



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DE QUIXADÁ
CURSO DE GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

GUSTAVO FERNANDES DE BARROS

**COBERTURA POR VÉRTICES MÍNIMA EM CLASSES DE GRAFOS COM GRAU
MÁXIMO TRÊS**

QUIXADÁ

2026

GUSTAVO FERNANDES DE BARROS

COBERTURA POR VÉRTICES MÍNIMA EM CLASSES DE GRAFOS COM GRAU
MÁXIMO TRÊS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Graduação em Ciência da Computação
do Campus de Quixadá da Universidade Federal
do Ceará, como requisito parcial à obtenção do
grau de bacharel em Ciência da Computação.

Orientador: Prof. Dr. Atílio Gomes Luiz.

QUIXADÁ

2026

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B277c Barros, Gustavo Fernandes de.

Cobertura por vértices mínima em classes de grafos com grau máximo três / Gustavo Fernandes de Barros. – 2026.
60 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Campus de Quixadá, Curso de Ciência da Computação, Quixadá, 2026.
Orientação: Prof. Dr. Atílio Gomes Luiz.

1. Cobertura por vértices. 2. Teoria dos grafos. 3. Grafos snarks. I. Título.

CDD 004

GUSTAVO FERNANDES DE BARROS

COBERTURA POR VÉRTICES MÍNIMA EM CLASSES DE GRAFOS COM GRAU
MÁXIMO TRÊS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Ciência da Computação do Campus de Quixadá da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Ciência da Computação.

Aprovada em: 21/01/2026

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Atílio Gomes Luiz (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Lucas Ismailly Bezerra Freitas
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Paulo Henrique Macedo de Araujo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Aos meus pais, que sempre estiveram ao meu lado. À minha família, por prestar todo o apoio que sempre precisei. Aos meus amigos, que me acompanharam nessa jornada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida.

Aos meus pais, Ana Paula Fernandes de Barros e Wilson Rodrigues de Barros, por terem me proporcionado todo o amor, carinho e apoio que me fizeram seguir em frente. Desejo um dia ser tão forte quanto vocês.

À toda minha família que, mesmo de longe, continuam me lembrando de onde vim e por que faço o que faço. Nada disso teria acontecido sem vocês.

Aos meus amigos, Ezequiel dos Santos Melo, Francilene Dias, Gabriel Alves Pessoa, Matheus dos Santos Mendes, Pedro Rivaldo Tabosa Silva e Robson José Dias Venâncio, que fizeram toda a minha jornada ser mais suportável, me acompanhando nos momentos bons e ruins.

Ao Prof. Dr. Atílio Gomes Luiz pela orientação, principalmente pelos ensinamentos relacionados a teoria dos grafos e a pesquisa acadêmica.

Aos professores participantes da banca avaliadora, Prof. Dr. Lucas Ismaily Bezerra Freitas e Prof. Dr. Paulo Henrique Macedo de Araujo pelo tempo disponibilizado e pelas sugestões de melhoria.

“Dou respeito às coisas desimportantes e aos seres desimportantes. Prezo insetos mais que aviões. Prezo a velocidade das tartarugas mais que a dos mísseis. Tenho em mim esse atraso de nascença. Eu fui aparelhado para gostar de passarinhos. Tenho abundância de ser feliz por isso.”

(Manoel de Barros)

RESUMO

Dado um grafo $G = (V(G), E(G))$, uma cobertura por vértices de G consiste em um subconjunto $C \subseteq V(G)$ tal que, para toda aresta $uv \in E(G)$, tem-se que $u \in C$ ou $v \in C$. O número de cobertura de um grafo G , denotado por $\tau(G)$, é o tamanho de uma cobertura por vértices mínima de G . Nesse contexto, propôs-se o estudo teórico do problema da cobertura por vértices na família dos grafos *snarks*, definidos como grafos cúbicos, simples, sem arestas de corte e que não admitem coloração de arestas própria com três cores. O objetivo central foi investigar propriedades estruturais desses grafos com vistas à obtenção de novos limitantes para o tamanho da cobertura por vértices mínima na família dos *snarks*-flor, *snarks* de Goldberg, *snarks* de Blanuša Generalizados e *snarks* de Loupekine. Inicialmente, investigamos o *snark*-flor F_n , determinando o parâmetro $\tau(F_n) = 2n + 1$. Este resultado fundamentou-se na dualidade entre a cobertura por vértices mínima e o conjunto independente máximo. Em relação aos *snarks* de Goldberg G_n , estabelecemos que $\tau(G_n) = \lceil \frac{9n}{2} \rceil$. A demonstração apoiou-se na decomposição em subgrafos disjuntos e na estrutura do grafo, composta por ciclos induzidos de tamanho ímpar, para os quais já existem limitantes bem definidos na literatura. Para a primeira família de *snarks* de Blanuša Generalizados, B_n^1 , obtivemos $\tau(B_n^1) = \lceil \frac{14n+17}{3} \rceil$. Além de utilizarmos os ciclos induzidos e a existência de subgrafos disjuntos, a análise baseou-se nas propriedades estruturais do grafo, explorando a periodicidade de seus blocos para identificar um padrão de cobertura válido. Por fim, para os *snarks* de Loupekine L_n (baseados em LP_0 e LP_1 com arestas direto-cruzado), o parâmetro foi fixado em $\tau(L_n) = 4n$. Este valor foi obtido principalmente através da análise dos ciclos induzidos C_5 presentes na estrutura do grafo.

Palavras-chave: cobertura por vértices; teoria dos grafos; grafos *snarks*.

ABSTRACT

Given a graph $G = (V(G), E(G))$, a vertex cover of G consists of a subset $C \subseteq V(G)$ such that, for every edge $uv \in E(G)$, either $u \in C$ or $v \in C$. The vertex cover number of a graph G , denoted by $\tau(G)$, is the size of a minimum vertex cover of G . In this context, a theoretical study of the vertex cover problem was proposed for the family of snark graphs, defined as cubic, simple, bridgeless graphs that do not admit a proper 3-edge-coloring. The central objective was to investigate the structural properties of these graphs to obtain new bounds for the minimum vertex cover size in the families of Flower *snarks*, Goldberg *snarks*, Generalized Blanuša *snarks*, and Loupekine *snarks*. Initially, we investigated the Flower snark F_n , determining the parameter $\tau(F_n) = 2n + 1$. This result was based on the duality between the minimum vertex cover and the maximum independent set. Regarding the Goldberg *snarks* G_n , we established that $\tau(G_n) = \lceil \frac{9n}{2} \rceil$. The proof relied on the decomposition into disjoint subgraphs and the graph's structure, which is composed of induced odd cycles for which well-defined bounds already exist in the literature. For the first family of Generalized Blanuša *snarks*, B_n^1 , we obtained $\tau(B_n^1) = \lceil \frac{14n+17}{3} \rceil$. In addition to utilizing induced cycles and the existence of disjoint subgraphs, the analysis was based on the structural properties of the graph, exploring the periodicity of its blocks to identify a valid cover pattern. Finally, for the Loupekine *snarks* L_n (based on LP_0 and LP_1 with direct-cross edges), the parameter was fixed at $\tau(L_n) = 4n$. This value was obtained primarily through the analysis of the induced C_5 cycles present in the graph structure.

Keywords: vertex cover; graph theory; *snark* graphs.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
1.1	Contribuições deste trabalho	13
1.2	Organização do Texto	13
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	14
2.1	Definições Básicas de Teoria dos Grafos	14
2.2	Cobertura por Vértices	17
2.2.1	<i>Relação entre Cobertura por Vértices, Emparelhamento e Conjuntos Independentes</i>	19
2.2.2	<i>Caminhos e Ciclos</i>	22
2.2.3	<i>Grafos de Petersen Generalizados</i>	24
2.3	Breve Histórico dos Grafos <i>Snarks</i>	29
3	RESULTADOS	30
3.1	<i>Snarks-flor</i>	30
3.2	<i>Snarks de Goldberg</i>	35
3.3	<i>Snarks de Blanuša Generalizados</i>	39
3.4	<i>Snarks de Loupekine</i>	49
4	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	55
	REFERÊNCIAS	56

1 INTRODUÇÃO

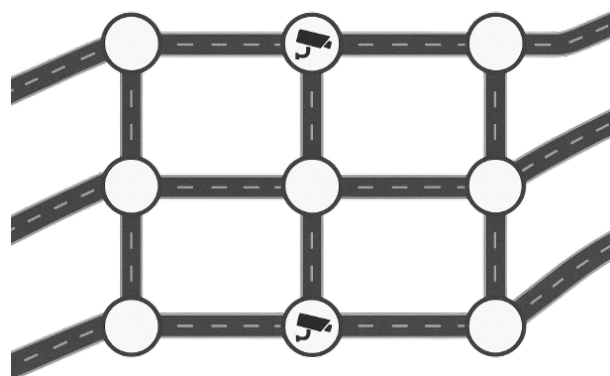
Em um mundo cada vez mais imerso em tecnologia, esta se mostra presente em diversos aspectos da vida humana — inclusive na segurança — tendo como uma de suas grandes contribuições a câmera de vigilância, que atualmente é amplamente utilizada em espaços públicos, instituições privadas e, principalmente, nos lares ao redor do mundo e que tem contribuído significativamente para a diminuição da criminalidade em alguns locais (Yang *et al.*, 2024).

Entretanto, assim como o olho humano, as câmeras de vigilância modernas só enxergam o que está dentro de seu campo de visão, tornando necessária a instalação de múltiplas unidades para a cobertura completa de uma determinada área. Tecnicamente, isso não representa um impasse. Porém, devido a restrições orçamentárias, a quantidade de câmeras necessárias e o modo como essas câmeras são alocadas pode tornar-se um desafio.

Primeiramente, pode ocorrer a alocação insuficiente de câmeras, o que compromete a vigilância do espaço ao deixar pontos cegos desprotegidos, resultando em uma falsa sensação de segurança. Em segundo lugar, mesmo que todos os pontos do ambiente estejam cobertos, pode haver sobreposição excessiva de áreas monitoradas, configurando um desperdício de câmeras devido à redundância desnecessária.

Um exemplo é ilustrado na Figura 1, onde há uma série de ruas interligadas entre si e há também câmeras em algumas intersecções, onde essas câmeras “cobrem” todas as ruas que se intersectam sobre aquele cruzamento de vias específico. Claramente, neste exemplo, as câmeras não cobrem todas as ruas, mas essa ilustração cabe como uma boa representação do problema na prática.

Figura 1 – Distribuição de câmeras em ruas interligadas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Esse problema de instalação de câmeras em cruzamentos de vias pode ser modelado com um grafo, no qual as câmeras de vigilância que originalmente ficariam nas intersecções entre ruas, vias ou semelhantes são alocadas em determinados vértices, enquanto as ruas/vias monitoradas são representadas pelas arestas. Na prática, o objetivo é instalar câmeras em pontos estratégicos de forma que haja um monitoramento completo utilizando o mínimo de câmeras possível (Gusev, 2020). Esse monitoramento das vias é modelado em teoria dos grafos usando o conceito de cobertura por vértices.

O conceito de cobrir arestas com vértices em um grafo existe desde os primeiros estudos sobre grafos feitos no século XIX pelos matemáticos Leonhard Euler e Arthur Cayley (Kumara *et al.*, 2025; Harju, 2011). Porém, o estudo de coberturas por vértices tornou-se mais popular entre os teóricos de grafos apenas em meados do século XX. Em 1931, o matemático Dénes König provou que o tamanho de um emparelhamento máximo em um grafo bipartido é igual ao tamanho de sua cobertura por vértices mínima (König, 1931; Szárnyas, 2020). Posteriormente, em 1959, Tibor Gallai provou que o número de vértices de um grafo é igual à soma dos tamanhos de um conjunto independente máximo e de uma cobertura por vértices mínima do grafo (Gallai, 1959; Cockayne *et al.*, 1988). Já na década de 1970, o estudo de cobertura por vértices tornou-se central na área de Teoria de Complexidade Computacional após a publicação dos estudos do cientista da computação Richard Karp, onde, em um artigo, ele listou 21 problemas NP-completos dentro da computação, com a cobertura por vértices sendo um dos problemas citados (Karp, 1972).

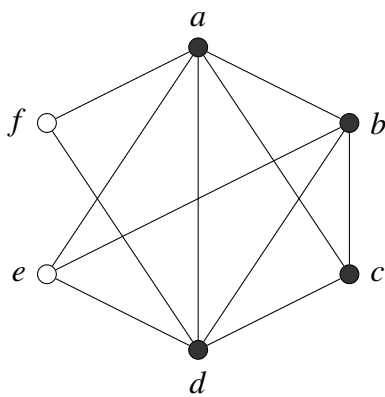
O conceito de cobertura por vértices é formalmente definido a seguir. Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo simples e $C \subseteq V(G)$ um subconjunto de seus vértices. Dizemos que C é uma *cobertura por vértices* de G se, para toda aresta $uv \in E(G)$, tem-se que $u \in C$ ou $v \in C$ (Kleinberg; Tardos, 2005), como ilustrado na Figura 2a. Dizemos que C é uma *cobertura por vértices mínima* de G se, e somente se, para toda cobertura $C' \subseteq V(G)$ de G tem-se que $|C| \leq |C'|$. O *número de cobertura* de um grafo G , denotado por $\tau(G)$, é o tamanho de uma cobertura por vértices mínima de G .

Aplicando essas definições ao grafo G representado na Figura 2b, verifica-se que o seu número de cobertura $\tau(G)$ é estritamente maior que 2. Mesmo ao tentar construir o conjunto candidato $S = \{a, d\}$, composto pelos vértices de maior grau para maximizar a incidência, a condição de cobertura não é satisfeita para todas as arestas de $E(G)$. O grafo possui um total de 11 arestas, e a soma dos graus de a e d resulta em 10; contudo, a aresta ad é contabilizada duas

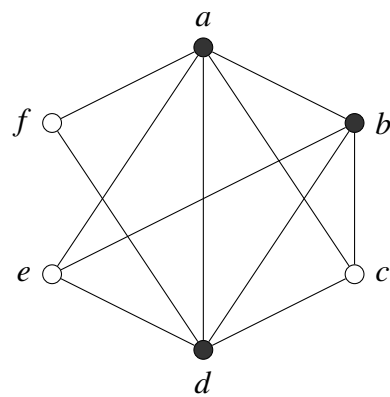
vezes. Assim, o conjunto cobre efetivamente apenas 9 arestas. Isso demonstra que $\{a, d\}$ não é uma cobertura por vértices válida e, portanto, é impossível cobrir G com apenas dois vértices.

A escolha dos vértices centrais a e d já cobre a vasta maioria das arestas. As únicas arestas que não tocam nem a nem d são bc e eb . O ponto crucial é que ambas as arestas tem b como um vértice em comum. Portanto, ao adicionarmos b ao nosso conjunto de cobertura, eliminamos simultaneamente essas duas arestas restantes. Conclui-se, assim, que o conjunto $S = \{a, b, d\}$ é uma cobertura válida e mínima, resultando em $\tau(G) = 3$.

Figura 2 – Comparação entre uma cobertura por vértices qualquer e uma cobertura por vértices mínima de um mesmo grafo.



(a) Cobertura por vértices (não mínima).



(b) Cobertura por vértices mínima.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Dentre os principais avanços no estudo do problema de cobertura por vértices, destaca-se o algoritmo guloso com fator de aproximação 2 proposto por Reuven Bar-Yehuda e Shimon Even, ainda hoje um dos melhores algoritmos de aproximação para o problema (Bar-Yehuda; Even, 1985). No âmbito da teoria da complexidade, Irit Dinur e Shmuel Safra, com base em provas probabilisticamente verificáveis (PCP), demonstraram que não existe algoritmo de aproximação com fator menor que aproximadamente 1,36, a menos que $P = NP$ (Dinur; Safra, 2005). Já na complexidade parametrizada, Rodney G. Downey e Michael R. Fellows estabeleceram que o problema é Tratável por Parâmetro Fixo (FPT) quando parametrizado pelo tamanho da cobertura (Downey; Fellows, 1999).

Além das abordagens teóricas, métodos baseados em metaheurísticas também têm sido aplicados ao problema, como no caso dos algoritmos genéticos. Milanovic propôs uma abordagem baseada em algoritmos genéticos para resolver o problema de cobertura por vértices generalizado, obtendo resultados promissores quando comparado com algoritmos clássicos de

aproximação e soluções exatas (Milanovic, 2010). Da mesma forma, Nagy e Szokol desenvolveram um algoritmo genético com função de aptidão intervalar para o problema de cobertura mínima, demonstrando eficiência em instâncias complexas de grafos (Nagy; Szokol, 2019).

O problema de determinar $\tau(G)$ para grafos com grau no máximo 2 é um problema de complexidade polinomial, já que as componentes conexas desses grafos são caminhos ou ciclos e o problema é de fácil caracterização para essas classes. Dito isto, uma linha natural de pesquisa consiste em investigar o problema para grafos com grau máximo 3, em particular, para classes de grafos em que todos os vértices possuem grau igual a 3, os assim chamados grafos cúbicos. Porém, sabe-se que o problema da cobertura por vértices é NP-completo mesmo quando restrito a grafos cúbicos (Garey *et al.*, 1976). Entretanto, existem avanços significativos no estudo do parâmetro $\tau(G)$ para determinadas classes de grafos cúbicos. Um bom exemplo são os grafos de Petersen generalizados $P(n, k)$. Especificamente, Behsaz *et al.* e Jin *et al.* caracterizaram propriedades estruturais das coberturas para estes grafos, apresentando alguns limites inferiores e superiores para o parâmetro $\tau(P(n, k))$ desta família, além de determinar valores exatos para $\tau(P(n, k))$ em casos específicos (Behsaz *et al.*, 2010; Jin; Wang, 2019).

Apesar dos avanços já obtidos no estudo do problema de cobertura por vértices, muitas classes de grafos cúbicos ainda permanecem inexploradas. Uma dessas classes são os grafos *snarks*, que se caracterizam por serem grafos simples, cúbicos, conexos, não planares e sem arestas de corte (Freitas *et al.*, 2015). O interesse por esses grafos surgiu, em parte, devido à sua relação com o Teorema das Quatro Cores, que afirma que é possível colorir qualquer mapa político com, no máximo, quatro cores, de forma que regiões adjacentes tenham cores distintas (Tutte, 1967). Durante as tentativas de provar esse teorema, *snarks* foram identificados como casos críticos para a impossibilidade de certas abordagens baseadas em coloração de arestas. Por sua complexidade estrutural e propriedades extremas, os *snarks* desempenham um papel importante como potenciais contraexemplos ou casos-limite em diversos problemas de otimização e decisão em grafos, tornando-os relevantes para o aprofundamento da teoria da cobertura por vértices em grafos cúbicos.

Dentro da família dos *snarks*, destacam-se subclasses importantes como os *snarks*-*flor* (Isaacs, 1975), os *snarks* de Goldberg (Goldberg, 1981), os *snarks* de Blanuša generalizados (Watkins, 1983) e os *snarks* de Loupekine (Isaacs, 1976), cada um com características estruturais que os tornam relevantes para o estudo de problemas difíceis em grafos cúbicos. Essas famílias possuem simetrias e uma definição recursiva que as tornam interessantes para o estudo

de diversos parâmetros em grafos. Por exemplo, diversos problemas de coloração em grafos e de dominação em grafos têm sido investigados para estas famílias (Gonçalves *et al.*, 2021; Luiz, 2024). Dada a importância histórica dessa classe na teoria dos grafos, faz-se necessário um estudo dela no contexto do problema da cobertura por vértices.

1.1 Contribuições deste trabalho

Considerando que, dentre os grafos cúbicos, os *snarks* são frequentemente identificados como casos críticos em problemas de otimização devido à sua complexidade estrutural, a escassez de literatura sobre sua cobertura por vértices é notável. Diante desse cenário, este trabalho oferece uma contribuição relevante ao utilizar definições e demonstrações preestabelecidas na literatura como base para inferir limitantes apertados em diferentes famílias desses grafos. Dessa forma, os resultados aqui apresentados não apenas preenchem uma lacuna no estado da arte, mas também estabelecem um alicerce para futuras investigações do problema na classe geral dos *snarks*. Mais especificamente, nós determinamos o valor exato do parâmetro $\tau(G)$ para os *snarks*-flor, *snarks* de Goldberg, a primeira família dos *snarks* de Blanuša generalizados e os *snarks* de Loupekine.

1.2 Organização do Texto

A estrutura do trabalho segue com o Capítulo 2, que estabelece a fundamentação teórica necessária, abordando conceitos de teoria dos grafos com ênfase nas definições e demonstrações do problema de cobertura por vértices, além de uma contextualização histórica sobre os *snarks*. O Capítulo 3 apresenta os resultados obtidos a partir da aplicação desses conceitos aos objetivos propostos. Por fim, o Capítulo 4 traz as considerações finais da pesquisa, destacando a relevância dos resultados alcançados e sugerindo perspectivas para trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

No Capítulo 1, definimos o conceito de cobertura por vértices de um grafo, bem como o de cobertura mínima e o parâmetro $\tau(G)$. A seguir, apresentamos mais alguns conceitos acerca desse tema, trazendo definições fundamentais sobre grafos e demonstrações que determinam limitantes inferiores e superiores para o número de cobertura de algumas classes de grafos. Ademais, relacionamos o conceito de cobertura com outros conceitos clássicos em grafos. Por fim, finalizamos o capítulo apresentando um breve histórico sobre os grafos *snarks*.

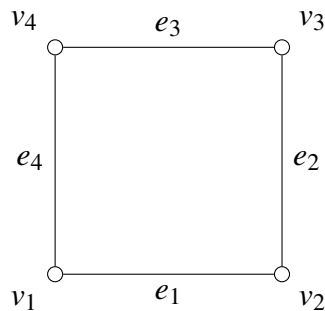
2.1 Definições Básicas de Teoria dos Grafos

Os conceitos básicos de teoria dos grafos aqui apresentados baseiam-se primordialmente nos livros *Introduction to Graph Theory* (West, 2002) e *Fundamentals of Graph Theory* (Bickle, 2020).

Um grafo $G = (V(G), E(G))$ é um objeto matemático que consiste em dois conjuntos finitos: um conjunto não vazio de elementos chamados *vértices*, denotado por $V(G)$, e um conjunto de elementos chamados arestas, denotado por $E(G)$, onde as *arestas* são pares únicos e não ordenados de vértices distintos. A definição de grafo aqui apresentada e que é usada ao longo de todo este texto é também chamada na literatura científica de *grafo simples*.

Na Figura 3, temos uma ilustração de um grafo $G = (V(G), E(G))$ com o conjunto de vértices e o conjunto de arestas dados, respectivamente, por $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $E(G) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_1, v_4\}\}$. É comum na literatura representar uma aresta $\{u, v\}$ pelos pares uv ou vu . Além disso, também é comum nomear as arestas com outros símbolos que não pertençam ao conjunto $V(G)$; por exemplo, na Figura 3, a aresta v_1v_2 foi nomeada como e_1 .

Figura 3 – Um grafo G .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Diz-se que dois vértices são *adjacentes* ou *vizinhos* quando ambos pertencem a uma

mesma aresta do conjunto $E(G)$. Por exemplo, na Figura 3, os vértices v_1 e v_2 são adjacentes, pois $\{v_1, v_2\} \in E(G)$. Quando $\{u, v\} \in E(G)$, dizemos que u e v são os *extremos* da aresta $\{u, v\}$. De modo análogo, diz-se que uma aresta *incide* em um vértice quando esse vértice é um de seus extremos, ou seja, se $\{u, v\} \in E(G)$, então diz-se que $\{u, v\}$ incide tanto em u quanto em v .

O *grau* de um vértice $v \in V(G)$, denotado por $d(v)$, é a quantidade de arestas que incidem em v . O *grau mínimo* do grafo G , denotado por $\delta(G)$, representa o menor grau entre todos os vértices de G , ou seja, $\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V(G)\}$. Já o *grau máximo*, denotado por $\Delta(G)$, representa o maior grau entre os vértices, isto é, $\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V(G)\}$.

Seguindo a definição de grau de um vértice, um grafo G é chamado de *k-regular* se todos os seus vértices possuem o mesmo grau, igual a k . Grafos onde todos os vértices têm o mesmo grau, sem especificar o valor, são chamados simplesmente de *regulares*. Um caso de especial interesse neste trabalho são os grafos 3-regulares, comumente chamados de *grafos cúbicos*.

Ainda sobre vértices vizinhos, definimos a *vizinhança* de um vértice $v_1 \in V(G)$ como o conjunto de todos os vértices em $V(G)$ que são adjacentes a v_1 . Formalmente, tal conjunto é definido como $N_G(v_1) = \{w \in V(G) \mid \{w, v_1\} \in E(G)\}$. De forma análoga, podemos estender essa noção para um subconjunto de vértices $S \subseteq V(G)$. A *vizinhança* do conjunto S , denotada por $N_G(S)$, é o conjunto de todos os vértices do conjunto $V(G) - S$ mas que são adjacentes a pelo menos um vértice em S . Matematicamente, a vizinhança de S é a união das vizinhanças de cada um de seus vértices, excluindo-se os próprios elementos de S .

Dados dois grafos G e H , dizemos que H é um *subgrafo* de G , denotado por $H \subseteq G$, se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Desta forma, dado um grafo $G = (V(G), E(G))$ e um conjunto de vértices $S \subseteq V(G)$, um *subgrafo induzido* por S é um grafo $G[S] = (S, E')$, onde o conjunto E' consiste em todas as arestas de $E(G)$ cujos ambos os extremos estão em S , significando que um subgrafo induzido de G é formado por um subconjunto de vértices S do grafo original G e todas as arestas de G que conectam pares de vértices nesse subconjunto.

Dizemos que dois grafos G_1 e G_2 são *vértice-disjuntos* ou simplesmente *disjuntos* se eles não compartilham nenhum vértice entre si, implicando em $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$.

Em teoria dos grafos, existem diferentes maneiras de descrever sequências de vértices e arestas. A noção mais fundamental é o *passoio*, definido como uma lista alternada de vértices e arestas, $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k$, onde para $1 \leq i \leq k$, a aresta e_i incide nos vértices v_{i-1} e v_i . O vértice inicial v_0 e o vértice final v_k são os *extremos* do passeio, enquanto v_1, \dots, v_{k-1}

são seus *vértices internos*. Em um passeio, tanto vértices quanto arestas podem ser repetidos livremente. Um tipo mais restrito de passeio é a *trilha*, que é um passeio no qual todas as arestas são distintas; os vértices, no entanto, ainda podem ser repetidos. Progredindo na especificidade, temos o *caminho*, que é uma trilha onde todos os vértices são distintos. Finalmente, um *ciclo* é um passeio que começa e termina no mesmo vértice (ou seja, $v_0 = v_k$), no qual todas as arestas são distintas, todos os vértices internos são distintos, e os vértices inicial e final são os únicos vértices iguais. Assim, a hierarquia é clara: todo caminho é uma trilha, e toda trilha é um passeio.

Diz-se que um grafo G é *conexo* quando existe um caminho entre quaisquer dois de seus vértices distintos, $u, v \in V(G)$. Se essa condição não for satisfeita, o grafo é *desconexo*. Um grafo desconexo G é formado por subgrafos conexos maximais, que são chamados de *componentes conexas* de G .

Dado um grafo $G = (V(G), E(G))$ e uma aresta $e_1 \in E(G)$, dizemos que e_1 é uma *aresta de corte* se sua remoção aumenta o número de componentes conexas do grafo G . Uma caracterização alternativa e fundamental estabelece que uma aresta é uma aresta de corte se, e somente se, ela não faz parte de nenhum ciclo contido em G .

Tratando-se de definições a respeito de grafos de maneira estrutural, uma definição de suma importância para o problema da cobertura por vértices é a de *grafo bipartido*, que consiste em um grafo $G = (V(G), E(G))$ cujo conjunto de vértices $V(G)$ pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos V_1 e V_2 , tais que toda aresta de G contém um extremo em V_1 e o outro extremo em V_2 .

Outro grafo clássico é o *grafo completo*, denotado por K_n , que consiste em um grafo com n vértices em que cada par de vértices distintos é conectado por uma única aresta; o K_5 , por exemplo, é o grafo completo com 5 vértices.

O conceito de *homeomorfismo* também é importante e está intrinsecamente ligado à operação de subdivisão de aresta. Esta operação consiste em *subdividir* uma aresta $e = uv$ ao se adicionar ao conjunto $V(G)$ um novo vértice w e substituir e por duas novas arestas, uw e wv . Dois grafos são ditos *homeomórficos* se ambos podem ser obtidos a partir de um mesmo grafo original através da aplicação repetida da operação de subdivisão de arestas.

Desta forma, podemos definir a classe dos grafos planares. Um *grafo planar* é um grafo que pode ser desenhado no plano euclidiano \mathbb{R}^2 de modo que suas arestas se interceptem apenas em seus vértices extremos. A caracterização combinatória da planaridade é dada pelo Teorema de Kuratowski, que afirma que um grafo é planar se, e somente se, ele não possui

subgrafos homeomórficos ao grafo completo K_5 ou ao grafo bipartido completo $K_{3,3}$, ou seja, não contém uma subdivisão desses grafos.

A seguir, apresentamos algumas definições e demonstrações a respeito do problema da cobertura por vértices.

2.2 Cobertura por Vértices

Provar limitantes em Teoria dos Grafos é uma tarefa fundamental, pois estabelece os limites do que é teoricamente possível, guiando o desenvolvimento de algoritmos ao definir tanto um “piso de dificuldade” (limitantes inferiores), que nos impedem de buscar otimizações impossíveis, quanto garantias de desempenho (limitantes superiores). Dessa forma, nesta seção apresentamos limitantes gerais para o problema da cobertura por vértices, já conhecidos na literatura científica, que serão fundamentais para alcançarmos o objetivo final deste trabalho.

A seguir, apresentamos dois limitantes inferiores elementares para $\tau(G)$, que seguem diretamente da definição de cobertura por vértices e que fazem parte de resultados clássicos da literatura cujas demonstrações originais são de domínio público. Por questão de completude, apresentamos aqui demonstrações que nós desenvolvemos para esses resultados.

Proposição 1. *Se G é um grafo, então $\tau(G) \geq \frac{m}{\Delta(G)}$.*

Demonstração. Seja G um grafo simples com m arestas e com grau máximo igual a $\Delta(G)$. Seja também $S \subseteq V(G)$ uma cobertura por vértices mínima de G , ou seja, $|S| = \tau(G)$. Considere $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. Como toda aresta de G tem como extremidade um vértice de S , ao somar os graus de todos os vértices do conjunto S , teremos com certeza contabilizado todas as arestas de G , possivelmente com algumas dessas arestas contadas duas vezes. Isso implica que:

$$m \leq \sum_{v \in S} d(v) = d(v_1) + \dots + d(v_k) \leq \underbrace{\Delta(G) + \dots + \Delta(G)}_{k \text{ vezes}} = k \cdot \Delta(G).$$

Logo, $m \leq k \cdot \Delta(G)$. Como $k = |S| = \tau(G)$, concluímos que $\tau(G) \geq \frac{m}{\Delta(G)}$. \square

Proposição 2. *Se G é um grafo simples com n vértices e m arestas, então $\tau(G) \geq \frac{m}{n-1}$.*

Demonstração. Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo simples com n vértices e m arestas. Suponha que $C \subseteq V(G)$ seja uma cobertura por vértices mínima, ou seja, $|C| = \tau(G)$. Então, todas as arestas do grafo incidem em pelo menos um vértice de C . Observe que cada vértice em C pode cobrir no máximo $n - 1$ arestas. Assim, o número máximo de arestas que podem ser cobertas

por um único vértice de C é $n - 1$. Como cada aresta deve ser coberta por pelo menos um vértice de C , o total de arestas m é no máximo $|C|(n - 1)$, isto é, $m \leq |C|(n - 1)$, o que implica $|C| \geq \frac{m}{n-1}$. \square

O próximo limitante inferior relaciona $\tau(G)$ à ordem do grafo e ao seu grau máximo, sendo inspirado em resultados para grafos com grau máximo 2 obtidos por M. Xiao (Xiao, 2010), onde é estabelecido que $\tau(G) \geq \frac{2n}{2+\Delta(G)}$ para qualquer grafo G com grau mínimo $\delta(G) \geq 2$.

Proposição 3. *Se G é um grafo com n vértices e $\delta(G) \geq 3$, então*

$$\tau(G) \geq \frac{3n}{3 + \Delta(G)}.$$

Demonstração. Seja S uma cobertura por vértices mínima no grafo $G = (V(G), E(G))$ e seja $\tau(G) = |S|$. O conjunto $V(G) - S$ é, por definição, um conjunto independente. Como $\delta(G) \geq 3$, temos que cada vértice em G , incluindo os vértices em $V(G) - S$, tem grau pelo menos 3.

Como $V(G) - S$ é um conjunto independente, todas as arestas incidentes a um vértice em $V(G) - S$ devem, necessariamente, conectar-se a um vértice em S . Dado que cada um dos $|V(G) - S| = n - \tau(G)$ vértices em $V(G) - S$ tem grau mínimo 3, existem pelo menos $3(n - \tau(G))$ arestas entre o conjunto S e o conjunto $V(G) - S$.

Por outro lado, o número de arestas com um extremo em S é limitado superiormente pela soma dos graus dos vértices em S . Como cada vértice em S tem grau no máximo $\Delta(G)$, a soma dos graus dos vértices em S é no máximo $\tau(G) \cdot \Delta(G)$. Este valor é um limite superior para o número de arestas entre S e $V(G) - S$.

Combinando os dois argumentos, temos a seguinte inequação:

$$3(n - \tau(G)) \leq \tau(G) \cdot \Delta(G)$$

Agora, isolamos $\tau(G)$ através de manipulação algébrica.

$$3n - 3\tau(G) \leq \tau(G) \cdot \Delta(G)$$

$$3n \leq \tau(G) \cdot \Delta(G) + 3\tau(G)$$

$$3n \leq \tau(G)(\Delta(G) + 3)$$

$$\frac{3n}{\Delta(G) + 3} \leq \tau(G)$$

Assim, temos que:

$$\tau(G) \geq \frac{3n}{3 + \Delta(G)}$$

Isso completa a prova. \square

O próximo resultado relaciona o número de cobertura de um grafo G com o número de cobertura de qualquer subgrafo de G , sendo mais um resultado clássico da literatura. Por questão de completude, apresentamos uma prova que nós elaboramos.

Proposição 4. *Se G e H são dois grafos tais que $H \subseteq G$, então $\tau(H) \leq \tau(G)$.*

Demonstração. Seja C_G uma cobertura por vértices mínima de G . Como $H \subseteq G$, temos que todas as arestas de H estão em G , ou seja, $E(H) \subseteq E(G)$. Portanto, o conjunto C_G também cobre todas as arestas de H , visto que ele cobre todas as arestas de G . Logo, C_G é também uma cobertura válida para H , embora não necessariamente seja mínima. Como $\tau(H)$ é o menor conjunto de vértices que cobre todas as arestas de H , temos que $\tau(H) \leq |C_G| = \tau(G)$. \square

2.2.1 Relação entre Cobertura por Vértices, Emparelhamento e Conjuntos Independentes

Como mencionado anteriormente no Capítulo 1, os primeiros estudos sobre o problema de cobertura por vértices surgiram a partir de investigações relacionadas ao emparelhamento máximo em grafos bipartidos e aos conjuntos independentes. Devido à NP-completude do problema da cobertura por vértices, muitos dos resultados obtidos a partir desses problemas correlatos têm sido amplamente utilizados como base e contribuição para o avanço das pesquisas na área.

A seguir, apresentamos as definições desses conjuntos, que são importantes para o desenvolvimento deste capítulo.

Um *emparelhamento* em G é um subconjunto $M \subseteq E(G)$ tal que nenhuma aresta em M compartilha um vértice com outra, ou seja, para quaisquer $e_1, e_2 \in M$, com $e_1 \neq e_2$, temos $e_1 \cap e_2 = \emptyset$. Quando M é de tamanho máximo possível, chamamos de *emparelhamento máximo*. Denotamos por $\alpha'(G)$ a cardinalidade de um emparelhamento máximo de G .

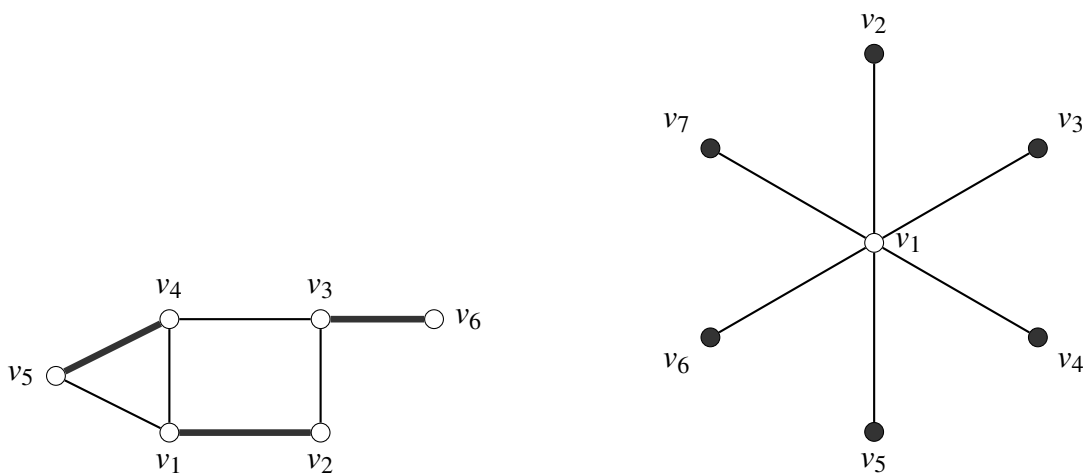
A partir de um emparelhamento M , um vértice v é dito *saturado* por M se for extremo de alguma aresta em M . Quando um emparelhamento satura todos os vértices de G , ele é denominado *emparelhamento perfeito*. No contexto de um grafo bipartido $G = (X, Y)$, dizemos que o emparelhamento M satura o conjunto X se todo vértice em X for saturado por M , não havendo a mesma exigência para os vértices do conjunto Y .

Um *conjunto independente* é um subconjunto $I \subseteq V(G)$ tal que nenhum par de vértices em I é adjacente. Um conjunto independente é dito *máximo* se não há outro conjunto independente maior que ele no grafo. Isso implica que todo vértice que não pertence ao conjunto

independente máximo deve ser adjacente a pelo menos um vértice que pertence a ele. Denotamos por $\alpha(G)$ o tamanho de um conjunto independente máximo de G .

Esses conceitos de emparelhamento e conjunto independente possuem conexões estruturais com o problema da cobertura por vértices, e são frequentemente explorados para o desenvolvimento de algoritmos e formulações teóricas relacionadas. Podemos observar as Figuras 4a e 4b a seguir como exemplos ilustrativos destes conceitos.

Figura 4 – Ilustração dos conceitos de emparelhamento e conjuntos independentes aplicados em grafos quaisquer.



(a) Exemplo de um emparelhamento máximo, destacado pelas arestas grossas.

(b) Exemplo de um conjunto independente máximo, destacado pelos vértices pretos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Dessa forma, temos a seguir alguns teoremas que trazem resultados interessantes relacionados aos temas citados. As seguintes demonstrações foram derivadas do livro *Introduction to Graph Theory*, de Douglas B. West (West, 2002).

Proposição 5 (Gallai, 1959). *Um subconjunto de vértices $C \subseteq V(G)$ é uma cobertura de um grafo $G = (V(G), E(G))$ se, e somente se, $V(G) - C$ é um conjunto independente.*

Demonstração. Suponha que $C \subseteq V(G)$ é uma cobertura de G . Por definição, toda aresta de G tem pelo menos uma de suas extremidades em C . Isso significa que nenhuma aresta de G tem ambas as extremidades no conjunto complementar, $V(G) - C$. Portanto, por definição, $V(G) - C$ é um conjunto independente.

Agora, suponha que $I = V(G) - C$ é um conjunto independente. Isso significa que nenhuma aresta de G tem ambas as extremidades em I . Assim, toda aresta de G deve ter pelo

menos uma de suas extremidades fora de I , ou seja, em C . Portanto, C é uma cobertura de G . \square

Proposição 6 (Gallai, 1959). *Dado um grafo $G = (V(G), E(G))$, um conjunto de vértices $X \subseteq V(G)$ é uma cobertura mínima se, e somente se, $V(G) - X$ é um conjunto independente máximo. Ou seja, $|V(G)| = \tau(G) + \alpha(G)$.*

Demonstração. Isso segue diretamente da proposição anterior. Se X é uma cobertura de tamanho mínimo, $|X| = \tau(G)$, então $V(G) - X$ é um conjunto independente. Se existisse um conjunto independente I' maior que $V(G) - X$, então $V(G) - I'$ seria uma cobertura menor que X , o que é uma contradição. \square

Na Proposição 9, analisamos a relação fundamental entre emparelhamentos e coberturas por vértices em grafos bipartidos. Demonstramos que a determinação da cardinalidade de um emparelhamento máximo é um passo crucial para encontrar a cardinalidade de uma cobertura por vértices mínima. A fim de provar esse resultado, usamos as seguintes proposições.

Proposição 7 (Hall, 1935). *Dado um grafo bipartido G com bipartição (X, Y) , G tem um emparelhamento que satura X se e somente se $|N_G(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq X$.*

Proposição 8 (West, 2002). *Seja C uma cobertura por vértices e M um emparelhamento em um grafo G . Então $|M| \leq |C|$.*

Demonstração. Note que toda aresta de um emparelhamento deve estar coberta por pelo menos um vértice. Logo, a cardinalidade de toda cobertura é maior ou igual a cardinalidade de um emparelhamento do grafo. \square

Proposição 9 (Kőnig, 1931). *Em um grafo bipartido G , a cardinalidade máxima de um emparelhamento é igual à cardinalidade mínima de uma cobertura por vértices, ou seja, $\alpha'(G) = \tau(G)$.*

Demonstração. Seja G um grafo bipartido com bipartição (X, Y) . Pela Proposição 8, temos que $\alpha'(G) \leq \tau(G)$, bastando provar somente que $\alpha'(G) \geq \tau(G)$. Dessa forma, seja C uma cobertura por vértices mínima de G , ou seja $|C| = \tau(G)$, construiremos um emparelhamento máximo M em G de forma que $|M| = |C| = \tau(G)$.

A ideia consiste em particionar C em dois conjuntos R e T tais que $R = C \cap X$ e $T = C \cap Y$ e, dado H um subgrafo induzido por $R \cup (Y - T)$ e H^* um subgrafo induzido por $T \cup (X - R)$, usar o Teorema de Hall para mostrar que H tem um emparelhamento que satura R e que H^* tem um emparelhamento que satura T , pois como H e H^* são disjuntos, os dois

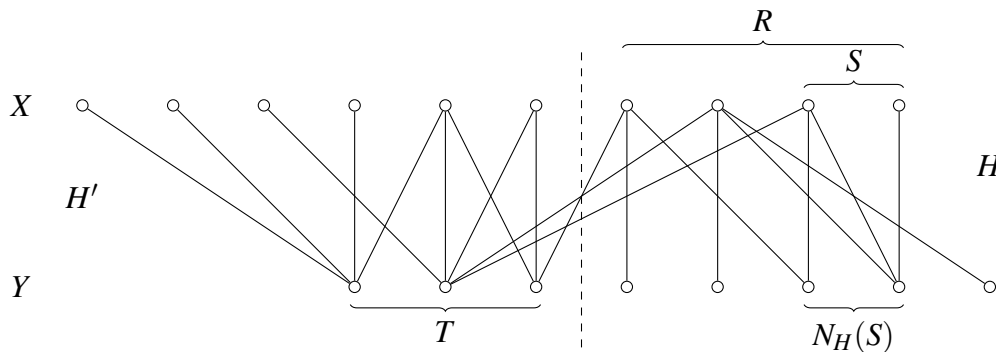
emparelhamentos juntos formam um emparelhamento de tamanho $|C|$ em G . A Figura 5 ilustra os subgrafos H e H^* .

Como $R \cup T$ é uma cobertura, G não tem arestas de $Y - T$ para $X - R$. Além disso, se considerarmos o conjunto $N_H(S)$ para cada subconjunto $S \subset R$, temos que $N_H(S)$ está contido em $Y - T$.

Suponha, por absurdo, que $|N_G(S)| \leq |S|$, então podemos substituir $N_G(S)$ por S em C a fim de obter uma cobertura menor, dado que $N_H(S)$ cobre todas as arestas incidentes em S que não são cobertas por T . Porém, como C já é mínimo, isso não é possível. Logo, concluímos que $|N_G(S)| \geq |S|$.

Assim, concluímos que a minimalidade do conjunto C implica o Teorema de Hall em H , portanto, H tem um emparelhamento que satura R . Da mesma forma, temos que H^* tem um emparelhamento que satura T , e o resultado segue. \square

Figura 5 – Esquema dos conjuntos descritos na demonstração da Proposição 9.



Fonte: Elaborada pelo autor.

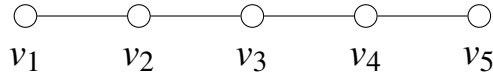
2.2.2 Caminhos e Ciclos

Como é comum em teoria dos grafos, muitos problemas são inicialmente estudados em classes restritas de grafos, especialmente naqueles com grau máximo limitado. Um caso frequente envolve grafos com grau máximo $\Delta(G) \leq 2$, sendo estes caminhos e ciclos, cujas estruturas mais simples permitem a obtenção de soluções exatas para determinados problemas.

Um *caminho* com n vértices, denotado por P_n , é um grafo tal que o seus vértices podem ser dispostos em uma sequência linear de vértices conectados por arestas consecutivas, ou seja, $V(P_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $E(P_n) = \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 1 \leq i \leq n - 1\}$, como ilustrado na Figura 6.

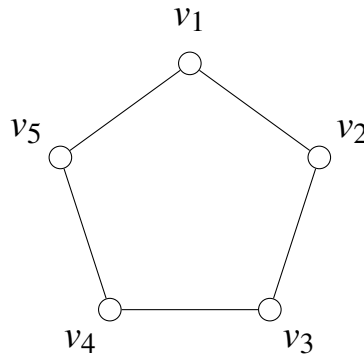
Um ciclo com $n \geq 3$ vértices, denotado por C_n , é o grafo definido por $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $E(C_n) = \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{\{v_n, v_1\}\}$, como é ilustrado na Figura 7. Ambos os caminhos e ciclos satisfazem a condição $\Delta(G) \leq 2$.

Figura 6 – Grafo Caminho P_5 .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 7 – Grafo Ciclo C_5 .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Por completude, apresentamos a seguir demonstrações para o valor exato do parâmetro $\tau(G)$ para caminhos e ciclos. Estes resultados são clássicos da literatura.

Proposição 10. *Dado um caminho P_n , temos que $\tau(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.*

Demonstração. Primeiro, vamos estabelecer um limite inferior para $\tau(P_n)$. Pela Proposição 1, temos que $\tau(P_n) \geq \lceil \frac{m}{\Delta(P_n)} \rceil = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, para todo $n \geq 1$.

Agora, construímos uma cobertura por vértices C com exatamente $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ vértices. Seja $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ o conjunto de vértices de P_n , onde as arestas são da forma $\{v_i, v_{i+1}\}$. Considere o conjunto $C = \{v_{2i} \mid i \in \mathbb{Z}^+, 2i \leq n\}$. Este conjunto contém todos os vértices com índice par. O número de vértices em C é exatamente $|C| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Qualquer aresta em P_n é da forma $e = \{v_j, v_{j+1}\}$.

– Se j é par, então $v_j \in C$.

– Se j é ímpar, então $j + 1$ é par, e $v_{j+1} \in C$.

Em ambos os casos, a aresta e é coberta pelo conjunto C . Portanto, C é uma cobertura por vértices válida para P_n . Como encontramos uma cobertura de tamanho $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ e mostramos que $\tau(P_n) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, concluímos que $\tau(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. \square

Proposição 11. *Dado um ciclo C_n com $n \geq 3$ vértices, temos que $\tau(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.*

Demonstração. Primeiramente, estabelecemos um limite inferior para $\tau(C_n)$. Pela Proposição 1, temos que $\tau(C_n) \geq \lceil \frac{m}{\Delta(C_n)} \rceil = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, para todo $n \geq 3$.

Para mostrar a igualdade, vamos construir uma cobertura por vértices C de tamanho $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Seja $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ o conjunto de vértices de C_n . Analisamos dois casos:

Caso 1: n é par. Seja $n = 2k$ para algum inteiro $k \geq 2$. Considere o conjunto $C = \{v_2, v_4, \dots, v_{2k}\}$. Este conjunto tem $|C| = k = \frac{n}{2} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ vértices. Toda aresta em C_n é da forma $\{v_i, v_{i+1}\}$ (com o índice $n + 1$ sendo 1). Uma aresta $\{v_{2j-1}, v_{2j}\}$ é coberta por $v_{2j} \in C$, e uma aresta $\{v_{2j}, v_{2j+1}\}$ é coberta por $v_{2j} \in C$. Portanto, C é uma cobertura por vértices.

Caso 2: n é ímpar. Seja $n = 2k + 1$ para algum inteiro $k \geq 1$. Considere o conjunto $C = \{v_1, v_3, \dots, v_{2k+1}\}$. Este conjunto possui $|C| = k + 1 = \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ vértices. Uma aresta $\{v_{2j}, v_{2j+1}\}$ é coberta por $v_{2j+1} \in C$. Uma aresta $\{v_{2j-1}, v_{2j}\}$ é coberta por $v_{2j-1} \in C$. A aresta final $\{v_{2k+1}, v_1\}$ é coberta pois ambos os vértices v_{2k+1} e v_1 estão em C . Logo, C é uma cobertura por vértices.

Em ambos os casos, construímos uma cobertura por vértices de tamanho $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Visto que $\tau(C_n) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, podemos concluir que: $\tau(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. \square

2.2.3 Grafos de Petersen Generalizados

O grafo de Petersen é uma das estruturas mais conhecidas e fascinantes da teoria dos grafos. Ele leva o nome do matemático dinamarquês Julius Petersen, que o apresentou em 1898. Petersen o utilizou para refutar a conjectura de Tait, que afirmava que todo grafo 3-regular sem arestas de corte seria 1-fatorável (ou seja, suas arestas poderiam ser coloridas com 3 cores). O grafo de Petersen é um contraexemplo para essa e muitas outras conjecturas na teoria dos grafos.

A generalização do grafo de Petersen foi iniciada por H. S. M. Coxeter em 1950. A sua ideia consistia em construir uma família de grafos desenhando um polígono de n lados (ciclo externo) ao redor de um polígono estrelado de n lados e, em seguida, unindo os vértices correspondentes (Coxeter, 1950).

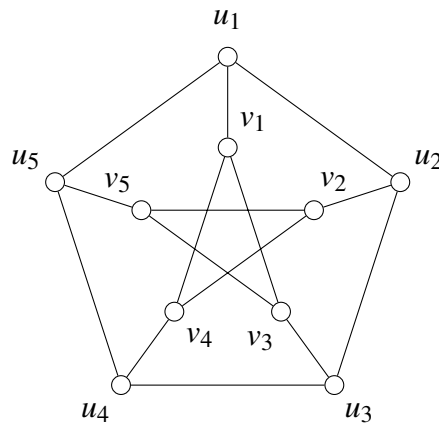
Anos mais tarde, M. E. Watkins, em 1969, formalizou este conceito, nomeando-os oficialmente como Grafos de Petersen Generalizados, representados como $P(n, k)$. Devido à sua construção, todos os Grafos de Petersen Generalizados são cúbicos, ou seja, cada vértice tem grau 3 (Watkins, 1969).

Um *grafo de Petersen generalizado*, denotado por $P(n, k)$, é definido para números naturais n e k que satisfazem a condição $n > 2k$. Sua estrutura é definida da seguinte forma: o conjunto de vértices é $V(P(n, k)) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, e o conjunto de arestas $E(P(n, k)) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ é formado pela união disjunta de três conjuntos de arestas:

- (a) $E_1 = \{u_i u_{i+1} \mid i = 1, \dots, n\}$ (índices módulo n);
- (b) $E_2 = \{u_i v_i \mid i = 1, \dots, n\}$ (índices módulo n);
- (c) $E_3 = \{v_i v_{i+k} \mid i = 1, \dots, n\}$ (índices módulo n).

Os vértices u_i e v_i são chamados de *gêmeos*. O conjunto $\{u_1, \dots, u_n\}$ forma o ciclo externo, enquanto as conexões entre os vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$ formam um ou mais ciclos, dependendo do máximo divisor comum de n e k . O grafo de Petersen corresponde ao grafo de Petersen generalizado $P(5, 2)$ e é ilustrado na Figura 8.

Figura 8 – Grafo de Petersen $P(5, 2)$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dada a estreita relação dos grafos de Petersen generalizados com os *snarks*, esta seção apresenta os resultados mais gerais existentes na literatura científica (Behsaz *et al.*, 2010), que foram obtidos no problema da cobertura por vértices para essa classe de grafos. Para isso, estabelecemos alguns limitantes e demonstramos propriedades relevantes para a análise.

Para as seguintes demonstrações, mostra-se necessária a definição da função $mdc(n, k)$, onde dados $n, k \in \mathbb{N}$, $mdc(n, k)$ retorna o maior número inteiro que divide n e k simultaneamente.

Proposição 12 (Behsaz *et al.*, 2010). *Se n é ímpar, então $\tau(P(n,k)) \geq n + \frac{mdc(n,k)+1}{2}$.*

Demonstração. Considere o grafo de Petersen generalizado $P(n,k)$, cujo conjunto de vértices é $V(P(n,k)) = \{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Qualquer cobertura por vértices deve selecionar ao menos $\lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{n+1}{2}$ vértices do conjunto $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, pois os vértices de U estão conectados sequencialmente em um ciclo de comprimento n e, como n é ímpar, são necessárias pelo menos $\frac{n+1}{2}$ escolhas para cobrir todas as arestas do ciclo induzido por U .

Além disso, os vértices do conjunto $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ estão organizados em $mdc(n,k)$ ciclos disjuntos de comprimento $\frac{n}{mdc(n,k)}$, devido à forma como as arestas entre os v_i são definidas. Para cobrir todas as arestas entre vértices de $V(G)$, é necessário selecionar pelo menos $\lceil \frac{n/mdc(n,k)}{2} \rceil$ vértices de cada ciclo, o que totaliza:

$$mdc(n,k) \cdot \left\lceil \frac{n/mdc(n,k)}{2} \right\rceil = \frac{n + mdc(n,k)}{2}$$

vértices de $V(G)$.

Somando os dois termos, o número mínimo de vértices em qualquer cobertura é:

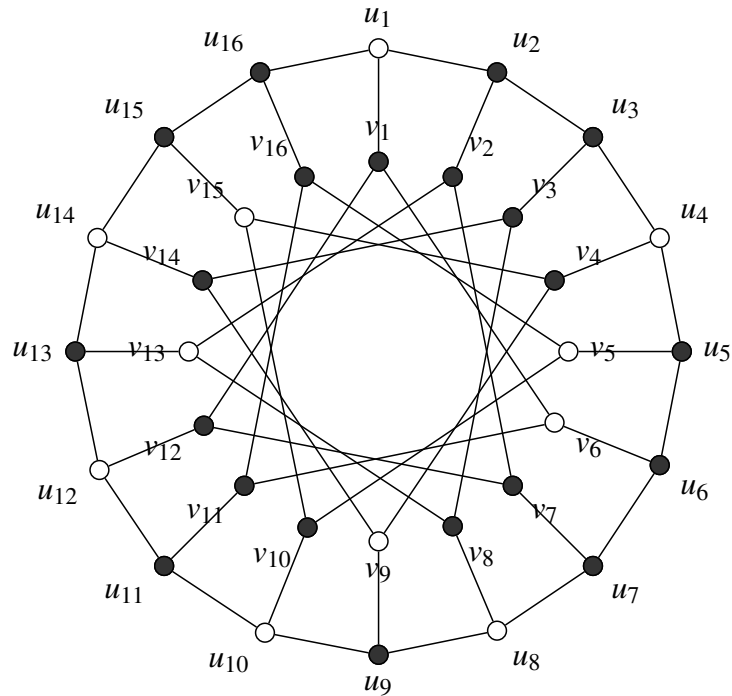
$$\frac{n+1}{2} + \frac{n + mdc(n,k)}{2} = n + \frac{mdc(n,k) + 1}{2},$$

o que conclui a demonstração. □

A Proposição 14 apresenta limitantes superiores para $\tau(P(n,k))$ dependendo da paridade do valor $\frac{n}{mdc(n,k)}$. A fim de apresentar a demonstração desse resultado, precisamos antes definir alguns conceitos importantes para o total entendimento da prova. Tanto a Proposição 14, quanto estes conceitos foram retirados do trabalho de Behsaz *et al.* (2010).

Dado um grafo de Petersen generalizado $P(n,k)$, onde $V(P(n,k)) = U \cup V$, com os conjuntos U e $V(G)$ como anteriormente definidos, uma *tira* é definida como um subconjunto máximo de vértices consecutivos do conjunto $V(G)$ que fazem parte de uma cobertura por vértices, onde “consecutivos” aqui refere-se aos índices dos vértices em ordem circular. O *tamanho de uma tira* é simplesmente o número de vértices que ela contém. Por exemplo, no grafo da Figura 9, o conjunto $\{v_{16}, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é uma tira de tamanho 5.

Figura 9 – Uma cobertura por vértices no grafo $P(16,5)$, indicada pelos vértices em cor preta.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Adotamos a convenção de que todos os índices dos vértices de um grafo de Petersen generalizado, quando estiverem fora do intervalo $\{1, 2, \dots, n\}$, devem ser reduzidos módulo n para pertencerem a esse conjunto.

A partir de uma cobertura por vértices C qualquer do grafo $P(n, k)$, podemos construir uma *cobertura semi-ótima*, denotada por $so(C)$, da seguinte forma: Seja $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ o conjunto de vértices que formam os ciclos internos de $P(n, k)$, selecionamos todos os vértices de $V(G)$ que estão em C para colocar em $so(C)$. Em seguida, selecionamos os gêmeos de todos os vértices de $V(G)$ que não estão em C . Por fim, *selecionamos de forma otimizada* os gêmeos das tiras de C , o que significa que vamos escolher entre os vértices $u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+m}$ de forma alternada, começando com u_{i+1} . Behsaz *et al.* (2010) provam que $so(C)$ é uma cobertura por vértices do grafo $P(n, k)$ e que seu tamanho nunca é maior que o da cobertura C .

Por fim, define-se $a(C)$ e $b(C)$ como sendo o número de vértices selecionados do conjunto $V(G)$ por uma cobertura C e o número de tiras de tamanho ímpar em C , respectivamente.

A seguir, citamos a Proposição 13, pois precisaremos desse resultado para provar o próximo resultado.

Proposição 13 (Behsaz *et al.*, 2010). *Dada uma cobertura por vértices mínima C^* para $P(n, k)$, temos que $a(C^*) - b(C^*) = d(P(n, k))$.*

Proposição 14 (Behsaz *et al.*, 2010). *Seja $P(n, k)$ um grafo de Petersen generalizado. Temos que:*

(a) *Se $\frac{n}{\text{mdc}(n, k)}$ é ímpar, então:*

$$\tau(P(n, k)) \leq n + \frac{n + \text{mdc}(n, k)}{4}.$$

(b) *Se $\frac{n}{\text{mdc}(n, k)}$ é par, então*

$$\tau(P(n, k)) \leq n + \frac{n}{4}.$$

Demonstração. O grafo $P(n, k)$ tem vértices divididos em dois conjuntos: $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ (ciclo externo) e $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ (ciclos internos). As arestas incluem:

- Arestas ligando u_i e u_{i+1} , formando um ciclo induzido por U ;
- Arestas entre v_i e v_{i+k} , formando um ciclo (ou dois ou mais ciclos disjuntos) induzidos por $V(G)$;
- Arestas ligando u_i e v_i .

O conjunto $V(G)$ induz $\text{mdc}(n, k)$ ciclos disjuntos, cada um de comprimento $\frac{n}{\text{mdc}(n, k)}$.

Se $\frac{n}{\text{mdc}(n, k)}$ é ímpar, então para cobrir todas as arestas em cada ciclo, é necessário selecionar alternadamente vértices de $V(G)$, totalizando:

$$a(C) = \text{mdc}(n, k) \cdot \left\lceil \frac{n/\text{mdc}(n, k)}{2} \right\rceil = \text{mdc}(n, k) \cdot \frac{n/\text{mdc}(n, k) + 1}{2} = \frac{n + \text{mdc}(n, k)}{2}$$

vértices de $V(G)$.

Considere uma cobertura C que contém todos os vértices de U e todos os vértices do conjunto $a(c) \subseteq V$ selecionados acima. Ao aplicar a construção da cobertura semi-ótima $so(C)$ de acordo com a Proposição 13, temos:

$$\tau(P(n, k)) \leq |so(C)| = n + \frac{a(C) - b(C)}{2} \leq n + \frac{a(C)}{2} = n + \frac{n + \text{mdc}(n, k)}{4},$$

concluindo a parte (a).

Se, por outro lado, $\frac{n}{\text{mdc}(n, k)}$ é par, então $a(C) = \frac{n}{2}$ e a mesma análise fornece:

$$\tau(P(n, k)) \leq n + \frac{n}{4},$$

completando a parte (b). □

2.3 Breve Histórico dos Grafos *Snarks*

A origem do conceito de grafos *snarks* em teoria dos grafos começa com o Problema das Quatro Cores. Em 1880, P. G. Tait provou que resolver esse problema era equivalente a mostrar que todo grafo 3-regular, planar e sem arestas de corte poderia ter suas arestas coloridas com apenas três cores de modo que arestas adjacentes recebessem cores distintas (Tait, 1880).

Na época, numa tentativa de achar um contraexemplo para a Conjectura das Quatro Cores, isso levou à busca por grafos que satisfizessem essas propriedades, mas que precisassem de quatro cores para a coloração própria de suas arestas. Embora a prova do Teorema das Quatro Cores em 1977 tenha mostrado que tais grafos não podem ser planares, o estudo de suas contrapartes não planares continuou.

O nome “*snark*” foi cunhado por Martin Gardner em 1976, inspirado em um poema de Lewis Carroll, para descrever a natureza elusiva desses grafos (Gardner, 1976). O primeiro e mais famoso *snark*, o grafo de Petersen, foi descoberto em 1898 e permaneceu como o único exemplo conhecido por mais de 40 anos. Outros *snarks* foram encontrados mais tarde por matemáticos como Blanuša (1946) e Szekeres (1973).

Um ponto de virada na descoberta de novos *snarks* ocorreu em 1975, quando Rufus Isaacs desenvolveu os primeiros métodos para construir famílias infinitas de *snarks*, como os *snarks*-flor, transformando-os de curiosidades raras em uma classe estruturada de grafos (Isaacs, 1975). A importância do grafo de Petersen foi solidificada pela conjectura de W. T. Tutte de 1967, provada em 1999, que afirma que todo *snark* contém o grafo de Petersen como um menor, estabelecendo-o como o bloco de construção fundamental para todos os *snarks* (Tutte, 1967).

3 RESULTADOS

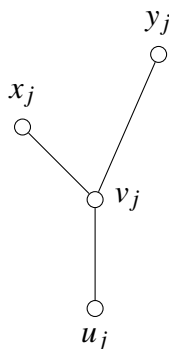
Neste capítulo, apresentamos resultados originais sobre a cobertura por vértices mínima de quatro famílias de grafos *snarks*. Cada família é apresentada em uma seção específica. Iniciamos cada seção com uma breve contextualização a respeito da origem de cada uma das famílias de grafos *snarks* de interesse deste trabalho. Passamos por algumas propriedades fundamentais, pela construção dos membros das famílias e, por fim, determinamos os seus números de cobertura mínima.

3.1 *Snarks-flor*

Em 1975, Rufus Isaacs (Isaacs, 1975) apresentou métodos que viabilizam a construção de famílias infinitas de *snarks*, onde uma das famílias descobertas acabou sendo justamente a família dos *snarks-flor*, cujos membros são denotados por $F_3, F_5, F_7, \dots, F_n$, tal que $n \geq 3$ e n é um inteiro ímpar.

Uma propriedade fundamental desta família é que todos os seus membros podem ser construídos através da união disjunta de n subgrafos denominados blocos de construção. Um *bloco de construção* B_j consiste em um grafo simples, onde $V(B_j) = \{x_j, y_j, v_j, u_j\}$ e $E(B_j) = \{x_j v_j, y_j v_j, u_j v_j\}$, onde $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. A Figura 10 ilustra um bloco de construção.

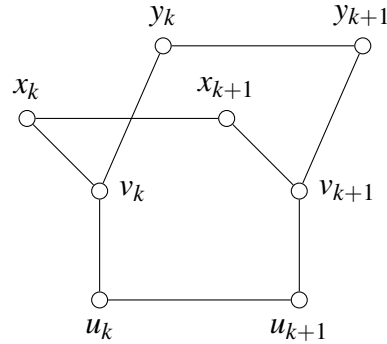
Figura 10 – Um bloco de construção B_j .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dados dois blocos de construção B_k e B_{k+1} , definimos as *arestas de ligação* como o conjunto $E_{k,k+1} = \{u_k u_{k+1}, x_k x_{k+1}, y_k y_{k+1}\}$. A Figura 11 ilustra dois blocos ligados com arestas de ligação.

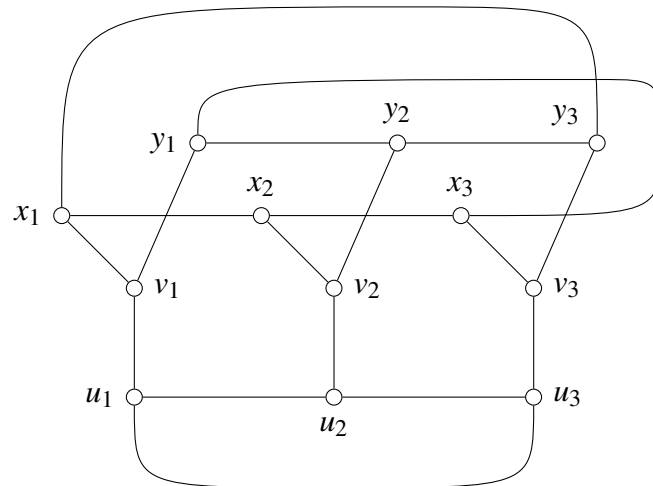
Figura 11 – Dois blocos B_k e B_{k+1} conectados com arestas de ligação do conjunto $E_{k,k+1}$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dado um inteiro ímpar $n \geq 3$, o *snark-flor* F_n é definido de modo que $V(F_n) = V(B_1) \cup V(B_2) \cup \dots \cup V(B_n)$ e $E(F_n) = (\bigcup_{i=1}^n E(B_i)) \cup (\bigcup_{k=1}^{n-1} E_{k,k+1}) \cup \{y_1x_n, x_1y_n, u_1u_n\}$. O *snark-flor* F_3 é apresentado na Figura 12. Pela definição de *snark-flor*, temos que $|V(F_n)| = 4n$ e $|E(F_n)| = 6n$.

Figura 12 – *Snark-flor* F_3 .



Fonte: Elaborada pelo autor.

No Teorema 2, determinamos o valor exato do parâmetro $\tau(F_n)$ para os *snarks-flor*. Como parte integral da prova, usamos a relação entre cobertura por vértices mínima e conjunto independente máximo apresentada na Proposição 6. O teorema a seguir, um resultado clássico de teoria dos grafos, também é usado na prova do Teorema 2.

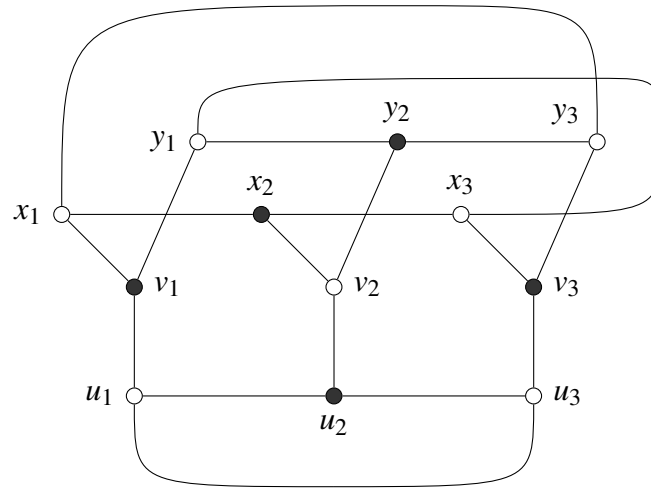
Teorema 1 (Kőnig, 1936). *Um grafo é bipartido se e somente se não contém ciclos de comprimento ímpar.*

Teorema 2. *Dado um grafo snark-flor F_n , temos que $\tau(F_n) = 2n + 1$.*

Demonstração. Dado um grafo snark-flor F_n com $n \geq 3$ e n ímpar, note que $|V(F_n)| = 4n$. Pela Proposição 6, temos que $|V(F_n)| = \tau(F_n) + \alpha(F_n)$, ou seja, $\tau(F_n) = |V(F_n)| - \alpha(F_n) = 4n - \alpha(F_n)$. Logo, se determinarmos o valor do conjunto independente máximo $\alpha(F_n)$, substituímos o seu valor nesta igualdade a fim de imediatamente obter o valor de $\tau(F_n)$. Dessa forma, provamos a seguir que $\alpha(F_n) = 2n - 1$ para que, assim, tenhamos que $\tau(F_n) = 2n + 1$.

Primeiramente, provamos o limitante inferior $\alpha(F_n) \geq 2n - 1$ para todo snark-flor F_n . Na Figura 13, apresentamos o snark-flor F_3 munido de um conjunto independente $I(F_3) = \{v_1, y_2, x_2, u_2, v_3\}$ de cardinalidade 5.

Figura 13 – Um conjunto independente com 5 elementos para o snark-flor F_3 , indicado pelos vértices de cor preta.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tal padrão na seleção de vértices de um conjunto independente pode ser generalizado para todos os snarks-flor F_n através da seguinte expressão:

$$I(F_n) = \left\{ v_{2i+1} \mid 0 \leq i \leq \frac{n-1}{2} \right\} \cup \left\{ y_{2j}, x_{2j}, u_{2j} \mid 1 \leq j \leq \frac{n-1}{2} \right\}$$

Para verificarmos a cardinalidade de $I(F_n)$, observe que o conjunto seleciona um vértice para cada bloco ímpar e três vértices para cada bloco par. Como n é um número ímpar, teremos $\frac{(n+1)}{2}$ blocos ímpares e $\frac{(n-1)}{2}$ blocos pares. Ao fazermos a soma, temos que $|I(F_n)| = 1 \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right) + 3 \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{n+1+3n-3}{2} = \frac{4n-2}{2} = 2n - 1$.

Referente a independência de $I(F_n)$, analisamos a estrutura local e as conexões entre blocos adjacentes. Seja k um índice par tal que $1 \leq k < n$. Considere o bloco B_k e o seu vizinho subsequente B_{k+1} . Internamente ao bloco par B_k , temos $I(F_n) \cap V(B_k) = \{u_k, x_k, y_k\}$. Como o conjunto de vizinhos desses vértices dentro do bloco é restrito unicamente ao vértice central v_k e sabemos que $v_k \notin I(F_n)$, não existem arestas induzidas por $I(F_n)$ no interior de B_k .

Analogamente, para o bloco ímpar B_{k+1} , temos $I(F_n) \cap V(B_{k+1}) = \{v_{k+1}\}$. Como v_{k+1} é adjacente apenas aos vértices periféricos $\{u_{k+1}, x_{k+1}, y_{k+1}\}$ e estes não pertencem a $I(F_n)$, a independência interna também é satisfeita. Sobre a independência entre os blocos, observamos as arestas de ligação entre os blocos B_k e B_{k+1} . Sabemos que a conexão entre dois blocos adjacentes ocorre exclusivamente através de seus vértices correspondentes. Portanto, temos que as arestas que conectam B_k a B_{k+1} consistem em $\{u_k u_{k+1}, x_k x_{k+1}, y_k y_{k+1}\}$. Note que os vértices $\{u_k, x_k, y_k\}$ do bloco par foram selecionados para $I(F_n)$, enquanto os vértices correspondentes $\{u_{k+1}, x_{k+1}, y_{k+1}\}$ do bloco ímpar não foram selecionados. Consequentemente, não existe aresta em F_n cujas extremidades pertençam simultaneamente a $I(F_n)$, provando que o conjunto é independente.

A existência de um conjunto independente de cardinalidade $2n - 1$ implica que $\alpha(F_n) \geq 2n - 1$. Dessa forma, acabamos de estabelecer um limite inferior para o parâmetro $\alpha(F_n)$ para os *snarks*-flor.

A seguir, mostramos que $\alpha(F_n) \leq 2n - 1$. Suponha, por contradição, que exista um conjunto independente $I(F_n)$ para o *snark*-flor F_n de tamanho maior ou igual a $2n$. Dado o fato que $|V(F_n)| = 4n$, definimos o conjunto $C(F_n) = V(F_n) - I(F_n)$, ou seja, formado pelos vértices de F_n que não estão em $I(F_n)$, onde $|C(F_n)| \leq 2n$.

Por definição de conjunto independente, os vértices que estão contidos em $I(F_n)$ não podem ser adjacentes entre si, logo todas as arestas que incidem em algum vértice de $I(F_n)$ terão seu outro extremo em $C(F_n)$, o que por sua vez caracteriza $C(F_n)$ como uma cobertura por vértices (ver Proposição 5).

Como F_n é um grafo cúbico, podemos calcular o número de arestas incidentes nos conjuntos $I(F_n)$ e $C(F_n)$ através das seguintes expressões:

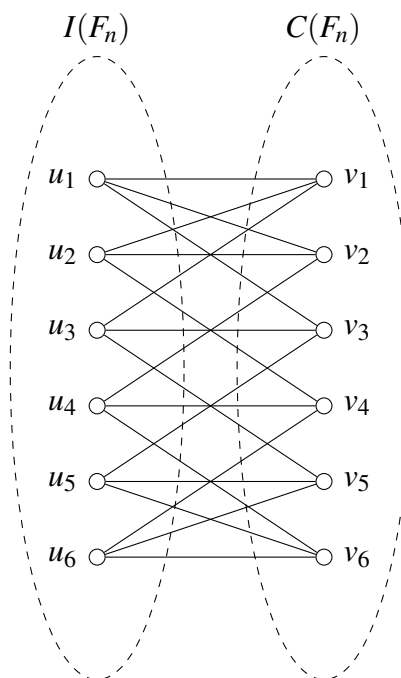
$$\sum_{u \in I(F_n)} d(u) = 3 \cdot |I(F_n)| \geq 3 \cdot 2n = 6n,$$

$$\sum_{v \in C(F_n)} d(v) = 3 \cdot |C(F_n)| \leq 3 \cdot 2n = 6n.$$

Sabe-se que $|E(F_n)| = 6n$. Porém, a soma total dos graus dos vértices em $I(F_n)$ já é maior ou igual a $6n$, significando que não há arestas onde ambos os seus extremos estão em $C(F_n)$. Se não há dois vértices em $C(F_n)$ que sejam adjacentes, então $C(F_n)$ é também um conjunto independente, assim como $I(F_n)$.

Por definição, um grafo cujo conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos independentes é um grafo bipartido. É possível ver um exemplo de um grafo cúbico bipartido na Figura 14.

Figura 14 – Um grafo cúbico bipartido.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Porém, grafos snarks não são bipartidos. Pelo Teorema 1, temos que um grafo bipartido não pode conter ciclos de comprimento ímpar, e todo *snark*-flor F_n possui ciclo de comprimento n ímpar induzido pelos vértices do conjunto $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Desta forma, F_n não pode ser bipartido.

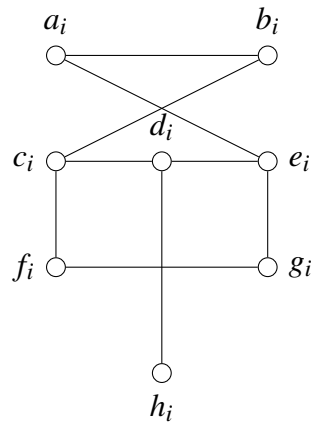
Portanto, a suposição inicial deve ser falsa. Não é possível que exista um conjunto independente de tamanho maior ou igual a $2n$ em um grafo *snark*-flor F_n . Como sabemos que $\alpha(F_n) \geq 2n - 1$ e acabamos de provar que $\alpha(F_n) \leq 2n - 1$, esses fatos implicam que $\alpha(F_n) = 2n - 1$, o que, por sua vez, implica que $\tau(F_n) = 2n + 1$. \square

3.2 *Snarks* de Goldberg

A família dos *snarks* de Goldberg foi construída por volta de 1981 por Mark K. Goldberg (Goldberg, 1981), e é formada pelos grafos $G_3, G_5, G_7, \dots, G_n$ tal que $n \geq 3$ e n é ímpar. Semelhante à construção da família dos *snarks*-flor, os *snarks* de Goldberg são construídos através de subgrafos denominados blocos de construção.

Um *bloco de construção* B_i , para $1 \leq i \leq n$, é definido como um grafo simples, onde $V(B_i) = \{a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i, g_i, h_i\}$ e $E(B_i) = \{a_i b_i, a_i e_i, b_i c_i, c_i d_i, c_i f_i, d_i e_i, d_i h_i, e_i g_i, f_i g_i\}$, como é apresentado na Figura 15.

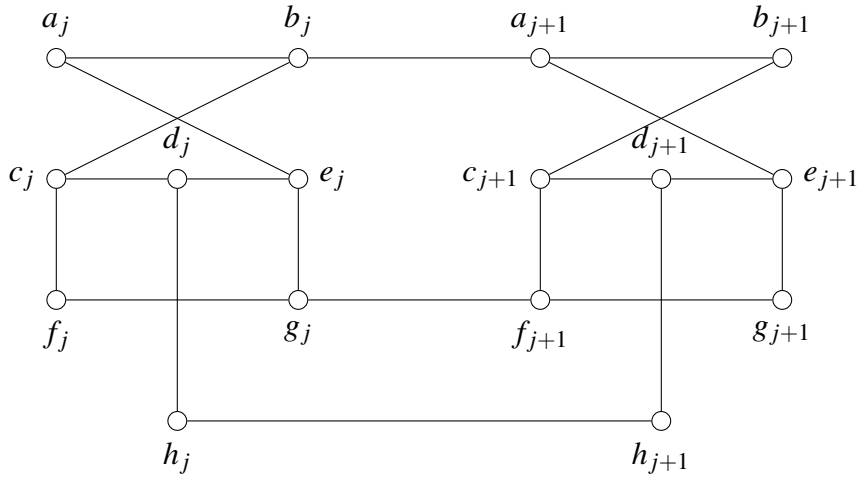
Figura 15 – Um bloco de construção B_i .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dados dois blocos de construção B_j e B_ℓ , define-se o conjunto de *arestas de ligação* que interligam estes blocos por $E_{j,\ell} = \{b_j a_\ell, g_j f_\ell, h_j h_\ell\}$. Uma ilustração de dois blocos interligados através das arestas de ligação é apresentada na Figura 16.

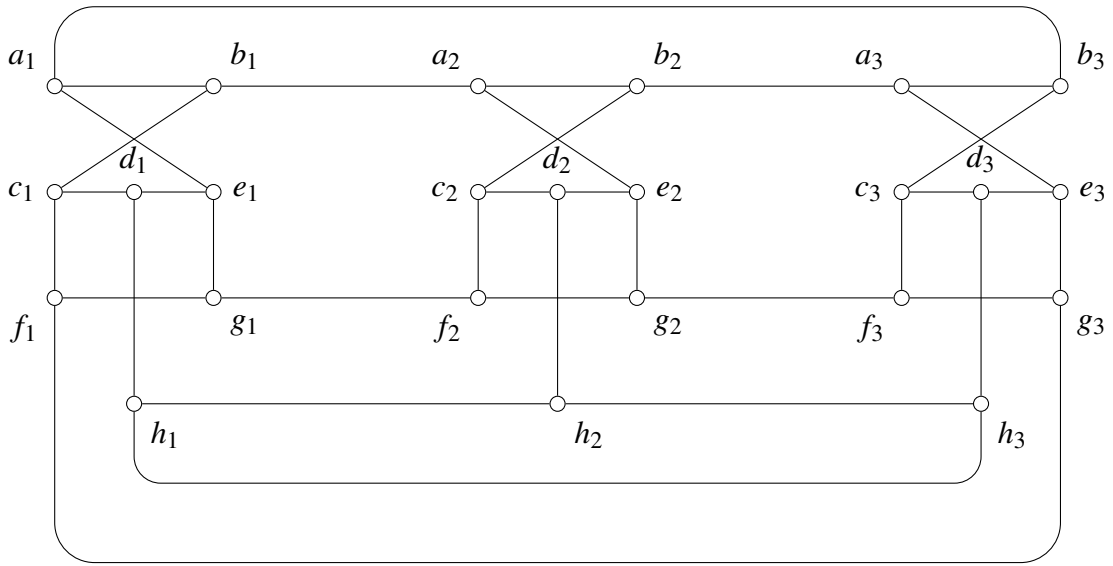
Figura 16 – Dois blocos B_j e B_{j+1} conectados com arestas de ligação do conjunto $E_{j,j+1}$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O primeiro membro da família dos *snarks* de Goldberg é o *snark* de Goldberg G_3 , onde $V(G_3) = V(B_1) \cup V(B_2) \cup V(B_3)$ e $E(G_3) = E(B_1) \cup E(B_2) \cup E(B_3) \cup E_{1,2} \cup E_{2,3} \cup E_{3,1}$, como é apresentado na Figura 17. Seguindo o padrão de construção de G_3 , para um dado n ímpar onde $n \geq 5$, um *snark* de Goldberg G_n é definido de modo que:

$$\begin{aligned}
 - V(G_n) &= \bigcup_{i=1}^n V(B_i); \\
 - E(G_n) &= \left(\bigcup_{i=1}^n E(B_i) \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} E_{j,j+1} \right) \cup E_{n,1}.
 \end{aligned}$$

Figura 17 – O snark de Goldberg G_3 .

Fonte: Elaborada pelo autor.

No Teorema 3, determinamos o valor do parâmetro $\tau(G_n)$ para os snarks de Goldberg.

A fim de provar esse teorema, usamos a proposição a seguir como um resultado auxiliar.

Proposição 15. *Seja G um grafo, seja $C \subseteq G$ um ciclo induzido em G e seja S uma cobertura por vértices mínima de G . Temos que $|V(C) \cap S| \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $|V(C) \cap S| \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$. Como C é um ciclo induzido de G , sabemos que não existem arestas conectando dois vértices de C além das arestas do próprio ciclo C .

Note que todo vértice do conjunto $|V(C) \cap S|$ cobre exatamente duas arestas do ciclo C . Assim, o número de arestas cobertas pelos vértices do conjunto $V(C) \cap S$ é no máximo $2 \cdot |V(C) \cap S| \leq 2(\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1) = 2 \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2 < n$. Isso implica que existirá pelo menos uma aresta do ciclo C que não será coberta por S , o que gera uma contradição. Portanto, temos que $|V(C) \cap S| \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. \square

A seguir, provamos o resultado principal desta seção.

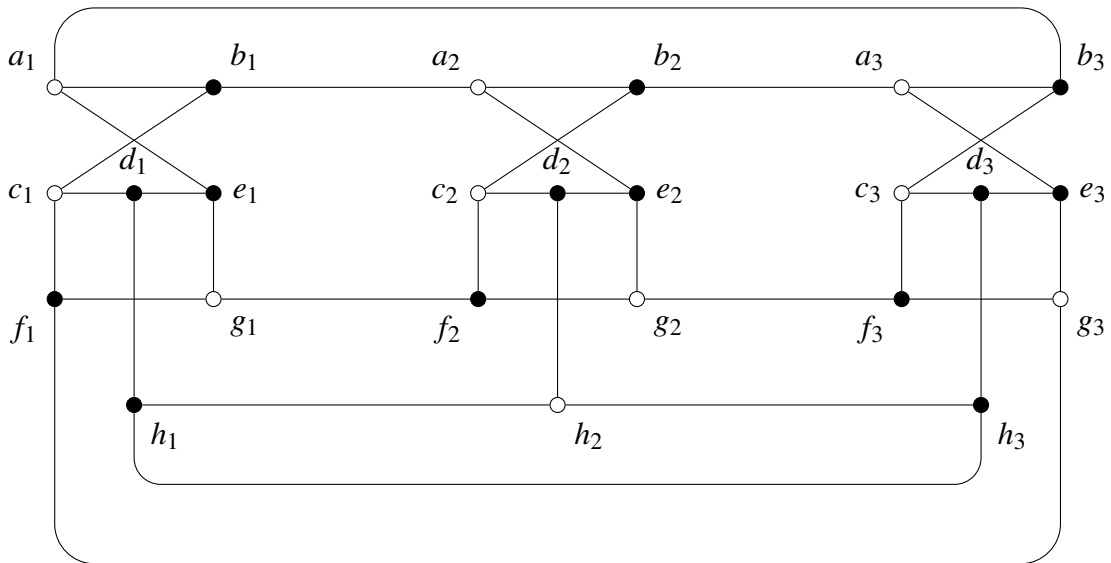
Teorema 3. *Dado um grafo snark de Goldberg G_n , temos que $\tau(G_n) = \lceil \frac{9n}{2} \rceil$.*

Demonstração. Primeiramente, provamos o limitante superior $\tau(G_n) \leq \lceil \frac{9n}{2} \rceil$. Definimos uma cobertura por vértices S para G_n dada por $S = \{b_j, d_j, e_j, f_j \mid 1 \leq j \leq n\} \cup \{h_{2i+1} \mid 0 \leq i \leq \frac{n-1}{2}\}$. Para calcular sua cardinalidade, somamos a cardinalidade do conjunto $\{b_j, d_j, e_j, f_j \mid 1 \leq j \leq n\}$

com a cardinalidade do conjunto $\{h_{2i+1} \mid 0 \leq i \leq \frac{n-1}{2}\}$, totalizando, respectivamente, $4n$ e $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ elementos. Assim, estabelecemos o limitante superior $\tau(G_n) \leq |S| = 4n + \lceil \frac{n}{2} \rceil = \lceil \frac{9n}{2} \rceil$. Um exemplo dessa cobertura é apresentado para o *snark* de Goldberg G_3 na Figura 18.

Para demonstrar que S é uma cobertura válida para todo G_n , basta analisar a incidência das arestas em relação aos vértices escolhidos. No interior de cada bloco B_i , a seleção do subconjunto $\{b_i, d_i, e_i, f_i\}$ é suficiente para cobrir todas as arestas listadas em $E(B_i)$, uma vez que os vértices não selecionados a_i, c_i e g_i têm todos os seus vizinhos dentro desse subconjunto, e a aresta pendente $d_i h_i$ é coberta por d_i . Quanto às conexões entre blocos adjacentes, as arestas $b_i a_{i+1}$ e $g_i f_{i+1}$ são cobertas, respectivamente, pela presença de todos os vértices do tipo b e f em S . Por fim, as arestas do ciclo central, formadas pela ligação $h_i h_{i+1}$, são cobertas pela seleção estratégica dos vértices h de índice ímpar, garantindo que toda aresta do ciclo possua ao menos uma extremidade no conjunto de cobertura.

Figura 18 – Uma cobertura por vértices para o *snark* de Goldberg G_3 .



Fonte: Elaborada pelo autor.

A seguir, provamos o limitante inferior $\tau(G_n) \geq \lceil \frac{9n}{2} \rceil$. Seja S uma cobertura por vértices mínima de G_n , ou seja, $\tau(G_n) = |S|$.

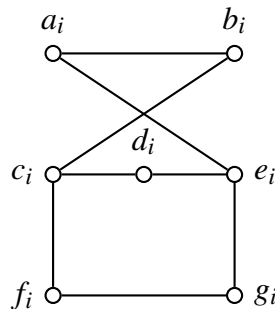
Seja $C_n \subset G_n$ um ciclo ímpar de tamanho n induzido pelos vértices do conjunto $\{h_1, h_2, \dots, h_n\} \subset V(G_n)$. De acordo com a Proposição 15, temos que $|V(C_n) \cap S| \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Além disso, para $1 \leq i \leq n$, seja H_i o subgrafo de G_n induzido pelo conjunto de vértices $\{a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i, g_i\}$. A Figura 19 ilustra o subgrafo H_i . É notável que H_i contém um

ciclo com cinco vértices $C_5^i = (a_i, b_i, c_i, d_i, e_i)$. Logo, pela Proposição 15, temos que $|V(C_5^i) \cap S| \geq 3$. Além disso, a aresta $f_i g_i \in E(H_i)$ conecta dois vértices de H_i que são disjuntos dos vértices do ciclo C_5^i . De acordo com a Proposição 10, para cobrir esta aresta (que é um caminho P_2) é necessário pelo menos mais um vértice. Portanto, concluímos que $|V(H_i) \cap S| = |V(C_5^i) \cap S| + 1 \geq 3 + 1 = 4$.

Observe que o ciclo C_n e todos os n subgrafos H_1, H_2, \dots, H_n são disjuntos entre si. Logo, qualquer cobertura S de G_n deve conter pelo menos $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ vértices do ciclo C_n e 4 vértices de cada um dos n subgrafos H_i . Logo, temos que $|S| \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 4n = \lceil \frac{9n}{2} \rceil$. Visto que os limitantes inferior e superior coincidem, conclui-se que $\tau(G_n) = \lceil \frac{9n}{2} \rceil$. \square

Figura 19 – O subgrafo induzido H_i .



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.3 Snarks de Blanuša Generalizados

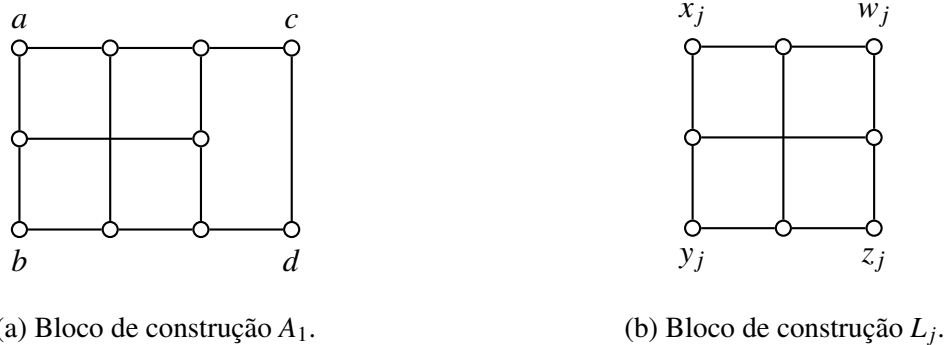
Em 1946, Danilo Blanuša construiu um *snark* com 18 vértices e 27 arestas que levou a alcunha de primeiro *snark* de Blanuša (Blanuša, 1946). Alguns anos depois, com o advento de novas regras referentes a construção de novos *snarks*, surgiu um novo *snark* com 18 vértices e 27 arestas, que ficou conhecido como o segundo *snark* de Blanuša.

Em 1983, John J. Watkins (Watkins, 1983) construiu duas famílias infinitas de *snarks* cujos membros são denominados *snarks de Blanuša generalizados*, onde os menores membros dessas duas famílias são, respectivamente, o primeiro e o segundo *snark* de Blanuša. Essas famílias ficaram conhecidas como Primeira família dos *snarks* de Blanuša generalizados e Segunda família dos *snarks* de Blanuša generalizados. Neste trabalho, investigamos somente a Primeira família dos *snarks* de Blanuša generalizados.

Os membros da *Primeira família dos snarks de Blanuša generalizados* são construídos a partir de subgrafos denominados *blocos de construção*. Existem dois blocos de construção

diferentes nessa classe, são os subgrafos A_1 e L_j , onde $j \geq 1$, e eles são definidos na Figura 20. Os vértices de grau dois a, b, c e d presentes em A_1 e os vértices de grau dois x_j, y_j, w_j e z_j presentes em L_j são denominados *vértices de ligação*. Um *snark* de Blanuša generalizado da primeira família é denotado por B_j^1 e ele é formado por j blocos $L_1, L_2, L_3, \dots, L_j$. No entanto, ele contém apenas um bloco A_1 . Assim, $\mathfrak{B}^1 = \{B_1^1, B_2^1, B_3^1, \dots\}$ denota a primeira família dos *snarks* de Blanuša generalizados.

Figura 20 – Blocos de construção dos *snarks* de Blanuša generalizados.

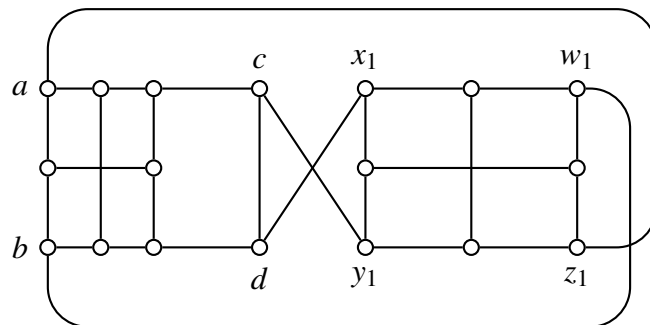


Fonte: Elaborada pelo autor.

A construção dos membros da Primeira família dos *snarks* de Blanuša generalizados é feita de maneira recursiva, onde o primeiro *snark* de Blanuša B_1^1 é considerado o primeiro membro da primeira família \mathfrak{B}^1 , sendo composto pelo conjunto de vértices $V(B_1^1) = V(A_1) \cup V(L_1)$ e pelo conjunto de arestas $E(B_1^1) = E(A_1) \cup E(L_1) \cup \{az_1, bw_1, cy_1, dx_1\}$, como mostrado na Figura 27.

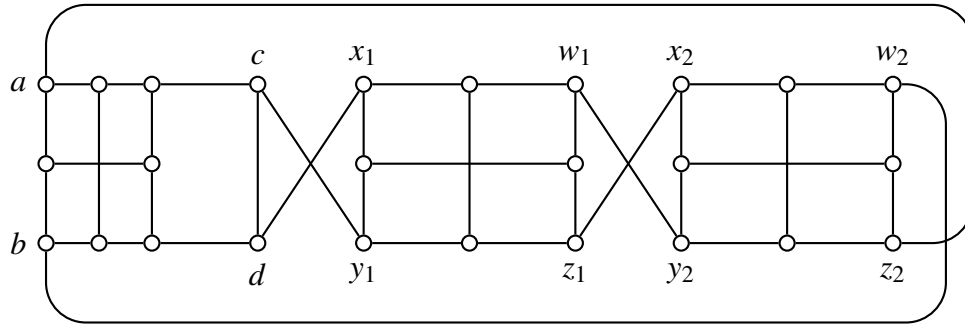
De maneira semelhante, o *snark* B_2^1 da família \mathfrak{B}^1 é construído através de um conjunto de vértices $V(B_2^1) = V(A_1) \cup V(L_1) \cup V(L_2)$ e de um conjunto de arestas $E(B_2^1) = E(A_1) \cup E(L_1) \cup E(L_2) \cup \{az_2, bw_2, cy_1, dx_1, w_1y_2, z_1x_2\}$. B_2^1 é exemplificado na Figura 22.

Figura 21 – O *snark* de Blanuša generalizado B_1^1



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 22 – O *snark* de Blanuša generalizado B_2^1



Fonte: Elaborada pelo autor.

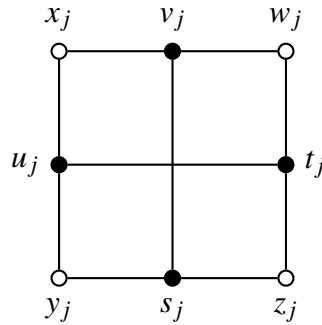
Para definirmos a natureza recursiva dos *snarks* desta família, podemos utilizar o bloco de construção L_j de maneira que, para $n \geq 2$, o *snark* B_n^1 é construído recursivamente a partir do *snark* B_{n-1}^1 e do bloco de construção L_n , onde $V(B_n^1) = V(B_{n-1}^1) \cup V(L_n)$ e $E(B_n^1) = (E(B_{n-1}^1) - \{az_{n-1}, bw_{n-1}\}) \cup E(L_n) \cup \{w_{n-1}y_n, z_{n-1}x_n, az_n, bw_n\}$.

A seguir, determinamos o parâmetro $\tau(B_n^1)$ para os *snarks* de Blanuša generalizados. Inicialmente, calculamos $\tau(L_j)$ para o bloco de construção L_j e $\tau(A_1)$ para o bloco de construção A_1 , bem como analisamos o comportamento da cobertura por vértices em cadeias de três blocos interligados. Em seguida, estabelemos os limitantes inferiores e superiores para $\tau(B_n^1)$ por meio da construção de uma cobertura válida e de uma prova por indução. Para tais demonstrações, é fundamental retomar o conceito de emparelhamento apresentado no Capítulo 2, com ênfase na Proposição 8.

Teorema 4. *Um bloco de construção L_j possui $\tau(L_j) = 4$. Além disso, ele admite uma única cobertura por vértices de cardinalidade 4.*

Demonstração. Seja $S \subseteq V(L_j)$ um subconjunto que determina a cobertura por vértices mínima de L_j , onde $S = \{u_j, v_j, s_j, t_j\}$. Dado que $|S| = 4$, temos que $\tau(L_j) \leq 4$. Esse conjunto é ilustrado na Figura 23.

Figura 23 – Cobertura por vértices mínima para L_j .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Visto que o grafo L_j possui ordem 8, o tamanho máximo de qualquer emparelhamento em L_j é 4. Pela Proposição 8, sabemos que a cardinalidade do emparelhamento máximo atua como um limitante inferior para a cobertura por vértices mínima. Portanto, conclui-se que $\tau(L_j) \geq 4$. Das desigualdades estabelecidas, segue que $\tau(L_j) = 4$.

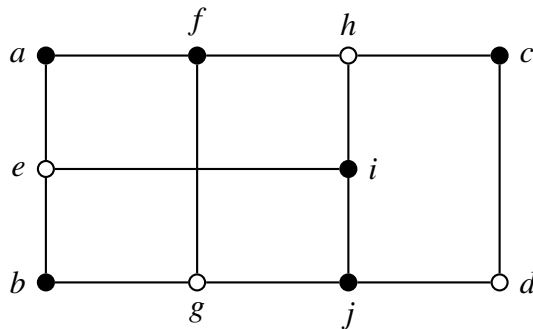
Note que as arestas $v_j s_j$ e $u_j t_j$ devem ser cobertas por algum vértice de S , o que implica que pelo menos um extremo de cada uma dessas arestas deve pertencer ao conjunto S . Considere o desenho de L_j , onde x_j, y_j, w_j, z_j estão posicionados nos vértices de um quadrado (ver Figura 23). Pela simetria rotacional do desenho de L_j , podemos supor, sem perda de generalidade, que $u_j, v_j \in S$, de modo que as arestas $v_j s_j$ e $u_j t_j$ estejam cobertas. Porém, somente com esses dois vértices no conjunto S , ficam faltando ainda 4 arestas não cobertas, sendo estas $t_j w_j, t_j z_j, s_j z_j$ e $s_j y_j$. Essas arestas induzem um caminho P_5 com 5 vértices no grafo L_j . Pela Proposição 10, temos que $\tau(P_5) = 2$. Logo, dois vértices desse P_5 devem ser escolhidos para cobrir todas essas 4 arestas que faltam, e a única forma de cobrir essas 4 arestas com dois vértices é escolher os vértices s_j e t_j como parte da cobertura. Portanto, $S = \{u_j, v_j, s_j, t_j\}$, e o resultado segue. \square

Teorema 5. *Seja A_1 o bloco de construção de um snark de Blanuša generalizado B_i^1 . Temos que $\tau(A_1) = 6$.*

Demonstração. Seja A_1 como definido no enunciado. Dado $V(A_1) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$, podemos particionar $V(A_1)$ em dois conjuntos $V_l = \{a, e, b, g, f\}$ e $V_r = \{c, d, j, i, h\}$ de modo que estes conjuntos de vértices induzem dois subgrafos vértice-disjuntos, $G[V_l]$ e $G[V_r]$, ambos isomorfos a um ciclo C_5 .

A fim de provar que $\tau(A_1) \leq 6$, construímos explicitamente um conjunto de cobertura S de cardinalidade 6 que cobre todas as arestas de A_1 . Considere o conjunto $S = \{a, b, c, f, i, j\}$, onde o subconjunto $\{a, b, f\}$ cobre todas as arestas internas de $G[V_l]$ e as arestas que conectam $G[V_l]$ a $G[V_r]$, enquanto o subconjunto $\{c, i, j\}$ cobre todas as arestas internas de $G[V_r]$. Essa cobertura por vértices S é ilustrada na Figura 24. Como existe uma cobertura S válida com $|S| = 6$, temos $\tau(A_1) \leq 6$.

Figura 24 – Cobertura por vértices mínima para A_1 .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Pela Proposição 11, sabe-se que $\tau(C_5) = \lceil 5/2 \rceil = 3$. Como $G[V_l]$ e $G[V_r]$ são subgrafos de A_1 vértice-disjuntos, a cobertura mínima de A_1 deve ser pelo menos a soma das coberturas mínimas desses subgrafos disjuntos. Logo, temos que $\tau(A_1) \geq \tau(C_5) + \tau(C_5) = 3 + 3 = 6$.

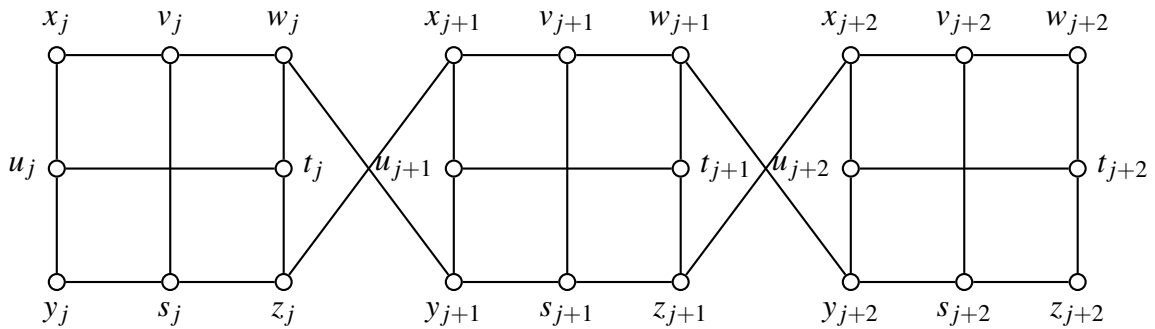
Sendo $\tau(A_1) \geq 6$ e $\tau(A_1) \leq 6$, conclui-se que $\tau(A_1) = 6$. \square

Teorema 6. *Seja G o grafo formado pela união disjunta de três blocos de construção L_j, L_{j+1} e L_{j+2} com a adição das seguintes arestas de ligação $\{w_j y_{j+1}, z_j x_{j+1}, w_{j+1} y_{j+2}, z_{j+1} x_{j+2}\}$. Temos que $\tau(G) \geq 14$.*

Demonstração. Note que o grafo G , ilustrado na Figura 25, possui três subgrafos vértice-disjuntos, sendo estes os blocos L_j, L_{j+1} e L_{j+2} . Um limitante inferior simples para o número de cobertura de G seria $\tau(G) \geq \tau(L_j) + \tau(L_{j+1}) + \tau(L_{j+2})$. Pelo Teorema 4, temos que $\tau(G) \geq \tau(L_j) + \tau(L_{j+1}) + \tau(L_{j+2}) = 4 + 4 + 4 = 12$. Suponha que G tenha uma cobertura por vértices S com cardinalidade 12. Pelo Teorema 4, a única forma de obter tal cobertura, seria cobrindo cada um dos subgrafos com a cobertura mostrada na Figura 23, pois ela é única. Porém, note que tal cobertura não cobriria as arestas de ligação entre esses blocos, o que seria uma contradição.

Portanto, não é possível ter uma cobertura por vértices S de cardinalidade 12. Com isso, obtemos que $\tau(G) \geq 13$.

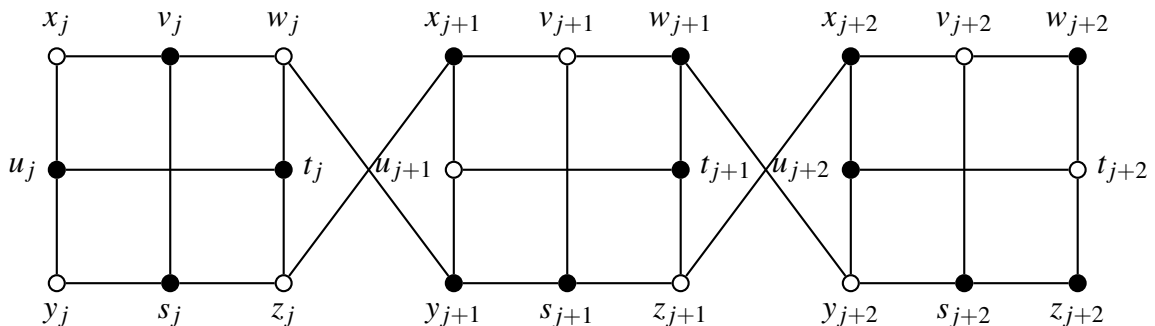
Figura 25 – Grafo G .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Suponha que G tem uma cobertura por vértices S de cardinalidade 13. Pelo Teorema 4, pelo menos dois dos blocos L_j, L_{j+1} e L_{j+2} devem ter 4 de seus vértices na cobertura e exatamente um desses blocos deve ter 5 de seus vértices na cobertura. Porém, como dois desses blocos estariam cobertos pela cobertura mostrada na Figura 23, temos que pelo menos 3 das arestas de ligação que conectam esses blocos entre si não estariam cobertas por nenhuma aresta da cobertura, o que é uma contradição. Logo, não é possível ter uma cobertura por vértices S de cardinalidade 13 e, com isso, concluímos que $\tau(G) \geq 14$. A Figura 26 apresenta uma das possíveis coberturas mínimas para o grafo G . □

Figura 26 – Uma cobertura por vértices mínima para o grafo G .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Teorema 7. *Seja B_n^1 um snark de Blanuša Generalizado. Temos que $\tau(B_n^1) = \lceil \frac{14n+17}{3} \rceil$.*

Demonstração. Podemos determinar uma cobertura por vértices mínima S para B_n^1 como $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup \{a, b, c, f, i, j\}$, onde para todo $1 \leq j \leq n$, $S_0 = \{s_j, t_j, w_j, x_j, y_j \mid j \equiv 0 \pmod{3}\}$, $S_1 = \{s_j, u_j, w_j, x_j, z_j \mid j \equiv 1 \pmod{3}\}$ e $S_2 = \{s_j, t_j, u_j, v_j \mid j \equiv 2 \pmod{3}\}$.

Para verificar que o conjunto S é uma cobertura por vértices válida para o grafo B_n^1 , devemos garantir que cada aresta do grafo possua pelo menos um de seus extremos contido em S . Essa análise é realizada através da decomposição do grafo em seu bloco fixo A_1 , nos blocos variáveis L_j e nas arestas de ligação que os conectam.

Iniciamos a verificação pelo bloco fixo A_1 , onde o subconjunto fixo $\{a, b, c, f, i, j\}$ é responsável por cobrir todas as arestas internas. Os vértices de grau dois, como e, g e h , têm suas arestas incidentes cobertas por seus vizinhos em S : as arestas ae e be são cobertas por a e b , enquanto fg e hg são cobertas por f e j , e as arestas fh e ch são garantidas por f e c . As arestas verticais e transversais internas são atendidas pelos vértices i e j , e a aresta vertical cd é coberta pelo vértice c . Além disso, a presença de a e b em S garante a cobertura das arestas de fechamento do grafo, az_n e bw_n , independentemente da configuração do último bloco variável.

Para os blocos variáveis L_j , a validade da cobertura é garantida pela análise da vizinhança dos vértices que não pertencem a S em cada um dos três padrões de alternância. No caso em que $j \equiv 2 \pmod{3}$, o conjunto $\{s_j, t_j, u_j, v_j\}$ utiliza apenas 4 vértices para cobrir todas as arestas internas de L_j ; isso é possível porque os vértices que ficam de fora (x_j, y_j, w_j, z_j) não são adjacentes entre si, e todos os seus vizinhos dentro do bloco estão incluídos em S . Já nos casos onde $j \equiv 0 \pmod{3}$ e $j \equiv 1 \pmod{3}$, a utilização de 5 vértices garante não apenas a cobertura das arestas internas, mas também reforça as extremidades que realizam a conexão entre os blocos.

Definimos como *vértices de borda* de um bloco j os vértices $\{x_j, y_j, w_j, z_j\}$ que incidem nas arestas de ligação entre blocos. A validade total de S se consolida na análise das arestas de ligação entre blocos adjacentes. A conexão inicial entre A_1 e L_1 é garantida pois, para $j = 1$, o vértice x_1 pertence a S , cobrindo a aresta dx_1 , enquanto $c \in S$ cobre cy_1 . Nas transições entre blocos variáveis, a alternância de padrões compensa a ausência de certos vértices de borda. Por exemplo, quando $j \equiv 2 \pmod{3}$, os vértices de borda w_j e z_j não estão em S , mas a aresta de ligação é coberta pelos vértices de borda do bloco seguinte, x_{j+1} e y_{j+1} , que obrigatoriamente pertencem a S no padrão $j \equiv 0 \pmod{3}$. Esse mecanismo de compensação mútua ocorre em sequência, assegurando que nenhuma aresta de ligação permaneça com ambos os extremos fora da cobertura, validando assim o conjunto S para todo o grafo B_n^1 .

A seguir, determinamos a cardinalidade do conjunto S . Para determinar a cardinalidade exata de S para qualquer n , dividimos a análise em três casos, dependendo do valor de n módulo 3.

O primeiro caso consiste em $n \equiv 0 \pmod{3}$, onde temos $n = 3k$, para $k \in \mathbb{Z}$. Nesse caso, temos o bloco fixo A_1 (que necessita ser coberto por pelo menos 6 vértices) mais k trios de blocos (cada trio de blocos necessita ser coberto por pelo menos 14 vértices de S), fazendo com que a cardinalidade de S seja $14k + 6$. Aplicando a fórmula proposta, temos:

$$\left\lceil \frac{14(3k) + 17}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{42k + 17}{3} \right\rceil = \lceil 14k + 5,66\dots \rceil = 14k + 6$$

O segundo caso consiste em $n \equiv 1 \pmod{3}$, onde $n = 3k + 1$, para $k \in \mathbb{Z}$. Aqui temos a soma do caso anterior acrescida de mais cinco vértices responsáveis por cobrir o último bloco do *snark*, totalizando $(14k + 6) + 5 = 14k + 11$. Aplicando a fórmula temos:

$$\left\lceil \frac{14(3k + 1) + 17}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{42k + 14 + 17}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{42k + 31}{3} \right\rceil = \lceil 14k + 10,33\dots \rceil = 14k + 11$$

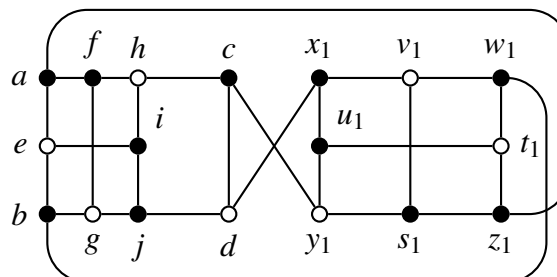
O terceiro caso consiste em $n \equiv 2 \pmod{3}$, onde $n = 3k + 2$, para $k \in \mathbb{Z}$. Aqui temos a soma do caso anterior acrescida de mais quatro vértices responsáveis por cobrir o último bloco do *snark*, totalizando $(14k + 11) + 4 = 14k + 15$. Aplicando a fórmula temos:

$$\left\lceil \frac{14(3k + 2) + 17}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{42k + 28 + 17}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{42k + 45}{3} \right\rceil = 14k + 15$$

Em todos os casos, a fórmula fornece o valor inteiro exato. Portanto, temos que $|S| = \left\lceil \frac{14n+17}{3} \right\rceil$. Portanto, $\tau(B_n^1) \leq |S| = \left\lceil \frac{14n+17}{3} \right\rceil$.

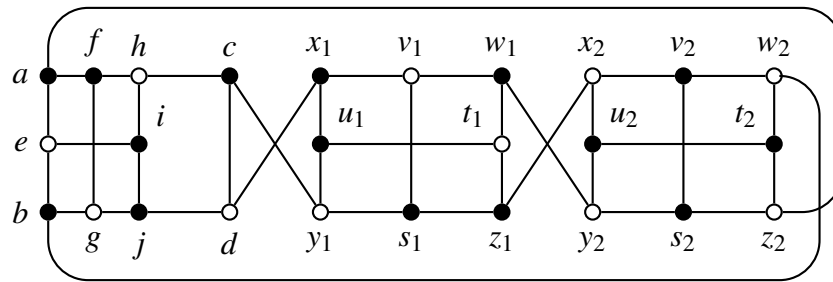
As Figuras 27, 28 e 29 ilustram a cobertura por vértices S nos *snarks* de Blanuša generalizados B_1^1 , B_2^1 e B_3^1 , respectivamente.

Figura 27 – Cobertura por vértices mínima para o grafo B_1^1 .



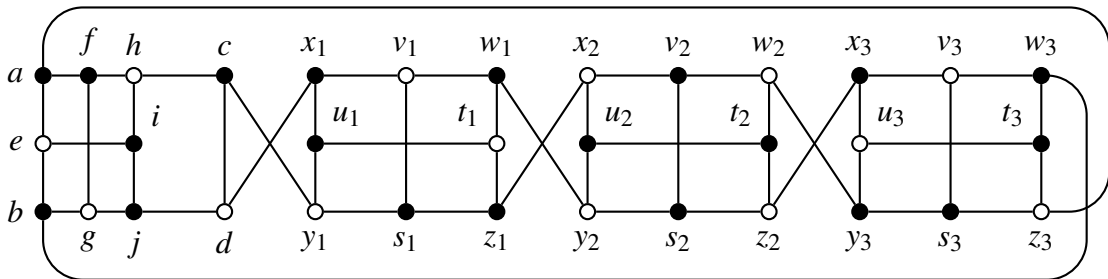
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 28 – Cobertura por vértices mínima para o grafo B_2^1 .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 29 – Cobertura por vértices mínima para o grafo B_3^1 .



Fonte: Elaborada pelo autor.

A seguir, provamos por indução forte em k que o snark B_k^1 possui $\tau(B_k^1) \geq \lceil \frac{14k+17}{3} \rceil$. Começamos com o caso base, provando que $\tau(B_k^1) \geq \lceil \frac{14k+17}{3} \rceil$ vale para $k \in \{1, 2, 3\}$ analisando a estrutura de conexões entre os blocos.

Para $k = 1$, provamos a seguir que $\tau(B_1^1) \geq 11$. Pelos Teoremas 4 e 5, sabemos que $\tau(A_1) = 6$ e $\tau(L_1) = 4$, respectivamente. A soma das coberturas mínimas disjuntas é $6 + 4 = 10$. Suponha, por contradição, que $\tau(B_1^1) = 10$. Isso exigiria que usássemos exatamente a cobertura mínima em A_1 e a cobertura mínima em L_1 . Sabemos que a cobertura mínima de L_1 é única, mas dada essa cobertura, temos que todas as 4 arestas que conectam A_1 a L_1 deveriam ser cobertas pelos vértices de A_1 . Isso faz com que $\{a, b, c, d\}$ passem a pertencer a uma eventual cobertura de A_1 . Entretanto, os vértices restantes $\{f, g, h, i, j\}$ induzem um ciclo C_5 que, pela Proposição 11, necessita de 3 vértices para ser coberto. Logo, a cobertura de A_1 precisaria ter tamanho $4 + 3 = 7$, o que contradiz o fato de estarmos usando uma cobertura mínima em A_1 . Portanto, $\tau(B_1^1) \geq 11$.

Para $k = 2$, provamos em seguida que $\tau(B_2^1) \geq 15$. Como os blocos de construção

são vértice-disjuntos, temos que $\tau(B_2^1) \geq \tau(A_1) + \tau(L_1) + \tau(L_2) = 6 + 4 + 4 = 14$. Suponha, por contradição, que B_2^1 tem cobertura S com $|S| = 14$. Logo $|S \cap L_1| = 4$ e $|S \cap L_2| = 4$. Pelo Teorema 4, os conjuntos $S \cap L_1$ e $S \cap L_2$ não contêm nenhum vértice que cubra as arestas de ligação do conjunto $E_{1,2}$ que ligam os blocos L_1 e L_2 . Portanto, as arestas que conectam L_1 e L_2 não estariam cobertas por nenhum dos dois blocos. Para cobrir estas arestas, pelo menos um dos blocos deve ter cardinalidade aumentada em 1. Portanto, $\tau(B_2^1) \geq 15$.

Para $k = 3$, provamos que $\tau(B_3^1) \geq 20$. Podemos decompor B_3^1 em dois subgrafos vértice-disjuntos, sendo estes o bloco fixo A_1 e o subgrafo G formado pela união dos três blocos consecutivos L_1, L_2, L_3 , apresentado no Teorema 6. Logo, temos que $\tau(B_3^1) \geq \tau(A_1) + \tau(G)$. Pelo Teorema 5, temos $\tau(A_1) = 6$ e, pelo Teorema 6, temos $\tau(G) \geq 14$. Logo, concluímos que $\tau(B_3^1) \geq 6 + 14 = 20$.

Em todos os três casos-base, os limitantes inferiores obtidos matematicamente coincidem com a fórmula $\lceil \frac{14n+17}{3} \rceil$.

Como hipótese indutiva, vamos supor que, para um determinado $k \geq 1$ fixo, tem-se que $\tau(B_k^1) \geq \lceil \frac{14k+17}{3} \rceil$ é uma desigualdade válida.

Dessa forma, a seguir, provamos que a propriedade vale para $k + 3$, ou seja, provamos que $\tau(B_{k+3}^1) \geq \lceil \frac{14(k+3)+17}{3} \rceil$.

Consideremos o grafo B_{k+3}^1 . Podemos definir este grafo como a união do grafo B_k^1 com uma extensão de três blocos L_{k+1}, L_{k+2} e L_{k+3} , que podem ser representados pelo grafo G mencionado no Teorema 6. Assim, temos que B_{k+3}^1 é formado pela união disjunta de vértices $V(B_k^1) \cup V(G)$, com o conjunto de arestas definido por $E(B_{k+3}^1) = (E(B_k^1) - \{az_k, bw_k\}) \cup E(G) \cup \{w_k y_{k+1}, z_k x_{k+1}\} \cup \{(a, z_{k+3}), (b, w_{k+3})\}$

Seja S uma cobertura por vértices para B_{k+3}^1 . Como $E(G) \subset E(B_{k+3}^1)$, o subconjunto de vértices $S \cap V(G)$ deve necessariamente cobrir todas as arestas do subgrafo G . Pelo Teorema 6, sabemos que o número de cobertura mínima de G é limitado inferiormente por 14, ou seja, $\tau(G) \geq 14$. Consequentemente, a cardinalidade da interseção de S com o conjunto de vértices de G satisfaz a desigualdade $|S \cap V(G)| \geq 14$.

Dessa forma, estabelecida a desigualdade de recorrência $\tau(B_{k+3}^1) \geq \tau(B_k^1) + 14$, aplicamos a hipótese indutiva para obter $\tau(B_{k+3}^1) \geq \lceil \frac{14k+17}{3} \rceil + 14$. Para incorporar a constante inteira à função teto, utilizamos a identidade $14 = \frac{42}{3}$, resultando em $\lceil \frac{14k+17}{3} + \frac{42}{3} \rceil$. Ao agrupar e fatorar os termos do numerador, chegamos a $\lceil \frac{14k+42+17}{3} \rceil$, o que podemos simplificar para $\lceil \frac{14(k+3)+17}{3} \rceil$.

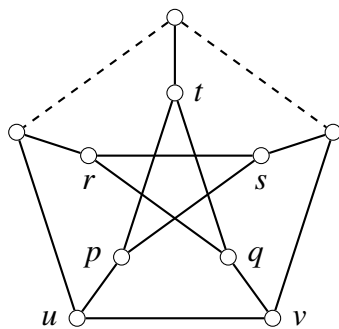
Portanto, ao estabelecermos que o limitante inferior, derivado das restrições de adjacência entre os blocos, coincide com o limitante superior obtido pela construção direta de uma cobertura por vértices, concluímos que $\tau(B_n^1) = \lceil \frac{14n+17}{3} \rceil$. \square

3.4 Snarks de Loupekin

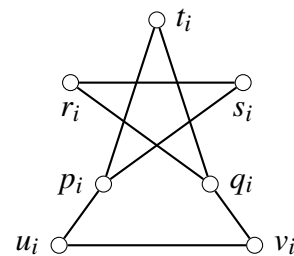
Em 1976, Rufus Isaacs (Isaacs, 1976) apresentou a família dos *snarks* de Loupekin, que é obtida através de um método de construção desenvolvido originalmente por F. Loupekin. A construção dos membros desta família é descrita a seguir; primeiramente, definimos os blocos de construção, depois mostramos como conectar blocos consecutivos e, por fim, mostramos como finalizar ligações entre vértices de modo a tornar o grafo cúbico.

Dado o grafo de Petersen G ilustrado na Figura 30, obtemos um novo grafo removendo os vértices de um caminho P_3 qualquer de G , onde o grafo resultante é denominado *bloco de construção*, denotado por B_i , como é também mostrado na Figura 30.

Figura 30 – Processo de obtenção de um bloco de construção B_i do snark de Loupekin.



(a) Grafo de Petersen G

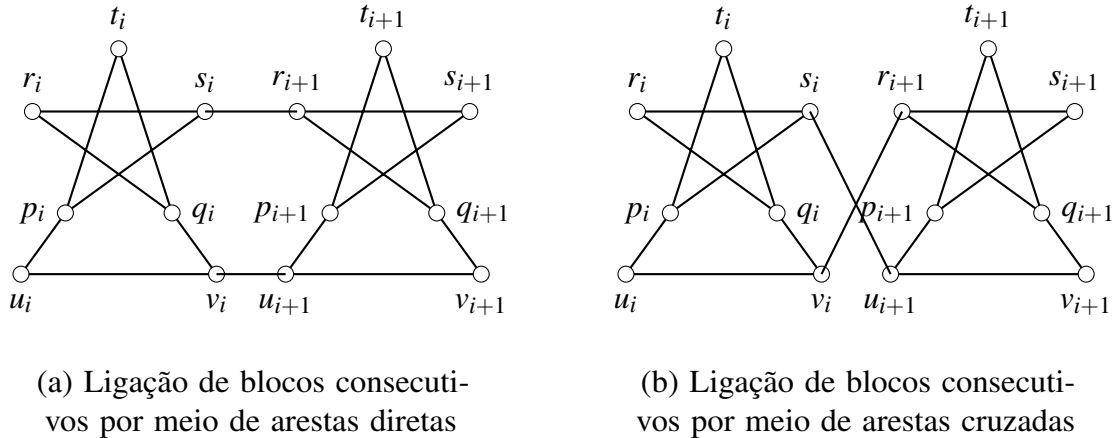


(b) Bloco de construção B_i

Fonte: Elaborada pelo autor.

Seja $n \geq 3$ um inteiro ímpar, um *snark* de Loupekin é formado por n blocos de construção B_0, B_1, \dots, B_{n-1} . Para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, define-se o conjunto de *arestas de ligação* $E_{i,i+1}$ (índices tomados módulo n), onde este conjunto pode conter *arestas diretas*, pertencentes ao conjunto $\{s_i r_{i+1}, v_i u_{i+1}\}$, ou *arestas cruzadas*, pertencentes ao conjunto $\{s_i u_{i+1}, v_i r_{i+1}\}$. Dois blocos de ligação B_i e B_{i+1} são ligados através das arestas de ligação. A Figura 31 ilustra os dois modos de conectar blocos de construção consecutivos, ou por arestas diretas ou por arestas cruzadas.

Figura 31 – Diferença entre arestas diretas e arestas cruzadas em *snarks* de Loupequine.



Fonte: Elaborada pelo autor.

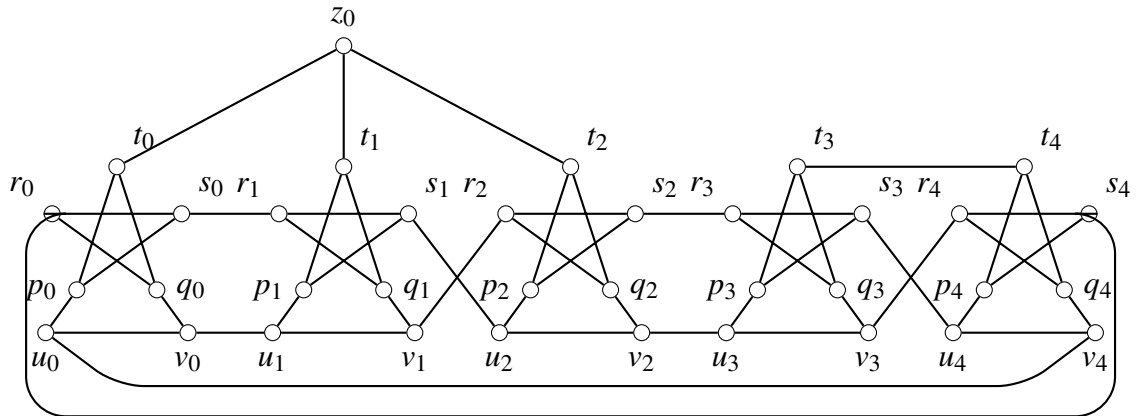
Note que os n blocos de construção B_0, B_1, \dots, B_{n-1} conectados pelas arestas de ligação do conjunto $\bigcup_{i=0}^{n-1} E_{i,i+1}$ ainda não formam um grafo cúbico, pois os vértices do conjunto $\{t_i \mid 0 \leq i \leq n-1\}$ possuem grau 2 na construção definida até o momento.

A fim de tornar o grafo cúbico, os n blocos de construção são agrupados em subconjuntos de cardinalidade dois ou três. Nos agrupamentos formados por dois blocos, B_j e B_l , insere-se a aresta $t_j t_l$, conectando os vértices $t_j \in V(B_j)$ e $t_l \in V(B_l)$; essas arestas são denominadas *arestas de ligação superior*. Já para os agrupamentos compostos por três blocos, B_j, B_l e B_m , introduz-se um vértice auxiliar z_j , denominado *vértice de ligação*. Este vértice é conectado aos vértices t_j, t_l, t_m através da adição das arestas $t_j z_j, t_l z_j$ e $t_m z_j$, unindo z_j aos vértices $t_j \in V(B_j)$, $t_l \in V(B_l)$ e $t_m \in V(B_m)$; essas arestas são também chamadas *arestas de ligação superior*. Os grafos resultantes de partições onde cada subconjunto contém apenas blocos com índices consecutivos constituem a família de *snarks* LP_0 . Os grafos obtidos por meio de quaisquer agrupamentos dos blocos de construção em grupos de dois e/ou três blocos formam os *snarks* LP_1 . Exemplos de *snarks* LP_0 e LP_1 podem ser vistos na Figura 32. Note que todo *snark* LP_0 é um *snark* LP_1 mas nem todo *snark* LP_1 é um *snark* LP_0 .

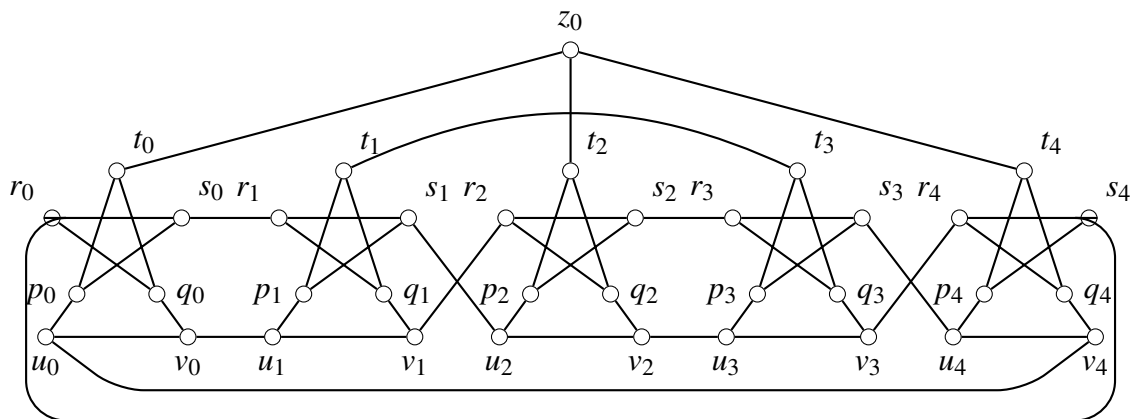
Por definição, em *snarks* LP_0 e LP_1 , dois blocos consecutivos podem ser conectados tanto por meio de arestas cruzadas quanto por meio de arestas diretas. Neste trabalho, investigamos uma subclasse dos *snarks* LP_0 e LP_1 , que denominamos *snarks diretos-cruzados*, definida a seguir. Um *snark* pertencente a uma dessas classes é dito *direto-cruzado* se todo bloco B_i com $i \equiv 0, 2 \pmod{4}$ conecta-se ao bloco B_{i+1} por meio de arestas diretas e todo bloco B_i com

$i \equiv 1, 3 \pmod{4}$ conecta-se ao bloco B_{i+1} por meio de arestas cruzadas. Por exemplo, os snarks já vistos na Figura 32 são exemplos de snarks diretos-cruzados. Denotamos por L_n o snark direto-cruzado formado por n blocos de construção.

Figura 32 – Snarks de Loupekine compostos por cinco blocos de construção.



(a) Exemplo de *snark* LP_0 com cinco blocos de construção.



(b) Exemplo de *snark* LP_1 com cinco blocos de construção.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A seguir, investigamos o número de cobertura dos *snarks* de Loupekine pertencentes às classes LP_0 direto-cruzado LP_1 direto-cruzado. Nossa abordagem partirá da análise de um bloco de construção B_i isolado, determinando a quantidade mínima de vértices necessária para cobrir suas arestas internas. Com base nessa análise local, definiremos o padrão de cobertura para o grafo completo composto por n blocos de construção.

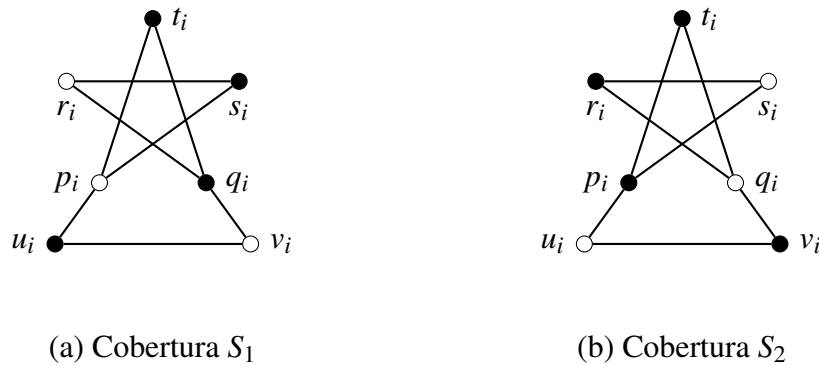
Teorema 8. *Se B_i é um bloco de construção do snark de Loupekine, então $\tau(B_i) = 4$.*

Demonstração. Primeiramente, provamos que $\tau(B_i) \geq 4$. É importante salientar que o bloco B_i contém um ciclo C_5 de tamanho 5 induzido pelos vértices do conjunto $\{t_i, p_i, s_i, r_i, q_i\}$ e possui uma aresta $\{u_i, v_i\}$ que não incide em nenhum vértice do ciclo C_5 .

Pela Proposição 11, sabe-se que o número de cobertura para um ciclo C_n é $\lceil n/2 \rceil$. Portanto, para cobrir apenas as arestas do ciclo induzido C_5 , são necessários no mínimo $\lceil 5/2 \rceil = 3$ vértices. A aresta $u_i v_i$ não incide nos vértices do ciclo C_5 , logo ela não é coberta por nenhum vértice do ciclo. Para cobri-la, é obrigatório selecionar ao menos um dos seus vértices extremos u_i ou v_i . Portanto, concluímos que $\tau(B_i) \geq 4$.

Agora, provamos que $\tau(B_i) \leq 4$. É fácil determinar pelos menos duas coberturas por vértices, $S_1 = \{t_i, s_i, q_i, u_i\}$ e $S_2 = \{t_i, r_i, p_i, v_i\}$, para cobrir todas as arestas de B_i , onde cada uma delas tem cardinalidade 4. A Figura 33 ilustra essas duas coberturas. Logo, temos que $\tau(B_i) \leq |S_1| = |S_2| = 4$. Portanto, concluímos que $\tau(B_i) = 4$. \square

Figura 33 – Dois exemplos de cobertura por vértices mínima para o bloco de construção B_i .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Teorema 9. Se L_n é um snark LP_0 direto-cruzado ou LP_1 direto-cruzado, então $\tau(L_n) = 4n$.

Demonstração. Para provar o limitante superior $\tau(L_n) \leq 4n$, basta demonstrar a existência de uma cobertura por vértices S com cardinalidade $4n$. A seguir, definimos tal cobertura:

$$S = \bigcup_{i=0}^{n-1} S_i, \quad \text{onde } S_i = \begin{cases} \{t_i, s_i, q_i, u_i\} & \text{se } i \equiv 0, 1 \pmod{4}; \\ \{t_i, r_i, p_i, v_i\} & \text{se } i \equiv 2, 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Inicialmente, observa-se que os conjuntos de vértices de cada bloco B_i são disjuntos. Como cada subconjunto S_i possui cardinalidade exatamente 4, segue imediatamente que a

cardinalidade total de S é $\sum_{i=0}^{n-1} |S_i| = 4n$. Para garantir que S é uma cobertura por vértices válida, analisamos a incidência dos vértices escolhidos sobre as arestas internas, laterais e superiores.

Em relação às arestas internas, temos pelo Teorema 8 que a definição de S_i assegura a cobertura completa de cada bloco individualmente. Nos blocos onde $i \equiv 0, 1 \pmod{4}$, o conjunto $\{t_i, s_i, q_i, u_i\}$ intercepta todas as oito arestas internas. Analogamente, o mesmo ocorre em blocos onde $i \equiv 2, 3 \pmod{4}$ ao selecionarmos o conjunto $\{t_i, r_i, p_i, v_i\}$.

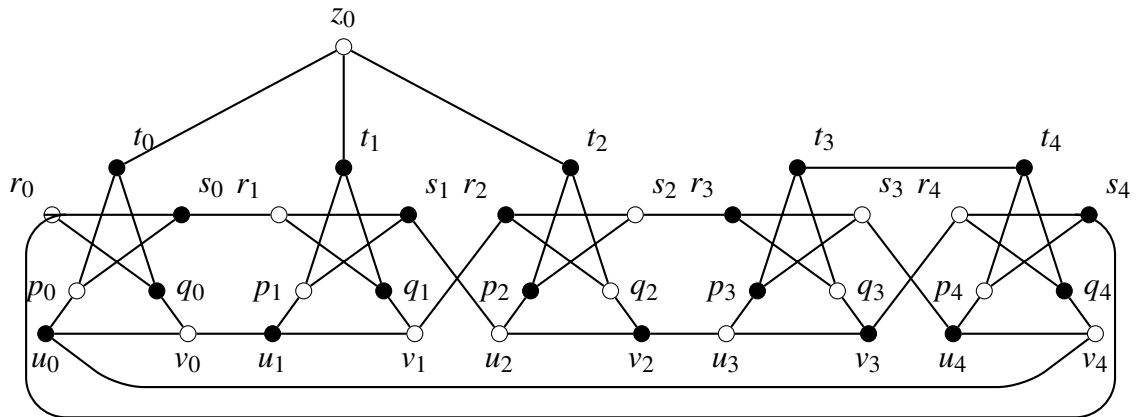
A validade da cobertura estende-se também às arestas de ligação entre blocos consecutivos, respeitando a alternância da estrutura direto-cruzada. Na conexão direta entre B_0 e B_1 , as arestas s_0r_1 e v_0u_1 são cobertas, respectivamente, por $s_0 \in S_0$ e $u_1 \in S_1$. Na conexão cruzada subsequente de B_1 para B_2 , as arestas s_1u_2 e v_1r_2 são atendidas por $s_1 \in S_1$ e $r_2 \in S_2$. Para a conexão direta de B_2 para B_3 , a presença de v_2 em S_2 cobre a aresta v_2u_3 , enquanto a aresta s_2r_3 é coberta por $r_3 \in S_3$. Finalmente, na conexão cruzada de B_3 para B_4 , as arestas s_3u_4 e v_3r_4 são cobertas pelos vértices $v_3 \in S_3$ e $u_4 \in S_0$. Essa verificação se repete ciclicamente.

Por fim, a cobertura das arestas de ligação superior é trivialmente satisfeita. Independentemente de o grafo ser um snark LP_0 ou LP_1 , essas arestas incidem invariavelmente nos vértices do tipo t_i , já que $t_i \in S_i$ para todo $i = 0, \dots, n-1$.

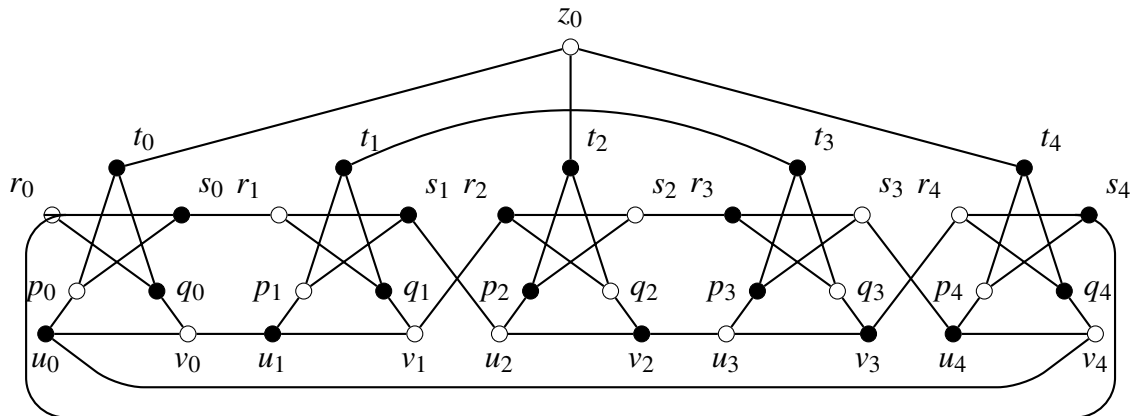
Assim, conclui-se que todas as arestas do grafo L_n possuem pelo menos uma extremidade em S , confirmando que $\tau(L_n) \leq 4n$.

A Figura 34 mostra como a cobertura S se aplica aos *snarks* de Loupekine LP_0 direto-cruzado e LP_1 direto-cruzado.

Figura 34 – Cobertura por vértices mínima para *snarks* de Loupequine LP_0 e LP_1 diretos-cruzados.



(a) Cobertura por vértices de um snark LP_0 direto-cruzado.



(b) Cobertura por vértices de um snark LP_1 direto-cruzado.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A seguir, provamos que $\tau(L_n) \geq 4$. Os conjuntos de vértices $V(B_0), V(B_1), \dots, V(B_{n-1})$ são disjuntos dois a dois. Qualquer cobertura por vértices válida para L_n deve, necessariamente, cobrir as arestas internas de cada bloco B_i . Pela Proposição 8, sabemos que para cobrir internamente um bloco B_i são necessários, no mínimo, 4 vértices pertencentes a $V(B_i)$. As arestas que conectam os blocos apenas impõem restrições adicionais, não permitindo reduzir a quantidade de vértices necessária para a cobertura das arestas internas a cada bloco. Assim, a cobertura por vértices mínima do grafo não pode ser menor que a soma das coberturas mínimas de cada bloco. Portanto, conclui-se que $\tau(L_n) \geq 4n$. Combinando os resultados obtidos, conclui-se que $\tau(L_n) = 4n$. \square

4 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Embora o problema da cobertura por vértices seja um problema clássico na literatura de teoria dos grafos e teoria de complexidade computacional, ainda existem questões significativas em aberto, especialmente no contexto de grafos com grau máximo igual ou superior a três. O presente trabalho contribui para a teoria dos grafos ao determinar o número de cobertura para diversas famílias de *snarks*, como os *snarks*-flor, os *snarks* de Goldberg, a Primeira família dos *snarks* de Blanuša generalizados e os *snarks* de Loupekine LP_0 diretos-cruzados e LP_1 diretos-cruzados.

A Tabela 1 sumariza os principais resultados obtidos neste trabalho.

Tabela 1 – Resultados para o parâmetro $\tau(G)$ das classes de *snarks* estudadas.

Classes	$\tau(G)$
<i>Snark</i> -flor F_n	$2n + 1$
<i>Snark</i> de Goldberg G_n	$\lceil \frac{9n}{2} \rceil$
Primeira família dos <i>snarks</i> de Blanuša generalizados \mathfrak{B}_n^1	$\lceil \frac{14n+17}{3} \rceil$
<i>Snarks</i> de Loupekine LP_0 direto-cruzado e LP_1 direto-cruzado L_n	$4n$

Diante dos resultados obtidos, com ênfase no valor encontrado de $\tau(\mathfrak{B}_n^1) = \lceil \frac{14n+17}{3} \rceil$, é natural questionar se este comportamento se estende aos *snarks* de Blanuša \mathfrak{B}_n^2 , dada a sutil diferença estrutural entre as duas famílias. Nesse contexto, propomos a seguinte conjectura:

Conjetura 1. *Seja B_n^2 um snark de Blanuša generalizado. Temos que $\tau(B_n^2) = \lceil \frac{14n+17}{3} \rceil$.*

REFERÊNCIAS

- BAR-YEHUDA, R.; EVEN, S. A local-ratio theorem for approximating the weighted vertex cover problem. In: AUSIELLO, G.; LUCERTINI, M. (Ed.). **Analysis and Design of Algorithms for Combinatorial Problems**. North-Holland, 1985, (North-Holland Mathematics Studies, v. 109). p. 27–45. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304020808731013>.
- BEHSAZ, B.; HATAMI, P.; MAHMOODIAN, E. S. **On minimum vertex cover of generalized Petersen graphs**. 2010. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1008.3208>.
- BICKLE, A. **Fundamentals of Graph Theory**. Providence, Rhode Island, USA: American Mathematical Society, 2020. v. 43. (Pure and Applied Undergraduate Texts, v. 43). ISBN 9781470453428.
- BLANUŠA, D. Problem četiriju boja. **Glasnik Matematičko-Fizički i Astronomski. Serija II**, v. 1, p. 31–42, 1946.
- COCKAYNE, E.; HEDETNIEMI, S.; LASKAR, R. Gallai theorems for graphs, hypergraphs, and set systems. **Discrete Mathematics**, v. 72, n. 1, p. 35–47, 1988. ISSN 0012-365X. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0012365X88901926>.
- COXETER, H. S. M. Self-dual configurations and regular graphs. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 56, n. 5, p. 413–455, 1950.
- DINUR, I.; SAFRA, S. On the hardness of approximating minimum vertex cover. **Annals of Mathematics**, Annals of Mathematics, v. 162, n. 1, p. 439–485, 2005. ISSN 0003486X. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/3597377>. Acesso em: 13 mai. 2025.
- DOWNEY, R. G.; FELLOWS, M. R. **Parameterized Complexity**. New York: Springer, 1999. 533 p. (Monographs in Computer Science). ISBN 978-0-387-94883-6. Disponível em: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4612-0515-9>. Acesso em: 01 mai. 2025.
- FREITAS, B. de; SILVA, C. da; LUCCHESI, C. A study of critical snarks. In: CONCURSO DE TRABALHOS DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA SBC, 34., 2015, Recife. **Anais [...]**. Porto Alegre: SBC, 2015. p. 21–30. Disponível em: <https://sol.sbc.org.br/index.php/ctic/article/view/10015>.
- GALLAI, T. Über extreme punkt-und kantenmengen, annales universitatis scientiarum budapestinensis de rolando eotvos nominatae. **Sectio mathematica**, v. 2, p. 133–138, 1959.
- GARDNER, M. Mathematical games: Snarks, boojums and other conjectures related to the four-color-map theorem. **Scientific American**, v. 234, n. 4, p. 126–130, 1976.
- GAREY, M.; JOHNSON, D.; STOCKMEYER, L. Some simplified np-complete graph problems. **Theoretical Computer Science**, v. 1, n. 3, p. 237–267, 1976. ISSN 0304-3975. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304397576900591>.
- GOLDBERG, M. K. Construction of class 2 graphs with maximum vertex degree 3. **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, v. 31, n. 3, p. 282–291, 1981. ISSN 0095-8956. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0095895681900307>.

GONÇALVES, I. F.; DANTAS, S.; SASAKI, D. On equitable total coloring of snarks. **Procedia Computer Science**, v. 195, p. 334–342, 2021. ISSN 1877-0509. Proceedings of the XI Latin and American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877050921021803>.

GUSEV, V. V. The vertex cover game: Application to transport networks. **Omega**, v. 97, p. 102102, 2020. ISSN 0305-0483. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305048319303421>.

HALL, P. On representatives of subsets. **Journal of the London Mathematical Society**, Wiley Online Library, v. 10, n. 1, p. 26–30, 1935.

HARJU, T. **Lecture Notes on GRAPH THEORY**. FIN-20014 Turku, Finland, 2011. Years of development: 1994-2011.

ISAACS, R. Infinite families of non-trivial trivalent graphs which are not tait colorable. **The American Mathematical Monthly**, v. 82, n. 3, p. 221–239, 1975.

ISAACS, R. **Loupekiné's snarks**: a bifamily of non-tait-colorable graphs. Maryland, U.S.A., 1976.

JIN, D. D.; WANG, D. G. On the minimum vertex cover of generalized Petersen graphs. **Discrete Applied Mathematics**, v. 266, p. 309–318, 2019. ISSN 0166-218X. The Second Malta Conference in Graph Theory and Combinatorics – 2MCGTC2017. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X18306541>.

KARP, R. M. Reducibility among combinatorial problems. In: _____. **Complexity of Computer Computations**. Boston, MA: Springer US, 1972. p. 85–103. ISBN 978-1-4684-2001-2. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-1-4684-2001-2_9.

KLEINBERG, J.; TARDOS, É. **Algorithm Design**. Reading, MA: Addison-Wesley, 2005. ISBN 0-321-29535-8.

KÖNIG, D. Gráfok és mátrixok. **Matematikai és Fizikai Lapok**, v. 38, p. 116–119, 1931.

KÖNIG, D. Graphok és matrixok. **Mat. Fiz. Lapok**, v. 38, p. 116–119, 1931.

KÖNIG, D. **Theorie der endlichen und unendlichen Graphen**. Leipzig, Germany: Akademische Verlagsgesellschaft, 1936. (Teubner-Archiv zur Mathematik). Primeira monografia sobre teoria dos grafos; contém a caracterização de grafos bipartidos por ausência de ciclos ímpares.

KUMARA, J. S.; ARCHANAB, B.; MURALIDHARANA, K. Graph theory: From Euler to modern application. **Department of Science and Humanities (Mathematics)**, v. 116, p. 9, 2025. Disponível em: <https://jisem-journal.com/index.php/journal/article/download/4936/2321/8232#:~:text=,1>. Acesso em: 01 mai. 2025.

LUIZ, A. G. Roman domination and independent Roman domination on graphs with maximum degree three. **Discrete Applied Mathematics**, v. 348, p. 260–278, 2024. ISSN 0166-218X. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X24000702>.

- MILANOVIĆ, M. Solving the generalized vertex cover problem by genetic algorithm. **Computing and Informatics**, v. 29, p. 1251–1265, 2010. Disponível em: <https://cai.type.sk/content/2010/6%2B/solving-the-generalized-vertex-cover-problem-by-genetic-algorithm/>. Acesso em: 01 mai. 2025.
- NAGY, B.; SZOKOL, Z. A genetic algorithm for the minimum vertex cover problem with interval-valued fitness. **Acta Polytechnica Hungarica**, v. 16, n. 1, p. 105–122, 2019. Disponível em: https://acta.uni-obuda.hu/Nagy_Szokol_111.pdf. Acesso em: 01 mai. 2025.
- SZÁRNYAS, G. **Graphs and matrices**: A translation of "graphok és matrixok" by dénes kőnig (1931). 2020. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2009.03780>.
- TAIT, P. G. Remarks on the colouring of maps. In: **Proceedings of the Royal Society of Edinburg**. [S. l.: s. n.], 1880. v. 10, p. 501–503.
- TUTTE, W. T. A geometrical version of the four color problem. In: BOSE, R. C.; DOWLING, T. A. (Ed.). **Combinatorial Mathematics and its Applications**. [S. l.]: University of North Carolina Press, 1967.
- WATKINS, J. J. On the construction of snarks. **Ars Combinatoria**, v. 16, p. 111–124, 1983.
- WATKINS, M. E. A theorem on tait colorings with an application to the generalized Petersen graphs. **Journal of Combinatorial Theory**, v. 6, n. 2, p. 152–164, 1969. ISSN 0021-9800. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002198006980116X>.
- WEST, D. B. **Introduction to Graph Theory**. Second. Delhi, India: Pearson Education (Singapore) Pte. Ltd., Indian Branch, 2002. First Indian Reprint. Original copyright 2001 by Pearson Education, Inc. ISBN 81-7808-830-4.
- XIAO, M. A note on vertex cover in graphs with maximum degree 3. In: THAI, M. T.; SAHNI, S. (Ed.). **Proceedings [...]**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010. p. 150–159. ISBN 978-3-642-14031-0.
- YANG, S.; NAKAJIMA, H.; YANG, Y.; SHIN, Y.; KOIZUMI, H. The impact of surveillance cameras and community safety activities on crime prevention: Evidence from Kakogawa city, Japan. **Sustainable Cities and Society**, v. 115, p. 105858, 2024. ISSN 2210-6707. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2210670724006826>.