



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ
CURSO DE GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

IGOR GABRIEL DA SILVA CASTRO

**REALIDADE AUMENTADA NO ENSINO DE COMPUTAÇÃO GRÁFICA: UMA
PROPOSTA DIDÁTICA PARA O APRENDIZADO DE TRANSFORMAÇÕES
GEOMÉTRICAS**

QUIXADÁ

2026

IGOR GABRIEL DA SILVA CASTRO

REALIDADE AUMENTADA NO ENSINO DE COMPUTAÇÃO GRÁFICA: UMA
PROPOSTA DIDÁTICA PARA O APRENDIZADO DE TRANSFORMAÇÕES
GEOMÉTRICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Graduação em Ciência da Computação
do CAMPUS QUIXADÁ da Universidade
Federal do Ceará, como requisito parcial à
obtenção do grau de bacharel em Ciência da
Computação.

Orientador: Prof. Dr. Rubens Fernandes
Nunes

QUIXADÁ

2026

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C351r Castro, Igor Gabriel da Silva.

Realidade aumentada no ensino de computação gráfica : uma proposta didática para o aprendizado de transformações geométricas / Igor Gabriel da Silva Castro. – 2026.
58 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Campus de Quixadá, Curso de Ciência da Computação, Quixadá, 2026.

Orientação: Prof. Dr. Rubens Fernandes Nunes.

1. Realidade Aumentada. 2. Computação Gráfica. 3. Transformações Geométricas. 4. Álgebra Matricial.
5. Unity. I. Título.

CDD 004

IGOR GABRIEL DA SILVA CASTRO

REALIDADE AUMENTADA NO ENSINO DE COMPUTAÇÃO GRÁFICA: UMA
PROPOSTA DIDÁTICA PARA O APRENDIZADO DE TRANSFORMAÇÕES
GEOMÉTRICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Graduação em Ciência da Computação
do CAMPUS QUIXADÁ da Universidade
Federal do Ceará, como requisito parcial à
obtenção do grau de bacharel em Ciência da
Computação.

Aprovada em: 23 de Janeiro de 2026.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rubens Fernandes Nunes (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Profa. Dra. Paulyne Matthews Jucá
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Paulo Henrique Macêdo de Araújo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico este trabalho aos meus pais, Eugênia e José, que não mediram esforços para que eu chegasse até aqui. Vocês são a base de tudo o que sou e de tudo o que ainda pretendo conquistar.

AGRADECIMENTOS

A Deus, primeiramente, pelo dom da vida, pela sabedoria e por ter me dado forças para superar os desafios e persistir até a conclusão desta etapa.

Aos meus pais, Eugênia e José, por serem meus maiores exemplos de caráter e dedicação. Agradeço pelo amor incondicional, pelos sacrifícios feitos para garantir minha educação e por sempre acreditarem no meu potencial. Sou o resultado do esforço de vocês.

À minha irmã, Iara, pelo companheirismo e por estar sempre ao meu lado. Principalmente à minha namorada, Ellen, obrigado pelo amor, pela paciência, pela motivação e pela compreensão durante os momentos de ausência e dedicação aos estudos. Vocês fizeram com que todo o esforço valesse a pena.

À minha tia, Andreлина, expresso minha profunda admiração e gratidão. Sua presença e seu apoio, que me acompanham desde o ensino médio, foram pilares essenciais na minha formação.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Rubens Fernandes Nunes, expresso minha profunda gratidão. Obrigado pela paciência, pela disponibilidade e, acima de tudo, pela condução deste trabalho.

Ao grande amigo da família, Roberto (o "Pombo"), deixo meu sincero agradecimento. Sua ajuda generosa nos meus deslocamentos entre a cidade e a minha casa foi crucial. Sem o seu auxílio, essa caminhada teria sido muito mais difícil.

Aos meus amigos e colegas de turma, especialmente Gustavo, Izael, Anderson e Ulisses, pelo companheirismo, pelas trocas de conhecimento e pelos momentos de descontração que tornaram a jornada acadêmica mais leve.

A todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

Muito obrigado.

“Aquilo que escuto eu esqueço, aquilo que vejo
eu lembro, aquilo que faço eu aprendo.”

(Confúcio)

RESUMO

O ensino de transformações geométricas tridimensionais em Computação Gráfica impõe desafios didáticos significativos devido à dificuldade de correlacionar a abstração da álgebra matricial com seus efeitos espaciais. Este trabalho teve como objetivo desenvolver e validar tecnicamente uma aplicação móvel de Realidade Aumentada capaz de integrar a manipulação de operações de translação, rotação e escala com a visualização em tempo real de suas estruturas matriciais 4×4 . A metodologia, de natureza aplicada e exploratória, fundamentou-se em práticas de Engenharia de Software focadas na verificação do artefato. O protótipo foi construído na plataforma Unity utilizando a biblioteca AR Foundation, e a estratégia de validação combinou testes de caixa branca, para inspeção da lógica algorítmica de composição, com testes de caixa preta, para avaliação da correspondência visual no ambiente físico. Os resultados evidenciaram a estabilidade do rastreamento espacial e a precisão matemática das operações implementadas, confirmando a relação isomórfica entre o cálculo numérico e a renderização gráfica. A análise dos cenários de transformações compostas demonstrou com êxito os efeitos da não comutatividade da multiplicação de matrizes, permitindo ainda explorar as interpretações global e local. Conclui-se que a ferramenta atingiu a maturidade técnica necessária para atuar como recurso pedagógico, oferecendo um meio confiável e interativo para a compreensão de conceitos fundamentais da álgebra linear aplicados à construção de ambientes virtuais.

Palavras-chave: realidade aumentada; computação gráfica; transformações geométricas; álgebra matricial; Unity.

ABSTRACT

The teaching of three-dimensional geometric transformations in Computer Graphics poses significant didactic challenges due to the difficulty of correlating the abstraction of matrix algebra with its spatial effects. This work aimed to develop and technically validate a mobile Augmented Reality application capable of integrating the manipulation of translation, rotation, and scale operations with the real-time visualization of their 4×4 matrix structures. The methodology, of an applied and exploratory nature, was based on Software Engineering practices focused on artifact verification. The prototype was built on the Unity platform using the AR Foundation library, and the validation strategy combined white-box testing, for inspecting the algorithmic logic of composition, with black-box testing, for evaluating visual correspondence in the physical environment. The results evidenced the stability of spatial tracking and the mathematical precision of the implemented operations, confirming the isomorphic relationship between numerical calculation and graphical rendering. The analysis of composite transformation scenarios successfully demonstrated the effects of non-commutativity of matrix multiplication, allowing for the exploration of both global and local interpretations. It is concluded that the tool has reached the technical maturity necessary to act as a pedagogical resource, offering a reliable and interactive means for understanding fundamental concepts of linear algebra applied to the construction of virtual environments.

Keywords: augmented reality; computer graphics; geometric transformations; matrix algebra; Unity.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Translação: (a) Objeto na posição original; (b) Objeto transladado.	20
Figura 2 – Escala uniforme e não uniforme.	21
Figura 3 – Rotação tridimensional em torno do eixo z: (a) Posição original; (b) Após rotação de ângulo α	23
Figura 4 – Sequência de rotações em torno dos eixos x, y e z.	24
Figura 5 – Sequência de transformações.	24
Figura 6 – Contínuo de virtualidade.	27
Figura 7 – Fluxo de execução: comunicação entre <i>TransformationManager</i> e <i>Visualizer</i>	37
Figura 8 – Interface de entrada de dados e definição de ordem de composição.	37
Figura 9 – Painel comparativo: interpretações global e local das transformações.	38
Figura 10 – Destaque visual dos elementos da matriz durante a execução.	39
Figura 11 – Animação das transformações geométricas no ambiente de RA.	40
Figura 12 – Execução dos testes de caixa branca com <i>Unity Test Framework</i>	42
Figura 13 – Comparativo visual entre as mesmas transformações aplicadas em ordens diferentes.	46

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Quadro comparativo das funcionalidades e limitações dos trabalhos relacionados frente à proposta.	31
Tabela 2 – Resultados dos testes de inicialização e rastreamento.	43
Tabela 3 – Resultados das transformações afins básicas.	44
Tabela 4 – Resultados das transformações compostas (Interpretação Global).	45
Tabela 5 – Resultados das transformações compostas (Interpretação Local).	46

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

2D	bidimensionais
3D	tridimensionais
CC	Ciência da Computação
CG	Computação Gráfica
DAC	Desenho Assistido por Computador
RA	Realidade Aumentada
RV	Realidade Virtual

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	OBJETIVOS	16
2.1	Objetivo Geral	16
2.2	Objetivos Específicos	16
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	17
3.1	Computação Gráfica no Ensino Superior: Conteúdos, Desafios e Inovações	17
3.2	Transformações Geométricas no Espaço Tridimensional: Fundamentos e Desafios de Aprendizagem	18
3.2.1	<i>Coordenadas Homogêneas</i>	19
3.2.2	<i>Translação</i>	19
3.2.3	<i>Escala</i>	21
3.2.4	<i>Rotação</i>	22
3.2.5	<i>Composição de Transformações</i>	23
3.2.6	<i>Desafios Cognitivos e Didáticos no Ensino de Transformações tridimensionais (3D)</i>	24
3.3	Realidade Aumentada: Conceito, Tecnologias e Potencial Educacional	26
3.4	Realidade Aumentada no ensino de Geometria e Transformações	28
4	TRABALHOS RELACIONADOS	30
5	METODOLOGIA	32
5.1	Classificação da Pesquisa	32
5.2	Arquitetura da Solução e Ferramentas	32
5.3	Estratégia de Testes e Verificação	34
5.4	Procedimentos Metodológicos	34
6	DESENVOLVIMENTO E SOLUÇÃO	36
6.1	Estrutura Lógica e Componentes Principais	36
6.2	Implementação das Transformações Geométricas	37
6.3	Destaque Visual das Matrizes	39
6.4	Controle de Execução e Sincronização da Interface	39
6.4.1	<i>Teste de Caixa Branca da Composição de Matrizes</i>	40
7	RESULTADOS	43

7.1	Estabilidade do Ambiente de Realidade Aumentada	43
7.2	Verificação das Transformações Básicas	43
7.3	Verificação da Lógica de Composição	44
7.3.1	<i>Interpretação Global</i>	44
7.3.2	<i>Interpretação Local</i>	45
7.4	Análise e Discussão dos Resultados	47
7.4.1	<i>Análise da Estabilidade e Integração com o Espaço Físico</i>	47
7.4.2	<i>Correspondência entre Álgebra Matricial e Representação Visual</i>	47
7.4.3	<i>Análise da Composição e Não Comutatividade</i>	48
7.4.4	<i>Síntese da Verificação Técnica</i>	49
8	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	50
	REFERÊNCIAS	52
	APÊNDICES	55
	APÊNDICE A – Acesso ao Repositório Digital	55
	APÊNDICE B – Script de Testes de Unidade (Verificação Matemática)	56
	ANEXOS	58

1 INTRODUÇÃO

A Computação Gráfica (CG) constitui um componente essencial na formação de profissionais de áreas como Ciência da Computação (CC), engenharia e jogos digitais, pois oferece os fundamentos para a criação e manipulação de ambientes tridimensionais. Dentro desse contexto, as transformações geométricas, especialmente translação, rotação e escala, desempenham papel central na organização e movimentação de objetos virtuais. Essas operações são amplamente utilizadas em softwares de modelagem, motores gráficos de jogos e sistemas de realidade mista. No entanto, a compreensão dessas transformações requer habilidades de abstração e visualização espacial que nem sempre são plenamente desenvolvidas pelos estudantes.

Parte dessa dificuldade está associada ao predomínio de abordagens didáticas baseadas em representações bidimensionais e conteúdos algorítmicos, que limitam a construção de imagens mentais significativas. Estratégias tradicionais, centradas em slides e trechos de código, tendem a incentivar um aprendizado mecânico, pouco conectado à intuição espacial necessária para interpretar transformações tridimensionais (Santos *et al.*, 2024).

Como reforço a essa perspectiva, estudos como o de Suselo *et al.* (2022b), que analisaram uma década de avaliações em disciplinas de CG, destacam as dificuldades recorrentes enfrentadas pelos estudantes, incluindo a ordem das operações não comutativas, a distinção entre sistemas de coordenadas locais e globais, a visualização espacial das transformações, a correta construção das matrizes e a percepção da conexão entre os conceitos matemáticos e sua representação visual. Tais obstáculos evidenciam a necessidade de recursos pedagógicos que integrem teoria e prática por meio de experiências interativas e visuais, papel no qual a Realidade Aumentada (RA) tem-se mostrado promissora.

A manipulação de objetos tridimensionais por meio da RA potencializa o desenvolvimento do raciocínio visual e da cognição espacial, habilidades importantes para compreender conceitos geométricos abstratos. A visualização matemática é um processo de formação e transformação de imagens mentais e visuais, que permite compreender e explorar fenômenos matemáticos por meio da construção de representações internas (Soares, 2020). Isso é particularmente relevante no ensino de transformações geométricas, em que o domínio das operações vai além da manipulação simbólica.

Nesse contexto, a RA surge como alternativa pedagógica que pode atenuar as dificuldades mencionadas. Ao possibilitar a sobreposição de objetos virtuais no espaço físico, por meio de dispositivos móveis, essa tecnologia amplia a percepção espacial e oferece um ambiente de

aprendizado mais dinâmico e imersivo. Segundo Santiago e Santana (2024), seu uso permite aos alunos visualizar sólidos sob diferentes ângulos e acompanhar transformações em tempo real, promovendo maior engajamento e compreensão.

Esse potencial também está relacionado à natureza da visualização matemática, que, conforme argumenta Soares (2020), não se resume à representação gráfica, mas envolve a construção ativa de imagens mentais que favoreçam conexões conceituais. Ferramentas como o *GeoGebra 3D*, integradas à RA, reforçam esse processo ao permitir que o aluno controle os parâmetros das transformações enquanto observa os efeitos instantaneamente (Araújo *et al.*, 2024). Entretanto, a eficácia pedagógica dessas ferramentas depende intrinsecamente da precisão técnica de sua implementação. No ensino de Ciências Exatas, especificamente em CG, a correspondência entre o formalismo matemático e a representação visual deve ser exata. Se houver erros entre o cálculo e a visualização, o aluno pode aprender o conceito de forma errada. Quando isso acontece, o processo de aprendizagem é comprometido, transformando a tecnologia em um obstáculo cognitivo ao invés de um facilitador.

Diante da escassez de soluções móveis que integrem a visualização de transformações geométricas com a exibição explícita de suas estruturas matriciais, este estudo propõe o desenvolvimento e a verificação técnica de uma ferramenta interativa baseada em RA. Diferentemente de abordagens puramente pedagógicas, este trabalho concentra-se na Engenharia de Software do artefato, com o objetivo de entregar uma aplicação funcionalmente verificada. Dessa forma, busca-se garantir que a matemática e a fidelidade visual do sistema estejam corretas, criando uma base confiável para que a ferramenta possa ser utilizada, futuramente, como recurso didático em sala de aula.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver e verificar tecnicamente uma aplicação de Realidade Aumentada (RA) para o ensino de transformações geométricas 3D, verificando a correspondência entre a álgebra matricial e a representação visual.

2.2 Objetivos Específicos

Para alcançar o objetivo geral, este trabalho propõe-se a:

- Identificar, na literatura especializada, as principais dificuldades enfrentadas por estudantes na compreensão de transformações geométricas 3D.
- Implementar as operações de translação, rotação e escala em um ambiente de RA, integrando os objetos virtuais ao espaço físico via rastreamento de planos.
- Desenvolver a lógica de composição de transformações para demonstrar visualmente os efeitos da ordem na multiplicação matricial.
- Integrar a visualização das matrizes 4×4 em tempo real com a renderização 3D, correlacionando os valores numéricos com a resposta visual.
- Realizar testes funcionais baseados em cenários para verificar a consistência entre o modelo matemático e o *feedback* visual.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, é apresentada a base conceitual que fundamenta o desenvolvimento desta pesquisa. Primeiramente, discute-se o papel da CG no ensino superior, abordando seus principais conteúdos, desafios didáticos e propostas de inovação pedagógica. Em seguida, são explorados os fundamentos das transformações geométricas no espaço tridimensional, com destaque para coordenadas homogêneas, operações de translação, escala, rotação e composição matricial, bem como as dificuldades cognitivas frequentemente enfrentadas por estudantes na aprendizagem desses conceitos.

Na sequência, é introduzido o conceito de RA, suas tecnologias subjacentes e seu potencial como ferramenta educacional interativa. Por fim, examinam-se estudos que aplicam a RA especificamente ao ensino de geometria e transformações, destacando os benefícios, limitações e lacunas ainda existentes nas abordagens voltadas ao ensino de CG com ênfase em transformações 3D.

3.1 Computação Gráfica no Ensino Superior: Conteúdos, Desafios e Inovações

A CG é um campo da ciência computacional que estuda algoritmos, estruturas de dados e técnicas matemáticas para a geração, manipulação e exibição de representações visuais digitais em duas ou três dimensões (Hearn *et al.*, 2011). Sua aplicação abrange desde interfaces gráficas e modelagem de objetos até simulações científicas e ambientes interativos. Em cursos de graduação como CC, Engenharia e Jogos Digitais, a disciplina é considerada estratégica por fornecer os fundamentos para a criação de mundos virtuais, visualizações científicas e sistemas interativos.

Entre os tópicos mais recorrentes no ensino de CG estão modelagem geométrica, projeções, pipeline gráfico, iluminação e transformações geométricas. Dentre esses, as transformações espaciais 3D, como translação, rotação e escala, ocupam papel central na construção e manipulação de objetos gráficos em cenas 3D. O domínio dessas operações é essencial para o controle de câmeras, movimentação de objetos, simulações físicas e estruturação hierárquica em motores gráficos amplamente utilizados (Shreiner *et al.*, 2013).

Apesar da relevância técnica, o ensino dessas operações enfrenta desafios didáticos relacionados à abstração matemática e à construção de imagens mentais coerentes. Com frequência, as transformações geométricas são introduzidas por meio de notações algébricas abstratas,

o que representa um desafio para estudantes com pouca familiaridade com álgebra linear ou visualização espacial. Segundo Suselo *et al.* (2017), as dificuldades na aprendizagem de CG não se limitam à complexidade dos conteúdos, mas também refletem limitações metodológicas, como o predomínio de aulas expositivas apoiadas em slides e códigos de exemplo com interatividade visual reduzida.

Além disso, o processo de aprendizagem dessas transformações requer competências cognitivas como raciocínio espacial, construção de imagens mentais e manipulação simbólica de objetos 3D. Fernández *et al.* (2007) destacam que a visualização espacial requer a habilidade de operar mentalmente sobre figuras geométricas, realizar rotações mentais e reconhecer padrões espaciais de transformação, o que nem sempre é alcançável apenas por explicações verbais ou gráficos estáticos.

Nesse contexto, diversas iniciativas vêm sendo propostas para transformar as práticas pedagógicas no ensino de CG, com a adoção de recursos como ambientes interativos, motores gráficos com visualização em tempo real e tecnologias de RA. Essas abordagens procuram tornar mais tangíveis os efeitos das transformações, promovendo um aprendizado mais ativo e engajador. Segundo Suselo *et al.* (2022a), apesar de avanços pontuais, ainda há escassez de soluções educacionais que integrem visualização tridimensional, manipulação em tempo real e avaliação de impacto pedagógico. Tal lacuna reforça a necessidade de novas propostas didáticas que combinem clareza conceitual, manipulação visual direta e análise crítica da aprendizagem.

3.2 Transformações Geométricas no Espaço Tridimensional: Fundamentos e Desafios de Aprendizagem

As transformações geométricas constituem um dos fundamentos essenciais de CG, permitindo a modificação da posição, orientação e escala de objetos em ambientes bidimensionais (2D) e 3D. Essas operações são amplamente empregadas em tarefas como modelagem, animação, renderização de cenas virtuais e simulações interativas, estando presentes em motores gráficos, jogos digitais, sistemas de Desenho Assistido por Computador (DAC) e aplicações de RA.

Entre as transformações mais utilizadas, destacam-se a translação, a rotação e a escala. Tais operações são expressas, em geral, por meio de matrizes em coordenadas homogêneas, o que facilita a composição de múltiplas transformações e a aplicação computacional eficiente (Angel; Shreiner, 2015; Manssour; Cohen, 2006).

A seguir, introduz-se o conceito de coordenadas homogêneas utilizado para a repre-

sentação unificada das operações geométricas. Posteriormente, descrevem-se as transformações primitivas de translação, escala e rotação, bem como suas definições conceituais e representações matriciais no espaço tridimensional. A seção finaliza com a abordagem da composição de transformações e a análise da influência da ordem das operações no resultado visual.

3.2.1 *Coordenadas Homogêneas*

A representação computacional de transformações geométricas exige um formalismo matemático que permita tratar diferentes tipos de operações de maneira unificada. No espaço euclidiano tridimensional, operações lineares como rotação e escala podem ser representadas por matrizes de ordem 3. No entanto, a translação é uma operação afim que não mapeia a origem nela mesma e requer uma soma vetorial, o que a diferencia matematicamente das demais. Para superar essa limitação e permitir que todas as transformações sejam processadas por meio de multiplicações matriciais, utiliza-se o sistema de coordenadas homogêneas (Angel; Shreiner, 2015)

Nesse sistema, um ponto no espaço tridimensional $P = (x, y, z)$ é representado no espaço projetivo quadridimensional pela adição de uma quarta coordenada w . A representação resultante assume a forma $P' = (x, y, z, w)$. O valor de w atua como um fator de escala e, para a representação de pontos geométricos convencionais, adota-se usualmente o valor unitário ($w = 1$). Assim, um ponto 3D é expresso em coordenadas homogêneas como o vetor coluna $(x, y, z, 1)$.

A adoção dessa quarta dimensão possibilita o uso de matrizes quadradas de ordem 4 para representar não apenas rotação e escala, mas também a translação. Essa unificação é fundamental para a eficiência do pipeline gráfico, pois permite que uma sequência complexa de transformações seja combinada em uma única matriz resultante através da concatenação matricial (Angel; Shreiner, 2015; Manssour; Cohen, 2006). Tal característica elimina a necessidade de tratar casos especiais para diferentes tipos de movimento e simplifica o processamento geométrico em hardware gráfico.

3.2.2 *Translação*

A translação é uma operação que desloca todos os pontos de um objeto por um vetor de deslocamento $\mathbf{t} = (t_x, t_y, t_z)$, sem alterar sua orientação ou forma. Essa transformação possui três graus de liberdade, pois permite definir livremente os deslocamentos em cada um dos eixos

cartesianos.

Em ambientes gráficos interativos, como aplicações desenvolvidas com *OpenGL*, essa operação consiste em adicionar constantes de deslocamento aos vértices que definem a geometria do objeto. Essa modificação altera a posição do objeto na cena, mas não sua estrutura interna, o que a torna adequada para reposicionamento de elementos em ambientes tridimensionais sem afetar suas características locais (Manssour; Cohen, 2006).

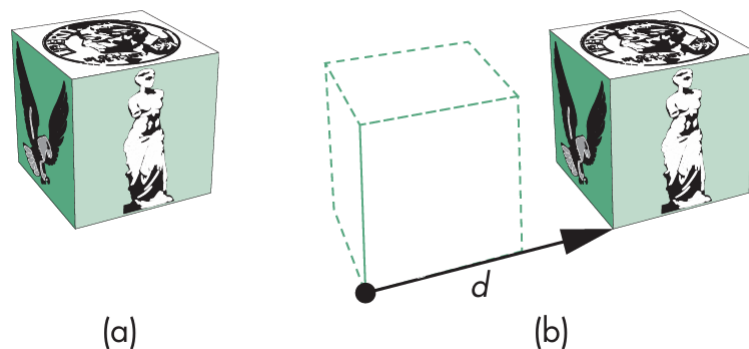
No contexto das coordenadas homogêneas apresentadas anteriormente, a operação de soma vetorial é convertida em uma multiplicação matricial. A matriz de translação assume a estrutura apresentada na Equação 3.1.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

Na equação, x, y e z representam as coordenadas do vértice original, t_x, t_y e t_z são as componentes do vetor de deslocamento e x', y' e z' correspondem às coordenadas do vértice transladado. Segundo Angel e Shreiner (2015), esse modelo matricial evita o uso de somas explícitas entre vetores e promove a padronização das operações geométricas em uma estrutura compatível com sistemas gráficos baseados em transformação linear. A aplicação dessa matriz altera a posição do objeto na cena tridimensional mantendo sua estrutura interna inalterada.

A Figura 1 ilustra o efeito da translação sobre um objeto tridimensional.

Figura 1 – Translação: (a) Objeto na posição original; (b) Objeto transladado.

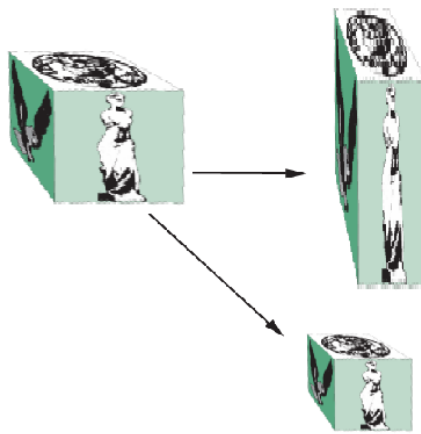


Fonte: Angel e Shreiner (2015).

3.2.3 Escala

A escala modifica o tamanho de um objeto ao multiplicar suas coordenadas por fatores escalares. Pode ser uniforme, quando todos os eixos são escalados igualmente, ou não uniforme, quando os fatores diferem. A Figura 2 mostra exemplos de escala uniforme com tamanho proporcional em todos os eixos e não uniforme com tamanho alterado apenas em um ou dois eixos. Segundo Angel e Shreiner (2015), a escala é uma transformação não rígida, pois pode alterar o formato e as proporções do objeto.

Figura 2 – Escala uniforme e não uniforme.



Fonte: Adaptada de Angel e Shreiner (2015).

Conforme apresentado por Manssour e Cohen (2006), a operação de escala consiste em aplicar fatores multiplicativos às coordenadas dos vértices que compõem o objeto. Esses fatores determinam se o objeto será ampliado ou reduzido. Quando os valores de escala são maiores que 1, o objeto aumenta de tamanho. Quando os valores estão entre 0 e 1, o objeto é reduzido. Além disso, fatores de escala negativos resultam na inversão do sinal das coordenadas, o que gera uma reflexão em relação ao eixo correspondente.

A matriz de escala S em coordenadas homogêneas é expressa por:

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

em que s_x , s_y e s_z são os fatores de escala aplicados aos eixos x , y e z , respectivamente.

3.2.4 Rotação

A rotação tridimensional movimentada um objeto em torno de um eixo fixo e preserva distâncias e ângulos internos. Conforme Angel e Shreiner (2015), essa é uma transformação rígida que requer a definição de um ponto fixo, usualmente a origem, e de um eixo de rotação. As rotações em torno dos eixos cartesianos x , y e z são representadas por matrizes específicas dependentes do ângulo θ .

Em coordenadas homogêneas, as matrizes de rotação para os três eixos principais são definidas pelas Equações 3.3, 3.4 e 3.5:

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 \\ 0 & \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

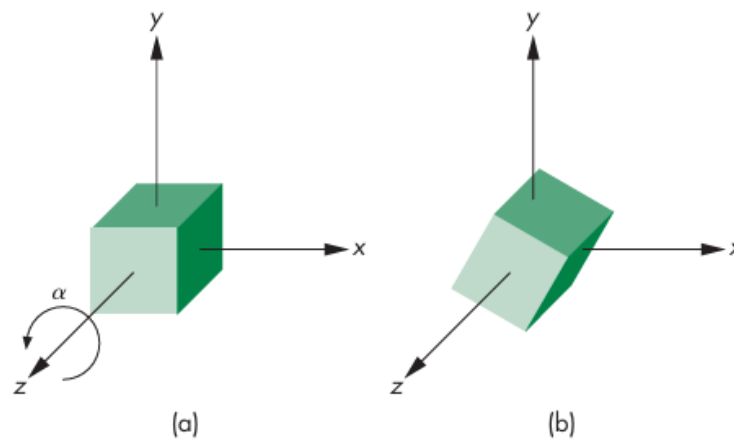
$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \text{sen } \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen } \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e \quad (3.4)$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

A Figura 3 apresenta uma representação gráfica da rotação individual em torno do eixo z , evidenciando a alteração da orientação do objeto no plano xy , enquanto a coordenada z permanece constante. Esse tipo de transformação é amplamente empregado em sistemas gráficos tridimensionais, pois corresponde a giros horizontais em torno da origem, respeitando a convenção da regra da mão direita.

Do ponto de vista matemático, a rotação consiste na aplicação de cálculos trigonométricos envolvendo seno e cosseno às coordenadas dos vértices (Manssour; Cohen, 2006). Em ambientes tridimensionais, é necessário especificar o eixo de rotação, uma vez que o resultado

Figura 3 – Rotação tridimensional em torno do eixo z : (a) Posição original; (b) Após rotação de ângulo α .



Fonte: Adaptada de Angel e Shreiner (2015).

depende diretamente de sua orientação. A direção da rotação segue a convenção da regra da mão direita, na qual o polegar se alinha ao eixo de rotação e os dedos curvados indicam o sentido positivo anti-horário. Essa padronização garante consistência na aplicação de transformações rotacionais em ambientes 3D, onde ângulos positivos sempre correspondem a giros no sentido definido pela regra.

3.2.5 Composição de Transformações

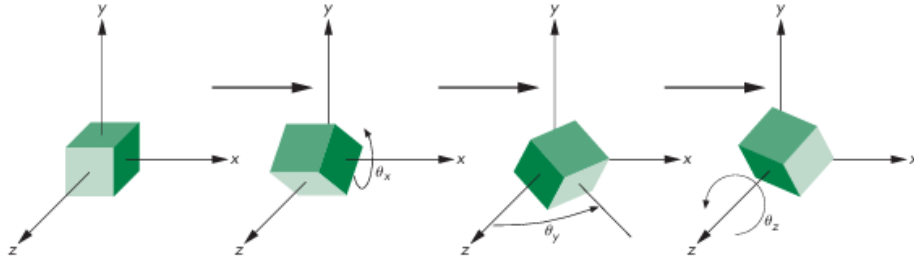
A aplicação sequencial de múltiplas transformações geométricas é realizada por meio da multiplicação de suas respectivas matrizes. Essa técnica, denominada composição matricial, permite representar uma cadeia complexa de operações de translação, rotação e escala em uma única matriz acumulada (Manssour; Cohen, 2006). O uso de coordenadas homogêneas é fundamental nesse processo, pois possibilita a unificação de todas as transformações em matrizes de ordem 4×4 .

Essa abordagem favorece a eficiência computacional em arquiteturas de *pipeline* gráfico, uma vez que o sistema processa apenas a matriz resultante para cada vértice, em vez de aplicar cada transformação individualmente. No entanto, a ordem em que as matrizes são multiplicadas influencia o resultado final. Embora a multiplicação de matrizes seja associativa, ela não é comutativa (Angel; Shreiner, 2015).

Dessa maneira, alterar a sequência de rotações pode levar a diferentes orientações finais do objeto. Como discutido por Angel e Shreiner (2015), uma composição $R = R_x R_y R_z$

gera um efeito distinto de $R = R_z R_y R_x$, mesmo quando os ângulos são os mesmos. Conforme demonstrado na Figura 4, a aplicação de rotações em seqüências distintas resulta em orientações espaciais distintas, evidenciando a dependência da ordem.

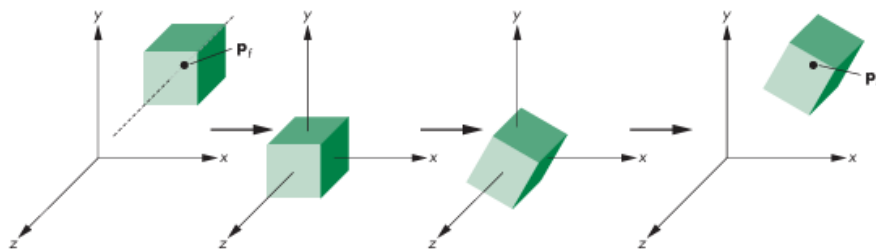
Figura 4 – Sequência de rotações em torno dos eixos x , y e z .



Fonte: Angel e Shreiner (2015).

A composição é essencial também para realizar rotações em torno de um eixo que não passa pela origem, conhecido como ponto pivô. Visto que as matrizes primitivas consideram a origem como centro, torna-se necessário combinar a rotação com matrizes de translação. Esse processo inicia com o deslocamento do eixo de rotação até a origem, segue com a execução da rotação desejada e finaliza com a aplicação da translação inversa para restaurar a posição inicial do eixo. A Figura 5 ilustra esse processo, que garante a fidelidade geométrica do resultado (Manssour; Cohen, 2006).

Figura 5 – Sequência de transformações.



Fonte: Angel e Shreiner (2015).

3.2.6 Desafios Cognitivos e Didáticos no Ensino de Transformações 3D

Apesar da importância conceitual e prática das transformações geométricas no ensino de CG, sua aprendizagem apresenta desafios recorrentes. Como apontam Angel e Shreiner (2015),

essas transformações são formalizadas por meio da álgebra linear, com o uso de vetores e matrizes 4×4 em coordenadas homogêneas. Essa abordagem permite a unificação das operações de translação, rotação e escala por multiplicações matriciais sucessivas, sendo particularmente útil em estruturas hierárquicas, como a modelagem de personagens articulados, nas quais o movimento de uma parte afeta as demais.

Entretanto, como mencionado anteriormente, a multiplicação matricial não é comutativa, ou seja, a ordem das transformações altera significativamente o resultado final. Essa característica, embora matematicamente simples, é fonte de confusão para estudantes em formação. Em estudo de Suselo *et al.* (2022b), são relatadas dificuldades recorrentes na compreensão da ordem correta das operações e na visualização de seus efeitos combinados no espaço tridimensional.

Esse problema já havia sido identificado anteriormente por Suselo *et al.* (2017), que associou tais dificuldades à baixa familiaridade dos estudantes com modelagem tridimensional. No estudo mais recente, o autor amplia esse diagnóstico ao observar que o conteúdo de transformações em 3D envolve simultaneamente conceitos geométricos, abstração matemática, programação gráfica e raciocínio visual-espacial, uma combinação que tende a aumentar a complexidade cognitiva do aprendiz.

De fato, um dos principais obstáculos relatados é a limitação na construção de modelos mentais que permitam antecipar os efeitos das transformações. O mesmo estudo aponta que muitos alunos enfrentam dificuldades em interpretar imagens estáticas ou prever modificações em objetos tridimensionais a partir de transformações simbólicas, o que compromete a generalização dos conceitos e a conexão entre visualização e notação matemática.

Segundo Alobaid *et al.* (2025), essas barreiras são agravadas por abordagens tradicionais de ensino, que frequentemente não promovem o desenvolvimento das habilidades espaciais necessárias. Os autores destacam que o ensino de transformações espaciais tende a falhar ao não incorporar estímulos visuais dinâmicos e experiências interativas, elementos fundamentais para a construção de uma percepção espacial mais precisa e intuitiva.

Além disso, a transição entre a percepção geométrica e a linguagem simbólica representa outro ponto crítico. Conforme Yeh *et al.* (2023), o distanciamento entre a representação visual e a estrutura matricial pode romper a conexão entre imagem mental e abstração formal, comprometendo a compreensão conceitual do aluno. Nesse sentido, Monjoree *et al.* (2024) desenvolveram um aplicativo interativo que permite observar, em tempo real, os efeitos das trans-

formações matriciais sobre objetos 3D, contribuindo para uma aprendizagem contextualizada e mais eficaz.

Outro desafio importante refere-se à distinção entre sistemas de coordenadas locais e globais. A mesma transformação pode ter efeitos distintos dependendo do referencial adotado, o que exige a compreensão simultânea de diferentes perspectivas geométricas e estruturas matemáticas. Essa habilidade está diretamente ligada ao raciocínio espacial, como argumenta Soares (2020), ao defender que a compreensão das relações geométricas em 3D requer mais do que conhecimento algébrico e envolve competências perceptivas e cognitivas que devem ser estimuladas com métodos visuais e manipulativos.

Dessa forma, o ensino de transformações geométricas tridimensionais demanda estratégias que articulem a formalização matemática com ferramentas de visualização interativa, permitindo ao estudante compreender, de forma significativa, os efeitos das transformações sobre os objetos gráficos no espaço.

3.3 Realidade Aumentada: Conceito, Tecnologias e Potencial Educacional

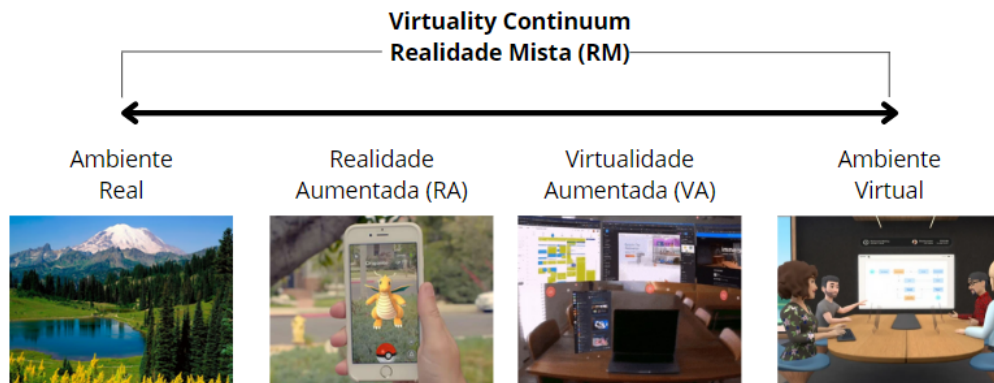
A Realidade Aumentada combina elementos digitais com o ambiente físico em tempo real. Ao contrário da Realidade Virtual (RV), que substitui completamente o mundo real por um ambiente computacional, a RA mantém a percepção do espaço físico, integrando a ele representações virtuais que acompanham a perspectiva do usuário (Azuma, 1997).

A compreensão dessa tecnologia pode ser ampliada por meio do modelo proposto por Milgram e Kishino (1994), que define um contínuo entre realidade e virtualidade, conforme a Figura 6. Nesse espectro, a RA ocupa uma posição intermediária, onde conteúdos sintéticos coexistem com o mundo real. Esse posicionamento permite identificar diferentes níveis de imersão e formas de interação baseadas na intensidade da sobreposição entre real e virtual.

Para que um sistema seja classificado como RA, ele deve combinar imagens reais e virtuais, permitir interação em tempo real e manter alinhamento tridimensional entre os elementos sobrepostos. Essas características garantem a coerência visual e funcional da experiência, diferenciando a RA de outras formas de mídia interativa (Azuma, 1997).

O funcionamento da RA depende de uma estrutura tecnológica composta por sensores, câmeras, algoritmos de rastreamento, motores gráficos e dispositivos de exibição. O rastreamento é o componente responsável por identificar a posição e a orientação do dispositivo em relação ao ambiente, permitindo que os objetos virtuais sejam colocados no local correto.

Figura 6 – Contínuo de virtualidade.



Fonte: Adaptado de Milgram e Kishino (1994).

Essa tarefa pode ser realizada por meio de sensores inerciais, marcadores visuais ou algoritmos de visão computacional que mapeiam o espaço tridimensional em tempo real (Syed *et al.*, 2023).

Quanto aos dispositivos, celulares e *tablets* representam a principal forma de acesso à RA, devido à presença de câmera, sensores e capacidade de processamento em um único equipamento. Óculos de RA oferecem experiências mais imersivas, embora seu uso ainda esteja restrito a contextos específicos por conta do custo e da complexidade de operação.

Apesar dos avanços, o uso da RA enfrenta limitações técnicas. A precisão do rastreamento pode ser afetada por interferências eletromagnéticas ou variações de luz. Aplicações em tempo real exigem grande capacidade de processamento e gerenciamento de recursos gráficos, o que pode reduzir o desempenho em dispositivos móveis. Além disso, a adaptação da tecnologia a contextos educacionais exige simplicidade de uso, clareza visual e compatibilidade com os objetivos pedagógicos (Azuma, 1997; Syed *et al.*, 2023).

Também existem desafios relacionados à ergonomia, ao campo de visão dos dispositivos e à integração com múltiplos usuários. Em sistemas colaborativos, problemas como latência de comunicação, sincronização e segurança dos dados precisam ser considerados no planejamento das aplicações (Syed *et al.*, 2023).

Além dos aspectos técnicos, a RA apresenta características educacionais que a diferenciam de outras mídias interativas. Ao permitir que o estudante visualize e manipule objetos 3D projetados no espaço físico, essa tecnologia favorece a exploração ativa e o raciocínio espacial. Aguilar *et al.* (2023) argumenta que a combinação de estímulos físicos e virtuais potencializa o aprendizado, ao envolver múltiplos sentidos e reduzir a abstração de conceitos.

Sob essa ótica, a RA tem sido usada na educação científica como recurso para tornar

visíveis fenômenos invisíveis ou complexos. Xu *et al.* (2022) destacam que sua integração ao currículo de ciências contribui para a compreensão de conteúdos abstratos, como os encontrados em física, química e matemática. Em linha semelhante, Soares (2020) trata a visualização matemática como meio de articulação entre imagens mentais e representações externas, reforçando a construção de sentido. Esse potencial também se estende ao ensino de CG, em que a RA pode atuar como ponte entre conceitos simbólicos, como matrizes, e suas manifestações visuais no espaço tridimensional.

3.4 Realidade Aumentada no ensino de Geometria e Transformações

Diversos estudos vêm investigando o potencial da RA como ferramenta didática para aprimorar o ensino de conceitos espaciais complexos. Soluções que integram RA com softwares como o *GeoGebra 3D*, por exemplo, permitem a manipulação de sólidos geométricos no espaço físico, o que favorece a compreensão de propriedades 3D e relações métricas. Segundo Araújo *et al.* (2024), esse tipo de abordagem torna o aluno agente ativo no processo de construção do conhecimento, ao mesmo tempo em que potencializa a visualização e a interação com formas geométricas. Santiago e Santana (2024) acrescentam que, ao interagir com modelos 3D sob diferentes ângulos e escalas, os estudantes tendem a desenvolver uma aprendizagem mais intuitiva e menos dependente da abstração matemática.

Para além da exploração visual, há um número crescente de iniciativas que avaliam o impacto da RA no desempenho e na compreensão dos estudantes. Os métodos adotados frequentemente incluem testes antes e depois da intervenção, aplicação de questionários de percepção e observações comportamentais. Em um desses estudos, Santos *et al.* (2024) relatam que o uso de uma aplicação de RA para manipulação de sólidos espaciais permitiu não apenas uma melhor identificação das transformações geométricas aplicadas, mas também favoreceu a retenção conceitual por meio da interatividade e do *feedback* visual imediato.

O uso de ferramentas baseadas em RA tem sido também associado ao desenvolvimento de habilidades cognitivas relacionadas à orientação espacial, rotação mental e visualização tridimensional. Suselo *et al.* (2022a), em estudo voltado ao ensino de transformações 3D, indicam que os estudantes solicitam recursos visuais e interativos para compreender os efeitos espaciais das operações matemáticas, especialmente quando os exemplos são apenas simbólicos ou estáticos. Nishino *et al.* (2011), por sua vez, demonstraram que o uso de uma interface visual guiada para programação gráfica pode facilitar a experimentação e a compreensão do efeito das

matrizes de transformação.

Apesar dessas contribuições, ainda são limitadas as propostas voltadas especificamente para o ensino de CG com foco em transformações geométricas 3D. A maioria dos trabalhos encontrados privilegia o ensino de Geometria Espacial na educação básica, com ênfase em conteúdos como prismas, pirâmides, eixos e planos. Embora relevantes, essas iniciativas não abordam diretamente a aplicação de conceitos como composição matricial, mudanças de base ou estruturação de pipelines gráficos. Yeh *et al.* (2023) reconhecem essa lacuna ao destacar que, embora o uso da RA torne conceitos invisíveis mais acessíveis, são raras as abordagens que articulam manipulação física, formalismo matemático e desenvolvimento computacional em um mesmo ambiente.

4 TRABALHOS RELACIONADOS

A revisão dos trabalhos relacionados a seguir apresenta uma análise crítica dos estudos selecionados, organizados do mais ao menos alinhado à proposta deste projeto, cujo objetivo é desenvolver e verificar tecnicamente uma ferramenta baseada em RA para o ensino de transformações geométricas tridimensionais em CG.

O primeiro trabalho identificado foi o de Suselo *et al.* (2021), que desenvolveu um aplicativo móvel de RA para apoiar o ensino de transformações 3D em disciplinas introdutórias de Computação Gráfica. A aplicação permitia aos estudantes visualizar, pela câmera de seus dispositivos, modelos 3D sendo manipulados por transformações como translação, rotação e escala, utilizando marcadores físicos como base para as operações. O estudo avaliou o impacto da ferramenta por meio de testes pré e pós-intervenção aplicados a estudantes de graduação, indicando uma melhora significativa na compreensão conceitual dos participantes. As semelhanças com este projeto incluem o foco em transformações geométricas em CG, o uso de RA em dispositivos móveis e a visualização em tempo real das operações. No entanto, o estudo não contempla o uso combinado de transformações nem a exibição integrada das matrizes, diferenciais abordados na proposta atual.

O segundo trabalho identificado foi o de Yeh *et al.* (2023), que apresentou o *AR-Classroom*, uma ferramenta que integra Realidade Aumentada (RA) com representações matriciais para o ensino de transformações espaciais tridimensionais. A proposta foi aplicada a estudantes universitários por meio de um protótipo interativo em dispositivos móveis, permitindo manipulações em tempo real com apoio visual e textual. O estudo buscou compreender a experiência dos estudantes com o sistema, destacando como a interação física aliada à sobreposição virtual pode favorecer o entendimento das operações de rotação e sua relação com matrizes. Os principais achados indicam que o uso de RA contribuiu para a compreensão de conceitos espaciais complexos, embora melhorias nas pistas visuais e no *feedback* da interface tenham sido sugeridas. As principais semelhanças com este projeto são o foco no ensino de transformações geométricas 3D com aplicação direta em CG e na utilização de RA em dispositivos móveis. No entanto, o estudo se concentra apenas em rotações 3D e não aborda translação ou escala, nem o uso combinado de múltiplas transformações.

No trabalho de Alobaid *et al.* (2025), foi desenvolvido um ambiente de Realidade Virtual (RV) imersivo voltado ao ensino de transformações tridimensionais em CG. A aplicação permitia a manipulação interativa de objetos 3D com operações de translação, rotação e escala,

exibindo em tempo real os comandos *OpenGL* correspondentes. A avaliação, realizada com estudantes de graduação por meio de testes pré e pós-intervenção, indicou melhora significativa na habilidade espacial, especialmente entre os participantes com menor desempenho inicial. As semelhanças com este projeto incluem o foco em transformações 3D, a abordagem interativa e o uso de tecnologias imersivas. No entanto, diferentemente da proposta atual, o estudo utilizou RV, o que limita sua acessibilidade, e obteve resultados mistos quanto à relação entre visualização espacial e compreensão conceitual.

No estudo de Santos *et al.* (2024), foi utilizado o aplicativo Sólidos RA como ferramenta para o ensino de transformações geométricas em um ambiente tridimensional. A pesquisa foi realizada com alunos do 9º ano do ensino fundamental e incluiu a aplicação de pré e pós-testes para avaliar a compreensão dos estudantes. A atividade consistiu na construção de uma cena utilizando o módulo de criação do aplicativo. A semelhança com o presente projeto está no foco em transformações espaciais com suporte de RA e no uso de um recurso interativo para promover visualização tridimensional. Contudo, o estudo se limita ao contexto da educação básica, sem contemplar transformações matriciais ou conteúdos específicos de CG.

Tabela 1 – Quadro comparativo das funcionalidades e limitações dos trabalhos relacionados frente à proposta.

Trabalho	Tecnologia	Transformações	Lacuna Identificada
Suselo <i>et al.</i> (2021)	RA móvel com marcador	Translação, Rotação, Escala (separadas)	Ausência de visualização matricial integrada.
Yeh <i>et al.</i> (2023)	RA móvel com marcador	Apenas rotação	Escopo limitado à rotação; não aborda translação nem escala.
Alobaid <i>et al.</i> (2025)	RV imersiva	Translação, Rotação, Escala (separadas)	Tecnologia de menor acessibilidade RV e ausência de correlação matricial explícita.
Santos <i>et al.</i> (2024)	RA móvel com marcador	Translação, Rotação, Escala (separadas)	Foco na Educação Básica; ausência do formalismo matemático exigido no Ensino Superior.
Este Projeto	RA móvel sem marcador	Translação, Rotação, Escala (combinadas)	Dependência de dispositivos compatíveis com RA sem marcador.

Fonte: Elaborado pelo autor.

5 METODOLOGIA

Neste capítulo, detalha-se o percurso metodológico adotado para a construção e verificação da ferramenta de RA proposta. Inicialmente, apresenta-se a classificação da pesquisa, fundamentada nos princípios da Engenharia de Software, seguida pela descrição da arquitetura da solução e das tecnologias empregadas, como o motor gráfico *Unity* e os recursos de desenvolvimento móvel. Na sequência, define-se a estratégia de testes, que prioriza a verificação da robustez técnica e da precisão matemática do artefato em detrimento da validação com usuários finais. Por fim, descrevem-se os procedimentos operacionais, estruturados em quatro fases distintas, que compreendem desde o levantamento de requisitos até a análise comparativa dos resultados obtidos.

5.1 Classificação da Pesquisa

A presente pesquisa classifica-se como de natureza aplicada. O estudo busca solucionar problemas específicos relacionados ao ensino de transformações geométricas tridimensionais por meio do desenvolvimento de uma ferramenta tecnológica. O trabalho gera um produto prático voltado para a superação das dificuldades de abstração identificadas na fundamentação teórica.

Quanto aos objetivos, a investigação define-se como exploratória. O projeto examina a viabilidade técnica da implementação de algoritmos de RA em dispositivos móveis para a visualização de operações matriciais. A construção do protótipo permite maior familiaridade com as limitações de hardware e as exigências de processamento gráfico em tempo real.

A abordagem metodológica segue os princípios da Engenharia de Software e foca na construção e verificação do artefato. A delimitação do escopo fundamenta-se na distinção estabelecida por (Pressman; Maxim, 2016) entre verificação e validação. O trabalho prioriza a garantia da robustez técnica e da precisão matemática do sistema. A verificação da conformidade entre o cálculo algébrico e a resposta visual constitui pré-requisito obrigatório para futuras aplicações pedagógicas com discentes.

5.2 Arquitetura da Solução e Ferramentas

A concepção da arquitetura da solução prioriza a clareza didática e a separação de responsabilidades entre os componentes lógicos e visuais. O desenvolvimento do protótipo

utilizou o motor gráfico *Unity* na versão 6000.0.50f1. A escolha dessa plataforma fundamenta-se na oferta de um ambiente integrado para a criação de aplicações tridimensionais interativas e no suporte nativo à matemática vetorial. O sistema de transformação da *Unity* opera com base em translação, rotação e escala, o que alinha a ferramenta aos conteúdos teóricos de Computação Gráfica abordados no projeto (Unity Technologies, 2026).

A implementação dos recursos imersivos empregou o pacote *AR Foundation* em conjunto com o *SDK ARCore* para dispositivos *Android*. O *AR Foundation* atua como uma camada de abstração entre o motor gráfico e o *hardware* físico. Esta estrutura possibilita a detecção de planos no ambiente real e o posicionamento de objetos virtuais em superfícies físicas sem depender de implementações específicas de cada fabricante. O *ARCore* gerencia o rastreamento de movimento e a compreensão do ambiente no sistema operacional *Android*. A combinação dessas tecnologias garante a portabilidade do código e mantém a lógica didática isolada das especificidades do hardware (Google, 2026).

A linguagem C# estruturou a programação do sistema por ser nativa da *Unity* e oferecer suporte ao paradigma orientado a objetos. A organização do código utiliza classes específicas para encapsular a lógica das transformações geométricas e separa as responsabilidades entre o controle de animação e a interface do usuário. A implementação dispensou o uso de bibliotecas matemáticas externas para garantir o controle sobre a interpretação das matrizes exibidas. O projeto adotou as estruturas nativas da biblioteca *UnityEngine*, como *Vector3* para posições e *Matrix4x4* para a composição de transformações. O uso de métodos nativos assegura a consistência entre o cálculo matemático interno e a visualização espacial apresentada ao aluno (Microsoft, 2026).

A arquitetura de execução divide-se em dois ambientes que compartilham a mesma base de *scripts*. O código opera no dispositivo móvel durante a execução da cena de RA e no ambiente *desktop* durante a depuração. A reutilização de código e a organização de elementos de interface via *prefabs* evitam a duplicação de lógica e facilitam a manutenção. A verificação técnica utilizou um dispositivo móvel Motorola Moto Edge 50 Neo, equipado com processador *MediaTek Dimensity 7300*, 8GB de memória *RAM* e sistema operacional *Android 15*. A especificação do *hardware* assegura a reprodutibilidade dos testes de desempenho em aplicações de RA.

5.3 Estratégia de Testes e Verificação

A garantia da qualidade do artefato desenvolvido fundamenta-se em uma estratégia sistemática de avaliação técnica. Esta pesquisa adota a distinção conceitual estabelecida por (Pressman; Maxim, 2016) entre os processos de verificação e validação. O escopo deste trabalho concentra-se exclusivamente na etapa de verificação. O objetivo consiste em assegurar que o software atende aos requisitos funcionais e que a implementação dos algoritmos reflete corretamente o modelo matemático proposto, premissa anterior à validação com usuários finais.

A execução dos testes segue os princípios definidos por (Myers *et al.*, 2014) para metodologias de teste de software. O estudo emprega uma abordagem híbrida que combina duas categorias distintas de avaliação. A primeira categoria compreende os testes de caixa branca ou estruturais. Essa etapa examina a lógica interna do código-fonte desenvolvido na plataforma *Unity* e inspeciona as variáveis de controle para garantir a precisão dos cálculos das matrizes de transformação.

A segunda categoria abrange os testes de caixa preta ou funcionais. Essa fase avalia o comportamento externo da aplicação sem considerar sua estrutura interna. O foco recai sobre a resposta da interface de RA às interações de entrada e sobre a fidelidade da representação visual dos objetos tridimensionais. A aplicação conjunta desses métodos permite confrontar os resultados numéricos gerados pelo sistema com o retorno visual apresentado na tela.

5.4 Procedimentos Metodológicos

O desenvolvimento do trabalho seguiu uma sequência cronológica dividida em quatro fases principais que abrangem desde o planejamento inicial até a análise dos resultados técnicos. A execução dos procedimentos adotou uma abordagem iterativa e incremental para permitir verificações frequentes das funcionalidades implementadas.

A primeira fase consistiu no levantamento de requisitos funcionais e didáticos. O planejamento definiu a necessidade de suporte às transformações geométricas de translação, rotação e escala no espaço tridimensional. O projeto estabeleceu como prioridade a exibição explícita das matrizes de transformação e a capacidade de realizar composições de operações em diferentes ordens. A definição da arquitetura na plataforma *Unity* separou a cena de execução em RA da cena de depuração em ambiente desktop para garantir a consistência lógica entre os modos de uso.

A segunda fase compreendeu a estruturação do projeto e a implementação da lógica do sistema. O desenvolvimento do código em linguagem C# estabeleceu um componente gerenciador de transformações, responsável por centralizar os cálculos matemáticos e controlar os estados da matriz acumulada. A construção da interface de usuário integrou painéis visuais para exibir os valores numéricos em tempo real e incluiu mecanismos de destaque visual para identificar os elementos ativos da matriz durante cada operação. A lógica do sistema tratou as distinções entre interpretação global e local das transformações para assegurar a coerência pedagógica da ferramenta.

A terceira fase focou na execução dos testes e coleta de evidências. O procedimento utilizou um ambiente controlado para minimizar interferências externas durante a avaliação do artefato. Os testes de caixa branca foram aplicados sobre o método de composição de matrizes garantindo que a conformidade com as regras matemáticas de pré-multiplicação, associada à interpretação global, e de pós-multiplicação, referente à interpretação local, fossem respeitadas. Esses testes oferecem suporte estrutural aos cenários funcionais e visuais descritos nos roteiros experimentais. A execução dos testes de caixa preta observou o comportamento visual dos objetos virtuais e a estabilidade do rastreamento da RA. O processo registrou capturas de tela e dados de saída para cada cenário de teste definido no planejamento.

A quarta e última fase dedicou-se à análise comparativa dos dados. A avaliação confrontou os resultados numéricos gerados pela aplicação com os cálculos manuais previstos na fundamentação teórica. O procedimento verificou a correspondência exata entre a representação algébrica exibida na interface e a modificação espacial aplicada ao objeto tridimensional. A verificação do protótipo dependeu da confirmação da integridade matemática e da fidelidade visual das transformações geométricas apresentadas.

6 DESENVOLVIMENTO E SOLUÇÃO

Este capítulo detalha a implementação técnica do protótipo e descreve as decisões de projeto tomadas para atender aos requisitos de verificação funcional e fidelidade matemática. A construção da solução priorizou a modularidade do código e a separação de responsabilidades entre a lógica de cálculo e a camada de visualização.

6.1 Estrutura Lógica e Componentes Principais

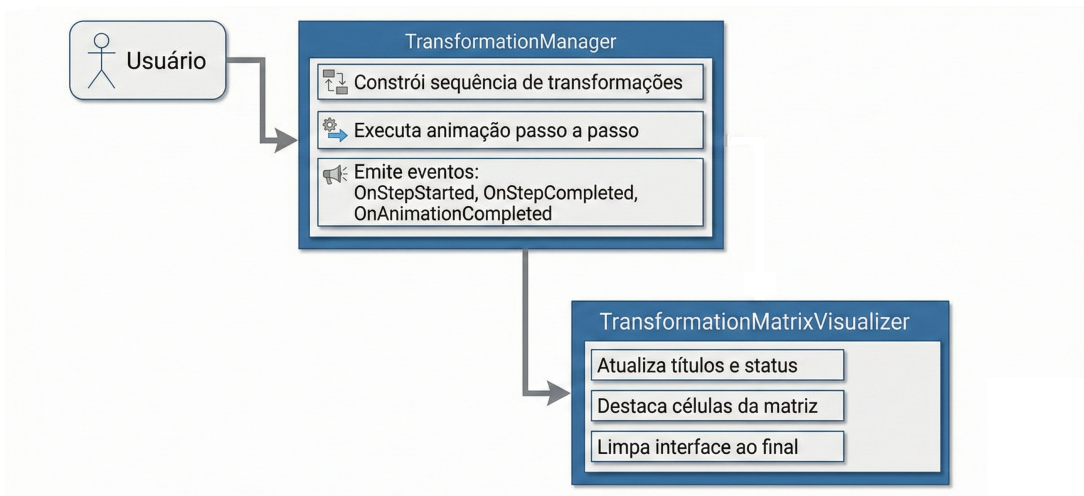
A implementação do protótipo foi organizada em componentes independentes, cada um responsável por uma parte específica do funcionamento da aplicação. O componente central do sistema é o *script TransformationManager*. Esse módulo concentra a lógica matemática das transformações geométricas e o controle da execução das animações do objeto 3D transformado. O *script* realiza a leitura dos valores inseridos pelo usuário, constrói as matrizes de translação, rotação e escala e gerencia a ordem de composição das operações. O *TransformationManager* também controla o modo de interpretação das transformações, permitindo alternar entre os modos de interpretação local e global.

A visualização didática das matrizes é tratada pelo *script TransformationMatrixVisualizer*. Esse componente não altera diretamente o estado do objeto tridimensional. Sua função consiste em exibir, na interface gráfica, as matrizes envolvidas em cada etapa do processo. O *script* apresenta a matriz da transformação atual, a matriz acumulada antes da aplicação da etapa e a matriz resultante após a composição. O *TransformationMatrixVisualizer* também gerencia a coloração e a animação dos valores numéricos, permitindo destacar visualmente quais elementos da matriz são afetados por cada tipo de transformação.

A comunicação entre esses dois componentes ocorre por meio de eventos. O *TransformationManager* emite eventos durante a execução das animações e o *TransformationMatrixVisualizer* reage a esses eventos para atualizar a interface. Essa abordagem evita dependências diretas entre os módulos e mantém a lógica matemática desacoplada da interface gráfica. A Figura 7 apresenta um esquema simplificado da comunicação entre os principais componentes do sistema.

Além desses componentes principais, o sistema utiliza *scripts* fornecidos pelo *AR Foundation* para detecção de planos, posicionamento do conteúdo no ambiente físico e gerenciamento da câmera. Esses módulos não interferem no cálculo das transformações, atuando apenas

Figura 7 – Fluxo de execução: comunicação entre *TransformationManager* e *Visualizer*.



Fonte: Elaborado pelo autor.

como suporte para a visualização em RA.

6.2 Implementação das Transformações Geométricas

O funcionamento matemático do protótipo baseia-se na composição de matrizes homogêneas de dimensão quatro por quatro. A implementação utiliza a estrutura *Matrix4x4* da Unity para representar e multiplicar essas matrizes. O sistema permite ao usuário definir tanto a ordem das transformações quanto o modo de interpretação da composição.

Figura 8 – Interface de entrada de dados e definição de ordem de composição.



Fonte: Elaborado pelo autor.

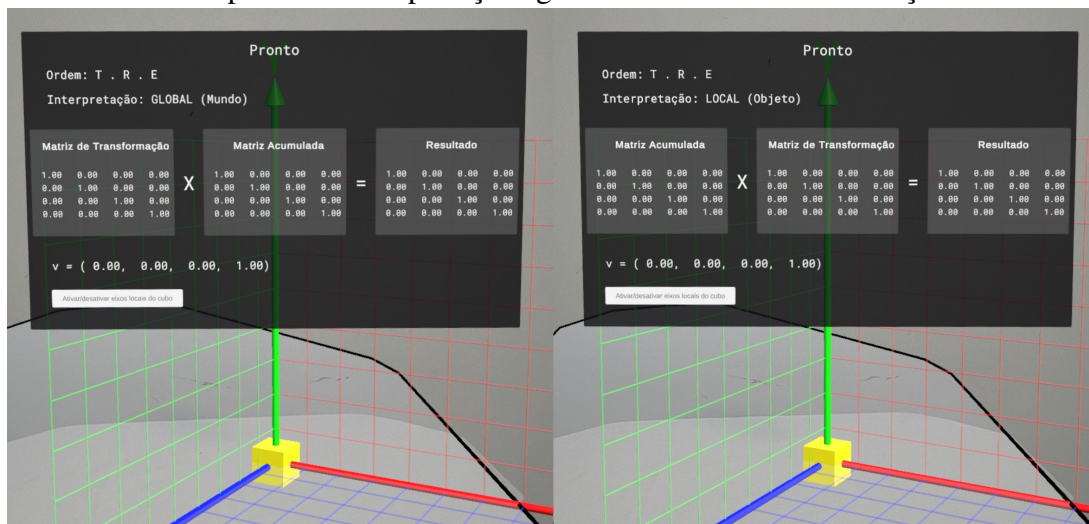
A ordem das transformações é definida pelo usuário por meio da interface gráfica, conforme apresentado na Figura 8. O sistema interpreta essa ordem como uma sequência lógica de etapas, armazenadas internamente para posterior execução.

No modo de interpretação global, as transformações são aplicadas considerando o sistema de coordenadas do mundo, de acordo com a dedução das matrizes individuais de transformação, da direita para a esquerda. Como a notação adotada representa cada transformação como uma matriz multiplicada à esquerda do vértice representado como um vetor coluna, a composição ocorre por meio de pré-multiplicação. Ou seja, a matriz da nova transformação é multiplicada à esquerda da matriz acumulada, mantendo a referência aos eixos globais.

No modo de interpretação local, a animação tem como referência o sistema de coordenadas do próprio objeto. Embora a composição e a ordem das matrizes continue a mesma, analisar cada transformação individual da esquerda para a direita possibilita essa interpretação local. Nesse caso, a composição das matrizes é interpretada por meio de pós-multiplicação. Ou seja, a matriz da nova transformação é multiplicada à direita da matriz acumulada, o que faz com que, na animação, cada operação atue sobre os eixos locais já transformados do objeto.

Para preservar a coerência entre o cálculo matemático e o comportamento visual, o sistema ajusta a ordem de aplicação das etapas durante a execução das animações. A Figura 9 apresenta a diferença visual nos dois casos: ao selecionar a interpretação global no painel, a animação mostra a matriz de cada nova transformação sendo multiplicada à esquerda da matriz acumulada; ao selecionar a interpretação local, a animação mostra a matriz de cada nova transformação sendo multiplicada à direita.

Figura 9 – Painel comparativo: interpretações global e local das transformações.



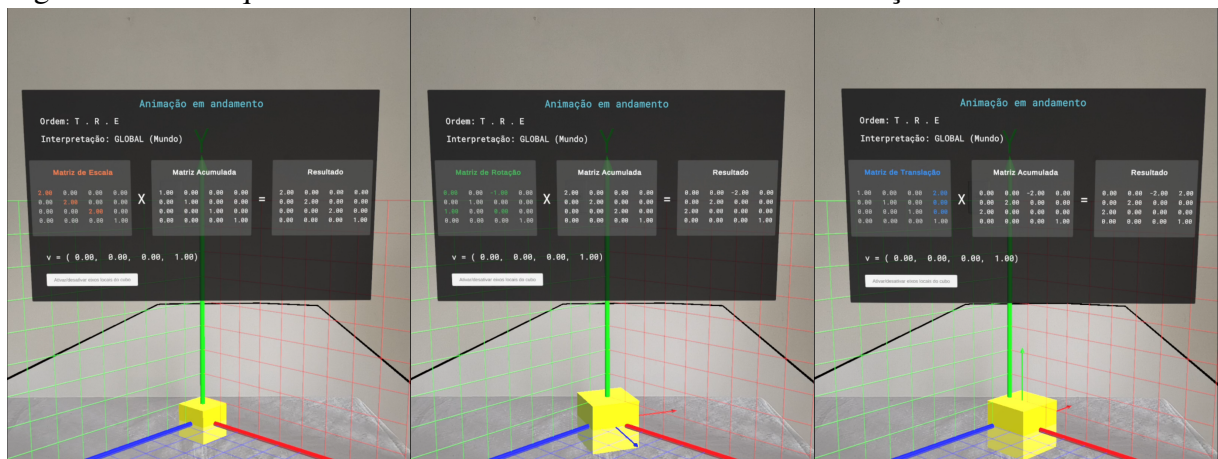
Fonte: Elaborado pelo autor.

6.3 Destaque Visual das Matrizes

O painel de matrizes foi projetado com foco didático. Cada tipo de transformação ativa um conjunto específico de elementos da matriz. Para escalas, o destaque ocorre na diagonal principal da matriz. Para rotações, o sistema destaca os elementos relacionados aos eixos envolvidos na operação. Para translações, o sistema destaca os valores associados à coluna de deslocamento.

Durante a animação, os valores destacados passam por uma interpolação visual que acompanha a transformação aplicada ao objeto tridimensional. Após o término da animação, o sistema remove os destaques e restaura a coloração neutra da matriz. A Figura 10 ilustra esse comportamento durante a execução de uma transformação.

Figura 10 – Destaque visual dos elementos da matriz durante a execução.



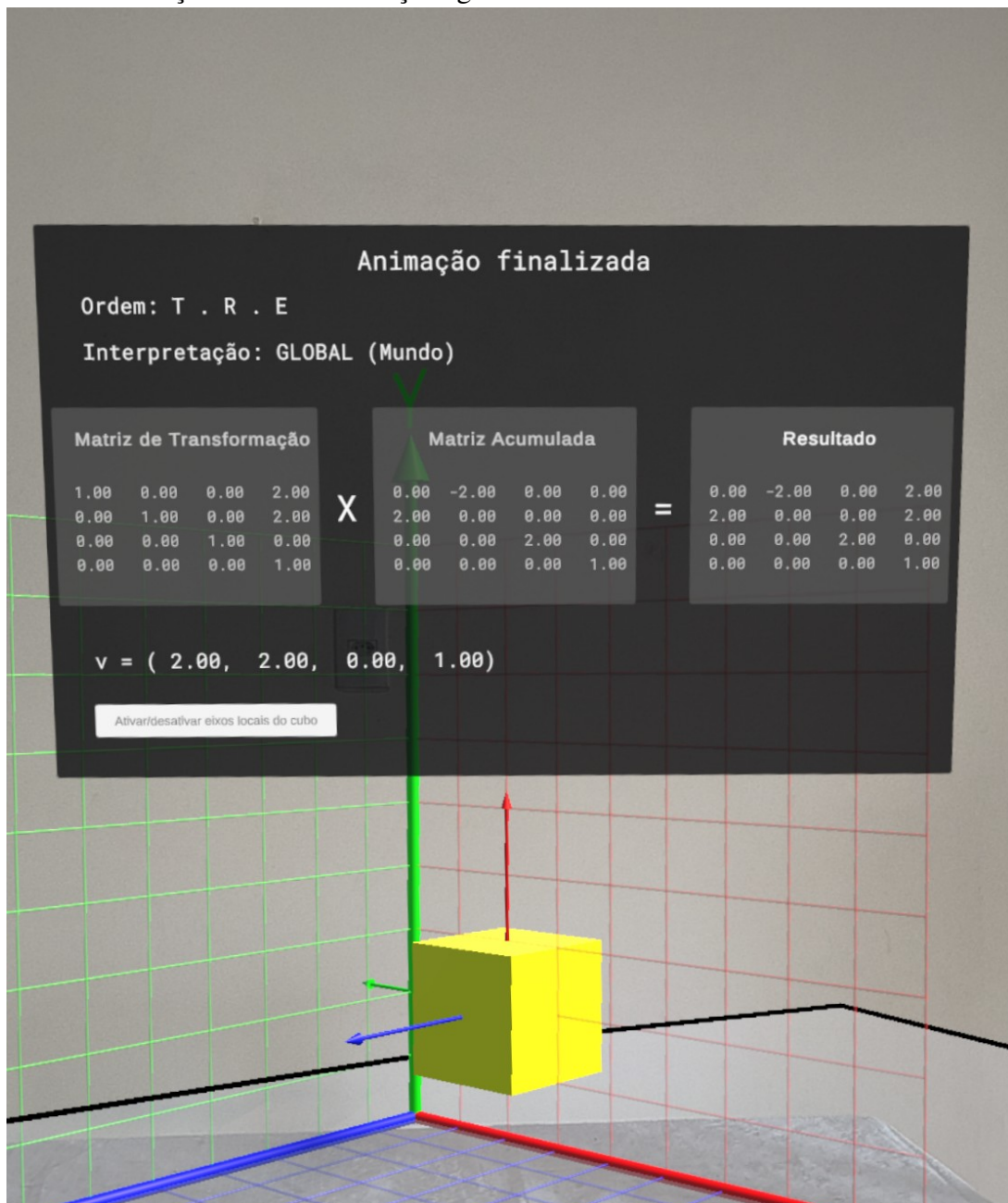
Fonte: Elaborado pelo autor.

6.4 Controle de Execução e Sincronização da Interface

O controle temporal das animações é implementado com o uso de corrotinas. O sistema utiliza uma corrotina principal para executar a sequência de transformações passo a passo. Essa abordagem permite pausar e retomar a animação.

Durante a execução, o *TransformationManager* emite eventos indicando o início e o término de cada etapa, bem como o encerramento da animação completa. O *TransformationMatrixVisualizer* escuta esses eventos e atualiza a interface gráfica de forma sincronizada. A Figura 11 apresenta um momento da execução finalizada do objeto no ambiente de Realidade Aumentada.

Figura 11 – Animação das transformações geométricas no ambiente de RA.



Fonte: Elaborado pelo autor.

6.4.1 Teste de Caixa Branca da Composição de Matrizes

Para complementar a verificação funcional do protótipo, foi implementado um teste de caixa branca com o uso do *Unity Test Framework*. Esse tipo de teste avalia diretamente a lógica interna do código, permitindo verificar se as regras matemáticas de composição de matrizes foram implementadas conforme o modelo teórico adotado.

O teste foi direcionado ao método responsável pela composição das matrizes de transformação no componente *TransformationManager*. Esse método, denominado *Compose*,

realiza a multiplicação entre a matriz acumulada e a matriz da etapa corrente, variando a ordem da multiplicação conforme o modo de interpretação selecionado pelo usuário.

No modo de interpretação global, o sistema aplica a pré-multiplicação, onde a nova transformação é multiplicada à esquerda da matriz acumulada, mantendo a referência aos eixos globais do mundo. No modo de interpretação local, o sistema aplica a pós-multiplicação, onde a nova transformação é multiplicada à direita da matriz atual. Essa operação usa como referência os eixos locais do objeto.

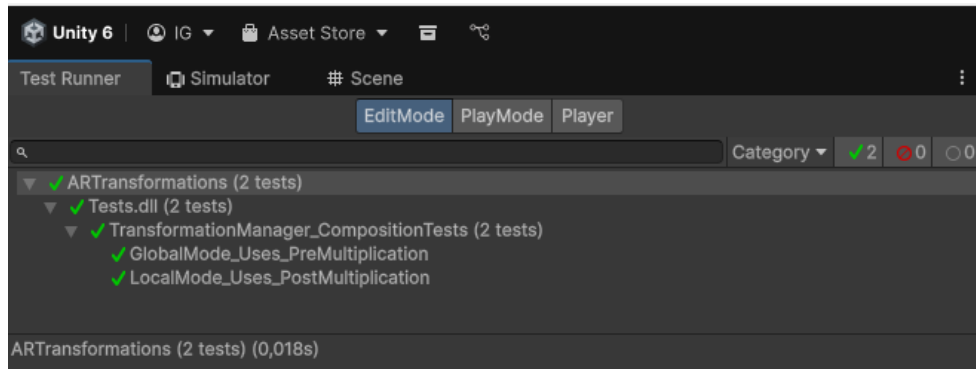
O teste foi implementado criando uma instância do componente *TransformationManager* em um objeto de cena isolado. Em seguida, foram definidas manualmente duas matrizes conhecidas, uma representando o estado atual e outra representando a transformação a ser aplicada. O método *Compose* foi invocado por meio de reflexão, uma vez que ele não possui visibilidade pública.

No primeiro cenário de teste, o modo de interpretação foi configurado como global. O resultado da composição foi comparado com o produto matricial obtido pela multiplicação *step * current*. No segundo cenário, o modo de interpretação foi configurado como local e o resultado foi comparado com o produto *current * step*. Para a validação dos dados, é importante ressaltar que o protótipo utiliza a estrutura *Matrix4x4* da *Unity*, baseada em números de ponto flutuante de 32 bits (*float*). Embora não haja uma tolerância numérica global definida durante a execução da aplicação, onde as transformações são aplicadas assumindo a precisão padrão do tipo, os testes automatizados adotaram uma tolerância explícita. Os valores foram comparados considerando um erro máximo permitido de 10^{-5} , margem suficiente para absorver as imprecisões inerentes à aritmética de ponto flutuante sem comprometer a verificação da lógica algorítmica.

A aprovação dos testes confirma que o algoritmo de composição implementado no protótipo respeita corretamente as regras matemáticas associadas às interpretações global e local. Dessa forma, o comportamento interno do sistema permanece coerente com a teoria de transformações geométricas utilizada como base para o desenvolvimento da aplicação. A Figura 12 apresenta a execução bem-sucedida dos testes automatizados no ambiente da *Unity*.

O protótipo desenvolvido apresenta uma arquitetura organizada, com separação clara entre cálculo matemático, controle de execução e visualização. O sistema permite explorar diferentes ordens de transformação e modos de interpretação, mantendo coerência entre os resultados numéricos e o comportamento visual. A utilização de eventos, corrotinas e testes automatizados assegura a consistência do funcionamento e contribui para a clareza didática da

Figura 12 – Execução dos testes de caixa branca com *Unity Test Framework*.



Fonte: Elaborado pelo autor.

solução proposta.

7 RESULTADOS

Este capítulo apresenta os dados obtidos durante a execução dos testes funcionais do protótipo. A verificação técnica avaliou a conformidade entre os requisitos do sistema e o comportamento observado na aplicação. Os resultados estão organizados em três categorias que correspondem à estabilidade do rastreamento espacial, à precisão das transformações básicas e à verificação da lógica de composição matricial em interpretações global e local.

7.1 Estabilidade do Ambiente de Realidade Aumentada

A primeira etapa verificou a integração entre os objetos virtuais e o espaço físico. Os cenários avaliaram a capacidade do sistema em detectar superfícies e manter a coerência espacial dos hologramas.

O teste de detecção de plano horizontal identificou superfícies texturizadas e renderizou a malha de rastreamento dentro do tempo previsto. A funcionalidade de instanciação posicionou o objeto tridimensional nas coordenadas exatas do toque na tela com escala unitária e rotação nula. A avaliação da estabilidade do rastreamento indicou que o objeto permaneceu fixo nas coordenadas do mundo real durante a movimentação da câmera em 360 graus, sem apresentar desvio significativo de posição. A Tabela 2 apresenta os dados coletados.

Tabela 2 – Resultados dos testes de inicialização e rastreamento.

ID	Cenário	Resultado Esperado	Resultado Obtido	Estado
AR-01	Detecção de Plano	Identificar planos e exibir malha	Planos identificados e malha renderizada	Sucesso
AR-02	Instanciação	Objeto na posição do toque	Objeto posicionado na origem do toque	Sucesso
AR-03	Estabilidade	Objeto fixo ao mover a câmera	Posição mantida sem desvios visuais	Sucesso

Fonte: Elaborado pelo autor.

7.2 Verificação das Transformações Básicas

A segunda etapa verificou a correspondência entre a álgebra matricial e a representação visual para as operações isoladas de translação, rotação e escala. A inspeção comparou os valores numéricos exibidos no painel de depuração com o comportamento espacial do objeto

tridimensional.

A aplicação de translação no eixo X deslocou o objeto lateralmente e atualizou a quarta coluna da matriz de transformação. A operação de escala uniforme modificou as dimensões do modelo e alterou os valores da diagonal principal da matriz. A rotação aplicada em torno do eixo Y reorientou a face do objeto e atualizou os componentes de seno e cosseno nas posições previstas pela álgebra linear. A atualização da interface ocorreu em tempo real e de forma sincronizada com a renderização tridimensional. A Tabela 3 detalha essa verificação.

Tabela 3 – Resultados das transformações afins básicas.

ID	Cenário	Entrada	Verificação Lógica	Verificação Visual	Estado
TF-01	Translação no Eixo X	$T(2,0,0)$	Coluna 4 alterada para $(2,0,0,1)$	Deslocamento do objeto em 2 unidades à direita em relação à origem	Sucesso
TF-02	Escala uniforme	Uni- $E(2,2,2)$	Diagonal principal com valor 2	O objeto dobrou de tamanho visualmente	Sucesso
TF-03	Rotação no Eixo Y	$R_y(90^\circ)$	Matriz de rotação com $\cos(90) = 0$ e $\sin(90) = 1$	O objeto girou 90 graus. A face anterior ficou oculta e a lateral visível.	Sucesso

Fonte: Elaborado pelo autor.

7.3 Verificação da Lógica de Composição

A etapa final avaliou o algoritmo de composição de transformações e os efeitos da ordem de multiplicação das matrizes. Os cenários cobriram as interpretações global e local para demonstrar as diferenças visuais resultantes da não comutatividade das operações.

7.3.1 Interpretação Global

Os testes em modo de interpretação global avaliaram a aplicação da pré-multiplicação matricial, onde as transformações ocorrem em relação aos eixos fixos do mundo. A execução da rotação após a translação gerou o movimento orbital do objeto em torno da origem. A translação aplicada após a rotação seguiu o eixo original do mundo, sem sofrer influência da orientação do objeto. A aplicação de escala após a translação ampliou o vetor de posição e afastou o objeto da origem. A Tabela 4 resume os dados obtidos.

Tabela 4 – Resultados das transformações compostas (Interpretação Global).

ID	Sequência	Verificação Lógica	Verificação Visual	Estado
TC-G1	$T(2, 0, 0) \rightarrow R_y(90^\circ)$	Matriz final $R \cdot T$	Movimento orbital em torno da origem; posição final alterada para $(0, 0, -2)$	Sucesso
TC-G2	$R_y(90^\circ) \rightarrow T(2, 0, 0)$	Matriz final $T \cdot R$	Rotação no eixo Y seguida de translação alinhada ao eixo X global (para $X = 2$)	Sucesso
TC-G3	$T(2, 0, 0) \rightarrow E(2, 2, 2)$	Matriz final $E \cdot T$	Ampliação da geometria e do vetor de posição (objeto afastado para $X = 4$)	Sucesso
TC-G4	$E(2, 2, 2) \rightarrow T(2, 0, 0)$	Matriz final $T \cdot E$	Ampliação na origem seguida de translação para $X = 2$ (posição não afetada pela escala)	Sucesso
TC-G5	$E \rightarrow R \rightarrow T$	Matriz final $T \cdot R \cdot E$	Operações sequenciais respeitando eixos globais; translação final alinhada ao grid global	Sucesso

Fonte: Elaborado pelo autor.

7.3.2 Interpretação Local

Os testes em modo de interpretação local avaliaram a aplicação da pós-multiplicação matricial, onde as transformações ocorrem em relação aos eixos do próprio objeto. A rotação após a translação resultou no giro do objeto em torno de seu próprio centro na nova posição. A translação após a rotação seguiu a nova orientação do eixo local do objeto. A translação aplicada após a escala desloca o dobro, devido ao espaço ampliado. A Tabela 5 apresenta os resultados.

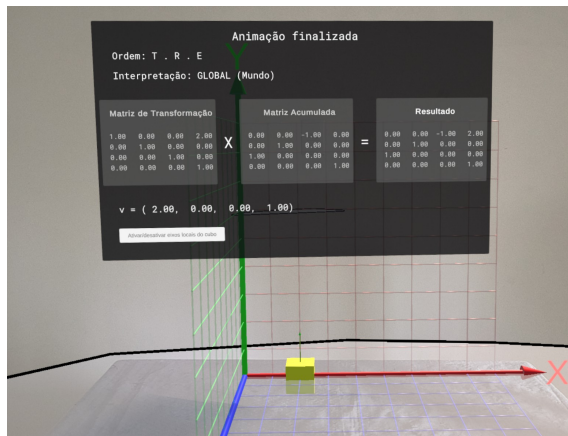
A Figura 13 ilustra a divergência visual obtida em testes de composição usando as mesmas transformações, mas aplicadas em ordens diferentes. Na imagem à esquerda (a), referente ao cenário TC-G2, a translação ocorre no eixo global fixo após a rotação. Na imagem à direita (b), referente ao cenário TC-L2, embora animada de acordo com o modo de interpretação local, ainda permite uma interpretação global em que uma rotação em torno do eixo global é que ocorre após a translação, resultando em um movimento orbital. Note que o que influenciou

Tabela 5 – Resultados das transformações compostas (Interpretação Local).

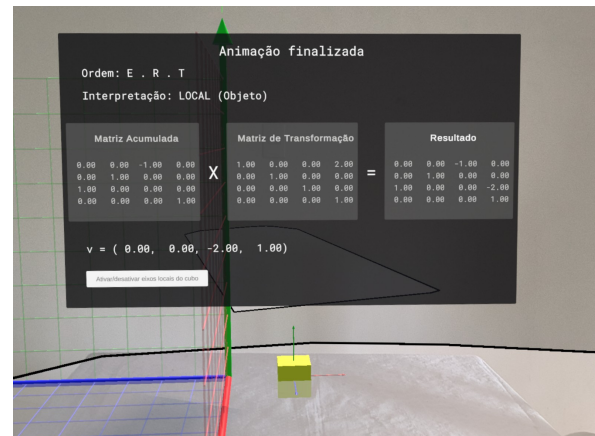
ID	Sequência	Verificação Lógica	Verificação Visual	Estado
TC-L1	$T(2,0,0) \rightarrow R_y(90^\circ)$	Matriz final $T \cdot R$	Deslocamento seguido de rotação em torno do pivô local (centro do objeto)	Sucesso
TC-L2	$R_y(90^\circ) \rightarrow T(2,0,0)$	Matriz final $R \cdot T$	Translação ocorre na direção do novo eixo X local (orientado pela rotação prévia, agora alinhado com o eixo Z global negativo)	Sucesso
TC-L3	$T(2,0,0) \rightarrow E(2,2,2)$	Matriz final $T \cdot E$	Deslocamento seguido de escala relativa ao centro do objeto	Sucesso
TC-L4	$E(2,2,2) \rightarrow T(2,0,0)$	Matriz final $E \cdot T$	Deslocamento de 2 unidades lógicas corresponde a 4 unidades visuais (espaço escalado)	Sucesso
TC-L5	$T_1 \rightarrow R \rightarrow T_2$	Matriz final $T_1 \cdot R \cdot T_2$	Navegação relativa: avanço, giro local e novo avanço na direção frontal atualizada	Sucesso

Fonte: Elaborado pelo autor.

a diferença entre os resultados finais foi a diferença das ordens usadas nos dois casos, e não a diferença dos modos de interpretação.



(a) Ordem T.R (TC-G2).



(b) Ordem R.T (TC-L2).

Figura 13 – Comparativo visual entre as mesmas transformações aplicadas em ordens diferentes.

Fonte: Elaborado pelo autor.

7.4 Análise e Discussão dos Resultados

Esta seção interpreta os dados obtidos nos testes funcionais a partir de um critério de verificação lógico-visual, no qual cada transformação aplicada foi analisada simultaneamente por sua representação algébrica matricial e por seu efeito espacial observável na cena tridimensional. Essa abordagem permitiu verificar a correspondência entre o modelo matemático implementado e o comportamento computacional do sistema. A análise estabelece conexões entre os resultados experimentais, o referencial teórico de transformações geométricas e os objetivos específicos definidos neste trabalho, concentrando-se na verificação da estabilidade do sistema, na precisão da correspondência algébrico-visual e na correta implementação da lógica de composição matricial.

7.4.1 Análise da Estabilidade e Integração com o Espaço Físico

Os resultados apresentados na Tabela 2 verificam o cumprimento do objetivo específico de integrar objetos virtuais ao espaço físico via rastreamento de planos. A estabilidade demonstrada nos cenários AR-01 a AR-03 indica que a utilização do *AR Foundation* proveu a robustez necessária para manter a coerência da cena.

Não foram observadas flutuações (*drift*) perceptíveis nem perdas de ancoragem durante os testes realizados, indicando comportamento satisfatório do sistema nas condições avaliadas. A detecção consistente de planos e a estabilidade do rastreamento confirmam que a infraestrutura adotada é adequada para sustentar operações geométricas subsequentes, reduzindo interferências técnicas que poderiam comprometer a interpretação dos conceitos matemáticos apresentados ao usuário.

7.4.2 Correspondência entre Álgebra Matricial e Representação Visual

A análise dos dados da Tabela 3 evidencia a integridade do motor de cálculo desenvolvido. Os testes TF-01 a TF-03 demonstram uma relação isomórfica entre o estado interno da aplicação (matrizes) e a saída gráfica renderizada.

No cenário de translação (TF-01), a alteração exclusiva da quarta coluna da matriz reflete a teoria de coordenadas homogêneas, onde o vetor de deslocamento não interfere na transformação linear da base (rotação e escala). Já no cenário de rotação (TF-03), a atualização correta dos termos de seno e cosseno verifica a implementação dos cálculos trigonométricos e a conversão correta de graus para radianos internamente.

Essa sincronia confirma que a ferramenta atua como um tradutor confiável entre a linguagem algébrica abstrata e a geometria euclidiana visível, em conformidade com os princípios clássicos da Computação Gráfica, nos quais transformações afins são expressas por matrizes homogêneas não comutativas. Para o ensino de Computação Gráfica, essa confiabilidade técnica é indispensável, pois garante que o estudante visualize com precisão os efeitos descritos pela matemática, minimizando ruídos pedagógicos decorrentes de inconsistências entre cálculo e renderização.

7.4.3 Análise da Composição e Não Comutatividade

Os resultados das transformações compostas, apresentados nas Tabelas 4 e 5, constituem o achado mais relevante do processo de verificação, pois evidenciam empiricamente os efeitos da ordem de multiplicação matricial. A comparação entre diferentes ordens materializa o conceito abstrato da não comutatividade das transformações geométricas, permitindo observar como a escolha da ordem impacta diretamente o resultado final do objeto renderizado.

A divergência observada entre os cenários TC-G2 (Global) e TC-L2 (Local), ilustrada na Figura 13, merece destaque. Na interpretação global, a pré-multiplicação da matriz de translação pela de rotação mantém o deslocamento alinhado aos eixos do mundo. Isso ocorre porque, algebricamente, a transformação atua sobre o vetor de posição já existente no espaço global. Esse comportamento explica o “efeito orbital” observado no teste TC-G1, onde a rotação do sistema de coordenadas arrasta consigo a posição do objeto.

Em contrapartida, a interpretação local utiliza a pós-multiplicação, acumulando transformações à direita da matriz corrente. Os dados do teste TC-L2 confirmam que, nesse modo, o sistema de coordenadas “viaja” com o objeto. A translação subsequente respeita a orientação definida pela rotação anterior, simulando o comportamento de um observador solidário ao objeto.

Essa distinção técnica comprova que o algoritmo de composição implementado manipula corretamente a hierarquia das operações, respeitando os fundamentos da álgebra linear aplicada à Computação Gráfica. O sistema não apenas executa as transformações, mas explicita visualmente a diferença entre operar em um referencial inercial, associado ao espaço global, e em um referencial móvel, relacionado ao objeto. Essa característica verifica a hipótese de que a visualização interativa favorece a compreensão de propriedades matemáticas que frequentemente não são percebidas na manipulação exclusivamente simbólica das matrizes.

7.4.4 Síntese da Verificação Técnica

A consolidação dos testes de rastreamento, transformações básicas e operações compostas indica que o protótipo atingiu a maturidade técnica necessária para aplicação em contextos didáticos. O sistema apresentou comportamento determinístico em todos os cenários avaliados, mantendo consistência entre os dados de entrada, o processamento matricial e o *feedback* visual. Ressalta-se que a verificação concentrou-se em transformações afins, não abrangendo deformações não lineares ou simulações físicas. Ainda assim, os resultados confirmam que a ferramenta é capaz de representar fielmente os conceitos fundamentais de transformações geométricas tridimensionais, atendendo integralmente ao objetivo geral proposto e evidenciando seu potencial como mediadora entre abstração matemática e percepção espacial.

8 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

O presente trabalho dedicou-se ao desenvolvimento e à verificação técnica de uma aplicação de Realidade Aumentada voltada ao ensino de transformações geométricas tridimensionais. A pesquisa buscou estabelecer uma correspondência precisa entre a álgebra matricial e a representação visual das operações de translação, rotação e escala. O objetivo central consistiu em entregar um artefato de software verificado funcionalmente capaz de demonstrar conceitos matemáticos abstratos por meio da manipulação interativa de objetos virtuais no espaço físico.

Os resultados obtidos confirmam que o protótipo atendeu aos requisitos de estabilidade e precisão matemática estabelecidos. Os testes de rastreamento demonstraram que a integração entre elementos virtuais e o ambiente real ocorreu de forma consistente e sem flutuações que comprometessem a experiência. A verificação das transformações básicas evidenciou a correta implementação dos cálculos algébricos e sua tradução imediata para a renderização gráfica. A análise das transformações compostas permitiu visualizar os efeitos da não comutatividade na multiplicação de matrizes e reforçou a coerência do algoritmo implementado diante de diferentes ordens de operação. Comprovou-se também a capacidade do sistema em diferenciar as interpretações global e local durante as animações.

A principal contribuição deste estudo reside na entrega de uma ferramenta tecnológica com confiabilidade matemática assegurada para o contexto educacional. A pesquisa oferece um recurso que ultrapassa a visualização estática e permite a exploração dinâmica de conceitos de álgebra linear aplicados à Computação Gráfica. A implementação da visualização matricial em tempo real fornece um meio concreto para que estudantes relacionem as equações teóricas com seus efeitos espaciais e compreendam a lógica subjacente à construção de ambientes virtuais.

O desenvolvimento da pesquisa encontrou limitações que devem ser consideradas. O protótipo não foi submetido a estudos formais de usabilidade ou avaliação pedagógica com estudantes. A avaliação restringiu-se à correção matemática das transformações e à consistência entre os resultados numéricos e visuais. Avaliações empíricas com usuários reais permanecem como uma lacuna do presente trabalho. Outra limitação refere-se à dependência do sistema de coordenadas adotado pelo motor gráfico Unity. A implementação exigiu a conversão entre o sistema da ferramenta e o modelo matemático tradicional utilizado em computação gráfica. O eixo Z apresenta orientação oposta e demanda inversão de sinal em determinadas operações. Essa adaptação adiciona uma camada de abstração que pode dificultar a generalização direta da solução para outros motores gráficos.

Trabalhos futuros podem expandir o alcance desta pesquisa por meio de novas abordagens. A realização de estudos com estudantes de computação gráfica permitiria avaliar o impacto do uso do protótipo no processo de aprendizagem ao comparar abordagens tradicionais e interativas baseadas em realidade aumentada. Outra possibilidade envolve a incorporação de elementos de gamificação ao protótipo desenvolvido com o objetivo de tornar a interação mais didática. A proposta consiste na introdução de desafios estruturados organizados em fases nos quais o usuário deve aplicar uma sequência de transformações geométricas para atingir um estado alvo previamente definido. O sistema poderia apresentar uma representação visual do objetivo final como uma silhueta do objeto no espaço tridimensional. O usuário utilizaria os mecanismos disponíveis para realizar translações, rotações e escalas até que o objeto coincidissem com a configuração desejada. A verificação do resultado ocorreria por meio da comparação entre a matriz de transformação final e a matriz associada ao objetivo.

Conclui-se que a aplicação desenvolvida atingiu a maturidade técnica necessária para atuar como instrumento de apoio ao ensino de Computação Gráfica. A garantia de correspondência exata entre o formalismo matemático e o retorno visual estabelece uma base sólida para que a tecnologia de Realidade Aumentada auxilie na superação das dificuldades de abstração espacial enfrentadas por estudantes da área.

REFERÊNCIAS

- AGUILAR, S. D.; BURTE, H.; YASSKIN, P.; LIEW, J.; YEH, S.-H.; QIAN, C.; SONG, D.; MONJOREE, U.; YAN, W. Ar-classroom: Usability of ar educational technology for learning rotations using three-dimensional matrix algebra. In: **2023 IEEE Frontiers in Education Conference (FIE)**. [S. l.: s. n.], 2023. p. 1–8.
- ALOBALID, M.; YOUNG, G.; MANZKE, M. Immersive virtual reality for developing spatial skills in learning 3d transformations in computer graphics. In: ANJOS, R. Kuffner dos; ECHAVARRIA, K. R. (Ed.). **Eurographics 2025 - Education Papers**. [S. l.]: The Eurographics Association, 2025.
- ANGEL, E.; SHREINER, D. **Interactive Computer Graphics: A top-down approach with WebGL**. 7. ed. Boston: Pearson, 2015.
- ARAÚJO, F. C. d.; NASCIMENTO, R. A. d.; II, O. R. d. A.; MARTINS, F. B. d. S.; MULLER, D. C. d. O.; CARVALHO, J. C. N.; SANTOS, F. N. C.; FREIRE, E. d. N.; FRANÇA, W. L. d.; LIMA, I. J. d.; TORRES, G. F.; SANTOS, I. P. d.; SOUZA, F. J. B. d.; FREITAS, F. A. d.; NETO, L. E. P. T. Tecnologias interativas no ensino de matemática: um estudo de caso com realidade aumentada na educação básica. **Cuadernos de Educación y Desarrollo**, v. 16, n. 13, p. e6807, 2024. Disponível em: <https://ojs.cuadernoseducacion.com/ojs/index.php/ced/article/view/6807>.
- AZUMA, R. T. A survey of augmented reality. **Presence: Teleoperators & Virtual Environments**, v. 6, n. 4, p. 355–385, 1997.
- FERNÁNDEZ, S.; CAJARAVILLE, M. P.; GODINO, J. D. Configuraciones epistémicas y cognitivas en tareas de visualización y razonamiento espacial. **Revista EMA – Educação Matemática Argumentada**, v. 12, n. 1, p. 43–65, 2007.
- Google. **ARCore Developer Documentation**. [S. l.], 2026. Disponível em: <https://developers.google.com/ar>. Acesso em: 02 set. 2025.
- HEARN, D. D.; BAKER, M. P.; CARITHERS, W. R. **Computer Graphics with OpenGL**. 4. ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson, 2011.
- MANSSOUR, I. H.; COHEN, M. Introdução à computação gráfica. **Revista de Informática Teórica e Aplicada – RITA**, v. 13, n. 2, p. 1–22, 2006.
- Microsoft. **C# Documentation**. [S. l.], 2026. Disponível em: <https://learn.microsoft.com/en-us/dotnet/csharp/>. Acesso em: 02 set. 2025.
- MILGRAM, P.; KISHINO, F. A taxonomy of mixed reality visual displays. **IEICE Trans. Information Systems**, vol. E77-D, no. 12, p. 1321–1329, 1994.
- MONJOREE, U.; AGUILAR, S. D.; QIAN, C.; HUYCK, C. V.; YEH, S.-H.; TRANBARGER, P.; DUANE-TESSIER, L.; SOLITARE-RENALDO, L.; BURTE, H.; YASSKIN, P.; LIEW, J.; SONG, D.; QUEK, F.; YAN, W. Ar-classroom: Integrating conversational artificial intelligence with augmented reality technology for learning spatial transformations and their matrix representation. In: **2024 IEEE Frontiers in Education Conference (FIE)**. [S. l.: s. n.], 2024. p. 1–8.
- MYERS, G. J.; SANDLER, C.; BADGETT, T. **The Art of Software Testing**. 3. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2014.

NISHINO, H.; SUEYASU, S.; KAGAWA, T.; UTSUMIYA, K. A cg learning tool with guided programming environment. In: **2011 14th International Conference on Network-Based Information Systems**. [S. l.: s. n.], 2011. p. 462–467.

PRESSMAN, R. S.; MAXIM, B. R. **Engenharia de Software**: Uma abordagem profissional. 8. ed. Porto Alegre: AMGH, 2016.

SANTIAGO, P. V. d. S.; SANTANA, J. R. Proposta para o ensino de geometria: sólidos no geogebra. **Debates em Educação**, v. 16, n. 38, p. e15862, 2024. Disponível em: <https://ufal.emnuvens.com.br/debateseducacao/article/view/15862>.

SANTOS, E. N. d. L.; LOPES, M. K. S.; LIMA, E. M. a. Transformações geométricas no espaço: uma aplicação interativa para aprender geometria com a construção de uma cena no app sólidos ra. **Journal of Media Critiques**, v. 10, n. 26, p. 1–20, 2024.

SHREINER, D.; SELLERS, G.; KESSENICH, J.; LICEA-KANE, B. **OpenGL Programming Guide**: The official guide to learning opengl, version 4.3. 8. ed. Boston, MA: Addison-Wesley, 2013.

SOARES, L. G. O campo da visualização matemática no ensino e aprendizagem da matemática. In: **Anais do VII Congresso Nacional de Educação (CONEDU) – Edição Online**. Campina Grande: Realize Editora, 2020. Disponível em: <https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/68940>.

SUSELO, T.; WÜNSCHE, B.; LUXTON-REILLY, A. The journey to improve teaching computer graphics: A systematic review. In: **International Conference on Computers in Education**. [S. n.], 2017. Disponível em: <https://library.apsce.net/index.php/ICCE/article/view/2269>.

SUSELO, T.; WÜNSCHE, B. C.; LUXTON-REILLY, A. Using mobile augmented reality for teaching 3d transformations. In: **Proceedings of the 52nd ACM Technical Symposium on Computer Science Education**. New York: Association for Computing Machinery, 2021. p. 872–878.

SUSELO, T.; WÜNSCHE, B. C.; LUXTON-REILLY, A. Teaching and learning 3d transformations in introductory computer graphics: A user study. In: **Proceedings of the 17th International Joint Conference on Computer Vision, Imaging and Computer Graphics Theory and Applications (VISIGRAPP 2022) - GRAPP**. [S. l.]: SciTePress, 2022. p. 126–135.

SUSELO, T.; WÜNSCHE, B. C.; LUXTON-REILLY, A. Why are 3d transformations in computer graphics difficult? an analysis of a decade of exam questions. In: **Proceedings of the 24th Australasian Computing Education Conference**. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2022. p. 181–190.

SYED, T. A.; SIDDIQUI, M. S.; ABDULLAH, H. B.; JAN, S.; NAMOUN, A.; ALZHRANI, A.; NADEEM, A.; ALKHODRE, A. B. In-depth review of augmented reality: Tracking technologies, development tools, ar displays, collaborative ar, and security concerns. **Sensors**, v. 23, n. 1, p. 146, 2023.

Unity Technologies. **Unity User Manual 6000.0**. [S. l.], 2026. Disponível em: <https://docs.unity3d.com/6000.0/Documentation/Manual/index.html>. Acesso em: 02 set. 2025.

XU, W.; SU, C.-Y.; HU, Y.; CHEN, C.-H. Exploring the effectiveness and moderators of augmented reality on science learning: a meta-analysis. **Journal of Science Education and Technology**, v. 31, 2022.

YEH, S.-H.; QIAN, C.; SONG, D.; AGUILAR, S. D.; BURTE, H.; YASSKIN, P.; ASHOUR, Z.; SHAGHAGHIAN, Z.; MONJOREE, U.; YAN, W. Ar-classroom: Augmented reality technology for learning 3d spatial transformations and their matrix representation. In: **2023 IEEE Frontiers in Education Conference (FIE)**. [S. l.: s. n.], 2023. p. 1–8.

APÊNDICE A – ACESSO AO REPOSITÓRIO DIGITAL

O código-fonte completo da aplicação desenvolvida, incluindo os *scripts* de controle, *assets* gráficos, configurações de cena do *Unity* e documentação técnica complementar, encontra-se hospedado publicamente para consulta, replicação e validação futura.

O projeto está versionado através do sistema *Git* e pode ser acessado no seguinte endereço eletrônico:

URL de acesso: <https://github.com/IgrGabriel/AR-Transformacoes-Tridimensionais-TCC>

APÊNDICE B – SCRIPT DE TESTES DE UNIDADE (VERIFICAÇÃO MATEMÁTICA)

Este apêndice apresenta o código-fonte integral do arquivo *TransformationManager_CompositionTests.cs*. Este conjunto de testes automatizados utiliza o *framework* NUnit para validar a lógica de composição de matrizes implementada no sistema.

O objetivo principal destes testes é assegurar a precisão das operações de pré-multiplicação (sistema global) e pós-multiplicação (sistema local), considerando as tolerâncias de ponto flutuante necessárias para cálculos geométricos em 3D. Destaca-se o uso de *Reflection* para validar métodos privados críticos da classe gerenciadora.

Código-fonte 1 – Teste de Composição de Matrizes (TransformationManager_CompositionTests.cs)

```

1 using NUnit.Framework;
2 using UnityEngine;
3 using System.Reflection;
4
5 public class TransformationManager_CompositionTests
6 {
7     /// <summary>
8     /// Verifica se o modo LOCAL utiliza p s -multiplica o
9     /// </summary>
10    [Test]
11    public void LocalMode_Uses_PostMultiplication()
12    {
13        // Arrange
14        var go = new GameObject("TM_Test");
15        var tm = go.AddComponent<TransformationManager>();
16
17        tm.transformSpaceMode =
18            TransformationManager.TransformSpaceMode.Local;
19
20        Matrix4x4 current = Matrix4x4.Translate(new Vector3(1, 0,
21            0));
22        Matrix4x4 step = Matrix4x4.Scale(new Vector3(2, 2, 2));

```

```

22     // Act
23     // Invoca o m todo privado via Reflection para teste isolado
24     Matrix4x4 result = InvokeCompose(tm, current, step);
25
26     // Assert
27     Matrix4x4 expected = current * step;
28     AssertMatrixApproximatelyEqual(expected, result);
29 }
30
31 /// <summary>
32 /// Verifica se o modo GLOBAL utiliza pr -multiplica o (Step
33     * Current).
34 /// </summary>
35 [Test]
36 public void GlobalMode_Uses_PreMultiplication()
37 {
38     // Arrange
39     var go = new GameObject("TM_Test");
40     var tm = go.AddComponent<TransformationManager>();
41
42     tm.transformSpaceMode =
43         TransformationManager.TransformSpaceMode.Global;
44
45     Matrix4x4 current = Matrix4x4.Translate(new Vector3(1, 0,
46         0));
47     Matrix4x4 step = Matrix4x4.Scale(new Vector3(2, 2, 2));
48
49     // Act
50     Matrix4x4 result = InvokeCompose(tm, current, step);
51
52     // Assert
53     Matrix4x4 expected = step * current;
54     AssertMatrixApproximatelyEqual(expected, result);
55 }
56
57 // Helper para acessar o m todo privado 'Compose'
58 private Matrix4x4 InvokeCompose(
59     TransformationManager tm,
60     Matrix4x4 current,

```

```
58     Matrix4x4 step)
59     {
60         var method = typeof(TransformationManager)
61             .GetMethod("Compose", BindingFlags.NonPublic |
62                 BindingFlags.Instance);
63
64         Assert.NotNull(method, "M todo Compose n o encontrado via
65             reflection.");
66
67         return (Matrix4x4)method.Invoke(tm, new object[] { current,
68             step });
69     }
70
71     // Compara o com tolerancia (epsilon) para float
72     private void AssertMatrixApproximatelyEqual(Matrix4x4 a,
73         Matrix4x4 b, float eps = 1e-5f)
74     {
75         for (int i = 0; i < 16; i++)
76         {
77             Assert.That(
78                 Mathf.Abs(a[i] - b[i]) < eps,
79                 $"Diferen a na posi o {i}: esperado {a[i]},
80                 obtido {b[i]}")
81             );
82         }
83     }
84 }
```