787.
- DONATO, C. C.; GOMES, M. A. F.; SOUZA, R. E. de. Scaling properties in the packing of crumpled wires. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 67, p. 026110, Feb 2003.

- DOYLE, P.; SNELL, J. **Random Walks and Electric Networks**. [S. l.]: Mathematical Association of America, 1984. (The Carus Mathematical Monographs). ISBN 9781614440222.
- ELLIS, R. Macromolecular crowding: obvious but underappreciated. **Trends in Biochemical Sciences**, v. 26, n. 10, p. 597–604, 2001. ISSN 0968-0004.
- FAZEKAS, S. **Distinct element simulations of granular materials**. Tese (Doutorado) – Dudapest University of Technology and Economics, 2007.
- FRANCOIS, N.; SAADATFAR, M.; HANIFPOUR, M.; CRUIKSHANK, R.; SHEPPARD, A. Crystallisation in a granular material. AIP, 2013. ISSN 0094-243X.
- GE, Y.; ZHOU, A.; NAZEM, M.; DENG, Y. Numerical simulation of cone penetration test by using cfd–dem coupled analysis. **Acta Geotechnica**, v. 19, p. 7635–7653, 07 2024.
- GIULIANI, F.; AUTELITANO, F.; DEGIOVANNI, E.; MONTEPARA, A. Dem modelling analysis of tree root growth in street pavements. **International Journal of Pavement Engineering**, v. 18, p. 1–10, 03 2015.
- GRIFFITHS, D. J. **Introduction to electrodynamics; 4th ed.** Boston, MA: Pearson, 2013. Re-published by Cambridge University Press in 2017.
- HALES, T. C. Sphere packings, i. **Discrete & Computational Geometry**, Springer Science and Business Media LLC, v. 17, n. 1, p. 1–51, jan. 1997. ISSN 1432-0444.
- HALL, C. L.; VELLA, D.; GORIELY, A. The mechanics of a chain or ring of spherical magnets. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, Society for Industrial & Applied Mathematics (SIAM), v. 73, n. 6, p. 2029–2054, jan. 2013. ISSN 1095-712X.
- HILBERT, D. Problèmes futurs des mathématiques. In: _____. [S. l.]: Deuxième Congrès International des Mathématiciens, 1900. cap. XVIII Problème: Partition de l'espace en polyèdres congruents.
- HILL, L. J.; PYUN, J. Colloidal polymers via dipolar assembly of magnetic nanoparticle monomers. **ACS Applied Materials & Interfaces**, American Chemical Society (ACS), v. 6, n. 9, p. 6022–6032, fev. 2014. ISSN 1944-8252.
- J, S.; MURRAY, C.; WELLER, D.; FOLKS, L.; MOSER, a. Monodisperse fept nanoparticles and ferromagnetic fept nanocrystal superlattices. **Science (New York, N.Y.)**, v. 287, p. 1989–92, 04 2000.
- JACKSON, J. D. **Classical electrodynamics**. 3rd ed.. ed. New York, NY: Wiley, 1999.
- JAEGER, H. M.; NAGEL, S. R.; BEHRINGER, R. P. Granular solids, liquids, and gases. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 68, p. 1259–1273, Oct 1996.
- JIANG, M.; ZHAO, T.; WANG, X. Dem modelling of cone penetration tests in lunar soil. **Granular Matter**, v. 24, 02 2022.
- KATZAV, E.; ADDA-BEDIA, M.; BOUDAUD, A. A statistical approach to close packing of elastic rods and to dna packaging in viral capsids. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, Proceedings of the National Academy of Sciences, v. 103, n. 50, p. 18900–18904, dez. 2006. ISSN 1091-6490.

KAZAKOV, A.; LEMPERT, A.; TA, T. The sphere packing problem into bounded containers in three-dimension non-euclidean space. **IFAC-PapersOnLine**, Elsevier BV, v. 51, n. 32, p. 782–787, 2018. ISSN 2405-8963.

KHOSRAVI, A.; MARTINEZ, A.; DEJONG, J. Discrete element model (dem) simulations of cone penetration test (cpt) measurements and soil classification. **Canadian Geotechnical Journal**, v. 57, p. 1369–1387, 11 2019.

KLEIN, D.; RANDIC, M. Resistance distance. **Journal of Mathematical Chemistry**, v. 12, p. 81–95, 12 1993.

KU, J.; ARUGUETE, D. M.; ALIVISATOS, A. P.; GEISSLER, P. L. Self-assembly of magnetic nanoparticles in evaporating solution. **J. Am. Chem. Soc.**, v. 133, p. 838–848, 2010.

MCLACHLAN, D. S.; SAUTI, G. The ac and dc conductivity of nanocomposites. **Journal of Nanomaterials**, v. 2007, n. 1, p. 030389, 2007.

MESSINA, R.; KHALIL, L. A.; STANKOVIĆ, I. Self-assembly of magnetic balls: From chains to tubes. **Physical Review E**, American Physical Society (APS), v. 89, n. 1, jan. 2014. ISSN 1550-2376.

MESSINA, R.; STANKOVIĆ, I. Self-assembly of magnetic spheres in two dimensions: The relevance of onion-like structures. **Europhysics Letters**, EDP Sciences, IOP Publishing and Società Italiana di Fisica, v. 110, n. 4, p. 46003, jun 2015.

MUTISO, R. M.; WINEY, K. I. Electrical properties of polymer nanocomposites containing rod-like nanofillers. **Progress in Polymer Science**, v. 40, p. 63–84, 2015. ISSN 0079-6700. Progress in Polymer Hybrid Materials.

OLSEN, T.; KAMRIN, K. Modeling tensorial conductivity of particle suspension networks. **Soft Matter**, v. 11, 01 2015.

ORUE, I.; MARCANO, L.; BENDER, P.; GARCÍA-PRIETO, A.; VALENCIA, S.; MAWASS, M. A.; GIL-CARTÓN, D.; VENERO, D. A.; HONECKER, D.; GARCÍA-ARRIBAS, A.; BARQUÍN, L. F.; MUELA, A.; FDEZ-GUBIEDA, M. L. Configuration of the magnetosome chain: a natural magnetic nanoarchitecture. **Nanoscale**, Royal Society of Chemistry (RSC), v. 10, n. 16, p. 7407–7419, 2018. ISSN 2040-3372.

PEREZ, J. M.; SIMEONE, F. J.; SAEKI, Y.; JOSEPHSON, L.; WEISSLEDER, R. Viral-induced self-assembly of magnetic nanoparticles allows the detection of viral particles in biological media. **J. Am. Chem. Soc.**, v. 125, p. 10192–10193, 2003.

RECHES, M.; SNYDER, P. W.; WHITESIDES, G. M. Folding of electrostatically charged beads-on-a-string as an experimental realization of a theoretical model in polymer science. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 106, n. 42, p. 17644–17649, 2009.

REDNER, S. Random multiplicative processes: An elementary tutorial. **Am. J. Phys.**, v. 58, n. 3, p. 267–273, March 1990.

REHMAN, K. u.; MUTHU, J.; RAMAN, R.; SANTOS, I. D.; PAPNAI, B.; HSIEH, Y.-P.; HOFMANN, M. Magnetic microactuators based on particle jamming. **ACS Materials Letters**, v. 6, n. 10, p. 4748–4755, 2024.

- SAFFORD, K.; KANTOR, Y.; KARDAR, M.; KUDROLLI, A. Structure and dynamics of vibrated granular chains: Comparison to equilibrium polymers. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 79, p. 061304, Jun 2009.
- SANDNES, B.; KNUDSEN, H. A.; MÅLØY, K. J.; FLEKKØY, E. G. Labyrinth patterns in confined granular-fluid systems. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 99, p. 038001, Jul 2007.
- STANLEY, H. E. **Introduction to phase transitions and critical phenomena**. [S. l.]: Oxford University Press, 1987.
- STOOP, N.; WITTEL, F. K.; HERRMANN, H. J. Morphological phases of crumpled wire. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 101, n. 9, 2008. ISSN 1079-7114.
- SULTAN, E.; BOUDAUD, A. Statistics of crumpled paper. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 96, n. 13, abr. 2006. ISSN 1079-7114.
- SUN, X.; LI, Y.; MA, Y.; ZHANG, Z. Direct observation of melting in a two-dimensional driven granular system. **Scientific Reports**, v. 6, p. 24056, 04 2016.
- TARASEVICH, Y.; BURMISTROV, A.; GOLTSEVA, V.; GORDEEV, I.; SERBIN, V.; SIZOVA, A.; VODOLAZSKAYA, I.; ZHOLOBOV, D. Identification of current-carrying part of a random resistor network: electrical approaches vs. graph theory algorithms. In: . [S. l.: s. n.], 2018. v. 955, p. 012021.
- UZMAN, A. Molecular cell biology. **Biochemistry and Molecular Biology Education**, Wiley, v. 29, n. 3, p. 126–128, 2001. ISSN 1470-8175.
- VANDEWALLE, N.; DORBOLO, S. Magnetic ghosts and monopoles. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 16, n. 1, p. 013050, jan 2014.
- VARÓN, M.; BELEGGIA, M.; KASAMA, T.; HARRISON, R. J.; DUNIN-BORKOWSKI, R. E.; PUNTES, V. F.; FRANDBSEN, C. Dipolar magnetism in ordered and disordered low-dimensional nanoparticle assemblies. **Scientific Reports**, Springer Science and Business Media LLC, v. 3, n. 1, fev. 2013. ISSN 2045-2322.
- VELLA, D.; PONTAVICE, E. du; HALL, C. L.; GORIELY, A. The magneto-elastica : from self-buckling to self-assembly. **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, The Royal Society, v. 470, n. 2162, p. 20130609, fev. 2014. ISSN 1471-2946.
- WAFFLARD, A.; HEYDE, S. Van der; DHYON, J.; OPSOMER, E.; VANDEWALLE, N. Buckling and zipping of a magnetic ring under gravity. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 112, p. L043403, Oct 2025.
- WAFFLARD, A.; OPSOMER, E.; VANDEWALLE, N. Dipolar gels formed by aggregation of magnetized beads. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 110, p. 054608, Nov 2024.
- WANG, M.; PAN, N. Predictions of effective physical properties of complex multiphase materials. **Materials Science and Engineering: R: Reports**, v. 63, n. 1, p. 1–30, 2008. ISSN 0927-796X.

WITTEN, T. A. Stress focusing in elastic sheets. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 79, p. 643–675, Apr 2007.

XIAO, W.; GUTMAN, I. On resistance matrices. **MATCH - Communications in Mathematical and in Computer Chemistry**, v. 49, 09 2003.

YAVUZ, C.; MAYO, J.; YU, W.; PRAKASH, A.; FALKNER, J.; YEAN, S.; CONG, L.; SHIPLEY, H.; KAN, A.; TOMSON, M.; NATELSON, D.; COLVIN, V. Low-field magnetic separation of monodisperse Fe_3O_4 nanocrystals. **Science (New York, N.Y.)**, v. 314, p. 964–7, 12 2006.

YUEN, H.; PRINCEN, J.; ILLINGWORTH, J.; KITTLER, J. Comparative study of hough transform methods for circle finding. **Image and Vision Computing**, v. 8, n. 1, p. 71–77, 1990. ISSN 0262-8856.

ZHOU, H.-X.; RIVAS, G.; MINTON, A. Macromolecular crowding and confinement: Biochemical, biophysical, and potential physiological. v. 37, 01 2008.