



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL: ESTRUTURAS E**  
**CONSTRUÇÃO CIVIL**

**MARCELO FREIRES PINTO**

**ESTABILIDADE DE COLUNAS LAMINADAS DE**  
**MATERIAL COMPÓSITO COM SEÇÃO C**

**FORTALEZA**

**2024**

MARCELO FREIRES PINTO

ESTABILIDADE DE COLUNAS LAMINADAS DE  
MATERIAL COMPÓSITO COM SEÇÃO C

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Evandro Parente Junior.

Coorientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Taumaturgo Mororó.

FORTALEZA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

P729e Pinto, Marcelo Freires.  
Estabilidade de colunas laminadas de material compósito com seção C / Marcelo Freires Pinto. – 2024.  
88 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Fortaleza, 2024.

Orientação: Prof. Dr. Evando Parente Junior.

Coorientação: Prof. Dr. Luiz Antorio Taumaturgo Mororó.

1. Estabilidade de colunas. 2. Seção C. 3. Materiais Compósitos. 4. Paredes Finas. I. Título.

CDD 624.1

---

MARCELO FREIRES PINTO

ESTABILIDADE DE COLUNAS LAMINADAS DE  
MATERIAL COMPÓSITO COM SEÇÃO C

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas.

Aprovada em: 28/06/2024

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Evandro Parente Junior (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Luiz Antonio Taumaturgo  
Mororó (Coorientador)  
Instituto Federal do Ceará (IFCE)

---

Prof. Dr. Marcelo Silva Medeiros Júnior  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Francisco Alex Correia Monteiro  
Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)

À minha família, por sua capacidade de acreditar e investir em mim. Mãe, seu cuidado e dedicação foi que deram, em alguns momentos, a esperança para seguir. Pai, sua presença significou segurança e certeza de que não estou sozinho nessa caminhada.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, primeiramente, por estar comigo em cada passo, proporcionando amor, graça, misericórdia, força e proteção incondicionais.

Aos meus pais, Maria de Nazaré Freires e Gilvam Queiroz, por seu amor, dedicação e apoio. Agradeço por estarem sempre ao meu lado e por me ensinarem a buscar o melhor e nunca desistir dos meus sonhos.

Agradeço à minha família: minha irmã, pela cumplicidade; minha avó, pela sabedoria; meus tios e tias, pelo incentivo.

À minha esposa, pelo amor, companheirismo, constante apoio, dedicação e suporte ao longo dos anos que estivemos juntos. Obrigado por estar ao meu lado, acreditando em mim e me incentivando.

Ao meu filho, pelo incentivo e alegria que sua presença proporcionou. Obrigado por me lembrar todos os dias da importância de ser uma pessoa melhor.

Ao professor Evandro Parente Júnior, pela orientação paciente e dedicada, incentivo e confiança. Os conhecimentos transmitidos durante o desenvolvimento, sua sabedoria e experiência me motivaram a superar desafios e buscar a excelência.

Ao professor Luiz Antônio Taumaturgo Mororó, pela coorientação presente e assídua que contribuíram para o desenvolvimento do trabalho. Ao professor Marcelo Medeiros, pelo incentivo. Aos professores João Batista Marques Souza Júnior, Antônio Macário Cartaxo de Melo, Tereza Denyse de Araújo e demais professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil da UFC. Ao professor Francisco Alex Correia Monteiro, por integrar a banca examinadora.

Agradeço aos meus colegas de trabalho pela compreensão, apoio e camaradagem. Suas palavras de incentivo e suporte foram vitais em momentos de dificuldade, e a colaboração de cada um de vocês fez toda a diferença na minha jornada. Agradeço a todos pela paciência durante os períodos mais intensos de trabalho e por contribuírem para um ambiente de trabalho positivo e motivador.

Aos meus amigos, Thamires Araújo e Pedro Sandersson. Agradeço pelo companheirismo, amizade, apoio e contribuições diretas ou indiretas durante o curso.

À Universidade Federal do Ceará, especialmente ao DEECC e ao LMCV, pela infraestrutura.

“Não é a força, mas a constância dos bons resultados que conduz os homens à felicidade.”

(Friedrich Nietzsche)

## RESUMO

O emprego crescente de materiais compósitos incentiva a fabricação de elementos com parede fina, devido ao custo e eficiência. No entanto, estas estruturas apresentam elevada esbeltez, estando sujeitas a falhas por estabilidade quando submetidas a esforços de compressão. Os perfis da seção C possuem ampla aplicabilidade como colunas e estão sujeitos aos modos de flambagem local e global, o que torna o comportamento estrutural desses perfis de interesse para estudo. Considerando estes aspectos, este trabalho estuda a estabilidade de colunas laminadas de material compósito reforçado por fibras com seção C submetidos à compressão. Inicialmente, o Método de Rayleigh-Ritz, com um e dois graus de liberdade, é utilizado para determinação da carga crítica de flambagem local, sendo sendo estes valores comparados com resultados pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), além de resultados numéricos e experimentais disponíveis na literatura. Em seguida, o Método de Rayleigh-Ritz também é utilizado para a determinação da carga de flambagem global, considerando os modos de flexo-torção e flexão em torno do eixo de menor inércia. O cálculo das propriedades equivalentes das colunas laminadas é realizado utilizando as teorias de Cardoso (1999), Massa e Barbeiro (1998) e Kollar e Pluzsik (2002). Os resultados são comparados com os obtidos utilizando o Método dos Elementos Finitos. A abordagem proposta permite a determinação simples e rápida da curva de assinatura de colunas com seção C submetidas à compressão. Esta abordagem é aplicada a colunas com diferentes laminações e dimensões de seção transversal, incluindo um estudo paramétrico para avaliar o efeito do acréscimo de camadas, conseqüentemente aumento de espessura, além de diferentes configurações geométricas considerando o mesmo consumo de material.

**Palavras-chave:** estabilidade de colunas; seção C; materiais compósitos; estruturas de parede fina.

## ABSTRACT

The increasing use of composite materials encourages the manufacture of thin-walled elements, due to cost and efficiency. However, these structures are highly slender and susceptible to stability failures when subjected to compressive stresses. Channel profiles have wide applicability as columns and are subject to local and global buckling modes, which makes the structural behavior of these profiles of interest for study. Considering these aspects, this work studies the stability of laminated columns of fiber-reinforced composite material with channel sections subjected to compression. Initially, the Rayleigh-Ritz Method, with one and two degrees of freedom, is used to determine the local buckling load, with these values being compared with results obtained using the Finite Element Method (FEM), in addition to numerical and experimental results available in the literature. Then, the Rayleigh-Ritz Method is also applied to determine the global buckling load, considering the bending-torsion and bending modes around the axis of least inertia. The calculation of cross-sectional equivalent properties of laminated columns is carried out using the theories of Cardoso (1999), Massa and Barbeiro (1998), and Kollar and Pluzsik (2002). The results are compared with those obtained using the Finite Element Method. The proposed approach allows the simple and efficient determination of the signature curve of laminated columns with channel sections subjected to pure compression. This approach is applied to columns with different layups and cross-sectional dimensions, including a parametric study to evaluate the effect of adding layers, consequently increasing the laminate thickness, in addition to different geometric configurations considering the same material consumption.

**Keywords:** column stability; channel sections; composite materials; thin walled structures.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Classificação dos materiais compósitos. . . . .	17
Figura 2 – Classificação dos Compósitos Reforçados. . . . .	18
Figura 3 – Esquema de laminação. . . . .	19
Figura 4 – Geometrias não deformadas e deformadas de uma borda de uma placa sob as hipóteses de Kirchhoff . . . . .	23
Figura 5 – Modo de flambagem local de um perfil C submetido à compressão. . . . .	29
Figura 6 – Representação do modo local em perfis C. . . . .	32
Figura 7 – Curvas para solução com um grau de liberdade . . . . .	36
Figura 8 – Curvas para solução com dois graus de liberdade . . . . .	41
Figura 9 – Modos de flambagem global em Perfil C comprimido. . . . .	43
Figura 10 – Fator $K$ , para diferentes condições de contorno. . . . .	44
Figura 11 – Características da seção C. . . . .	45
Figura 12 – Características dos segmentos que compõem a seção C. . . . .	47
Figura 13 – Eixos locais para um segmento arbitrário $k$ . . . . .	50
Figura 14 – Deformações de flambagem por Flexo-Torção. . . . .	53
Figura 15 – Deformação de uma fibra longitudinal. . . . .	54
Figura 16 – Curvas de flambagem global . . . . .	57
Figura 17 – Geometria e esquema de laminação da coluna. . . . .	59
Figura 18 – Condições de contorno do modelo numérico desenvolvido. . . . .	60
Figura 19 – Diferenças percentuais entre resultados. . . . .	62
Figura 20 – Curvas de assinatura para os <i>Layups</i> L1 e L2. . . . .	63
Figura 21 – Curvas de assinatura para os <i>Layups</i> L3 e L4. . . . .	63
Figura 22 – Curvas de assinatura para os <i>Layups</i> L5 e L6. . . . .	63
Figura 23 – Curva considerando flambagem global para o <i>layup</i> L1. . . . .	68
Figura 24 – Curva considerando flambagem global para o <i>layup</i> L2. . . . .	68
Figura 25 – Curva considerando flambagem global para o <i>layup</i> L3. . . . .	69
Figura 26 – Curva considerando flambagem global para o <i>layup</i> L4. . . . .	69
Figura 27 – Curva de assinatura e resultados MEF para o <i>layup</i> L1. . . . .	70
Figura 28 – Curva de assinatura e resultados MEF para o <i>layup</i> L2. . . . .	71
Figura 29 – Curva de assinatura e resultados MEF para o <i>layup</i> L3. . . . .	71
Figura 30 – Curva de assinatura e resultados MEF para o <i>layup</i> L4. . . . .	72

Figura 31 – Diferenças percentuais entre laminações. . . . .	72
Figura 32 – Modos de flambagem para colunas de 500 mm. . . . .	73
Figura 33 – Modos de flambagem para colunas de 2500 mm. . . . .	74
Figura 34 – Curvas de assinatura para os <i>layups</i> L1 e L2 em função do número de lâminas. . . . .	76
Figura 35 – Curvas de assinatura para os <i>layups</i> L1 em função da razão $b_w/b_f$ . . . . .	77
Figura 36 – Curvas de assinatura para os <i>layups</i> L2 em função da razão $b_w/b_f$ . . . . .	77
Figura 37 – Curvas de assinatura para os <i>layups</i> L3 em função da razão $b_w/b_f$ . . . . .	78
Figura 38 – Curvas de assinatura para os <i>layups</i> L4 em função da razão $b_w/b_f$ . . . . .	78

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b>	<b>13</b>
<b>1.2</b>	<b>Organização do Trabalho</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>MATERIAIS COMPÓSITOS</b>	<b>16</b>
<b>2.1</b>	<b>Compósitos Reforçados com Fibras</b>	<b>16</b>
<b>2.2</b>	<b>Compósitos Laminados</b>	<b>18</b>
<b>2.3</b>	<b>Relações Constitutivas</b>	<b>20</b>
<b>2.4</b>	<b>Teoria Clássica da Laminação</b>	<b>23</b>
<b>2.5</b>	<b>Propriedades Elásticas Equivalentes</b>	<b>25</b>
<b>2.5.1</b>	<i>Abordagem de Rigidez</i>	<b>25</b>
<b>2.5.2</b>	<i>Abordagem de Flexibilidade</i>	<b>27</b>
<b>3</b>	<b>FLAMBAGEM LOCAL</b>	<b>29</b>
<b>3.1</b>	<b>Método de Rayleigh-Ritz</b>	<b>31</b>
<b>3.1.1</b>	<i>Método de Rayleigh-Ritz com um grau de liberdade</i>	<b>35</b>
<b>4</b>	<b>FLAMBAGEM GLOBAL</b>	<b>43</b>
<b>4.1</b>	<b>Geometria e propriedades de perfis C</b>	<b>45</b>
<b>4.2</b>	<b>Propriedades Equivalentes</b>	<b>46</b>
<b>4.2.1</b>	<i>Teoria de Massa e Barbero (1998)</i>	<b>47</b>
<b>4.2.2</b>	<i>Teoria de Cardoso et al. (1999)</i>	<b>49</b>
<b>4.2.3</b>	<i>Teoria de Kollar e Pluzsik (2002)</i>	<b>50</b>
<b>4.3</b>	<b>Método de Rayleigh-Ritz</b>	<b>53</b>
<b>5</b>	<b>EXEMPLOS NUMÉRICOS</b>	<b>58</b>
<b>5.1</b>	<b>Coluna de Debski et al. (2013)</b>	<b>58</b>
<b>5.1.1</b>	<i>Validação do modelo</i>	<b>60</b>
<b>5.1.2</b>	<i>Curvas de Assinatura do modo local</i>	<b>62</b>
<b>5.2</b>	<b>Exemplos de verificação</b>	<b>64</b>
<b>5.2.1</b>	<i>Propriedades Equivalentes</i>	<b>64</b>
<b>5.2.2</b>	<i>Curvas de Assinatura</i>	<b>70</b>
<b>5.3</b>	<b>Estudo Paramétrico</b>	<b>74</b>
<b>5.3.1</b>	<i>Influência da espessura</i>	<b>74</b>

5.3.2	<i>Comprimento da alma e flanges</i> . . . . .	76
6	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	80
6.1	<b>Sugestões para Trabalhos Futuros</b> . . . . .	82
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	83

## 1 INTRODUÇÃO

Compósitos podem ser usados em uma variedade de estruturas, tais como edifícios, galpões de armazenamento e superestruturas de pontes, visto que esses materiais se destacam por elevadas relações rigidez/peso e resistência/peso, melhorias mecânicas como resistência à corrosão, fadiga, isolamento térmico e acústico (Barbero, 1999; Barbero, 2001; Daniel, 2006). Os compósitos também têm sido usados em conjunto com outros materiais estruturais como concreto, aço e madeira bem como reforço em obras de reparo e reabilitação de estruturas (Benmokrane *et al.*, 2002; Schober *et al.*, 2015). Contudo, problemas de estabilidade estrutural devem ser considerados no caso de elementos submetidos a tensões de compressão (Batista, 2005; Barbero, 2010).

As colunas de material compósito geralmente possuem paredes finas, sendo esbeltas e sujeitas a falhas sob tensões inferiores à resistência do material, tornando a flambagem uma consideração importante no projeto (Barbero *et al.*, 2000). Além dos modos de flambagem globais, estas colunas estão sujeitas à instabilidade local, já que são formadas pela união de trechos planos de baixa rigidez (Pierin *et al.*, 2005).

Dentre os problemas relacionados à utilização de colunas de material compósito, a previsão de cargas de flambagem é uma questão que requer atenção, sendo um tema amplamente abordado na literatura (Barbero; Tomblin, 1994; Young; Rasmussen, 1998; Pecce *et al.*, 2000; Kollár, 2003; Persoone *et al.*, 2003; Neckář *et al.*, 2003; Shan *et al.*, 2005; Akbulut *et al.*, 2010; Debski *et al.*, 2013c; Cardoso, 2014; D'Aguiar, 2017; Lazzari, 2019; Souza, 2017).

Devido ao seu alto custo, uma das principais preocupações da indústria é substituir testes físicos realizados em laboratório por simulações computacionais (Violeau *et al.*, 2009). Muitos estudos têm comparado resultados experimentais com aproximações numéricas a partir do Método dos Elementos Finitos (MEF) e demonstraram a eficácia dessas simulações em prever o comportamento de estruturas de materiais compósitos (Turvey; Zhang, 2006; Debski *et al.*, 2013a; Debski *et al.*, 2019; Cardoso *et al.*, 2014; Cardoso, 2014; Cardoso *et al.*, 2015; Nunes *et al.*, 2016).

Contudo, o uso do MEF é trabalhoso e demorado, além de exigir recursos. Desta forma, é importante desenvolver métodos mais simples e rápidos para previsão da carga de flambagem de colunas laminadas. Devido à sua simplicidade de fabricação e elevado desempenho estrutural, o presente trabalho estuda a estabilidade de perfis de seção C, com foco na confecção de curvas que apresentem as cargas críticas em função do comprimento, denominadas de curvas

de assinatura da seção transversal. Essas curvas são utilizadas em projetos de colunas, uma vez que permitem a determinação da carga crítica e do modo de flambagem de forma simples e rápida (Ádány, 2018; Lazzari, 2020).

Este estudo emprega o Método de Rayleigh-Ritz, uma técnica variacional consolidada (Hoff, 1944; Hoff, 1956; Chajes, 1974; Leissa; Qatu, 2005; Cook *et al.*, 2007). A escolha se justifica pelo seu potencial em desenvolver análises eficientes, permitindo modelar o problema de forma simples. Em comparação, para confeccionar curvas de assinatura, o Método dos Elementos Finitos exige um elevado esforço computacional devido ao maior número de graus de liberdade (Lazzari, 2020).

Ao tratar de estruturas laminadas, é importante a utilização de teorias que possam prever o seu comportamento sob diferentes carregamentos, como flexão, cisalhamento, torção e forças axiais (Leissa; Qatu, 2005; Vinson, 1999; Jones, 1999). No entanto, o emprego de teorias que representem com precisão o comportamento de laminados muitas vezes resulta em equações complexas e soluções limitadas a casos específicos. A complexidade na estimativa das propriedades equivalentes de estruturas laminadas surge devido à necessidade de considerar múltiplos fatores, incluindo a variabilidade dos materiais, a interação entre diferentes camadas, bem como a geometria da seção transversal (Vinson, 1999; Jones, 1999).

Estudos como os de Leissa (2005), Vinson (1999) e Jones (1999) destacam a importância de desenvolver teorias que resultem em equações simples, semelhantes às disponíveis para vigas isotrópicas e homogêneas.

Soluções analíticas existem para o caso de camadas isotrópicas, sanduíche simétrico isotrópico, anisotrópico homogêneo e barras laminadas (Whitney; Nuismer, 1995; Sankar, 1996). Teorias para análise de vigas e colunas laminadas, incluindo o cálculo das propriedades equivalentes da seção transversal, foram propostas Massa e Barbero (1998), Cardoso (1999) e Kollar e Pluzik (2002). Estas propriedades equivalentes podem ser utilizadas para estimar as cargas de flambagem de colunas laminadas.

## 1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver um estudo de estabilidade de colunas laminadas com seção C submetidas à compressão centrada, com foco na determinação da curva de assinatura destes perfis.

Dessa forma, os objetivos específicos do trabalho são:

- Desenvolver uma formulação para determinação da carga crítica de flambagem local utilizando o Método de Rayleigh-Ritz com um e dois graus de liberdade.
- Confeccionar curvas de flambagem local utilizando o Método de Rayleigh-Ritz, considerando diferentes números de meias ondas e avaliar o emprego de uma carga mínima de flambagem local.
- Desenvolver uma formulação para determinação da carga crítica de flambagem global utilizando o Método de Rayleigh-Ritz, identificando os modos de flambagem e as respectivas cargas críticas para os modos de flexão e flexo-torção.
- Avaliar a eficácia de diferentes metodologias para a obtenção das propriedades equivalentes da seção transversal, especificamente as metodologias propostas por Massa e Barbero (1998), Cardoso (1999) e Kollar e Pluzsik (2002).
- Estudar a influência da espessura do laminado na carga crítica e nos modos de flambagem dos perfis C.
- Avaliar o comportamento da curva de assinatura, carga crítica e modos de flambagem para colunas de perfis C com laminações: ortotrópicas, *cross-ply* simétrico, *cross-ply* antissimétrica e *angle-ply* antissimétrica.
- Avaliar a influência da relação entre a altura da alma e a largura da flange no perfil C, considerando seções com o mesmo consumo de material.
- Analisar o impacto da geometria na capacidade de carga e nos modos de flambagem.

## 1.2 Organização do Trabalho

Este trabalho está organizado em seis capítulos. O Capítulo 2 apresenta considerações básicas sobre materiais compósitos reforçados por fibras, relações constitutivas, Teoria Clássica da Laminação e propriedades elásticas equivalentes.

O Capítulo 3 trata da flambagem local de colunas de material compósito, apresentando o desenvolvimento das formulações para determinação da carga de flambagem, com o Método de Rayleigh-Ritz. O capítulo apresenta comentários a respeito da teoria geral, Método de Rayleigh-Ritz com um grau de liberdade e Método de Rayleigh-Ritz com dois graus de liberdade.

O Capítulo 4 discute a flambagem global de perfis C, abordando a geometria e propriedades geométricas de perfis C, as propriedades equivalentes conforme as teorias de Massa e Barbero (1998), Cardoso et al. (1999) e Kollar e Pluzsik (2002), além do Método de

Rayleigh-Ritz.

No Capítulo 5, são apresentados exemplos numéricos, incluindo a validação do modelo baseado nos resultados de Debski et. al. (2013), a confecção de curvas de assinatura do modo local e a análise de curvas de flambagem local. O capítulo também aborda exemplos de verificação das propriedades equivalentes e das curvas de assinatura dos *layups* analisados, bem como um estudo paramétrico sobre a influência da espessura e o comprimento da alma e flanges.

No Capítulo 6, são realizadas as considerações finais e sugestões para trabalhos futuros. Por fim, seguem as referências do trabalho.

## 2 MATERIAIS COMPÓSITOS

Os materiais convencionais monolíticos podem ser classificados em três categorias principais: metais, cerâmicas e polímeros. Os compósitos são combinações de dois ou mais materiais dessas categorias (Daniel, 2006).

Os materiais compósitos possuem propriedades melhoradas a partir da combinação de dois ou mais materiais, de modo a formar um novo material (Barbero, 2011). Esses materiais apresentam no mínimo duas fases distintas: uma fase de reforço e uma matriz contínua (Daniel, 2006; Barbero, 2011).

A fase de reforço contribui para a resistência e rigidez do material (Reddy, 2003; Daniel, 2006), enquanto a matriz atua na transferência de cargas entre os elementos que compõem a fase de reforço. Além disso, a matriz transfere cargas entre as fibras ou particulados e as protege contra intempéries e cargas mecânicas (Bank, 2006).

A matriz também exerce influência nas propriedades do conjunto e auxilia na absorção de esforços (Daniel, 2006; Barbero, 2011). Os materiais da matriz podem ser polímeros, metais ou cerâmicos. Entretanto, as matrizes poliméricas são as mais comuns, dada a facilidade de fabricação de peças complexas, com baixos custos de produção (Barbero, 2011).

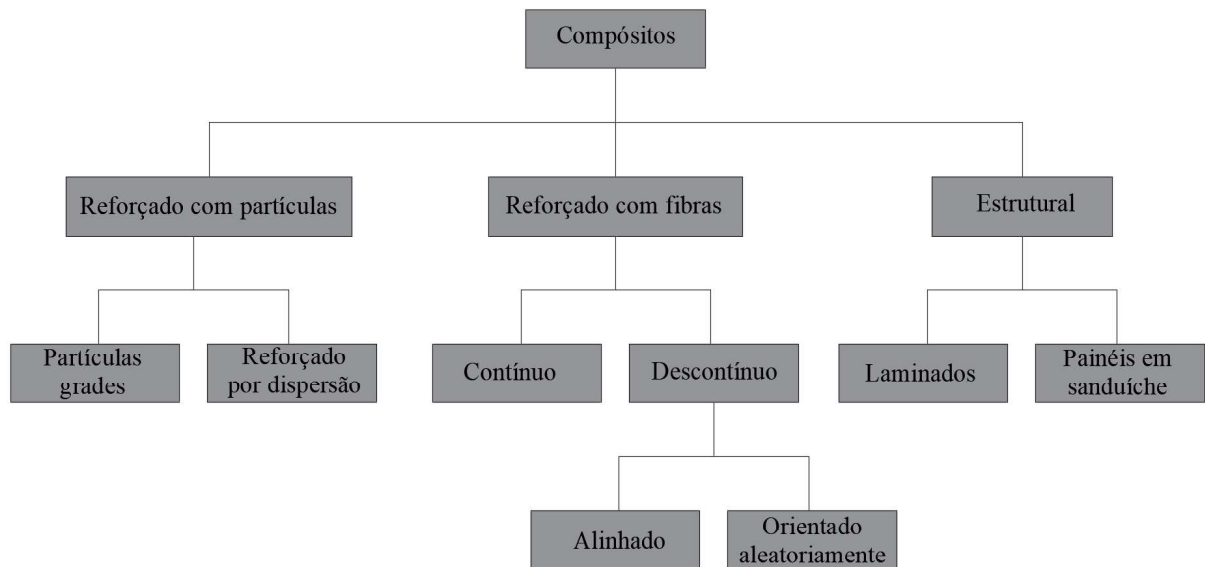
Conforme ilustrado na Figura 1, esses materiais podem ser classificados conforme seus componentes combinados, em três grupos principais: Compósitos Reforçados com Partículas, Compósitos Reforçados com Fibras e Compósitos Estruturais (Callister, 2000; Daniel, 2006).

Neste trabalho, serão estudadas colunas confeccionadas em material compósito laminado reforçado com fibras unidirecionais de polímero reforçado com fibra de carbono (*Carbon Fiber Reinforced Polymer - CFRP*).

### 2.1 Compósitos Reforçados com Fibras

Conforme Daniel (2006), as fibras contínuas podem ser organizadas de várias maneiras: paralelamente (compósitos de fibras unidirecionais), em ângulos retos (*crossply* ou tecido compósito), ou em múltiplas direções (compósito de fibra contínua multidirecional ou orientadas aleatoriamente). A variedade de opções disponíveis, partindo da disposição e orientação das fibras, reforça a significância da fase de reforço na aplicação que o material compósito é

Figura 1 – Classificação dos materiais compósitos.



Fonte: adaptado de Callister (2000).

destinado.

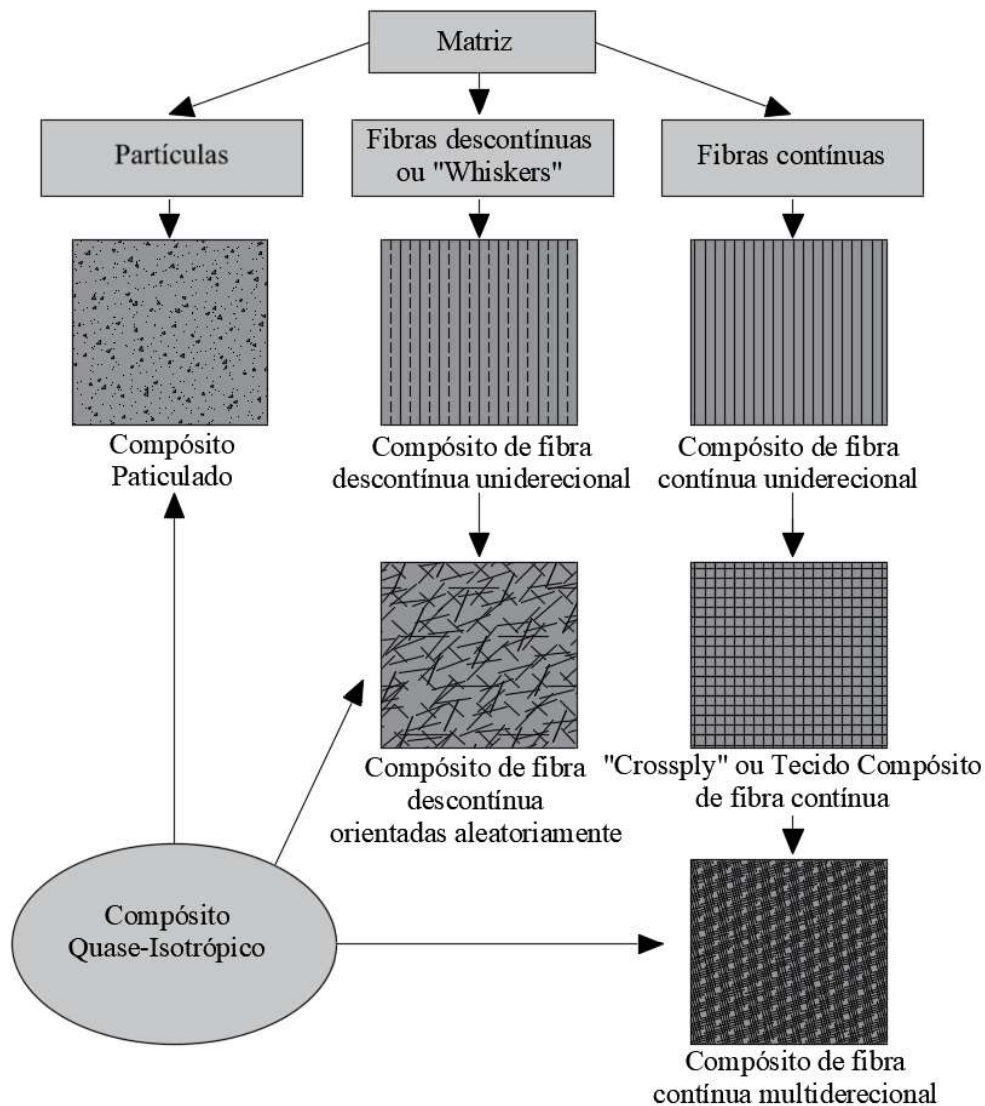
Dependendo do número de direções e da distribuição das fibras, o compósito com fibras também pode apresentar comportamento semelhante ao isotrópico, denominado quase-isotrópico, conforme Figura 2. Daniel (2006) ressalta que os compósitos particulados apresentam comportamento semelhante, devido a distribuição das partículas dentro da matriz.

Conforme Barbero (2011), o emprego das fibras em compósitos é motivado por sua leveza, rigidez e resistência e à reduzida presença de defeitos nas fibras em comparação com o material em sua forma volumétrica. Esses materiais geralmente são tratados como anisotrópicos, pois sua rigidez é diferente de acordo com a direção analisada (Matzenmiller *et al.*, 1995; Pietropaoli, 2012).

Outra característica dos compósitos reforçados por fibras é a capacidade de manter suas propriedades elásticas lineares até a falha, sem apresentar ductilidade, mesmo sob condições de alta deformação e deflexão (Barbero, 1999; Camotim *et al.*, 2010).

Visto a empregabilidade desses materiais, o trabalho considera o emprego de colunas em material compósito reforçado com fibras contínuas e unidirecionais. Devido à presença de fibras que estão predominantemente alinhadas em uma única direção, esses compósitos unidirecionais exibem uma característica ortotrópica, na qual a resistência e a rigidez do material na direção das fibras são consideravelmente mais elevadas do que aquelas na direção transversal a elas.

Figura 2 – Classificação dos Compósitos Reforçados.



Fonte: adaptado de Daniel (2006).

## 2.2 Compósitos Laminados

O compósito laminado é resultado do empilhamento de duas ou mais lâminas unidirecionais, conforme o esquema de laminação adotado (Daniel, 2006). Pode-se dizer que a laminação fornece uma maior capacidade de adaptação das propriedades às exigências do projeto (Reddy, 2003).

Esses materiais apresentam vantagens de resistência à corrosão, resistência à fadiga, isolamento térmico e acústico, além de redução dos custos operacionais e na minimização das necessidades de manutenção (Barbero, 1999; Lopez *et al.*, 2009).

O processo de laminação é empregado para maximizar as propriedades benéficas de cada material que compõe a lâmina (Jones, 1999). Aliado às propriedades individuais de cada

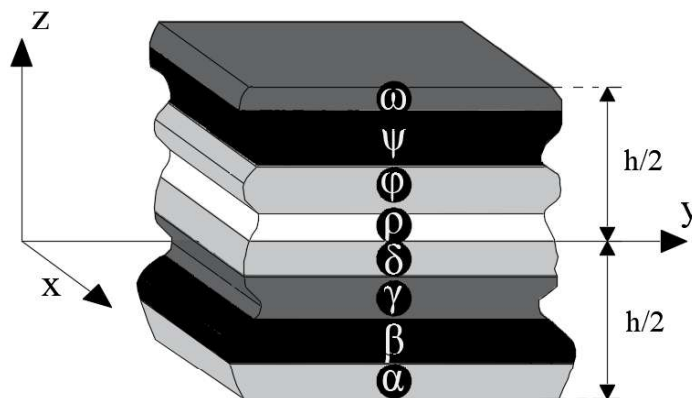
lâmina, confere uma notável flexibilidade na escolha da rigidez e resistência do laminado. Dessa forma, é possível ajustar essas características de acordo com as demandas específicas de uma determinada aplicação (Reddy, 2003).

Tais características têm impulsionado amplamente a adoção desses materiais em diversas áreas, como indústria aeronáutica, naval, automobilística, biomédica e construção civil (Barbero, 2011).

Segundo Daniel (2006), a mescla de diferentes tipos de fibras, como vidro e carbono ou aramida-carbono, na mesma camada unidirecional pode ser vantajosa em algumas aplicações. Esses compósitos são conhecidos como compósitos intra-híbridos, permitindo a combinação de camadas intra-híbridas com outras camadas para formar um compósito híbrido *intraply/interply*. Conforme o autor, podemos mencionar laminados unidirecionais compósitos por camadas de vidro/epóxi, carbono/epóxi e aramida/epóxi empilhadas em uma sequência específica. Essa ideia reforça que cada elemento em um compósito tem funções específicas, e essas, por sua vez, estão relacionadas à aplicação final do material ((Rauch *et al.*, 1968; Reddy, 2003)).

Nesse contexto, é de extrema relevância a definição do esquema de laminação (*layup*). Essa disposição é representada por uma notação específica no formato  $[\alpha/\beta/\gamma/.../]$ , onde cada letra corresponde à orientação angular das fibras em uma camada específica do laminado. Para descrever esse esquema, consideramos que a origem do eixo  $z$  está na superfície média do laminado, enquanto  $h$  representa a espessura total do laminado, conforme ilustrado na Figura 3.

Figura 3 – Esquema de laminação.



Fonte: adaptado de Reddy (2003).

As lâminas com fibras unidirecionais são consideradas como material ortotrópico com 3 planos de simetria mutuamente ortogonais (Reddy, 2003). O esquema de laminação é definido pela orientação dos ângulos e pela simetria. Esses arranjos podem ser classificados

como *cross-ply*, *angle-ply*, balanceados, simétricos, antissimétricos:

1. Laminados *cross-ply*: Este tipo de laminado é construído com camadas orientadas limitadas à 0° e 90°, como no padrão [0°/90°/0°/90°]. Essa configuração é frequentemente escolhida em aplicações que exigem propriedades mecânicas bem definidas nas direções longitudinal e transversal devido à sua simplicidade e controle preciso da orientação das fibras (Kaw, 2005).
2. Laminados *angle-ply*: são caracterizados por ângulos diferentes de 0° e 90°. Como exemplo pode-se citar o laminado [45°/-45°/0°/90°].
3. Laminados Balanceados: caracterizam-se pela presença de ângulos com alternância de  $+\alpha$  e  $-\alpha$ . Por exemplo, o laminado simétrico [+35°/-35°/0°/0°/-35°/+35°]s também é balanceado (Reddy, 2003).
4. Laminados Simétricos: Estes laminados possuem características idênticas de material, espessura e orientação das fibras em ambos os lados de sua superfície média, como ilustrado em [0°/30°]s, onde 's' indica simetria, ou seja, a laminação apresentada seria igual a [0/30°/30°/0°].
5. Laminados Antissimétricos: São aqueles que podem apresentar material e espessura simétricos, mas diferem na orientação antissimétrica das fibras, como no exemplo [45°/-45°/-45°/45°].

### 2.3 Relações Constitutivas

Assumindo um comportamento linear-elástico, torna-se adequado o uso da Lei de Hooke generalizada (Jones, 1999). Assim, as componentes de tensão e deformação podem ser relacionadas considerando a matriz de flexibilidade (*compliance*), e a matriz constitutiva (Reddy, 2003):

$$\varepsilon_i = S_{ij}\sigma_j \quad i, j = 1, \dots, 6, \quad \sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \quad i, j = 1, \dots, 6 \quad (2.1)$$

onde  $i$  e  $j$  variam de 1 a 6,  $\mathbf{S}$  é a matriz de flexibilidade *compliance* e  $\mathbf{C}$  a matriz constitutiva. É válido ressaltar que para materiais anisotrópicos, há 21 constantes elásticas independentes e esse número é reduzido e apresentado para 9 no caso de compósitos ortotrópicos (Reddy, 2003).

Para lâminas muito finas, admite-se um estado plano de tensão no qual as componentes de tensão ( $\sigma_3$ ) e cisalhamento ( $\tau_{23}$  e  $\tau_{31}$ ) são consideradas nulas (Reddy, 2003). Isso simplifica a análise, exigindo apenas as componentes de tensão e deformação no planos das lâminas. Neste caso, a relação entre as deformações ( $\varepsilon$ ) e tensões ( $\sigma$ ) no sistema material podem ser escritas como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

cujos coeficientes são:

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad S_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \quad (2.3)$$

onde  $E_1$  e  $E_2$  são os módulos de elasticidade nas direções principais, ( $\nu_{ij}$ ) é o coeficiente de Poisson e  $G_{12}$  é o módulo de elasticidade ao cisalhamento no plano. Dada a simetria da matriz de flexibilidade, os coeficientes devem respeitar a relação (Jones, 1999).

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad i, j = 1, 2 \quad (2.4)$$

Logo, as tensões podem ser calculadas partindo das deformações usando a expressão:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

onde os termos da matriz são:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12} \quad (2.6)$$

É válido ressaltar que os eixos principais da lâmina (1,2) geralmente não se alinham com os eixos de carga (x, y). Assim, transformações são necessárias para expressar as componentes de tensão e deformação em relação aos eixos de análise, do sistema local para o global (Daniel, 2006; Cook *et al.*, 2007).

As tensões e deformações podem ser transformadas através das seguintes relações:

$$\sigma = \mathbf{T}^T \sigma_1 \quad (2.7)$$

e

$$\varepsilon_1 = \mathbf{T} \varepsilon \quad (2.8)$$

onde  $\sigma_1$  e  $\varepsilon_1$  correspondem às tensões e deformações ao longo do eixo  $x$  e a matriz  $\mathbf{T}$  é definida como:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Substituindo nas Equações (2.8) e (2.9), têm-se:

$$\sigma = \mathbf{T}^T \mathbf{Q} \mathbf{T} \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \sigma = \bar{\mathbf{Q}} \varepsilon \quad (2.10)$$

onde

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Deste modo, a relação constitutiva no sistema é dada por:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta, \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta), \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta, \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta, \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta, \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Os coeficientes  $Q_{44}$  e  $Q_{55}$  são equivalentes a  $G_{13}$  e  $G_{23}$ , respectivamente. Tal como se faz para o sistema local, é necessário transformar a relação constitutiva para o sistema global utilizando uma matriz de transformação adequada. Dessa forma, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_s \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

e

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_s^T \begin{Bmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

onde

$$\mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

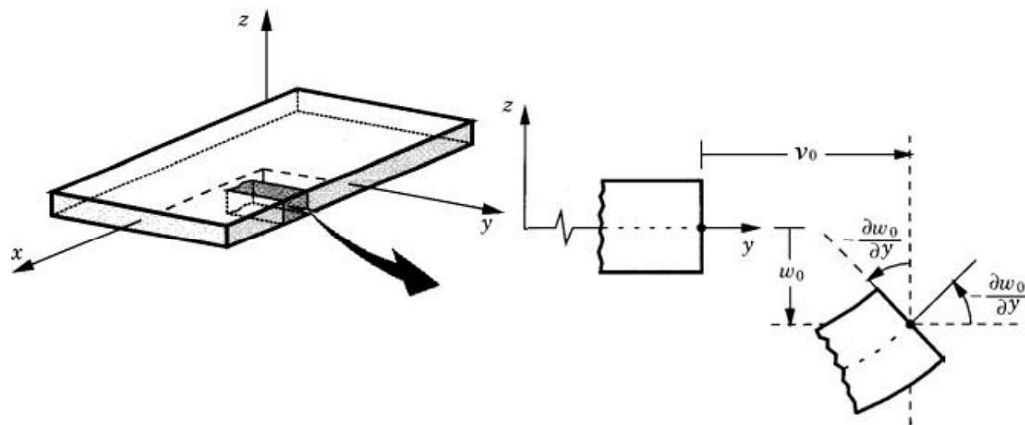
Substituindo as equações, obtém-se a relação tensão-deformação no sistema global de coordenadas:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \Rightarrow \tau = \bar{\mathbf{Q}}_s \boldsymbol{\gamma} \Rightarrow \bar{\mathbf{Q}}_s = \mathbf{T}_s^T \mathbf{Q}_s \mathbf{T}_s \quad (2.16)$$

## 2.4 Teoria Clássica da Laminação

Na análise de placas laminadas, comumente, são empregadas teorias que utilizam o conceito de “lâmina equivalente” como alternativa de representar o laminado heterogêneo como uma placa homogênea equivalente. A Teoria Clássica da Laminação (TCL) ou Teoria Clássica das Placas Laminadas (TCPL) surge como a abordagem mais simples e é uma extensão da Teoria de Placa de Kirchhoff, formulada em 1883.

Figura 4 – Geometrias não deformadas e deformadas de uma borda de uma placa sob as hipóteses de Kirchhoff



Fonte: adaptado de Reddy (2004).

Nesta teoria, assume-se que o deslocamento transversal é independente da espessura da placa e que deformações e tensões de cisalhamento transversais são negligenciadas (Reddy, 2003; D’Aguiar, 2017). Apresentados na Figura 4, esses deslocamentos podem ser descritos usando as expressões:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t)$$

onde as variáveis  $u_0$ ,  $v_0$ , e  $w_0$  representam os deslocamentos do ponto médio nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. Sendo  $x$  longitudinal à placa,  $y$  transversal horizontal e  $z$  transversal vertical.

As deformações são obtidas a partir da derivação do campo de deslocamentos:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}_m + \mathbf{z}\boldsymbol{\kappa} \quad (2.18)$$

Seguindo as referências de Reddy (2004), Daniel e Ishai (2006) e Barbero (2011), a relação constitutiva de um laminado em termos de tensões e deformações generalizadas podem ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

onde as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{D}$  caracterizam respectivamente a rigidez de membrana, rigidez à flexão e os termos de acoplamento membrana-flexão. Os termos dessas matrizes são dados por:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_{k+1} - z_k) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_{k+1}^2 - z_k^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_{k+1}^3 - z_k^3) \end{aligned} \quad (2.20)$$

No caso dos laminados simétricos, a matriz de acoplamento membrana-flexão é nula ( $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ ), simplificando a análise e permitindo aplicações que exigem comportamento uniforme em relação à superfície média.

Nos laminados balanceados, alguns termos que representam a rigidez de membrana se anulam ( $A_{16} = A_{26} = 0$ ), enquanto que os laminados balanceados simétricos também possuem  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ , mas  $D_{16} \neq 0$  e  $D_{26} \neq 0$  (Barbero, 2011). De modo análogo, nos laminados antissimétricos, os termos de acoplamento da matriz de rigidez extensional ( $A_{16}$  e  $A_{26}$ ) e alguns termos de acoplamento da matriz de rigidez à flexão ( $D_{16}$  e  $D_{26}$ ) são nulos (Kaw, 2005).

Com relação aos laminados *angle-ply*, em sua forma simétrica, os coeficientes  $A_{16}$ ,  $A_{26}$ ,  $D_{16}$  e  $D_{26}$  são presentes, mas sua magnitude tende a diminuir à medida que se aumenta o

número de camadas, mantendo a mesma espessura total do laminado (Daniel, 2006). Logo, ao tratar dos laminados *cross-ply*, alguns termos são nulos ( $A_{16} = A_{26} = B_{16} = D_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$ ), e no caso de laminados *cross-ply* simétricos, além dos termos citados serem muito pequenos, a matriz  $\mathbf{B}$  é nula e nenhum acoplamento ocorre (Kaw, 2005).

## 2.5 Propriedades Elásticas Equivalentes

Muitos métodos simplificados e programas de análise estrutural foram desenvolvidos para placas de material ortotrópico, não conseguindo tratar os compósitos laminados de forma exata. Nesses casos é interessante determinar as propriedades elásticas equivalentes de uma placa de material homogêneo e ortotrópico que aproximam o comportamento do laminado. Duas abordagens distintas para determinação destas propriedades são apresentadas a seguir.

### 2.5.1 Abordagem de Rigidez

Conforme Barbero (2011), este processo é baseado na comparação da matriz de rigidez do laminado com a matriz de uma placa de material ortotrópico de mesma espessura ( $h$ ), sendo por isto denominada de Abordagem de Rigidez (AR) para determinação das propriedades elásticas equivalentes:

$$C_{orto} = C \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{orto} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{orto} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Esse processo despreza totalmente a matriz  $\mathbf{B}$ , portanto não é adequado para laminações não simétricas. Adicionalmente, as propriedades equivalentes podem ser obtidas considerando a rigidez de membrana  $\mathbf{A}$  ou a rigidez de flexão  $\mathbf{D}$ , o que resultam em valores diferentes propriedades equivalentes.

Não havendo cargas de flexão, todas as curvaturas são nulas, e as deformações são constantes através da espessura, isto é,  $\epsilon_x = \epsilon_x^0$ ,  $\epsilon_y = \epsilon_y^0$ ,  $\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0$  e para uma placa ortotrópica homogênea sob cargas no plano, as tensões também são constantes ao longo da espessura:  $\sigma_x = N_x/h$ ,  $\sigma_y = N_y/h$ ,  $\tau_{xy} = N_{xy}/h$ . Deste modo, Barbero (2011) afirma que a relação tensão-deformação mostrada na Equação (2.21) pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{N_x}{h} \\ \frac{N_y}{h} \\ \frac{N_{xy}}{h} \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

Portanto, realizando algumas substituições com a Equação (2.21) e Equação (2.22), determinam-se as propriedades equivalentes do laminado:

$$\bar{E}_1 = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{hA_{22}} \quad \bar{E}_2 = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{hA_{11}} \quad \bar{G}_{12} = \frac{A_{66}}{h} \quad (2.23)$$

As propriedades equivalentes apresentadas acima são válidas somente para cargas no plano e não devem ser usadas para prever a resposta à flexão (Barbero, 2011). As propriedades podem ser derivadas a partir dos termos de rigidez à flexão. No caso de um laminado simétrico e ortotrópico, a matriz de rigidez à flexão, representada por  $\mathbf{D}$ , é expressa através da seguinte formulação matricial:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} & \frac{\nu_{12} E_2 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} & 0 \\ \frac{\nu_{12} E_2 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} & \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{G_{12} h^3}{12} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

De acordo com Jones (1999), a determinação do coeficiente de Poisson, pode ser realizada utilizando a expressão:

$$\nu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \nu_{12} \quad (2.25)$$

Com base na igualdade apresentada na acima e através da realização de manipulações matemáticas, têm-se:

$$\begin{aligned} \bar{E}_1 &= \frac{12(D_{11}D_{22} - D_{12}^2)}{h^3 D_{22}} \\ \bar{E}_2 &= \frac{12(D_{11}D_{22} - D_{12}^2)}{h^3 D_{11}} \\ \bar{G}_{12} &= \frac{12D_{66}}{h^3} \\ \bar{\nu}_{12} &= \frac{D_{12}}{D_{22}} \\ \bar{\nu}_{21} &= \frac{D_{12}}{D_{11}} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Percebe-se que a abordagem desconsidera os termos  $D_{16}$  e  $D_{26}$ , que não são nulos para laminados angle-ply, tornando interessante considerar outra metodologia aplicável a esses laminados. Também sendo válida em compósitos com poucas lâminas, visto que o aumento do número de lâminas para a mesma espessura total do laminado tende a diminuir a influência dos termos  $D_{16}$  e  $D_{26}$ .

### 2.5.2 Abordagem de Flexibilidade

A obtenção das propriedades equivalentes através da Abordagem de Flexibilidade (AF) considera os termos dos acoplamentos membrana-flexão, extensão-cisalhamento e flexão-torção. Esta abordagem foi aplicada por Mororó (2013) e D'Águiar (2017), onde obtiveram boa concordância com os resultados obtidos. O Método parte da matriz de flexibilidade ( $\mathbf{C}^{-1}$ ), incluindo os termos de acoplamento e suas inversas.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta}^t & \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

Desse modo, atribui-se matriz de flexibilidade de uma placa laminada à matriz de flexibilidade de uma placa de material ortotrópico com a mesma espessura  $h$ :

$$\mathbf{C}_{\text{orto}}^{-1} = \mathbf{C}^{-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_{\text{orto}} & 0 \\ 0 & \delta_{\text{orto}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta}^t & \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

As propriedades equivalentes podem ser obtidas fazendo a equivalência entre as matrizes de flexibilidade  $\boldsymbol{\alpha}$  e  $\boldsymbol{\delta}$ , resultando em valores distintos para as propriedades de membrana e flexão.

A Equação (2.27) pode ser reescrita em:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{16} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{26} \\ \alpha_{16} & \alpha_{26} & \alpha_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

e

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{16} \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \delta_{26} \\ \delta_{16} & \delta_{26} & \delta_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

Desse modo, as propriedades equivalentes do laminado são obtidas pela igualdade da Equação (2.28) com a Equação (2.02):

$$\begin{aligned} \bar{E}_1 &= \frac{1}{h\alpha_{11}} \\ \bar{E}_2 &= \frac{1}{h\alpha_{22}} \\ \bar{G}_{12} &= \frac{1}{h\alpha_{66}} \\ \bar{\nu}_{12} &= -\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} \end{aligned} \quad (2.31)$$

As expressões matemáticas também podem ser obtidas de modo análogo, a partir da igualdade com a inversa da matriz de rigidez à flexão  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{16} \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \delta_{26} \\ \delta_{16} & \delta_{26} & \delta_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{h^3 E_1} & -\frac{12\nu_{12}}{h^3 E_1} & 0 \\ -\frac{12\nu_{12}}{h^3 E_1} & \frac{12}{h^3 E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{h^3 G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

A partir da igualdade apresentada anteriormente e realizando operações matemáticas que incluem substituições e rearranjos, obtém-se:

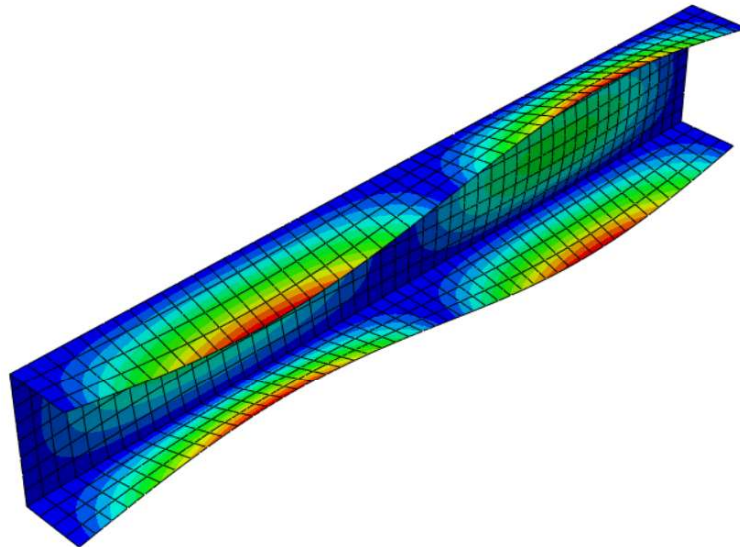
$$\begin{aligned} \bar{E}_1 &= \frac{12}{h^3 \delta_{11}} \\ \bar{E}_2 &= \frac{12}{h^3 \delta_{22}} \\ \bar{G}_{12} &= \frac{12}{h^3 \delta_{66}} \\ \bar{\nu}_{12} &= -\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} \\ \bar{\nu}_{21} &= \frac{\delta_{12}}{\delta_{22}} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Apesar da matriz de acoplamento  $\beta$  não ser utilizada diretamente no cálculo das propriedades equivalentes, o efeito dos termos de acoplamento é considerado de forma aproximada na inversão da matriz de rigidez. O mesmo ocorre com os termos  $A_{16}$ ,  $A_{26}$ ,  $D_{16}$  e  $D_{26}$ . Desta forma, essa abordagem é mais indicada para o caso de laminações mais complexas.

### 3 FLAMBAGEM LOCAL

A flambagem local é caracterizada pela instabilidade dos elementos que compõem a seção dos perfis, sem a translação do eixo da peça, como ilustrado na Figura 5. Também é comum a manifestação de meias-ondas na alma e nos flanges. Devido à sua importância para estruturas de paredes finas, a flambagem local é objeto de estudo de diversos trabalhos que propuseram expressões para obtenção da carga crítica de estruturas dos mais variados tipos de perfis e condições de contorno (Barbero, 1999; Barbero *et al.*, 2000; Qiao *et al.*, 2001; Mottram, 2002; Barbero, 2011; Debski *et al.*, 2013b; Debski *et al.*, 2013a; Kollár, 2003; Kollár, 2014; Cardoso *et al.*, 2014; Cardoso *et al.*, 2015; D’Aguiar, 2017; Debski *et al.*, 2019).

Figura 5 – Modo de flambagem local de um perfil C submetido à compressão.



Fonte: elaborada pelo autor.

Os perfis C são formados por 3 elementos laminados, correspondentes à alma (*web*) e às duas mesas (*flanges*). Assim, a flambagem local desses perfis está relacionada à flambagem dos elementos que o constituem.

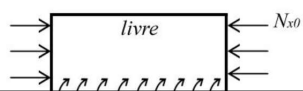
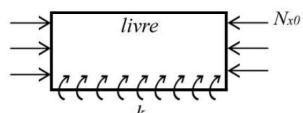
Para Cardoso (2014), na determinação analítica da carga de flambagem local de colunas submetidas à compressão, podem ser utilizados três abordagens distintas: i) análise de flambagem da seção completa, considerando as condições de continuidade apropriadas entre as placas adjacentes; ii) análise de flambagem das placas individuais considerando as restrições à rotação devido às placas adjacentes; iii) análise de flambagem das placas individuais sem considerar a interação entre os elementos.

Segundo Qiao *et al.* (2001), geralmente as análises de perfis compósitos de polímeros

reforçados com fibras são realizadas a partir de modelagem dos componentes individuais da estrutura, considerando a flexibilidade da ligação entre eles, sendo assim, neste tipo de simulação cada parte da seção transversal é modelada como uma placa e analisada independentemente.

Kollar (2003), por exemplo, desenvolveu expressões explícitas para a análise da flambagem local de colunas e vigas de materiais compósitos de polímeros reforçados com fibras, compreendendo seções transversais abertas e fechadas (I, C, Z e L). Os resultados obtidos, utilizando as fórmulas apresentadas pelo autor, foram comparados com resultados determinados a partir de análises analíticas, de testes experimentais e de cálculos utilizando o Método de Elementos Finitos. O autor também aborda o efeito da restrição para outras seções (caixão, I, C, Z e L).

Tabela 1 – Carga de flambagem para placas longas ortotrópicas e simétricas.

Condições de contorno	Carga de flambagem $N_{x,cr}$
	$\frac{\pi^2}{L_y^2} \left[ 2\sqrt{1 + 4.139\xi} \sqrt{D_{11}D_{22}} + (2 + 0.62\xi^2)(D_{12} + 2D_{66}) \right]$ <p>para <math>k \leq k_1</math></p>
	$\frac{1}{L_y^2} \sqrt{D_{11}D_{22}} \left[ K(\eta 15.1\sqrt{1-v} + 6(1-\eta)(1-v)) + \frac{7(1-K)}{\sqrt{1+4.12\xi}} \right]$ <p>quando <math>K \leq 1</math></p> $\frac{1}{L_y^2} \sqrt{D_{11}D_{22}} \left[ \eta 15.1\sqrt{1-v} + 6(K-\eta)(1-v) \right]$ <p>quando <math>K &gt; 1</math></p>
<p><b>onde:</b></p> $\xi = \frac{1}{1+10\zeta}$ <p>para placas com bordas restritas por molas de rotação;</p> $\xi = \frac{1}{1+0.61\zeta^{1.2}}$ <p>para placas com bordas restritas por enrijecedores de torção;</p> $\zeta = \frac{D_{22}}{kL_y}$ $\zeta' = \frac{D_{22}L_y}{GI_t}$ $v = \frac{D_{12}}{2D_{66}+D_{12}}$ $K = \frac{2D_{66}+D_{12}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}}$ $\eta = \frac{1}{\sqrt{1+(7.22-3.55v)\zeta}}$ <p>em que <math>L_y</math> é a largura da placa.</p>	

Fonte: adaptado de Kollár (2003).

De acordo com Cardoso (2014), as equações apresentadas por Kollar (2003) e Qiao e Shan (2005), apesar de muito precisas, necessitam de cálculos independentes para cada uma dos elementos da seção transversal. Além disso, a determinação dos parâmetros específicos da seção, como coeficientes de restrição elástica, tendem a aumentar a complexidade do cálculo da carga de flambagem. Assim, Cardoso (2014) desenvolveu equações de forma fechada para

determinar a tensão crítica de flambagem local para colunas pultrudadas típicas de polímero reforçado com fibra de vidro submetidas à compressão concêntrica.

Cardoso (2014) utilizou o Método do Quociente de Rayleigh (Cedolin; Bazant, 1991), no qual a energia de deformação de flexão ( $U$ ) e o trabalho produzido pela carga de compressão ( $W$ ), são calculados assumindo uma forma aproximada ( $w$ ) e a carga crítica por unidade de largura ( $N_{cr}$ ) é obtida a partir da condição de equilíbrio :

$$N_{cr} = \frac{\sum_{i=1}^n \iint_{S_i} \left[ D_{11,i} \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} \right)^2 + D_{22,i} \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial y_i^2} \right)^2 + 2D_{12,i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial y_i^2} + 4D_{66,i} \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2 \partial y_i^2} \right)^2 \right] dx dy}{\sum_{i=1}^n \iint_{S_i} \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \right)^2 dx dy} \quad (3.1)$$

em que  $i$  é um índice referente a cada uma das  $n$  placas constituintes,  $S$  é a área superficial da placa;  $x$  e  $y$  são os eixos locais longitudinais e transversais no plano, respectivamente, para formas típicas de seção transversal.

Neste trabalho, a carga crítica de colunas laminadas com seção C submetidas à compressão centrada é determinada utilizando o Método de Rayleigh-Ritz considerando as condições de compatibilidade entre as placas que compõe a coluna. O procedimento adotado é descrito nos itens a seguir.

### 3.1 Método de Rayleigh-Ritz

O Método de Rayleigh-Ritz baseia-se no Princípio da Energia Potencial Total Estacionária (PEPTE) e é amplamente utilizado em problemas de estabilidade para determinar cargas e modos críticos. Segundo este princípio, entre todos os deslocamentos admissíveis de uma estrutura, aqueles que correspondem ao equilíbrio são os que tornam estacionária a energia potencial total. A energia potencial total ( $\Pi$ ) de uma estrutura é dada por:

$$\Pi = U + V \quad (3.2)$$

onde  $U$  corresponde à energia interna de deformação e  $V$  à energia potencial das cargas externas.

De acordo com esta abordagem energética, entre todos os deslocamentos que satisfazem às condições de contorno, aqueles que extremizam a energia potencial total da estrutura, são os deslocamentos correspondentes às condições de equilíbrio (Krauthammer; Ventsel, 2001). As funções de aproximação são determinadas a partir de uma configuração deformada assumida,

que frequentemente resulta em valores de carga crítica superiores aos valores reais observados (Cedolin; Bazant, 1991).

A premissa fundamental do Método de Rayleigh-Ritz é assumir uma solução aproximada expressa como uma combinação linear de um número finito de funções admissíveis. Essas funções de aproximação devem ser contínuas e satisfazer às condições de contorno essenciais (COOK *et al.*, 2002):

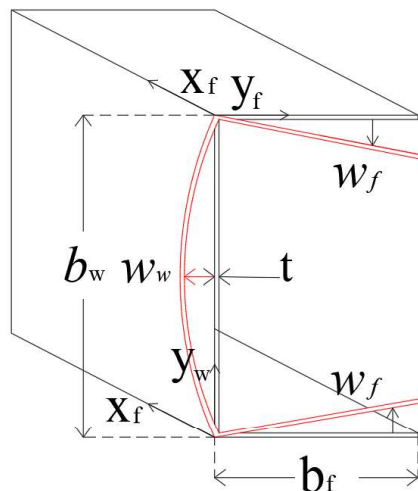
$$w(x,y) = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i(x,y) \quad (3.3)$$

onde  $\phi_i$  são as funções de aproximação escolhidas e os graus de liberdade  $a_i$  a determinar. Os graus de liberdade são obtidos extremizando o funcional de energia  $\Pi$ :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.4)$$

As curvaturas das deformações da alma e do flange são calculadas a partir das derivadas das funções de aproximação em relação às coordenadas  $x$  e  $y$ , como ilustrado na Figura 6. Essas curvaturas são essenciais para o cálculo da energia de deformação interna da viga, que é determinada através da matriz de rigidez do material, aplicada nas curvaturas.

Figura 6 – Representação do modo local em perfis C.



Fonte: elaborada pelo autor.

As curvaturas das deformações da alma e do flange são definidas como:

$$\begin{aligned}
 k_{wx} &= \frac{\partial^2 w_w}{\partial x^2} \\
 k_{wy} &= \frac{\partial^2 w_w}{\partial y^2} \\
 k_{wxy} &= 2 \frac{\partial^2 w_w}{\partial x \partial y} \\
 k_{fx} &= \frac{\partial^2 w_f}{\partial x^2} \\
 k_{fy} &= \frac{\partial^2 w_f}{\partial y^2} \\
 k_{fxy} &= 2 \frac{\partial^2 w_f}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Cardoso (2014), adotou funções senoidais duplas e polinomiais-senoidais em seu estudo de estabilidade sobre colunas pultrudadas, considerando funções que satisfaçam as condições de apoio nas extremidades e garantam a compatibilidade da rotação entre os elementos das placas adjacentes. De forma geral, para cada placa constituinte, a forma de flambagem é dada por:

$$w(x,y) = f(y) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \tag{3.6}$$

sendo

$$f_w(y) = (\alpha b_w / \pi) \sin(\pi y / b_w) \tag{3.7}$$

$$f_f(y) = \alpha y$$

onde  $L$  é o comprimento da coluna,  $\alpha$  o ângulo de rotação entre as placas,  $b_w$  a largura da placa e  $f(y)$  a função de aproximação para alma e mesas.

A matriz  $\mathbf{D}$  definida na Equação (2.22) é aplicada no cálculo da energia de deformação da placa, incorporando as propriedades de rigidez do material em relação às curvaturas:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

Esta matriz é utilizada no cálculo da energia de deformação da placa, representada por  $u$ , que é dada por:

$$u = \frac{1}{2} \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa} \tag{3.9}$$

onde  $\kappa$  é o vetor de curvaturas, definido inicialmente como:

$$\kappa = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Substituindo as curvaturas das deformações da alma e do flange, temos:

$$\kappa = \begin{pmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

A energia potencial total obtida somando as contribuições individuais das parcelas de energia de deformação para a alma ( $U_w$ ) e flange ( $U_f$ ) e energia potencial para a alma ( $V_w$ ) e flange ( $V_f$ ). Portanto:

$$\Pi = U_w + 2U_f - (V_w + 2V_f) \quad (3.12)$$

Para determinar as energias de deformação e os potenciais das cargas externas, é necessário realizar integrações duplas sobre o perímetro da seção e o comprimento da coluna:

$$U_w = \int_0^L \int_0^{b_w} \frac{1}{2} \kappa_w^T \mathbf{D} \kappa_w dy dx = \frac{1}{2} \int_0^{b_w} \int_0^L (D_{11} w_{w,xx}^2 + 2D_{12} w_{w,xx} w_{w,yy} + D_{22} w_{w,yy}^2 + 4D_{66} w_{w,xy}^2 + 4(D_{16} w_{w,xx} + D_{26} w_{w,yy}) w_{w,xy}) dx dy, \quad (3.13)$$

$$U_f = \int_0^L \int_0^{b_f} \frac{1}{2} \kappa_f^T \mathbf{D} \kappa_f dy dx = \frac{1}{2} \int_0^{b_f} \int_0^L (D_{11} w_{f,xx}^2 + 2D_{12} w_{f,xx} w_{f,yy} + D_{22} w_{f,yy}^2 + 4D_{66} w_{f,xy}^2 + 4(D_{16} w_{f,xx} + D_{26} w_{f,yy}) w_{f,xy}) dx dy \quad (3.14)$$

$$V_w = -\frac{N_x}{2} \int_0^{b_w} \int_0^L w_{w,x}^2 dx dy \quad (3.15)$$

$$V_f = -\frac{N_x}{2} \int_0^{b_f} \int_0^L w_{f,x}^2 dx dy \quad (3.16)$$

O próximo passo consiste em determinar os graus de liberdade  $a_i$  que extremizam o funcional de energia  $\Pi$  aplicando a Equação (3.4). Para um grau de liberdade, é obtida uma expressão que permite a obtenção da carga crítica diretamente. Para problemas com mais de um grau de liberdade ou quando não se conhece o modo de flambagem, a Equação (3.4) resulta em um sistema de equações e as expressões obtidas podem ser aplicadas em um problema de autovalor, cuja solução é a carga crítica da coluna.

### 3.1.1 Método de Rayleigh-Ritz com um grau de liberdade

Nesta solução, foram adotadas para colunas laminadas, as mesmas funções utilizadas por Cardoso (2014) para colunas pultrudadas. Assim, as funções que descrevem o modo de flambagem da alma ( $w_w$ ) e dos flanges ( $w_f$ ), são:

$$\begin{aligned} w_w(x,y) &= f_w(y) \sin\left(\frac{\pi mx}{L}\right) \\ w_f(x,y) &= f_f(y) \sin\left(\frac{\pi mx}{L}\right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde

$$\begin{aligned} f_w &= \frac{a_1 b_w}{\pi} \sin\left(\frac{\pi y}{b_w}\right) \\ f_f &= a_1 y \end{aligned} \quad (3.18)$$

Verifica-se que  $a_1$  corresponde ao grau de liberdade. Para obter o funcional de energia, foram consideradas as parcelas da energia de deformação do flange ( $U_f$ ), energia de deformação da alma ( $U_w$ ), potencial das cargas externas no flange ( $V_f$ ) e na alma ( $V_w$ ):

$$\Pi = U_w + 2U_f + (V_w + 2V_f) \quad (3.19)$$

onde:

$$\begin{aligned} U_w &= \frac{\pi^2 D_{11} a_1^2 b_w^5 m^4 + (4\pi^2 D_{66} + 2\pi^2 D_{12}) L^2 a_1^2 b_w^3 m^2 + \pi^2 D_{22} L^4 a_1^2 b_w}{8L^3 b_w^2}, \\ U_f &= \frac{\pi^4 D_{11} a_1^2 b_f^3 m^4 + 12\pi^2 D_{66} L^2 a_1^2 b_f m^2}{12L^3}, \\ V_w &= -\frac{N_x a_1^2 b_w^3 m^2}{8L}, \\ V_f &= -\frac{\pi^2 N_x a_1^2 b_f^3 m^2}{12L}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

A energia potencial total é então:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{\pi^2 D_{11} a_1^2 b_w^5 m^4 + (4\pi^2 D_{66} + 2\pi^2 D_{12}) L^2 a_1^2 b_w^3 m^2 + \pi^2 D_{22} L^4 a_1^2 b_w}{8L^3 b_w^2} \\ &+ \frac{\pi^4 D_{11} a_1^2 b_f^3 m^4 + 12\pi^2 D_{66} L^2 a_1^2 b_f m^2}{6L^3} \\ &- \frac{N_x a_1^2 b_w^3 m^2}{8L} - \frac{\pi^2 N_x a_1^2 b_f^3 m^2}{6L} \end{aligned} \quad (3.21)$$

A equação de equilíbrio é determinada fazendo a derivada da energia em relação ao seu único grau de liberdade  $a_1$ . Finalmente, a carga crítica corresponde à solução não trivial

( $a_1 \neq 0$ ) da equação de equilíbrio:

$$N_{cr} = \frac{(3\pi^2 D_{11} b_w^4 + 4\pi^4 D_{11} b_f^3 b_w) m^4}{(3L^2 b_w^4 + 4\pi^2 L^2 b_f^3 b_w) m^2} + \frac{((12\pi^2 D_{66} + 6\pi^2 D_{12}) L^2 b_w^2 + 48\pi^2 D_{66} L^2 b_f b_w) m^2 + 3\pi^2 D_{22} L^4}{(3L^2 b_w^4 + 4\pi^2 L^2 b_f^3 b_w) m^2} \quad (3.22)$$

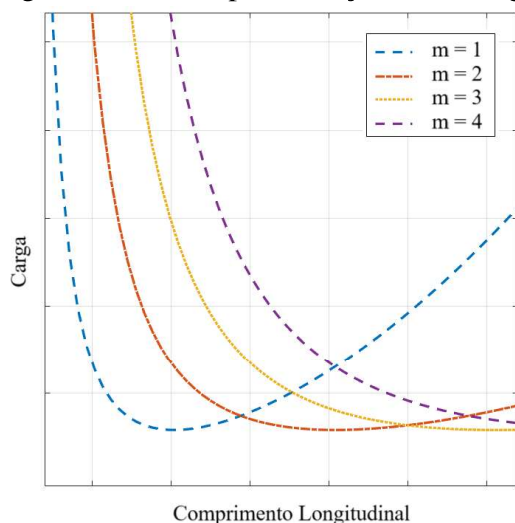
O modo de flambagem correspondente a um determinado comprimento  $L$  é definido pelo número de meias-ondas  $m$  que minimiza a carga crítica ( $N_{cr}$ ). Após a determinação da carga crítica por unidade de comprimento ( $N_{cr}$ ), a carga crítica do perfil C pode ser calculada como:

$$P_{cr} = N_{cr} (b_w + 2b_f) \quad (3.23)$$

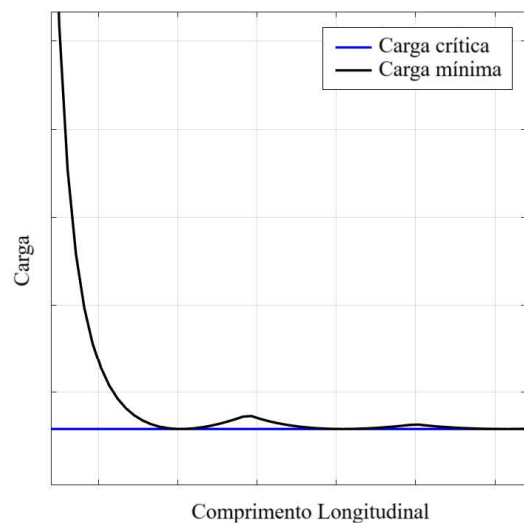
A função  $N_{cr}$  pode ser representada graficamente em função do comprimento  $L$ , para diferentes números de meias-ondas  $m$ . A Figura 7 (a) ilustra a variação típica das carga críticas em função do comprimento longitudinal, considerando determinados números de meias-ondas  $m$ . É válido ressaltar que as cargas tendem ao infinito a medida que o comprimento tende a zero, ao passo que se interseccionam entre si nos pontos onde existe transição entre o número de meias-ondas do modo de flambagem.

A Figura 7 (b) apresenta os valores mínimos das curvas críticas de cada modo. A representação gráfica dos valores mínimos de  $N_{cr}$  em função do comprimento  $L$  corresponde à Curva de Assinatura do perfil para a flambagem local. A carga mínima de flambagem é definida por uma reta horizontal, que corresponde ao menor valor dentre as cargas críticas sem levar em conta a interação entre os modos.

Figura 7 – Curvas para solução com um grau de liberdade



(a) Carga Crítica em função de  $m$



(b) Carga Crítica e Carga Mínima

Fonte: Elaborado pelo autor.

O Método de Rayleigh-Ritz com dois graus de liberdade é uma abordagem mais refinada para analisar o comportamento de elementos sujeitos à flambagem local. O procedimento inicia-se com a escolha das funções para representar os deslocamentos correspondentes à flambagem. Essas funções foram escolhidas considerando dois graus de liberdade para o flange e um para alma. Permitindo uma modelagem mais precisa do comportamento estrutural. Fez-se uso de funções trigonométricas e polinomiais:

$$\begin{aligned} w_w(x,y) &= f_w(y) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \\ w_f(x,y) &= f_f(y) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde

$$\begin{aligned} f_w(y) &= \frac{a_1 b_w \sin\left(\frac{\pi y}{b_w}\right)}{\pi} \\ f_f(y) &= a_2 y^2 + a_1 y \end{aligned} \quad (3.25)$$

Desse modo, as expressões referentes às parcelas que compõem a energia de deformação do flange ( $U_f$ ), energia de deformação da alma ( $U_w$ ), potencial das cargas externas no flange ( $V_f$ ) e na alma ( $V_w$ ) são:

$$\begin{aligned} U_w &= \frac{\pi^2 D_{11} a_1^2 b_w^5 m^4 + (4\pi^2 D_{66} + 2\pi^2 D_{12}) L^2 a_1 b_w^3 m^2 + D_{22} L^4 a_1 b_w}{8L^3 b_w^2} \\ U_f &= \left( \frac{6\pi^4 D_{11} a_2^2 b_f^5 + 15\pi^4 D_{11} a_1 a_2 b_f^4 + 10\pi^4 D_{11} a_1^2 b_f^3}{120L^3} \right) m^4 \\ &+ \left( \frac{(160\pi^2 D_{66} - 40\pi^2 D_{12}) L^2 a_2^2 b_f^3 + (240\pi^2 D_{66} - 60\pi^2 D_{12}) L^2 a_1 a_2 b_f^2}{120L^3} \right) m^2 \\ &+ \left( \frac{120\pi^2 D_{66} L^2 a_1^2 b_f}{120L^3} + \frac{120 D_{22} L^4 a_2^2 b_f}{120L^3} \right) \\ V_w &= -\frac{N_x a_1^2 b_w^3 m^2}{8L} \\ V_f &= \left( -\frac{N_x (6a_2^2 b_f^5 + 15a_1 a_2 b_f^4 + 10a_1^2 b_f^3) m^2}{120L} \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

A energia potencial total do sistema é expressa como:

$$\begin{aligned}
\Pi &= U_w + 2U_f + (V_w + 2V_f) \\
&= \frac{\pi^2 D_{11} a_1^2 b_w^5 m^4 + (4\pi^2 D_{66} + 2\pi^2 D_{12}) L^2 a_1 b_w^3 m^2 + D_{22} L^4 a_1 b_w}{8L^3 b_w^2} \\
&\quad + \left( \frac{6\pi^4 D_{11} a_2^2 b_f^5 + 15\pi^4 D_{11} a_1 a_2 b_f^4 + 10\pi^4 D_{11} a_1^2 b_f^3}{120L^3} \right) m^4 \\
&\quad + \left( \frac{(160\pi^2 D_{66} - 40\pi^2 D_{12}) L^2 a_2^2 b_f^3 + (240\pi^2 D_{66} - 60\pi^2 D_{12}) L^2 a_1 a_2 b_f^2}{120L^3} \right) m^2 \\
&\quad + \left( \frac{120\pi^2 D_{66} L^2 a_1^2 b_f}{120L^3} + \frac{120 D_{22} L^4 a_2^2 b_f}{120L^3} \right) \\
&\quad - \frac{N_x a_1^2 b_w^3 m^2}{8L} \\
&\quad - \left( \frac{N_x (6a_2^2 b_f^5 + 15a_1 a_2 b_f^4 + 10a_1^2 b_f^3) m^2}{60L} \right)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

A partir do funcional já calculado, foi montada uma matriz  $M$  com as derivadas parciais do funcional em relação aos graus de liberdade, de modo que, para que o equilíbrio seja satisfeito, o determinante dessa matriz deve ser nulo:

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{M}) &= \det \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial a_1^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial a_1 \partial a_2} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial a_2 \partial a_1} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial a_2^2} \end{vmatrix} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial a_1^2} (\Pi^2) \frac{\partial^2}{\partial a_2^2} (\Pi^2) - \left( \frac{\partial^2}{\partial a_1 \partial a_2} (\Pi^2) \right)^2
\end{aligned} \tag{3.28}$$

A abordagem que considera dois graus de liberdade resulta em duas cargas críticas de flambagem local, diferente da solução de um grau que apresentou apenas uma. Estas cargas são dadas por:

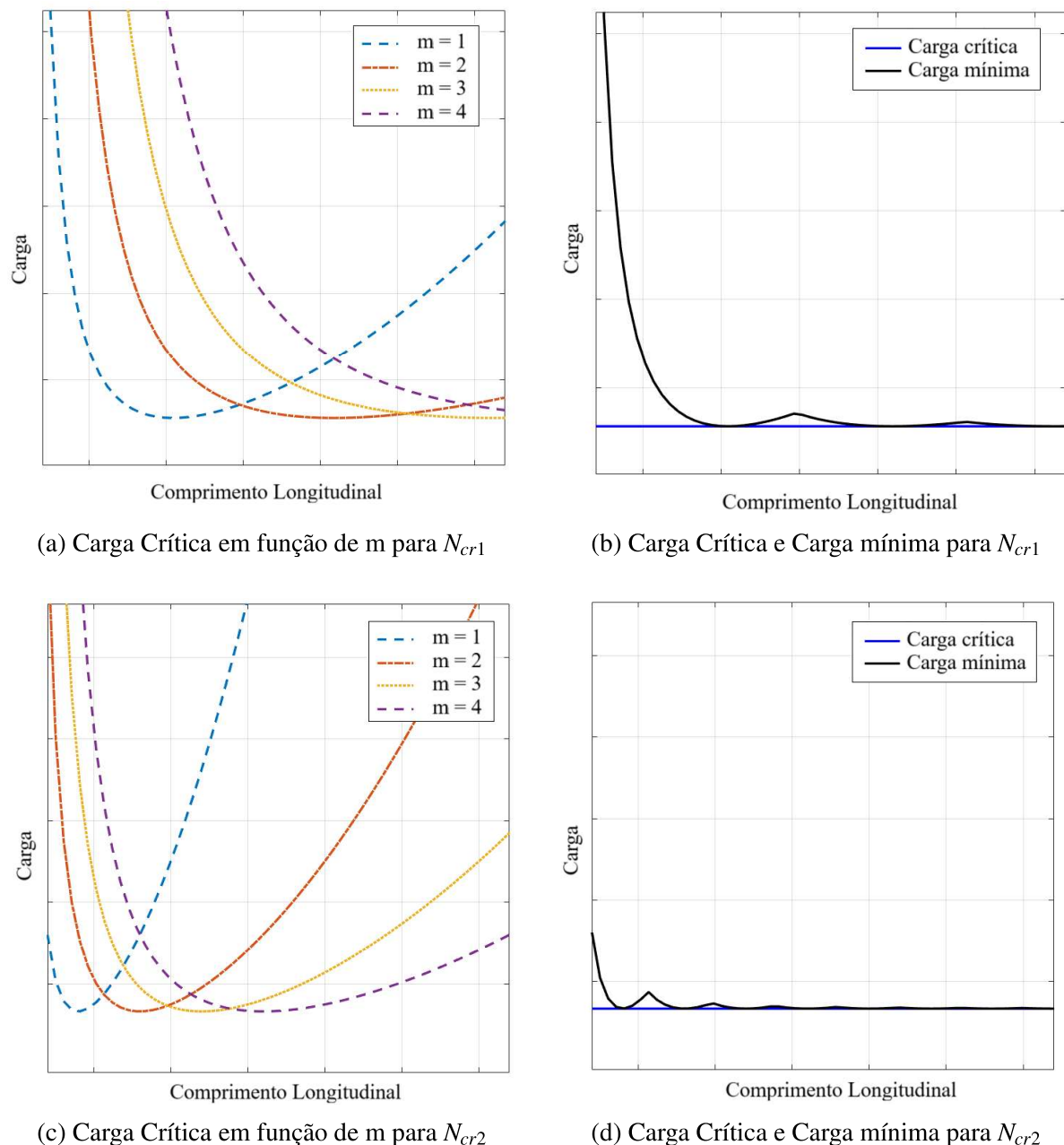
$$\begin{aligned}
N_{cr1} = & - \left[ \left( 2L^2 \sqrt{ \left( (57600\pi^4 D_{66}^2 - 28800\pi^4 D_{12} D_{66} + 3600\pi^4 D_{12}^2) b_f^4 b_w^8 \right. \right. \right. \\
& + (-17280\pi^6 D_{66}^2) - 4320\pi^6 D_{12} D_{66} + 2160\pi^6 D_{12}^2) b_f^6 b_w^6 \\
& + (15360\pi^6 D_{66}^2 - 24960\pi^6 D_{12} D_{66} + 5280\pi^6 D_{12}^2) b_f^7 b_w^5 \\
& + (1296\pi^8 D_{66}^2 + 1296\pi^8 D_{12} D_{66} + 324\pi^8 D_{12}^2) b_f^8 b_w^4 \\
& + (4608\pi^8 D_{66}^2 + 3744\pi^8 D_{12} D_{66} + 720\pi^8 D_{12}^2) b_f^9 b_w^3 \\
& \left. \left. \left. + (7936\pi^8 D_{66}^2 + 640\pi^8 D_{12} D_{66} + 640\pi^8 D_{12}^2) b_f^{10} b_w^2 \right) m^4 \right. \right. \\
& + \left( (86400\pi^2 D_{22} D_{66} - 21600\pi^2 D_{12} D_{22}) L^2 b_f^2 b_w^8 \right. \\
& + (-12960\pi^4 D_{22} D_{66}) - 6480\pi^4 D_{12} D_{22}) L^2 b_f^4 b_w^6 \\
& + (48960\pi^4 D_{22} D_{66} - 25200\pi^4 D_{12} D_{22}) L^2 b_f^5 b_w^5 \\
& + (1080\pi^6 D_{12} D_{22} - 4320\pi^6 D_{22} D_{66}) L^2 b_f^6 b_w^4 \\
& + (15120\pi^6 D_{22} D_{66} + 7560\pi^6 D_{12} D_{22}) L^2 b_f^7 b_w^3 \\
& + ((648\pi^8 + 41280\pi^6) D_{22} D_{66} + (324\pi^8 + 4800\pi^6) D_{12} D_{22}) L^2 b_f^8 b_w^2 \\
& \left. \left. \left. + (1152\pi^8 D_{22} D_{66} + 360\pi^8 D_{12} D_{22}) L^2 b_f^9 b_w \right) m^2 \right. \right. \\
& + 32400 D_{22}^2 L^4 b_w^8 + 86400\pi^2 D_{22}^2 L^4 b_f^3 b_w^5 \\
& - 3240\pi^4 D_{22}^2 L^4 b_f^4 b_w^4 + 57600\pi^4 D_{22}^2 L^4 b_f^6 b_w^2 \\
& \left. \left. \left. + 3780\pi^6 D_{22}^2 L^4 b_f^7 b_w + 81\pi^8 D_{22}^2 L^4 b_f^8 \right) m^4 \right. \right. \\
& + \left( - (36\pi^4 D_{11} b_f^4 b_w^4) - 3\pi^6 D_{11} b_f^7 b_w \right) m^4 \\
& + \left( (120\pi^2 D_{12} - 480\pi^2 D_{66}) L^2 b_f^2 b_w^4 \right. \\
& - (72\pi^4 D_{66} - 36\pi^4 D_{12}) L^2 b_f^4 b_w^2 \\
& \left. \left. \left. - (208\pi^4 D_{66} - 20\pi^4 D_{12}) L^2 b_f^5 b_w \right) m^2 \right. \right. \\
& - 360 D_{22} L^4 b_w^4 - 480\pi^2 D_{22} L^4 b_f^3 b_w \\
& \left. \left. \left. - 18\pi^4 D_{22} L^4 b_f^4 \right) \right] \Bigg/ \left[ (36\pi^2 L^2 b_f^4 b_w^4 + 3\pi^4 L^2 b_f^7 b_w) m^2 \right]
\end{aligned} \tag{3.29}$$

e

$$\begin{aligned}
N_{cr2} = & 2L^2 \sqrt{\left( (57600\pi^4 D_{66}^2 - 28800\pi^4 D_{12} D_{66} + 3600\pi^4 D_{12}^2) b_f^4 b_w^8 \right.} \\
& + \left( -(17280\pi^6 D_{66}^2) - 4320\pi^6 D_{12} D_{66} + 2160\pi^6 D_{12}^2 \right) b_f^6 b_w^6 \\
& + (15360\pi^6 D_{66}^2 - 24960\pi^6 D_{12} D_{66} + 5280\pi^6 D_{12}^2) b_f^7 b_w^5 \\
& + (1296\pi^8 D_{66}^2 + 1296\pi^8 D_{12} D_{66} + 324\pi^8 D_{12}^2) b_f^8 b_w^4 \\
& + (4608\pi^8 D_{66}^2 + 3744\pi^8 D_{12} D_{66} + 720\pi^8 D_{12}^2) b_f^9 b_w^3 \\
& \left. + (7936\pi^8 D_{66}^2 + 640\pi^8 D_{12} D_{66} + 640\pi^8 D_{12}^2) b_f^{10} b_w^2 \right) m^4 \\
& + \left( (86400\pi^2 D_{22} D_{66} - 21600\pi^2 D_{12} D_{22}) L^2 b_f^2 b_w^8 \right. \\
& + \left( -(12960\pi^4 D_{22} D_{66}) - 6480\pi^4 D_{12} D_{22} \right) L^2 b_f^4 b_w^6 \\
& + (48960\pi^4 D_{22} D_{66} - 25200\pi^4 D_{12} D_{22}) L^2 b_f^5 b_w^5 \\
& + (1080\pi^6 D_{12} D_{22} - 4320\pi^6 D_{22} D_{66}) L^2 b_f^6 b_w^4 \\
& + (15120\pi^6 D_{22} D_{66} + 7560\pi^6 D_{12} D_{22}) L^2 b_f^7 b_w^3 \\
& + ((648\pi^8 + 41280\pi^6) D_{22} D_{66} + (324\pi^8 + 4800\pi^6) D_{12} D_{22}) L^2 b_f^8 b_w^2 \\
& \left. + (1152\pi^8 D_{22} D_{66} + 360\pi^8 D_{12} D_{22}) L^2 b_f^9 b_w \right) m^2 \\
& + 32400 D_{22}^2 L^4 b_w^8 + 86400\pi^2 D_{22}^2 L^4 b_f^3 b_w^5 \\
& - 3240\pi^4 D_{22}^2 L^4 b_f b_w^4 + 57600\pi^4 D_{22}^2 L^4 b_f^6 b_w^2 \\
& \left. + 3780\pi^6 D_{22}^2 L^4 b_f^7 b_w + 81\pi^8 D_{22}^2 L^4 b_f^8 \right) m^4 \\
& + \left( 36\pi^4 D_{11} b_f^4 b_w^4 + 3\pi^6 D_{11} b_f^7 b_w \right) m^4 \\
& + \left( (480\pi^2 D_{66} - 120\pi^2 D_{12}) L^2 b_f^2 b_w^4 \right. \\
& + (72\pi^4 D_{66} + 36\pi^4 D_{12}) L^2 b_f^4 b_w^2 \\
& \left. + (208\pi^4 D_{66} + 20\pi^4 D_{12}) L^2 b_f^5 b_w \right) m^2 \\
& + 360 D_{22} L^4 b_w^4 + 480\pi^2 D_{22} L^4 b_f^3 b_w \\
& \left. + 18\pi^4 D_{22} L^4 b_f \right] \Bigg/ \left[ (36\pi^2 L^2 b_f^4 b_w^4 + 3\pi^4 L^2 b_f^7 b_w) m^2 \right]
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Essas cargas também podem ser representadas para diferentes números de meia-ondas  $m$ , conforme a Figura 8(a). A Figura 8(b) apresenta uma melhor representação das carga crítica locais, no qual é apresentada uma curva com os valores de Carga Mínima obtidas para cada número de meia-onda  $m$ .

Figura 8 – Curvas para solução com dois graus de liberdade



Fonte: Elaborada pelo autor.

À título de ilustração, a Figura 8(c) apresenta a graficamente a expressão obtida referente à  $N_{cr2}$ , onde a variação do número de meias-ondas  $m$  é diferente da anterior, resultando também em um formato distinto para a curva de assinatura. Percebe-se também que o

comportamento da função indica uma interação mais complexa entre os modos de flambagem.

Cada uma das cargas críticas  $N_{cr1}$  e  $N_{cr2}$  em função do número de meias-ondas  $m$  estão associadas a um modo de deformação específico. Contudo, no projeto de colunas o que interessa é a carga de menor valor, visto que é uma carga mais fácil de atingir.

Neste caso, a carga crítica  $N_{cr1}$  apresentou menor valor entre as cargas críticas, correspondendo a um valor de maior interesse para o estudo, visto a maior susceptibilidade à ocorrerem flambagem. Isso implica que a escolha de uma expressão errônea que não corresponde ao menor valor de carga, ao fazer uso da solução de dois graus de liberdade, pode alterar significativamente o formato da curva, uma maior resistência à flambagem superior à realidade.

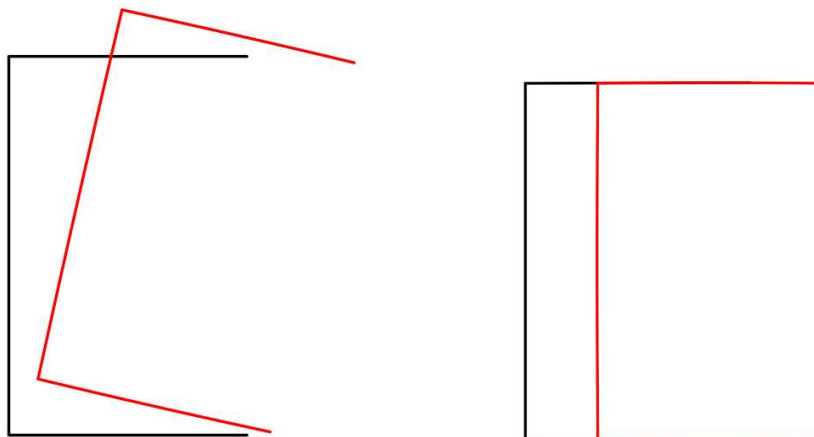
#### 4 FLAMBAGEM GLOBAL

A flambagem global é caracterizada por um padrão de instabilidade que se estende por todo o comprimento da estrutura, no qual a seção transversal da estrutura permanece praticamente inalterada durante o processo, consistente com a teoria clássica de vigas, e o comprimento de meia onda da flambagem se apresenta ao longo do comprimento do elemento comprimido (Cardoso *et al.*, 2014; Adany, 2005).

Devido à sua importância, a flambagem global de colunas de materiais compósitos tem sido objeto de estudo de diversos trabalhos, tais como Mottram (1992), Barbero e Tomblin (1993), Kollár (2001) e Qiao *et al.* (2003). Pode-se citar também os trabalhos de Pierin (2005), Mororó *et al.* (2010), Cardoso (2014), Sayyad e Ghuhhal (2017), D'Águiar (2017), Sayyad e Ghuhhal (2017), Nguyen *et al.* (2019), Huang e Qiao (2021) e Huang e Qiao (2021).

A instabilidade global em colunas de parede fina comumente ocorre de três formas – flexão, torção e flexo-torção (Chajes, 1974; Cedolin; Bazant, 1991). No caso de perfis C, de seção aberta e monossimétricos, pode ocorrer flambagem global por flexo-torção ou flexão no eixo de menor inércia (Chajes, 1974), conforme ilustrado na Figura 9.

Figura 9 – Modos de flambagem global em Perfil C comprimido.



(a) Modo Global de Flexo-Torção

(b) Modo Global de Flexão

Fonte: Elaborada pelo autor.

A flambagem global de colunas com seções transversais bissimétricas é caracterizada pela flexão do elemento estrutural em torno do eixo de menor inércia. A equação de flambagem de Euler descreve a carga crítica necessária para ocorrer a instabilidade estrutural:

$$P_{cr, Euler} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (4.1)$$

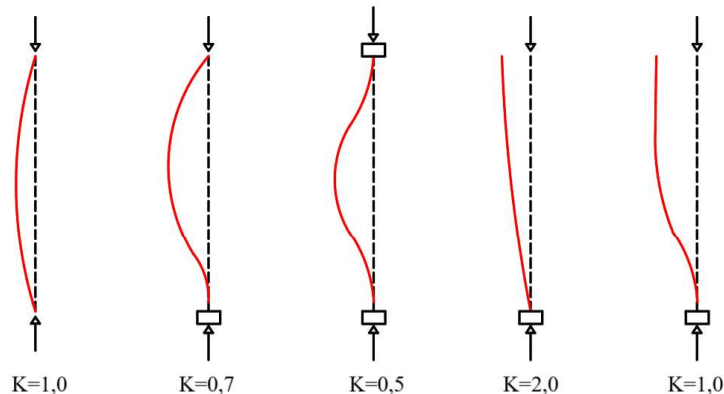
A utilização da rigidez equivalente ( $\overline{EI}$ ) permite sua aplicação em colunas laminadas. O trabalho também irá considerar propriedades como a rigidez axial equivalente ( $\overline{EA}$ ), rigidez à flexão equivalente nos eixos  $y$  ( $\overline{EI}_y$ ) e  $z$  ( $\overline{EI}_z$ ), rigidez à torção equivalente ( $\overline{GJ}$ ), e a rigidez ao empenamento ( $\overline{EI}_w$ ).

Essa equação é derivada da equação diferencial que governa o comportamento de uma coluna biapoada, perfeitamente reta, carregada através do centroide (Galambos & Surovek, 2008). Para análise de colunas com diferentes condições de contorno, utiliza-se a forma generalizada, dada por:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \overline{EI}}{(KL)^2} \quad (4.2)$$

onde  $K$  é o fator de comprimento efetivo que depende das condições de contorno da coluna, conforme ilustrado na Figura 10. Este fator relaciona a carga de flambagem com a expressão de Euler para diferentes condições de extremidade.

Figura 10 – Fator  $K$ , para diferentes condições de contorno.



Fonte: adaptado de Galambos (1998).

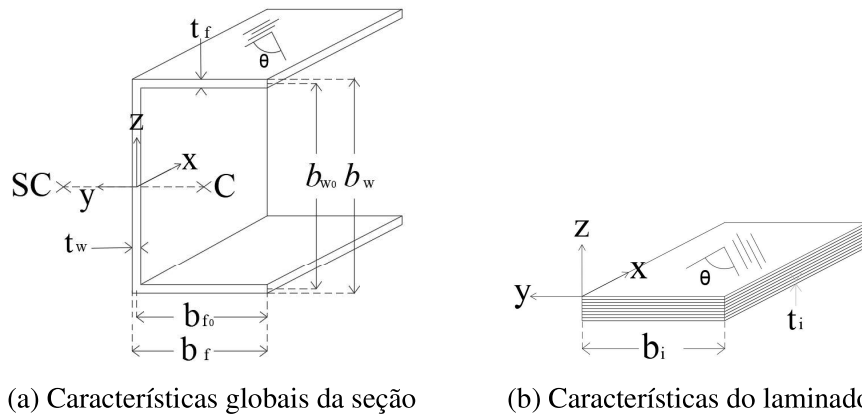
A instabilidade global por torção é característica de perfis de parede fina de seções abertas, além de baixa rigidez de torção (Cardoso, 2014). Esse tipo de instabilidade global ocasiona rotação do elemento estrutural em torno do eixo longitudinal associado ao centro do cisalhamento (Correia, 2012).

Neste trabalho, a determinação das cargas de flambagem global de colunas laminadas com seção C será realizada em duas etapas. A primeira etapa consiste na determinação das propriedades mecânicas equivalentes destas colunas e a segunda etapa consiste na obtenção de expressão analíticas para as cargas de flambagem utilizando o Método de Rayleigh-Ritz.

#### 4.1 Geometria e propriedades de perfis C

As propriedades geométricas são fundamentais para a determinação das cargas de flambagem de perfis C (Figura 11), incluindo momentos de inércia, centroide da seção ( $C$ ), constante de torção de Saint Venant, centro de cisalhamento ( $SC$ ) e constante de empenamento. Essas propriedades são necessária para descrever o comportamento estrutural de perfis, sobretudo das rigidezes da seções transversal: a rigidez à flexão em torno do eixo  $z$  ( $\overline{EI}_z$ ), a rigidez à flexão em torno do eixo  $y$  ( $\overline{EI}_y$ ), a rigidez axial ( $\overline{EA}$ ), a rigidez à torção ( $\overline{GJ}$ ) e a rigidez ao empenamento ( $\overline{EI}_w$ ).

Figura 11 – Características da seção C.



Fonte: adaptado de Cardoso *et al.* (1999).

O centroide da seção é o ponto onde a distribuição das áreas das camadas é ponderada igualmente ao redor deste ponto. Se o corpo for homogêneo e estiver sob a influência de um campo gravitacional constante, esse ponto coincidirá com o centro de gravidade (Hibbeler, 2011). As coordenadas do centroide ( $\bar{z}, \bar{y}$ ) podem ser calculadas conforme Galambos (1968):

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \frac{\sum A_i z_i}{\sum A_i} \\ \bar{y} &= \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}\end{aligned}\tag{4.3}$$

onde  $A_i$  são as áreas das camadas individuais do laminado e  $z_i, y_i$  são as coordenadas dos centros das camadas. A localização precisa do centroide é crucial para a análise de flexão e distribuição de tensões, especialmente em perfis assimétricos como o perfil C, onde o centroide não coincide com o centro geométrico da seção. A área da seção transversal ( $A$ ) de um perfil C de material laminado pode ser obtida considerando onde  $b_i$  é a largura e  $t_i$  é a espessura da  $i$ -ésima placa que

compõe a seção transversal do laminado:

$$A = \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n (b_i t_i) \quad (4.4)$$

O momento de inércia quantifica a resistência da seção à flexão em torno de um eixo específico. O cálculo do momento de inércia considera a contribuição de cada placa:

$$I_z = \sum_{i=1}^n (I_{z_i} + A_i (y_i - \bar{y})^2), \quad I_y = \sum_{i=1}^n (I_{y_i} + A_i (z_i - \bar{z})^2) \quad (4.5)$$

onde  $I_{z_i}, I_{y_i}$  são os momentos de inércia das camadas individuais em relação aos seus próprios eixos, e  $y_i, z_i$  são as distâncias do centroide da camada ao centroide da seção.

A constante de torção de Saint Venant ( $J$ ) mede a resistência de um elemento estrutural à torção pura ou uniforme. Ela é usada para calcular a resistência ao momento de flambagem de vigas não suportadas lateralmente e a flambagem torsional-flexional de membros de compressão. Para seções abertas, a fórmula geral é dada por Galambos (1968):

$$J = \sum_{i=1}^n \left( \frac{b_i t_i^3}{3} \right) \quad (4.6)$$

onde  $b_i$  é a largura e  $t_i$  é a espessura da placa.

O centro de cisalhamento é definido como uma propriedade geométrica da seção pelo qual deve passar o plano de aplicação das cargas transversais de modo que não ocorra torção, apenas flexão (CHAJES, 1974). Para perfis mono-simétricos, o centro de cisalhamento possui  $z_{cs} = 0$ . Conforme Fakury *et al.* (2017), a coordenada  $x$  do centro de cisalhamento e a constante de empenamento  $C_w$  podem ser obtidos pelas expressões :

$$y_{cs} = \frac{b_{f0}^2 t_f}{b_{w0} t_w + 2b_{f0} t_f} + \frac{b_{f0}^2 b_{w0}^2 t_f}{4I_y} \quad (4.7)$$

$$C_w = \frac{t_f b_f^3 b_{w0}^2}{12} \left( \frac{3b_f t_f + 2b_{w0} t_w}{6b_f t_f + b_{w0} t_w} \right)$$

onde as dimensões  $b_{w0}$  e  $b_{f0}$  correspondem às dimensões obtidas referentes ao eixo da peça, de modo que são expressas da seguinte forma:

$$b_{f0} = b_f - \frac{t_w}{2} \quad (4.8)$$

$$b_{w0} = b_w - t_f$$

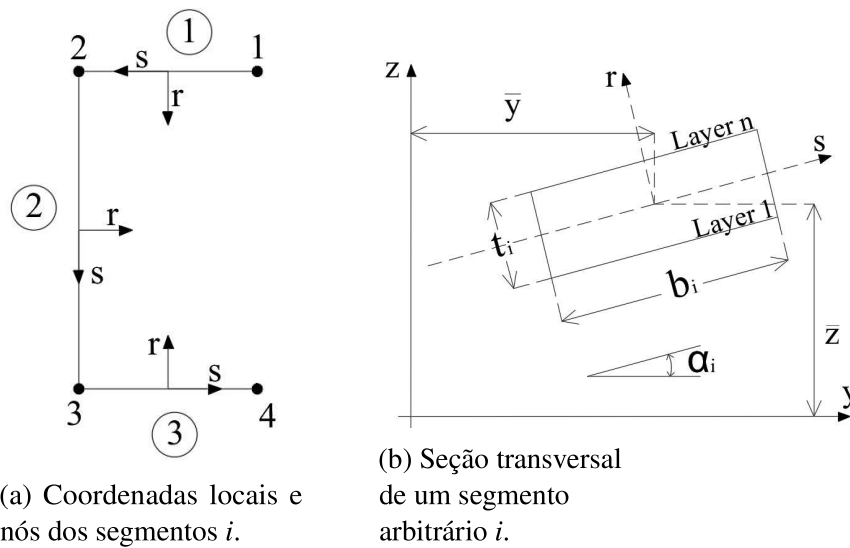
## 4.2 Propriedades Equivalentes

Neste trabalho são consideradas três abordagens distintas para obter as propriedades mecânicas de colunas laminadas: (i) a metodologia apresentada por Cardoso *et. al.* (1999), (ii) Massa e Barbero (1998) e (iii) Teoria de Kollar e Pluzsik (2002).

#### 4.2.1 Teoria de Massa e Barbero (1998)

A metodologia proposta por Massa e Barbero (1998) permite a análise de elementos laminados de seção aberta ou fechada. A teoria se destaca por apresentar equações que não só permitem uma implementação simples e eficiente, mas também levam a bons resultados para laminados simétricos e balanceados. Nessa teoria a seção transversal do laminado é definida por segmentos, conforme ilustrado na Figura 12.

Figura 12 – Características dos segmentos que compõem a seção C.



Fonte: adaptado de Massa e Barbero (1998).

As propriedades mecânicas calculadas por integrais sobre a área da seção transversal, dividida pelo contorno e espessura de cada segmento. Segundo Massa e Barbero (1998), o segmento  $i$  da seção transversal é modelado como uma placa fina utilizando a Teoria Clássica da Laminação, que possui a seguinte relação constitutiva entre forças internas e deformações generalizadas:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^i \\ \varepsilon_s^i \\ \gamma_{xs}^i \\ \kappa_x^i \\ \kappa_s^i \\ x_{xs}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{16} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{26} \\ \alpha_{16} & \alpha_{26} & \alpha_{66} & \beta_{16} & \beta_{26} & \beta_{66} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{16} & \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{16} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{26} & \delta_{12} & \delta_{22} & \delta_{26} \\ \beta_{16} & \beta_{26} & \beta_{66} & \delta_{16} & \delta_{26} & \delta_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x^i \\ N_s^i \\ N_{xs}^i \\ M_x^i \\ M_s^i \\ M_{xs}^i \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

onde  $N_c^i$  e  $N_s^i$  são as forças normais,  $N_{xs}^i$  são as forças no plano  $xs$ ,  $M_x^i$  e  $M_s^i$  são momentos fletores, e  $M_{xs}^i$  o momento torsor,  $\varepsilon_x^i, \varepsilon_s^i, \gamma_{xs}^i$  são as deformações de membrana na seção média,

$\kappa_x^i$ ,  $\kappa_s^i$  e  $\kappa_{xs}^i$  as curvaturas. Considerando que foi assumido  $N_s^i = 0$  e  $M_s^i = 0$  (válido para paredes finas), e assumindo um desacoplamento entre as deformações de membrana e cisalhamento ( $\alpha_{16} = \beta_{16} = \delta_{16} = 0$ ) pode ser reduzida para:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^l \\ \kappa_x^l \\ \gamma_{xs}^l \\ \kappa_{xs}^d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} & 0 & 0 \\ \beta_{11} & \delta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{66} & \beta_{66} \\ 0 & 0 & \beta_{66} & \delta_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x^l \\ M_x^l \\ N_{xs}^i \\ M_{xs}^i \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

invertendo a Equação (4.10) pode ser determinada a expressão correspondente a matriz de rigidez reduzida:

$$\begin{Bmatrix} N_x^i \\ M_x^i \\ N_{xs}^i \\ M_{xs}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x^i & B_x^i & 0 & 0 \\ B_x^i & D_x^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{xs}^i & C_{xs}^i \\ 0 & 0 & C_{xs}^i & H_{xs}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^i \\ \kappa_x^i \\ \gamma_{xs}^i \\ \kappa_{xs}^i \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

onde os termos  $A_x^i, B_x^i, C_x^i, D_x^i, F_x^i$  e  $H_x^i$  correspondem à segmentos de rigidez e permitem a determinação das propriedades da seção para resolver o problema geral de flexão e torção, e podem ser calculados por:

$$\begin{aligned} A_i &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} E_x^k dr = \sum_{k=1}^N E_x^k t^k \\ B_i &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} r E_x^k dr = \sum_{k=1}^N E_x^k t^k \bar{r}^k \\ C_i &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} r G_{xs}^k dr = \sum_{k=1}^N G_{xs}^k t^k \bar{r}^k \\ D_i &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} r^2 E_x^k dr = \sum_{k=1}^N E_x^k \left[ \frac{(t^k)^3}{12} + t^k (\bar{r}^k)^2 \right] \\ F_i &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} G_{xs}^k dr = \sum_{k=1}^N G_{xs}^k t^k \\ H_i &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} r^2 G_{xs}^k dr = \sum_{k=1}^N G_{xs}^k \left[ \frac{(t^k)^3}{12} + t^k (\bar{r}^k)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde  $t^k$  é a espessura da camada  $k$ ,  $r$  é a coordenada da espessura,  $\bar{r}^k$  é a distância da superfície intermediária do segmento até a superfície intermediária da camada  $k$ ,  $A_i$  representa a rigidez axial por unidade de comprimento do segmento,  $B_i$  é o acoplamento entre a curvatura de flexão e a força normal por unidade de comprimento,  $D_i$  é a rigidez de flexão do segmento sob flexão,  $F_i$  é a rigidez de cisalhamento no plano e  $H_i$  é a rigidez de torção.

Aplicando o Teorema dos Eixos Paralelos e somando as contribuições dos segmentos, os momentos de inércia mecânicos e o produto mecânico da inércia em relação aos eixos podem ser obtidos por:

$$\begin{aligned}
 \overline{EA} &= \sum_{i=1}^n A_i b_i \\
 \overline{EI}_y &= \sum_{i=1}^n \left[ \left( \overline{EI}_y^i \right) + A_i b_i \left( z_i + \theta_b \cos \alpha_y^i \right)^2 \right] \\
 \overline{EI}_z &= \sum_{i=1}^n \left[ \left( \overline{EI}_z^i \right) + A_i b_i \left( y_i - b_b \sin \alpha_y^i \right)^2 \right] \\
 \overline{GJ} &= 4 \sum_{i=1}^n H_i b_i
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

$\overline{EA}$  representa a rigidez axial da seção, onde  $n$  é o número de segmentos que descrevem a seção transversal,  $\overline{GJ}$  é a rigidez torcional,  $\overline{EI}_y$ , e  $\overline{EI}_z$  são os momentos mecânicos de inércia aos eixos. A rigidez ao empenamento, por sua vez é definida como  $\overline{EI}_w$ , em função da área setorial, apresentada anteriormente na Equação 4.11.

#### 4.2.2 Teoria de Cardoso *et al.* (1999)

Cardoso *et al.*, (1999) apresentaram uma metodologia onde as seções da viga são constituídas por painéis compósitos laminados planos nos quais propriedades equivalentes do material podem ser obtidas a partir das propriedades individuais de cada material.

Nesta abordagem, as propriedades mecânicas do material ortotrópico equivalente podem ser calculadas a partir das propriedades do laminado:

$$E_x^m = \frac{1}{t \alpha_{11}} \quad G_{xy}^m = \frac{1}{t \alpha_{66}} \quad G_{xy}^b = \frac{12}{t^3 \delta_{66}} \tag{4.14}$$

onde  $\alpha_{ij}$  e  $\delta_{ij}$  foram apresentados na Equação (2.23) e Equação (2.24), sendo  $E_x^m$ ,  $G_{xy}^m$  e  $G_{xy}^b$  constantes elásticas equivalentes para módulo de tração e cisalhamento, para modos de membrana (sobrescrito  $m$ ) e flexão (sobrescrito  $b$ ), respectivamente. Essas propriedades podem ser obtidas fazendo uso das expressões apresentadas no Seção 2.5.

A metodologia prática para avaliar essas propriedades envolve considerar as características constitutivas do laminado que incluem as áreas  $A_i$ , as inércias  $I_z$  e  $I_y$ , e a constante de torção  $J_i$ . Considerando uma seção homogênea, esta abordagem calcula as propriedades mecânicas equivalentes a partir das expressões clássicas da Resistência do Materiais fazendo uso propriedades geométricas da seção:

$$\begin{aligned}
\overline{EA} &= E_x^m \sum_{i=1}^n A_i \\
\overline{EI}_y &= E_x^m \sum_{i=1}^n I_{yi} \\
\overline{EI}_z &= E_x^m \sum_{i=1}^n I_{zi} \\
\overline{GJ} &= G_{xy}^b J_i
\end{aligned}
\tag{4.15}$$

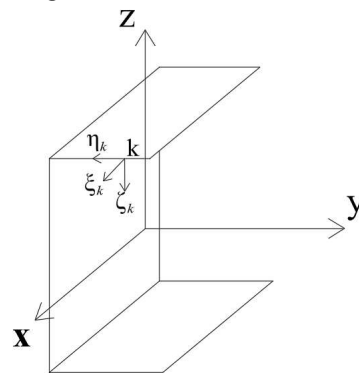
No cálculo da constante de empenamento ( $\overline{EI}_w$ ), utilizou-se a constante de empenamento ( $C_w$ ) e a constante elástica de membrana ( $E_x^m$ ):

$$\overline{EI}_w = E_x^m I_w \tag{4.16}$$

#### 4.2.3 Teoria de Kollar e Pluzsik (2002)

Kollar e Pluzsik (2002) propuseram uma teoria geral para análise de vigas laminadas de paredes finas e apresentaram expressões analíticas para matriz constitutiva  $\mathbf{C}$  para seções abertas e fechadas. Trata-se de uma teoria mais complexa que considera as lâminas  $k$  que compõem o elemento estrutural como segmentos planos, com uma disposição arbitrária e eixos locais  $\eta$ ,  $\xi$ ,  $\zeta$  (Kollar, 2003), conforme ilustrado na Figura 13.

Figura 13 – Eixos locais para um segmento arbitrário  $k$ .



Fonte: adaptado de Kollár (2003).

O procedimento para obtenção das propriedades equivalentes de seção abertas consiste em quatro etapas: (a) as deformações em cada segmento devem estar relacionadas às deformações axiais, às curvaturas e à taxa de ângulo de torção; (b) as forças em cada segmento da seção são determinadas a partir das deformações obtidas na etapa anterior; (c) a força normal resultante, bem como os momentos fletores e momentos torcionais, são obtidos a partir das

forças em cada parede da seção transversal; (d) a matriz de rigidez é estabelecida relacionando as forças resultantes (força normal, momentos fletores e momento torcional) com a deformação axial, curvaturas e taxa de ângulo de torção.

Para calcular as propriedades equivalentes de um laminado utilizando a metodologia de Kollar e Pluzsik (2002), considera-se uma matriz  $\mu$  obtida a partir das matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{D}$  e suas inversas, apresentadas nas Seções 2.4 e 2.5:

$$\mu = \begin{bmatrix} a_{11} & b_{11} & b_{13} \\ b_{11} & d_{11} & d_{13} \\ b_{13} & d_{13} & d_{33} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

seguido pela inversão desta matriz para obter  $\mathbf{A}_t$  :

$$\mathbf{A}_t = \mu^{-1} \quad (4.18)$$

Uma matriz de transformação  $\mathbf{R}_k$  é criada para cada elemento que compõe a seção(alma e flange), baseado nas suas coordenadas  $z_k$  e  $y_k$  e ângulos de orientação  $\alpha_k$ :

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} 1 & z_k & y_k & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_k) & -\sin(\alpha_k) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_k) & \cos(\alpha_k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Esta matriz é usada para transformar as propriedades da chapa para um sistema de coordenadas global. Uma matriz  $\mathbf{w}_k$  é definida para representar a flexibilidade da chapa específica:

$$\mathbf{w}_k = \frac{1}{b_k} \begin{bmatrix} a_{11} & b_{11} & 0 & -0.5b_{13} \\ b_{11} & d_{11} & 0 & -0.5d_{13} \\ 0 & 0 & \frac{12}{A_t(1,1)b_k^2} & 0 \\ -0.5b_{13} & -0.5d_{13} & 0 & 0.25d_{33} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Esta matriz é então transformada e acumulada em uma matriz global  $\mathbf{P}_b$ :

$$\mathbf{P}_b = \mathbf{P}_b + \mathbf{R}_k^T \mathbf{w}_k^{-1} \mathbf{R}_k \quad (4.21)$$

A inversa desta matriz acumulada  $\mathbf{P}_b$  é calculada, resultando na matriz  $\mathbf{W}_b$ :

$$\mathbf{W}_b = \mathbf{P}_b^{-1} \quad (4.22)$$

Com a matriz  $\mathbf{W}_b$  calculada, o próximo passo é determinar o centroide da seção transversal do laminado. Isto é feito resolvendo um sistema de equações lineares formado pelos elementos da matriz  $\mathbf{W}_b$ , resultando nas coordenadas  $z_c$  e  $y_c$ , que representam o centro geométrico da seção:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{b(2,2)} & \mathbf{W}_{b(2,3)} \\ \mathbf{W}_{b(2,3)} & \mathbf{W}_{b(3,3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_c \\ y_c \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{W}_b(1,2) \\ \mathbf{W}_b(1,3) \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Em seguida, uma nova matriz de transformação  $R_b$  é construída para converter as propriedades calculadas no sistema de coordenadas centrado no centroide da seção transversal:

$$\mathbf{R}_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ z_c & 1 & 0 & 0 \\ y_c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Esta matriz é usada para transformar  $\mathbf{W}_b$  em uma nova matriz  $\mathbf{W}$ :

$$\mathbf{W} = \mathbf{R}_b^T \mathbf{W}_b \mathbf{R}_b \quad (4.25)$$

A diagonalização da matriz  $\mathbf{W}$  é realizada, resultando em uma matriz  $\mathbf{W}_{\text{diag}}$  com apenas elementos diagonais. A inversa desta matriz diagonalizada  $\mathbf{P}_{\text{diag}}$  é então calculada:

$$\mathbf{P}_{\text{diag}} = \mathbf{W}_{\text{diag}}^{-1} \quad (4.26)$$

as propriedades equivalentes do laminado são extraídas da matriz diagonalizada ( $\mathbf{P}_{\text{diag}}$ ):

$$\begin{aligned} \overline{EA} &= \mathbf{P}_{\text{diag}}(1,1) \\ \overline{EI}_y &= \mathbf{P}_{\text{diag}}(2,2) \\ \overline{EI}_z &= \mathbf{P}_{\text{diag}}(3,3) \\ \overline{GJ} &= \mathbf{P}_{\text{diag}}(4,4) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Pluzsik and Kollar (2002) indicam que, para uma viga ortotrópica, a rigidez ao empenamento para perfis de seção C pode ser avaliada pela expressão

$$\overline{EI}_w = \frac{\frac{b_f^3 t^2}{12} \frac{1}{a_{11}} \left( \frac{3b_f}{a_{11}} + \frac{2t}{a_{11}} \right)}{\frac{6b_f}{a_{11}} + \frac{d}{a_{11}}} \quad (4.28)$$

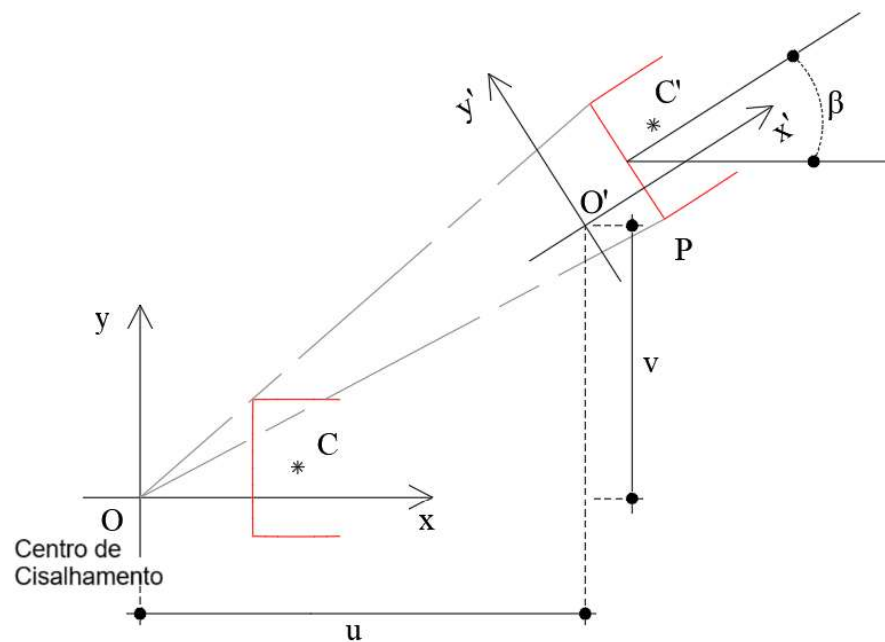
essa expressão pode ficar em relação à  $E_x^m$ , simplificando-a:

$$\overline{EI}_w = \frac{E_x^m t b_f^2 b_f^3}{12} \frac{3b_f + 2b_w}{6b_f + b_w} \quad (4.29)$$

### 4.3 Método de Rayleigh-Ritz

Conforme Chajes (1974), a obtenção das cargas críticas pode ser realizada fazendo uso do centro de cisalhamento  $O$  como a origem do sistema de coordenadas, ilustrado na Figura 14. O centro de cisalhamento é o ponto na seção transversal através do qual as cargas produzem flexão sem torção.

Figura 14 – Deformações de flambagem por Flexo-Torção.



Fonte: adaptado de Chajes (1974).

No estudo de flambagem global considera-se que a deformação que ocorre durante a flambagem consiste em uma combinação de torção e flexão sobre dois eixos e para expressar a energia de deformação na forma mais simples, é desejável reduzir a deformação a duas translações puras e uma rotação pura. Considerando uma coluna simplesmente apoiada nas duas extremidades, os deslocamentos podem ser aproximados como:

$$\begin{aligned} u &= C_1 \sin \frac{\pi z}{L} \\ v &= C_2 \sin \frac{\pi z}{L} \\ \beta &= C_3 \sin \frac{\pi z}{L} \end{aligned} \quad (4.30)$$

onde  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são os graus de liberdade do problema e  $L$  é o comprimento da coluna.

A energia interna de deformação dos elementos consistem em quatro partes: as energias devidas à flexão nos eixos, a energia dos esforços da torção de Saint Venant, e a energia

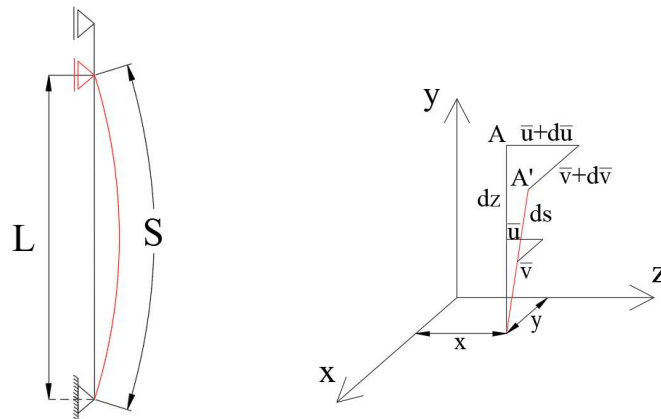
das tensões longitudinais associadas à torção por empenamento (CHAJES, 1974). Assim:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \overline{EI}_y \left( \frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^L \overline{EI}_x \left( \frac{d^2 v}{dz^2} \right)^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^L \overline{GJ} \left( \frac{d\beta}{dz} \right)^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^L \overline{EI}_w \left( \frac{d^2 \beta}{dz^2} \right)^2 dz \quad (4.31)$$

o resultado de integração é :

$$U = \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{L} \left[ C_1^2 \frac{\overline{EI}_y \pi^2}{L^2} + C_2^2 \frac{\overline{EI}_x \pi^2}{L^2} + C_3^2 \left( \overline{GJ} + \frac{\overline{EI}_w \pi^2}{L^2} \right) \right] \quad (4.32)$$

Figura 15 – Deformação de uma fibra longitudinal.



(a) Deformação axial.

(b) Deformação transversal de uma fibra.

Fonte: adaptado de Chajes (1974).

A energia potencial em uma fibra (Figura 15) deformada pode ser calculada a partir da diferença entre o comprimento do arco  $S$  e o comprimento  $L$  da fibra, denotada por  $\Delta l_b$ . Se a área da seção transversal da fibra é  $dA$  e a carga que ela suporta é  $\sigma dA$ , então a energia potencial total para todo o membro estrutural é obtida por meio da integral dessa expressão sobre a área da seção transversal. Assim, a energia potencial  $V$  pode ser expressa como:

$$V = - \int_A \Delta l_b \sigma dA \quad (4.33)$$

Para determinar  $\Delta l_b$ , considere a fibra AB cujas coordenadas no estado não deformado são  $x$  e  $y$ . Vamos analisar um elemento diferencial  $dz$  dessa fibra. Após a deformação, os deslocamentos  $u$  e  $v$  da extremidade inferior do elemento são  $u$  e  $v$ , e os deslocamentos correspondentes na extremidade superior são  $u + du$  e  $v + dv$ . As translações  $u$  e  $v$  de uma fibra, cujas coordenadas são  $x$  e  $y$ , consistem na translação do centro de cisalhamento,  $u$  e  $v$ , mais uma

translação adicional devido à rotação da fibra em torno do centro de cisalhamento. A energia potencial  $V$  da fibra pode então ser representada por:

$$V = -\frac{P}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{du}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 + r_0^2 \left( \frac{d\beta}{dz} \right)^2 - 2y_0 \left( \frac{du}{dz} \right) \left( \frac{d\beta}{dz} \right) + 2x_0 \left( \frac{dv}{dz} \right) \left( \frac{d\beta}{dz} \right) \right] dz \quad (4.34)$$

ao integrar ao longo do comprimento  $L$  da fibra, obtemos a expressão final para a energia potencial  $V$ :

$$V = -\frac{P\pi^2}{4L} (C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 r_0^2 - 2C_1 C_3 y_0 + 2C_2 C_3 x_0) \quad (4.35)$$

A energia potencial total é então apresentada como a união das parcelas mencionadas.

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{\pi^2}{4l} \left\{ C_1^2 \left( \frac{\pi^2 \overline{EI}_y}{l^2} - P \right) + C_2^2 \left( \frac{\pi^2 \overline{EI}_x}{l^2} - P \right) + C_3^2 r_0^2 \left[ \frac{1}{r_0^2} \left( \overline{GJ} + \frac{\overline{EI}_w \pi^2}{l^2} \right) - P \right] \right. \\ \left. + 2C_1 C_3 P y_0 - 2C_2 C_3 P x_0 \right\} \end{aligned} \quad (4.36)$$

O funcional da energia pode ser simplificado em termos das cargas de flambagem. Os termos representam as cargas de flambagem de flexão em torno dos eixos paralelos à seção, e o terceiro, relacionado à flambagem torsional, inclui a rigidez de Saint Venant e a rigidez de empenamento.

$$\Pi = \frac{\pi^2}{4l} [C_1^2 (P_y - P) + C_2^2 (P_x - P) + C_3^2 r_0^2 (P_\phi - P) + 2C_1 C_3 P y_0 - 2C_2 C_3 P x_0] \quad (4.37)$$

onde

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{\pi^2 \overline{EI}_x}{l^2} \\ P_y &= \frac{\pi^2 \overline{EI}_y}{l^2} \\ P_\phi &= \frac{1}{r_0^2} \left( \overline{GJ} + \frac{\overline{EI}_w \pi^2}{l^2} \right) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Como  $\Pi$  é uma função de três variáveis, ela terá um valor estacionário quando sua derivada em relação a cada uma dessas três variáveis for zero. Tomando a derivada da expressão em relação a  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  e igualando cada uma a zero, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Pi)}{\partial C_1} &= C_1 (P_y - P) + C_3 (P y_0) = 0 \\ \frac{\partial(\Pi)}{\partial C_2} &= C_2 (P_x - P) - C_3 (P x_0) = 0 \\ \frac{\partial(\Pi)}{\partial C_3} &= C_1 P y_0 - C_2 P x_0 + C_3 r_0^2 (P_\phi - P) = 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

a expressão é um conjunto de equações lineares homogêneas que têm uma solução  $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ , indicando que o equilíbrio é possível desde que o membro permaneça reto. Existe também uma solução que corresponde ao equilíbrio em uma configuração deformada, que é o tipo de equilíbrio que existe apenas na carga crítica.

Para determinar a carga crítica, portanto, definimos o determinante das equações como:

$$\begin{vmatrix} P_y - P & 0 & Py_0 \\ 0 & P_x - P & -Px_0 \\ Py_0 & -Px_0 & r_0^2 (P_\phi - P) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.40)$$

equivalente a expressão:

$$(P_y - P)(P_x - P)(P_\phi - P) - (P_y - P)\frac{P^2 x_0^2}{r_0^2} - (P_x - P)\frac{P^2 y_0^2}{r_0^2} = 0 \quad (4.41)$$

Por tratamos de seções tipo C, o centro de cisalhamento coincidir com o eixo de simetria ( $y_0 = 0$ ), podemos simplificar a expressão:

$$(P_y - P) \left[ (P_x - P)(P_\phi - P) - \frac{P^2 x_0^2}{r_0^2} \right] = 0 \quad (4.42)$$

Esta é uma equação cúbica em  $P$ , cujas raízes são as cargas críticas:

$$P = P_y = \frac{\pi^2 \bar{EI}_y}{l^2} \quad (4.43)$$

$$(P_x - P)(P_\phi - P) - \frac{P^2 x_0^2}{r_0^2} = 0$$

A primeira expressão corresponde à flambagem puramente de flexão em torno do eixo  $y$ . A segunda é uma equação quadrática, cujas raízes correspondem a flambagem por uma combinação de flexão e torção, ou seja, flambagem flexo-torção. No caso se seções tipo C, pode ocorrer flambagem tanto por flexão no plano de simetria quanto por uma combinação de torção e flexão:

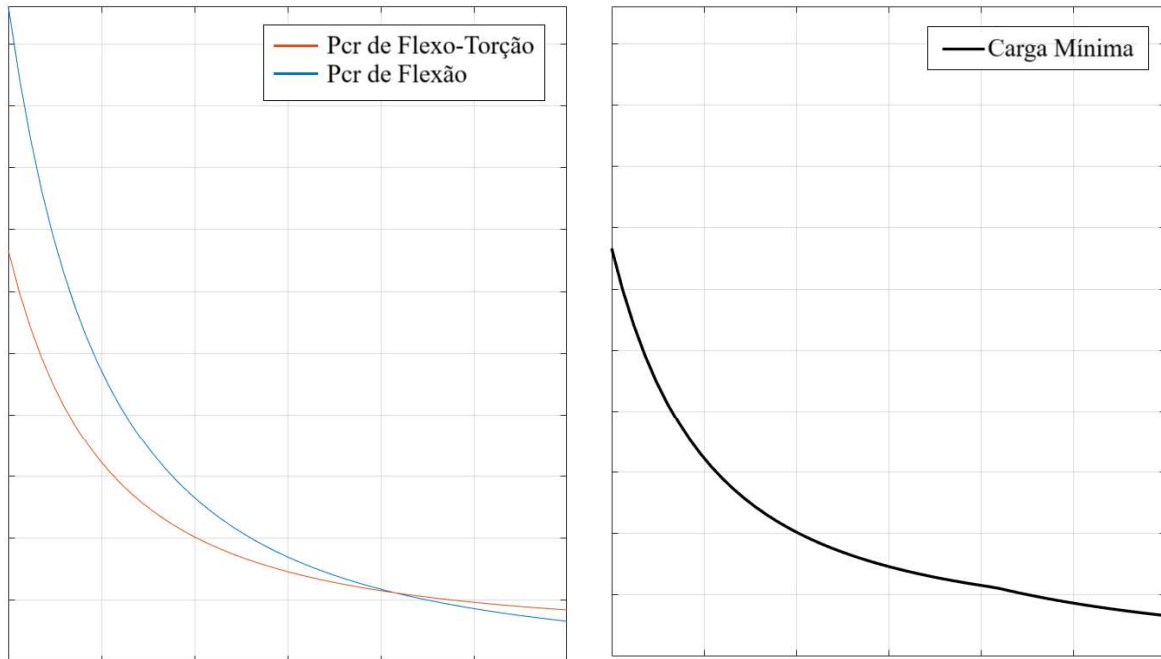
$$P_{TP} = \frac{1}{2k} \left[ P_\phi + P_x - \sqrt{(P_\phi + P_x)^2 - 4kP_\phi P_x} \right] \quad (4.44)$$

onde

$$k = \left[ 1 - (x_0/r_0)^2 \right] \quad (4.45)$$

As expressões que descrevem os fenômenos de flexão, torção e flexo-torção nos permitem traçar curvas que relacionam a carga crítica aplicada ao comprimento da coluna, como ilustrado na Figura 16. Essas curvas permitem determinar os pontos de transição de modos de flambagem, além de mostrar a redução da carga crítica de cada modo de flambagem com o aumento do comprimentos.

Figura 16 – Curvas de flambagem global



(a) Cargas de flambagem global por flexão e flexo-torção em função de  $L$ .

(b) Curva de assinatura: Carga crítica em função de  $L$ .

Fonte: elaborado pelo autor.

Ao analisarmos a curva de flambagem global por flexão, podemos observar variações na magnitude das cargas críticas para diferentes comprimentos de coluna. Essa visualização permite identificar faixas críticas onde diferentes modos de flambagem podem ocorrer, fornecendo informações que podem auxiliar durante processos de tomada de decisão. É válido ressaltar que a aplicação das abordagens apresentadas nesse capítulo terão seus resultados apresentados no Capítulo 5.

## 5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, serão apresentados exemplos numéricos de colunas laminadas para estudo dos fenômenos de flambagem local, flambagem global e diferentes parâmetros que influenciam as curvas de assinatura.

Para a flambagem local, empregou-se o Método de Rayleigh-Ritz com um e dois graus de liberdade. Os resultados de carga foram comparados com o Método dos Elementos Finitos e as colunas analisadas por Debski et al. (2013) e D’Aguiar (2017). Para os modos globais, são aplicadas diferentes teorias para o cálculo de propriedades equivalentes do laminado. Resultados para flambagem de flexo-torção e flexão são apresentados e comparados com o Método dos Elementos Finitos.

A confecção das curvas, considerando todos os modos de flambagem, permitiu a realização dos estudos paramétricos avaliando a influência das relações geométricas entre espessura da seção e tamanhos de alma e flange.

### 5.1 Coluna de Debski et al. (2013)

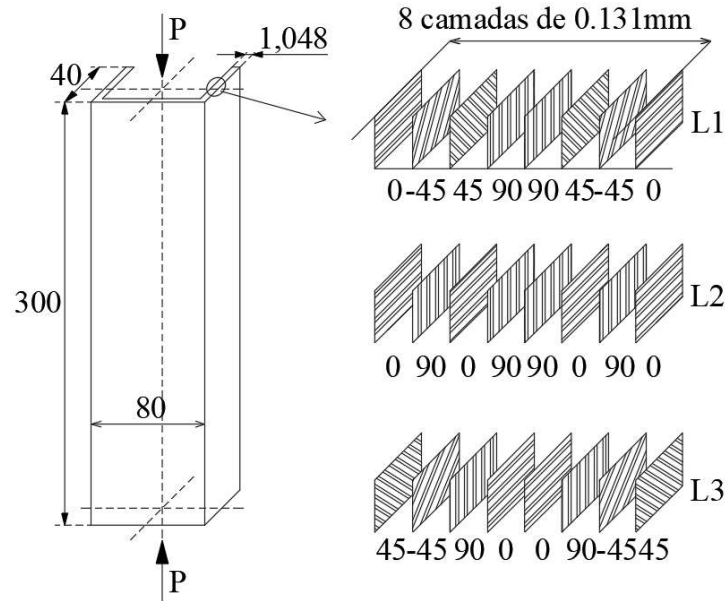
Nos trabalhos de Debski et al. (2013), foram analisados perfis C de parede fina, fabricados com material pré-impregnado unidirecional designado como *M12/35%/UD134/AS7/300*, sistema “HexPly” da fabricante Hexcel. A matriz epóxi utilizada nos perfis possui as seguintes características: densidade de massa de 1,24 g/cm<sup>3</sup>, resistência à tração de 64 MPa, coeficiente de Poisson de 0,4 e módulo de Young de 5,1 GPa. Como reforço, foram utilizadas fibras de carbono AS7J12K, conhecidas por sua alta resistência e rigidez, com densidade de massa de 2,5 g/cm<sup>3</sup>, resistência à tração de 4830 MPa, coeficiente de Poisson de 0,269 e módulo de Young de 241 GPa.

Os perfis adotados tinham dimensões de 80x40x1,048 mm e 300 mm de comprimento, com a carga aplicada no centroide da seção, conforme ilustrado na Figura 17. Cada perfil era composto por 8 camadas de carbono-epóxi pré-impregnado, cada uma com espessura de 0,131 mm, dispostas em uma sequência simétricas de lâminas: [0,45,-45,90]<sub>s</sub>, [0,90,0,90]<sub>s</sub> e [45,-45,90,0]<sub>s</sub>.

As propriedades mecânicas do material estão apresentadas na Tabela 1, incluindo o módulo de elasticidade na direção principal ( $E_1$ ), o módulo de elasticidade na direção perpendicular à principal ( $E_2$ ), o módulo de cisalhamento no plano 1-2 ( $G_{12}$ ), o coeficiente de Poisson na

direção 1-2 ( $\nu_{12}$ ), a resistência à tração nas direções 1 ( $X_t$ ) e 2 ( $Y_t$ ), a resistência à compressão nas direções 1 ( $X_c$ ) e 2 ( $Y_c$ ), e a resistência ao cisalhamento no plano 1-2 ( $S$ ).

Figura 17 – Geometria e esquema de laminação da coluna.



Fonte: adaptado de Debski (2013).

Tabela 2 – Propriedades elásticas e mecânicas da lâmina.

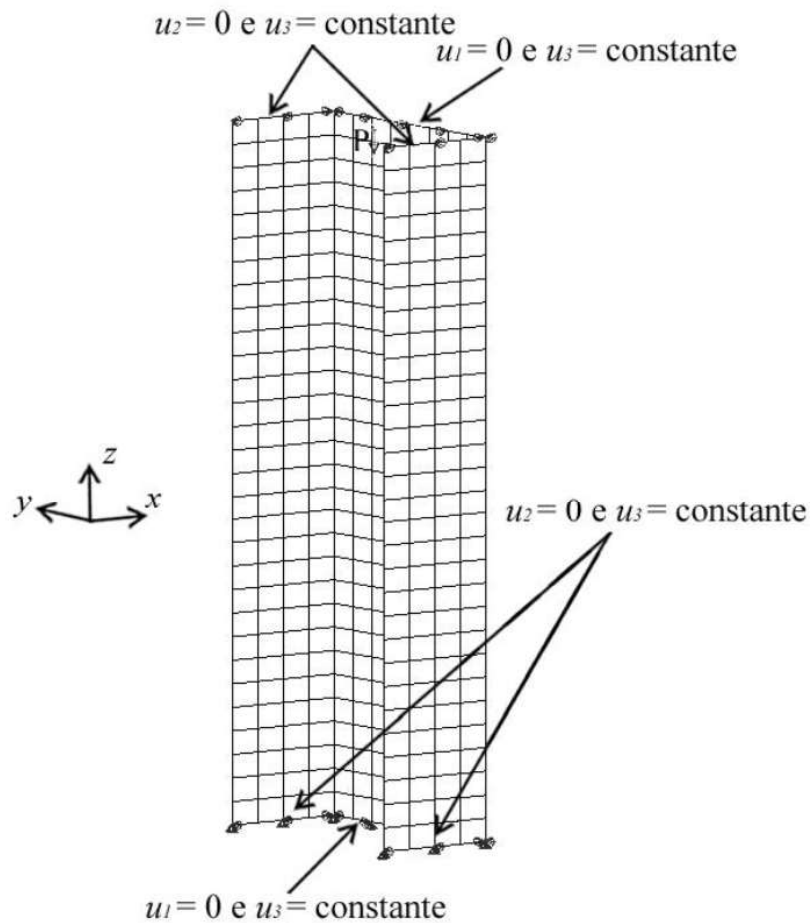
$E_1$ (MPa)	$E_2$ (MPa)	$G_{12}$ (MPa)	$\nu_{12}$	$X_t$ (MPa)	$Y_t$ (MPa)	$X_c$ (MPa)	$Y_c$ (MPa)	$S$ (MPa)
130710	6360	4180	0.32	1867.2	25.97	1531	214	100.15

Fonte: elaborado pelo autor.

As características mecânicas determinadas experimentalmente por Debski et al. (2013) foram utilizadas na definição do modelo para simulações numéricas desse trabalho, usando o Método dos Elementos Finitos (MEF). O modelo numérico que representa a coluna foi discretizado utilizando 480 elementos de casca quadráticos de oito nós com integração reduzida, S8R, baseado na teoria de Reissner-Mindlin. É válido ressaltar que no trabalho de referência também apresentou um modelo numérico, em que foi empregado o elemento quadrático de quatro nós com integração reduzida.

Com relação às condições de contorno adotadas nos extremos da coluna, os deslocamentos transversais perpendiculares na alma e flange foram restringidos, enquanto os deslocamentos no sentido de aplicação da força foram mantidos constantes. O modelo numérico das colunas compósitas com seção em C é apresentado na Figura 18.

Figura 18 – Condições de contorno do modelo numérico desenvolvido.



Fonte: adaptado de Debski (2013).

### 5.1.1 Validação do modelo

Os resultados obtidos nos trabalhos experimentais e numéricos de Debski et al. (2013) foram comparados com o modelo proposto em elementos finitos e o trabalho de D'Aguiar (2017), que também fez comparações com o autor. As laminações  $[0,45,-45,90]_s$ ,  $[0,90,0,90]_s$  e  $[45,-45,90,0]_s$  são denominadas L1, L2 e L3, respectivamente.

A Tabela 3 apresenta as cargas críticas para diferentes laminações, comparando os valores experimentais ( $P_{cr,exp}$ ) obtidos por Debski et al. (2013) com os valores calculados por meio de modelos em elementos finitos ( $P_{cr,MEF}$ ) de D'Aguiar (2017) e do modelo proposto neste trabalho. Os resultados obtidos com a aplicação do Método de Rayleigh-Ritz com um e dois graus de liberdade são representados por  $P_{cr,RR1gl}$  e  $P_{cr,RR2gl}$ , respectivamente.

A Tabela 4 apresenta os valores e as diferenças percentuais entre as cargas críticas obtidas pelos diferentes métodos. A tabela detalha as diferenças percentuais entre os valores de Debski et al. (2013) (A e B), D'Aguiar (2017) (C) e os valores obtidos no trabalho (D, E e F).

Tabela 3 – Cargas Críticas para diferentes laminações.

<i>Layup</i>	<i>Debski et al. (2013)</i>		<i>D’Aguiar (2017)</i>		<i>Este trabalho</i>	
	$P_{cr,exp}$	$P_{cr,MEF}$	$P_{cr,MEF}$	$P_{cr,MEF}$	$P_{cr,RR1gl}$	$P_{cr,RR2gl}$
	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>	<b>F</b>
<i>[0,45,-45,90]s</i>	2848,3	2977,2	2972,5	2990,2	2986,8	2953,4
<i>[0,90,0,90]s</i>	2274,8	2282,3	2274,9	2276,8	2519,1	2454,9
<i>[45,-45,90,0]s</i>	4369,7	4402,4	4405,9	4460,7	4581,2	4535,5

Fonte: elaborado pelo autor.

Tabela 4 – Diferenças Percentuais entre os Resultados.

<i>Referências</i>	<i>Layup</i>		
	<i>[0,45,-45,90]s (%)</i>	<i>[0,90,0,90]s (%)</i>	<i>[45,-45,90,0]s (%)</i>
<b>AB</b>	4,53	0,33	0,75
<b>AC</b>	4,36	0,004	0,83
<b>AD</b>	4,98	0,09	2,08
<b>AE</b>	4,87	10,74	4,84
<b>AF</b>	3,70	7,91	3,80
<b>BC</b>	-0,16	-0,32	0,08
<b>BD</b>	0,44	-0,24	1,32
<b>BE</b>	0,32	10,37	4,06
<b>BF</b>	-0,80	7,57	2,99
<b>CD</b>	0,59	0,08	1,24
<b>CE</b>	0,48	10,72	3,98
<b>CF</b>	-0,64	7,91	2,95
<b>DE</b>	-0,11	10,62	2,70
<b>DF</b>	-1,23	7,83	1,68
<b>EF</b>	-1,12	-2,54	-0,99

Fonte: elaborado pelo autor.

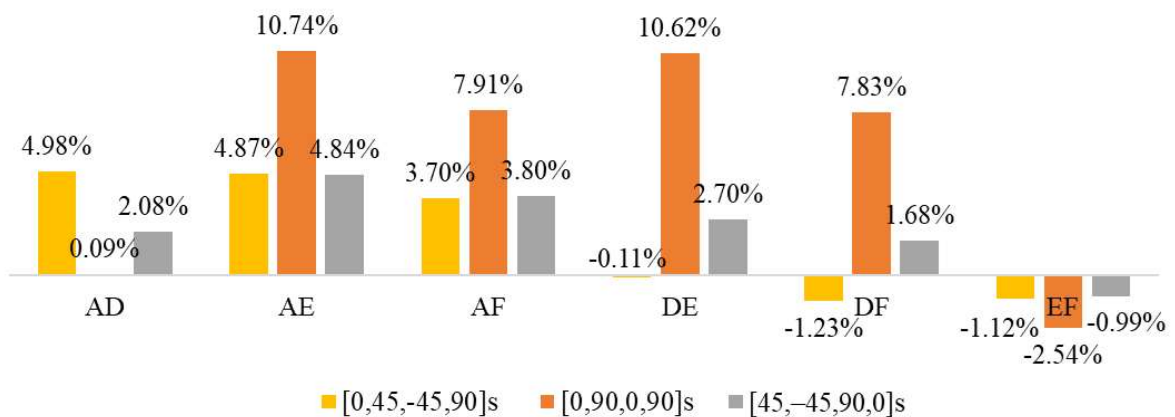
Com relação aos resultados obtidos utilizando o MEF, verifica-se uma excelente concordância tanto em relação aos resultados de Debski (2013) quanto de D’Aguiar (2017). Os resultados do MEF também apresentam boa concordância com os valores experimentais, com diferenças inferiores à 5%.

Para os resultados obtidos pelo Método de Rayleigh-Ritz, a maior diferença percentual foi observada entre os métodos A e E ( $P_{cr,RR1gl}$ ), para a laminação L2 com uma diferença de

10,74%. Isso indica uma variação significativa ao utilizar o modelo de Rayleigh-Ritz com um grau de liberdade. Por outro lado, a consideração da aproximação com dois graus de liberdade leva a resultados aceitáveis, com diferenças em relação aos resultados experimentais inferiores a 8% para a laminação L2 e inferiores a 4% para L1 e L3.

A solução com dois graus de liberdade ( $P_{cr,RR2gl}$ ) apresentou melhor desempenho que a solução com apenas um grau ( $P_{cr,RR1gl}$ ), devido a melhor representação do problema fornecida pelo acréscimo de termos nas funções de aproximação da alma. A Figura 19 ilustra graficamente as diferenças percentuais.

Figura 19 – Diferenças percentuais entre resultados.



Fonte: elaborado pelo autor

A análise dos resultados revela que o Método de Rayleigh-Ritz é válido para a previsão das cargas críticas locais, com pequenas diferenças em relação aos valores obtidos com o Método dos Elementos Finitos e os resultados experimentais por Debski et al. (2013) e D'Aguiar (2017). Os resultados confirmam a precisão dos cálculos e demonstram que o uso de um ou dois graus de liberdade para o Método de Rayleigh-Ritz já fornece bons resultados.

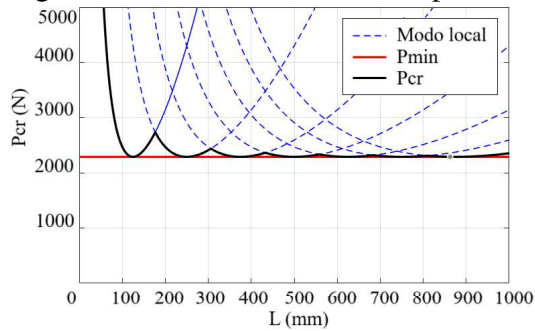
### 5.1.2 Curvas de Assinatura do modo local

Nessa seção serão apresentadas as curvas de flambagem local aplicando o Método de Rayleigh-Ritz com dois graus de liberdade. Além das laminações analisadas por Debski et al. (2013), serão apresentados mais três laminações. As laminações analisadas incluem L1 [0]<sub>8</sub>, L2 [0,90,0,90]<sub>s</sub>, L3 [45,-45,45,-45]<sub>s</sub>, L4 [30,-30,30,-30]<sub>2</sub>, L5 [0,45,-45,90]<sub>s</sub>, e L6 [45,-45,90,0]<sub>s</sub>.

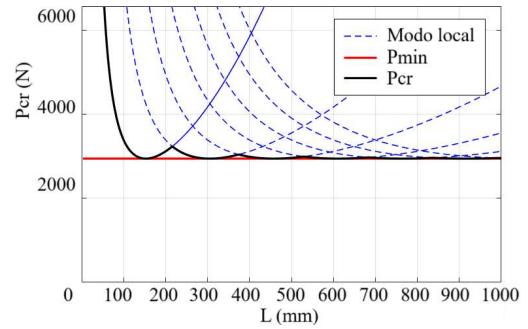
As cruvas da carga crítica ( $P_{cr}$ ) em função do comprimento longitudinal ( $L$ ) são

apresentadas considerando os valores das cargas críticas em função do comprimento longitudinal da coluna, que justifica o formato das curvas, conforme apresentando na Figura 20, Figura 21 e Figura 22.

Figura 20 – Curvas de assinatura para os *Layups* L1 e L2.



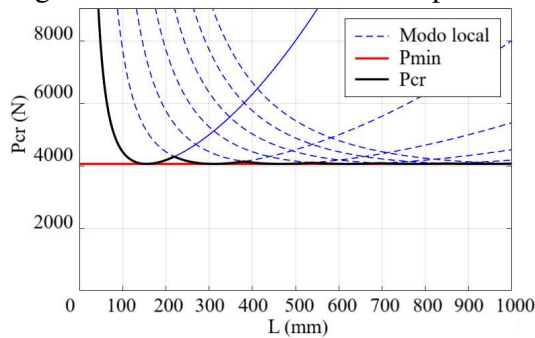
(c) *Layup* 1



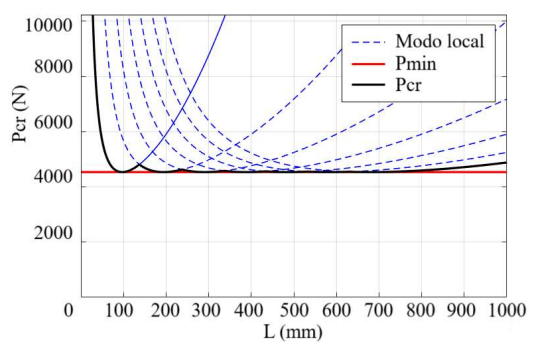
(d) *Layup* 2

Fonte: elaborado pelo autor

Figura 21 – Curvas de assinatura para os *Layups* L3 e L4.



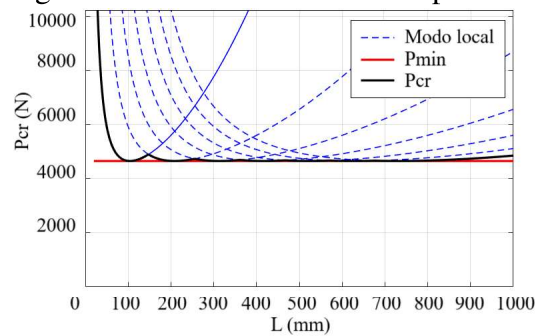
(c) *Layup* 3



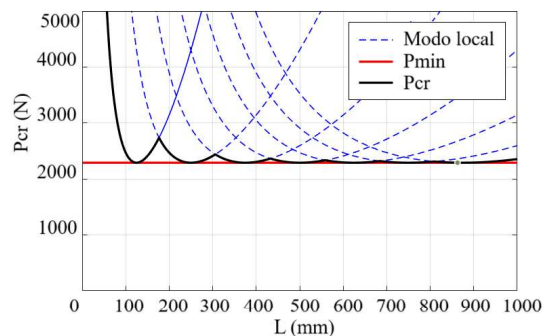
(d) *Layup* 4

Fonte: elaborado pelo autor

Figura 22 – Curvas de assinatura para os *Layups* L5 e L6.



(c) *Layup* 5



(d) *Layup* 6

Fonte: elaborado pelo autor

Ao comparar as cargas críticas das diferentes laminações, a laminação L3  $[45, -45, 90, 0]_s$

apresentou a maior carga de flambagem local, com um valor de 4535.5 N . A laminação L1 [0]<sub>8</sub> apresentou a menor carga de flambagem local, com um valor de 2953.4 N para o mesmo método. É importante notar que todas as laminações possuem o mesmo consumo de material, tornando as diferenças nas cargas críticas particularmente relevantes para a escolha da laminação.

A Tabela 5 apresenta os valores de carga mínima para o método de Rayleigh-Ritz com um e dois graus de liberdade e compara com os valores apresentados por Debski et al. (2013). Os valores de carga crítica mínima assumiram a forma de uma reta horizontal e adotar esses valores mínimos é uma prática comum em projetos, visto que a economia pode ser irrelevante e em prol da segurança.

Tabela 5 – Cargas Críticas para coluna de 300 milímetros de comprimento e Cargas Mínimas para o Método de Rayleigh-Ritz.

Referência	Debski et al. (2013)		Método de Rayleigh-Ritz			
	$P_{cr,exp}$ (N)	$P_{cr,MEF}$ (N)	$P_{cr,RR1gl}$	$P_{cr,RR2gl}$	$P_{min,RR1gl}$	$P_{min,RR2gl}$
L2	2274.8	2282.3	2519.0	2454.9	2370.55	2319.6
L5	2848.3	2977.2	2986.8	2953.4	2986.7	2953.2
L6	4369.7	4402.4	4581.2	4535.5	4574.8	4532.6

Fonte: elaborado pelo autor.

## 5.2 Exemplos de verificação

Nessa seção serão apresentados exemplos de verificação para a confecção das curvas de assinatura considerando flambagem local e global dos Perfis C. Foram aplicados os métodos descritos nos capítulos anteriores e os resultados obtidos serão apresentados com o intuito de avaliar a precisão e a aplicabilidade dessas teorias na confecção dessas curvas incluindo modos de flambagem de flexo-torção e flexão.

### 5.2.1 Propriedades Equivalentes

Para a avaliação das metodologias apresentadas, foram realizadas aplicações numéricas para colunas de seção em C simplesmente apoiadas, semelhantes às analisadas por Debski et al. (2013). As geometrias e propriedades do material foram mantidas e as laminações considerados são: L1 [0]<sub>8</sub>, L2 [(0°/90°)<sub>2</sub>]<sub>S</sub>, L3 [(45°/−45°)<sub>2</sub>]<sub>S</sub>, e L4 [30°/−30°]<sub>4</sub>.

Os resultados apresentados na Tabela 6 mostram que as propriedades do laminado

equivalente são bastante semelhantes entre as diferentes abordagens, com pequenas variações. A maior diferença obtida é de cerca de 4,06% para  $\overline{EI}_z$  do *layup* L2 entre as abordagens de Massa e Barbero (1998) e Cardoso et al. (1999).

Tabela 6 – Propriedades do laminado equivalente.

Layup	Propriedades Equivalentes	Cardoso et al. (1999)	Massa and Barbero (1997)	Kollar and Pluzsik (2002)
L1	$\overline{EA} \times (10^7\text{N})$	2.1630	2.1917	2.1917
	$\overline{EI}_y \times (10^4\text{N.m}^2)$	2.2476	2.3380	2.3380
	$\overline{EI}_z \times (10^3\text{N.m}^2)$	3.5119	3.6539	3.6539
	$\overline{GJ} \text{ (N.m}^2)$	0.2566	0.2566	0.2566
	$\overline{EI}_w \text{ (N.m}^4)$	4.0913	4.0913	4.0913
L2	$\overline{EA} \times (10^7\text{N})$	1.1388	1.1539	1.1539
	$\overline{EI}_y \times (10^4\text{N.m}^2)$	1.1833	1.2309	1.2309
	$\overline{EI}_z \times (10^3\text{N.m}^2)$	1.8490	1.9239	1.9239
	$\overline{GJ} \text{ (N.m}^2)$	0.2566	0.2566	0.2566
	$\overline{EI}_w \text{ (N.m}^4)$	2.1540	2.1540	2.1540
L3	$\overline{EA} \times (10^7\text{N})$	0.2475	0.2508	0.2508
	$\overline{EI}_y \times (10^4\text{N.m}^2)$	0.2572	0.2675	0.2675
	$\overline{EI}_z \times (10^3\text{N.m}^2)$	0.4019	0.4181	0.4181
	$\overline{GJ} \text{ (N.m}^2)$	1.8137	1.8137	1.8388
	$\overline{EI}_w \text{ (N.m}^4)$	0.4682	0.4682	0.4682
L4	$\overline{EA} \times (10^7\text{N})$	0.6885	0.6977	0.6880
	$\overline{EI}_y \times (10^4\text{N.m}^2)$	0.7155	0.7442	0.7442
	$\overline{EI}_z \times (10^3\text{N.m}^2)$	1.1179	1.1631	1.1631
	$\overline{GJ} \text{ (N.m}^2)$	1.4234	1.4234	1.5429
	$\overline{EI}_w \text{ (N.m}^4)$	1.2842	1.2842	1.2842

Fonte: elaborado pelo autor.

As metodologias de Massa e Barbero (1997) e Kollar e Pluzsik (2002) apresentaram os melhores resultados, demonstrando uma excelente concordância entre si para todas as propriedades avaliadas. Embora a abordagem de Cardoso et al. (1999) tenha apresentado resultados ligeiramente inferiores, ela ainda forneceu boas estimativas para as propriedades equivalentes. A abordagem de Cardoso et al. (1999) diferiu das outras metodologias com diferenças pequenas

que podem ser justificadas pela simplicidade da teoria apresentada pelo autor.

A laminação que apresentou os melhores resultados foi L1  $[0]_8$ , mostrando a maior consistência nas propriedades equivalentes entre as diferentes metodologias. Por outro lado, as laminações L3 e L4  $[(45^\circ / -45^\circ)_2]_S$  apresentaram as maiores variações, especialmente na propriedade  $\overline{GJ}$ .

De forma geral, as propriedades  $\overline{GJ}$  e  $\overline{EI}_w$  mostram total concordância entre os três estudos para a maioria dos *layups*. As propriedades  $\overline{EA}$ ,  $\overline{EI}_y$  e  $\overline{EI}_z$  apresentam variações em torno de 4%. No entanto, para o *layup* L4, existem variações mais significativas, especialmente para  $\overline{GJ}$ .

As diferenças percentuais entre Massa e Kollar (2002) são geralmente pequenas ou inexistentes, exceto em alguns casos específicos como  $\overline{EA}$  no *layup* L4. Essas análises indicam que, embora haja uma boa concordância entre as teorias, certas propriedades e *layups* específicos mostram variações que merecem atenção.

Conforme a Tabela 7, o *layup* L1 apresentou a propriedade  $\overline{EA} \times (10^7\text{N})$  com uma variação de 1.33% entre Cardoso et al. (1999) e os outros dois estudos, enquanto não há diferença entre Massa e Kollar (2002). A propriedade  $\overline{EI}_y \times (10^4\text{N.m}^2)$  mostra uma variação de 4.02% entre Cardoso et al. (1999) e os outros dois estudos, novamente sem diferença entre Massa e Kollar (2002). A propriedade  $\overline{EI}_z \times (10^3\text{N.m}^2)$  segue um padrão similar, com uma variação de 4.05%. Já para  $\overline{GJ}$  ( $\text{N.m}^2$ ) e  $\overline{EI}_w$  ( $\text{N.m}^4$ ), todos os estudos concordam completamente, não havendo diferenças percentuais.

No *layup* L2, a propriedade  $\overline{EA} \times (10^7\text{N})$  tem uma variação de 1.32% entre Cardoso e os outros dois estudos, e  $\overline{EI}_y \times (10^4\text{N.m}^2)$  e  $\overline{EI}_z \times (10^3\text{N.m}^2)$  apresentam variações de 4.02% e 4.06%, respectivamente. Assim como no *layup* L1,  $\overline{GJ}$  ( $\text{N.m}^2$ ) e  $\overline{EI}_w$  ( $\text{N.m}^4$ ) não mostram nenhuma diferença percentual entre os estudos.

Para o *layup* L3,  $\overline{EA} \times (10^7\text{N})$  e  $\overline{EI}_y \times (10^4\text{N.m}^2)$  têm variações de 1.33% e 4.01%, respectivamente. A propriedade  $\overline{EI}_z \times (10^3\text{N.m}^2)$  apresenta uma variação de 4.03%. A única variação significativa neste *layup* é para  $\overline{GJ}$  ( $\text{N.m}^2$ ), onde há uma diferença de 1.39% entre Cardoso e Kollar. Para  $\overline{EI}_w$  ( $\text{N.m}^4$ ), não há diferenças percentuais entre os estudos.

No *layup* L4, a propriedade  $\overline{EA} \times (10^7\text{N})$  mostra uma variação de 1.34% entre Cardoso e Massa, mas apenas -0.07% entre Cardoso e Kollar, e uma diferença maior de -1.40% entre Massa e Kollar. Para  $\overline{EI}_y \times (10^4\text{N.m}^2)$  e  $\overline{EI}_z \times (10^3\text{N.m}^2)$ , as variações são de 4.01% e 4.05%, respectivamente. A propriedade  $\overline{GJ}$  ( $\text{N.m}^2$ ) apresenta uma variação significativa de

8.38% entre Cardoso e Kollar. Para  $\overline{EI}_w$  (N.m<sup>4</sup>), não há diferenças percentuais entre os estudos.

Tabela 7 – Diferenças Percentuais das Propriedades do Laminado Equivalente.

Layup	Propriedades Equivalentes	Cardoso et al. vs Massa and Barbero (%)	Cardoso et al. vs Kollar and Pluzsik (%)	Massa and Barbero vs Kollar and Pluzsik (%)
L1	$\overline{EA} \times (10^7\text{N})$	1.33	1.33	0.00
	$\overline{EI}_y \times (10^4\text{N.m}^2)$	4.02	4.02	0.00
	$\overline{EI}_z \times (10^3\text{N.m}^2)$	4.05	4.05	0.00
	$\overline{GJ}$ (N.m <sup>2</sup> )	0.00	0.00	0.00
	$\overline{EI}_w$ (N.m <sup>4</sup> )	0.00	0.00	0.00
L2	$\overline{EA} \times (10^7\text{N})$	1.32	1.32	0.00
	$\overline{EI}_y \times (10^4\text{N.m}^2)$	4.02	4.02	0.00
	$\overline{EI}_z \times (10^3\text{N.m}^2)$	4.06	4.06	0.00
	$\overline{GJ}$ (N.m <sup>2</sup> )	0.00	0.00	0.00
	$\overline{EI}_w$ (N.m <sup>4</sup> )	0.00	0.00	0.00
L3	$\overline{EA} \times (10^7\text{N})$	1.33	1.33	0.00
	$\overline{EI}_y \times (10^4\text{N.m}^2)$	4.01	4.01	0.00
	$\overline{EI}_z \times (10^3\text{N.m}^2)$	4.03	4.03	0.00
	$\overline{GJ}$ (N.m <sup>2</sup> )	0.00	1.39	1.39
	$\overline{EI}_w$ (N.m <sup>4</sup> )	0.00	0.00	0.00
L4	$\overline{EA} \times (10^7\text{N})$	1.34	-0.07	-1.40
	$\overline{EI}_y \times (10^4\text{N.m}^2)$	4.01	4.01	0.00
	$\overline{EI}_z \times (10^3\text{N.m}^2)$	4.05	4.05	0.00
	$\overline{GJ}$ (N.m <sup>2</sup> )	0.00	8.38	8.38
	$\overline{EI}_w$ (N.m <sup>4</sup> )	0.00	0.00	0.00

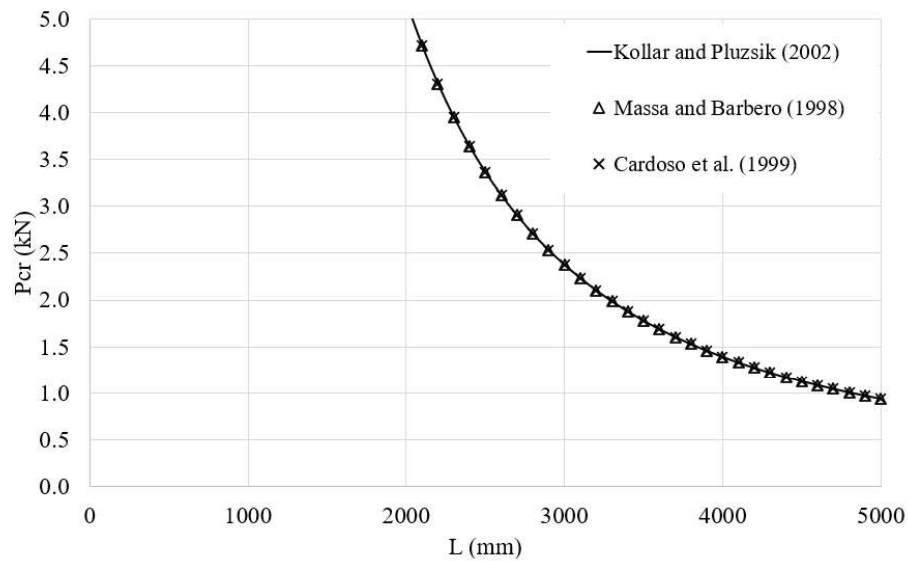
Fonte: elaborado pelo autor.

As cargas críticas globais podem ser calculadas a partir das propriedades equivalentes do perfil laminado fazendo uso do Método de Rayleigh-Ritz. As propriedades são apresentadas na Tabela 8 e os resultados são apresentados na Figura 23, Figura 24, Figura 25 e Figura 26.

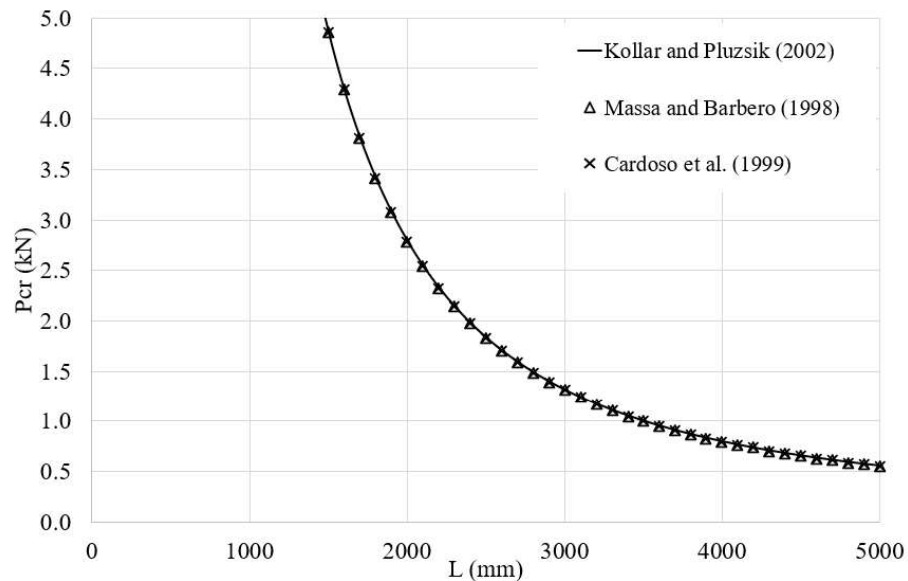
Tabela 8 – Propriedades para um material ortotrópico equivalente com as *layups* L2, L3 e L4.

<i>Layup</i>	$E_{1,eq}$ (GPa)	$E_{2,eq}$ (GPa)	$G_{12,eq}$ (GPa)	$\nu_{12,eq}$
L1	68.817	68.817	4.180	0.0297
L2	68.817	68.817	4.180	0.0297
L3	14.957	14.957	33.416	0.7891
L4	41.029	8.349	25.134	1.4963

Fonte: elaborado pelo autor.

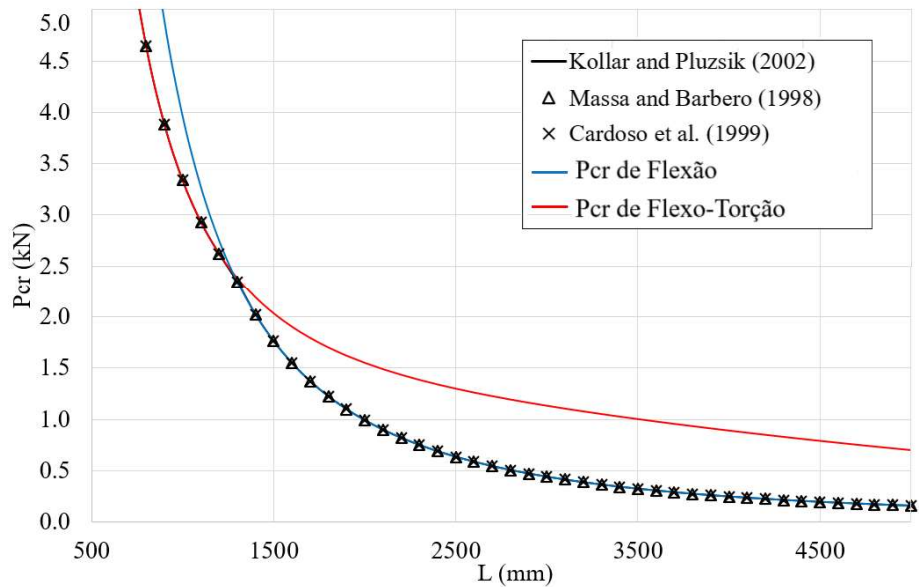
Figura 23 – Curva considerando flambagem global para o *layup* L1.

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 24 – Curva considerando flambagem global para o *layup* L2.

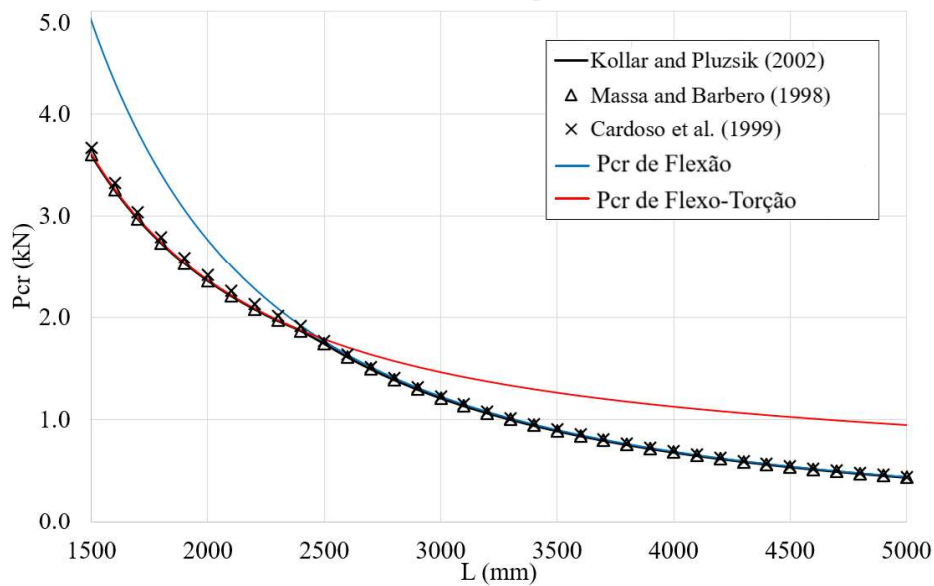
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 25 – Curva considerando flambagem global para o *layup* L3.



Fonte: elaborado pelo autor

Figura 26 – Curva considerando flambagem global para o *layup* L4.



Fonte: elaborado pelo autor

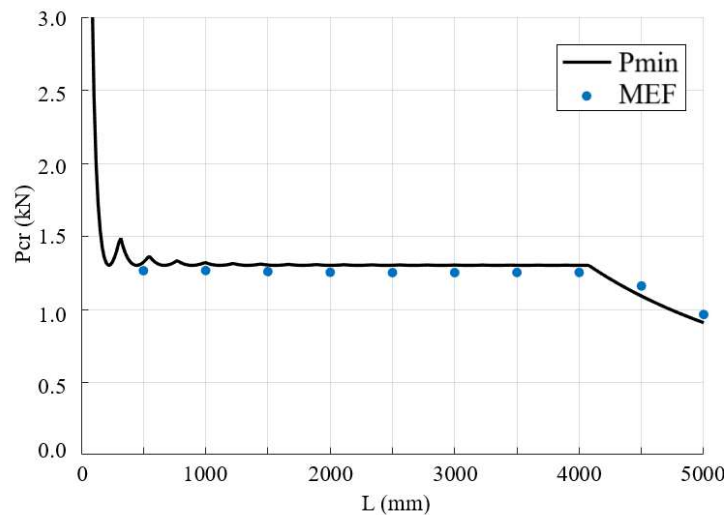
Para os *layups* L1 e L2 as curvas apresentaram boa concordância entre as teorias, não havendo distinção visível entre ambas. Para as essas mesmas laminações, prevalece a flambagem por Flexo-Torção. A aplicação para os *layups* L3 e L4 também apresentou boa concordância entre as teoria. De modo análogo as *layups* L1 e L2, as curvas inicialmente apresentaram resultados para flambagem por flexo-torção, mas seguida de uma transição para modos de flambagem global de flexão em aproximadamente 1300 mm e 2500 mm para L3 e L4, respectivamente.

Essa transição de modos também ocorre para os *layups* L1 e L2, mas estão fora da faixa visível do gráfico pois ocorrem em comprimentos superiores a 7 metros. Para a seção analisada não é de interesse em aplicações práticas visto a elevada esbelteza.

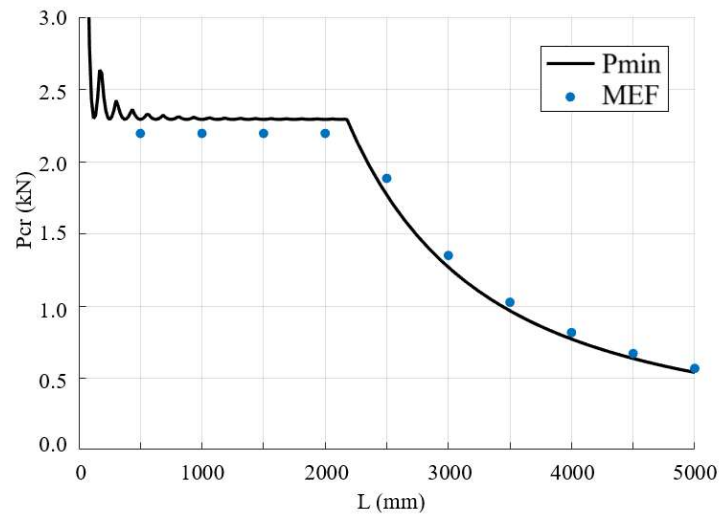
### 5.2.2 Curvas de Assinatura

Nessa seção serão apresentadas as curvas de assinatura para os *layups* L1, L2, L3 e L4, considerando ainda um perfil C com alma de 80 mm e flanges de 40 mm, com 1,048 mm de espessura. A Figura 27, Figura 28, Figura 29 e Figura 30 apresentam as curvas com valores mínimos das cargas de flambagem local, global de flexo-torção e global de flexão. Também são apresentados resultados obtidos pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), com a finalidade de validação das curvas.

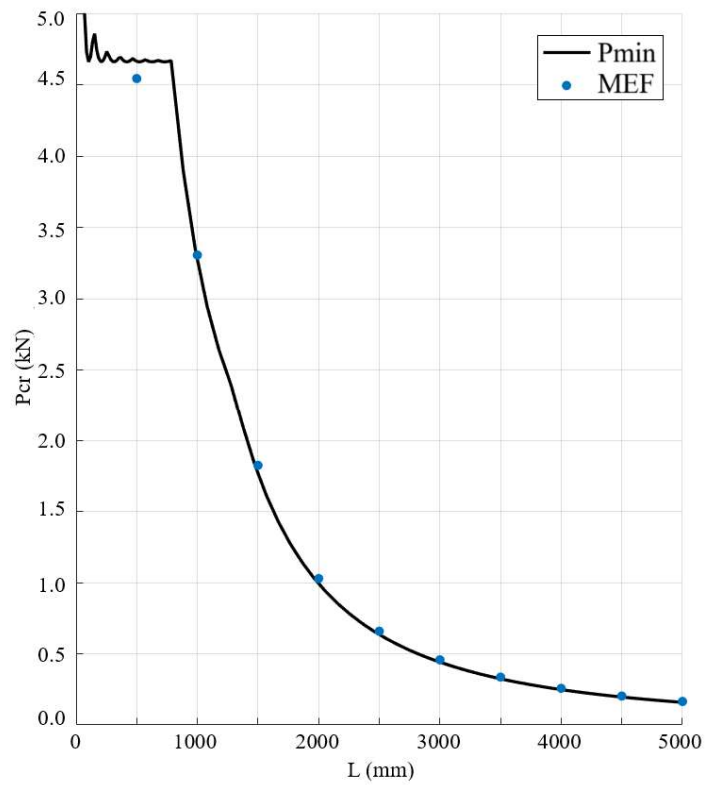
Figura 27 – Curva de assinatura e resultados MEF para o *layup* L1.



Fonte: elaborado pelo autor.

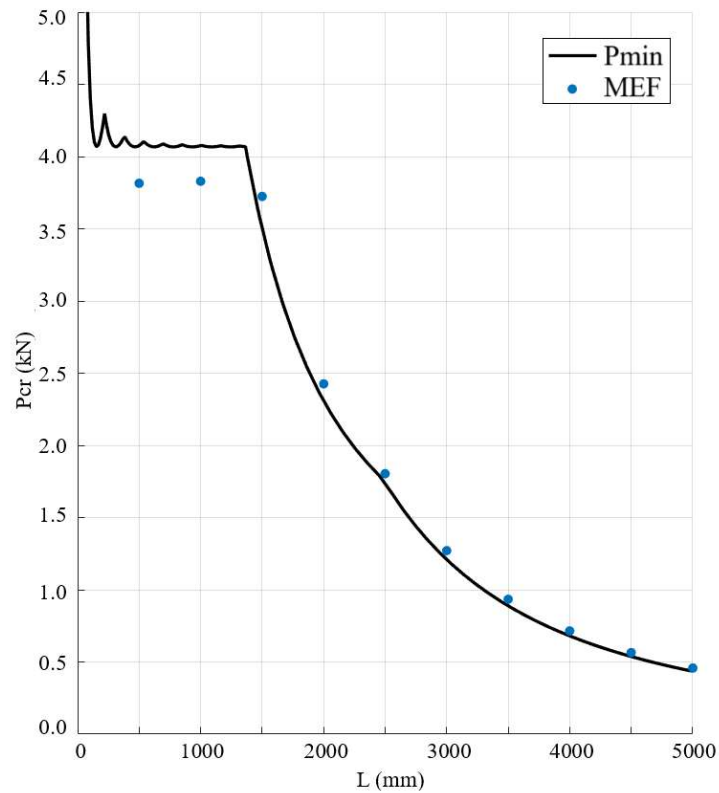
Figura 28 – Curva de assinatura e resultados MEF para o *layup* L2.

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 29 – Curva de assinatura e resultados MEF para o *layup* L3.

Fonte: elaborado pelo autor.

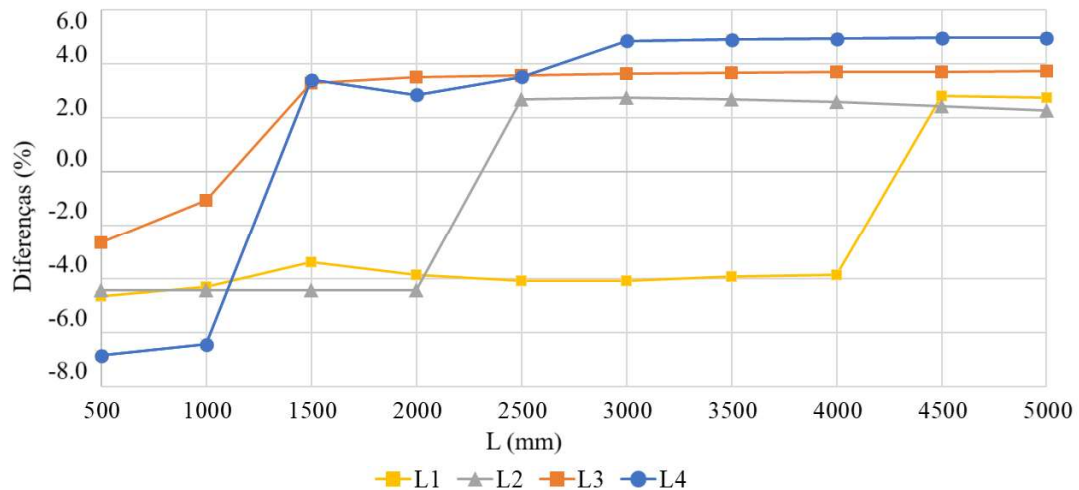
Figura 30 – Curva de assinatura e resultados MEF para o *layup* L4.



Fonte: Elaborado pelo autor.

No geral, houve boa concordância entre os resultados. Para o *layup* L1, foram observados os resultados mais próximos, seguido do *layup* L2. Ambos também apresentaram as menores cargas de flambagem local. O *layup* L1 apresentou a carga carga de flambagem local, seguido da maior faixa de comprimento até a transição para modos globais. A Figura 31 ilustra graficamente as diferenças percentuais.

Figura 31 – Diferenças percentuais entre laminações.

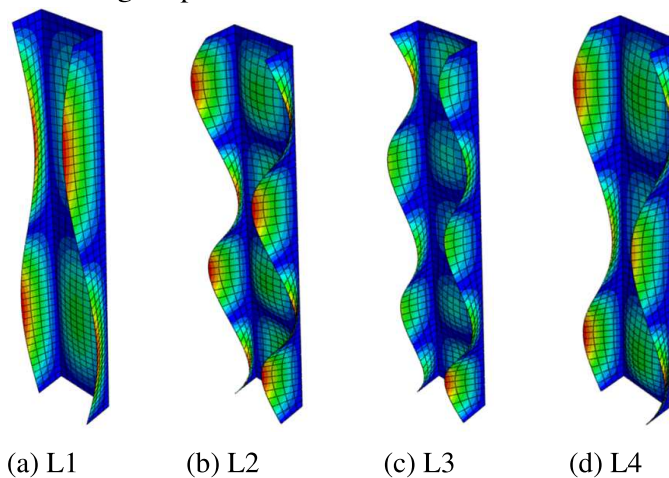


Fonte: elaborado pelo autor.

As diferenças percentuais entre as cargas obtidas pelo método de Rayleigh-Ritz e o MEF ao longo da curva estão representadas graficamente na Figura 31. Os *layups* L3 e L4 apresentaram maior distância entre as curvas e os resultados via MEF, ambos com a solução do Método de Rayleigh-Ritz superior aos valores obtidos pelo Método dos Elementos Finitos. O *layup* L3 apresentou a maior carga local, bem como o menor intervalo em comprimento, seguindo de um modo por flexo-torção e uma transição para flexão por volta do comprimento de 1300 mm. O mesmo comportamento foi observado para o *layup* L4, no qual há transição de flexo-torção para flexão por volta de 2500 mm.

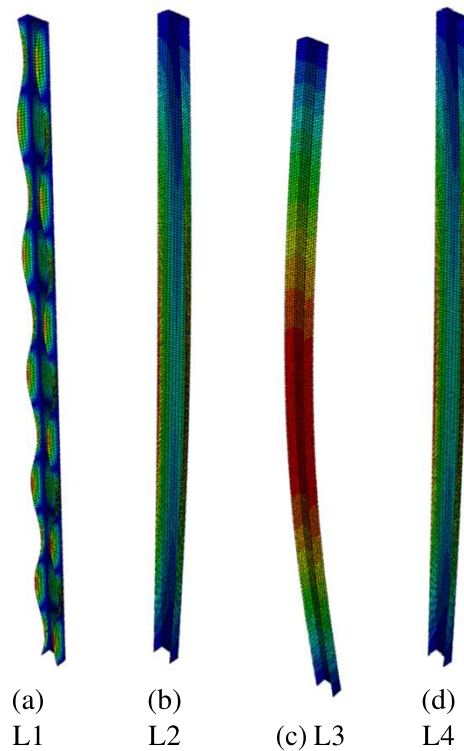
Para os comprimentos de 500 mm, ambas as colunas apresentaram modos de flambagem local, divergindo apenas no número de meias ondas, conforme observado durante a etapa de confecção das curvas de flambagem local, onde L2 e L3 exibiram mais meias ondas. Para comprimentos de 2500 mm, L1 apresentou modo de flambagem local, enquanto L2 e L4 mostraram flambagem por flexo-torção, e L3 apresentou flambagem global por flexão no menor eixo de inércia. Os modos de flambagem de cada *layup* são apresentados na Figura 32 e 33.

Figura 32 – Modos de flambagem para colunas de 500 mm.



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 33 – Modos de flambagem para colunas de 2500 mm.



Fonte: elaborado pelo autor.

### 5.3 Estudo Paramétrico

Nesta seção serão apresentados estudos para avaliar a influência da espessura e geometria do perfil na curva de assinatura. Este estudo é fundamental para entender como a alteração na quantidade de lâminas afeta a resistência e a estabilidade do perfil. Os resultados variando a espessura ( $h$ ), e conseqüentemente o número de lâminas ( $n$ ), serão comparados com o trabalho de D'Aguiar (2017). Também será analisada a influência da geometria da alma ( $b_w$ ) e dos flanges ( $b_f$ ), mantendo-se constante o consumo de material. São apresentadas diferentes curvas para valores de  $(b_w/b_f)$ .

#### 5.3.1 Influência da espessura

Comparando os resultados com o trabalho de D'Aguiar (2017), observa-se que à medida que a espessura aumenta, a carga crítica de flambagem local cresce consideravelmente. A Tabela 9 apresenta as cargas críticas e as diferenças percentuais para diferentes números de lâminas ( $n$ ) e espessuras ( $h$ ).

Tabela 9 – Cargas Críticas e Diferenças Percentuais para diferentes números de lâminas ( $n$ ) e espessuras ( $h$ ).

<i>Layup</i>	$n$	$h$ (mm)	<i>Pcr,local</i> (N)		<i>Diferenças</i>
			<i>D'Aguiar</i> (2017)	<i>Método de</i> <i>Rayleigh-</i> <i>Ritz</i>	
$[(0.90.0.90)]_s$	8	1.048	2274,50	2319,6	2,0%
$[(0.90.0.90)_2]_s$	16	2.096	18703,00	19263,7	3,0%
$[(0.90.0.90)_3]_s$	24	3.133	61930,00	65445,6	5,7%
$[(0.90.0.90)_4]_s$	32	4.192	143892,00	155440,1	-8,0%
$[(0. - 45.45.90)]_s$	8	1.048	2972,50	2953,2	-0,6%
$[(0. - 45.45.90)_2]_s$	16	2.096	27828,00	30006,6	7,8%
$[(0. - 45.45.90)_3]_s$	24	3.133	92641,00	101553,3	9,6%
$[(0. - 45.45.90)_4]_s$	32	4.192	210980,00	243662,1	15,5%

Fonte: elaborado pelo autor.

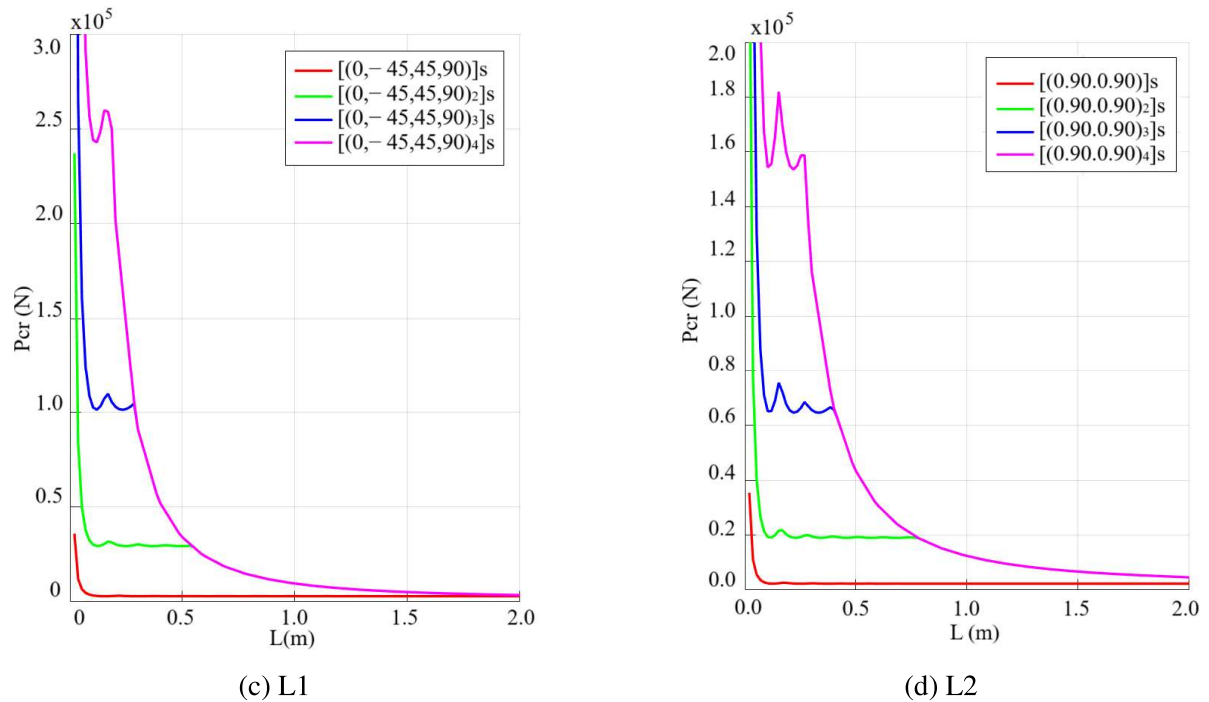
Para a configuração  $[(0.90.0.90)]_s$ , o aumento da carga crítica de flambagem local de 8 para 16 lâminas foi de 2319,6 N para 19263,7 N, representando um aumento de aproximadamente 747,3%. De 16 para 24 lâminas, a carga crítica aumentou de 19263,7 N para 65445,6 N, o que equivale a um aumento de cerca de 239,8%. De 24 para 32 lâminas, a carga crítica aumentou de 65445,6 N para 155440,1 N, um incremento de aproximadamente 137,4%.

Para a configuração  $[(0. - 45.45.90)]_s$ , o aumento da carga crítica de flambagem local de 8 para 16 lâminas foi de 2953,2 N para 30006,6 N, representando um aumento de aproximadamente 915,4%. De 16 para 24 lâminas, a carga crítica aumentou de 30006,6 N para 101553,3 N, o que equivale a um aumento de cerca de 238,4%. De 24 para 32 lâminas, a carga crítica aumentou de 101553,3 N para 243662,1 N, um incremento de aproximadamente 139,9%.

Os resultados apresentados para configurações mais espessas mostraram maior divergência entre os valores obtidos pelo Método de Rayleigh-Ritz e os apresentados por D'Aguiar (2017), apresentando -8,0% para  $[(0.90.0.90)_4]_s$  e 15,5% para  $[(0. - 45.45.90)_4]_s$ . Esta diferença pode ser justificada pela natureza dos métodos utilizados. A formulação baseada no Método de Rayleigh-Ritz foi desenvolvida considerando a Teoria Clássica da Laminação, que não considera o efeito do cisalhamento transversal.

Por outro lado, D'Aguiar (2017) utilizou elementos finitos de casca de 8 nós baseados na Teoria de Reissner-Mindlin, que considera o efeito do cisalhamento transversal, resultando em menores valores de carga crítica para laminados mais espessos.

Figura 34 – Curvas de assinatura para os *layups* L1 e L2 em função do número de lâminas.



Fonte: elaborado pelo autor.

A Figura 34 mostra que, à medida que a espessura da coluna aumenta, há um ganho substancial na capacidade de carga para flambagem local. Por outro lado, para os modos globais, a diferença não foi significativa. Essa variação nos modos de flambagem destaca a importância de considerar tanto os modos locais quanto globais, pois a adição de mais lâminas pode influenciar não apenas a capacidade de carga, mas também o comportamento das colunas.

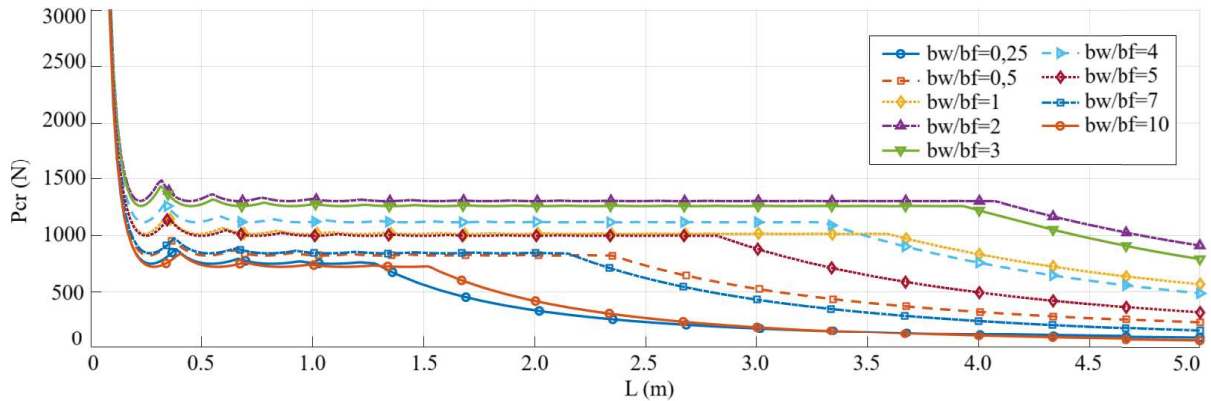
### 5.3.2 Comprimento da alma e flanges

Nesta seção serão apresentados os resultados da análise paramétrica que considera variações no comprimento da alma e do flange de perfis estruturais de seção C. As seções anteriores adotaram perfis com 80 mm de alma e 40 mm de flange (80x40 mm), com um perímetro de seção de 160 mm. Para garantir a comparabilidade dos resultados, todas as seções subsequentes mantiveram o mesmo consumo de material.

A análise considerou diferentes razões  $b_w/b_f$ , onde  $b_w$  é a largura da alma e  $b_f$  é a largura da flange. As razões selecionadas foram: 0.25 (71.1x17.8 mm), 0.5 (32x64 mm), 1 (53x53 mm), 2 (80x40 mm), 5 (106x27 mm), 6 (144x23 mm) e 10 (133x14 mm). Para cada uma dessas configurações de perfil, foram adotadas quatro diferentes laminações: L1  $[0^\circ]_8$ , L2  $[(0^\circ/90^\circ)_2]_s$ , L3  $[(45^\circ/-45^\circ)_2]_s$ , L4  $[30^\circ/-30^\circ]_4$  e L5  $[45^\circ/-45^\circ/90^\circ/0^\circ]_s$ . As Figuras 35, 36, 37 e

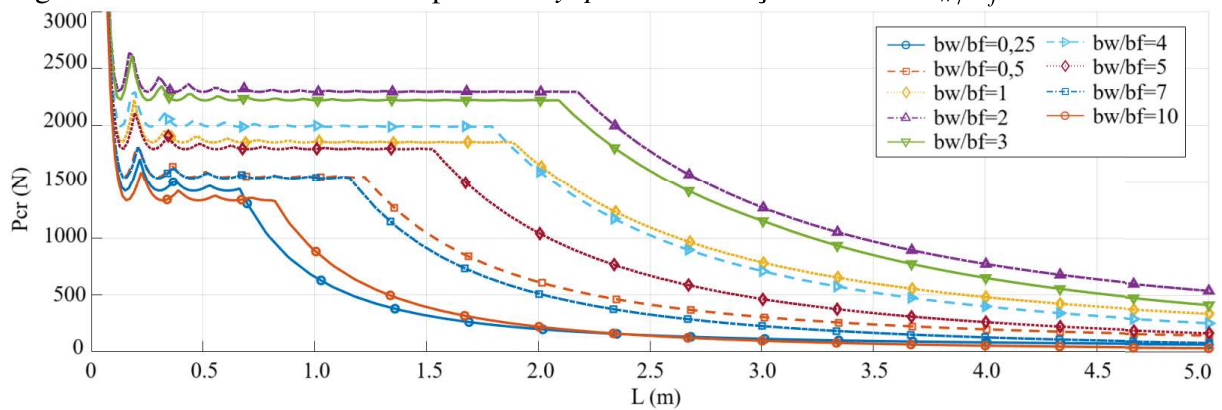
38 ilustram essas variações para os diferentes *layups* analisados.

Figura 35 – Curvas de assinatura para os *layups* L1 em função da razão  $b_w/b_f$ .



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 36 – Curvas de assinatura para os *layups* L2 em função da razão  $b_w/b_f$ .

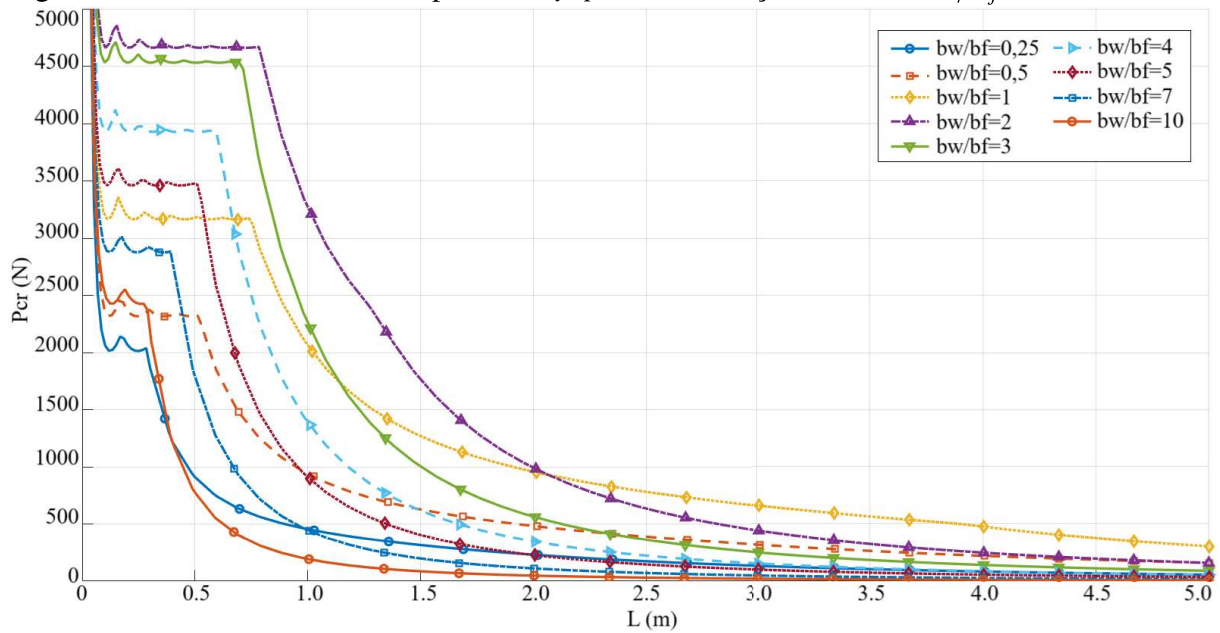


Fonte: elaborado pelo autor.

Percebeu-se que, à medida que a razão  $b_f/b_w$  aumenta, a curva de assinatura muda, variando a magnitude das cargas de flambagem e os comprimentos de coluna que correspondem às transições entre os modos de flambagem local e global.

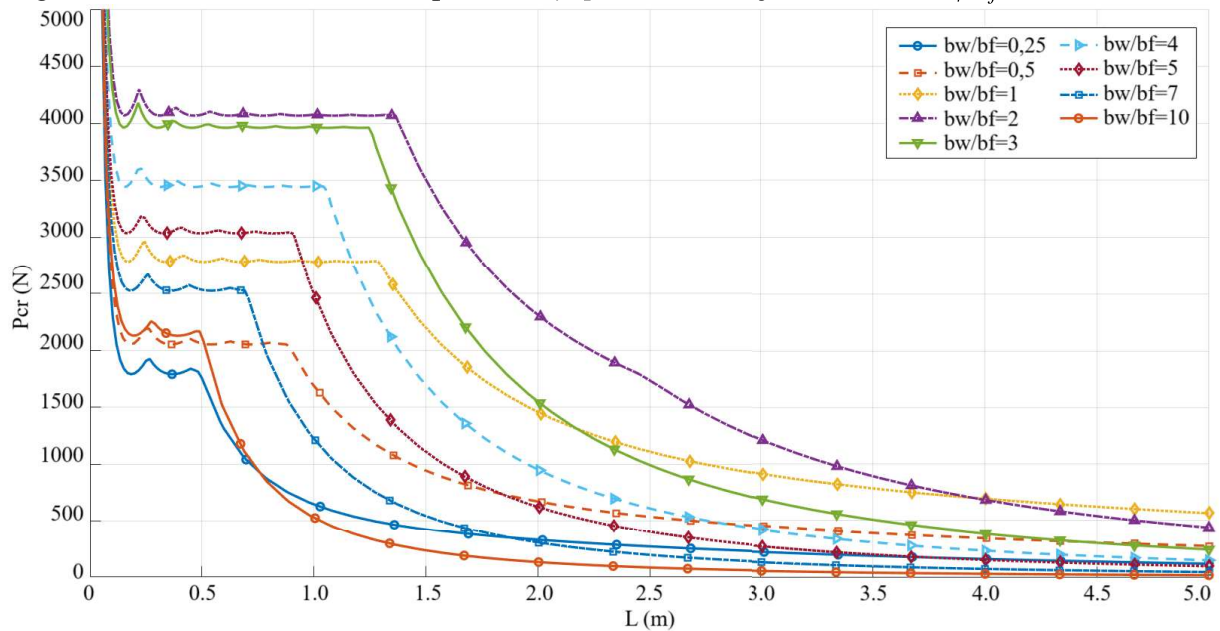
Para os comprimentos analisados, a razão  $b_w/b_f = 2$  apresentou os melhores resultados para as laminações L1 e L2. Nas laminações L3 e L4, a razão  $b_w/b_f = 3$  apresentou cargas superiores nos modos de flambagem global para comprimentos de 2 metros e 4 metros, respectivamente.

Figura 37 – Curvas de assinatura para os *layups* L3 em função da razão  $b_w/b_f$ .



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 38 – Curvas de assinatura para os *layups* L4 em função da razão  $b_w/b_f$ .



Fonte: elaborado pelo autor.

Aumentando a razão  $b_w/b_f$ , até certo ponto há um aumento das cargas que correspondem à flambagem global de flexo-torção e flexão, mas após esse ponto há uma diminuição das cargas. Para as seções analisadas, a razão máxima foi  $b_w/b_f = 2$ . Para valores superiores a esse, percebeu-se que houve um encurtamento da faixa de flambagem local, bem como uma redução das cargas de flambagem globais.

Com o acréscimo na alma seguido da redução dos flanges, as cargas de flambagem dos flanges aumentam, enquanto as cargas de flambagem da alma diminuem, até que a flambagem local passe a ocorrer na alma. É válido reforçar que, para um mesmo comprimento de alma e flange, a alma apresenta cargas superiores devido às diferentes condições de contorno consideradas na análise da placa. Esse comportamento pode ser exemplificado pelas curvas que correspondem às razões  $b_w/b_f = 0.25$  e  $b_w/b_f = 10$ , a menor e maior razão analisadas.

Em contrapartida, o aumento da alma em relação ao flange resultou em um acréscimo da carga de flambagem global de torção e redução da flambagem global de flexão, visto que a mudança na geometria modifica algumas propriedades, por exemplo: reduz a inércia da seção menos solicitada onde a flambagem global de flexão ocorre, redução do raio de giração e a redução da distância ao centro de cisalhamento. Esse comportamento também pode ser exemplificado pelas curvas que correspondem às razões  $b_w/b_f = 0.25$  e  $b_w/b_f = 10$ , onde a menor razão apresentou cargas de flambagem global de flexão superiores para a maioria dos comprimentos representados.

## 6 CONCLUSÃO

Este trabalho aborda o estudo da estabilidade de colunas de material compósito laminado reforçado por fibras, especificamente de seção C, submetidas à compressão centrada. São apresentadas formulações que permitem avaliar a resposta desses elementos com relação aos fenômenos de flambagens locais e globais de flexo-torção e flexão. O Método de Rayleigh-Ritz foi utilizado para desenvolver uma metodologia simples e eficiente para determinação das curvas de assinatura com a carga crítica em função do comprimento da coluna.

No estudo da flambagem local, foram apresentados resultados numéricos obtidos pelo Método dos Elementos Finitos, Rayleigh-Ritz com um grau de liberdade e Rayleigh-Ritz com dois graus de liberdade. Esses resultados foram comparados com os resultados experimentais e numéricos de Debski et al. (2013) e com os resultados numéricos de D'Aguiar (2017). Todos os métodos apresentaram bons resultados quando comparados com outras metodologias, sendo o Rayleigh-Ritz com dois graus de liberdade adotado devido à sua precisão e capacidade de análise, especialmente na confecção das curvas de assinatura. Este método mostrou-se eficaz na previsão das cargas críticas de flambagem local.

Posteriormente, foi desenvolvida uma formulação para o cálculo da carga crítica de colunas laminadas simplesmente apoiadas utilizando o Método de Rayleigh-Ritz e as propriedades equivalentes da coluna laminada. Foram analisadas as teorias de Cardoso (1999), Massa e Barbero (1998), e Kollár e Pluzsik (2002) na obtenção das propriedades do laminado equivalente. Todas apresentaram boa concordância com resultados obtidos pelo Método dos Elementos Finitos. Para as curvas de assinatura, optou-se por adotar a metodologia de Massa e Barbero (1998) devido aos resultados apresentarem boa concordância e menor complexidade quando comparada com a teoria proposta por Kollár e Pluzsik (2002).

Com relação à avaliação de diferentes laminações, a configuração  $[0]_8$ , apresentou a menor carga de flambagem local. A curva de assinatura para esta laminação mostrou que, apesar da menor resistência inicial, manteve um comportamento previsível e linear até a transição para a flambagem global, que ocorreu em comprimentos maiores que os outras laminações analisadas, indicando maior faixa de comprimentos suscetíveis à flambagem local. A laminação  $([0, 90]_2)_s$  apresentou as maiores cargas de flambagem global.

A laminação *angle-ply*  $([45, -45]_2)_s$ , demonstrou a maior carga crítica de flambagem local. A curva de assinatura mostrou um decréscimo considerável da carga crítica nos modos de flambagem globais com o aumento do comprimento em relação às outras laminações. Esta

laminação apresentou uma carga crítica a flambagem local elevada, mas a complexidade dos modos de deformação fez com que a transição entre modos de flambagem fosse mais pronunciada, resultando em maiores variações nos resultados numéricos.

A laminação  $[30/-30]_4$  apresentou uma carga crítica de flambagem local intermediária entre as laminações  $[0]_8$  e  $[45/-45/90/0]_8$ . A curva de assinatura indicou uma boa capacidade de previsão das cargas críticas de flambagem local e em significativo decréscimo das cargas críticas de flambagem global à medida que o comprimento aumenta.

De modo geral, as análises realizadas mostraram que a escolha da laminação influencia significativamente a capacidade de carga e o comportamento de flambagem das colunas laminadas. Os resultados obtidos fornecem uma base para decisões de projetos e a análise de colunas laminadas, permitindo a aplicação de critérios de projeto mais rigorosos e seguros. Ao comparar os diferentes laminações, verificou-se que a configuração *cross-ply* apresentou a menor variação percentual entre os resultados numéricos e experimentais, destacando-se pela precisão na previsão das cargas críticas. A laminação *angle-ply* antissimétrica apresentou maior resistência a flambagem local, mas com variações mais significativas nos modos de flambagem globais.

A análise das curvas de assinatura indicou capacidade de representar bem todas laminações e os modos de flambagem, com cada configuração apresentando vantagens específicas dependendo do comprimento e das condições de carga. Isto indica o interesse e necessidade em desenvolver análises mais detalhadas, visto que as análises realizadas mostraram que a escolha da laminação influencia significativamente a capacidade de carga e o comportamento de flambagem das colunas laminadas.

A análise paramétrica das espessuras mostrou que o aumento do número de lâminas leva à um aumento substancial da carga crítica de flambagem local. No entanto, observou-se que aumentar o número de lâminas altera o formato da curva e pode mudar também o modo de flambagem. Não houve mudança significativa no modo de flambagem global. Embora aumentar a espessura possa melhorar a capacidade de carga, também aumenta o custo da coluna e afeta os seus modos de flambagem.

Ao considerar diferentes geometrias de mesmo consumo de material, variando a razão entre alma e flange, constatou-se que até um determinado ponto há ganhos substanciais na carga crítica para flambagem global e local. Contudo, além desse ponto, há um decréscimo em ambas as cargas, correspondendo a uma nova configuração de curva de assinatura. Este

comportamento destaca o interesse em investigar o comportamento de determinadas seções antes de fazer a adoção de uma seção e indica o potencial para o uso de técnicas de otimização no projeto destas colunas.

As análises realizadas neste trabalho utilizando o Método de Rayleigh-Ritz auxiliaram na confecção de curvas que contribuíram para uma melhor compreensão dos fenômenos de instabilidade e do comportamento de colunas de material compósito reforçado por fibras. Os resultados obtidos fornecem uma base sólida para o projeto e a análise de colunas laminadas, permitindo a aplicação de critérios de projeto mais rigorosos e seguros.

### 6.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

A partir do presente trabalho e do conhecimento adquirido no desenvolvimento do mesmo, pode-se sugerir os seguintes trabalhos a serem desenvolvidos:

- a) Avaliar a implementação de mais termos nas funções aplicadas no Método de Rayleigh-Ritz, de modo a representarem mais graus de liberdade e quantificar a capacidade que o acréscimo de graus de liberdade pode influenciar na previsão dos resultados. A inclusão de mais termos pode melhorar a precisão das análises, especialmente para estruturas mais complexas.
- b) Estudar a interação das flambagens local e global. A interação entre diferentes modos de flambagem pode revelar comportamentos estruturais não triviais, essenciais para o desenvolvimento de modelos de projetos mais robustos.
- c) Estudar a influência de outros fenômenos como a flambagem lateral torsional em colunas laminadas de material compósito reforçado por fibras. Este fenômeno pode ser crítico em aplicações onde as colunas estão sujeitas a cargas excêntricas ou momentos de flexão.
- d) Investigar o comportamento, resistência e desempenho de outros perfis laminados de material compósito reforçado com fibra, incluindo outras condições de apoio. A análise de diferentes perfis e condições de apoio pode ampliar a aplicabilidade dos métodos desenvolvidos, fornecendo diretrizes para uma variedade maior de situações práticas.
- e) Utilizar métodos de análise não linear para avaliar o comportamento pós-crítico dessas colunas e a sensibilidade a imperfeições geométricas iniciais. A análise não linear pode fornecer *insights* sobre a capacidade de carga residual e o comportamento após a ocorrência de flambagem, crucial para o projeto de estruturas seguras e eficientes.

## REFERÊNCIAS

- ÁDÁNY, S. Signature curve for general thin-walled members. *In: ANNUAL STABILITY CONFERENCE*, 2018, Baltimore. **Proceedings** [...]. Baltimore: Structural Stability Research Council, 2018.
- AKBULUT, H.; GUNDOGDU, O.; ŞENGÜL, M. Buckling behaviors of laminated composite stepped flat columns. **Finite Elements in Analysis and Design**, [S. l.], v. 46, n. 12, p. 1061–1067, 2010.
- BANK, L. C. **Composites for construction: structural design with FRP materials**. [S. l.]: John Wiley & Sons, 2006.
- BARBERO, E. J. Beam-column design equations for wide-flange pultruded structural shapes. **Journal of Composites for Construction**, [S. l.], v. 3, n. 4, p. 185–191, 1999.
- BARBERO, E. J. Strategic learning of simulation and functional analysis in the design and assembly of mechanisms with cad on a professional master's degree course. **Computer Applications in Engineering Education**, [S. l.], v. 19, n. 1, p. 146–160, 2011. Disponível em: . Acesso em: dia mês. ano.
- BARBERO, E. J. **Introduction to composite materials design**. [S. l.]: CRC press, 2010.
- BARBERO, E. J.; TOMBLIN, J. A phenomenological design equation for frp columns with interaction between local and global buckling. **Thin-Walled Structures**, [S. l.], v. 18, n. 2, p. 117–131, 1994.
- BARBERO, E. J.; DEDE, E. K.; JONES, S. Experimental verification of buckling-mode interaction in intermediate-length composite columns. **International Journal of Solids and Structures**, [S. l.], v. 37, n. 29, p. 3919–3934, 2000.
- BATISTA, E. de M. Modelling buckling interaction. *In: Phenomenological and Mathematical Modelling of Structural Instabilities*. [S. l.]: Springer, 2005. p. 135–194.
- BENMOKRANE, B. et al. Mechanical and bond properties of new generation of carbon fibre reinforced polymer reinforcing bars for concrete structures. **Canadian Journal of Civil Engineering**, Ottawa, v. 29, n. 2, p. 338–343, 2002.
- CALLISTER, W. **Ciência e engenharia de materiais: uma introdução**. [S. l.]: Grupo Gen-LTC, 2000.
- CAMOTIM, D. et al. Latest developments in the gbt analysis of thin-walled steel structures. *In: INTERNATIONAL COLLOQUIUM ON STABILITY AND DUCTILITY OF STEEL STRUCTURES*, 2010, Rio de Janeiro. **Proceedings** [...]. Rio de Janeiro: [s. n.], 2010. p. 8–10.
- CARDOSO, D. C.; HARRIES, K. A.; BATISTA, E. d. M. Closed-form equations for compressive local buckling of pultruded thin-walled sections. **Thin-Walled Structures**, [S. l.], v. 79, p. 16–22, 2014.

CARDOSO, D. C.; HARRIES, K. A.; BATISTA, E. d. M. Compressive local buckling of pultruded gfrp i-sections: development and numerical/experimental evaluation of an explicit equation. **Journal of Composites for Construction**, [S. l.], v. 19, n. 2, p. 04014042, 2015.

CARDOSO, D. C. T. **Compressive strength of pultruded glass-fiber reinforced polymer (grfp) columns**. 2014. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

CEDOLIN, L.; BAZANT, Z. **Stability of structures**. [S. l.]: Oxford University Press, 1991.

CHAJES, A. **Principles of structural stability theory**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1974.

COOK, R. D. et al. **Concepts and applications of finite element analysis**. [S. l.]: John Wiley & Sons, 2007.

D'AGUIAR, S. C. M. **Estabilidade de colunas de material compósito reforçado por fibras**. 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017.

DANIEL, O. I. I. M. **Engineering mechanics of composite materials**. [S. l.]: Oxford University Press, 2006.

DEBSKI, H.; KUBIAK, T.; TETER, A. Buckling and postbuckling behaviour of thin-walled composite channel section column. **Composite Structures**, [S. l.], v. 100, p. 195–204, 2013.

DEBSKI, H.; KUBIAK, T.; TETER, A. Experimental investigation of channel-section composite profiles' behavior with various sequences of plies subjected to static compression. **Thin-Walled Structures**, [S. l.], v. 71, p. 147–154, 2013.

DEBSKI, H. et al. Numerical models for buckling, postbuckling and failure analysis of pre-damaged thin-walled composite struts subjected to uniform compression. **Thin-Walled Structures**, [S. l.], v. 139, p. 53–65, 2019.

HOFF, N. A strain energy derivation of the torsional-flexural buckling loads of straight columns of thin-walled open sections. **Quarterly of Applied Mathematics**, [S. l.], v. 1, n. 4, p. 341–345, 1944.

HOFF, N. **The Analysis of Structures**. New York: John Wiley & Sons Inc., 1956.

JONES, R. M. **Mechanics of composite materials**. 2. ed. Philadelphia: Taylor & Francis, 1999.

KAW, A. K. **Mechanics of composite materials**. [S. l.]: CRC press, 2005.

KOLLÁR, L. P. Local buckling of fiber reinforced plastic composite structural members with open and closed cross sections. **Journal of Structural Engineering**, [S. l.], v. 129, n. 11, p. 1503–1513, 2003.

KOLLÁR, L. P. Buckling of rectangular composite plates with restrained edges subjected to axial loads. **Journal of Reinforced Plastics and Composites**, London, v. 33, n. 23, p. 2174–2182, 2014.

KRAUTHAMMER, T.; VENTSEL, E. **Thin plates and shells: theory, analysis and applications**. New York: Marcel Dekker Inc., 2001.

LAZZARI, J. A. D. **Distortional-Global Interaction in Cold-Formed Steel Lipped Channel Columns: Buckling Analysis, Structural Behavior And Strength**. 2020. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

LAZZARI, J. A. de. **Comportamento da interação entre modos de flambagem distorcional-global em colunas de aço de perfis Ue formados a frio**. 2019. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

LEISSA, A.; QATU, M. Vibration of continuous systems. **Journal of Sound and Vibration**, [S. l.], v. 287, n. 4-5, p. 961–978, 2005.

LOPEZ, R.; LUERSEN, M.; CURSI, E. Optimization of laminated composites considering different failure criteria. **Composites Part B: Engineering**, [S. l.], v. 40, n. 8, p. 731–740, 2009.

MATZENMILLER, A.; LUBLINER, J.; TAYLOR, R. L. A constitutive model for anisotropic damage in fiber-composites. **Mechanics of Materials**, [S. l.], v. 20, n. 2, p. 125–152, 1995.

MOTTRAM, J. 6.2 Calculation of the critical local buckling load in pfrp shapes. *In*: INTERNATIONAL CONFERENCE ON ADVANCED POLYMER COMPOSITES FOR STRUCTURAL APPLICATIONS IN CONSTRUCTION, 2002, Southampton. **Proceedings** [...]. London: Thomas Telford Publishing, 2002. p. 337.

NECKÁR, J. et al. Cardioprotective effect of chronic hypoxia is blunted by concomitant hypercapnia. **Physiol. Res**, [S. l.], v. 52, n. 2, p. 171–175, 2003.

NUNES, F.; SILVESTRE, N.; CORREIA, J. R. Structural behaviour of hybrid frp pultruded columns. part 2: Numerical study. **Composite Structures**, [S. l.], v. 139, p. 304–319, 2016.

PECCE, M.; MANFREDI, G.; COSENZA, E. Experimental response and code models of gfrp rc beams in bending. **Journal of Composites for Construction**, [S. l.], v. 4, n. 4, p. 182–190, 2000.

PERSOONE, G. et al. A practical and user-friendly toxicity classification system with microbiotests for natural waters and wastewaters. **Environmental Toxicology: An International Journal**, [S. l.], v. 18, n. 6, p. 395–402, 2003. Disponível em: . Acesso em: dia mês. ano.

PIERIN, I. et al. **Estudo de estabilidade de perfis pultrudados de materiais prfv**. Florianópolis: UFSC, 2005.

PIETROPAOLI, E. Progressive failure analysis of composite structures using a constitutive material model (usermat) developed and implemented in ansys©. **Applied Composite Materials**, [S. l.], v. 19, n. 3-4, p. 657–668, 2012.

QIAO, P.; DAVALOS, J. F.; WANG, J. Local buckling of composite frp shapes by discrete plate analysis. **Journal of Structural Engineering**, [S. l.], v. 127, n. 3, p. 245–255, 2001.

RAUCH, H.; SUTTON, W.; MCCREIGHT, L. **The fabrication, testing and application of fiber-reinforced materials: a survey**. [S. l.]: Space Sciences Laboratory, General Electric Co., 1968. (Technical Report AFMLTR-68-162).

REDDY, J. N. **Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis**. [S. l.]: CRC press, 2003.

SANKAR, B. V. Beam theory for laminated composites and application to torsion problems. **J. Appl. Mech. ASME**, [S. l.], v. 63, p. 570–574, 1996.

SCHOBER, K.-U. et al. Frp reinforcement of timber structures. **Construction and Building Materials**, [S. l.], v. 97, p. 106–118, 2015.

SHAN, L. et al. Identification and analysis of multivalent proteolytically resistant peptides from gluten: implications for celiac sprue. **Journal of Proteome Research**, [S. l.], v. 4, n. 5, p. 1732–1741, 2005.

SOUZA, F. S. de. **Influência de Temperaturas Elevadas no Comportamento à Flexão de Compósitos Poliméricos Pultrudados Reforçados com Fibra de Vidro (PRFV)**. 2017. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

TURVEY, G.; ZHANG, Y. A computational and experimental analysis of the buckling, postbuckling and initial failure of pultruded grp columns. **Computers & Structures**, [S. l.], v. 84, n. 22-23, p. 1527–1537, 2006.

VINSON, J. **The Behavior of Sandwich Structures of Isotropic and Composite Materials**. [S. l.]: CRC Press, 1999.

VIOLEAU, D.; LADEVÈZE, P.; LUBINEAU, G. Micromodel-based simulations for laminated composites. **Composites Science and Technology**, [S. l.], v. 69, n. 9, p. 1364–1371, 2009.

WHITNEY, J. M.; NUISMER, R. G. Analysis of orthotropic laminated plates subjected to torsional loading. **Composites Engineering**, [S. l.], v. 6, n. 4, p. 680–697, 1995.

YOUNG, B.; RASMUSSEN, K. J. Design of lipped channel columns. **Journal of Structural Engineering**, [S. l.], v. 124, n. 2, p. 140–148, 1998.