



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E MATEMÁTICA APLICADA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM E MÉTODOS**  
**QUANTITATIVOS**  
**MESTRADO ACADÊMICO EM MODELAGEM E MÉTODOS QUANTITATIVOS**

**MARCELO GOMES FOSSILE**

**UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA DISTRIBUIÇÃO DE RECURSOS DO**  
**PDDE A PARTIR DE CRITÉRIOS DE EFICIÊNCIA E NECESSIDADE COM**  
**APLICAÇÃO DE ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS**

**FORTALEZA**

**2026**

MARCELO GOMES FOSSILE

UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA DISTRIBUIÇÃO DE RECURSOS DO PDDE A  
PARTIR DE CRITÉRIOS DE EFICIÊNCIA E NECESSIDADE COM APLICAÇÃO DE  
ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Métodos Quantitativos do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Modelagem e Métodos Quantitativos. Área de Concentração: Inteligência Computacional e Otimização.

Orientador: Prof. Dr. Anselmo Ramalho Pitombeira Neto.

FORTALEZA

2026

MARCELO GOMES FOSSILE

UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA DISTRIBUIÇÃO DE RECURSOS DO PDDE A  
PARTIR DE CRITÉRIOS DE EFICIÊNCIA E NECESSIDADE COM APLICAÇÃO DE  
ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Métodos Quantitativos do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Modelagem e Métodos Quantitativos. Área de Concentração: Inteligência Computacional e Otimização.

Aprovada em: 27/01/2026.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Anselmo Ramalho Pitombeira Neto (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Leandro Chaves Rêgo  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Profª. Dra. Mariana Rodrigues de Almeida  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)

À minha mãe.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à minha mãe, Ana Lúcia, pelo apoio incondicional e pelo incentivo constante ao longo de toda a minha trajetória acadêmica e pessoal.

À minha irmã, Hilanna, pelo carinho e pela parceria.

Ao meu pai, Hilário, ainda que pouco presente, registro meu agradecimento por fazer parte da minha história.

Aos meus tios e tias, pelo apoio e incentivo, com especial agradecimento a Veranice e Analice, e *in memoriam* à minha tia Vera Lúcia, cuja lembrança permanece como fonte de afeto e inspiração.

Aos meus primos, pelo apoio e pela presença ao longo dessa caminhada.

À Fundação Cetrede, pela concessão da bolsa de estudos, fundamental para a realização desta pesquisa.

À equipe do projeto do FNDE, pelo aprendizado e pelas contribuições técnicas.

Ao meu orientador, Professor Anselmo, pela orientação, pelas contribuições acadêmicas e pela disponibilidade ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Ao amigo do mestrado José Robério, pela parceria, pelas discussões acadêmicas e pelo apoio durante essa trajetória.

À banca examinadora, pelas contribuições, sugestões e pela disponibilidade em avaliar este trabalho.

Por fim, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a conclusão desta etapa.

"A educação não transforma o mundo. A educação muda as pessoas. Pessoas transformam o mundo" (Paulo Freire, 1979, p. 84).

## RESUMO

Este trabalho propõe uma metodologia para a distribuição de recursos do Programa Dinheiro Direto na Escola (PDDE) entre os estados brasileiros, orientada por critérios de eficiência técnica e necessidade, utilizando a Análise Envoltória de Dados como instrumento de apoio à mensuração do desempenho relativo. A análise considera um *input* financeiro e dois conjuntos de *outputs*: variáveis estruturais em valores absolutos, que refletem a capacidade instalada das redes de ensino, e indicadores educacionais em formato de razão, que expressam resultados de desempenho. Os modelos foram implementados em *Python* com a biblioteca *Pyomo* e resolvidos via *solver* GLPK. A partir dos escores de eficiência, estima-se a economia potencial associada à projeção das unidades à fronteira eficiente, a qual serve como referência para a definição do montante a ser distribuído, podendo este ser ajustado conforme critérios estabelecidos pelo gestor público. Na etapa seguinte, constrói-se um modelo paramétrico que combina a eficiência relativa e um índice de necessidade composto por oito indicadores, ponderados pelo parâmetro  $\lambda \in [0, 1]$ , permitindo simular cenários que variam da priorização da eficiência à ênfase na vulnerabilidade. Os resultados revelam padrões territoriais distintos tanto na eficiência quanto nos níveis de necessidade, o que evidencia como escolhas distintas de ponderação entre os dois fatores alteram a distribuição final dos recursos. A abordagem proposta oferece um instrumento quantitativo transparente para subsidiar decisões de política pública voltadas à otimização dos investimentos federais na educação básica.

**Palavras-chave:** financiamento da educação; eficiência (serviço público); alocação de recursos; análise envoltória de dados; programação linear.

## ABSTRACT

This study proposes a methodology for the allocation of resources from the Programa Dinheiro Direto na Escola (PDDE) among Brazilian states, guided by criteria of technical efficiency and need, using Data Envelopment Analysis (DEA) as a supporting tool for measuring relative performance. The analysis considers a financial input and two sets of outputs: structural variables expressed in absolute values, which reflect the installed capacity of education systems, and educational indicators expressed as ratios, which capture performance outcomes. The models were implemented in Python using the Pyomo library and solved with the GLPK solver. Based on the efficiency scores, the potential savings associated with projecting units onto the efficient frontier are estimated and used as a reference for defining the amount of resources to be allocated, which may be adjusted according to criteria established by public managers. In the subsequent stage, a parametric model is developed that combines relative efficiency with a need index composed of eight indicators, weighted by the parameter  $\lambda \in [0, 1]$ , allowing the simulation of scenarios ranging from efficiency-oriented allocation to greater emphasis on vulnerability. The results reveal distinct territorial patterns in both efficiency and levels of need, highlighting how different weighting choices between these two dimensions affect the final allocation of resources. The proposed approach provides a transparent quantitative tool to support public policy decisions aimed at optimizing federal investments in basic education.

**Keywords:** education financing; efficiency (public service); resource allocation; data envelopment analysis; linear programming.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Retornos de Escala . . . . .	21
Figura 2 – Fronteiras de eficiência dos modelos CCR e BCC . . . . .	25
Figura 3 – Metodologia de duas fases . . . . .	32
Figura 4 – Distribuição dos Recursos do FNDE por Programa em 2024 . . . . .	34
Figura 5 – Fluxograma da metodologia alocação de recursos públicos proposta . . . . .	38
Figura 6 – Eficiências relativas por cenário . . . . .	50
Figura 7 – Relação entre o fator de eficiência e o fator de necessidade nos cenários analisados . . . . .	56
Figura 8 – Mapa de calor com distribuição de recursos do PDDE . . . . .	58
Figura 9 – <i>Boxplot</i> para a distribuição de recursos . . . . .	63

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Modelos DEA linearizados . . . . .	24
Tabela 2 – Modelos BCC linearizados . . . . .	26
Tabela 3 – Principais diferenças entre os Modelos DEA . . . . .	27
Tabela 4 – Variáveis mais utilizadas nos trabalhos de DEA . . . . .	30
Tabela 5 – Resumo dos cenários de aplicação dos modelos DEA . . . . .	39
Tabela 6 – Variáveis utilizadas no modelo com valores absolutos . . . . .	40
Tabela 7 – Variáveis utilizadas no modelo com <i>output</i> -razão . . . . .	41
Tabela 8 – Modelos DEA com <i>output</i> -razão . . . . .	42
Tabela 9 – Variáveis desagregadas . . . . .	43
Tabela 10 – Indicadores utilizados para compor fator de necessidade do modelo alocativo	45
Tabela 11 – Transferência de recursos via PDDE . . . . .	47
Tabela 12 – Participação de cada ente na eficiência total por cenário . . . . .	51
Tabela 13 – Valor total economizado por DMU . . . . .	52
Tabela 14 – Média de taxas e indicadores socio-educacionais agregados por Estado . . .	54
Tabela 15 – Indicadores normalizados e índices $N_j$ e $H_j$ por estado . . . . .	55
Tabela 16 – Alocação de recursos por cenário de avaliação, adotando $\lambda = 0,5$ . . . . .	57
Tabela 17 – Comparação Alocativa: Cenário 1 (CCR-ABS) . . . . .	59
Tabela 18 – Comparação Alocativa: Cenário 2 (CCR-RATIO) . . . . .	60
Tabela 19 – Comparação Alocativa: Cenário 3 (BCC-ABS) . . . . .	61
Tabela 20 – Comparação Alocativa: Cenário 4 (BCC-RATIO) . . . . .	62
Tabela 21 – Alocação de recursos por unidade federativa sob diferentes valores do parâmetro de ponderação $\lambda$ (em milhões de reais) . . . . .	64

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AHP	Processo Hierárquico Analítico
AtlasBR	Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil
BCC	Banker, Charnes e Cooper
CCR	Charnes, Cooper e Rhodes
CGU	Controladoria-Geral da União
DEA	<i>Data Envelopment Analysis</i>
DMU	<i>Decision Making Unit</i>
FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
GLPK	<i>GNU Linear Programming Kit</i>
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
IDHM	Índice de Desenvolvimento Humano Municipal
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
IPCA	Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo
MEC	Ministério da Educação e Cultura
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PDDE	Programa Dinheiro Direto na Escola
PIB	Produto Interno Bruto
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Alunos
PNAD	Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios
PNATE	Programa Nacional de Apoio ao Transporte Escolar
PNUD	Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento
PPP	Paridade do Poder de Compra
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SBM	<i>Slack-Based Measure</i>
TDI	Taxa de Distorção Idade-Série
TIC	Tecnologia da Informação e Comunicação
UFF	Universidade Federal Fluminense
VBDEA	<i>Value-Based DEA</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$h_j$	Eficiência relativa da unidade em análise
$u_r$	Contribuição do <i>output</i> $r$
$v_i$	Contribuição do <i>input</i> $i$
$y_{r0}$	Valor do <i>output</i> $r$ na unidade em análise
$x_{i0}$	Valor do <i>input</i> $i$ na unidade em análise
$s$	Quantidade de <i>outputs</i>
$m$	Quantidade de <i>inputs</i>
$y_{rj}$	Valor do <i>output</i> $r$ na unidade $j$
$x_{ij}$	Valor do <i>input</i> $i$ na unidade $j$
$j$	DMU em análise
$\mathbb{R}^+$	Conjunto dos números reais positivos
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$u_0$	Variável que detona o retorno de escala
$\theta$	Escore de eficiência técnica da DMU avaliada na perspectiva dual orientada ao <i>input</i>
$\eta$	Escore de eficiência técnica da DMU avaliada na perspectiva dual orientada ao <i>output</i>
$\lambda_j$	Peso associado à DMU $j$ na formulação dual (envoltória) do modelo DEA
$z_{mj}$	<i>Outputs</i> intermediários
$c_j$	Custo fixo alocado
$\alpha$	Constante no intervalo de 0 a 1
$x_{ij}$	<i>Input</i> $i$ utilizado pela DMU $j$ no Estágio 1 do modelo de 2 estágios
$z_{mj}$	<i>Output</i> intermediário $m$ gerado no Estágio 1 e utilizado no Estágio 2 pela DMU $j$ do modelo de 2 estágios
$y_{rj}$	<i>Output</i> final $r$ produzido pela DMU $j$ no Estágio 2 do modelo de 2 estágios
$I$	Quantidade total de <i>inputs</i> do Estágio 1
$M$	Quantidade total de <i>outputs</i> intermediários

$R$	Quantidade total de <i>outputs</i> finais do Estágio 2
$c_j$	Custo total associado à DMU $j$
$\alpha_j$	Proporção do custo $c_j$ alocada ao Estágio 1 da DMU $j$
$1 - \alpha_j$	Proporção do custo $c_j$ alocada ao Estágio 2 da DMU $j$
$y_{rj}$	<i>Output</i> -razão $r$ da DMU $j$
$n_{rj}$	Numerador do <i>output</i> -razão $r$ da DMU $j$
$d_{rj}$	Denominador do <i>output</i> -razão $r$ da DMU $j$
$x_{1j}^{obs}$	Valor observado do insumo financeiro do ente $j$
$x_{1j}^{meta}$	Valor meta do insumo financeiro do ente $j$ após projeção na fronteira eficiente
$\Delta_j$	Economia potencial do ente $j$ , dada pela diferença entre o insumo observado e o insumo meta
$S$	Montante total de recursos passível de redistribuição
$E_j$	Fator de eficiência relativo do ente $j$ no conjunto analisado
$s_{mj}$	Subíndice normalizado do indicador $m$ para o ente $j$
$x_{mj}$	Valor do indicador socioeducacional $m$ observado no ente $j$
$\underline{x}_m$	Menor valor observado do indicador $m$ entre todos os entes
$\bar{x}_m$	Maior valor observado do indicador $m$ entre todos os entes
$N_j$	Índice agregado de necessidade do ente $j$
$H_j$	Fator de necessidade relativo do ente $j$ no conjunto analisado
$\lambda$	Parâmetro de ponderação entre eficiência e necessidade, com $\lambda \in [0, 1]$
$\omega_j(\lambda)$	Peso distributivo do ente $j$ resultante da combinação entre eficiência e necessidade
$R_j(\lambda)$	Montante de recursos alocado ao ente $j$ em função do parâmetro $\lambda$
$\lambda$	Parâmetro de ponderação entre eficiência e necessidade

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>15</b>
<b>1.1</b>	<b>Contextualização</b>	<b>15</b>
<b>1.2</b>	<b>Justificativa</b>	<b>16</b>
<b>1.3</b>	<b>Objetivos</b>	<b>17</b>
<i>1.3.1</i>	<i>Objetivo Geral</i>	<i>17</i>
<i>1.3.2</i>	<i>Objetivos Específicos</i>	<i>17</i>
<b>1.4</b>	<b>Estrutura do Trabalho</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b>	<b>19</b>
<b>2.1</b>	<b>Análise Envoltória de Dados (DEA)</b>	<b>19</b>
<i>2.1.1</i>	<i>Eficiência Técnica vs. Eficiência de Escala</i>	<i>19</i>
<i>2.1.2</i>	<i>Unidades Tomadoras de Decisão</i>	<i>20</i>
<i>2.1.3</i>	<i>Retornos de Escala</i>	<i>20</i>
<i>2.1.4</i>	<i>Modelagem Matemática</i>	<i>22</i>
<i>2.1.5</i>	<i>Modelos Clássicos de DEA</i>	<i>24</i>
<i>2.1.6</i>	<i>Modelos Avançados de DEA</i>	<i>27</i>
<b>2.2</b>	<b>Aplicações de DEA no Setor Educacional</b>	<b>28</b>
<i>2.2.1</i>	<i>Variáveis de Decisão</i>	<i>29</i>
<b>2.3</b>	<b>Modelos DEA para Alocação de Recursos</b>	<b>31</b>
<b>2.4</b>	<b>Distribuição de Recursos com Base em Equidade</b>	<b>33</b>
<b>2.5</b>	<b>Execução Financeira e Alocação de Recursos pelo FNDE</b>	<b>34</b>
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>36</b>
<b>3.1</b>	<b>Descrição da Pesquisa</b>	<b>36</b>
<b>3.2</b>	<b>Cenário da Pesquisa e Recorte Temporal</b>	<b>36</b>
<b>3.3</b>	<b>Etapas da Pesquisa</b>	<b>37</b>
<b>3.4</b>	<b>Especificação dos Cenários de Aplicação dos Modelos DEA</b>	<b>38</b>
<b>3.5</b>	<b>Variáveis Utilizadas nos Modelos DEA</b>	<b>40</b>
<i>3.5.1</i>	<i>Adaptação para Variáveis em Forma de Razão</i>	<i>41</i>
<b>3.6</b>	<b>Construção do Modelo de Distribuição</b>	<b>43</b>
<b>3.7</b>	<b>Coleta de Dados</b>	<b>46</b>
<b>3.8</b>	<b>Implementação Computacional</b>	<b>49</b>

<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>50</b>
<b>4.1</b>	<b>Resultados da Aplicação dos Modelos DEA</b>	<b>50</b>
<b>4.2</b>	<b>Resultados do Modelo de Distribuição de Recursos</b>	<b>54</b>
<b>4.3</b>	<b>Análise Comparativa da Distribuição em Relação à Alocação Histórica</b>	<b>58</b>
<b>4.4</b>	<b>Cenário de Referência</b>	<b>62</b>
<b>4.5</b>	<b>Análise de Sensibilidade do Parâmetro <math>\lambda</math></b>	<b>63</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>66</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>68</b>
	<b>APÊNDICE A – CÓDIGOS DOS MODELOS DEA</b>	<b>73</b>
	<b>APÊNDICE B – CÓDIGO DO MODELO DE DISTRIBUIÇÃO</b>	<b>78</b>
	<b>APÊNDICE C – VARIÁVEIS RAZÃO DESAGREGADAS</b>	<b>81</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Contextualização

No contexto educacional, a alocação de recursos públicos é uma etapa essencial para garantir a entrega de serviços de qualidade e conseqüentemente o alcance de objetivos constitucionais relacionados ao pleno desenvolvimento da pessoa humana. Para assegurar a efetividade desse direito fundamental, o Governo Federal tem como ferramenta estratégica uma entidade pública autárquica pertencente à estrutura da Administração Indireta na esfera Federal vinculada ao Ministério da Educação e Cultura (MEC). O Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) foi criado pela Lei nº 5.537, de 21 de novembro de 1968, e alterado pelo Decreto-Lei nº 872, de 15 de setembro de 1969.

Nesse cenário, observa-se a relevância estratégica do FNDE, que é responsável por operacionalizar grande parte dos recursos federais da educação destinados às unidades federativas (Cruz, 2011). Ao mesmo tempo que o ente executa o repasse de créditos obrigatórios (elencados de acordo com a Constituição Federal e normas infraconstitucionais), faz também transferências voluntárias através de convênios com os Estados e Municípios.

Considerando essa perspectiva, torna-se fundamental o desenvolvimento de uma metodologia de avaliação e controle para analisar a eficiência dos repasses voluntários realizados pela entidade e otimizar a alocação de tais recursos de forma a maximizar os resultados obtidos com a implementação das políticas públicas subsidiadas pelo FNDE.

De forma geral, o conceito de eficiência refere-se à capacidade de realizar uma tarefa ou alcançar objetivos com o menor uso possível de recursos, buscando a otimização dos meios empregados (Drucker, 2018; Heyne *et al.*, 1994). No contexto educacional, a noção de eficiência se relaciona com a limitação de recursos e deve levar em consideração aspectos como a qualidade do serviço ofertado, a inclusão social e cultural, a garantia de acesso a todos os cidadãos, entre outros fatores (Grillo, 2022).

Uma ferramenta bastante explorada para a avaliação da eficiência e utilização dessa análise como subsídio para a tomada de decisão é a Análise Envoltória de Dados, ou *Data Envelopment Analysis* (DEA). A metodologia surgiu no final da década de 1970 (Charnes *et al.*, 1978) e é utilizada para avaliar a eficiência de unidades produtivas sob a perspectiva de múltiplas entradas e múltiplas saídas.

## 1.2 Justificativa

A necessidade de avaliar a eficiência na aplicação dos recursos públicos e o desenvolvimento de uma metodologia que subsidie a tomada de decisão sobre sua distribuição são os aspectos primordiais que motivam este trabalho, especialmente considerando o atual estágio de desenvolvimento da tecnologia e das ferramentas de análise de dados.

O estudo da eficiência alocativa é fundamental para entender como os recursos públicos podem ser distribuídos de maneira efetiva. Este tipo de estudo busca avaliar se os recursos disponíveis estão sendo utilizados nas proporções ótimas, considerando seus respectivos custos, de modo a maximizar os resultados obtidos ou minimizar os custos de produção. Diferentemente da eficiência técnica, que se concentra na eliminação de desperdícios, a eficiência alocativa analisa a adequação da combinação dos insumos, sendo fundamental para a avaliação da eficiência econômica das organizações (Farrell, 1957; Varian e Varian, 1992).

Desde o início dos anos 2000, a eficiência alocativa dos gastos públicos tem sido um tema recorrente nos estudos nacionais (Costa *et al.*, 2015; Santos *et al.*, 2018; Filho e Peixe, 2020; Souto, 2025). Geralmente, esses trabalhos analisam a relação entre as despesas governamentais e os indicadores socioeconômicos relacionados, que podem variar dependendo do foco da pesquisa, da amostra analisada e dos índices selecionados. A DEA é uma das metodologias mais presentes nos estudos (Davis e Souza, 2021).

Nesse contexto, pesquisas como as de Filho e Peixe (2020) e Pozza *et al.* (2022) buscaram não apenas examinar a relação entre as perspectivas de eficiência alocativa, técnica e social nas instituições de ensino brasileiras, mas também aprofundar a análise das variáveis que influenciam essa eficiência. Os estudos exploram fatores educacionais, como a qualidade do ensino e a infraestrutura das instituições, e interagem com aspectos socioeconômicos, como a renda das famílias e o acesso a serviços básicos. Além disso, as transferências governamentais são investigadas para entender seu impacto nos valores de eficiência, permitindo uma visão mais abrangente sobre a utilização dos recursos e a eficácia das políticas públicas no setor educacional.

Portanto, demonstra-se a relevância do estudo na contribuição para a execução de políticas públicas mais eficazes, operacionalizadas por entidades públicas como é o caso do FNDE. A análise das variáveis que influenciam a eficiência alocativa nas instituições de ensino pode oferecer subsídios valiosos para a tomada de decisões estratégicas futuras. Além disso, ao evidenciar as relações entre os diversos fatores envolvidos, o estudo não só amplia o entendimento sobre a eficácia das práticas atuais, mas aponta caminhos para melhorias.

## **1.3 Objetivos**

### ***1.3.1 Objetivo Geral***

O objetivo geral deste trabalho é propor uma metodologia de distribuição de recursos públicos, baseada na DEA, aplicada aos repasses voluntários do FNDE às unidades federativas do Brasil, visando à otimização da alocação desses recursos.

### ***1.3.2 Objetivos Específicos***

São objetivos específicos deste trabalho:

- a) Analisar os conceitos fundamentais relacionados à DEA, explorando suas principais aplicações;
- b) Realizar uma pesquisa de estudos relacionados ao tema, revisando a literatura existente para identificar metodologias e resultados relevantes que possam subsidiar a análise proposta;
- c) Aplicar a metodologia da DEA para avaliar a eficiência dos estados brasileiros na utilização dos recursos públicos recebidos via FNDE;
- d) Analisar os fatores contextuais, como variáveis socioeconômicas e educacionais, que influenciam a eficiência das instituições de ensino no uso desses recursos;
- e) Comparar a eficiência das instituições de diferentes regiões do Brasil, identificando padrões e disparidades regionais;
- f) Desenvolver uma metodologia objetiva baseada nos resultados obtidos na etapa de avaliação da eficiência para otimizar a alocação dos recursos públicos.

## **1.4 Estrutura do Trabalho**

Este trabalho está estruturado em cinco capítulos. O primeiro apresentou uma breve contextualização acerca do problema, suas justificativas e objetivos.

O segundo capítulo aborda os principais conceitos relacionados à eficiência no setor público focado na Análise Envoltória de Dados e sua aplicação no contexto educacional, bem como discorre sobre estudos prévios relevantes para o desenvolvimento da proposta a ser apresentada.

O terceiro capítulo descreve a metodologia utilizada no estudo, dividindo-se em duas partes: a primeira referente à aplicação da DEA para avaliar a eficiência das unidades em

estudo; e a segunda referente à metodologia para otimizar a alocação de recursos com base nos resultados obtidos inicialmente.

O quarto capítulo apresenta e discute os resultados obtidos com a aplicação dos modelos DEA, incluindo a identificação de padrões de eficiência e fatores que influenciam o desempenho das unidades analisadas. Além disso, são apresentados os resultados da metodologia desenvolvida para orientar a alocação de recursos, descrevendo as técnicas utilizadas e analisando como as melhorias propostas podem impactar a gestão de recursos educacionais.

Por fim, o último capítulo resume os principais pontos do estudo, destacando as contribuições teóricas e práticas e propondo recomendações para as futuras pesquisas na área.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo realiza-se uma revisão objetiva acerca dos estudos em DEA, elencando os pressupostos matemáticos e os principais modelos desenvolvidos ao longo dos anos, com ênfase nas suas aplicações práticas em diferentes áreas, especialmente na gestão de recursos públicos. São exploradas aplicações práticas que demonstram a utilidade da DEA em contextos reais, com destaque para o setor educacional, onde sua capacidade de identificar ineficiências e sugerir melhorias pode contribuir para o aprimoramento de políticas públicas e alocação de recursos.

### 2.1 Análise Envoltória de Dados (DEA)

A avaliação da eficiência de sistemas produtivos é um tema crucial para diversas áreas, como economia, engenharia e administração. De acordo com Mariano (2008), em termos gerais, a eficiência de um sistema produtivo refere-se à sua capacidade de transformar recursos (*inputs*) em resultados (*outputs*). É nesse cenário que surgem técnicas específicas, como a Análise Envoltória de Dados, que se tornou uma ferramenta amplamente utilizada para avaliar a eficiência de sistemas.

A DEA é uma metodologia não paramétrica baseada em programação linear, desenvolvida inicialmente por Charnes *et al.* (1978), que permite a avaliação da eficiência relativa de unidades em um mesmo contexto produtivo ao considerar a contribuição de múltiplos *inputs* e *outputs* sem a necessidade de uma função de produção predefinida (Kamakura *et al.*, 1988). Essa técnica torna-se útil para analisar sistemas produtivos complexos, como escolas ou hospitais, onde os resultados podem não ter um valor de mercado facilmente mensurável.

#### 2.1.1 Eficiência Técnica vs. Eficiência de Escala

O foco principal da análise de eficiência está na eficiência técnica. De acordo com Fried (2008), a eficiência técnica implica na capacidade de uma unidade produtiva de obter o máximo *output* possível a partir de um conjunto dado de *inputs*, ou, inversamente, de utilizar o mínimo de *inputs* para produzir um determinado nível de *outputs*. Por outro lado, a eficiência de escala está relacionada à capacidade da unidade de operar em uma escala de produção que maximize os retornos, ou seja, de ajustar seu tamanho ou nível de operação para alcançar a eficiência ótima (Sousa e Ramos, 1999).

Este conceito está diretamente relacionado à função de produção, que representa matematicamente a quantidade máxima de produtos que podem ser gerados a partir de um determinado conjunto de insumos. Uma empresa é considerada tecnicamente ineficiente quando opera abaixo da fronteira que define a produção máxima possível, sendo essa ineficiência medida pela distância até a fronteira (Camanho *et al.*, 2024).

### **2.1.2 Unidades Tomadoras de Decisão**

No contexto da DEA, a função de produção não é definida por uma fórmula matemática específica, mas sim a partir de um conjunto de dados observados de diferentes empresas ou unidades, que são definidas como Unidades Tomadoras de Decisão, tradução de *Decision Making Unit* (DMU) (Thanassoulis, 2001).

De acordo com Thanassoulis (2001), uma DMU é definida como uma entidade homogênea que transforma entradas (*inputs*) em saídas (*outputs*) em um processo de produção. Essas unidades têm controle sobre o processo de transformação, o que significa que possuem autonomia nas decisões relacionadas à alocação de recursos e às estratégias empregadas para alcançar os resultados desejados. O autor afirma ainda que uma definição imprecisa da DMU, bem como a omissão de variáveis relevantes, pode enviesar os resultados da avaliação.

Para Cooper *et al.* (2007) a definição de DMU é propositalmente ampla, permitindo sua aplicação em diversos contextos, incluindo organizações como bancos, supermercados, hospitais e escolas. Os autores explicam que menores quantidades de entradas e maiores quantidades de saídas são preferíveis e que as unidades de medida das variáveis não precisam ser uniformes, podendo incluir pessoas, áreas, ou valores monetários, o que permite maior flexibilidade na modelagem e análise de diferentes contextos.

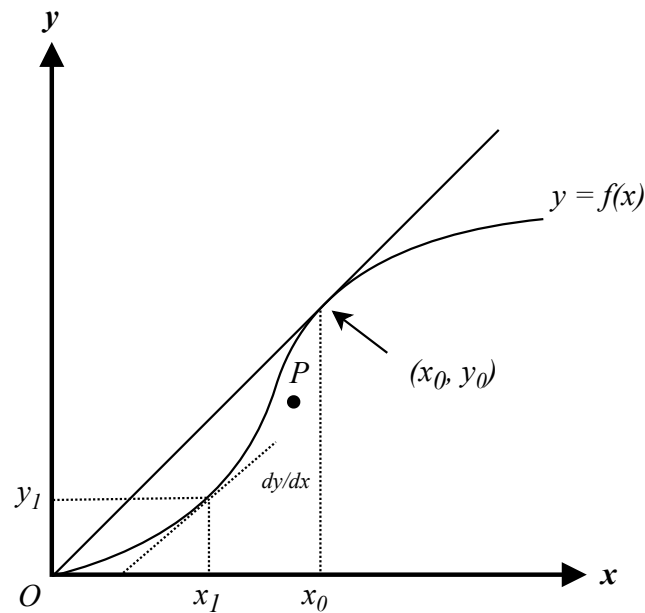
### **2.1.3 Retornos de Escala**

Em DEA, um importante conceito explorado na literatura é o de retornos de escala, que descrevem como as alterações proporcionais nos recursos consumidos impactam nos resultados de uma DMU e são essenciais para a avaliação da produtividade e para a formulação de estratégias econômicas e gerenciais (Boussemart *et al.*, 2024).

Cooper *et al.* (2007) explicam que os retornos de escala podem ser observados geometricamente por meio de uma função de produção  $y = f(x)$ , que descreve o comportamento dos *outputs* em função dos *inputs*. Na Figura 1 é possível verificar a produtividade média, que é

representada pela inclinação da reta que conecta a origem ao ponto da fronteira de eficiência, e a produtividade marginal, que é a reta tangente à curva de produção, mostrando a taxa de variação do *output* em relação ao *input*. Os autores indicam que a comparação entre essas duas medidas permite identificar o regime de retornos de escala ao longo da fronteira de produção.

Figura 1 – Retornos de Escala



Fonte: Adaptado de Cooper *et al.* (2007).

A expressão  $dy/dx$ , representada graficamente pela reta tangente à função de produção no ponto considerado, indica a produtividade marginal do insumo, isto é, a variação do *output* associada a uma variação no *input*. O ponto  $P$  representa uma combinação de *input* e *output* localizada no interior do conjunto de possibilidades de produção. Trata-se de um ponto tecnicamente ineficiente, uma vez que, para o mesmo nível de insumo, seria possível obter um nível maior de produto ao se deslocar verticalmente este ponto até a fronteira eficiente.

O ponto  $(x_1, y_1)$ , localiza-se sobre a fronteira de eficiência e corresponde ao ponto de inflexão da função de produção. Até esse ponto, a produtividade marginal  $dy/dx$  é crescente com o aumento de insumo, refletindo ganhos progressivos de eficiência técnica. A partir de  $x_1$ , a produtividade marginal passa a ser decrescente. Em termos econômicos, embora ainda possam existir retornos crescentes de escala após  $x_1$  (enquanto  $x < x_0$ ), os ganhos marginais passam a reduzir.

O ponto  $(x_0, y_0)$  também se encontra na fronteira eficiente e corresponde ao nível de

insumo  $x_0$  para o qual a produtividade média é maximizada. Nesse ponto, o valor do produto é tal que a inclinação da reta traçada a partir da origem até ele é máxima. Economicamente, Cooper *et al.* (2007) afirmam que esse ponto delimita a transição entre regimes de retornos crescentes e decrescentes de escala, sendo caracterizado por retornos constantes de escala.

Assim, para pontos situados na vizinhança à esquerda do nível de máxima produtividade média, a produtividade marginal é superior à produtividade média, o que implica que aumentos proporcionais nos *inputs* resultam em aumentos mais do que proporcionais nos *outputs*, caracterizando retornos crescentes de escala. Por outro lado, para pontos à direita do ponto de máxima produtividade média, a produtividade marginal torna-se inferior à produtividade média, indicando que os acréscimos nos *inputs* geram aumentos menos do que proporcionais nos *outputs*, delimitando a região de retornos decrescentes de escala.

#### 2.1.4 Modelagem Matemática

Inicialmente, Charnes *et al.* (1978) utilizam ferramentas de programação matemática para propor a análise da eficiência das unidades a partir da maximização da relação entre a combinação linear de *outputs* com a combinação linear de *inputs*, limitando a eficiência máxima de cada DMU a 100%. Os autores apresentam o seguinte modelo fracionário:

$$\max h_j = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \quad (2.1)$$

Sujeito a:

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1, \forall j = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

$$u_r, v_i \in \mathbb{R}^+, \forall r = 1, \dots, s; i = 1, \dots, m \quad (2.3)$$

Onde:

$h_j$ : Eficiência relativa da unidade em análise;

$u_r$ : Contribuição do *output*  $r$ ;

$v_i$ : Contribuição do *input*  $i$ ;

$y_{rj}$ : Valor do *output*  $r$  na unidade em análise;

$x_{ij}$ : Valor do *input*  $i$  na unidade em análise;

$s$ : Quantidade de *outputs*;

$m$ : Quantidade de *inputs*;

$j$ : DMU em análise;

$n$ : Quantidade total de DMUs.

Dessa forma, para cada DMU em análise é criado um modelo de programação matemática diferente, onde a única diferença está nos valores das variáveis de entrada (*inputs*) e saída (*outputs*) da DMU em estudo. No entanto, em programação matemática fracionária, as soluções são ilimitadas, sendo necessário linearizar o modelo para gerar apenas uma solução ótima.

Para isso, os autores acrescentaram uma restrição a esse modelo, fazendo com que os *outputs* ou *inputs* sejam constantes (iguais a 1), linearizando a função objetivo e suas restrições. O modelo de programação linear gerado garante uma solução ótima factível.

De acordo com Meza *et al.* (2005, p. 2520–2547), mantendo-se as entradas constantes, obtém-se um modelo orientado aos *inputs*; e, de forma inversa, mantendo-se as saídas constantes, obtém-se um modelo orientado aos *outputs*. Em um modelo orientado aos *inputs*, busca-se maximizar os resultados obtidos a partir de um nível fixo de insumos. Por outro lado, em um modelo orientado aos *outputs*, o foco recai em minimizar os insumos, mantendo os resultados constantes (Mariano, 2008).

Segundo Mariano (2008), os modelos DEA podem ainda ser representados por duas formulações matemáticas equivalentes: a forma dos multiplicadores, associada ao problema primal, e a forma do envelope, associada ao problema dual. Essa equivalência está relacionada à teoria da programação linear, que estabelece que todo problema de otimização linear possui um problema associado, no qual o valor ótimo da função objetivo coincide com o do problema original quando existe uma solução ótima, conforme o princípio da dualidade forte (Chvátal, 1983; Bazarra *et al.*, 2011).

De forma geral, o primal representa o modelo original de otimização, no qual se busca minimizar ou maximizar uma função objetivo sujeita a um conjunto de restrições, enquanto o problema dual advém do primal: cada restrição do primal corresponde a uma variável no dual e cada variável do primal corresponde a uma restrição no dual (Best e Ritter, 1985).

No contexto da DEA, a forma dos multiplicadores busca identificar os pesos atribuídos aos *inputs* e aos *outputs* que maximizam a eficiência relativa de cada DMU e a forma

do envelope constrói a fronteira de eficiência a partir de combinações das DMUs eficientes, permitindo identificar metas para as unidades ineficientes (Mariano, 2008). A Tabela 1 resume a formulação matemática do modelo DEA linear, tanto na perspectiva primal quanto na dual.

Tabela 1 – Modelos DEA linearizados

	<b>Orientação ao <i>input</i></b>	<b>Orientação ao <i>output</i></b>
	$\max h_0 = \sum_{r=1}^s u_r y_{r0}$	$\min h_0 = \sum_{i=1}^m v_i x_{i0}$
	Sujeito a:	Sujeito a:
<b>Primal</b>	$\sum_{i=1}^m v_i x_{i0} = 1$	$\sum_{r=1}^s u_r y_{r0} = 1$
	$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0 \quad \forall j$	$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0 \quad \forall j$
	$u_r, v_i \geq 0$	$u_r, v_i \geq 0$
	 $\min \theta$	 $\max \eta$
	Sujeito a:	Sujeito a:
<b>Dual</b>	$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j - \theta x_{i0} \leq 0 \quad \forall i$	$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq x_{i0} \quad \forall i$
	$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq y_{r0} \quad \forall r$	$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - \eta y_{r0} \geq 0 \quad \forall r$

Fonte: Adaptado de Mariano (2012)

### 2.1.5 Modelos Clássicos de DEA

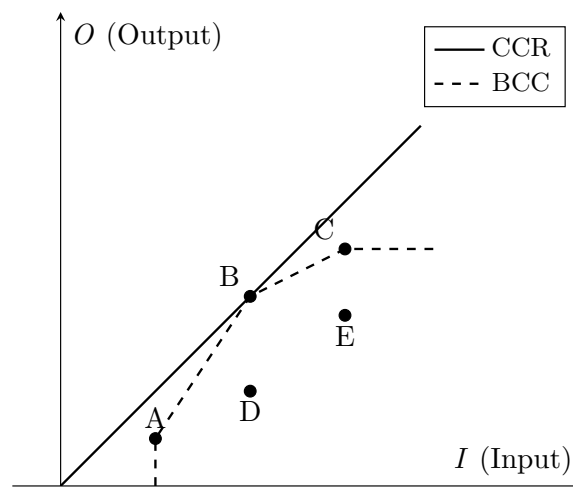
Os modelos tradicionais de DEA são o modelo de Charnes, Cooper e Rhodes (CCR), apresentado na Tabela 1, e o modelo de Banker, Charnes e Cooper (BCC), cada um com diferentes pressupostos sobre os retornos de escala das DMUs. O modelo CCR, proposto por Charnes *et al.* (1978), assume retornos constantes de escala. Isso significa que, ao aumentar-se os *inputs* de uma unidade de decisão em uma certa proporção, os *outputs* devem aumentar na mesma proporção.

O modelo BCC, introduzido por Banker *et al.* (1984), relaxa o pressuposto inicial de

retornos constantes, permitindo uma análise de variabilidade na relação entre as proporções de *inputs* e *outputs* e assumindo que as DMUs podem operar sob condições de retornos crescentes de escala ou retornos decrescentes de escala.

A Figura 2 é uma representação gráfica comparativa dos modelos tradicionais de DEA com apenas uma entrada e uma saída. No eixo  $y$  estão os valores do *output* e no eixo  $x$ , os valores do *input*. Os pontos A, B, C, D e E representam cada uma das DMUs em análise e sua posição gráfica na performance observada.

Figura 2 – Fronteiras de eficiência dos modelos CCR e BCC



Fonte: Adaptado de Bowlin (1998).

A linha contínua refere-se à fronteira de eficiência obtida pelo modelo CCR, onde os retornos de escala são constantes. A linha tracejada refere-se à fronteira de eficiência para o modelo BCC, que considera retornos variáveis de escala. Nota-se que uma mesma DMU pode ser eficiente no modelo BCC e ineficiente no modelo CCR.

Essa disparidade ocorre porque o modelo CCR penaliza DMUs que não estão na escala ótima, ao passo que o modelo BCC permite que a eficiência técnica seja avaliada dentro do contexto da escala de operação. Ou seja, o modelo CCR combina eficiência técnica e eficiência de escala, enquanto o BCC isola a eficiência técnica (Cooper *et al.*, 2007).

Assim como o modelo CCR, o modelo BCC foca nas contribuições atribuídas aos *inputs* e *outputs* para maximizar a eficiência da DMU avaliada. A diferença principal é que a formulação, apresentada por Banker *et al.* (1984), acrescenta uma nova variável de modo a indicar a escala de operação da DMU.

A formulação matemática do modelo BCC, nas perspectivas primal e dual, é apresentada na Tabela 2. Destaca-se as duas orientações do modelo e a inclusão da variável  $u_0$ , que

desempenha um papel crucial ao permitir a consideração de retornos variáveis de escala.

Tabela 2 – Modelos BCC linearizados

	<b>Orientação ao <i>input</i></b>	<b>Orientação ao <i>output</i></b>
	$\max \sum_{r=1}^s u_r y_{r0} + u_0$	$\min \sum_{i=1}^m v_i x_{i0} + u_0$
	Sujeito a:	Sujeito a:
<b>Primal</b>	$\sum_{i=1}^m v_i x_{i0} = 1$	$\sum_{r=1}^s u_r y_{r0} = 1$
	$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + u_0 - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0 \quad \forall j$	$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + u_0 - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0 \quad \forall j$
	$u_r, v_i \geq 0 \quad \forall i, r$	$u_r, v_i \geq 0 \quad \forall i, r$
	$u_0 \in \mathbb{R}$	$u_0 \in \mathbb{R}$
	 $\min \theta$	 $\max \eta$
	Sujeito a:	Sujeito a:
<b>Dual</b>	$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j - \theta x_{i0} \leq 0 \quad \forall i$	$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq x_{i0} \quad \forall i$
	$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq y_{r0} \quad \forall r$	$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - \eta y_{r0} \geq 0 \quad \forall r$
	$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$	$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$

Fonte: Adaptado de Mariano (2012)

De acordo com Mariano (2008) a forma de interpretação do coeficiente depende da orientação do modelo que será adotada. No modelo BCC orientado ao *input*, quando  $u_0 > 0$ , indica que a DMU está operando em retornos crescentes de escala, ou seja, pode melhorar sua eficiência ao expandir sua operação. Por outro lado, se  $u_0 < 0$ , a DMU opera em retornos decrescentes de escala, sugerindo que uma redução no nível de operação poderia resultar em maior eficiência. Por fim, quando  $u_0 = 0$ , a DMU opera na escala ótima, com retornos constantes de escala. De modo inverso, caso o modelo adotado seja orientado para o *output*, se  $u_0 > 0$

a DMU opera com retornos de escala decrescentes e, se  $u_0 < 0$ , a DMU opera com retornos crescentes de escala.

### 2.1.6 Modelos Avançados de DEA

Além dos modelos tradicionais CCR e BCC, amplamente utilizados, a literatura apresenta uma ampla gama de extensões que atendem a problemas específicos e contextos mais complexos. Entre esses, destacam-se os modelos não-radiais como o modelo *Slack-Based Measure* (SBM), proposto por Tone (2001), e o modelo aditivo, apresentado por Charnes *et al.* (1985). Ambos consideram diretamente folgas nos *inputs* e nos *outputs* de forma não radial permitindo variações independentes entre as entradas e as saídas e sendo mais adequados para cenários onde as variáveis possuem características muito diferentes.

Outro exemplo é o de *Network DEA*, proposto por Färe *et al.* (2007), que analisa a eficiência de sistemas compostos por múltiplos subprocessos interdependentes, sendo útil em cadeias produtivas e setores como saúde e transporte.

Há também os modelos DEA dinâmicos, propostos por Tone e Tsutsui (2010), que consideram o desempenho das DMUs ao longo do tempo, incorporando variáveis que conectam diferentes períodos, essencial para análises intertemporais.

Para lidar com a incerteza de dados, surgiram os modelos intervalares e *fuzzy*, como apresentado por Kao e Liu (2000), que permitem tratar *inputs* e *outputs* imprecisos ou intervalares. Além disso, o modelo de supereficiência, desenvolvido por Andersen e Petersen (1993), permite discriminar entre DMUs eficientes e criar *rankings*, sendo amplamente utilizado em estudos comparativos.

Tabela 3 – Principais diferenças entre os Modelos DEA

<b>Modelo</b>	<b>Retorno de escala</b>	<b>Orientação</b>	<b>Pressupostos</b>
CCR	Constante	Inputs ou outputs	Eficiência global
BCC	Variável	Inputs ou outputs	Eficiência técnica
Aditivo	Não considera	Não orientado	Soma das folgas
SBM	Constante ou variável	Inputs e outputs	Ineficiências associadas às folgas
Network DEA	Variável	Inputs e outputs	Sistemas complexos
Dinâmico	Variável	Inputs e outputs	Eficiência intertemporal
Intervalares e Fuzzy	Constante ou variável	Inputs e outputs	Eficiência sob incerteza
Supereficiência	Constante ou variável	Inputs e outputs	Ranking entre DMUs eficientes

Fonte: elaborada pelo autor.

A Tabela 3 apresenta um resumo das diferenças entre os principais modelos de

DEA, destacando suas características distintivas em termos de retornos de escala, orientação das variáveis e pressupostos da aplicação.

## 2.2 Aplicações de DEA no Setor Educacional

Esta seção busca explorar as bases teóricas e metodológicas relacionadas às aplicações de DEA no setor educacional, apresentando as variáveis mais comumente utilizadas, os principais modelos aplicados, bem como os resultados de estudos realizados em diferentes níveis de ensino.

Na literatura, as aplicações de DEA no setor educacional demonstram a versatilidade da ferramenta na avaliação da eficiência de instituições de ensino e programas educacionais. Henriques *et al.* (2022) utilizaram o modelo *Value-Based DEA* (VBDEA) para avaliar 159 escolas secundárias no Equador. O estudo considerou fatores como o nível econômico, social e cultural dos alunos e o modelo revelou que escolas ineficientes poderiam melhorar o desempenho em até 12% com investimento em infraestrutura básica e melhor aproveitamento de recursos.

Banker *et al.* (2004) utilizaram a DEA para analisar a eficiência técnica e alocativa de 585 distritos escolares do Texas, nos Estados Unidos em um período de seis anos (1993-1999). Os resultados indicaram um aumento na ineficiência técnica ao longo do tempo, enquanto que a ineficiência alocativa permaneceu estável.

Agasisti e Zoido (2019) analisaram a eficiência de escolas em países em desenvolvimento utilizando os dados do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA) no ano de 2012. Os autores identificaram variações significativas entre países, atribuídas a fatores socioeconômicos e diferenças nos sistemas educacionais. O trabalho destaca a importância do *benchmarking* global como ferramenta para melhorar as políticas educacionais.

No Brasil, Agasisti *et al.* (2022), utilizou DEA paralelamente a metodologias estatísticas para analisar a eficiência de 10.600 escolas públicas de ensino fundamental no país. Para a análise, o trabalho utilizou, como variáveis de entrada, a qualidade ensino, intensidade de ensino, número médio de estudantes por sala de aula e, como variáveis de saída, as pontuações normalizadas nas disciplinas de português e matemática. De acordo com os autores, as escolas alcançaram uma eficiência média de 87%, embora tenham sido destacadas disparidades regionais significativas e uma correlação entre a eficiência escolar e desigualdades de renda nas cidades avaliadas.

Ainda no contexto brasileiro, Begnini e Tosta (2017) aplicaram a DEA para avaliar a

eficiência dos gastos em educação fundamental em diferentes estados. Os resultados mostraram que apenas 25,92% dos estados foram eficientes nos gastos, elencando a necessidade de melhorias na gestão de recursos.

Aparicio *et al.* (2018) utilizaram modelos DEA de eficiência não-radiais, que permitem identificar diferentes níveis de ineficiência, para analisar a performance de escolas localizadas em países da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) utilizando dados do PISA. De forma geral, os autores identificaram maiores ineficiências na competência leitura, indicando que as escolas tendem a concentrar seus esforços em disciplinas como matemática.

Dufrechou (2016) avaliou a eficiência dos gastos públicos em educação em países da América Latina e comparou com economias de alta renda. O estudo é dividido em duas fases: a primeira fase, foram obtidas as eficiências dos países utilizando a DEA e, na sequência, utilizando análise estatística, identificou-se quais fatores influenciam na construção desses valores.

Ainda na América Latina, Torres-Samuel *et al.* (2020) realizaram uma avaliação da eficiência técnica de 15 países, considerando fatores relacionados à pesquisa, desenvolvimento, ciência e tecnologia. O estudo utilizou DEA para analisar como variáveis como o percentual do Produto Interno Bruto (PIB) destinado à educação e exportações de alta tecnologia contribuem para o desempenho educacional. Os resultados indicaram que o investimento em pesquisa e desenvolvimento é o principal insumo responsável por alavancar exportações tecnológicas, que são as variáveis de saída do modelo implementado pelos autores no estudo de caso.

Aristovnik (2012) analisa a eficiência do uso de Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC) no setor educacional em países selecionados da União Europeia e da OCDE. O estudo destaca como os investimentos em TIC impactam os resultados educacionais, como as pontuações do PISA e as taxas de matrícula. Apesar do aumento do uso de TIC na educação, os resultados revelam níveis variados de eficiência entre os países, com países como Finlândia e Eslováquia alcançando níveis ótimos de eficiência técnica, enquanto outros, como Estados Unidos e Reino Unido, apresentam ineficiências devido à baixa relação entre entradas e saídas.

### **2.2.1 Variáveis de Decisão**

A escolha das variáveis de decisão é uma etapa fundamental na construção de modelos DEA. De acordo com Mariano (2012), o estudo prévio das entradas e saídas da análise de eficiência eleva a assertividade do modelo e é capaz de fornecer uma série de informações

pertinentes acerca das unidades em estudo.

Meza *et al.* (2005, p. 2520–2547) explica que a escolha das variáveis de entrada e saída deve ser feita a partir de uma lista abrangente de indicadores relacionados ao modelo. Para os autores, uma escolha equivocada das variáveis pode levar a um grande número de DMUs sobre a fronteira de eficiência ou mesmo fora dela, impossibilitando a distinção entre unidades eficientes ou não.

No setor educacional, os *inputs* podem refletir recursos financeiros, como transferências governamentais, que sustentam o funcionamento do sistema de ensino. Por outro lado, os *outputs* representam os resultados produzidos pelas unidades avaliadas, podendo abranger dimensões estruturais e operacionais (expansão do número de matrículas, ampliação do corpo docente e construção de estabelecimentos de ensino) ou indicadores de desempenho acadêmico, taxas de progressão escolar e outras medidas de qualidade educacional.

A Tabela 4 resume as principais variáveis de decisão utilizadas nos trabalhos apresentados nesta seção. Ao avaliar os trabalhos, é possível observar que alguns autores se utilizam de variáveis estruturais e operacionais como *inputs* de seus modelos. Aristovnik (2012), por exemplo, trata o número de computadores e gastos com TIC como insumos que explicam desempenho educacional.

Tabela 4 – Variáveis mais utilizadas nos trabalhos de DEA

<b>Autores</b>	<b>Inputs</b>	<b>Outputs</b>
Banker <i>et al.</i> (2004)	Gastos por estudante, despesas administrativas	Taxa de graduação, desempenho acadêmico
Aristovnik (2012)	Gastos em TIC, número de computadores, razão aluno-professor	Pontuações médias no PISA
Dufrechou (2016)	Gastos públicos com educação, número de alunos	Taxas de matrícula, alfabetização
Begnini e Tosta (2017)	Gastos públicos por aluno, número de professores	Taxa de aprovação, taxas de abandono
Aparicio <i>et al.</i> (2018)	Investimentos em infraestrutura, número de professores	Pontuações do PISA em leitura e matemática
Agasisti e Zoido (2019)	Recursos financeiros, qualificação docente, número de alunos	Taxas de progressão, notas padronizadas em leitura e matemática
Torres-Samuel <i>et al.</i> (2020)	Percentual do PIB em educação e P&D, número de universidades	Exportações de alta tecnologia, serviços de TIC
Henriques <i>et al.</i> (2022)	Índice de infraestrutura escolar, recursos instrucionais, razão aluno-professor	Notas médias em leitura, matemática e ciências
Agasisti <i>et al.</i> (2022)	Qualidade docente, intensidade de ensino, tamanho das turmas	Progressão escolar, notas em matemática e português

Fonte: Elaborada pelo autor.

Aparicio *et al.* (2018) e Agasisti e Zoido (2019) incorporam investimentos em infraestrutura, número de professores e qualificação docente como elementos de entrada. Mesmo estudos mais recentes, como Agasisti *et al.* (2022), seguem essa lógica ao considerar variáveis associadas à estrutura escolar como insumos.

Diferente dos estudos que assumem tais variáveis como insumos disponíveis, neste trabalho, adota-se outra perspectiva: variáveis como número de matrículas, docentes, escolas e turmas são tratadas como resultados do modelo. Essa escolha fundamenta-se no objetivo de avaliar em que medida o recurso financeiro transferido pelo FNDE se transforma em expansão ou fortalecimento da capacidade educacional das unidades analisadas.

### **2.3 Modelos DEA para Alocação de Recursos**

Nesta seção, serão explorados os principais modelos DEA aplicados à alocação de recursos, suas metodologias, e os contextos educacionais onde foram utilizados, destacando estudos que ilustram sua aplicabilidade e impacto. De acordo com Emrouznejad e Yang (2018), dos estudos de DEA publicados entre 1978 e 2016, 176 publicações focaram em questões relacionadas à alocação de recursos.

Um dos primeiros trabalhos publicados neste campo foi o de Cook e Kress (1999), que introduziu uma abordagem baseada em dois princípios: invariância da eficiência e minimalidade de Pareto. No modelo proposto pelos autores, calcula-se a eficiência inicial das DMUs com um modelo DEA tradicional e, em seguida, são introduzidos os custos fixos como *inputs* adicionais e utiliza-se programação linear para redistribuir recursos mantendo a eficiência inicial inalterada.

A partir deste trabalho, diversos pesquisadores desenvolveram modelos que introduziram restrições adicionais para maximizar a eficiência média das DMUs após a alocação dos recursos. O modelo proposto por Beasley (2003) é um dos mais referenciados na literatura. O autor parte da ideia de que a simples mensuração de eficiência não é suficiente quando há um montante fixo de recursos a ser distribuído entre as unidades. Assim, o modelo propõe uma reformulação do DEA tradicional em que a alocação de um custo fixo às DMUs passa a ser uma variável de decisão do próprio modelo.

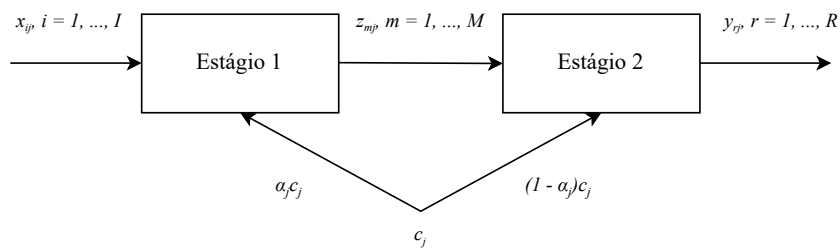
O princípio central consiste em determinar uma distribuição dos recursos que maximize a eficiência média do conjunto de unidades, respeitando simultaneamente a restrição de orçamento total e a estrutura de produção observada. Para isso, cada unidade recebe uma parcela

do custo fixo disponível, de forma que sua eficiência relativa seja recalculada levando esse novo insumo em conta.

Embora o modelo de Beasley (2003) represente uma das principais formulações para alocação de recursos em DEA, sua aplicação exige a resolução de problemas de programação não linear e a incorporação do processo de alocação diretamente na formulação do modelo DEA. Neste trabalho, opta-se por uma abordagem alternativa, em que a eficiência técnica é inicialmente mensurada de forma independente e, em seguida, combinada a critérios de necessidade socioeducacional para orientar a distribuição dos recursos.

Outros trabalhos têm adotado uma abordagem de duas fases para a resolução dos problema de alocação de custos fixos. A Figura 3 ilustra o funcionamento de um modelo DEA de dois estágios com alocação de custos fixos, proposto por Yu *et al.* (2016) com base nos estudos de Chen *et al.* (2009) e Du *et al.* (2014).

Figura 3 – Metodologia de duas fases



Fonte: Yu *et al.* (2016)

No primeiro estágio, os *inputs*  $x_{ij}$  são utilizados para gerar *outputs* intermediários  $z_{mj}$  que, por sua vez, atuam como *inputs* para o segundo estágio, onde os *outputs* finais  $y_{rj}$  são produzidos. O modelo considera que cada DMU recebe um custo fixo total  $c_j$ , que é dividido proporcionalmente entre os dois estágios, sendo  $\alpha c_j$  destinado ao primeiro estágio e  $(1 - \alpha)c_j$  ao segundo, onde  $\alpha \in [0, 1]$  define a proporção alocada a cada estágio.

Em um contexto nacional, o trabalho de Mello *et al.* (2006) propõe um algoritmo sequencial para alocação de recursos discretos utilizando DEA. O modelo apresentado foi desenvolvido para a distribuição de vagas docentes na Universidade Federal Fluminense (UFF). O algoritmo utiliza o modelo DEA CCR, adaptado com restrições aos pesos para refletir as prioridades estabelecidas pelos gestores e a distribuição dos recursos ocorre de forma iterativa, com recursos alocados inicialmente às DMUs mais eficientes e, posteriormente, às menos eficientes conforme os critérios definidos pelos autores.

Apesar da importância desses modelos, sua utilização envolve inserir o montante distribuído como um novo *input* dentro do próprio modelo, o que altera diretamente o cálculo de eficiência. Essa característica pode ser inadequada quando o objetivo é avaliar a eficiência com base nas condições originais do sistema educacional e, somente em um segundo momento, propor ajustes distributivos.

Nesse sentido, trabalhos como o de Silva e Yamashita (2010) mostram que é possível adotar metodologias alternativas de distribuição baseadas em critérios de equidade e necessidade permitindo que a avaliação de desempenho e a etapa de distribuição sejam tratadas como processos complementares, mas independentes.

## 2.4 Distribuição de Recursos com Base em Equidade

Diferentemente dos modelos de alocação baseados em eficiência, como aqueles discutidos na seção anterior, a perspectiva da distribuição equitativa busca assegurar que os recursos disponíveis cheguem às unidades com maior necessidade. Silva e Yamashita (2010) propõem um modelo normativo para a distribuição dos recursos do Programa Nacional de Apoio ao Transporte Escolar (PNATE) que combina quatro conjuntos de variáveis:

- a) Número de alunos residentes na zona rural;
- b) Recurso total disponível para investimento;
- c) Percentual de alunos residentes na zona rural que utilizam o transporte escolar público; e
- d) Distância máxima entre a sede e os limites do município.

Essas variáveis são ponderadas utilizando a técnica do Processo Hierárquico Analítico (AHP) sendo construído um índice de necessidade que orienta uma distribuição 14,2% dos recursos igualmente entre os municípios e 85,8% devem ser distribuídos com base nas variáveis.

Medrano *et al.* (2021), ao desenvolverem um novo modelo para o PNATE com base em princípios de igualdade, equidade e meritocracia, introduzem uma metodologia baseada em análise fatorial para sintetizar um conjunto maior de variáveis socioeconômicas e operacionais em um único índice padronizado de necessidade. Os autores verificam que os resultados mostram grande mobilidade entre os níveis de necessidade dos municípios, quando comparados com o modelo utilizado pelo FNDE. Aproximadamente um terço das localidades mudou de classificação, sendo que cerca de 35,4% dos municípios reduziram seu nível de necessidade e 35,6% passaram a apresentar maior necessidade.

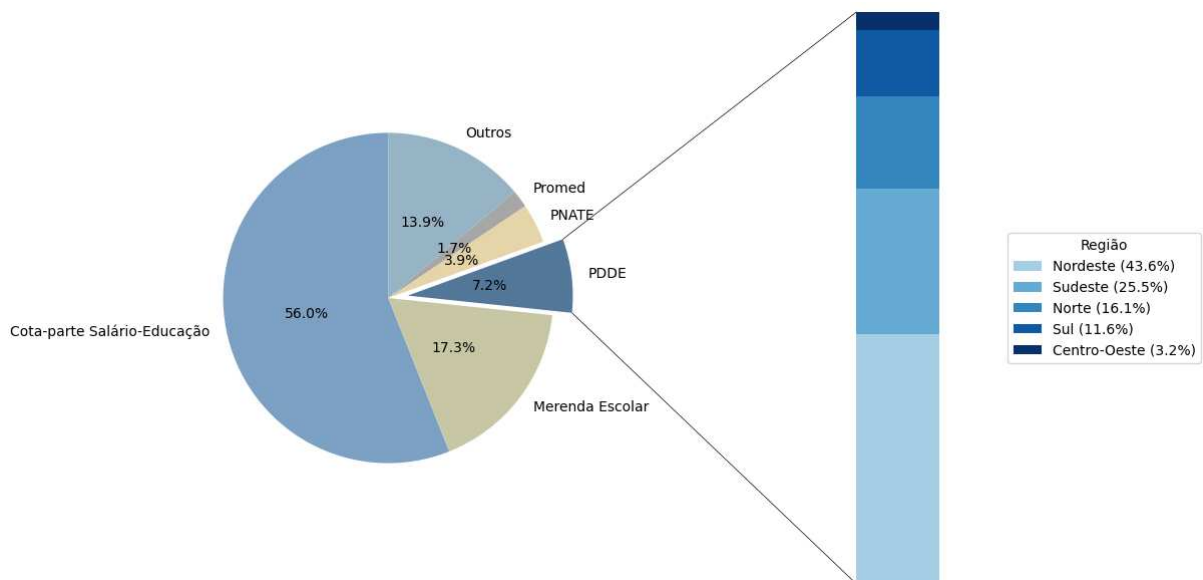
Em um estudo mais recente, Bao *et al.* (2025) analisam, de forma conjunta, a

eficiência e a equidade na alocação dos recursos destinados aos serviços de cuidado aos idosos de 31 províncias chinesas, no período de 2014 a 2022. A eficiência é mensurada por meio de um modelo DEA em três estágios. Os resultados indicam que a eficiência média da alocação de recursos de cuidado aos idosos aumentou ao longo do período, mas permanece relativamente baixa, com diferenças significativas entre as províncias. Em termos de equidade, observam-se fortes desigualdades na distribuição dos benefícios financeiros ligados ao bem-estar dos idosos, enquanto os recursos materiais e humanos apresentam distribuição mais equilibrada.

## 2.5 Execução Financeira e Alocação de Recursos pelo FNDE

A execução financeira do FNDE constitui a principal fonte de financiamento federal para políticas educacionais descentralizadas no Brasil. Conforme dados coletados no Portal da Transparência, foram repassados aproximadamente R\$ 19,36 bilhões aos estados e municípios em 2024, por meio de diferentes programas finalísticos da instituição, dentre os quais se destacam a Cota-parte do Salário-Educação, a Merenda Escolar, o PDDE e o PNATE, como mostra a Figura 4.

Figura 4 – Distribuição dos Recursos do FNDE por Programa em 2024



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dentre esses valores, apenas os relativos aos programas Merenda Escolar, PNATE e PDDE devem ser classificadas como voluntários, pois são recursos transferidos a título de cooperação e mediante o atendimento de diversos requisitos impostos pelo FNDE. Ao observar a

execução do PDDE, uma das principais ações do FNDE, evidencia-se uma variação significativa entre regiões do país, com mais de 80% do valor concentrado nas regiões Nordeste, Sudeste e Norte. Esse padrão pode estar associado ao fato de a iniciativa ter caráter discricionário, permitindo ao governo federal direcionar recursos com maior flexibilidade para apoiar políticas públicas em regiões com maiores desafios estruturais.

Mesmo representando uma fração relativamente pequena da transferência total do FNDE, o PDDE revela padrões importantes de distribuição regional, especialmente por direcionar recursos de forma mais intensa a regiões historicamente menos favorecidas. A relação entre o contexto geral e o detalhamento desse programa servem de base para justificar as análises posteriores de eficiência e distribuição no sistema educacional brasileiro.

### 3 METODOLOGIA

Este capítulo apresenta a metodologia adotada no desenvolvimento da pesquisa, descrevendo os procedimentos, as escolhas das variáveis, a coleta de dados e os fundamentos que orientaram o modelo proposto para a alocação de recursos públicos educacionais.

#### 3.1 Descrição da Pesquisa

Do ponto de vista metodológico, esta pesquisa caracteriza-se por uma abordagem quantitativa. De acordo com Creswell e Creswell (2017), a pesquisa quantitativa caracteriza-se como uma abordagem voltada à testagem objetiva de teorias, por meio da análise das relações entre variáveis previamente definidas, que são operacionalizadas de forma mensurável, permitindo a obtenção de dados numéricos que podem ser analisados por meio de procedimentos estatísticos. Ademais, os autores explicam que a estrutura do relato científico em pesquisas quantitativas tende a seguir um formato sistemático, composto por introdução, revisão de literatura, métodos, resultados e discussão.

Conforme tipologia proposta por Gil (), a pesquisa pode ser classificada quanto aos seus objetivos e procedimentos técnicos. No presente estudo, a investigação apresenta caráter exploratório e descritivo, na medida em que busca proporcionar maior compreensão do problema analisado e descrever relações entre variáveis a partir de dados observados. Ademais, quanto aos procedimentos técnicos, trata-se de uma pesquisa documental e bibliográfica, uma vez que se fundamenta exclusivamente em dados secundários provenientes de documentos oficiais e bases estatísticas previamente produzidas, não envolvendo coleta de dados *in loco*.

#### 3.2 Cenário da Pesquisa e Recorte Temporal

O cenário da pesquisa é composto pelas unidades federativas brasileiras, no contexto da avaliação do desempenho relativo na aplicação de recursos públicos educacionais. A definição desse cenário está associada à adequação do nível federativo à metodologia proposta, uma vez que os estados exercem um papel central na coordenação e na execução de políticas educacionais descentralizadas. A disponibilidade de bases de dados oficiais, consolidadas e comparáveis nesse nível constitui um requisito para a construção e aplicação dos modelos empregados na metodologia.

O recorte temporal da pesquisa é composto por diferentes anos-base, definidos

em função da periodicidade e da disponibilidade das bases de dados oficiais utilizadas. Para cada fonte, foram considerados os dados mais recentes disponíveis no momento da pesquisa, abrangendo o período de 2021 a 2024. As informações são integradas em um único momento analítico, caracterizando um recorte transversal construído a partir de bases temporais distintas (Olsen e George, ).

### 3.3 Etapas da Pesquisa

A Figura 5 apresenta sinteticamente as etapas metodológicas adotadas neste trabalho. O ponto de partida consiste na definição do problema de pesquisa e na delimitação das Unidades da Federação como unidades tomadoras de decisão, uma vez que esses entes concentram a gestão dos recursos educacionais analisados.

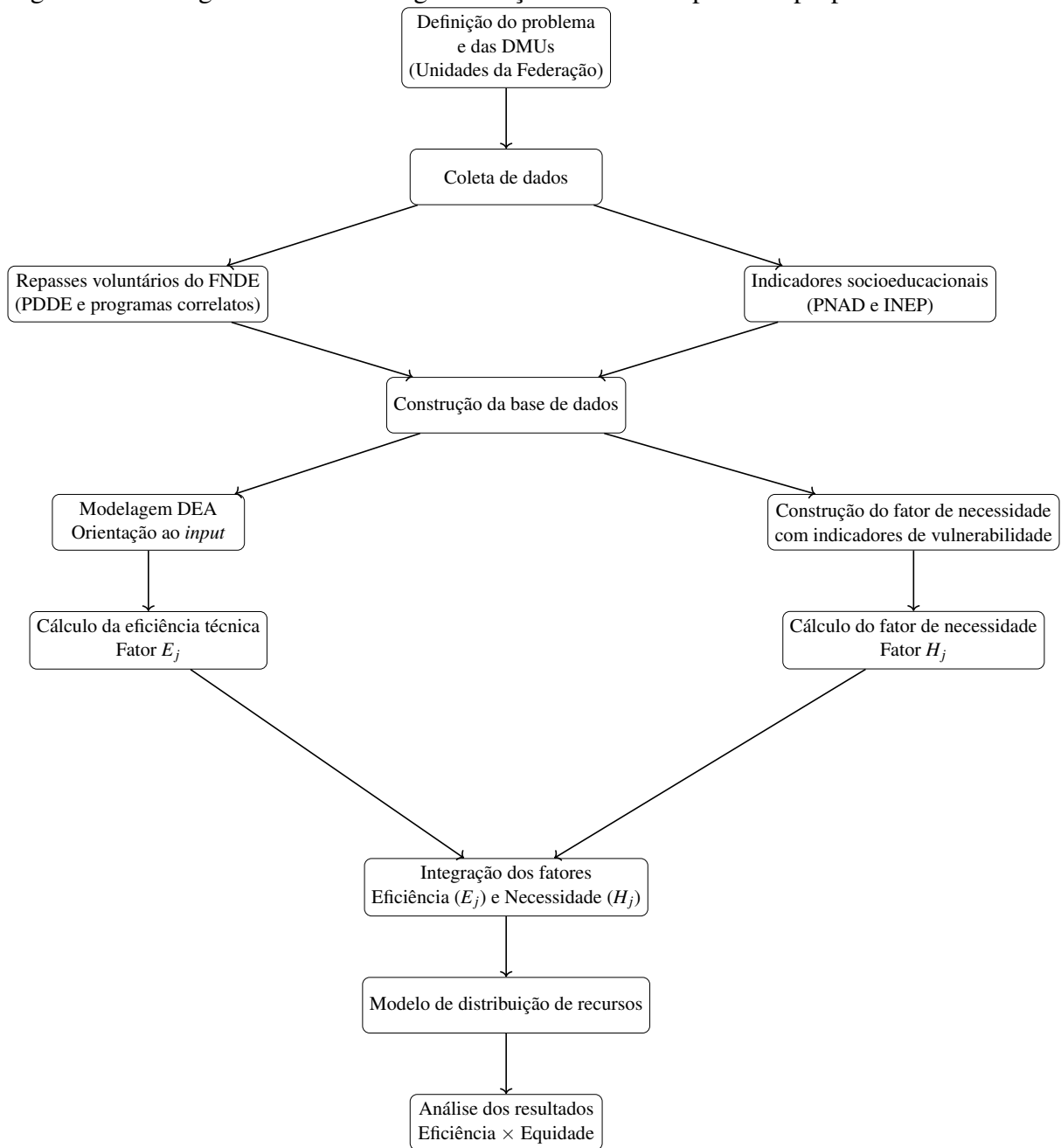
Em seguida, realiza-se a coleta e organização dos dados necessários à aplicação do modelo. São utilizados dados provenientes de bases oficiais, incluindo informações financeiras relativas aos repasses voluntários realizados pelo FNDE, bem como indicadores socioeducacionais selecionados com o objetivo de representar as condições estruturais e sociais das unidades analisadas.

A eficiência técnica das DMUs é, então, estimada por meio da aplicação de modelos clássicos de DEA, apresentados no Capítulo 2. Adotam-se modelos orientados para os *inputs*, considerando diferentes pressupostos de retornos de escala e distintas formas de especificação das variáveis de entrada, incluindo *outputs* expressos em valores absolutos e em forma de razão. Como resultado dessa etapa, obtém-se um fator de eficiência que sintetiza o desempenho relativo das unidades na transformação dos recursos recebidos em resultados.

Paralelamente, constrói-se um fator de necessidade a partir de indicadores de vulnerabilidade socioeducacional, que busca captar as diferenças existentes entre os estados em termos de condições sociais e educacionais, permitindo que tais desigualdades sejam consideradas no processo de distribuição dos recursos.

Na etapa final, os fatores de eficiência e necessidade são combinados em um modelo de distribuição de recursos sob restrição orçamentária fixa, possibilitando a simulação de diferentes cenários a partir da ponderação entre os critérios adotados. A alocação final corresponde à alocação meta definida pelo modelo acrescida dos recursos distribuídos a partir do montante considerado. Por fim, realiza-se a comparação percentual entre a alocação inicial, observada nos valores históricos dos repasses, e a alocação final obtida em cada cenário.

Figura 5 – Fluxograma da metodologia alocação de recursos públicos proposta



Fonte: Elaborada pelo autor.

### 3.4 Especificação dos Cenários de Aplicação dos Modelos DEA

Com base nos modelos de Análise Envoltória de Dados discutidos no Capítulo 2, esta seção descreve os cenários de aplicação considerados no estudo, que integram a construção da metodologia proposta. A definição desses cenários tem como objetivo avaliar o desempenho relativo das unidades tomadoras de decisão sob diferentes configurações, permitindo examinar a sensibilidade dos resultados às escolhas adotadas.

Foram considerados quatro cenários de aplicação, definidos a partir da combinação de distintos pressupostos quanto aos retornos de escala e à forma de especificação das variáveis utilizadas nos modelos DEA. Em todos os cenários, os modelos são orientados para os *inputs*, uma vez que a análise se concentra na capacidade das unidades tomadoras de decisão em minimizar a utilização de recursos públicos.

Os cenários diferenciam-se, primeiramente, quanto ao pressuposto de retornos de escala adotado. Dois cenários são formulados sob a hipótese de retornos constantes de escala, conforme os modelos apresentados na Tabela 1, enquanto os outros dois consideram retornos variáveis de escala, nos moldes dos modelos apresentados na Tabela 2.

Adicionalmente, os cenários distinguem-se quanto à forma de especificação das variáveis: em dois cenários, as variáveis são consideradas em seus valores absolutos, seguindo as formulações tradicionais dos modelos DEA; nos dois cenários restantes, são incorporadas variáveis expressas em forma de razão, caso em que são adotados os modelos apresentados na Tabela 8, desenvolvidos especificamente para o tratamento desse tipo de variável.

Dessa forma, os quatro cenários analisados podem ser sintetizados da seguinte maneira: (i) modelo DEA orientado para os *inputs* com retornos constantes de escala e variáveis em níveis absolutos; (ii) modelo DEA orientado para os *inputs* com retornos constantes de escala e inclusão de variáveis em forma de razão; (iii) modelo DEA orientado para os *inputs* com retornos variáveis de escala e variáveis em níveis absolutos; e (iv) modelo DEA orientado para os *inputs* com retornos variáveis de escala e inclusão de variáveis em forma de razão. A Tabela 5 apresenta um resumo dessas informações, bem como as respectivas abreviações adotadas ao longo do estudo para a apresentação e discussão dos resultados.

Tabela 5 – Resumo dos cenários de aplicação dos modelos DEA

<b>Cenário</b>	<b>Abreviação</b>	<b>Modelo DEA orientados ao <i>input</i></b>	<b>Retornos de escala</b>	<b>Especificação das variáveis</b>
Cenário 1	CCR-ABS	DEA-CCR	Constantes	Níveis absolutos
Cenário 2	CCR-RATIO	DEA-CCR	Constantes	Variáveis razão
Cenário 3	BCC-ABS	DEA-BCC	Variáveis	Níveis absolutos
Cenário 4	BCC-RATIO	DEA-BCC	Variáveis	Variáveis razão

Fonte: Elaborada pelo autor.

### 3.5 Variáveis Utilizadas nos Modelos DEA

Para a análise proposta na primeira etapa deste estudo, foram considerados dois conjuntos de variáveis distintos, buscando compreender o comportamento das unidades federativas sob diferentes perspectivas de desempenho educacional. Em ambos os casos, o modelo considerou um único *input*, representado pelo valor total de recursos financeiros transferidos a cada unidade federativa por meio do PDDE. A opção por empregar apenas um *input* está alinhada ao propósito de mensurar a eficiência no uso dos recursos públicos educacionais e de subsidiar, em etapa posterior, a construção de um mecanismo de alocação de recursos com critérios definidos pelo gestor público.

No primeiro caso, o modelo utilizou exclusivamente variáveis em valores absolutos como *outputs*, refletindo a dimensão estrutural do sistema educacional. Foram incluídas as seguintes variáveis: número de matrículas, número de docentes, número de escolas e número de turmas. O objetivo deste primeiro caso foi observar o desempenho das unidades considerando o tamanho e a abrangência de suas redes de ensino. A Tabela 6 resume o conceito de cada variável utilizada neste primeiro caso.

Tabela 6 – Variáveis utilizadas no modelo com valores absolutos

<b>Tipo</b>	<b>Variável</b>	<b>Descrição</b>
Input	Recursos PDDE	Valor total de recursos financeiros transferidos via PDDE
Output 1	Matrículas	Total de alunos matriculados na rede estadual
Output 2	Docentes	Total de professores atuantes na rede de ensino
Output 3	Escolas	Número total de estabelecimentos de ensino
Output 4	Turmas	Total de turmas em funcionamento

Fonte: Elaborada pelo autor.

No segundo caso, buscou-se ampliar a análise incorporando variáveis de desempenho em formato de taxas ou indicadores, conhecidas como *outputs-razão*. Essas variáveis expressam resultados educacionais relativos, permitindo avaliar a eficiência na geração de qualidade educacional a partir dos recursos investidos.

Esses *outputs* incluem o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) dos anos iniciais, anos finais e ensino médio, além da Taxa de Distorção Idade-Série (TDI) do ensino fundamental e do ensino médio. Nesse caso, como a TDI é um indicador em que valores menores representam um melhor desempenho, foi necessário aplicar uma transformação: usa-se o termo complementar ( $1 - TDI$ ), de modo que valores maiores passam a indicar maior eficiência. A Tabela 7 resume as variáveis utilizadas no segundo caso.

Tabela 7 – Variáveis utilizadas no modelo com *output-razão*

Tipo	Variável	Descrição
Input	Recursos PDDE	Valor total de recursos financeiros transferidos via PDDE
Output 1	IDEB anos iniciais	Reflete fluxo escolar e as médias de desempenho nas avaliações aplicadas nos anos iniciais do ensino fundamental
Output 2	IDEB anos finais	Reflete fluxo escolar e as médias de desempenho nas avaliações aplicadas nos anos finais do ensino fundamental
Output 3	IDEB ensino médio	Reflete fluxo escolar e as médias de desempenho nas avaliações aplicadas nos ensino médio
Output 4	$1 - TDI$ (ensino fundamental)	Percentual de alunos dentro da idade adequada para o ensino fundamental
Output 5	$1 - TDI$ (ensino médio)	Percentual de alunos dentro da idade adequada para o ensino médio

Fonte: Elaborada pelo autor.

### 3.5.1 Adaptação para Variáveis em Forma de Razão

A utilização de variáveis em formato de razão é justificada pela necessidade de representar o desempenho educacional com maior ênfase na qualidade de ensino produzida. Enquanto os valores absolutos expressam a dimensão física do sistema educacional, os indicadores permitem avaliar a eficiência relativa, evidenciando como o investimento financeiro se converte em qualidade de ensino.

Contudo, conforme Emrouznejad e Amin (2009), o uso de *outputs-razão* deve ser feito com cautela, uma vez que pode afetar o axioma de convexidade dos modelos DEA. Para os autores, a aplicação direta de variáveis razão em modelos DEA tradicionais gera inconsistências, uma vez que a razão entre duas variáveis não garante uma combinação linear convexa.

Para superar esse problema, os autores propõem uma abordagem de reformulação baseada na decomposição da variável razão em seus componentes numerador e denominador. Dessa forma, considerando que um *output-razão* seja representado pela Equação 3.1, onde  $n_{rj}$  é o numerador e  $d_{rj}$  é o denominador.

$$y_{rj} = \frac{n_{rj}}{d_{rj}}. \quad (3.1)$$

A adaptação consiste em tratar  $n$  e  $d$  como variáveis distintas, incorporando-as ao modelo e evitando trabalhar diretamente com a razão.

Matematicamente, o modelo adaptado segue a estrutura apresentada na Tabela 8, introduzindo uma restrição especial que passa a comparar numeradores e denominadores separadamente, garantindo que a razão da DMU avaliada respeite o axioma da convexidade.

Tabela 8 – Modelos DEA com *output*-razão

DEA-CCR com <i>output</i> -razão	DEA-BCC com <i>output</i> -razão
$\min \theta$ <p>Sujeito a:</p> $\sum_{j=1}^n x_{ij}\lambda_j - \theta x_{i0} \leq 0 \quad \forall i$ $\sum_{j=1}^n y_{rj}\lambda_j \geq y_{r0} \quad \forall r, r \neq k$ $\sum_{j=1}^n n_{kj}\lambda_j - y_{k0} \sum_{j=1}^n d_{kj}\lambda_j \geq 0 \quad r = k$	$\min \theta$ <p>Sujeito a:</p> $\sum_{j=1}^n x_{ij}\lambda_j - \theta x_{i0} \leq 0 \quad \forall i$ $\sum_{j=1}^n y_{rj}\lambda_j \geq y_{r0} \quad \forall r, r \neq k$ $\sum_{j=1}^n n_{kj}\lambda_j - y_{k0} \sum_{j=1}^n d_{kj}\lambda_j \geq 0 \quad r = k$ $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$

Fonte: Emrouznejad e Amin (2009)

Para aplicar esse procedimento no estudo de caso proposto, faz-se necessário realizar a desagregação das variáveis razões apresentadas na Tabela 7. No caso do TDI, utiliza-se  $(1 - TDI)$  multiplicado pelo total de matrículas. Já no caso do IDEB, a desagregação não ocorre como uma razão simples, pois o índice é composto por dois elementos: a média das notas do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e a taxa de aprovação multiplicadas. Dessa forma, optou-se por tratar diretamente as notas SAEB como novos *outputs* absolutos e desagregar apenas a taxa de aprovação, como consta resumidamente na Tabela 9.

Cada *output*-razão  $y_j$  passa a ser representado por um par de variáveis associadas, sendo  $n_j$  o seu numerador e  $d_j$  o respectivo denominador. Por exemplo, o numerador  $n_1$  corresponde ao componente quantitativo do *output*-razão  $y_1$ , enquanto  $d_1$  representa o denominador utilizado em seu cálculo, lógica que se repete para os demais indicadores desagregados.

O Apêndice C apresenta a Tabela completa utilizada na primeira etapa do modelo DEA adaptado ao *output*-razão, reunindo o *input* financeiro e todas as variáveis já desagregadas, conforme o procedimento descrito nesta subseção.

Tabela 9 – Variáveis desagregadas

Variável	Descrição	Tipo
$y_1$	Taxa de aprovação do Ensino Fundamental nos anos iniciais	<i>Output</i> -razão
$n_1$	Número de aprovados no Ensino Fundamental anos iniciais	Numerador
$d_1$	Matrículas no Ensino Fundamental anos iniciais	Denominador
$y_2$	Taxa de aprovação do Ensino Fundamental anos finais	<i>Output</i> -razão
$n_2$	Número de aprovados no Ensino Fundamental anos finais	Numerador
$d_2$	Matrículas no Ensino Fundamental anos finais	Denominador
$y_3$	Taxa de aprovação do Ensino Médio	<i>Output</i> -razão
$n_3$	Número de aprovados no Ensino Médio	Numerador
$d_3$	Matrículas no Ensino Médio	Denominador
$y_4$	$(1 - TDI)$ do Ensino Fundamental	<i>Output</i> -razão
$n_4$	Alunos sem distorção idade-série no Ensino Fundamental	Numerador
$d_4$	Matrículas totais no Ensino Fundamental	Denominador
$y_5$	Indicador $(1 - TDI)$ do Ensino Médio	<i>Output</i> -razão
$n_5$	Alunos sem distorção idade-série no Ensino Médio	Numerador
$d_5$	Matrículas no Ensino Médio	Denominador
$y_6$	Nota SAEB Ensino Fundamental anos iniciais	<i>Output</i> absoluto
$y_7$	Nota SAEB Ensino Fundamental anos finais	<i>Output</i> absoluto
$y_8$	Nota SAEB Ensino Médio	<i>Output</i> absoluto

Fonte: Elaborada pelo autor.

### 3.6 Construção do Modelo de Distribuição

A metodologia adotada neste estudo está estruturada em duas etapas integradas: a avaliação da eficiência técnica das unidades decisórias e a formulação de um modelo de distribuição de recursos fundamentado tanto no desempenho relativo dos entes quanto nas suas necessidades educacionais e socioeconômicas. A primeira etapa utiliza os modelos clássicos de DEA orientados aos insumos, com o objetivo de mensurar a eficiência técnica de cada ente. A segunda etapa utiliza esses resultados para simular cenários alternativos de alocação de recursos, equilibrando critérios de mérito (eficiência) e equidade (necessidade) por meio de um parâmetro de ponderação.

Na etapa inicial, cada ente  $j \in J$  é avaliado por meio de um modelo DEA orientado para os insumos, produzindo um escore de eficiência técnica  $\theta_j \in [0, 1]$ . A projeção da DMU para a fronteira de eficiência é dada pela redução do insumo financeiro observado  $x_{1j}^{obs}$ , gerando um insumo meta, que, por sua vez, é calculado conforme Equação 3.2.

$$x_{1j}^{meta} = x_{1j}^{obs} \cdot \theta_j. \quad (3.2)$$

A diferença entre o insumo financeiro observado e a sua meta (Equação 3.3) repre-

sentado o montante de recurso potencialmente economizável, caso o ente operasse com 100% de eficiência.

$$\Delta_j = x_{1j}^{obs} - x_{1j}^{meta}. \quad (3.3)$$

O montante total de recursos ( $S$ ) que será distribuído na etapa seguinte é dado pela soma das economias potenciais dos entes, de acordo com a Equação 3.4.

$$S = \sum_{j=1}^n \Delta_j. \quad (3.4)$$

Para a construção do fator de eficiência do modelo de distribuição, é feita uma transformação do conjunto de todas as eficiências técnicas,  $\theta_j$ , de modo que as eficiências representem pesos relativos comparáveis. Esse procedimento ocorre nos moldes da Equação 3.5.

$$E_j = \frac{\theta_j}{\sum_{j \in J} \theta_j}. \quad (3.5)$$

Onde  $E_j$  expressa a participação relativa do ente na eficiência total observada no sistema.

O fator de necessidade, por sua vez, é composto a partir de oito indicadores educacionais e socioeconômicos obtidos do acervo de dados da plataforma Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil (AtlasBR), produzida em parceria com o Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (PNUD), e do Portal de Dados Abertos do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). Os indicadores, bem como suas definições e fontes oficiais, são elencados na Tabela 10.

Cada indicador é normalizado de acordo com seu sentido de vulnerabilidade, que se refere à direção em que alterações no indicador representam uma maior necessidade de atenção. Em alguns indicadores, valores mais elevados indicam piores condições (por exemplo, taxa de analfabetismo ou percentual de extremamente pobres). Em outros, ocorre o inverso: valores mais baixos representam piores condições (por exemplo, frequência líquida escolar, IDH-M Educação ou INSE). Dessa forma, dois procedimentos de normalização são aplicados, conforme a Expressão 3.6.

Tabela 10 – Indicadores utilizados para compor fator de necessidade do modelo alocativo

Indicador	Definição	Fonte	Orientação
Taxa de analfabetismo (15 anos ou mais)	Proporção da população com 15 anos ou mais de idade que não sabe ler e escrever	PNAD 2021	Maior valor: maior vulnerabilidade
Frequência líquida ao ensino básico	Percentual da população em idade adequada que frequenta regularmente a etapa do ensino básico correspondente à sua faixa etária. <sup>1</sup>	PNAD 2021	Menor valor: maior vulnerabilidade
Frequência líquida ao ensino fundamental	Percentual da população em idade adequada que frequenta o ensino fundamental. <sup>1</sup>	PNAD 2021	Menor valor: maior vulnerabilidade
Frequência líquida ao ensino médio	Percentual da população em idade adequada que frequenta o ensino médio. <sup>1</sup>	PNAD 2021	Menor valor: maior vulnerabilidade
Percentual de pessoas de 25 anos ou mais com ensino médio completo	Proporção da população com 25 anos ou mais de idade que concluiu, no mínimo, o ensino médio.	PNAD 2021	Menor valor: maior vulnerabilidade
Percentual de extremamente pobres	Proporção da população cuja renda domiciliar per capita se encontra abaixo da linha de extrema pobreza. <sup>2</sup>	PNAD 2021	Maior valor: maior vulnerabilidade
IDH-M Educação	Dimensão educacional do Índice de Desenvolvimento Humano Municipal.	PNAD 2021	Menor valor: maior vulnerabilidade
Nível Socioeconômico (INSE)	Expressa o nível socioeconômico médio dos estudantes, considerando características de renda, escolaridade familiar e bens do domicílio.	INEP 2025	Menor valor: maior vulnerabilidade

Fonte: Elaborada pelo autor.

<sup>1</sup> Considera-se idade adequada: 6 a 14 anos para o ensino fundamental, 15 a 17 anos para o ensino médio e 6 a 17 anos para a educação básica, conforme a PNAD Contínua (IBGE).

<sup>2</sup> A condição de extrema pobreza é definida como a proporção da população vivendo em domicílios com renda domiciliar per capita inferior à linha internacional de pobreza de US\$ 3,00 por dia, expressa a preços internacionais de 2021, convertida para reais pela Paridade do Poder de Compra (PPP) e corrigida pelos deflatores regionais do Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA), conforme metodologia da PNAD Contínua.

$$s_{mj} = \begin{cases} \frac{x_{mj} - x_m}{\bar{x}_m - x_m}, & \text{se valores maiores indicam maior necessidade;} \\ \frac{\bar{x}_m - x_{mj}}{\bar{x}_m - x_m}, & \text{se valores menores indicam maior necessidade;} \end{cases} \quad (3.6)$$

Onde  $s_{mj}$  representa um subíndice calculado,  $x_{mj}$  representa o valor do indicador  $m$  no ente  $j$  em análise,  $x_m$  representa o menor valor do indicador  $m$  entre todos os entes, e  $\bar{x}_m$  representa o maior valor do indicador  $m$  entre todos os entes. Em seguida, os subíndices são agregados com pesos iguais, gerando um valor ( $N_j$ ) para cada unidade, em concordância com a Equação 3.7.

$$N_j = \frac{1}{8} \sum_{m=1}^8 s_{mj}. \quad (3.7)$$

Para fins de distribuição, esse valor é convertido em um fator de necessidade ( $H_j$ ) por meio da divisão pela soma total dos índices, de modo que cada unidade passe a representar uma proporção relativa do conjunto, conforme Equação 3.8.

$$H_j = \frac{N_j}{\sum_{j \in J} N_j}. \quad (3.8)$$

Na regra de distribuição, propõe-se um valor  $\omega_j$  que combina o fator de eficiência e o fator de necessidade por meio de um parâmetro  $\lambda \in [0, 1]$ , como se expressa na Equação 3.9. Esse parâmetro controla a importância relativa atribuída a cada dimensão no processo distributivo.

$$\omega_j(\lambda) = \lambda E_j + (1 - \lambda)H_j. \quad (3.9)$$

Valores de  $\lambda$  próximos de 1 produzem uma distribuição mais orientada pela eficiência técnica, enquanto valores próximos de 0 favorecem uma distribuição mais centrada na necessidade. Finalmente, o valor dos recursos alocados ao ente  $j$  é calculado a partir da multiplicação de  $\omega_j$  pelo montante a ser distribuído, como é possível observar na Equação 3.10.

$$R_j(\lambda) = \omega_j(\lambda) \cdot S. \quad (3.10)$$

Esse valor representa o montante a ser alocado a partir do total disponível  $S$ , conforme o peso relativo definido pela combinação entre eficiência e necessidade.

Por fim, destaca-se que o objetivo da distribuição não é reavaliar a eficiência técnica após sua aplicação, mas sim propor cenários alternativos de alocação que reflitam diferentes prioridades das políticas públicas. Nesse sentido, o modelo admite análises de sensibilidade por meio da simulação de múltiplos valores de  $\lambda$  no intervalo  $[0, 1]$ , permitindo avaliar como diferentes graus de ponderação entre eficiência e necessidade afetam a distribuição final dos recursos.

### 3.7 Coleta de Dados

Os dados necessários para a análise foram coletados de diferentes fontes públicas confiáveis. As informações referentes aos recursos financeiros transferidos pelo FNDE no âmbito do PDDE foram obtidas por meio do Portal da Transparência da Controladoria-Geral da União (CGU), que disponibiliza dados detalhados sobre os valores efetivamente repassados às instituições de ensino por unidade da federação e município beneficiado.

O acesso a essa base de dados foi realizado por meio do endereço eletrônico <https://portaldatransparencia.gov.br/transferencias/consulta?ordenarPor=mêsAno&direcao=desc> (consulta em 15/09/2025), aplicando-se filtros correspondentes ao período de referência (todo o ano de 2024) e ao órgão responsável pelas transferências (FNDE). No referido exercício, os repasses realizados no âmbito do PDDE totalizaram mais de R\$ 1,3 bilhões destinados diretamente a estados e municípios brasileiros.

A Tabela 11 apresenta a consolidação dos valores transferidos por unidade da federação. Observa-se que alguns estados com redes amplas não recebem necessariamente os maiores valores por aluno, ao passo que unidades menores, às vezes figuram entre as que recebem repasses relativamente altos.

Tabela 11 – Transferência de recursos via PDDE

<b>Estado</b>	<b>Recursos</b>	<b>Alunos</b>	<b>Recursos por aluno</b>
<b>Bahia</b>	R\$ 203.890.312,20	2.352.936	R\$ 86,65
<b>Alagoas</b>	R\$ 43.523.392,36	566.706	R\$ 76,80
<b>Ceará</b>	R\$ 111.771.160,90	1.495.323	R\$ 74,75
<b>Piauí</b>	R\$ 41.499.213,23	560.855	R\$ 73,99
<b>Paraíba</b>	R\$ 42.412.557,45	666.196	R\$ 63,66
<b>Sergipe</b>	R\$ 24.208.530,31	386.813	R\$ 62,58
<b>Rio Grande do Norte</b>	R\$ 31.160.388,02	556.855	R\$ 55,96
<b>Pernambuco</b>	R\$ 77.329.542,52	1.558.791	R\$ 49,61
<b>Maranhão</b>	R\$ 33.170.229,00	1.313.262	R\$ 25,26
<b>São Paulo</b>	R\$ 237.746.380,70	7.182.241	R\$ 33,10
<b>Rio de Janeiro</b>	R\$ 49.490.617,51	2.494.971	R\$ 19,84
<b>Minas Gerais</b>	R\$ 58.336.513,00	3.065.958	R\$ 19,03
<b>Espírito Santo</b>	R\$ 10.591.241,00	628.052	R\$ 16,86
<b>Acre</b>	R\$ 17.624.613,00	182.580	R\$ 96,53
<b>Tocantins</b>	R\$ 21.666.030,07	288.250	R\$ 75,16
<b>Pará</b>	R\$ 108.249.433,90	1.656.190	R\$ 65,36
<b>Roraima</b>	R\$ 8.127.921,88	140.680	R\$ 57,78
<b>Amazonas</b>	R\$ 49.288.818,75	881.808	R\$ 55,90
<b>Rondônia</b>	R\$ 14.529.114,14	297.490	R\$ 48,84
<b>Amapá</b>	R\$ 4.757.590,34	163.928	R\$ 29,02
<b>Santa Catarina</b>	R\$ 62.878.524,50	1.231.759	R\$ 51,05
<b>Rio Grande do Sul</b>	R\$ 67.052.922,00	1.580.885	R\$ 42,41
<b>Paraná</b>	R\$ 31.590.211,00	1.797.255	R\$ 17,58
<b>Mato Grosso</b>	R\$ 12.936.148,00	657.700	R\$ 19,67
<b>Mato Grosso do Sul</b>	R\$ 9.570.226,00	500.872	R\$ 19,11
<b>Distrito Federal</b>	R\$ 6.853.815,15	465.427	R\$ 14,73
<b>Goiás</b>	R\$ 15.860.563,00	1.118.969	R\$ 14,17
<b>Total</b>	<b>R\$ 1.396.116.009,93</b>	<b>33.792.752</b>	<b>R\$ 41,31</b>

Fonte: Elaborada pelo autor.

Segundo Morais (2025), o PDDE apresenta um desenho institucional que busca fortalecer a autonomia financeira das escolas e promover a equidade educacional por meio das Ações Integradas (PDDE Qualidade e PDDE Equidade), que direcionam recursos adicionais para contextos mais vulneráveis. No entanto, a autora destaca que a execução financeira nem sempre se traduz em desempenho gerencial efetivo, revelando a importância de compreender como os recursos são aplicados e quais resultados são alcançados. Dessa forma, a análise da eficiência na alocação dos valores repassados através do programa é essencial para avaliar se as transferências estão, de fato, contribuindo para a melhoria das condições de ensino e para a redução das desigualdades regionais.

Outros dados estruturais, como o número de matrículas na rede básica de ensino e o efetivo de docentes, foram obtidos a partir da Sinopse Estatística da Educação Básica de 2024, disponível em <https://www.gov.br/inep/pt-br/aceso-a-informacao/dados-abertos/sinopses-estatisticas/educacao-basica> (consulta em 15/09/2025), que consolida informações do Censo Escolar realizado pelo INEP. Por fim, os outros indicadores, como IDEB e TDI, foram extraídos do Plano de Dados Abertos do INEP, disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/aceso-a-informacao/dados-abertos/indicadores-educacionais> (consulta em 03/07/2025), uma plataforma oficial que centraliza dados relacionados à educação.

Além disso, os dados referentes ao conjunto de indicadores que compõem o modelo de distribuição foram obtidos a partir do Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil, plataforma oficial de consulta ao Índice de Desenvolvimento Humano Municipal (IDHM) e a mais de 200 indicadores de desenvolvimento humano dos entes brasileiros, abrangendo dimensões relacionadas à população, educação, habitação, saúde, trabalho, renda e vulnerabilidade social.

Embora o Atlas Brasil tenha sido originalmente construído com base nos Censos Demográficos de 1991, 2000 e 2010, para a presente pesquisa foram utilizados exclusivamente os indicadores cuja base de dados mais recente tem origem na Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD), no período de 2021. A extração das informações foi realizada por meio do endereço eletrônico: <https://www.undp.org/pt/brazil/atlas-dos-municipios> (consulta em 17/11/2025), aplicando-se, inicialmente, o filtro de territorialidade correspondente a todas as unidades da federação e, em seguida, a seleção individual dos indicadores de interesse, conforme a Tabela 10.

### 3.8 Implementação Computacional

A implementação dos modelos DEA foi realizada por meio dos modelos clássicos DEA-CCR e DEA-BCC, possibilitando a análise do desempenho relativo das unidades federativas sob diferentes pressupostos de retornos de escala. Os modelos foram formulados como problemas de programação linear na linguagem *Python*, com o uso da biblioteca *Pyomo*, e resolvidos com o auxílio do *solver GNU Linear Programming Kit (GLPK)* para a obtenção das soluções ótimas.

Para a construção do modelo de distribuição dos recursos, também foi utilizada a linguagem *Python*, com as rotinas desenvolvidas e executadas no ambiente *Jupyter Notebook*, uma ferramenta interativa que funciona como um caderno digital de pesquisa, no qual é possível reunir código, dados e descrições do processo analítico em um mesmo espaço, facilitando o acompanhamento, a organização e a comunicação dos procedimentos adotados ao longo do estudo (Randles *et al.*, 2017). Essa etapa baseou-se nos resultados obtidos na análise de eficiência, utilizando como insumo os escores de eficiência, além dos dados referentes aos indicadores socioeducacionais, previamente coletados e organizados em arquivos no formato *CSV*.

O *Pyomo* é uma biblioteca robusta de otimização matemática para *Python*, amplamente utilizada para modelagem de problemas lineares, não lineares, inteiros e estocásticos. A ferramenta permite a definição de variáveis, funções objetivo e restrições de forma flexível e estruturada, sendo útil em aplicações de pesquisa operacional (Hart *et al.*, 2011).

O Apêndice A apresenta os códigos-fonte utilizados na implementação dos modelos DEA. Nele, estão descritas as rotinas responsáveis pela leitura e organização dos dados, construção dos modelos orientados a insumos, definição das variáveis e restrições, e cálculo da eficiência e projeções associadas. O Apêndice B reúne os códigos utilizados na implementação do modelo proposto para distribuição, incluindo a construção dos fatores de eficiência e necessidade, bem como a ponderação do parâmetro  $\lambda$ .

O GLPK, desenvolvido por Makhorin (2008), é um *solver* de código aberto voltado para a solução de problemas de programação linear e inteira, amplamente utilizado em aplicações acadêmicas e industriais devido à sua eficiência e flexibilidade, suportando modelos de otimização em grande escala. No contexto deste trabalho, o GLPK foi configurado para processar os modelos aplicados aos estados brasileiros, garantindo a obtenção das eficiências técnicas e a identificação das metas de desempenho que fundamentam o modelo de distribuição proposto.

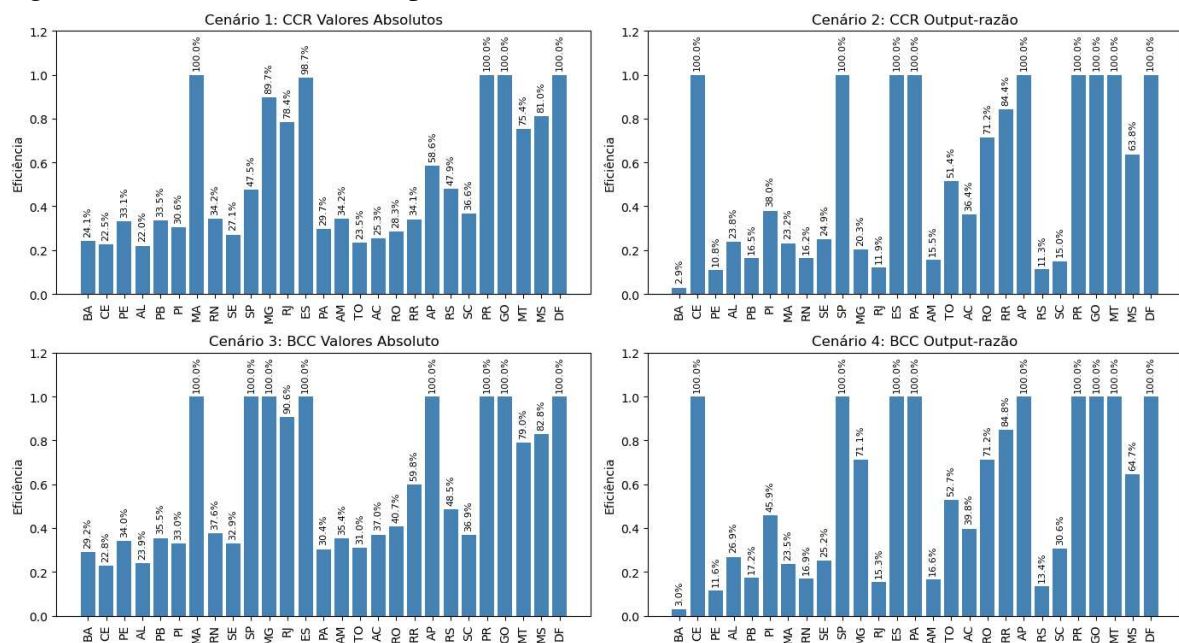
## 4 RESULTADOS

Este capítulo apresenta os resultados obtidos com a aplicação dos procedimentos metodológicos do estudo. Inicialmente, são discutidos os resultados dos modelos clássicos de DEA, seguidos da análise do fator de necessidade e de sua interação com a eficiência técnica. Em seguida, são apresentados os resultados do modelo de distribuição dos recursos, principal contribuição do trabalho. Por fim, realiza-se a análise de sensibilidade do parâmetro  $\lambda$ , com base em um cenário de referência, bem como a interpretação e a discussão dos resultados ao longo do capítulo.

### 4.1 Resultados da Aplicação dos Modelos DEA

Os escores de eficiência técnica obtidos a partir da aplicação dos modelos DEA fornecem uma primeira visão comparativa do desempenho relativo das unidades federativas na utilização dos recursos do PDDE. Os gráficos da Figura 6 apresentam esses resultados para cada cenário analisado. Nos cenários formulados com valores absolutos (Cenários 1 e 3), os coeficientes de variação são de 56,80% e 52,06%, respectivamente, indicando uma distribuição relativamente mais homogênea das eficiências. Em contraste, nos modelos baseados em taxas (Cenários 2 e 4), os coeficientes de variação se elevam para 72,43% e 65,17%, evidenciando maior dispersão dos escores.

Figura 6 – Eficiências relativas por cenário



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na sequência, os valores de  $\theta_j$  foram transformados em participações relativas, conforme a Equação 3.5, deixando de representar apenas a distância à fronteira eficiente e passando a expressar a contribuição proporcional de cada unidade federativa para o desempenho agregado do sistema.

A Tabela 12 apresenta essas participações para os quatro cenários avaliados, evidenciando como a distribuição relativa da eficiência varia conforme a especificação do modelo. Esse procedimento permite comparar os cenários em uma escala única, uma vez que a soma de  $E_j$  é sempre igual a 1, facilitando a leitura conjunta dos resultados. Embora não seja a medida final de alocação, o valor de  $E_j$  será utilizado na próxima etapa como fator distributivo no cálculo dos recursos a serem alocados, modulando a influência do desempenho técnico quando combinado ao fator de necessidade.

Tabela 12 – Participação de cada ente na eficiência total por cenário

Estado	$E_j$			
	CCR-ABS	CCR-RATIO	BCC-ABS	BCC-RATIO
<b>Bahia</b>	0,0170	0,0020	0,0180	0,0020
<b>Ceará</b>	0,0159	0,0696	0,0141	0,0653
<b>Pernambuco</b>	0,0234	0,0075	0,0210	0,0076
<b>Alagoas</b>	0,0156	0,0165	0,0147	0,0176
<b>Paraíba</b>	0,0236	0,0115	0,0219	0,0113
<b>Piauí</b>	0,0216	0,0265	0,0204	0,0300
<b>Maranhão</b>	0,0706	0,0161	0,0617	0,0154
<b>Rio Grande do Norte</b>	0,0241	0,0113	0,0232	0,0110
<b>Sergipe</b>	0,0191	0,0173	0,0203	0,0165
<b>São Paulo</b>	0,0335	0,0696	0,0617	0,0653
<b>Minas Gerais</b>	0,0633	0,0142	0,0617	0,0465
<b>Rio de Janeiro</b>	0,0553	0,0083	0,0559	0,0100
<b>Espírito Santo</b>	0,0697	0,0696	0,0617	0,0653
<b>Pará</b>	0,0210	0,0696	0,0188	0,0653
<b>Amazonas</b>	0,0242	0,0108	0,0219	0,0109
<b>Tocantins</b>	0,0166	0,0358	0,0191	0,0344
<b>Acre</b>	0,0179	0,0253	0,0229	0,0260
<b>Rondônia</b>	0,0200	0,0495	0,0251	0,0465
<b>Roraima</b>	0,0241	0,0587	0,0369	0,0554
<b>Amapá</b>	0,0414	0,0696	0,0617	0,0653
<b>Rio Grande do Sul</b>	0,0338	0,0078	0,0299	0,0088
<b>Santa Catarina</b>	0,0259	0,0104	0,0228	0,0200
<b>Paraná</b>	0,0706	0,0696	0,0617	0,0653
<b>Goiás</b>	0,0706	0,0696	0,0617	0,0653
<b>Mato Grosso</b>	0,0533	0,0696	0,0487	0,0653
<b>Mato Grosso do Sul</b>	0,0572	0,0443	0,0511	0,0423
<b>Distrito Federal</b>	0,0706	0,0696	0,0617	0,0653

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Tabela 13 apresenta os valores de economia identificados em cada cenário de aplicação dos modelos DEA, conforme a Equação 3.3. Esses resultados refletem o potencial de otimização dos recursos públicos sob a hipótese de *outputs* fixos, indicando o montante máximo de recursos que poderia ser liberado a partir das projeções para a fronteira eficiente, calculado de acordo com a Equação 3.4. No âmbito desta pesquisa, esse montante é utilizado como referência para a etapa subsequente de distribuição dos recursos, constituindo uma opção metodológica adotada para operacionalizar o modelo proposto.

Tabela 13 – Valor total economizado por DMU

DMU	Economia			
	CCR-ABS	CCR-RATIO	BCC-ABS	BCC-RATIO
<b>BA</b>	R\$ 154.696.728,43	R\$ 197.973.687,42	R\$ 144.437.242,10	R\$ 197.795.435,67
<b>CE</b>	R\$ 86.589.195,80	R\$ -	R\$ 86.300.609,14	R\$ -
<b>PE</b>	R\$ 51.705.064,00	R\$ 68.939.484,14	R\$ 51.063.125,46	R\$ 68.380.607,84
<b>AL</b>	R\$ 33.937.678,72	R\$ 33.185.030,89	R\$ 33.118.438,49	R\$ 31.820.591,25
<b>PB</b>	R\$ 28.212.046,57	R\$ 35.405.107,82	R\$ 27.371.083,97	R\$ 35.106.170,40
<b>PI</b>	R\$ 28.818.104,33	R\$ 25.718.871,96	R\$ 27.801.824,70	R\$ 22.445.590,85
<b>MA</b>	R\$ -	R\$ 25.474.007,45	R\$ -	R\$ 25.364.955,79
<b>RN</b>	R\$ 20.510.759,10	R\$ 26.110.741,10	R\$ 19.454.539,99	R\$ 25.899.009,71
<b>SE</b>	R\$ 17.649.548,50	R\$ 18.190.849,19	R\$ 16.253.336,13	R\$ 18.097.047,25
<b>SP</b>	R\$ 124.806.131,81	R\$ -	R\$ -	R\$ -
<b>MG</b>	R\$ 6.032.274,67	R\$ 46.470.400,00	R\$ -	R\$ 16.846.911,94
<b>RJ</b>	R\$ 10.707.035,39	R\$ 43.582.729,97	R\$ 4.666.525,47	R\$ 41.940.626,47
<b>ES</b>	R\$ 136.502,16	R\$ -	R\$ -	R\$ -
<b>PA</b>	R\$ 76.048.081,20	R\$ -	R\$ 75.341.005,85	R\$ -
<b>AM</b>	R\$ 32.415.974,87	R\$ 41.658.783,82	R\$ 31.832.363,37	R\$ 41.082.799,72
<b>TO</b>	R\$ 16.580.184,56	R\$ 10.529.118,59	R\$ 14.956.620,16	R\$ 10.247.941,60
<b>AC</b>	R\$ 13.161.302,37	R\$ 11.206.653,25	R\$ 11.095.119,42	R\$ 10.614.433,28
<b>RO</b>	R\$ 10.416.427,80	R\$ 4.182.560,55	R\$ 8.616.859,00	R\$ 4.181.549,93
<b>RR</b>	R\$ 5.356.684,22	R\$ 1.271.944,39	R\$ 3.266.743,35	R\$ 1.235.021,87
<b>AP</b>	R\$ 1.967.839,95	R\$ -	R\$ -	R\$ -
<b>RS</b>	R\$ 34.952.576,14	R\$ 59.497.169,21	R\$ 34.515.898,00	R\$ 58.034.443,91
<b>SC</b>	R\$ 39.850.326,16	R\$ 53.453.828,86	R\$ 39.680.668,62	R\$ 43.620.593,22
<b>PR</b>	R\$ -	R\$ -	R\$ -	R\$ -
<b>GO</b>	R\$ -	R\$ -	R\$ -	R\$ -
<b>MT</b>	R\$ 3.180.501,89	R\$ -	R\$ 2.719.381,72	R\$ -
<b>MS</b>	R\$ 1.816.405,74	R\$ 3.469.072,12	R\$ 1.642.209,74	R\$ 3.379.579,72
<b>DF</b>	R\$ -	R\$ -	R\$ -	R\$ -
<b>Total</b>	<b>R\$ 799.547.374,37</b>	<b>R\$ 706.320.040,70</b>	<b>R\$ 634.133.594,68</b>	<b>R\$ 656.093.310,41</b>

Fonte: Elaborada pelo autor.

Ressalta-se, contudo, que em aplicações práticas o volume de recursos a ser distribuído pode ser definido de forma independente, inclusive como um valor fixo estabelecido segundo critérios discricionários do gestor público. Observa-se ainda que o valor total associado

à economia potencial varia entre os cenários analisados, sendo mais elevado nos cenários que utilizam o modelo DEA-CCR.

No primeiro cenário, o modelo DEA-CCR foi aplicado considerando apenas valores absolutos para os *inputs* e os *outputs*. O valor total economizado foi de aproximadamente R\$ 799,5 milhões, equivalente a 57% do total alocado. Nesta configuração, as unidades federativas que precisam reduzir mais intensamente seus recursos para alcançar a fronteira de eficiência são Bahia (BA), São Paulo (SP), Ceará (CE), Pará (PA) e Pernambuco (PE). As DMUs que já operam na fronteira de eficiência e, portanto, não tiveram redução de recursos foram Maranhão (MA), Paraná (PA), Goiás (GO) e Distrito Federal (DF).

No segundo cenário, foram incluídas variáveis em forma de taxas nos *outputs*, mantendo o modelo DEA-CCR. O valor a ser distribuído diminuiu para cerca de R\$ 706,3 milhões, o que representa 51% do total de recursos inicialmente alocados. O grupo de maiores reduções, neste cenário, é formado pelos estados da Bahia (BA), Pernambuco (PE), Rio Grande do Sul (RS), Santa Catarina (SC) e Minas Gerais (MG). Por outro lado, os estados de São Paulo (SP), Ceará (CE), Pará (PA), Paraná (PR), Goiás (GO), Mato Grosso (MT), Espírito Santo (ES), Distrito Federal (DF) e Amapá (AP) mantiveram-se na fronteira de eficiência, sem necessidade de ajuste nos recursos.

O terceiro cenário utilizou o modelo DEA-BCC com valores absolutos. O montante economizado foi de cerca de R\$ 634,1 milhões, equivalente a 45% do total de recursos alocados originalmente. Nesse grupo, as maiores reduções são provenientes da Bahia (BA), Ceará (CE), Pará (PA), Pernambuco (PE) e Santa Catarina (SC). Permaneceram na fronteira de eficiência os estados de São Paulo (SP), Minas Gerais (MG), Maranhão (MA), Paraná (PR), Goiás (GO), Espírito Santo (ES), Distrito Federal (DF) e Amapá (AP).

No quarto e último cenário, manteve-se o modelo BCC, incorporando o *output-razão*. O valor a ser distribuído foi de aproximadamente R\$ 656 milhões, representando 47% do total alocado. Além disso, neste cenário, as maiores reduções de recursos foram observadas na Bahia (BA), Pernambuco (PE), Rio Grande do Sul (RS), Santa Catarina (SC) e Rio de Janeiro (RJ). Por fim, Goiás (GO), Espírito Santo (ES), São Paulo (SP), Ceará (CE), Pará (PA), Paraná (PR), Mato Grosso (MT), Distrito Federal (DF) e Amapá (AP) não apresentam recursos a serem reduzidos.

## 4.2 Resultados do Modelo de Distribuição de Recursos

Após a mensuração da eficiência técnica das DMUs por meio dos modelos DEA orientados a insumos, procedeu-se à implementação do modelo de distribuição de recursos financeiros. A Tabela 14 resume, por estado da federação, os valores dos oito indicadores elencados na Tabela 10.

As regiões Norte e Nordeste concentram as maiores vulnerabilidades socioeducacionais do país, exibindo níveis mais elevados de analfabetismo, menor escolarização adulta, maior incidência de extrema pobreza e os valores mais baixos de IDHM Educação e INSE. Em contraste, as regiões Centro-Oeste, Sudeste e Sul apresentam condições mais favoráveis: o Centro-Oeste ocupa uma posição intermediária, enquanto Sudeste e Sul reúnem os melhores indicadores do país, com altas taxas de escolarização, baixa vulnerabilidade social e maiores níveis médios de desenvolvimento educacional.

Tabela 14 – Média de taxas e indicadores socio-educacionais agregados por Estado

Região	Taxa de analfabetismo 15 anos ou mais de idade	Taxa de frequência líquida ensino básico	Taxa de frequência líquida ensino fundamental	Taxa de frequência líquida ensino médio	% de 25 anos ou mais de idade com ensino médio completo	% de extremamente pobres	IDHM Educação	Inse
Alagoas	13,00	94,95	96,01	57,69	42,42	11,89	0,68	4,39
Bahia	10,46	96,42	97,29	52,20	45,92	12,82	0,66	4,50
Ceará	11,32	95,59	97,61	67,62	46,08	11,72	0,77	4,38
Maranhão	11,49	96,60	97,96	61,65	41,66	16,91	0,72	4,24
Paraíba	12,95	95,63	96,10	54,45	39,79	12,95	0,67	4,46
Pernambuco	9,80	95,99	96,81	61,65	47,43	14,58	0,72	4,50
Piauí	13,27	96,47	98,40	59,25	40,06	11,30	0,70	4,28
Rio Grande do Norte	9,80	96,09	98,31	54,36	48,86	9,32	0,68	4,57
Sergipe	11,48	96,17	97,56	50,67	44,98	10,86	0,68	4,39
Espírito Santo	5,00	96,96	97,77	60,72	52,77	5,48	0,74	5,01
Minas Gerais	4,41	97,14	98,62	68,28	49,70	4,04	0,76	5,07
Rio de Janeiro	1,89	97,21	96,84	64,29	63,03	6,33	0,76	4,93
São Paulo	1,94	97,02	98,14	75,42	62,82	3,59	0,84	5,28
Acre	8,55	93,64	97,05	54,99	49,50	12,94	0,69	4,56
Amazonas	4,36	95,65	96,95	60,87	57,71	11,17	0,72	4,50
Amapá	3,90	96,10	96,68	32,92	56,42	7,28	0,65	4,66
Pará	6,07	95,61	97,39	51,10	47,81	11,02	0,69	4,29
Rondônia	5,23	95,55	96,39	61,94	45,39	6,56	0,69	4,88
Roraima	5,23	95,08	94,96	54,34	61,50	7,80	0,67	4,70
Tocantins	7,75	97,64	96,16	70,87	51,08	5,75	0,73	4,73
Paraná	3,10	96,55	96,71	68,10	53,56	3,00	0,78	5,36
Rio Grande do Sul	2,07	98,20	98,89	66,30	54,04	2,22	0,75	5,38
Santa Catarina	1,77	96,55	97,73	70,17	54,17	1,94	0,79	5,51
Distrito Federal	1,84	96,68	97,07	69,56	74,50	3,42	0,82	5,34
Goiás	4,56	97,21	97,83	73,41	51,75	3,17	0,78	5,07
Mato Grosso	4,30	96,92	98,15	66,28	51,48	2,48	0,76	5,04
Mato Grosso do Sul	3,85	95,30	97,64	56,05	51,47	3,28	0,74	5,11

Fonte: Elaborada pelo autor com dados do Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil. Ipea, FJP e Pnud Brasil (2022). Disponível em: <http://www.atlasbrasil.org.br/>. Acesso em: 17 nov. 2025).

A Tabela 15 apresenta os valores normalizados, conforme a Equação 3.6, dos oito indicadores socioeducacionais, bem como os índices agregados  $N_j$  e  $H_j$ , obtidos a partir da aplicação das Equações 3.7 e 3.8. Para ilustrar os dados, utiliza-se uma escala cromática em

que cores mais quentes indicam maior necessidade, enquanto cores mais frias correspondem a situações mais favoráveis.

Tabela 15 – Indicadores normalizados e índices  $N_j$  e  $H_j$  por estado

Estado	$s_{1j}$	$s_{2j}$	$s_{3j}$	$s_{4j}$	$s_{5j}$	$s_{6j}$	$s_{7j}$	$s_{8j}$	$N_j$	$H_j$
Alagoas	0,9765	0,7127	0,7328	0,4172	0,9242	0,6647	0,8333	0,8819	0,7679	0,0596
Bahia	0,7557	0,3904	0,4071	0,5464	0,8234	0,7268	0,9375	0,7953	0,6728	0,0522
Ceará	0,8304	0,5724	0,3257	0,1835	0,8188	0,6533	0,3802	0,8898	0,5818	0,0451
Maranhão	0,8452	0,3509	0,2366	0,3240	0,9461	1,0000	0,6406	1,0000	0,6679	0,0518
Paraíba	0,9722	0,5636	0,7099	0,4934	1,0000	0,7355	0,8854	0,8268	0,7733	0,0600
Pernambuco	0,6983	0,4846	0,5293	0,3240	0,7799	0,8444	0,6146	0,7953	0,6338	0,0492
Piauí	1,0000	0,3794	0,1247	0,3805	0,9922	0,6253	0,7344	0,9685	0,6506	0,0505
Rio Grande do Norte	0,6983	0,4627	0,1476	0,4955	0,7387	0,4930	0,8281	0,7402	0,5755	0,0447
Sergipe	0,8443	0,4452	0,3384	0,5824	0,8505	0,5959	0,8073	0,8819	0,6682	0,0518
Espírito Santo	0,2809	0,2719	0,2850	0,3459	0,6260	0,2365	0,5052	0,3937	0,3681	0,0286
Minas Gerais	0,2296	0,2325	0,0687	0,1680	0,7145	0,1403	0,4010	0,3465	0,2876	0,0223
Rio de Janeiro	0,0104	0,2171	0,5216	0,2619	0,3305	0,2933	0,4219	0,4567	0,3142	0,0244
São Paulo	0,0148	0,2588	0,1908	0,0000	0,3365	0,1102	0,0000	0,1811	0,1365	0,0106
Acre	0,5896	1,0000	0,4682	0,4807	0,7203	0,7348	0,7656	0,7480	0,6884	0,0534
Amapá	0,1852	0,4605	0,5623	1,0000	0,5209	0,3567	1,0000	0,6693	0,5944	0,0461
Amazonas	0,2252	0,5592	0,4936	0,3424	0,4837	0,6166	0,6198	0,7953	0,5170	0,0401
Pará	0,3739	0,5680	0,3817	0,5722	0,7689	0,6065	0,7969	0,9606	0,6286	0,0488
Rondônia	0,3009	0,5811	0,6361	0,3172	0,8387	0,3086	0,7552	0,4961	0,5292	0,0411
Roraima	0,3009	0,6842	1,0000	0,4960	0,3745	0,3914	0,8646	0,6378	0,5937	0,0461
Tocantins	0,5200	0,1228	0,6947	0,1071	0,6747	0,2545	0,5573	0,6142	0,4432	0,0344
Paraná	0,1157	0,3618	0,5547	0,1722	0,6033	0,0708	0,3073	0,1181	0,2880	0,0223
Rio Grande do Sul	0,0261	0,0000	0,0000	0,2146	0,5895	0,0187	0,4635	0,1024	0,1768	0,0137
Santa Catarina	0,0000	0,3618	0,2952	0,1235	0,5857	0,0000	0,2552	0,0000	0,2027	0,0157
Distrito Federal	0,0061	0,3333	0,4631	0,1379	0,0000	0,0989	0,1146	0,1339	0,1610	0,0125
Goiás	0,2426	0,2171	0,2697	0,0473	0,6554	0,0822	0,3177	0,3465	0,2723	0,0211
Mato Grosso	0,2200	0,2807	0,1883	0,2151	0,6632	0,0361	0,4219	0,3701	0,2994	0,0232
Mato Grosso do Sul	0,1809	0,6360	0,3181	0,4558	0,6635	0,0895	0,5104	0,3150	0,3961	0,0307

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 7 apresenta os diagramas de dispersão relacionando o fator de necessidade ( $H_j$ ) e o fator de eficiência ( $E_j$ ) para os quatro cenários avaliados. Inicialmente, observa-se que não há correlação linear aparente entre as duas dimensões: estados que exibem maior necessidade não são, necessariamente, aqueles com menor eficiência técnica, e vice-versa. Mesmo assim, nota-se discretamente a formação de agrupamentos relativamente estáveis entre as unidades federativas de maior necessidade e menor eficiência (principalmente em cenários que utilizam *outputs* absolutos), bem como entre aquelas com maior eficiência e menor necessidade, gerando conglomerados de pontos nos quadrantes direito inferior e esquerdo superior do gráfico.

Além disso, há poucos pontos distribuídos na região central do gráfico, indicando que a maioria dos estados tende a se posicionar em extremos de necessidade ou de eficiência, reforçando que os atributos capturados por  $H_j$  e  $E_j$  não se distribuem de maneira homogênea entre os entes.



Tabela 16 – Alocação de recursos por cenário de avaliação, adotando  $\lambda = 0,5$ 

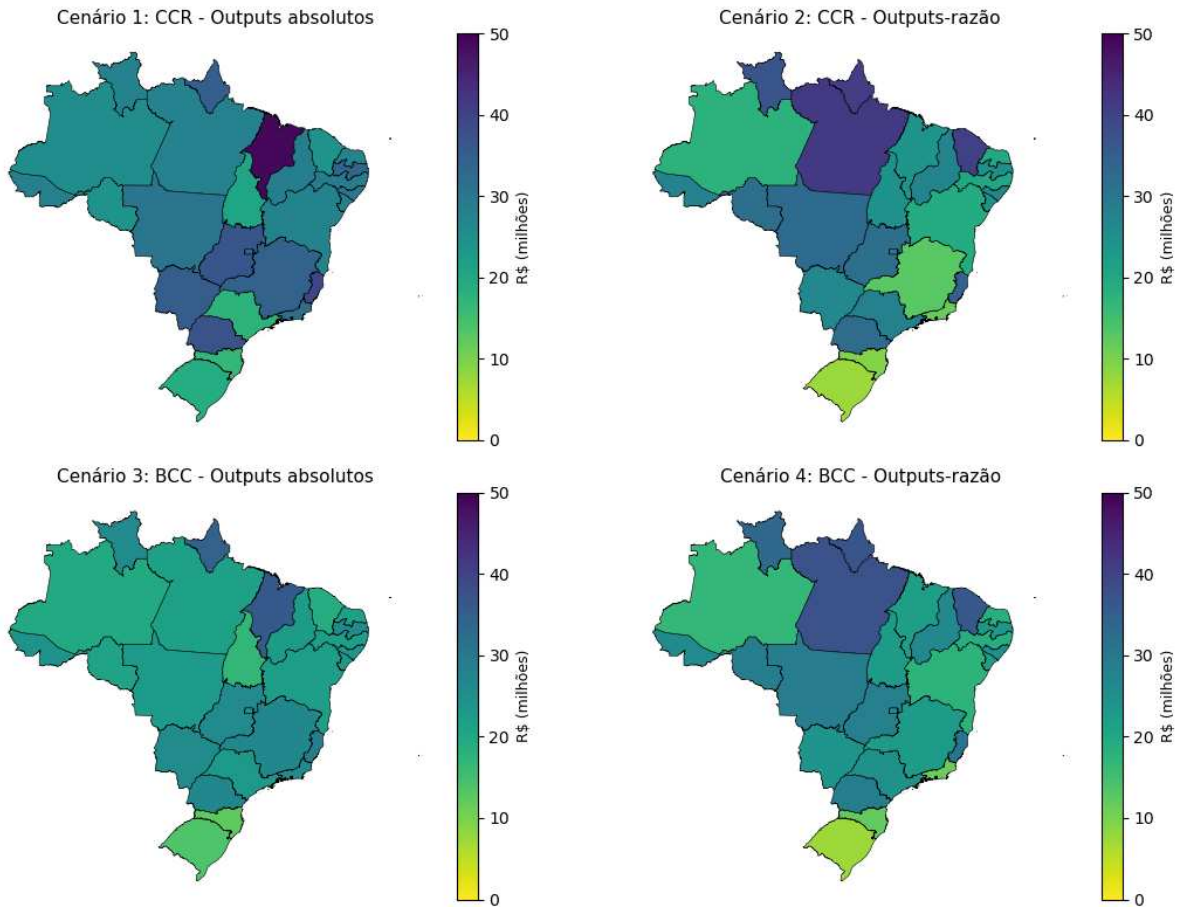
<b>Estado</b>	<b>CCR-ABS</b>	<b>CCR-RATIO</b>	<b>BCC-ABS</b>	<b>BCC-RATIO</b>
<b>Alagoas</b>	R\$ 30.035.644,97	R\$ 26.876.763,27	R\$ 23.567.053,52	R\$ 25.307.822,69
<b>Bahia</b>	R\$ 27.679.256,11	R\$ 19.147.724,06	R\$ 22.254.775,05	R\$ 17.764.587,35
<b>Ceará</b>	R\$ 24.404.429,33	R\$ 40.508.459,61	R\$ 18.768.847,71	R\$ 36.240.095,89
<b>Maranhão</b>	R\$ 48.947.250,78	R\$ 24.001.749,42	R\$ 35.992.605,60	R\$ 22.043.442,03
<b>Paraíba</b>	R\$ 33.438.451,66	R\$ 25.248.792,36	R\$ 25.961.485,33	R\$ 23.375.116,94
<b>Pernambuco</b>	R\$ 29.012.315,93	R\$ 20.031.232,72	R\$ 22.235.343,05	R\$ 18.611.134,75
<b>Piauí</b>	R\$ 28.806.099,92	R\$ 27.168.915,91	R\$ 22.461.379,86	R\$ 26.399.780,86
<b>Rio Grande do Norte</b>	R\$ 27.498.362,80	R\$ 19.750.195,37	R\$ 21.505.847,26	R\$ 18.266.491,79
<b>Sergipe</b>	R\$ 28.374.632,11	R\$ 24.416.447,95	R\$ 22.866.293,20	R\$ 22.418.260,16
<b>Espírito Santo</b>	R\$ 39.284.730,41	R\$ 34.655.154,22	R\$ 28.617.669,40	R\$ 30.803.021,64
<b>Minas Gerais</b>	R\$ 34.232.195,45	R\$ 12.878.254,40	R\$ 26.637.088,32	R\$ 22.564.138,93
<b>Rio de Janeiro</b>	R\$ 31.867.084,68	R\$ 11.540.913,48	R\$ 25.445.506,97	R\$ 11.265.730,11
<b>São Paulo</b>	R\$ 17.645.241,63	R\$ 28.309.074,72	R\$ 22.920.164,05	R\$ 24.908.214,65
<b>Acre</b>	R\$ 28.500.741,38	R\$ 27.808.484,06	R\$ 24.181.426,90	R\$ 26.045.852,34
<b>Amapá</b>	R\$ 34.988.937,64	R\$ 40.853.977,59	R\$ 34.182.968,30	R\$ 36.561.043,94
<b>Amazonas</b>	R\$ 25.698.579,30	R\$ 17.968.210,51	R\$ 19.645.400,52	R\$ 16.726.118,19
<b>Pará</b>	R\$ 27.894.715,53	R\$ 41.791.833,40	R\$ 21.410.189,66	R\$ 37.432.208,41
<b>Rondônia</b>	R\$ 24.405.944,73	R\$ 31.996.627,40	R\$ 20.979.070,86	R\$ 28.734.543,74
<b>Roraima</b>	R\$ 28.039.029,73	R\$ 36.990.313,56	R\$ 26.303.806,68	R\$ 33.286.667,87
<b>Tocantins</b>	R\$ 20.371.763,39	R\$ 24.771.093,84	R\$ 16.959.144,27	R\$ 22.574.407,90
<b>Distrito Federal</b>	R\$ 33.222.800,96	R\$ 28.978.637,70	R\$ 23.521.297,19	R\$ 25.530.164,72
<b>Goiás</b>	R\$ 36.676.384,68	R\$ 32.029.533,09	R\$ 26.260.388,75	R\$ 28.364.109,58
<b>Mato Grosso</b>	R\$ 30.576.190,67	R\$ 32.772.080,37	R\$ 22.814.877,17	R\$ 29.053.854,00
<b>Mato Grosso do Sul</b>	R\$ 35.158.807,33	R\$ 26.516.565,58	R\$ 25.949.627,41	R\$ 23.946.652,04
<b>Paraná</b>	R\$ 37.162.734,91	R\$ 32.459.174,82	R\$ 26.646.120,76	R\$ 28.763.199,30
<b>Rio Grande do Sul</b>	R\$ 18.999.722,48	R\$ 7.613.896,84	R\$ 13.842.422,89	R\$ 7.383.646,85
<b>Santa Catarina</b>	R\$ 16.625.325,86	R\$ 9.235.934,45	R\$ 12.202.794,00	R\$ 11.723.003,72

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 8 apresenta, por meio de mapas de calor, a distribuição espacial dos recursos apresentada na Tabela 16 para cada cenário analisado. A visualização permite identificar com maior clareza padrões regionais na alocação dos recursos. Observa-se uma concentração de maiores repasses nos estados das regiões Norte e Nordeste, que, na maioria dos cenários, assumem tonalidades mais escuras no mapa. Estados como Pará, Maranhão, Amapá e Ceará destacam-se nesse grupo.

Esse padrão indica que o modelo prioriza estados com maiores desafios estruturais e sociais e com melhor capacidade de transformar recursos em resultados educacionais. Em contraste, estados das regiões Sul e Sudeste, como Rio Grande do Sul e Santa Catarina, aparecem predominantemente com tonalidades mais claras, refletindo menores valores alocados. Esse comportamento indica que a combinação entre níveis de eficiência técnica que não se destacam e menores índices de necessidade resulta em menor destaque dessas unidades na alocação de recursos proposta pelo modelo.

Figura 8 – Mapa de calor com distribuição de recursos do PDDE



Fonte: Elaborada pelo autor.

### 4.3 Análise Comparativa da Distribuição em Relação à Alocação Histórica

Esta seção apresenta uma análise comparativa entre a alocação histórica dos recursos e a alocação final resultante do modelo, obtida a partir da projeção das unidades federativas na fronteira de eficiência e da posterior distribuição do montante economizado, considerando o parâmetro de ponderação  $\lambda = 0,5$ . O objetivo é avaliar o impacto da metodologia proposta sobre o volume de recursos associado a cada estado, em comparação com a distribuição observada no período analisado.

A alocação histórica corresponde aos valores efetivamente transferidos a cada unidade da federação no ano-base, apresentados na Tabela 11, enquanto a alocação final do modelo é composta pelo valor projetado na fronteira de eficiência, que representa o nível mínimo de recursos necessário para a produção dos *outputs* observados com total eficiência, acrescido da parcela distribuída, apresentada na Tabela 16. Para cada cenário avaliado, a análise é feita por meio da variação percentual entre a alocação final e a alocação histórica, calculada como a razão

entre a diferença desses valores e o montante originalmente recebido.

Em todos os cenários, estados com variação percentual negativa são interpretados como doadores de recursos, enquanto as variações positivas indicam estados recebedores de recursos.

Tabela 17 – Comparação Alocativa: Cenário 1 (CCR-ABS)

DMU	Alocacao Inicial	Alocação Meta	Economia	$R_j$	Alocação Final	Varição
AL	R\$ 43.523.392,36	R\$ 9.585.713,64	R\$ 33.937.678,72	R\$ 30.035.644,97	R\$ 39.621.358,61	-9%
BA	R\$ 203.890.312,20	R\$ 49.193.583,77	R\$ 154.696.728,43	R\$ 27.679.256,11	R\$ 76.872.839,88	-62%
CE	R\$ 111.771.160,90	R\$ 25.181.965,10	R\$ 86.589.195,80	R\$ 24.404.429,33	R\$ 49.586.394,43	-56%
MA	R\$ 33.170.229,00	R\$ 33.170.229,00	R\$ -	R\$ 48.947.250,78	R\$ 82.117.479,78	148%
PB	R\$ 42.412.557,45	R\$ 14.200.510,88	R\$ 28.212.046,57	R\$ 33.438.451,66	R\$ 47.638.962,54	12%
PE	R\$ 77.329.542,52	R\$ 25.624.478,52	R\$ 51.705.064,00	R\$ 29.012.315,93	R\$ 54.636.794,45	-29%
PI	R\$ 41.499.213,23	R\$ 12.681.108,90	R\$ 28.818.104,33	R\$ 28.806.099,92	R\$ 41.487.208,82	0%
RN	R\$ 31.160.388,02	R\$ 10.649.628,92	R\$ 20.510.759,10	R\$ 27.498.362,80	R\$ 38.147.991,72	22%
SE	R\$ 24.208.530,31	R\$ 6.558.981,81	R\$ 17.649.548,50	R\$ 28.374.632,11	R\$ 34.933.613,93	44%
ES	R\$ 10.591.241,00	R\$ 10.454.738,84	R\$ 136.502,16	R\$ 39.284.730,41	R\$ 49.739.469,25	370%
MG	R\$ 58.336.513,00	R\$ 52.304.238,33	R\$ 6.032.274,67	R\$ 34.232.195,45	R\$ 86.536.433,78	48%
RJ	R\$ 49.490.617,51	R\$ 38.783.582,12	R\$ 10.707.035,39	R\$ 31.867.084,68	R\$ 70.650.666,80	43%
SP	R\$ 237.746.380,70	R\$ 112.940.248,89	R\$ 124.806.131,81	R\$ 17.645.241,63	R\$ 130.585.490,52	-45%
AC	R\$ 17.624.613,00	R\$ 4.463.310,63	R\$ 13.161.302,37	R\$ 28.500.741,38	R\$ 32.964.052,01	87%
AM	R\$ 49.288.818,75	R\$ 16.872.843,88	R\$ 32.415.974,87	R\$ 25.698.579,30	R\$ 42.571.423,18	-14%
AP	R\$ 4.757.590,34	R\$ 2.789.750,39	R\$ 1.967.839,95	R\$ 34.988.937,64	R\$ 37.778.688,03	694%
PA	R\$ 108.249.433,90	R\$ 32.201.352,70	R\$ 76.048.081,20	R\$ 27.894.715,53	R\$ 60.096.068,23	-44%
RO	R\$ 14.529.114,14	R\$ 4.112.686,34	R\$ 10.416.427,80	R\$ 24.405.944,73	R\$ 28.518.631,08	96%
RR	R\$ 8.127.921,88	R\$ 2.771.237,66	R\$ 5.356.684,22	R\$ 28.039.029,73	R\$ 30.810.267,39	279%
TO	R\$ 21.666.030,07	R\$ 5.085.845,51	R\$ 16.580.184,56	R\$ 20.371.763,39	R\$ 25.457.608,90	18%
PR	R\$ 31.590.211,00	R\$ 31.590.211,00	R\$ -	R\$ 37.162.734,91	R\$ 68.752.945,91	118%
RS	R\$ 67.052.922,00	R\$ 32.100.345,86	R\$ 34.952.576,14	R\$ 18.999.722,48	R\$ 51.100.068,34	-24%
SC	R\$ 62.878.524,50	R\$ 23.028.198,34	R\$ 39.850.326,16	R\$ 16.625.325,86	R\$ 39.653.524,20	-37%
DF	R\$ 6.853.815,15	R\$ 6.853.815,15	R\$ -	R\$ 33.222.800,96	R\$ 40.076.616,11	485%
GO	R\$ 15.860.563,00	R\$ 15.860.563,00	R\$ -	R\$ 36.676.384,68	R\$ 52.536.947,68	231%
MS	R\$ 9.570.226,00	R\$ 7.753.820,26	R\$ 1.816.405,74	R\$ 35.158.807,33	R\$ 42.912.627,59	348%
MT	R\$ 12.936.148,00	R\$ 9.755.646,11	R\$ 3.180.501,89	R\$ 30.576.190,67	R\$ 40.331.836,79	212%

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Tabela 17, que utiliza *outputs* em níveis absolutos e avalia predominantemente a dimensão estrutural da aplicação dos recursos, observam-se reduções expressivas em estados como Bahia, Ceará, São Paulo, Pará, Pernambuco, Santa Catarina e Rio Grande do Sul, o que sugere dificuldades desses entes em converter grandes volumes de recursos em níveis compatíveis de estrutura educacional e complexidade de gestão, caracterizando ineficiência estrutural. Em contrapartida, estados como Amapá, Distrito Federal, Maranhão, Goiás, Roraima e Mato Grosso do Sul apresentam aumentos percentuais elevados, indicando melhor adequação entre a estrutura de recursos e os resultados produzidos, além de uma maior participação na distribuição do montante economizado.

Além disso, de modo geral, observa-se que os estados que apresentaram reduções na alocação final não figuram entre aqueles com os mais elevados níveis de necessidade, apresen-

tando, em média, indicadores socioeducacionais menos críticos. Estados como São Paulo, Santa Catarina e Rio Grande do Sul combinam menor necessidade relativa com dificuldades na conversão de elevados volumes de recursos em estrutura educacional ou desempenho proporcional, o que contribui para sua posição como doadores de recursos no processo de distribuição. Em contrapartida, os estados caracterizados por maiores níveis de vulnerabilidade socioeducacional, como Maranhão, Amapá, Roraima e Acre, tendem a figurar entre os principais recebedores, indicando que o fator de necessidade exerce um papel relevante na orientação da alocação final.

Todavia, observa-se ainda que a necessidade, por si só, não é suficiente para garantir aumentos de recursos. O contraste entre o Piauí, Ceará, Bahia e Alagoas ilustra de forma clara esse resultado. Embora esses estados apresentem índices elevados de necessidade, eles registram variações nulas ou negativas entre a alocação histórica e a alocação final.

Tabela 18 – Comparação Alocativa: Cenário 2 (CCR-RATIO)

DMU	Alocacao Inicial	Alocação Meta	Economia	$R_j$	Alocação Final	Variação
AL	R\$ 43.523.392,36	R\$ 10.338.361,47	R\$ 33.185.030,89	R\$ 26.876.763,27	R\$ 37.215.124,74	-14%
BA	R\$ 203.890.312,20	R\$ 5.916.624,78	R\$ 197.973.687,42	R\$ 19.147.724,06	R\$ 25.064.348,85	-88%
CE	R\$ 111.771.160,90	R\$ 111.771.160,90	R\$ -	R\$ 40.508.459,61	R\$ 152.279.620,51	36%
MA	R\$ 33.170.229,00	R\$ 7.696.221,55	R\$ 25.474.007,45	R\$ 24.001.749,42	R\$ 31.697.970,98	-4%
PB	R\$ 42.412.557,45	R\$ 7.007.449,63	R\$ 35.405.107,82	R\$ 25.248.792,36	R\$ 32.256.241,99	-24%
PE	R\$ 77.329.542,52	R\$ 8.390.058,38	R\$ 68.939.484,14	R\$ 20.031.232,72	R\$ 28.421.291,10	-63%
PI	R\$ 41.499.213,23	R\$ 15.780.341,27	R\$ 25.718.871,96	R\$ 27.168.915,91	R\$ 42.949.257,18	3%
RN	R\$ 31.160.388,02	R\$ 5.049.646,92	R\$ 26.110.741,10	R\$ 19.750.195,37	R\$ 24.799.842,30	-20%
SE	R\$ 24.208.530,31	R\$ 6.017.681,12	R\$ 18.190.849,19	R\$ 24.416.447,95	R\$ 30.434.129,07	26%
ES	R\$ 10.591.241,00	R\$ 10.591.241,00	R\$ -	R\$ 34.655.154,22	R\$ 45.246.395,22	327%
MG	R\$ 58.336.513,00	R\$ 11.866.113,00	R\$ 46.470.400,00	R\$ 12.878.254,40	R\$ 24.744.367,40	-58%
RJ	R\$ 49.490.617,51	R\$ 5.907.887,54	R\$ 43.582.729,97	R\$ 11.540.913,48	R\$ 17.448.801,02	-65%
SP	R\$ 237.746.380,70	R\$ 237.746.380,70	R\$ -	R\$ 28.309.074,72	R\$ 266.055.455,42	12%
AC	R\$ 17.624.613,00	R\$ 6.417.959,75	R\$ 11.206.653,25	R\$ 27.808.484,06	R\$ 34.226.443,82	94%
AM	R\$ 49.288.818,75	R\$ 7.630.034,93	R\$ 41.658.783,82	R\$ 17.968.210,51	R\$ 25.598.245,45	-48%
AP	R\$ 4.757.590,34	R\$ 4.757.590,34	R\$ -	R\$ 40.853.977,59	R\$ 45.611.567,93	859%
PA	R\$ 108.249.433,90	R\$ 108.249.433,90	R\$ -	R\$ 41.791.833,40	R\$ 150.041.267,30	39%
RO	R\$ 14.529.114,14	R\$ 10.346.553,59	R\$ 4.182.560,55	R\$ 31.996.627,40	R\$ 42.343.180,98	191%
RR	R\$ 8.127.921,88	R\$ 6.855.977,49	R\$ 1.271.944,39	R\$ 36.990.313,56	R\$ 43.846.291,05	439%
TO	R\$ 21.666.030,07	R\$ 11.136.911,48	R\$ 10.529.118,59	R\$ 24.771.093,84	R\$ 35.908.005,32	66%
PR	R\$ 31.590.211,00	R\$ 31.590.211,00	R\$ -	R\$ 32.459.174,82	R\$ 64.049.385,82	103%
RS	R\$ 67.052.922,00	R\$ 7.555.752,79	R\$ 59.497.169,21	R\$ 7.613.896,84	R\$ 15.169.649,62	-77%
SC	R\$ 62.878.524,50	R\$ 9.424.695,64	R\$ 53.453.828,86	R\$ 9.235.934,45	R\$ 18.660.630,10	-70%
DF	R\$ 6.853.815,15	R\$ 6.853.815,15	R\$ -	R\$ 28.978.637,70	R\$ 35.832.452,85	423%
GO	R\$ 15.860.563,00	R\$ 15.860.563,00	R\$ -	R\$ 32.029.533,09	R\$ 47.890.096,09	202%
MS	R\$ 9.570.226,00	R\$ 6.101.153,88	R\$ 3.469.072,12	R\$ 26.516.565,58	R\$ 32.617.719,47	241%
MT	R\$ 12.936.148,00	R\$ 12.936.148,00	R\$ -	R\$ 32.772.080,37	R\$ 45.708.228,37	253%

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Tabela 18, que utiliza *outputs* em forma de razão e avalia predominantemente o desempenho educacional, observam-se aumentos expressivos na alocação final em estados como Ceará (+36%) e em diversas unidades da Região Norte, com destaque para Roraima (+859%), além de Amapá, Acre e Rondônia. Esses resultados indicam que a combinação entre elevada

necessidade e bom desempenho educacional relativo favorece a ampliação da alocação final nesses estados.

Em contraste, estados do Nordeste como Bahia (queda de 88%) e Pernambuco (queda de 63%) registram reduções expressivas na alocação final, mesmo apresentando níveis de necessidade relativamente altos, evidenciando que, neste cenário, sob a ponderação de  $\lambda = 0,5$ , o fator de necessidade não é suficiente para compensar desempenhos educacionais relativos insatisfatórios.

Tabela 19 – Comparação Alocativa: Cenário 3 (BCC-ABS)

DMU	Alocacao Inicial	Alocação Meta	Economia	$R_j$	Alocação Final	Varição
AL	R\$ 43.523.392,36	R\$ 10.404.953,87	R\$ 33.118.438,49	R\$ 23.567.053,52	R\$ 33.972.007,39	-22%
BA	R\$ 203.890.312,20	R\$ 59.453.070,10	R\$ 144.437.242,10	R\$ 22.254.775,05	R\$ 81.707.845,15	-60%
CE	R\$ 111.771.160,90	R\$ 25.470.551,76	R\$ 86.300.609,14	R\$ 18.768.847,71	R\$ 44.239.399,46	-60%
MA	R\$ 33.170.229,00	R\$ 33.170.229,00	R\$ -	R\$ 35.992.605,60	R\$ 69.162.834,60	109%
PB	R\$ 42.412.557,45	R\$ 15.041.473,48	R\$ 27.371.083,97	R\$ 25.961.485,33	R\$ 41.002.958,81	-3%
PE	R\$ 77.329.542,52	R\$ 26.266.417,06	R\$ 51.063.125,46	R\$ 22.235.343,05	R\$ 48.501.760,12	-37%
PI	R\$ 41.499.213,23	R\$ 13.697.388,53	R\$ 27.801.824,70	R\$ 22.461.379,86	R\$ 36.158.768,39	-13%
RN	R\$ 31.160.388,02	R\$ 11.705.848,03	R\$ 19.454.539,99	R\$ 21.505.847,26	R\$ 33.211.695,29	7%
SE	R\$ 24.208.530,31	R\$ 7.955.194,18	R\$ 16.253.336,13	R\$ 22.866.293,20	R\$ 30.821.487,38	27%
ES	R\$ 10.591.241,00	R\$ 10.591.241,00	R\$ -	R\$ 28.617.669,40	R\$ 39.208.910,40	270%
MG	R\$ 58.336.513,00	R\$ 58.336.513,00	R\$ -	R\$ 26.637.088,32	R\$ 84.973.601,32	46%
RJ	R\$ 49.490.617,51	R\$ 44.824.092,04	R\$ 4.666.525,47	R\$ 25.445.506,97	R\$ 70.269.599,00	42%
SP	R\$ 237.746.380,70	R\$ 237.746.380,70	R\$ -	R\$ 22.920.164,05	R\$ 260.666.544,75	10%
AC	R\$ 17.624.613,00	R\$ 6.529.493,58	R\$ 11.095.119,42	R\$ 24.181.426,90	R\$ 30.710.920,48	74%
AM	R\$ 49.288.818,75	R\$ 17.456.455,38	R\$ 31.832.363,37	R\$ 19.645.400,52	R\$ 37.101.855,90	-25%
AP	R\$ 4.757.590,34	R\$ 4.757.590,34	R\$ -	R\$ 34.182.968,30	R\$ 38.940.558,64	718%
PA	R\$ 108.249.433,90	R\$ 32.908.428,05	R\$ 75.341.005,85	R\$ 21.410.189,66	R\$ 54.318.617,71	-50%
RO	R\$ 14.529.114,14	R\$ 5.912.255,14	R\$ 8.616.859,00	R\$ 20.979.070,86	R\$ 26.891.326,00	85%
RR	R\$ 8.127.921,88	R\$ 4.861.178,53	R\$ 3.266.743,35	R\$ 26.303.806,68	R\$ 31.164.985,20	283%
TO	R\$ 21.666.030,07	R\$ 6.709.409,91	R\$ 14.956.620,16	R\$ 16.959.144,27	R\$ 23.668.554,18	9%
PR	R\$ 31.590.211,00	R\$ 31.590.211,00	R\$ -	R\$ 26.646.120,76	R\$ 58.236.331,76	84%
RS	R\$ 67.052.922,00	R\$ 32.537.024,00	R\$ 34.515.898,00	R\$ 13.842.422,89	R\$ 46.379.446,89	-31%
SC	R\$ 62.878.524,50	R\$ 23.197.855,88	R\$ 39.680.668,62	R\$ 12.202.794,00	R\$ 35.400.649,88	-44%
DF	R\$ 6.853.815,15	R\$ 6.853.815,15	R\$ -	R\$ 23.521.297,19	R\$ 30.375.112,34	343%
GO	R\$ 15.860.563,00	R\$ 15.860.563,00	R\$ -	R\$ 26.260.388,75	R\$ 42.120.951,75	166%
MS	R\$ 9.570.226,00	R\$ 7.928.016,26	R\$ 1.642.209,74	R\$ 25.949.627,41	R\$ 33.877.643,67	254%
MT	R\$ 12.936.148,00	R\$ 10.216.766,28	R\$ 2.719.381,72	R\$ 22.814.877,17	R\$ 33.031.643,45	155%

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nas Tabelas 19 e 20, que incorporam retornos variáveis de escala, os resultados seguem a lógica dos cenários anteriores, ainda que com ajustes decorrentes dos retornos de escala. Observam-se aumentos expressivos na alocação final em estados como Amapá, Distrito Federal, Maranhão, Goiás, Mato Grosso, Mato Grosso do Sul e Acre, os quais se mantêm entre os principais recebedores em ambos os cenários. Esse padrão reforça que a combinação entre menor dotação histórica de recursos, índices de necessidade relativamente altos (principalmente para os estados da região Norte) e desempenho coerente com o nível de recursos recebidos sustenta ganhos expressivos na alocação final, mesmo após o ajuste para retornos variáveis de

escala. Observa-se, ainda, um processo de interiorização da alocação, com destaque para as regiões Norte e Centro-Oeste, tradicionalmente menos contempladas pelos recursos do PDDE.

Por outro lado, os resultados também evidenciam diferenças relevantes entre os cenários com *outputs* absolutos e aqueles com *outputs* na forma de razão. O Ceará constitui um caso ilustrativo ao apresentar reduções no cenário BCC-ABS e aumentos no cenário BCC-RATIO, indicando que seus indicadores de desempenho educacional relativo exercem maior influência sobre a alocação final do que os índices de necessidade.

Tabela 20 – Comparação Alocativa: Cenário 4 (BCC-RATIO)

DMU	Alocacao Inicial	Alocação Meta	Economia	$R_j$	Alocação Final	Varição
AL	R\$ 43.523.392,36	R\$ 11.702.801,11	R\$ 31.820.591,25	R\$ 25.307.822,69	R\$ 37.010.623,80	-15%
BA	R\$ 203.890.312,20	R\$ 6.094.876,53	R\$ 197.795.435,67	R\$ 17.764.587,35	R\$ 23.859.463,88	-88%
CE	R\$ 111.771.160,90	R\$ 111.771.160,90	R\$ -	R\$ 36.240.095,89	R\$ 148.011.256,79	32%
MA	R\$ 33.170.229,00	R\$ 7.805.273,21	R\$ 25.364.955,79	R\$ 22.043.442,03	R\$ 29.848.715,24	-10%
PB	R\$ 42.412.557,45	R\$ 7.306.387,05	R\$ 35.106.170,40	R\$ 23.375.116,94	R\$ 30.681.503,99	-28%
PE	R\$ 77.329.542,52	R\$ 8.948.934,68	R\$ 68.380.607,84	R\$ 18.611.134,75	R\$ 27.560.069,43	-64%
PI	R\$ 41.499.213,23	R\$ 19.053.622,38	R\$ 22.445.590,85	R\$ 26.399.780,86	R\$ 45.453.403,24	10%
RN	R\$ 31.160.388,02	R\$ 5.261.378,31	R\$ 25.899.009,71	R\$ 18.266.491,79	R\$ 23.527.870,10	-24%
SE	R\$ 24.208.530,31	R\$ 6.111.483,06	R\$ 18.097.047,25	R\$ 22.418.260,16	R\$ 28.529.743,22	18%
ES	R\$ 10.591.241,00	R\$ 10.591.241,00	R\$ 0,00	R\$ 30.803.021,64	R\$ 41.394.262,64	291%
MG	R\$ 58.336.513,00	R\$ 41.489.601,06	R\$ 16.846.911,94	R\$ 22.564.138,93	R\$ 64.053.739,99	10%
RJ	R\$ 49.490.617,51	R\$ 7.549.991,04	R\$ 41.940.626,47	R\$ 11.265.730,11	R\$ 18.815.721,15	-62%
SP	R\$ 237.746.380,70	R\$ 237.746.380,70	R\$ -	R\$ 24.908.214,65	R\$ 262.654.595,35	10%
AC	R\$ 17.624.613,00	R\$ 7.010.179,72	R\$ 10.614.433,28	R\$ 26.045.852,34	R\$ 33.056.032,06	88%
AM	R\$ 49.288.818,75	R\$ 8.206.019,03	R\$ 41.082.799,72	R\$ 16.726.118,19	R\$ 24.932.137,22	-49%
AP	R\$ 4.757.590,34	R\$ 4.757.590,34	R\$ -	R\$ 36.561.043,94	R\$ 41.318.634,28	768%
PA	R\$ 108.249.433,90	R\$ 108.249.433,90	R\$ -	R\$ 37.432.208,41	R\$ 145.681.642,31	35%
RO	R\$ 14.529.114,14	R\$ 10.347.564,21	R\$ 4.181.549,93	R\$ 28.734.543,74	R\$ 39.082.107,95	169%
RR	R\$ 8.127.921,88	R\$ 6.892.900,01	R\$ 1.235.021,87	R\$ 33.286.667,87	R\$ 40.179.567,88	394%
TO	R\$ 21.666.030,07	R\$ 11.418.088,47	R\$ 10.247.941,60	R\$ 22.574.407,90	R\$ 33.992.496,37	57%
PR	R\$ 31.590.211,00	R\$ 31.590.211,00	R\$ -	R\$ 28.763.199,30	R\$ 60.353.410,30	91%
RS	R\$ 67.052.922,00	R\$ 9.018.478,09	R\$ 58.034.443,91	R\$ 7.383.646,85	R\$ 16.402.124,93	-76%
SC	R\$ 62.878.524,50	R\$ 19.257.931,28	R\$ 43.620.593,22	R\$ 11.723.003,72	R\$ 30.980.935,00	-51%
DF	R\$ 6.853.815,15	R\$ 6.853.815,15	R\$ -	R\$ 25.530.164,72	R\$ 32.383.979,87	372%
GO	R\$ 15.860.563,00	R\$ 15.860.563,00	R\$ 0,00	R\$ 28.364.109,58	R\$ 44.224.672,58	179%
MS	R\$ 9.570.226,00	R\$ 6.190.646,28	R\$ 3.379.579,72	R\$ 23.946.652,04	R\$ 30.137.298,32	215%
MT	R\$ 12.936.148,00	R\$ 12.936.148,00	R\$ -	R\$ 29.053.854,00	R\$ 41.990.002,00	225%

Fonte: Elaborada pelo autor.

#### 4.4 Cenário de Referência

A partir dos resultados obtidos nos quatro cenários avaliados, é possível identificar qual especificação do modelo DEA se mostra mais adequada para proceder a análise de sensibilidade do parâmetro  $\lambda$ . Considerando que os cenários com *outputs*-razão apresentam uma maior amplitude entre os repasses distribuídos do que os cenários com *outputs* absolutos, é possível inferir que essa forma de mensuração permite distinguir de maneira mais clara as diferenças relativas entre as unidades federativas.

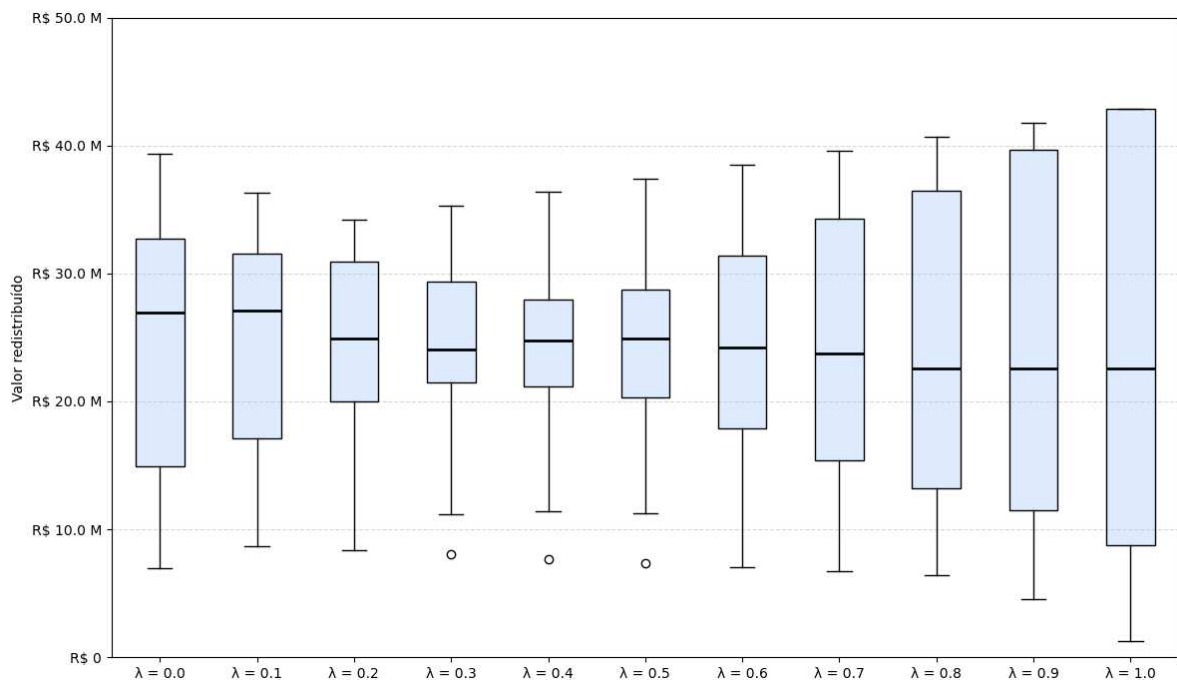
Além das diferenças observadas no nível dos repasses e na dispersão relativa entre estados, a combinação entre retornos variáveis de escala (modelo BCC) e a utilização de *outputs*-razão apresenta maior coerência com a organização do sistema educacional brasileiro e com a necessidade de controlar as diferenças estruturais entre os entes federados.

Esse arranjo também se alinha às características das variáveis empregadas, sobretudo pela capacidade das taxas educacionais de capturar desempenhos ajustados ao porte populacional e às condições locais de atendimento, evitando que estados maiores dominem a análise apenas pelo volume de produção educacional ou pela complexidade da gestão.

#### 4.5 Análise de Sensibilidade do Parâmetro $\lambda$

Na Figura 9 são apresentados os diagramas de caixa correspondentes à distribuição dos valores do cenário de referência para onze pontos no intervalo  $[0, 1]$ . Na imagem, é possível verificar a variação da dispersão dos valores distribuídos entre os entes, bem como as modificações no comportamento da distribuição conforme muda o peso relativo atribuído às dimensões de eficiência e necessidade.

Figura 9 – *Boxplot* para a distribuição de recursos



Fonte: Elaborada pelo autor.

O gráfico mostra uma mediana que varia no intervalo de R\$ 22 milhões a R\$ 27 milhões. Além disso, nos casos em que  $\lambda$  assume valores mais próximos de 40%, observa-se uma

menor amplitude entre os quartis e, à medida que o peso aumenta, elevam-se tanto a amplitude entre os quartis quanto a distância entre os limites da distribuição, refletindo uma maior influência da eficiência sobre a alocação dos recursos. Nota-se ainda a presença de *outliers* inferiores em  $\lambda = 0,3$ ,  $\lambda = 0,4$  e  $\lambda = 0,5$  referentes aos valores de R\$ 8.030.908,84, R\$ 7.707.277,84 e R\$ 7.383.646,85, respectivamente, alocados no estado do Rio Grande do Sul que são menores que os limites inferiores observados no diagrama.

A Tabela 21 mostra os resultados da distribuição de forma resumida. No cenário em que a distribuição é orientada exclusivamente pelo fator de necessidade ( $\lambda = 0,0$ ), os estados que recebem os maiores volumes de recursos são Paraíba, Alagoas, Acre, Bahia, Sergipe e Maranhão, todos situados nas regiões Norte e Nordeste e caracterizados por indicadores de necessidade relativamente altos dentro do conjunto analisado. Entre os menores valores distribuídos encontram-se Rio Grande do Sul, Distrito Federal, São Paulo e Santa Catarina, unidades federativas com menor expressão nos indicadores que compõem o fator de necessidade.

Tabela 21 – Alocação de recursos por unidade federativa sob diferentes valores do parâmetro de ponderação  $\lambda$  (em milhões de reais)

DMU	$\lambda = 0$	$\lambda = 0,1$	$\lambda = 0,2$	$\lambda = 0,3$	$\lambda = 0,4$	$\lambda = 0,5$	$\lambda = 0,6$	$\lambda = 0,7$	$\lambda = 0,8$	$\lambda = 0,9$	$\lambda = 1$
AL	39,09	36,33	33,58	30,82	28,06	25,31	22,55	19,80	17,04	14,28	11,53
BA	34,25	30,95	27,65	24,36	21,06	17,76	14,47	11,17	7,87	4,58	1,28
CE	29,61	30,94	32,26	33,59	34,91	36,24	37,57	38,89	40,22	41,54	42,87
MA	34,00	31,61	29,22	26,83	24,43	22,04	19,65	17,26	14,87	12,48	10,09
PB	39,37	36,17	32,97	29,77	26,57	23,38	20,18	16,98	13,78	10,58	7,38
PE	32,26	29,53	26,80	24,07	21,34	18,61	15,88	13,15	10,42	7,69	4,96
PI	33,12	31,77	30,43	29,09	27,74	26,40	25,06	23,71	22,37	21,03	19,68
RN	29,30	27,09	24,88	22,68	20,47	18,27	16,06	13,86	11,65	9,44	7,24
SE	34,01	31,70	29,38	27,06	24,74	22,42	20,10	17,78	15,46	13,14	10,82
ES	18,74	21,15	23,56	25,98	28,39	30,80	33,22	35,63	38,04	40,45	42,87
MG	14,64	16,23	17,81	19,39	20,98	22,56	24,15	25,73	27,32	28,90	30,49
RJ	15,99	15,05	14,10	13,16	12,21	11,27	10,32	9,38	8,43	7,48	6,54
SP	6,95	10,54	14,13	17,72	21,32	24,91	28,50	32,09	35,68	39,28	42,87
AC	35,04	33,24	31,44	29,64	27,84	26,05	24,25	22,45	20,65	18,85	17,05
AM	26,32	24,40	22,48	20,56	18,64	16,73	14,81	12,89	10,97	9,05	7,14
AP	30,26	31,52	32,78	34,04	35,30	36,56	37,82	39,08	40,34	41,61	42,87
PA	32,00	33,08	34,17	35,26	36,35	37,43	38,52	39,61	40,69	41,78	42,87
RO	26,94	27,30	27,66	28,02	28,38	28,73	29,09	29,45	29,81	30,17	30,53
RR	30,22	30,83	31,45	32,06	32,67	33,29	33,90	34,51	35,13	35,74	36,35
TO	22,56	22,56	22,56	22,57	22,57	22,57	22,58	22,58	22,58	22,59	22,59
PR	14,66	17,48	20,30	23,12	25,94	28,76	31,58	34,40	37,23	40,05	42,87
RS	9,00	8,68	8,35	8,03	7,71	7,38	7,06	6,74	6,41	6,09	5,77
SC	10,32	10,60	10,88	11,16	11,44	11,72	12,00	12,29	12,57	12,85	13,13
DF	8,19	11,66	15,13	18,60	22,06	25,53	29,00	32,46	35,93	39,40	42,87
GO	13,86	16,76	19,66	22,56	25,46	28,36	31,26	34,17	37,07	39,97	42,87
MS	20,16	20,92	21,68	22,43	23,19	23,95	24,70	25,46	26,22	26,97	27,73
MT	15,24	18,00	20,77	23,53	26,29	29,05	31,82	34,58	37,34	40,10	42,87

Fonte: Elaborada pelo autor.

No outro extremo, quando a alocação passa a depender exclusivamente da eficiência

estimada pelo modelo BCC, ocorre uma mudança substancial na ordenação dos estados. Os maiores volumes distribuídos concentram-se em um conjunto de entes como Ceará, São Paulo, Espírito Santo, Pará, Amapá, Paraná, Goiás, Mato Grosso e Distrito Federal, que apresentam escores de eficiência elevados no cenário de referência. Já os menores valores distribuídos são observados principalmente na Bahia, Pernambuco, Rio Grande do Sul, Rio de Janeiro, Amazonas e Rio Grande do Norte, indicando que esses estados têm um menor desempenho relativo no modelo DEA.

Em cenários intermediários, observou-se um padrão consistente: o Pará aparece como o estado mais beneficiado, sugerindo que o estado mantém uma posição favorável tanto no fator de necessidade quanto no fator de eficiência; e o Rio Grande do Sul surge como o estado menos beneficiado. Ou seja: a combinação entre um fator de necessidade baixo e escores de eficiência que não se destacam faz com que o estado receba menos recursos na etapa de alocação.

## 5 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como finalidade analisar a eficiência relativa dos estados brasileiros na utilização dos repasses voluntários do FNDE e propor um modelo de distribuição de recursos capaz de integrar critérios de eficiência técnica e de necessidade socioeducacional. Para isso, foram utilizadas técnicas de DEA e procedimentos de normalização e agregação de indicadores, permitindo construir um índice composto que subsidia cenários alternativos de alocação.

A primeira etapa do estudo permitiu estimar, por meio do modelo DEA orientado a insumos, o desempenho relativo dos estados na transformação dos recursos analisados em resultados estruturais e educacionais. Os escores obtidos evidenciaram diferenças importantes entre as unidades federativas e possibilitaram quantificar a economia potencial de recursos, representando o montante que poderia ser reduzido caso todas operassem na fronteira de eficiência. Essa estimativa foi utilizada como base para a formulação da etapa seguinte do modelo.

Na segunda etapa, desenvolveu-se um índice de necessidade consolidando oito indicadores socioeconômicos e educacionais. Combinado aos escores de eficiência, esse índice compôs a variável de distribuição por meio do parâmetro  $\lambda$ , que regula o peso atribuído à eficiência e à necessidade. A aplicação dessa abordagem mostrou que valores distintos de  $\lambda$  produzem distribuições também distintas, permitindo observar cenários que privilegiam, alternativamente, estados mais eficientes, estados mais vulneráveis ou uma combinação equilibrada dos dois critérios.

Os resultados indicam que o modelo proposto é capaz de fornecer subsídios para decisões de distribuição de recursos em diferentes contextos de política pública. A flexibilidade proporcionada pela variação do parâmetro  $\lambda$  permite que gestores simulem cenários condizentes com prioridades específicas, como reduzir desigualdades regionais, incentivar boas práticas administrativas ou distribuir recursos de forma proporcional a necessidades educacionais.

Apesar das contribuições do estudo, algumas limitações devem ser reconhecidas. A análise concentrou-se nos repasses do PDDE, o que representa apenas parte do conjunto de recursos educacionais destinados aos estados. Além disso, o modelo DEA utilizado é sensível a *outliers* e não considera variações temporais de desempenho, limitando possíveis análises evolutivas. Outro ponto a ser destacado é que o modelo de distribuição não foi integrado a uma nova rodada de avaliação de eficiência, impossibilitando examinar como a distribuição simulada impactaria, posteriormente, os escores de cada unidade federativa.

Com base nessas limitações, recomenda-se que estudos futuros considerem a utiliza-

ção de modelos DEA dinâmicos, a aplicação de modelos não radiais, como aqueles apresentados na subseção 2.1.6, e a ampliação das variáveis de entrada para incluir outros componentes de financiamento educacional. Também se sugere o refinamento do índice de necessidade por meio de técnicas de ponderação automática e a aplicação da metodologia em escalas mais desagregadas, como municípios ou redes escolares.

Conclui-se que os resultados obtidos demonstram a viabilidade e a utilidade de um modelo híbrido que combine eficiência técnica e necessidade socioeducacional na distribuição de recursos públicos. A abordagem apresentada pode servir como instrumento de apoio ao planejamento e tomada de decisão, contribuindo para maior racionalidade na alocação dos recursos e para a promoção de uma política educacional mais eficiente.

## REFERÊNCIAS

- AGASISTI, T.; RIBEIRO, C. O.; MONTEMOR, D. S. The efficiency of brazilian elementary public schools. **International Journal of Educational Development**, [s. l.], v. 93, p. 102627, 2022.
- AGASISTI, T.; ZOIDO, P. The efficiency of schools in developing countries, analysed through PISA 2012 data. **Socio-Economic Planning Sciences**, [s. l.], v. 68, p. 100711, 2019.
- ANDERSEN, P.; PETERSEN, N. C. A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. **Management Science**, [s. l.], v. 39, n. 10, p. 1261–1264, 1993.
- APARICIO, J.; CORDERO, J. M.; GONZALEZ, M.; LOPEZ-ESPIN, J. J. Using non-radial DEA to assess school efficiency in a cross-country perspective: an empirical analysis of OECD countries. **Omega**, [s. l.], v. 79, p. 9–20, 2018.
- ARISTOVNIK, A. The impact of ict on educational performance and its efficiency in selected eu and oecd countries: A non-parametric analysis. **Turkish Online Journal of Educational Technology-TOJET**, [s. l.], v. 11, n. 3, p. 144–152, 2012.
- BANKER, R. D.; CHARNES, A.; COOPER, W. W. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. **Management Science**, [s. l.], v. 30, n. 9, p. 1078–1092, 1984.
- BANKER, R. D.; JANAKIRAMAN, S.; NATARAJAN, R. Analysis of trends in technical and allocative efficiency: an application to texas public school districts. **European Journal of operational research**, [s. l.], v. 154, n. 2, p. 477–491, 2004.
- BAO, M.; MA, R.; CHAO, J. Efficiency and equity of elderly care service resource allocation in China, 2014–2022. **Health Policy and Technology**, [s. l.], v. 14, n. 3, p. 101016, 2025. ISSN 2211-8837. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2211883725000449>. Acesso em: 9 ago. 2025.
- BAZARAA, M. S.; JARVIS, J. J.; SHERALI, H. D. **Linear programming and network flows**. [S. l.]: John Wiley & Sons, 2011.
- BEASLEY, J. E. Allocating fixed costs and resources via data envelopment analysis. **European Journal of Operational Research**, [s. l.], v. 147, n. 1, p. 198–216, 2003.
- BEGNINI, S.; TOSTA, H. T. A eficiência dos gastos públicos com a educação fundamental no brasil: uma aplicação da análise envoltória de dados (DEA). **Revista Economia & Gestão**, Belo Horizonte, [s. l.], 17, n. 46, p. 43–59, 2017.
- BEST, M. J.; RITTER, K. **Linear programming**. [S. l.]: Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1985.
- BOUSSEMART, J.-P.; BRIEC, W.; PARVULESCU, R.; RAVELOJAONA, P. Characterization of production sets through individual returns-to-scale: a non parametric specification and an illustration with the us industries. **International Journal of Production Economics**, [s. l.], v. 278, p. 109433, 2024.
- BOWLIN, W. F. Measuring performance: an introduction to data envelopment analysis (dea). **The Journal of Cost Analysis**, [s. l.], v. 15, n. 2, p. 3–27, 1998.

BRASIL. **Atlas do desenvolvimento humano no Brasil**, [S. l.]: PNUD Brasil. Ipea; FJP, 2022. Disponível em: <http://www.atlasbrasil.org.br/>. Acesso em: 17 nov. 2025.

CAMANHO, A. S.; SILVA, M. C.; PIRAN, F. S.; LACERDA, D. P. A literature review of economic efficiency assessments using data envelopment analysis. **European Journal of Operational Research**, [s. l.], v. 315, n. 1, p. 1–18, 2024.

CHARNES, A.; COOPER, W. W.; GOLANY, B.; SEIFORD, L.; STUTZ, J. Foundations of data envelopment analysis for pareto-koopmans efficient empirical production functions. **Journal of Econometrics**, [s. l.], v. 30, n. 1-2, p. 91–107, 1985.

CHARNES, A.; COOPER, W. W.; RHODES, E. Measuring the efficiency of decision making units. **European Journal of Operational Research**, [s. l.], v. 2, n. 6, p. 429–444, 1978.

CHEN, Y.; COOK, W. D.; LI, N.; ZHU, J. Additive efficiency decomposition in two-stage dea. **European Journal of Operational Research**, [s. l.], v. 196, n. 3, p. 1170–1176, 2009.

CHVÁTAL, V. **Linear programming**. [S. l.]: Macmillan, 1983.

COOK, W. D.; KRESS, M. Characterizing an equitable allocation of shared costs: a DEA approach. **European Journal of Operational Research**, [s. l.], v. 119, n. 3, p. 652–661, 1999.

COOPER, W. W.; SEIFORD, L. M.; TONE, K. **Data envelopment analysis: a comprehensive text with models, applications, references and DEA-solver software**. 2. ed. New York: Springer, 2007.

COSTA, C. C. M.; FERREIRA, M. A. M.; BRAGA, M. J.; ABRANTES, L. A. Fatores associados à eficiência na alocação de recursos públicos à luz do modelo de regressão quantílica. **Revista de Administração Pública**, Rio de Janeiro, v. 49, n. 5, p. 1319–1347, 2015.

CRESWELL, J. W.; CRESWELL, J. D. **Research design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches**. [S. l.]: Sage publications, 2017.

CRUZ, R. E. Federalismo e financiamento da educação: a política do fnde em debate. *In*: GOUVEIA, Andréa Barbosa; PINTO, José Marcelino Rezende; CORBUCCI, Paulo Roberto (org.). **Federalismo e políticas educacionais na efetivação do direito à educação no Brasil**, Brasília: Ipea, p. 79–110, 2011.

DAVIS, P. G.; SOUZA, A. A. Análise comparativa da eficiência alocativa das despesas públicas municipais utilizando mineração de dados. **Administração Pública e Gestão Social**, Viçosa, v. 13, n. 4, p. 1–21, 2021. Disponível em: <https://www.redalyc.org/journal/3515/351568433009/html/>. Acesso em: 10/09/2024.

DRUCKER, P. **The effective executive**. [S. l.]: Routledge, 2018.

DU, J.; COOK, W. D.; LIANG, L.; ZHU, J. Fixed cost and resource allocation based on dea cross-efficiency. **European Journal of Operational Research**, [s. l.], v. 235, n. 1, p. 206–214, 2014.

DUFRECHOU, P. A. The efficiency of public education spending in Latin America: a comparison to high-income countries. **International Journal of Educational Development**, [s. l.], v. 49, p. 188–203, 2016.

- EMROUZNEJAD, A.; AMIN, G. R. DEA models for ratio data: convexity consideration. **Applied Mathematical Modelling**, [s. l.], v. 33, n. 1, p. 486–498, 2009.
- EMROUZNEJAD, A.; YANG, G.-I. A survey and analysis of the first 40 years of scholarly literature in DEA: 1978–2016. **Socio-Economic Planning Sciences**, [s. l.], v. 61, p. 4–8, 2018.
- FÄRE, R.; GROSSKOPF, S.; WHITTAKER, G. Network DEA. **Modeling data irregularities and structural complexities in data envelopment analysis**, [s. l.], p. 209–240, 2007.
- FARRELL, M. J. The measurement of productive efficiency. **Journal of the Royal Statistical Society Series A: Statistics in Society**, [s. l.], v. 120, n. 3, p. 253–281, 1957.
- FILHO, S. S. L.; PEIXE, B. C. S. Análise de eficiência na gestão de recursos das instituições federais de ensino superior à luz da nova administração pública. **Revista Contemporânea de Contabilidade**, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), v. 17, n. 43, p. 88–103, 2020.
- FRIED, H. **The Measurement of Productive Efficiency and Productivity Growth**. [S. l.]: Oxford University Press, 2008.
- GIL, A. C. Como classificar as pesquisas. *In*: GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2022. p. 44–45.
- GRILLO, C. C. **Análise da eficiência e da produtividade na alocação de recursos do Fundeb no estado do Amapá entre 2010 e 2019**. Dissertação (Mestrado em Economia) – Faculdade de Economia, Administração, Atuária e Contabilidade, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, p. 98 f., 2022.
- HART, W. E.; WATSON, J.-P.; WOODRUFF, D. L. Pyomo: modeling and solving mathematical programs in python. **Mathematical Programming Computation**, [s. l.], v. 3, p. 219–260, 2011.
- HENRIQUES, C.; CHAVEZ, J.; GOUVEIA, M.; MARCENARO-GUTIERREZ, O. Efficiency of secondary schools in ecuador: a value based DEA approach. **Socio-Economic Planning Sciences**, [s. l.], v. 82, p. 101226, 2022.
- HEYNE, P. T.; BOETTKE, P. J.; PRYCHITKO, D. L. **The economic way of thinking**. [S. l.]: Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 1994.
- KAMAKURA, W. A.; RATCHFORD, B. T.; AGRAWAL, J. Measuring market efficiency and welfare loss. **Journal of Consumer Research**, The University of Chicago Press, v. 15, n. 3, p. 289–302, 1988.
- KAO, C.; LIU, S.-T. Fuzzy efficiency measures in data envelopment analysis. **Fuzzy Sets and Systems**, [s. l.], v. 113, n. 3, p. 427–437, 2000.
- MAKHORIN, A. **GLPK (GNU Linear Programming Kit)**. [S. l.]: GNU Project, 2008. Disponível em: <http://www.gnu.org/s/glpk/glpk.html>. Acesso em: 24 mar. 2025.
- MARIANO, E. B. **Sistematização e comparação de técnicas, modelos e perspectivas não-paramétricas de análise de eficiência produtiva**. Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, 2008.
- MARIANO, E. B. **Crescimento econômico e desenvolvimento humano: uma análise mundial da eficiência social de estados-nação**. 2012. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.

- MEDRANO, R. M. A.; CARVALHO, W. L.; YAMASHITA, Y.; CIRINO, P. H. A resource allocation model of national school transportation program for municipalities. **Case Studies on Transport Policy**, v. 9, n. 4, p. 1660–1671, 2021. ISSN 2213-624X. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2213624X21001498>. Acesso em: 19 out. 2025.
- MELLO, J. C. C. B. S.; GOMES, E. G.; LETA, F. R.; MELLO, M. H. C. S. Algoritmo de alocação de recursos discretos com análise de envoltória de dados. **Pesquisa Operacional**, [s. l.], v. 26, p. 225–239, 2006.
- MEZA, L. A.; GOMES, E. G.; BIONDI NETO, L. Curso de análise de envoltória de dados. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, 37., 2005, Gramado. **Anais [...]**, Rio de Janeiro: SOBRAPO, 2005. p. 2520–2547.
- MORAIS, M. M. S. **O Programa Dinheiro Direto na Escola na região nordeste (2010-2020): da execução financeira ao desempenho gerencial**. 2025. Tese (Doutorado) – Centro de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2025. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/65631>. Acesso em: 14 set. 2025.
- OLSEN, C.; GEORGE, D. M. S. **Cross-sectional study design and data analysis**. [S. l.]: College Entrance Examination Board, 2004. Disponível em: [http://www.yes-competition.org/media.collegeboard.com/digitalServices/pdf/yes/4297\\_MODULE\\_05.pdf](http://www.yes-competition.org/media.collegeboard.com/digitalServices/pdf/yes/4297_MODULE_05.pdf). Acesso em: 24 jan. 2025.
- POZZA, D.; CASTRO, G. H. L.; PORSSE, A. A. Eficiência do gasto público com educação no estado do paraná: uma análise com modelos econom tricos espaciais. **Geosul**, [s. l.], v. 37, n. 82, p. 221–251, 2022.
- RANGLES, B. M.; PASQUETTO, I. V.; GOLSHAN, M. S.; BORGMAN, C. L. Using the Jupyter Notebook as a tool for open science: an empirical study. In: ACM/IEEE JOINT CONFERENCE ON DIGITAL LIBRARIES (JCDL), 2017, Toronto. **Proceedings [...]**. Piscataway: IEEE, 2017. p. 1–2.
- SANTOS, R. R.; FREITAS, M. M.; VICENTE, E. F. R. Impacto da governança na eficiência da aplica o dos recursos públicos com educa o. **Revista de Administra o, Sociedade e Inova o**, [s. l.], v. 4, n. 2, p. 149–170, maio/agosto 2018.
- SILVA, A. R.; YAMASHITA, Y. Modelo de distribui o de recursos para o transporte escolar rural a partir dos princípios da igualdade e da equidade. **Transportes**, [s. l.], v. 18, n. 3, 2010.
- SOUSA, M. C. S.; RAMOS, F. S. Eficiência técnica e retornos de escala na produ o de serviços públicos municipais: o caso do nordeste e do sudeste brasileiros. **Revista Brasileira de Economia**, [s. l.], v. 53, p. 433–461, 1999.
- SOUTO, M. C. O. A. de. Gestão e os recursos financeiros escolares: Como política pública. **Revista Educa o Contemporânea**, [s. l.], v. 2, n. 2, p. 1060–1071, 2025.
- THANASSOULIS, E. **Introduction to the theory and application of data envelopment analysis**. Massachusetts: Kluwer Academic Publishers, 2001.
- TONE, K. A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis. **European journal of operational research**, [s. l.], v. 130, n. 3, p. 498–509, 2001.

TONE, K.; TSUTSUI, M. Dynamic dea: A slacks-based measure approach. **Omega**, [s. l.], v. 38, n. 3-4, p. 145–156, 2010.

TORRES-SAMUEL, M.; VÁSQUEZ, C. L.; LUNA, M.; BUCCI, N.; VILORIA, A.; CRISSIEN, T.; MANOSALVA, J. Performance of education and research in latin american countries through data envelopment analysis (DEA). **Procedia Computer Science**, [s. l.], v. 170, p. 1023–1028, 2020.

VARIAN, H. R.; VARIAN, H. R. **Microeconomic analysis**. [S. l.]: Norton New York, 1992. v. 3.

YU, M.-M.; CHEN, L.-H.; HSIAO, B. A fixed cost allocation based on the two-stage network data envelopment approach. **Journal of Business Research**, [s. l.], v. 69, n. 5, p. 1817–1822, 2016.

## APÊNDICE A – CÓDIGOS DOS MODELOS DEA

### Código-fonte 1 – Funções importadas do Pyomo

```
1 from pyomo.environ import (  
2     ConcreteModel, Var, Objective, Constraint,  
3     SolverFactory, NonNegativeReals, Reals, maximize  
4 )
```

### Código-fonte 2 – Leitura e preparação de dados

```
1 df = pd.read_csv(ARQUIVO_DADOS)  
2  
3 outputs_cols = [c for c in df.columns if c.lower().  
4     startswith('output')]  
5  
6 inputs_cols = [c for c in df.columns if c.lower().  
7     startswith('input')]  
8  
9 m_outputs = len(outputs_cols)  
10 m_inputs = len(inputs_cols)  
11  
12 y = {}  
13 x = {}  
14  
15 for _, row in df.iterrows():  
16     j = str(row['DMU'])  
17     for r_idx, rcol in enumerate(outputs_cols, start=1):  
18         y[(j, r_idx)] = float(row[rcol])  
19     for i_idx, icol in enumerate(inputs_cols, start=1):  
20         x[(j, i_idx)] = float(row[icol])
```

Código-fonte 3 – Leitura e preparação de dados modelo com *output-razão*

```
1 df = pd.read_csv(INPUT_VARS_CSV)
2
3 X = df.set_index("DMU")["x1"].to_dict()
4
5 Y_abs_cols = ["y6", "y7", "y8"]
6 Y_abs = {col: df.set_index("DMU")[col].astype(float).
7         to_dict() for col in Y_abs_cols if col in df.columns}
8
9 ratio_tags = ["y1", "y2", "y3", "y4", "y5"]
10 ratios = []
11 for k, tag in enumerate(ratio_tags, start=1):
12     ncol, dcol = f"n{k}", f"d{k}"
13     if ncol not in df.columns or dcol not in df.columns:
14         raise RuntimeError(f"Faltando colunas {ncol} ou {
15             dcol}.")
16     n_series = df.set_index("DMU")[ncol].astype(float).
17             to_dict()
18     d_series = df.set_index("DMU")[dcol].astype(float).
19             to_dict()
20     for j in DMUs:
21         if d_series[j] <= 0:
22             raise ValueError(f"Denominador zero ou negativo
23                 para {dcol} na DMU {j}")
24     ratios.append({"tag": tag, "n": n_series, "d": d_series
25                 })
```

## Código-fonte 4 – Definição das variáveis do modelo

```

1 for alvo in DMUs:
2
3     model = ConcreteModel()
4     model.J = Set(initialize=DMUs)
5     model.I = RangeSet(1, m_inputs)
6     model.R = RangeSet(1, m_outputs)
7
8     model.lamb = Var(model.J, domain=NonNegativeReals)
9     model.theta = Var(domain=NonNegativeReals)

```

## Código-fonte 5 – Definição da função objetivo do modelo de programação linear

```

1     model.obj = Objective(expr = model.theta, sense=
        minimize)

```

## Código-fonte 6 – Restrições do modelo

```

1     def out_rule(m, r):
2         return sum(m.lamb[j] * y[(j, r)] for j in m.J) >= y
           [(alvo, r)]
3     model.out_cons = Constraint(model.R, rule=out_rule)
4
5     def in_rule(m, i):
6         return sum(m.lamb[j] * x[(j, i)] for j in m.J) <= m
           .theta * x[(alvo, i)]
7     model.in_cons = Constraint(model.I, rule=in_rule)

```

Código-fonte 7 – Restrições do modelo ajustado ao *output*-razão

```

1     x0 = float(X[dmu0])
2     model.in_cons = Constraint(expr=sum(model.l[j] * X[j]
3         for j in model.J) <= model.theta * x0)
4
5     model.out_abs = ConstraintList()
6     for col in Y_abs_cols:
7         y0 = float(Y_abs[col].get(dmu0, 0.0))
8         expr = sum(model.l[j] * Y_abs[col].get(j, 0.0) for
9             j in model.J) >= y0
10        model.out_abs.add(expr)
11
12    model.out_ratios = ConstraintList()
13    for r in ratios:
14        n_series = r["n"]
15        d_series = r["d"]
16        n0 = float(n_series[dmu0])
17        d0 = float(d_series[dmu0])
18        coef = n0 / d0
19        lhs = sum(model.l[j] * n_series[j] for j in model.J
20            )
21        rhs = coef * sum(model.l[j] * d_series[j] for j in
22            model.J)
23        expr = lhs >= rhs
24        model.out_ratios.add(expr)

```

## Código-fonte 8 – Restrição de convexidade apenas para o modelo DEA-BCC

```

1     model.conv = Constraint(expr = sum(model.lamb[j] for j
2         in model.J) == 1)

```

Código-fonte 9 – Implementação do *solver* GLPK

```
1     opt = SolverFactory('glpk')
2     res = opt.solve(model)
```

## Código-fonte 10 – Cálculo das projeções e economias

```
1     lambdas = {j: value(model.l[j]) for j in model.J}
2     x_proj = sum(lambdas[j] * X[j] for j in model.J)
3     theta_val = value(model.theta)
4     economia = max(0, x0 - x_proj)
```

## APÊNDICE B – CÓDIGO DO MODELO DE DISTRIBUIÇÃO

### Código-fonte 11 – Leitura de dados

```
1 import pandas as pd
2 import numpy as np
3
4 df = pd.read_csv("dados_para_distribuicao.csv")
```

### Código-fonte 12 – Definição dos indicadores e direção

```
1 indicadores = [
2     "tx_analf_15mais",
3     "freq_liq_basico",
4     "freq_liq_fund",
5     "freq_liq_med",
6     "perc_25mais_med_comp",
7     "perc_extrema_pobreza",
8     "idhm_educacao",
9     "inse"
10 ]
11
12 direcao = {
13     "tx_analf_15mais": "maior",
14     "freq_liq_basico": "menor",
15     "freq_liq_fund": "menor",
16     "freq_liq_med": "menor",
17     "perc_25mais_med_comp": "menor",
18     "perc_extrema_pobreza": "maior",
19     "idhm_educacao": "menor",
20     "inse": "menor"
21 }
```

## Código-fonte 13 – Cálculo do fator de necessidade

```
1 def calcular_fator_necessidade(df, indicadores, direcao):
2     df_temp = df.copy()
3
4     for col in indicadores:
5         x_min = df_temp[col].min()
6         x_max = df_temp[col].max()
7         s_col = f"s_{col}"
8
9         if np.isclose(x_min, x_max):
10            df_temp[s_col] = 0
11        else:
12            if direcao[col] == "maior":
13                df_temp[s_col] = (df_temp[col] - x_min) / (
14                    x_max - x_min)
15            else:
16                df_temp[s_col] = (x_max - df_temp[col]) / (
17                    x_max - x_min)
18
19        colunas_s = [f"s_{col}" for col in indicadores]
20        df_temp["N"] = df_temp[colunas_s].mean(axis=1)
21
22        soma_N = df_temp["N"].sum()
23        df_temp["H"] = df_temp["N"] / soma_N
24
25    return df_temp
```

## Código-fonte 14 – Cálculo do fator de eficiência

```
1 def calcular_fator_eficiencia(df):  
2     soma_theta = df["theta"].sum()  
3     df["E"] = df["theta"] / soma_theta  
4     return df
```

## Código-fonte 15 – Cálculo da distribuição de recursos

```
1 def distribuir_recursos(df, S, lambda_):  
2     df_temp = df.copy()  
3  
4     df_temp["omega"] = lambda_ * df_temp["E"] + (1 -  
5         lambda_) * df_temp["H"]  
6  
7     df_temp["R"] = df_temp["omega"] * S  
8  
9     return df_temp
```

APÊNDICE C – VARIÁVEIS RAZÃO DESAGREGADAS

DMU	x1	y1	y2	y3	y4	y5	y6	y7	y8	n1	n2	n3	n4	n5	d1	d2	d3	d4	d5
BA	R\$ 203.890.312,20	0,9347	0,8825	0,9157	0,7790	0,7050	5,2593	4,7985	4,2619	945.623	733.048	467.540	1.435.191	359.963	1.011.704	830.646	510.586	1.842.350	510.586
CE	R\$ 111.771.160,90	0,9976	0,9870	0,9464	0,9470	0,8620	6,4936	5,5872	4,5955	631.242	491.188	345.351	1.070.512	314.542	632.763	497.662	364.898	1.130.425	364.898
PE	R\$ 77.329.542,52	0,9680	0,9474	0,9320	0,8500	0,8060	5,4818	5,2610	4,8175	651.307	519.014	315.122	1.037.577	272.518	672.838	547.841	338.112	1.220.679	338.112
AL	R\$ 43.523.392,36	0,9852	0,9609	0,9310	0,8590	0,7630	5,8351	5,2053	4,3638	236.131	191.982	118.458	377.509	97.077	239.689	199.786	127.231	439.475	127.231
PB	R\$ 42.412.557,45	0,9642	0,9880	0,8759	0,8200	0,7240	5,5070	5,0085	4,5235	274.872	211.527	127.500	423.067	105.393	285.067	235.558	145.571	520.625	145.571
PI	R\$ 41.499.213,23	0,9774	0,9601	0,9672	0,8660	0,7460	5,7930	5,4032	4,6674	232.104	185.611	125.801	373.064	97.028	237.465	193.325	130.065	430.790	130.065
MA	R\$ 33.170.229,00	0,9737	0,9346	0,9250	0,8550	0,7630	5,2716	4,8187	4,1451	537.927	438.482	269.782	873.478	222.529	552.449	469.163	291.650	1.021.612	291.650
RN	R\$ 31.160.388,02	0,9300	0,8351	0,8298	0,7810	0,6220	5,1574	4,9402	4,3992	221.654	159.447	105.869	335.267	79.352	238.350	190.929	127.576	429.279	127.576
SE	R\$ 24.208.530,31	0,9445	0,8722	0,9015	0,8000	0,7550	5,1579	5,0142	4,4261	154.044	120.306	77.332	240.823	64.767	163.094	137.935	85.784	301.029	85.784
SP	R\$ 237.746.380,70	0,9894	0,9767	0,9481	0,9500	0,8940	6,2892	5,5365	4,7939	2.937.018	2.305.571	1.756.978	5.062.645	1.656.708	2.968.571	2.360.529	1.853.141	5.329.100	1.853.141
MG	R\$ 58.336.513,00	0,9868	0,9300	0,8746	0,9270	0,8380	6,1386	5,3147	4,8094	1.242.625	994.351	644.945	2.158.521	617.988	1.259.280	1.069.222	737.456	2.328.502	737.456
RJ	R\$ 49.490.617,51	0,9373	0,9200	0,8393	0,7980	0,6780	5,8231	5,3643	4,4609	1.041.329	766.642	462.203	1.551.547	373.358	1.110.956	833.339	550.676	1.944.295	550.676
ES	R\$ 10.591.241,00	0,9719	0,9490	0,9559	0,8800	0,8240	6,2330	5,5442	5,0187	276.551	204.701	122.186	440.204	105.324	284.533	215.699	127.820	500.232	127.820
PA	R\$ 108.249.433,90	0,9227	0,8932	0,9880	0,7680	0,6680	5,2516	4,9213	4,4976	668.086	519.294	346.540	1.002.581	234.298	724.044	581.400	350.746	1.305.444	350.746
AM	R\$ 49.288.818,75	0,9679	0,9385	0,8986	0,8500	0,7180	5,7355	5,1375	4,2627	376.343	281.814	173.150	585.756	138.346	388.838	300.287	192.683	689.125	192.683
TO	R\$ 21.666.030,07	0,9770	0,9645	0,9609	0,9050	0,8150	5,5512	5,0532	4,4214	113.976	97.900	67.342	197.440	57.118	116.661	101.505	70.084	218.166	70.084
AC	R\$ 17.624.613,00	0,9466	0,9185	0,8877	0,7890	0,7370	6,0655	5,2075	4,5287	76.757	56.408	35.578	112.433	29.538	81.085	61.416	40.079	142.501	40.079
RO	R\$ 14.529.114,14	0,9618	0,9547	0,9285	0,9000	0,8410	5,6802	5,0378	4,5131	115.712	99.289	67.951	201.873	61.550	120.307	103.996	73.187	224.303	73.187
RR	R\$ 8.127.921,88	0,9599	0,9211	0,8301	0,8130	0,7800	5,5913	4,6935	4,2377	64.219	42.267	23.152	91.698	21.754	66.902	45.888	27.890	112.790	27.890
AP	R\$ 4.757.590,34	0,9248	0,8897	0,8698	0,7550	0,6570	5,1753	4,8190	4,3507	70.532	48.324	29.005	98.589	21.908	76.270	54.312	33.346	130.582	33.346
RS	R\$ 67.052.922,00	0,9508	0,9066	0,8442	0,8690	0,7640	6,0782	5,4512	4,9222	678.732	485.790	279.612	1.085.962	253.049	713.824	535.845	331.216	1.249.669	331.216
SC	R\$ 62.878.524,50	0,9716	0,9249	0,8559	0,8930	0,7950	6,3715	5,6028	4,8524	529.834	383.805	232.370	857.510	215.843	545.301	414.957	271.501	960.258	271.501
PR	R\$ 31.590.211,00	0,9768	0,9837	0,9705	0,9180	0,8800	6,6565	5,6227	5,0001	764.204	587.391	405.518	1.266.307	367.696	782.323	597.096	417.836	1.379.419	417.836
GO	R\$ 15.860.563,00	0,9794	0,9795	0,9612	0,9010	0,8680	6,2497	5,6287	4,9906	485.351	374.736	231.488	791.199	209.045	495.551	382.583	240.835	878.134	240.835
MT	R\$ 12.936.148,00	0,9948	0,9875	0,9661	0,9410	0,8570	5,8185	5,0013	4,5156	296.655	215.502	136.479	485.968	121.062	298.208	218.230	141.262	516.438	141.262
MS	R\$ 9.570.226,00	0,9292	0,9254	0,8597	0,8070	0,7610	5,6986	5,1637	4,6538	212.932	154.579	89.993	319.728	79.661	229.145	167.048	104.679	396.193	104.679
DF	R\$ 6.853.815,15	0,9516	0,9387	0,8730	0,8600	0,7810	6,2436	5,3232	4,8559	193.192	148.245	91.216	310.409	81.604	203.015	157.926	104.486	360.941	104.486