



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**JOSÉ TIAGO MOTA CRISPIM**

**PROPRIEDADES DE OBJETOS COMPACTOS REGULARES NA RELATIVIDADE  
GERAL E TEORIAS MODIFICADAS DE GRAVITAÇÃO**

**FORTALEZA  
2025**

JOSÉ TIAGO MOTA CRISPIM

PROPRIEDADES DE OBJETOS COMPACTOS REGULARES NA RELATIVIDADE  
GERAL E TEORIAS MODIFICADAS DE GRAVITAÇÃO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física.  
Área de Concentração: Física.

Orientador: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

Coorientador: Dr. Marcos Vinicius de Sousa Silva.

FORTALEZA  
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária

---

- C949p Crispim, José Tiago Mota.  
Propriedades de objetos compactos regulares na Relatividade Geral e Teorias modificadas de Gravitação / José Tiago Mota Crispim. - 2025.  
121 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2025.  
Orientação: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.  
Coorientação: Dr. Marcos Vinicius de Sousa Silva.
1. Buracos negros. 2. Buracos de minhoca; 3. Regularização. 4 Teorias modificadas. I. Título

CDD 530

---

JOSÉ TIAGO MOTA CRISPIM

PROPRIEDADES DE OBJETOS COMPACTOS REGULARES NA RELATIVIDADE  
GERAL E TEORIAS MODIFICADAS DE GRAVITAÇÃO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física.  
Área de Concentração: Física.

Aprovada em 25/07/2025.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Dr. Marcos Vinicius de Sousa Silva (Coorientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Maurício Richartz  
Universidade Federal do ABC (UFABC)

---

Prof. Dr. Diego Saez Gomez  
Universidade de Valladolid (UVA)

Esta dissertação é dedicada à memória de minha mãe, Eloísa, que faleceu durante o período desse mestrado.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro. Ao meu orientador Dr. Geová Maciel de Alencar Filho, um orientador e um ser humano incrível, que muito me ajudou durante o mestrado, e ao meu coorientador Dr. Marcos Vinicius de Sousa Silva, por vossa disponibilidade em me ajudar. Ao Departamento de Física da UFC, pela oportunidade de estar no mestrado.

Aos meus amigos da sala 15, pela amizade e apoio durante o mestrado. Aos meus amigos e colegas do Labgmc2, pelo apoio.

À minha namorada Alice, pelo amor, apoio e companheirismo. Sua presença tornou tudo mais leve. Por fim, à minha família, em especial ao meu pai Francisco e a minha mãe Eloísa, que infelizmente não pode me acompanhar até o fim do mestrado, mas que continua me inspirando a ser uma pessoa melhor.

## RESUMO

Nesta dissertação, investigamos as propriedades de objetos compactos regulares tanto no contexto da relatividade geral quanto em teorias modificadas da gravitação, com ênfase em buracos de minhoca, geometrias do tipo *black bounce* e soluções na gravitação  $f(R)$ . Inicialmente, estudamos as propriedades geométricas e as fontes de campo associadas a dois modelos de buracos de minhoca: (i) uma generalização da solução de Ellis-Bronnikov e (ii) um novo modelo que admite múltiplas gargantas e antigargantas, discutindo suas características físicas e estrutura causal. Em seguida, exploramos como a métrica de Simpson-Visser - e, de forma mais ampla, outras geometrias regulares cujas fontes são bem definidas na relatividade geral - podem ser reinterpretadas como soluções viáveis em teorias  $f(R)$ , mediante a identificação das correções necessárias nas equações de campo. Por fim, no contexto das geometrias *black bounce*, analisamos os efeitos das forças de maré em diferentes espaços-tempo, destacando como essas estruturas podem, a princípio, ser distinguidas de buracos negros clássicos a partir de observáveis físicos.

**Palavras-chave:** buracos negros; buracos de minhoca; regularização; teorias modificadas.

## ABSTRACT

In this work, we investigate the properties of regular compact objects in the context of both general relativity and modified theories of gravity, with emphasis on wormholes, black bounce geometries, and solutions in  $f(R)$  gravity. We begin by studying the geometric properties and the field sources associated with two wormhole models: (i) a generalization of the Ellis-Bronnikov solution and (ii) a new model that admits multiple throats and anti-throats, discussing their physical features and causal structure. Next, we explore how the Simpson-Visser metric - and, more generally, other regular geometries whose sources are well-defined in general relativity - can be reinterpreted as viable solutions in  $f(R)$  gravity, by identifying the necessary corrections in the corresponding field equations. Finally, in the context of black bounce geometries, we analyze the effects of tidal forces in different spacetimes, highlighting how these structures can, in principle, be distinguished from classical black holes through physical observables.

**Keywords:** black holes; wormholes; regularization; modified theories.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diagrama embutido para o buraco de minhoca EBG com $b_0 = 1$ e diferentes valores de $m$ . . . . .	21
Figura 2 – Velocidade radial para diferentes valores de $m$ , com $b_0 = 1$ . . . . .	23
Figura 3 – Lagrangiana para o caso magnético com $b_0 = 1$ para diferentes valores de $m$ . . . . .	26
Figura 4 – Lagrangiana $L(r)$ para o caso elétrico para diferentes valores de $m$ , com $b_0 = 1$ . . . . .	28
Figura 5 – Campo elétrico para diferentes valores de $m$ , com $b_0 = 1$ . . . . .	29
Figura 6 – Gráfico paramétrico de $z(r)$ vs. $\rho(r)$ mostrando os chamados diagramas de imersão isométricos para diferentes escolhas de parâmetros. Essas curvas se destacam significativamente em comparação com a curva catenária típica do buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov. . . . .	32
Figura 7 – Diagramas de superfície imersa para diferentes escolhas de parâmetros, onde é possível visualizar geometricamente de forma clara a estrutura de múltiplas gargantas e anti-gargantas, diferindo significativamente da superfície catenóide típica do buraco de minhoca de EB. Esses diagramas foram obtidos por rotação das curvas da Fig. 6 em torno do eixo- $z$ . . . . .	33
Figura 8 – Potencial efetivo para geodésicas nulas no fundo do buraco de minhoca descrito pela solução (2.55), em função da coordenada radial para diferentes valores dos parâmetros $b$ , $d$ e $c_3$ . . . . .	34
Figura 9 – Comportamento gráfico das funções $V(\phi(r))$ (painel superior) e $h(\phi(r))$ (painel inferior) em função da coordenada $r$ para diferentes combinações dos parâmetros do buraco de minhoca $d$ , $b$ e $c_3$ e o modelo $\phi = \arctan(r/d)$ . . . . .	39
Figura 10 – Comportamento gráfico das funções $V(\phi)$ (painel superior) e $h(\phi)$ (painel inferior) em função do campo escalar $\phi$ para diferentes combinações dos parâmetros do buraco de minhoca $b$ , $d$ e $c_3$ . . . . .	40
Figura 11 – Comportamento da Lagrangiana eletromagnética $L(r)$ (painel superior) e do invariante escalar eletromagnético $F(r)$ (painel inferior) em função da coordenada $r$ para diferentes combinações dos parâmetros do buraco de minhoca $b$ , $d$ e $c_3$ . . . . .	42

Figura 12 – Comportamento da Lagrangiana eletromagnética $L(F)$ em função do escalar $F$ para diferentes combinações dos parâmetros do buraco de minhoca $b, d$ e $c_3$ .	42
Figura 13 – Comportamento da função $h(\phi(r))$ em função da coordenada $r$ para diferentes combinações dos parâmetros do buraco de minhoca $b, d$ e $c_3$ , e o modelo $\phi = \tanh(r/d)$ .	44
Figura 14 – Comportamento gráfico das funções $V(\phi)$ (painel superior) e $h(\phi)$ (painel inferior) em função do campo escalar $\phi$ para diferentes combinações dos parâmetros do buraco de minhoca $b, d$ e $c_3$ .	45
Figura 15 – Comportamento da densidade de energia $\rho$ (painel inferior) e das combinações $\rho + p_r$ (painel superior) e $\rho + p_t$ (painel do meio) para diferentes parâmetros do buraco de minhoca $b, d$ e $c_3$ .	48
Figura 16 – Comportamento das combinações de pressão $\rho - p_r$ (painel superior) e $\rho - p_t$ (painel inferior) para diferentes parâmetros do buraco de minhoca $b, d$ e $c_3$ .	49
Figura 17 – Comportamento de $f(R)$ em função da coordenada radial (painel esquerdo) e em função do escalar de curvatura (painel direito), fixando $a = m = 1$ e variando os valores do parâmetro $a_1$ .	58
Figura 18 – Comportamento da função $f(R)$ em função da coordenada radial (painel esquerdo) e em função do escalar de curvatura (painel direito), fixando $a = m = 1$ e variando os valores do parâmetro $a_2$ .	60
Figura 19 – Comportamento da função $f(R)$ em função da coordenada radial (painel esquerdo) e em função do escalar de curvatura (painel direito), fixando $a = m = 1$ e variando os valores do parâmetro $a_1$ .	62
Figura 20 – Combinações dos componentes do tensor energia-momento para o modelo $H(R) = a_R R^2$ em função da coordenada radial, com $a = 2$ e $m = 1$ , para diferentes valores do parâmetro $a_R$ .	66
Figura 21 – Combinações dos componentes do tensor energia-momento para o modelo $H_R = a_1 r$ , em função da coordenada radial, para $m = 1, a = 2$ , e diferentes valores de $a_1$ .	68
Figura 22 – Combinação dos componentes do tensor energia-momento para o modelo $H_R = a_2 r^2$ , em função da coordenada radial, para $m = 1, a = 2$ e diferentes valores de $a_2$ .	70

Figura 23 – Combinação dos componentes do tensor energia-momento para o modelo $H_R = a_\Sigma \Sigma$ , em função da coordenada radial, para $m = 1$ , $a = 2$ , e diferentes valores de $a_\Sigma$ . . . . .	73
Figura 24 – Comportamento dos raios do horizonte e do raio da garganta do buraco de minhoca para a solução do tipo Bardeen em função do parâmetro de regularização. Escolhemos $m = 1$ . . . . .	79
Figura 25 – Representação esquemática da base tetrádica associada à partícula no ponto $P$ . Também é mostrado o vetor de deslocamento infinitesimal $\xi^\mu$ entre duas geodésicas vizinhas $x^\mu(\tau)$ e $\tilde{x}^\mu(\tau)$ . . . . .	83
Figura 26 – Força de maré radial em função da coordenada $r$ para diferentes valores de $a$ , fixando $m = 1$ . A linha vertical está localizada em $r = 2m$ . . . . .	87
Figura 27 – Força de maré angular em função da coordenada $r$ para diferentes valores de $a$ , fixando $m = 1$ e $b = 30m$ . A linha vertical está localizada em $r = 2m$ . . . . .	87
Figura 28 – Componentes radial (acima) e tangencial (abaixo) do vetor deslocamento para geodésicas radiais no espaço-tempo de SV em função da coordenada radial para diferentes valores de $a$ . Neste caso, foram usadas as condições de contorno (4.35) com $b = 100$ e $m = 1$ . . . . .	89
Figura 29 – Componentes radial (acima) e tangencial (abaixo) do vetor deslocamento para geodésicas radiais no espaço-tempo de SV em função do parâmetro $a$ para um valor específico da coordenada radial $r = 5$ . Neste caso, foram usadas as condições de contorno (4.35) com $b = 100$ e $m = 1$ . . . . .	90
Figura 30 – Força de maré radial para o BB do tipo Bardeen em função da coordenada $r$ para diferentes valores de $a$ , fixando $m = 1$ . Os pontos quadrados nas curvas representam a posição do horizonte de eventos, enquanto os pontos circulares representam a posição do horizonte de Cauchy. . . . .	93
Figura 31 – Força de maré angular para o BB do tipo Bardeen em função da coordenada $r$ para diferentes valores de $a$ , fixando $m = 1$ e $b = 10m$ . Os pontos quadrados nas curvas representam a posição do horizonte de eventos, enquanto os pontos circulares representam a posição do horizonte de Cauchy. . . . .	93

Figura 32 – Componentes radial (em cima) e tangencial (embaixo) do vetor deslocamento para geodésicas radiais no espaço-tempo do tipo Bardeen em função da coordenada radial para diferentes valores de $a$ . Neste caso, foram usadas as condições de contorno (4.35) com $b = 200$ e $m = 1$ . Os pontos quadrados nas curvas representam a posição do horizonte de eventos, enquanto os pontos circulares representam a posição do horizonte de Cauchy. As posições dos horizontes são mostradas apenas para os casos BB. . . . .	95
Figura 33 – Representação esquemática dos fenômenos de estiramento e compressão que um corpo sofre nas proximidades de um BB do tipo Bardeen (a), comparado ao caso de Schwarzschild (b), onde ocorre apenas o estiramento. . . . .	96
Figura 34 – Força de maré radial para o buraco negro de Schwarzschild com correção por holonomia em função da coordenada $r$ para diferentes valores de $a$ , fixando $m = 1$ . A linha vertical está localizada em $r = 2m$ . . . . .	97
Figura 35 – Força de maré angular para o buraco negro de Schwarzschild com correção por holonomia em função da coordenada $r$ para diferentes valores de $a$ , fixando $m = 1$ e $b = 10$ . A linha vertical está localizada em $r = 2m$ . . . . .	98
Figura 36 – Componentes radial (em cima) e tangencial (embaixo) do vetor deslocamento para geodésicas radiais no buraco negro de Schwarzschild com correção por holonomia em função da coordenada radial para diferentes valores de $a$ . Neste caso, foram usadas as condições de contorno (4.35) com $b = 200$ e $m = 1$ . . . . .	99
Figura 37 – Força de maré radial para o buraco negro polimerizado em função da coordenada $r$ para diferentes valores de $a$ , fixando $m = 1$ . Os pontos circulares representam a posição do horizonte de eventos. . . . .	101
Figura 38 – Força de maré angular para o buraco negro polimerizado em função da coordenada $r$ para diferentes valores de $a$ , fixando $m = 1$ e $b = 10m$ . Os pontos circulares representam a posição do horizonte de eventos. . . . .	101
Figura 39 – Componentes radial (acima) e tangencial (abaixo) do vetor deslocamento para geodésicas radiais no buraco negro polimerizado em função da coordenada radial para diferentes valores de $a$ . Neste caso, foram usadas as condições de contorno (4.35) com $b = 100$ e $m = 1$ . . . . .	103

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>SOLUÇÕES DE BURACOS DE MINHOCA EM RELATIVIDADE GERAL</b>	<b>18</b>
<b>2.1</b>	<b>Buraco de Minhoca de Ellis-Bronnikov Generalizado (EBG)</b>	<b>20</b>
<b>2.1.1</b>	<i>Características gerais</i>	20
<b>2.1.2</b>	<i>Acreção de poeira</i>	21
<b>2.1.3</b>	<i>Fonte Magnética</i>	23
<b>2.1.4</b>	<i>Fonte elétrica</i>	27
<b>2.2</b>	<b>Buraco de Minhoca com Múltiplas Gargantas/Anti-gargantas</b>	<b>28</b>
<b>2.2.1</b>	<i>Características gerais</i>	28
<b>2.2.2</b>	<i>Geodésicas</i>	32
<b>2.2.3</b>	<i>Fontes de campo magnéticas</i>	35
<b>2.2.3.1</b>	<i>Modelo 1</i>	38
<b>2.2.3.2</b>	<i>Modelo 2</i>	43
<b>2.2.4</b>	<i>Condições de Energia</i>	44
<b>3</b>	<b>BLACK BOUNCES COMO SOLUÇÕES DE TEORIAS <math>f(R)</math></b>	<b>50</b>
<b>3.1</b>	<b>Fontes de Campo de Black bounce em teorias <math>f(R)</math></b>	<b>50</b>
<b>3.1.1</b>	<i>Aspectos Gerais</i>	51
<b>3.1.2</b>	<i>Caso I: <math>H(R) = a_R R^2</math></i>	54
<b>3.1.3</b>	<i>Caso II: <math>H_R(R(r)) = a_1 r</math></i>	56
<b>3.1.4</b>	<i>Caso III: <math>H_R(R(r)) = a_2 r^2</math></i>	58
<b>3.1.5</b>	<i>Caso IV: <math>H_R(R(r)) = a_\Sigma \Sigma</math></i>	60
<b>3.2</b>	<b>Condições de Energia</b>	<b>62</b>
<b>3.2.1</b>	<i>Caso I</i>	63
<b>3.2.2</b>	<i>Caso II</i>	65
<b>3.2.3</b>	<i>Caso III</i>	69
<b>3.2.4</b>	<i>Caso IV</i>	72
<b>4</b>	<b>FORÇAS DE MARÉ EM BLACK BOUNCES</b>	<b>75</b>
<b>4.1</b>	<b>Espaço-tempos</b>	<b>76</b>
<b>4.1.1</b>	<i>Espaço-tempo SV</i>	77

4.1.2	<i>Tipo Bardeen</i> . . . . .	78
4.1.3	<i>Correções de holonomia</i> . . . . .	78
4.1.4	<i>Buraco negro polimerizado</i> . . . . .	80
4.2	<b>Geodésicas radiais</b> . . . . .	80
4.3	<b>Equações gerais</b> . . . . .	81
4.3.1	<i>Efeitos das forças de maré em espaços-tempos SV</i> . . . . .	85
4.3.2	<i>Efeitos das forças de maré em BB do tipo Bardeen</i> . . . . .	88
4.3.3	<i>Efeitos das forças de maré no buraco negro com correção por holonomia</i> . .	94
4.3.4	<i>Efeitos das forças de maré no buraco negro polimerizado</i> . . . . .	100
5	<b>CONCLUSÕES</b> . . . . .	104
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	107

## 1 INTRODUÇÃO

A formulação da teoria eletromagnética por James Clerk Maxwell em 1861 unificou os fenômenos elétricos e magnéticos, descrevendo-os quantitativamente por meio do conjunto de equações conhecido como equações de Maxwell. Essas equações não apenas caracterizam os campos elétricos e magnéticos, como também preveem a existência de ondas eletromagnéticas, cuja natureza difere das ondas mecânicas tradicionais, pois são produzidas por variações nos campos eletromagnéticos e propagam-se no vácuo como soluções intrínsecas da teoria. A velocidade de propagação dessas ondas, coincidentemente igual à velocidade da luz, motivou intensas investigações, sugerindo uma conexão fundamental entre fenômenos eletromagnéticos e ópticos. Contudo, a descrição da luz enquanto onda eletromagnética no vácuo conflita com os princípios da mecânica newtoniana clássica, especialmente pela não invariância das equações de Maxwell sob as transformações de Galileu.

Para resolver essa incompatibilidade entre o eletromagnetismo clássico e a mecânica newtoniana, Albert Einstein desenvolveu, em 1905, a *Teoria da Relatividade Especial*, fundamentada em dois postulados: (i) as leis da física, incluindo a óptica e a eletrodinâmica, são invariantes em todos os referenciais inerciais — definidos como sistemas de coordenadas onde partículas livres movem-se com velocidade constante; e (ii) a velocidade da luz no vácuo é constante e independe do movimento da fonte ou do observador [1, 2]. Tais postulados garantiram a invariância das equações de Maxwell e instituíram o princípio da relatividade para referenciais inerciais, superando as limitações da mecânica clássica.

Apesar do sucesso da relatividade especial, esta restringe-se a observadores inerciais. Para incorporar campos gravitacionais e referenciais não inerciais, Einstein generalizou sua formulação, resultando na *Teoria da Relatividade Geral* (RG) em 1915. Essa teoria relativística da gravitação explica fenômenos que a mecânica newtoniana não consegue, como a precessão anômala do periélio de Mercúrio, e prevê novos efeitos físicos, incluindo ondas gravitacionais e buracos negros.

Os Buracos Negros (BN's) emergem como soluções exatas das equações de campo de Einstein no vácuo e assumem papel central na física teórica e astrofísica, uma vez que fornecem modelos para a geometria do espaço-tempo pós-colapso gravitacional. A primeira solução conhecida que descreve um BN foi obtida por Karl Schwarzschild em 1916, considerando uma

distribuição de massa pontual  $M$  com simetria esférica no vácuo.

Formalmente, um BN é definido como uma região do espaço-tempo onde o campo gravitacional é tão intenso que a velocidade de escape mínima excede a velocidade da luz. Assim, o *horizonte de eventos* delimita uma superfície causal que impede que qualquer partícula ou fóton escape uma vez ultrapassada, assegurando trajetórias unidirecionais para dentro do horizonte [3–5]. Tal característica implica a inviabilidade de retorno, sob pena de violação da causalidade.

Essas soluções são fundamentais para a compreensão da geometria do espaço-tempo resultante do colapso gravitacional de objetos compactos, como estrelas massivas ou aglomerados estelares. Nos últimos anos, o estudo de BN's tem sido intensificado pela evolução das técnicas observacionais, evidenciada pela detecção direta de ondas gravitacionais pelo LIGO e VIRGO [6, 7], bem como pelas imagens de sombras de buracos negros supermassivos, consolidando seu papel central na física contemporânea.

Matematicamente, a Teoria da RG, proposta por Einstein, baseia-se na ideia de que o Universo é dotado de  $3 + 1$  dimensões, isto é, uma dimensão temporal e três espaciais, embora seu formalismo permita que suas equações sejam generalizadas de forma simples para mais dimensões. Assim, a Equação de Campo de Einstein diz como geometria e gravidade estão relacionadas, dada por [3–5]:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

onde  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein, que expressa a geometria do espaço e  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento, que descreve o conteúdo de matéria e energia.  $R_{\mu\nu}$  e  $R$  são, respectivamente, o tensor e o escalar de Ricci, obtidos da contração do tensor de Riemann [3]:

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}, \quad (1.2)$$

e  $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$  são os símbolos de Christoffel, que se relacionam com o tensor métrico na forma [3]:

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(\partial_{\beta}g_{\sigma\gamma} + \partial_{\gamma}g_{\beta\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\beta\gamma}). \quad (1.3)$$

Durante esse trabalho, iremos considerar  $8\pi G = 1$ .

A Equação de Einstein permitiu a previsão de inúmeros fenômenos físicos no contexto de gravitação em regime forte. Entretanto, algumas limitações e fenômenos ainda não

completamente explicados pela Teoria da RG de Einstein, especialmente em contextos envolvendo física de partículas elementares e a unificação das forças fundamentais, motivaram o desenvolvimento de modelos teóricos alternativos. Entre esses, destacam-se as teorias que incorporam dimensões espaciais adicionais, visando estender o escopo da gravitação clássica. Exemplos notáveis são os modelos de Kaluza-Klein [8, 9] e de Randall-Sundrum [10, 11], os quais exploram a gravidade em espaços-tempos de dimensões superiores para propor mecanismos que abordam as inconsistências e dificuldades presentes na formulação clássica da relatividade, como a possível resolução do problema da hierarquia exponencial entre a força gravitacional e as forças do modelo padrão.

Um problema que surge no contexto dos BN's na relatividade é a presença de singularidades [12]. Em muitos casos, as quantidades físicas de interesse divergem nessas regiões [13]. No entanto, singularidades podem ser definidas como pontos onde as geodésicas são incompletas [14]. Embora geralmente não representem um problema fenomenológico por estarem escondidas atrás de um horizonte de eventos [15], as singularidades podem indicar uma quebra das teorias clássicas na descrição da física em determinadas regiões.

Na RG, uma maneira de lidar com o problema das singularidades é por meio do estudo de BN's regulares (BNs sem singularidades em seu interior [16]) e/ou buracos de minhoca (geometrias livres de singularidades e horizontes de eventos). A primeira solução regular com horizonte foi proposta por Bardeen como um exemplo genérico de uma métrica regular e, posteriormente, derivada a partir das equações de Einstein por Beato e Garcia, que mostraram que a métrica de Bardeen pode ser interpretada como um BN magneticamente carregado com fonte em uma eletrodinâmica não linear (NED) [17, 18]. O centro dessas soluções apresenta um núcleo do tipo de Sitter ou de Minkowski, em vez de uma singularidade [19–22]. O estudo de BNs regulares suportados por eletrodinâmica não linear tem sido amplamente desenvolvido na literatura, uma vez que a própria eletrodinâmica modifica propriedades importantes dos BNs [23–34]. Um dos exemplos mais relevantes é o fato de que a trajetória dos fótons é influenciada pela presença da NED [35–37], o que altera a sombra desses BNs [38–41]. Outra característica significativa é como a termodinâmica desses BNs é modificada pela primeira lei da termodinâmica [42–46]. Como se tratam de soluções carregadas, há também sistemas que apresentam superradiância [47–49].

Nesse contexto, nesta dissertação investigamos as propriedades físicas de objetos compactos regulares em diferentes contextos da RG e teorias modificadas da gravitação. Inici-

almente, focamos no estudo detalhado de soluções de buracos de minhoca, incluindo variantes com múltiplas gargantas e diferentes campos fonte, como magnéticos e elétricos. Em seguida, exploramos as forças de maré em geometrias de Black Bounces (BB), analisando efeitos específicos em modelos variados, como BB do tipo Bardeen, correções de holonomia, além de geometrias polimerizadas. Posteriormente, abordamos os BBs como soluções em teorias  $f(R)$ , investigando os campos fonte necessários para a sustentação dessas soluções, e analisamos vários casos particulares e suas condições de energia associadas. Finalmente, apresentamos as conclusões gerais do trabalho, sintetizando os principais resultados obtidos.

## 2 SOLUÇÕES DE BURACOS DE MINHOCAS EM RELATIVIDADE GERAL

Conforme mencionado antes, observações recentes das sombras de BNs pelo Event Horizon Telescope (EHT) [50, 51] e a detecção inovadora de ondas gravitacionais pelo LIGO [6, 7] revolucionaram o estudo da gravidade em regime de campo forte, proporcionando oportunidades sem precedentes para testar a RG e explorar teorias modificadas da gravidade. Em [52], os autores mostram que, apesar de apresentarem um espectro de modos quase-normais completamente diferente, alguns buracos de minhoca exibem uma fase de *ringdown* muito semelhante à dos BNs, com diferenças que só apareceriam em tempos mais tardios.

Além disso, sabe-se da literatura que as sombras de BNs e objetos sem horizonte, como singularidades nuas [53–55] e buracos de minhoca [56–61], podem ser semelhantes em alguns casos [62], o que, juntamente com o lançamento da primeira imagem da sombra de um buraco negro pelo EHT [50, 51], revitalizou o interesse no estudo desses objetos. Nesse contexto, trabalhos recentes investigaram métodos de detecção de buracos de minhoca tanto na RG quanto em teorias alternativas da gravidade, destacando seu potencial significado astrofísico.

Buracos de minhoca têm cativado físicos como construções teóricas que poderiam conectar regiões distantes do espaço-tempo ou até mesmo unir universos distintos. Trazidos para o arcabouço moderno por Ellis [63] e Bronnikov [64], e generalizados por Morris e Thorne [65], os buracos de minhoca atravessáveis representam desafios à física clássica, uma vez que exigem matéria exótica para sustentar a garganta. Tal matéria exótica normalmente viola condições de energia fundamentais, como a condição de energia nula (NEC), levantando questões sobre sua plausibilidade física. Como resultado, pesquisadores têm buscado formulações alternativas envolvendo teorias modificadas da gravidade ou acoplamentos exóticos de campos para construir soluções de buracos de minhoca mais realistas e fisicamente aceitáveis [66–76]. Um tipo de buraco de minhoca que tem ganhado considerável atenção nos últimos anos é aquele que pode ser obtido na RG ao se considerar um campo de Dirac. O campo de Dirac possui as propriedades exóticas necessárias para gerar essas soluções sem a necessidade de campos exóticos adicionais [77–83].

Nesse contexto, Bronnikov [24, 84] demonstrou que a eletrodinâmica não linear pode regularizar efetivamente espaços-tempos de BNs ao mesmo tempo em que sustenta geometrias de buracos de minhoca. Outros estudos destacaram o papel das interações não lineares

de campos na geração dos componentes do tensor energia-momento necessários para estabilizar a garganta dos buracos de minhoca [85–87]. De modo semelhante, campos escalares — especialmente os campos escalares fantasmas caracterizados por energia cinética negativa — demonstraram apresentar naturalmente as propriedades de matéria exótica necessárias para objetos compactos e buracos de minhoca atravessáveis [88, 89]. A combinação de eletrodinâmica não linear e campos escalares fornece um arcabouço versátil para explorar diversas geometrias de buracos de minhoca dentro da RG [90].

Nesse contexto, a métrica do buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov (EB) é a solução das equações de campo de Einstein mais simples capaz de descrever um buraco de minhoca, onde um campo escalar sem massa com energia negativa atua como fonte da curvatura. A métrica é tipicamente expressa como

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)} + r^2 d\Omega_2^2, \quad (2.1)$$

onde  $d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ , o que corresponde à métrica do buraco de minhoca introduzida por Morris e Thorne [65], com uma função redshift trivial. Aqui,  $b(r)$  é a função de forma que governa o comportamento do buraco de minhoca.

As componentes não nulas do tensor de Einstein para a métrica (2.1) são

$$G_t^t = -\frac{b'(r)}{r^2}, \quad (2.2)$$

$$G_r^r = -\frac{b(r)}{r^3}, \quad (2.3)$$

$$G_\theta^\theta = G_\phi^\phi = \frac{b(r) - rb'(r)}{2r^3}. \quad (2.4)$$

Para o buraco de minhoca EB, a função de forma assume a forma particular:

$$b(r) = \frac{b_0^2}{r}, \quad (2.5)$$

onde  $b_0$  é o raio da garganta do buraco de minhoca. A geometria da solução descreve um "túnel" que conecta duas regiões distintas do espaço-tempo através da garganta. Essa solução é um dos tipos mais simples de soluções de buraco de minhoca.

Por meio de uma mudança de coordenadas dada por

$$dx^2 = \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{b_0^2}{r^2}\right)}, \quad (2.6)$$

é possível expressar a métrica como

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + (x^2 + b_0^2)d\Omega_2^2. \quad (2.7)$$

## 2.1 Buraco de Minhoca de Ellis-Bronnikov Generalizado (EBG)

### 2.1.1 Características gerais

Em [91], uma generalização da métrica de EB é introduzida pela incorporação de um parâmetro livre  $m \geq 2$ , tal que

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + (x^m + b_0^m)^{2/m}d\Omega_2^2, \quad (2.8)$$

onde  $m = 2$  recupera o buraco de minhoca de EB.

Também podemos expressar a métrica EBG em termos de  $r$ , onde a métrica assume a forma dada em (2.1), onde agora

$$b(r) = r - r^{3-2m}(r^m - b_0^m)^{2-\frac{2}{m}}. \quad (2.9)$$

Fixando  $t = \text{cte}$  e considerando a simetria esférica da geometria do buraco de minhoca, podemos, sem perda de generalidade, escolher  $\theta = \pi/2$  em (2.8). Isso nos leva à geometria 2D descrita por

$$ds_{2D}^2 = dx^2 + (x^m + b_0^m)^{2/m}d\varphi^2. \quad (2.10)$$

Podemos embutir essa geometria 2D curva em uma geometria euclidiana 3D dada pelo elemento de linha

$$d\sigma_{3D}^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 = \left[ \left( \frac{d\rho(x)}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dz(x)}{dx} \right)^2 \right] dx^2 + \rho^2 d\varphi^2, \quad (2.11)$$

onde identificamos

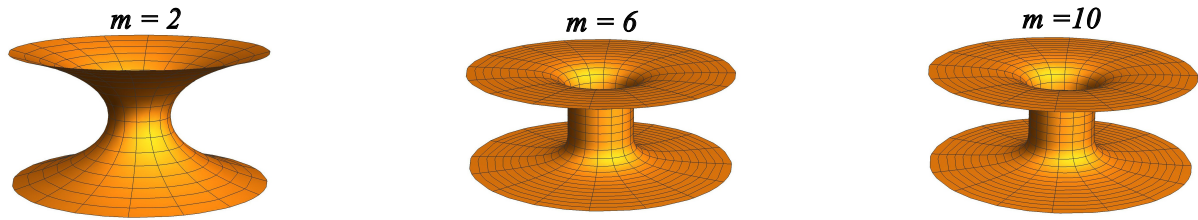
$$\rho(x) = (b_0^m + x^m)^{1/m}, \quad (2.12)$$

$$\frac{dz}{dx} = \left( 1 - x^{-2+2m}(b_0^m + x^m)^{-2+2/m} \right)^{1/2}. \quad (2.13)$$

A integração numérica da equação (2.13) com  $b_0 = 1$  para diferentes valores de  $m$  permite criar o diagrama de imersão para esse buraco de minhoca EBG, como representado na Fig. 1, onde podemos observar a geometria clássica de um catenoide para  $m = 2$ . Para  $m > 2$ , a geometria da garganta do buraco de minhoca EBG tende cada vez mais a se tornar cilíndrica.

Embora as condições de energia continuem sendo violadas para essa classe de bu-

Figura 1: Diagrama embutido para o buraco de minhoca EBG com  $b_0 = 1$  e diferentes valores de  $m$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

racos de minhoca [91], o fato de que a geometria do buraco de minhoca se torna mais plana com o aumento de  $m$  tem como uma de suas consequências a ocorrência de ressonâncias na transmissão de ondas sem massa nessa geometria, o que pode ser usado como um meio de obter informações sobre o tamanho da garganta do buraco de minhoca [91]. Outros estudos sugerem que essa família de buracos de minhoca pode ser usada como modelo para explorar a física de ondas gravitacionais de objetos compactos exóticos [92], podendo também servir como possíveis mímicos de BNs [93], dependendo da confirmação da estabilidade sob todos os tipos de perturbações, sendo que comparações iniciais de suas características de ringdown com BNs apoiam essa ideia. Além disso, é importante enfatizar que essa família de soluções tem sido estudada em outros contextos além da RG, como em modelos de braneworld [94–96], e modelos de gravidade modificada [68, 97].

### 2.1.2 Acreção de poeira

O processo de acreção de um fluido por um BN já é bem documentado na literatura [98–104]. No entanto, o estudo da acreção em geometrias de buracos de minhoca permanece um tópico relativamente pouco explorado [105, 106], tornando a análise da acreção de poeira (um fluido sem pressão) particularmente interessante de se investigar na geometria de buraco de minhoca considerada aqui.

O tensor energia-momento para poeira é dado por

$$T_{\mu\nu} = \rho_e u_\mu u_\nu, \quad (2.14)$$

onde  $\rho_e$  é a densidade de energia e  $u$  é a quadrivelocidade do fluido, definida como

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} = (u^t, u^r, 0, 0), \quad (2.15)$$

com  $\tau$  o tempo próprio, onde a partir de agora denotaremos a velocidade radial como  $u^r \equiv u$ .

Aqui assumiremos acreção radial, de modo que estamos considerando  $u^\theta = u^\varphi = 0$ . A partir da condição de normalização  $u^\mu u_\mu = -1$ , podemos relacionar  $u^t$  com  $u^r$  como

$$u^t = \sqrt{\frac{u^2}{\left(1 - \frac{b_0^m}{r^m}\right)^{2-2/m}} + 1}. \quad (2.16)$$

Por outro lado, a equação de conservação do tensor energia-momento,  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , implica que

$$\frac{\rho_e u r^2}{\left(1 - \frac{b_0^m}{r^m}\right)^{2-2/m}} \sqrt{u^2 + \left(1 - \frac{b_0^m}{r^m}\right)^{2-2/m}} = C_1, \quad (2.17)$$

onde  $C_1$  é uma constante de integração. Em seguida, consideramos a equação para a conservação do fluxo de massa, dada por  $\nabla_\mu J^\mu$ , onde  $J^\mu = u_\nu T^{\mu\nu}$ , que nos leva à expressão

$$\frac{\rho_e u r^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{b_0^m}{r^m}\right)^{2-2/m}}} = C_2, \quad (2.18)$$

onde  $C_2$  é outra constante de integração. Dividindo as equações (2.17) e (2.18), obtemos

$$\sqrt{\frac{u^2}{\left(1 - \frac{b_0^m}{r^m}\right)^{2-2/m}} + 1} = \frac{C_1}{C_2} \equiv C_4. \quad (2.19)$$

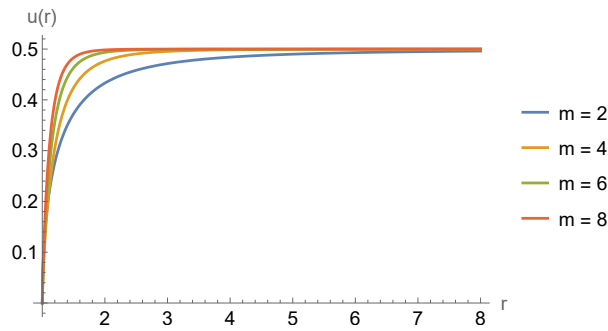
Com isso, podemos finalmente obter expressões para  $u$  e  $\rho_e$ :

$$u = \pm \sqrt{\left(1 - \frac{b_0^m}{r^m}\right)^{2-2/m} (C_4^{(m)2} - 1)}, \quad (2.20)$$

$$\rho_e = \frac{C_2^{(m)}}{\sqrt{C_4^{(m)2} - 1}} \frac{1}{r^2}, \quad (2.21)$$

onde o sinal  $\pm$  indica fluido entrando (saindo) e as constantes são determinadas pelas condições iniciais na borda  $r_i = 500b_0$ . Elas são indexadas por  $m$  porque, para uma dada condição inicial  $(u_i, \rho_e^i)$ ,  $C_4^{(m)}$  e  $C_2^{(m)}$  dependerão do valor de  $m$ . Consideraremos as seguintes condições iniciais para a velocidade radial e densidade de energia:  $u_i = 0.5$  e  $\rho_e^i = 0.001$ . Na Fig. 2, apresentamos o gráfico da velocidade radial  $u$  em função da coordenada  $r$ , para diferentes valores de  $m$ . Ao analisar o gráfico, observamos que a velocidade radial diminui à medida que a partícula se aproxima da garganta do buraco de minhoca, em concordância com os resultados reportados em [105]. Esse comportamento contrasta com o caso típico dos BNs [100], onde a velocidade radial aumenta conforme  $r$  diminui. No entanto, uma característica importante no nosso caso é

Figura 2: Velocidade radial para diferentes valores de  $m$ , com  $b_0 = 1$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

que, à medida que o parâmetro  $m$  aumenta, a velocidade radial diminui de forma mais gradual com a diminuição de  $r$ , até que eventualmente cai abruptamente para zero próximo à garganta para valores suficientemente grandes de  $m$ .

Analisando a expressão (2.21) para a densidade de energia, observamos que seu comportamento não varia significativamente com o parâmetro  $m$ . A densidade decai como  $1/r^2$  e atinge seu valor máximo na garganta, sugerindo que a maior concentração de matéria está localizada ao redor dessa região, como esperado. Outro ponto importante a destacar é que a densidade de energia permanece regular em todo o espaço-tempo, em contraste com o comportamento típico para BNs.

### 2.1.3 Fonte Magnética

Conforme discutido anteriormente, uma forma natural de encontrar quais campos podem sustentar tal geometria é considerando a seguinte ação:

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left( R - 2\varepsilon g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + 2V(\phi) + L(F) \right), \quad (2.22)$$

onde  $\phi$  é um campo escalar,  $V(\phi)$  é o potencial associado ao campo escalar e  $L(F)$  é a densidade Lagrangiana do campo eletromagnético não linear, com  $F = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ , sendo  $F_{\mu\nu}$  o tensor do campo eletromagnético. Além disso,  $\varepsilon = -1$  para um campo escalar fantasma e  $\varepsilon = +1$  para um campo escalar canônico.

Variando a ação com respeito à métrica  $g^{\mu\nu}$  obtemos a equação de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}[\phi] + T_{\mu\nu}[F], \quad (2.23)$$

onde  $T_{\mu\nu}[\phi]$  e  $T_{\mu\nu}[F]$  são, respectivamente, o tensor energia-momento associado ao campo

escalar e ao campo eletromagnético não linear, dados por

$$T_{\mu\nu}[\phi] = 2\varepsilon\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\left(\varepsilon g^{\lambda\rho}\partial_\lambda\phi\partial_\rho\phi + V(\phi)\right), \quad (2.24)$$

$$T_{\mu\nu}[F] = g_{\mu\nu}\frac{L(F)}{2} - 2L_F F_\mu^\alpha F_{\nu\alpha}, \quad (2.25)$$

com  $L_F = dL/dF$ .

Variando a ação com respeito ao campo escalar  $\phi$  e ao campo eletromagnético  $F_{\mu\nu}$ , obtemos as equações de movimento dos campos:

$$2\varepsilon\nabla_\mu\nabla^\mu\phi = \frac{dV(\phi)}{d\phi}, \quad (2.26)$$

$$\nabla_\mu(L_F F^{\mu\nu}) = 0. \quad (2.27)$$

Além de assumirmos um campo escalar radial  $\phi = \phi(r)$ , também assumimos aqui apenas a existência de um campo magnético radial, ou seja, que os únicos componentes não nulos do tensor eletromagnético  $F_{\mu\nu}$  são dados por  $F_{\theta\phi} = -F_{\phi\theta} = q_m \sin\theta$ , onde  $q_m$  é a carga do monopolo magnético. Com isso, temos que o invariante  $F$  é dado por

$$F = \frac{2q_m^2}{r^4}. \quad (2.28)$$

Com a métrica dada em (2.1), as componentes dos tensores energia-momento para  $\phi$  e  $F_{\mu\nu}$  assumem a forma

$$T_\mu^\nu[\phi] = V(\phi)\delta_\mu^\nu - \varepsilon\left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)\phi'(r)^2\text{diag}(1, -1, 1, 1), \quad (2.29)$$

$$T_\mu^\nu[F] = \frac{1}{2}\text{diag}\left(L, L, L - \frac{4q_m^2}{r^4}L_F, L - \frac{4q_m^2}{r^4}L_F\right). \quad (2.30)$$

Observando as equações acima, vemos que  $G_t^t - G_r^r = T_t^t - T_r^r$  é livre de  $V$  e  $L$ . Assim, temos que, utilizando os componentes da equação de Einstein dados em (2.2) e (2.3)

$$-2\varepsilon\left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)\phi'(r)^2 = \frac{b(r)}{r^3} - \frac{b'(r)}{r^2}. \quad (2.31)$$

Utilizando a equação (2.9), temos finalmente que o campo é dado por

$$\phi'(r)^2 = \frac{(m-1)}{\varepsilon r^2(1 - r^m/b_0^m)}. \quad (2.32)$$

Como  $r > b_0$ , para que  $\phi'^2 > 0$ , devemos ter  $\varepsilon = -1$ , ou seja, um campo escalar fantasma.

Resolvendo a equação (2.32), encontramos

$$\phi(r) = \phi_0 + 2 \frac{\sqrt{m-1}}{m} \arctan \left( \frac{\sqrt{r^m - b_0^m}}{b_0^{m/2}} \right), \quad (2.33)$$

ou, em termos de  $x$

$$\phi(x) = \phi_0 + 2 \frac{\sqrt{m-1}}{m} \arctan \left( \frac{x}{b_0} \right)^{m/2}, \quad (2.34)$$

onde  $\phi_0$  é uma constante que podemos fixar como zero. A partir da equação (2.33), é simples ver que para  $m = 2$  temos o campo escalar do caso Ellis-Bronnikov [107]. O campo escalar dado em (2.33) é bastante similar ao campo escalar que serve como fonte do espaço-tempo de Simpson-Visser [108], que também é uma função arcotangente — uma forma funcional bastante recorrente em espaços-tempos livres de singularidades.

Utilizando a equação (2.26), podemos integrá-la para encontrar o potencial  $V(r)$ , dado por

$$\begin{aligned} V(r) = & \frac{(m-1)(m-2)b_0^m}{mr^{2m}} (r^m - b_0^m)^{1-2/m} \\ & + \frac{2(m-1)(r^m - b_0^m)^{1-2/m}}{mb_0^m} {}_2F_1 \left[ 2, 1 - \frac{2}{m}, 2 - \frac{2}{m}, 1 - \frac{r^m}{b_0^m} \right], \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde  ${}_2F_1(a, b, c, z)$  é a função hipergeométrica de  $z$ . Utilizando a equação (2.33) para inverter, temos que o potencial escrito em termos do campo  $\phi$  é dado por

$$\begin{aligned} V(\phi) = & \frac{(m-1)}{mb_0^2} \tan^{2-4/m} \left( \frac{m\phi}{2\sqrt{m-1}} \right) \left\{ (m-2) \cos^4 \left( \frac{m\phi}{2\sqrt{m-1}} \right) \right. \\ & \left. + 2 {}_2F_1 \left[ 2, 1 - \frac{2}{m}, 2 - \frac{2}{m}, -\tan^2 \left( \frac{m\phi}{2\sqrt{m-1}} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Da componente  $(t-t)$  da equação de Einstein nós temos

$$-\frac{b'(r)}{r^2} = V(r) + \left( 1 - \frac{b(r)}{r} \right) \phi'(r)^2 + \frac{L(r)}{2}, \quad (2.37)$$

ou

$$\frac{L(r)}{2} = -\frac{b'(r)}{r^2} - V(r) - \left( 1 - \frac{b(r)}{r} \right) \phi'(r)^2. \quad (2.38)$$

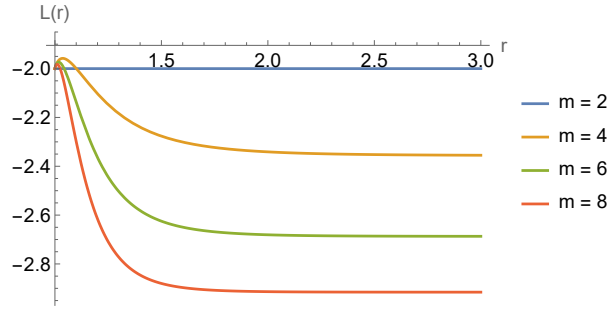
Utilizando as expressões para  $\phi(r)$  e  $V(r)$  encontradas, obtemos a Lagrangiana em

termos de  $r$

$$L(r) = \frac{2}{(r^m - b_0^m)^{2/m}} \left\{ 1 - \frac{(m-2)}{m} \left(\frac{b_0}{r}\right)^{2m} - \frac{2}{m} \left(\frac{b_0}{r}\right)^m - \frac{(r^m - b_0^m)^{2/m}}{r^2} - \frac{2(m-1)(r^m - b_0^m)}{mb_0^m} {}_2F_1\left(2, 1 - \frac{2}{m}, 2 - \frac{2}{m}, 1 - \frac{r^m}{b_0^m}\right) \right\} \quad (2.39)$$

Na Fig. 3, temos o gráfico da Lagrangiana em função de  $r$ , onde podemos observar um comportamento similar para todos os  $m > 2$ , no qual  $L \rightarrow$  constante quando  $r \rightarrow \infty$ .

Figura 3: Lagrangiana para o caso magnético com  $b_0 = 1$  para diferentes valores de  $m$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Podemos usar a (2.28) para inverter a equação da Lagrangiana e escrevê-la em termos do invariante  $F$ , a partir do qual obtemos

$$L(F) = \frac{2}{b_0^2 [(sF^{-1/4})^m - 1]^{2/m}} \left\{ 1 - \frac{(m-2)}{m} \left(\frac{F^{1/2}}{s^2}\right)^m - \frac{2}{m} \left(\frac{F^{1/4}}{s}\right)^m - \frac{F^{1/2}}{s^2} \left[\left(\frac{s}{F^{1/4}}\right)^m - 1\right]^{2/m} + \frac{2(m-1)}{m} \left[1 - \left(\frac{s}{F^{1/4}}\right)^m\right] {}_2F_1\left(2, 1 - \frac{2}{m}, 2 - \frac{2}{m}, 1 - \left(\frac{s}{F^{1/4}}\right)^m\right) \right\}, \quad (2.40)$$

onde

$$s = \frac{(2q_m^2)^{1/4}}{b_0}. \quad (2.41)$$

Como uma simplificação, podemos definir a quantidade

$$G = \frac{F^{1/4}}{s}, \quad (2.42)$$

de modo que, em termos de  $G$ , temos

$$L(G) = \frac{2}{b_0^2 (G^{-m} - 1)^{2/m}} \left\{ 1 - \frac{(m-2)}{m} G^{2m} - \frac{2}{m} G^m - G^2 (G^{-m} - 1)^{2/m} + \frac{2(m-1)}{m} (1 - G^{-m}) {}_2F_1\left(2, 1 - \frac{2}{m}, 2 - \frac{2}{m}, 1 - G^{-m}\right) \right\}. \quad (2.43)$$

É fácil ver que para  $m = 2$  recuperamos o caso usual de Ellis-Bronnikov, para o qual a fonte do campo é apenas um campo escalar livre fantasma. Ou seja, para  $m = 2$ , temos

$V = 1/b_0^2$  e  $L = -2/b_0$ . Substituindo isso na ação (2.22), obtemos

$$S(m=2) = \int d^4x \left( R - 2\varepsilon g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{2}{b_0^2} - \frac{2}{b_0^2} \right) = \int d^4x (R - 2\varepsilon g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi), \quad (2.44)$$

isto é, para  $m = 2$ , a ação se reduz a ação de um campo escalar livre, como esperado.

#### 2.1.4 Fonte elétrica

Alternativamente, em vez de considerarmos um campo magnético radial gerado por um monopolo magnético, podemos considerar um campo elétrico radial, de modo que agora as componentes não nulas do tensor eletromagnético  $F_{\mu\nu}$  são dadas por  $F^{tr} = -F^{rt} = E(r)$ . Com isso, o invariante  $F$  é agora dado por

$$F = -\frac{2E(r)^2}{\left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)}. \quad (2.45)$$

Além disso, usando a equação (2.27), podemos escrever o campo elétrico como

$$E(r) = \frac{q_e}{r^2 L_F} \sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}}, \quad (2.46)$$

onde  $q_e$  é a carga elétrica.

Com isso, o tensor energia-momento associado à NED é dado por

$$T[F]_{\mu}^{\nu} = \frac{1}{2} \text{diag} \left( L + \frac{4E(r)^2 L_F}{1 - \frac{b(r)}{r}}, L + \frac{4E(r)^2 L_F}{1 - \frac{b(r)}{r}}, L, L \right). \quad (2.47)$$

Aqui procedemos de forma análoga ao caso magnético para encontrar o campo escalar e o potencial associado, que são dados pelas mesmas expressões (2.33) e (2.36) do caso magnético.

Finalmente, a partir da equação de Einstein  $(\theta, \theta)$  obtemos

$$L(r) = \frac{b(r) - rb'(r)}{2r^3} - V(r) - \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) \phi'(r)^2. \quad (2.48)$$

Substituindo  $\phi(r)$  e  $V(r)$ , encontramos que a Lagrangiana é dada por

$$L(r) = -2 \frac{(m-1)(m-2)b_0^m (r^m - b_0^m)^{1-2/m}}{mr^{2m}} - \frac{4(m-1)(r^m - b_0^m)^{1-2/m}}{mb_0^m} {}_2F_1 \left[ 2, 1 - \frac{2}{m}, 2 - \frac{2}{m}, 1 - \frac{r^m}{b_0^m} \right]. \quad (2.49)$$

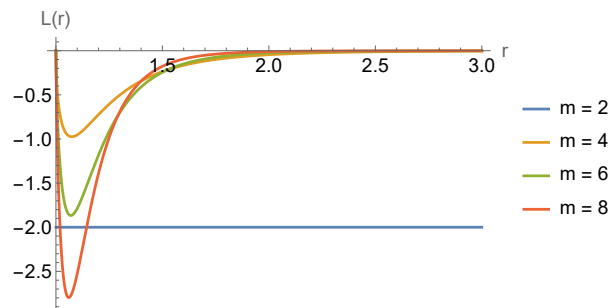
Por fim, a partir da equação  $(r, r)$  podemos resolver para  $L_F$ , já que o campo elétrico

em termos de  $L_F$  é dado em (2.46). Fazendo isso, obtemos

$$L_F(r) = -\frac{2q_e^2}{r^2[1 - r^{2-2m}(r^m + (m-2)b_0^m)(r^m - b_0^m)^{1-2/m}]}. \quad (2.50)$$

Na Fig. 4 temos o gráfico da Lagrangiana  $L$  como função de  $r$ . Vale notar que, como normalmente ocorre no caso elétrico, não é possível escrever  $L$  como uma função explícita de  $F$ , já que  $F$  depende de uma forma não trivial de  $r$ . Além disso, é possível ver que, assim como no caso magnético, a Lagrangiana tende a uma constante para valores assintóticos de  $r$ ; no entanto, para pequenos valores de  $r$ ,  $L(r)$  diverge no caso elétrico, em contraste com o caso magnético, no qual  $L(r)$  tende a uma constante quando  $r \rightarrow b_0$ .

Figura 4: Lagrangiana  $L(r)$  para o caso elétrico para diferentes valores de  $m$ , com  $b_0 = 1$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Finalmente, a expressão para o campo elétrico é dada por

$$E(r) = \frac{(r^m - b_0^m)^{1-3/m}}{2q_e r^{m+1}} \left[ r^4 - b_0^{2m}(m-2)r^{4-2m} + b_0^m(m-3)r^{4-m} - r^2(r^m - b_0^m)^{2/m} \right]. \quad (2.51)$$

Esse campo elétrico obviamente não é Coulombiano. No limite  $r \rightarrow \infty$  temos

$$E(r) \sim \left( \frac{b_0}{r} \right)^m, \quad (2.52)$$

o que demonstra que o decaimento do campo  $E(r)$  é mais rápido quanto maior for o valor de  $m$ .

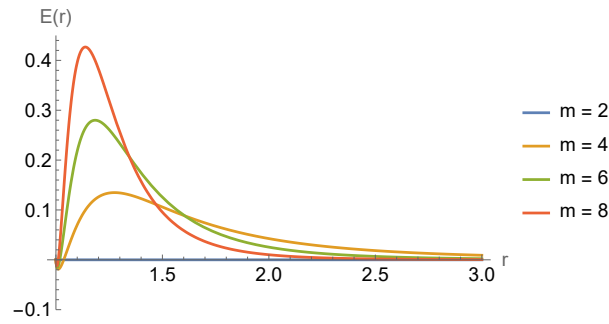
No gráfico da Fig. 5 temos o comportamento do campo elétrico para diferentes valores de  $m$ , onde vemos que, para  $r \rightarrow b_0$ , o campo elétrico não apresenta comportamento divergente.

## 2.2 Buraco de Minhoca com Múltiplas Gargantas/Anti-gargantas

### 2.2.1 Características gerais

Em [109], os autores propuseram uma série de espaço-tempos do tipo BB com áreas não usuais. Esses modelos podem ser estudados no contexto de buracos de minhoca ao se

Figura 5: Campo elétrico para diferentes valores de  $m$ , com  $b_0 = 1$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

adaptar o elemento de linha de forma que possa ser escrito como:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + \Sigma^2(r) d\Omega_2^2. \quad (2.53)$$

O tipo de modelo de buraco de minhoca é descrito pela função  $\Sigma(r)$ . O escalar de Kretschmann dessa métrica é dado por

$$\mathcal{K} = \frac{4(2\Sigma^2\Sigma''^2 + \Sigma'^4 - 2\Sigma'^2 + 1)}{\Sigma^4}, \quad (2.54)$$

onde podemos ver que a geometria é regular em todos os pontos se as seguintes condições forem satisfeitas [110]:

- $\Sigma(r)$  deve ser diferente de zero em todos os pontos.
- $\Sigma'(r)$  e  $\Sigma''(r)$  devem ser finitas em todos os pontos.

Dentre os modelos de BB propostos no trabalho original, um que se destaca é dado por:

$$\Sigma^2(r) = (d^2 + r^2) e^{\frac{b^2}{c_3 + r^2}}, \quad (2.55)$$

onde as constantes  $b$ ,  $c_3$  e  $d$  são parâmetros que influenciam na forma do buraco de minhoca. Este modelo foi escolhido porque gera soluções regulares. Para ver isso, basta considerar as seguintes expressões para as primeiras e segundas derivadas da função  $\Sigma$  do nosso modelo,

dadas por

$$\Sigma'(r) = \frac{r \left[ (c_3 + r^2)^2 - b^2 (d^2 + r^2) \right] e^{\frac{b^2}{2(c_3+r^2)}}}{(c_3 + r^2)^2 (d^2 + r^2)^{3/2}}, \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} \Sigma''(r) = & \frac{b^2 \left[ -c_3^2 (d^2 + 3r^2) + 3d^2 r^4 + r^6 \right] e^{\frac{b^2}{2(c_3+r^2)}}}{(c_3 + r^2)^4 (d^2 + r^2)^{1/2}} + \frac{b^4 r^2 \sqrt{d^2 + r^2} e^{\frac{b^2}{2(c_3+r^2)}}}{(c_3 + r^2)^4} \\ & + \frac{e^{\frac{b^2}{2(c_3+r^2)}} \left[ 2b^2 c_3 r^2 (d^4 - r^4) + c_3^4 d^2 + 4c_3^3 d^2 r^2 + 6c_3^2 d^2 r^4 + 4c_3 d^2 r^6 + d^2 r^8 \right]}{(c_3 + r^2)^4 (d^2 + r^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Para  $b = 0$ , as condições de regularidade são satisfeitas de forma trivial. De fato,  $b = 0$  recupera o conhecido buraco de minhoca de EB [63, 64]. Considerando  $b \neq 0$ , se  $c_3 = 0$ , vemos que as condições acima deixam de ser satisfeitas, já que  $\Sigma'$  e  $\Sigma''$  irão divergir e, portanto, o escalar de Kretschmann também diverge. Assim, a introdução dos parâmetros  $b$  e  $c_3$  visa modificar a geometria clássica do buraco de minhoca, permitindo que ele possua múltiplas gargantas e anti-gargantas, ao mesmo tempo em que garante que a geometria permaneça regular em todo o espaço.

Além disso, como mencionado anteriormente, dependendo da escolha dos parâmetros, a forma do buraco de minhoca pode mudar significativamente, apresentando múltiplas gargantas e/ou anti-gargantas. É importante notar que, em nosso modelo,  $d$  deixa de representar o tamanho da garganta do buraco de minhoca. A inclusão das constantes  $b$  e  $c_3$  afeta não apenas a posição da garganta, mas também o número de gargantas [109].

Neste sistema de coordenadas escolhido, a área de uma esfera na coordenada radial  $r$  é agora definida como [110, 111]:

$$A = 4\pi\Sigma^2(r). \quad (2.58)$$

No estudo de buracos de minhoca, podemos determinar a presença de gargantas/anti-gargantas por meio da análise dos máximos e mínimos da área do buraco de minhoca. Isso é amplamente discutido na referência [109], garantindo a presença de gargantas e anti-gargantas, que serão representadas nos diagramas de imersão abaixo.

Estamos interessados em imergir a superfície curva bidimensional esfericamente simétrica definida pela métrica (2.53) com  $t = \text{constante}$  e  $\theta = \pi/2$ :

$$ds^2 = dr^2 + \Sigma^2(r) d\varphi^2, \quad (2.59)$$

em um espaço Euclidiano cilíndrico definido pelo elemento de linha

$$d\sigma^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 = \left[ \left( \frac{d\rho(r)}{dr} \right)^2 + \left( \frac{dz(r)}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + \rho^2 d\varphi^2. \quad (2.60)$$

Comparando os elementos de linha (2.59) e (2.60), obtemos:

$$\rho(r) = \Sigma(r), \quad (2.61)$$

$$\frac{dz(r)}{dr} = \sqrt{1 - \Sigma'^2}. \quad (2.62)$$

Para que a construção seja consistente, devemos ter  $z(r)$  bem definido ao longo de todo o espaço-tempo para todos os valores de  $r$ , e  $dz/dr \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow \pm\infty$ , o que implica que devemos ter:

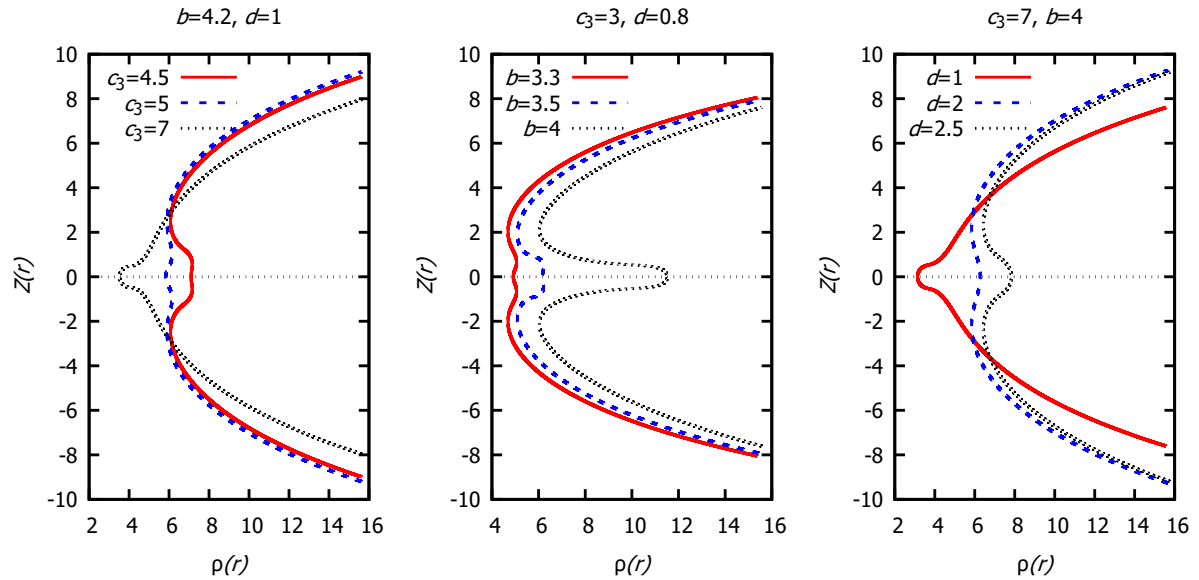
$$\Sigma'^2 \leq 1, \quad \forall r \in (-\infty, +\infty), \quad (2.63)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Sigma'^2 = 1. \quad (2.64)$$

Seja  $\Sigma(r)$  dada pela equação (2.55), é fácil verificar que o limite acima é satisfeito para quaisquer valores dos parâmetros livres. No entanto, a condição (2.63) não é satisfeita para todos os valores dos parâmetros  $d$ ,  $b$  e  $c_3$ , de modo que apenas certas combinações são permitidas para que haja uma solução consistente. A partir da integração numérica da equação (2.62) para diferentes escolhas de parâmetros, apresentamos na Fig. 6 o gráfico paramétrico de  $z(r)$  vs.  $\rho(r)$  mostrando os diagramas de imersão isométrica para nossas geometrias de buraco de minhoca caracterizadas pela função  $\Sigma(r)$  dada em (2.55). O fato de que  $\Sigma' \rightarrow \pm 1$  para  $r \rightarrow \pm\infty$  mostra que a geometria é assintoticamente plana, o que também pode ser visualizado geometricamente nos diagramas.

O gráfico na Fig. 6 é feito com  $\varphi$  fixo, portanto, para uma visualização geométrica tridimensional de como a superfície curva bidimensional dada por (2.59) aparece quando imersa em uma geometria Euclidiana tridimensional, devemos rotacionar o gráfico em torno do eixo- $z$ . Ao rotacionarmos essas curvas paramétricas ao redor do eixo- $z(r)$ , obtemos os diagramas de superfície imersa desses buracos de minhoca, conforme apresentado na Fig. 7. É importante destacar que, tanto nos gráficos da Fig. 6 quanto nos diagramas da Fig. 7, dependendo da escolha dos parâmetros, é possível observar múltiplas gargantas e anti-gargantas na solução. Especificamente, para  $b = 4$ ,  $c_3 = 3$  e  $d = 0,8$ , uma anti-garganta bem pronunciada do buraco de minhoca é evidente. Além disso, para valores menores de  $b$ , essas gargantas/anti-gargantas tornam-se menos pronunciadas, pois para valores pequenos de  $b$ , a função  $\Sigma(r)$  se aproxima

Figura 6: Gráfico paramétrico de  $z(r)$  vs.  $\rho(r)$  mostrando os chamados diagramas de imersão isométricos para diferentes escolhas de parâmetros. Essas curvas se destacam significativamente em comparação com a curva catenária típica do buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov.



Fonte: Elaborado pelo autor.

cada vez mais da função  $\Sigma(r)$  no caso de EB.

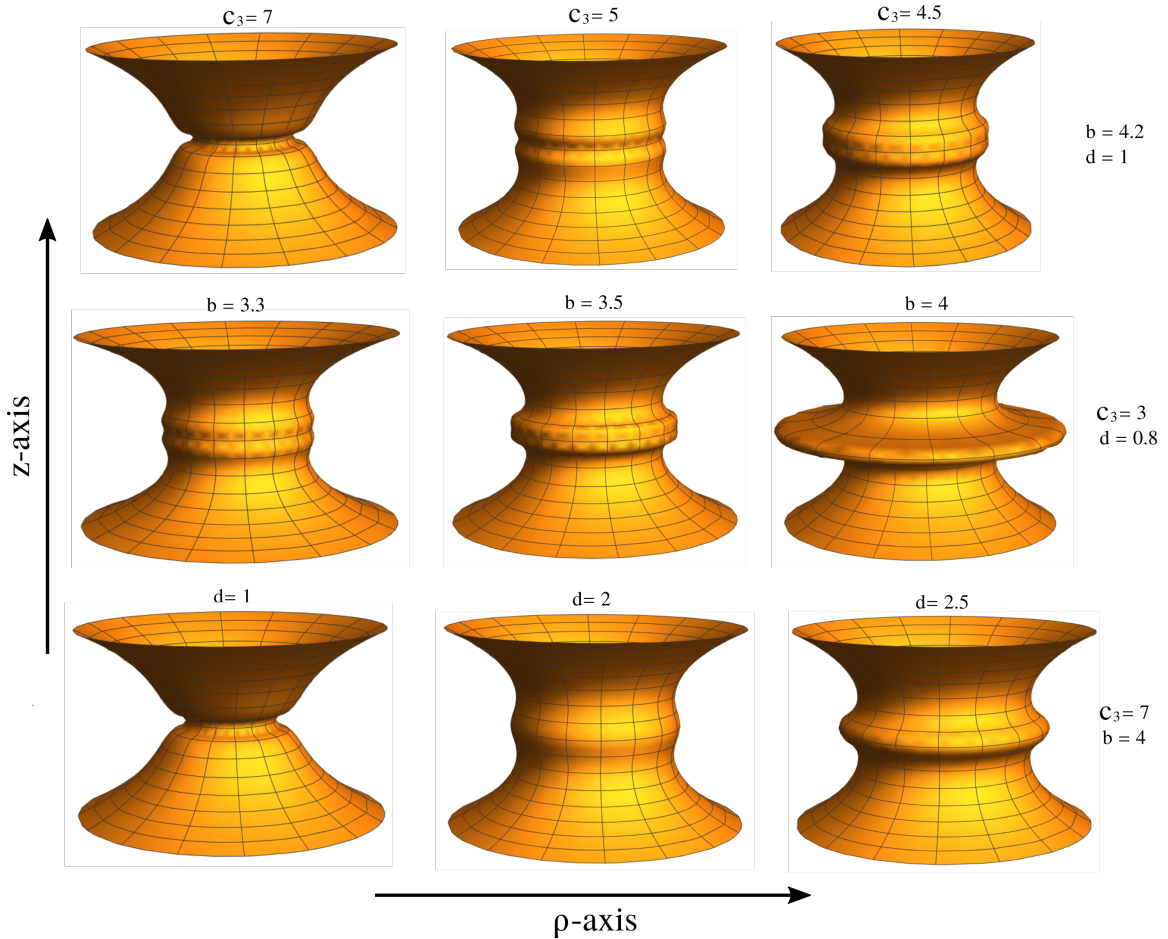
Portanto, como demonstrado por meio da análise dos mínimos e máximos da área apresentada em [109], e aqui demonstrado geometricamente, nossa geometria descreve uma família de buracos de minhoca com múltiplas gargantas e anti-gargantas, dependendo da escolha dos parâmetros  $b$ ,  $c_3$  e  $d$ . A seguir, analisaremos brevemente as equações geodésicas nesse espaço-tempo.

### 2.2.2 Geodésicas

Uma das formas de extrair informações sobre um dado espaço-tempo é por meio do estudo de suas geodésicas. Assim, analisaremos agora as trajetórias no espaço-tempo descrito pelas métricas (2.53) e (2.55), tanto para partículas massivas quanto para partículas sem massa. Para isso, o conjunto completo das equações geodésicas é:

$$\begin{aligned}
 \dot{t} &= 0, \\
 \ddot{r} - \Sigma'(r)\Sigma(r)\dot{\theta}^2 - \Sigma'(r)\Sigma(r)\sin^2\theta\dot{\phi}^2 &= 0, \\
 \ddot{\theta} + 2\frac{\Sigma'(r)}{\Sigma(r)}\dot{r}\dot{\theta} - \cos\theta\sin\theta\dot{\phi}^2 &= 0, \\
 \ddot{\phi} + 2\frac{\Sigma'(r)}{\Sigma(r)}\dot{r}\dot{\phi} + 2\cot\theta\dot{\phi}\dot{\theta} &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

Figura 7: Diagramas de superfície imersa para diferentes escolhas de parâmetros, onde é possível visualizar geometricamente de forma clara a estrutura de múltiplas gargantas e anti-gargantas, diferindo significativamente da superfície catenóide típica do buraco de minhoca de EB. Esses diagramas foram obtidos por rotação das curvas da Fig. 6 em torno do eixo-z.



Fonte: Elaborado pelo autor.

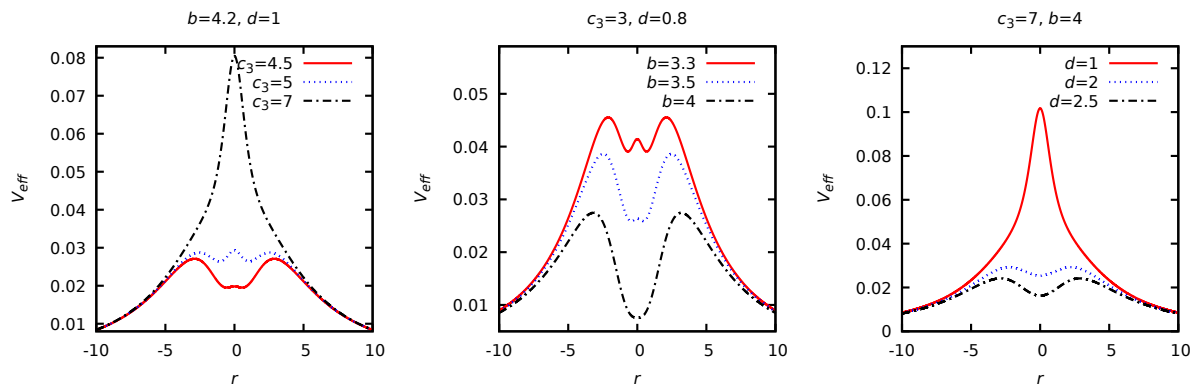
Aqui, o ponto ‘.’ denota derivadas em relação a um parâmetro afim ao longo da trajetória. A primeira equação pode ser integrada diretamente, fornecendo  $\dot{t} = E_p$ , onde  $E_p$  é uma constante que representa a energia total da partícula. Além disso,  $\theta = \pi/2$  é uma solução válida do sistema acima, uma vez que a métrica (2.53) é esfericamente simétrica. Com isso, a última equação em (2.65) também admite uma primeira integral:

$$\Sigma^2 \dot{\phi} = \ell, \quad (2.66)$$

onde  $\ell$  é uma constante. Adicionalmente, o elemento de linha (2.53) fornece a seguinte condição de normalização:

$$-\dot{t}^2 + \dot{r}^2 + \Sigma^2(r) \dot{\phi}^2 = \alpha, \quad (2.67)$$

Figura 8: Potencial efetivo para geodésicas nulas no fundo do buraco de minhoca descrito pela solução (2.55), em função da coordenada radial para diferentes valores dos parâmetros  $b$ ,  $d$  e  $c_3$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

onde  $\alpha = -1$  corresponde a partículas massivas e  $\alpha = 0$  a partículas sem massa. Para cada caso, a equação para a coordenada radial  $r$  resulta em:

$$\dot{r}^2 = E_p^2 - 1 - \frac{\ell^2}{\Sigma^2(r)}, \quad \dot{r}^2 = E_p^2 - \frac{\ell^2}{\Sigma^2(r)}, \quad (2.68)$$

onde usamos as integrais primeiras obtidas acima. As trajetórias mais simples de se analisar são as radiais, ou seja, com  $\ell = 0$ . Para ambos os casos, partículas massivas e sem massa, obtemos:

$$\ddot{r} = 0, \quad \dot{r}^2 = E_p^2 - \alpha, \quad (2.69)$$

Como se pode perceber facilmente, partículas massivas no espaço-tempo (2.53) simplesmente seguem trajetórias livres radialmente, ao contrário do que ocorre, por exemplo, no espaçotempo de Schwarzschild. Para geodésicas não radiais, pode ser interessante analisar as trajetórias nulas, uma vez que elas contribuem para a aparência do objeto quando observado por um observador distante. Neste caso, a equação para partículas sem massa em (2.68) pode ser reescrita como:

$$\dot{r}^2 = \ell^2 \left( \frac{1}{B^2} - V_{eff}(r) \right), \quad (2.70)$$

onde  $B = \ell/E_p$  e  $V_{eff}(r) = \frac{1}{\Sigma^2(r)}$ . Deve-se notar que podem existir esferas de fótons, isto é, órbitas circulares instáveis para fótons, desde que  $V_{eff}(r_c) = \frac{1}{B^2}$  e  $V'_{eff}(r_c) = 0$ .

Na Fig. 8, mostramos o perfil do potencial efetivo para partículas sem massa na presença do buraco de minhoca, considerando diferentes valores de parâmetros. Podemos observar que, dependendo da escolha dos parâmetros, o potencial pode apresentar diversos máximos e mínimos. Isso implica que podem existir múltiplas órbitas - tanto instáveis quanto

estáveis - para fótons. Os máximos do potencial efetivo correspondem às posições das gargantas do buraco de minhoca (ou seja, mínimos na área), enquanto os mínimos correspondem às anti-gargantas (ou seja, máximos na área). O fato de que cada garganta possui uma órbita instável para fótons está de acordo com o resultado apresentado em [112].

Além disso, pode-se obter uma equação mais adequada para analisar esse tipo de trajetória ao dividir (2.66) por (2.70), levando a:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{B}{\Sigma^2 \sqrt{1 - \frac{B^2}{\Sigma^2}}}. \quad (2.71)$$

Essa equação pode ser usada para analisar as trajetórias nulas ao redor do objeto, o que permite determinar como ele se apresenta para um observador externo quando iluminado por um disco de acreção.

Portanto, em resumo, vimos como a introdução da função (2.55) modifica significativamente a estrutura do espaço-tempo do buraco de minhoca. Na próxima subseção, mostraremos como essa geometria pode emergir como uma solução da RG ao se considerar o acoplamento de um campo parcialmente fantasma com uma eletrodinâmica não linear.

### 2.2.3 Fontes de campo magnéticas

Normalmente, soluções de buracos de minhoca podem ser obtidas considerando uma teoria de campo escalar com um termo cinético negativo na Lagrangiana. No entanto, no nosso caso, verificamos que os componentes do tensor de Einstein,  $G_{\mu\nu}$ , são dados por:

$$G^0_0 = -\frac{2\Sigma''}{\Sigma} - \frac{\Sigma'^2}{\Sigma^2} + \frac{1}{\Sigma^2}, \quad (2.72)$$

$$G^1_1 = \frac{1}{\Sigma^2} - \frac{\Sigma'^2}{\Sigma^2}, \quad (2.73)$$

$$G^2_2 = G^3_3 = -\frac{\Sigma''}{\Sigma}. \quad (2.74)$$

A partir da forma dos componentes do tensor de Einstein, vemos que, em geral, um campo escalar, mesmo com um potencial, não seria suficiente para atuar como fonte, já que para um campo escalar temos a relação  $T^0_0 = T^2_2$  para os componentes do tensor energia-momento. Portanto, são necessários campos adicionais para gerar essa solução, como um campo eletromagnético não linear. É importante enfatizar que, para certos casos específicos de  $\Sigma$ , pode-se ter  $G^0_0 = G^2_2$ .

Verificaremos agora que tipo de campos fonte pode gerar esse tipo de buraco de mi-

nhoca. Para isso, consideramos a presença de um campo eletromagnético não linear juntamente com um campo escalar como geradores da solução na RG. Essa teoria é descrita pela ação:

$$S = \int \sqrt{|g|} d^4x [R - 2h(\phi)g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + 2V(\phi) + L(F)], \quad (2.75)$$

onde  $\phi$  é o campo escalar,  $V(\phi)$  é o seu potencial,  $L(F)$  é a Lagrangiana da eletrodinâmica não linear,  $F = F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ , e  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  é o tensor do campo eletromagnético. A função  $h(\phi)$  determina se o campo escalar é fantasma ( $h(\phi) < 0$ ) ou padrão ( $h(\phi) > 0$ ). Esse tipo de ação é amplamente utilizado na literatura para descrever as fontes de soluções tipo BB e também buracos de minhoca [84, 108, 113–119].

A partir da variação da ação (2.75) com respeito a  $A_\mu$ ,  $\phi$  e  $g^{\mu\nu}$ , obtemos as equações de movimento para os campos eletromagnético, escalar e gravitacional. A variação com respeito a  $g^{\mu\nu}$  resultará na equação de Einstein, enquanto a variação com respeito a  $A_\mu$  resultará na equação anterior dada por (2.27). A variação com respeito a  $\phi$  nos dará a seguinte equação

$$2h(\phi)\nabla_\mu\nabla^\mu\phi + \frac{dh(\phi)}{d\phi}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi = \frac{dV(\phi)}{d\phi}. \quad (2.76)$$

O tensor energia-momento para o campo eletromagnético permanece o mesmo do caso anterior, dado por (2.25), enquanto o tensor energia momento para o campo escalar é escrito como

$$T[\phi]_{\mu\nu} = 2h(\phi)\partial_\nu\phi\partial_\mu\phi - g_{\mu\nu}(h(\phi)\partial^\alpha\phi\partial_\alpha\phi + V(\phi)). \quad (2.77)$$

Resolvendo as equações de Maxwell para um objeto com carga magnética, estático e esfericamente simétrico, obtemos que o campo magnético é dado por:

$$F_{23} = q \sin \theta, \quad (2.78)$$

e o escalar  $F$  é

$$F = \frac{2q^2}{\Sigma^4(r)}, \quad (2.79)$$

onde  $q$  é a carga magnética.

Considerando o elemento de linha dado por (2.53), as equações de campo são:

$$-\frac{L}{2} - \frac{2\Sigma''}{\Sigma} - \frac{\Sigma'^2}{\Sigma^2} + \frac{1}{\Sigma^2} - V - h\phi'^2 = 0, \quad (2.80)$$

$$-\frac{L}{2} + \frac{1 - \Sigma'^2}{\Sigma^2} - V + h\phi'^2 = 0, \quad (2.81)$$

$$-\frac{L}{2} + \frac{2q^2 L_F}{\Sigma^4} - \frac{\Sigma'' + \Sigma(V + h\phi'^2)}{\Sigma} = 0, \quad (2.82)$$

$$-\frac{4h\Sigma'\phi'}{\Sigma} + \frac{V'}{\phi'} - \phi'h' - 2h\phi'' = 0. \quad (2.83)$$

Combinando as equações (2.81) e (2.82), podemos escrever as funções associadas ao campo eletromagnético como:

$$L = -\frac{2(\Sigma'^2 + \Sigma^2(V - h\phi'^2) - 1)}{\Sigma^2}, \quad (2.84)$$

$$L_F = \frac{\Sigma^2(\Sigma\Sigma'' - \Sigma'^2 + 2\Sigma^2 h\phi'^2 + 1)}{2q^2}. \quad (2.85)$$

Como se pode notar, para que as funções eletromagnéticas sejam determinadas, primeiro precisamos conhecer as funções associadas ao campo escalar.

A partir das equações de movimento, também podemos escrever:

$$h(\phi)\phi'^2(r) = -\frac{\Sigma''}{\Sigma}. \quad (2.86)$$

Dependendo do modelo de buraco de minhoca considerado, a função  $\Sigma(r)$  pode ser suficientemente simples para que, com  $h = \pm 1$ , o campo escalar seja obtido analiticamente a partir da equação acima. Para o nosso modelo, isso se torna mais complicado, então seguiremos o procedimento usado em [84, 114, 118]. Por esse método, impomos o campo escalar como uma função suave e usamos a relação (2.86) para obter a função  $h(\phi)$ .

Escrevendo:

$$h(\phi) = -\frac{\Sigma''}{\Sigma\phi'^2}, \quad (2.87)$$

podemos simplificar as expressões (2.84) e (2.85), que se tornam:

$$L = -\frac{2(\Sigma\Sigma'' + \Sigma'^2 + \Sigma^2 V - 1)}{\Sigma^2}, \quad \text{e} \quad L_F = -\frac{\Sigma^2(\Sigma\Sigma'' + \Sigma'^2 - 1)}{2q^2}. \quad (2.88)$$

A partir de (2.76), obtemos:

$$V' = \frac{-\Sigma\Sigma''' - 3\Sigma'\Sigma''}{\Sigma^2}. \quad (2.89)$$

Dessa forma, uma vez conhecida a forma da função  $\Sigma$ , podemos obter as funções

$L$ ,  $L_F$  e  $V$ , independentemente do modelo de campo escalar escolhido. A seguir, analisaremos alguns modelos específicos de campo escalar.

### 2.2.3.1 Modelo 1

Vamos impor o campo escalar como a função monótona  $\phi = \arctan(r/d)$ . Esse modelo é considerado em diversos trabalhos [84, 114, 118]. Utilizando a relação (2.87), obtemos a função  $h(\phi)$ , que é dada por:

$$h(\phi(r)) = -\frac{(d^2 + r^2)^2 \Sigma''(r)}{d^2 \Sigma(r)}. \quad (2.90)$$

Como temos a forma de  $\Sigma(r)$ , podemos integrar (2.89), o que resulta em:

$$\begin{aligned} V = & 2b^2 \left[ \frac{b^4 c_3}{5(c_3 + r^2)^5} - \frac{b^4 - 6b^2 c_3}{4(c_3 + r^2)^4} + \frac{4c_3 - \frac{b^2(c_3 - 3d^2)}{c_3 - d^2}}{2(c_3 + r^2)^3} + \frac{3(b^2 d^2 + c_3^2 - d^4)}{(c_3 - d^2)^3 (c_3 + r^2)} \right. \\ & \left. + \frac{3(b^2 d^2 + c_3^2 - d^4)}{2(c_3 - d^2)^2 (c_3 + r^2)^2} + \frac{3(b^2 d^2 + c_3^2 - d^4)}{(c_3 - d^2)^4} \ln \left( \frac{d^2 + r^2}{c_3 + r^2} \right) \right]. \quad (2.91) \end{aligned}$$

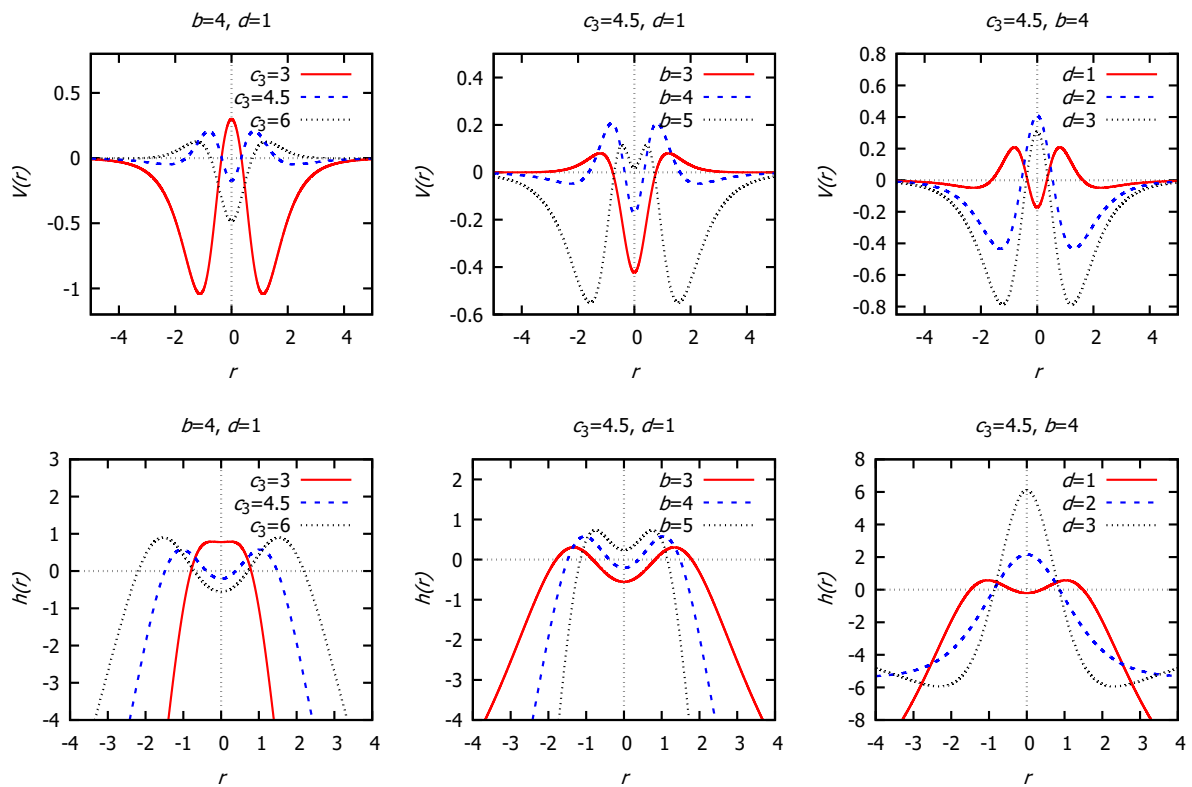
Explicitamente, em termos da coordenada radial, a função  $h(\phi(r))$  pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} h(\phi(r)) = & -\frac{1}{d^2(c_3 + r^2)^4} \left\{ b^4 r^2 (d^2 + r^2)^2 - c_3^2 [b^2 (d^2 + r^2)(d^2 + 3r^2) - 6d^2 r^4] \right. \\ & \left. + 2b^2 c_3 r^2 (d^4 - r^4) + b^2 r^4 (d^2 + r^2)(3d^2 + r^2) + c_3^4 d^2 + 4c_3^3 d^2 r^2 + 4c_3 d^2 r^6 + d^2 r^8 \right\}. \quad (2.92) \end{aligned}$$

O comportamento das funções  $V(\phi(r))$  e  $h(\phi(r))$  é mostrado na Fig. 9. Observamos que as funções são bem comportadas, e o sinal de  $h(r)$  muda diversas vezes com a coordenada radial. Para pontos mais distantes, nota-se que o campo escalar se comporta como um campo fantasma. Dependendo da escolha dos parâmetros, o campo escalar na região central pode ser tanto do tipo fantasma quanto do tipo padrão.

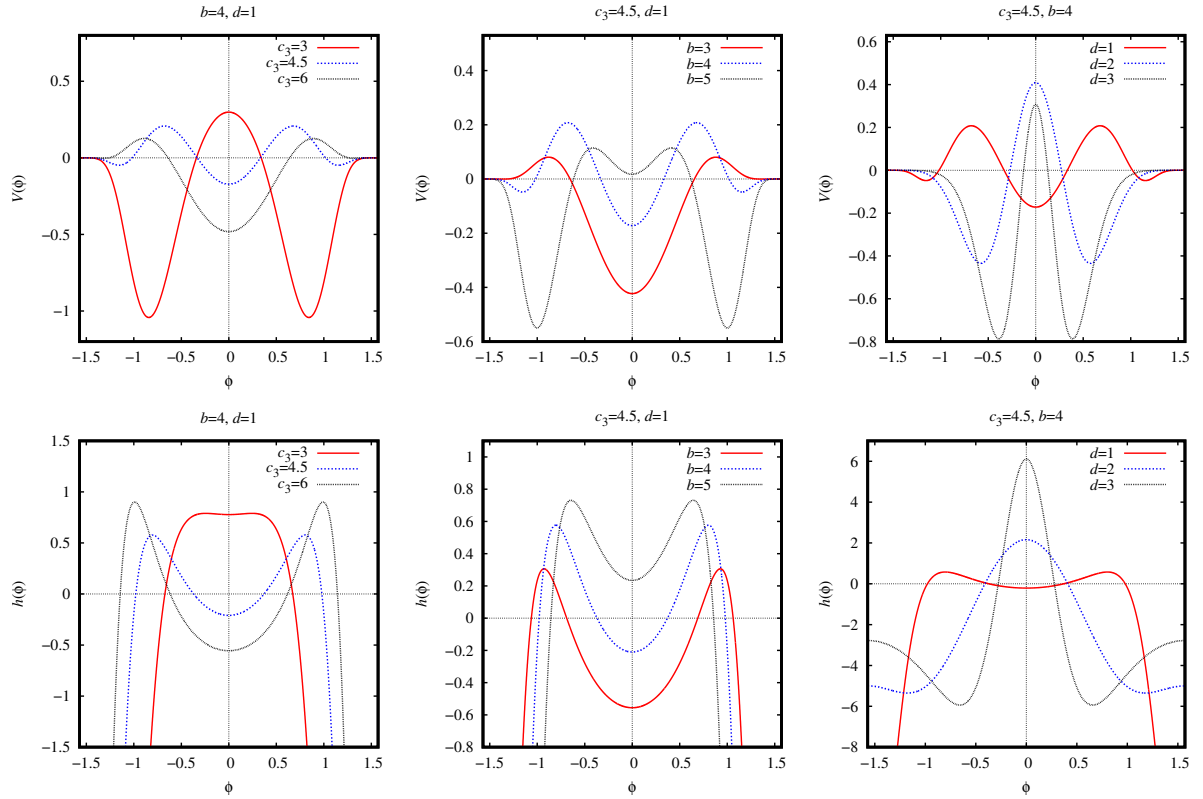
A função  $\phi(r)$  pode ser invertida, de modo que podemos obter a forma das funções

Figura 9: Comportamento gráfico das funções  $V(\phi(r))$  (painel superior) e  $h(\phi(r))$  (painel inferior) em função da coordenada  $r$  para diferentes combinações dos parâmetros do buraco de minhoca  $d, b$  e  $c_3$  e o modelo  $\phi = \arctan(r/d)$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 10: Comportamento gráfico das funções  $V(\phi)$  (painel superior) e  $h(\phi)$  (painel inferior) em função do campo escalar  $\phi$  para diferentes combinações dos parâmetros do buraco de minhoca  $b, d$  e  $c_3$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

$h(\phi)$  e  $V(\phi)$ , que são dadas por:

$$\begin{aligned}
 V(\phi) = & \frac{b^2}{10} \left[ \frac{4b^4 c_3}{(c_3 + d^2 \tan^2 \phi)^5} - \frac{5b^2 (b^2 - 6c_3)}{(c_3 + d^2 \tan^2 \phi)^4} + \frac{40c_3 (c_3 - d^2) - 10b^2 (c_3 - 3d^2)}{(c_3 - d^2)(c_3 + d^2 \tan^2 \phi)^3} \right. \\
 & + \frac{60(d^2 (b-d)(b+d) + c_3^2)}{(c_3 - d^2)^3 (c_3 + d^2 \tan^2 \phi)} + \frac{30(d^2 (b-d)(b+d) + c_3^2)}{(c_3 - d^2)^2 (c_3 + d^2 \tan^2 \phi)^2} \\
 & \left. + \frac{60(d^2 (b-d)(b+d) + c_3^2)}{(c_3 - d^2)^4} \ln \left( \frac{d^2 \sec^2 \phi}{c_3 + d^2 \tan^2 \phi} \right) \right], \quad (2.93)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h(\phi) = & -\frac{1}{(c_3 + d^2 \tan^2 \phi)^4} \left\{ d^2 \tan^2 \phi \left[ b^4 d^2 + 4c_3^3 + 2b^2 c_3 (d^2 - 2c_3) + d^4 (b^2 + d^2) \tan^6 \phi \right. \right. \\
 & + \tan^2 \phi (2b^4 d^2 + 3b^2 (d^4 - c_3^2) + 6c_3^2 d^2) + d^2 \tan^4 \phi (b^4 + 4d^2 (b^2 + c_3) - 2b^2 c_3) \\
 & \left. \left. + c_3^2 (c_3 - bd)(bd + c_3) \right] \right\}. \quad (2.94)
 \end{aligned}$$

A forma dessas funções é algo complicada e não muito clara. Assim, é mais eficiente analisar graficamente o comportamento das funções. A partir da Fig. 10, vemos que ambas são simétricas sob a transformação  $\phi \rightarrow -\phi$ . O campo escalar tende a uma constante para grandes valores da coordenada radial,  $\phi(r \rightarrow \pm\infty) \rightarrow \pm\pi/2$ , e nesse limite,  $h(\phi)$  tende a uma constante, enquanto  $V(\phi)$  tende a zero.

Agora que temos as quantidades relacionadas ao campo escalar, as funções associadas ao campo eletromagnético são dadas por:

$$\begin{aligned}
L = & -\frac{2b^4r^2}{(c_3+r^2)^4} - \frac{2r^2[(c_3+r^2)^2 - b^2(d^2+r^2)]^2}{(c_3+r^2)^4(d^2+r^2)^2} + \frac{2e^{-\frac{b^2}{c_3+r^2}}}{d^2+r^2} - \frac{2d^2}{(d^2+r^2)^2} \\
& + \frac{2b^2[3r^2(c_3-d^2) + c_3d^2 - r^4]}{(c_3+r^2)^3(d^2+r^2)} - 4b^2 \left\{ -\frac{3[d^2(b-d)(b+d) + c_3^2]}{(c_3-d^2)^4} \ln\left(\frac{c_3+r^2}{d^2+r^2}\right) \right. \\
& - \frac{1}{20(c_3+r^2)^5} \left[ \frac{10(c_3+r^2)^2(b^2(c_3-3d^2) + 4c_3(d^2-c_3))}{c_3-d^2} + 5(b^4 - 6b^2c_3)(c_3+r^2) \right. \\
& \left. \left. - \frac{60(c_3+r^2)^4(d^2(b^2-d^2) + c_3^2)}{(c_3-d^2)^3} - \frac{30(c_3+r^2)^3(d^2(b^2-d^2) + c_3^2)}{(c_3-d^2)^2} - 4b^4c_3 \right] \right\}, \quad (2.95)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_F = & \frac{(d^2+r^2)e^{\frac{b^2}{c_3+r^2}}}{2q^2(c_3+r^2)^4} \left\{ (c_3+r^2)^4 - e^{\frac{b^2}{c_3+r^2}} [r^2(c_3^2(4c_3-5b^2) + 2b^2d^2(b^2+c_3)) \right. \\
& \left. - r^6(b^2-4c_3) + r^4(2b^4+3b^2(d^2-2c_3) + 6c_3^2) + c_3^2(c_3-bd)(bd+c_3) + r^8 \right\}, \\
F = & \frac{2q^2e^{-2b^2/(c_3+r^2)}}{(d^2+r^2)^2}. \quad (2.96)
\end{aligned}$$

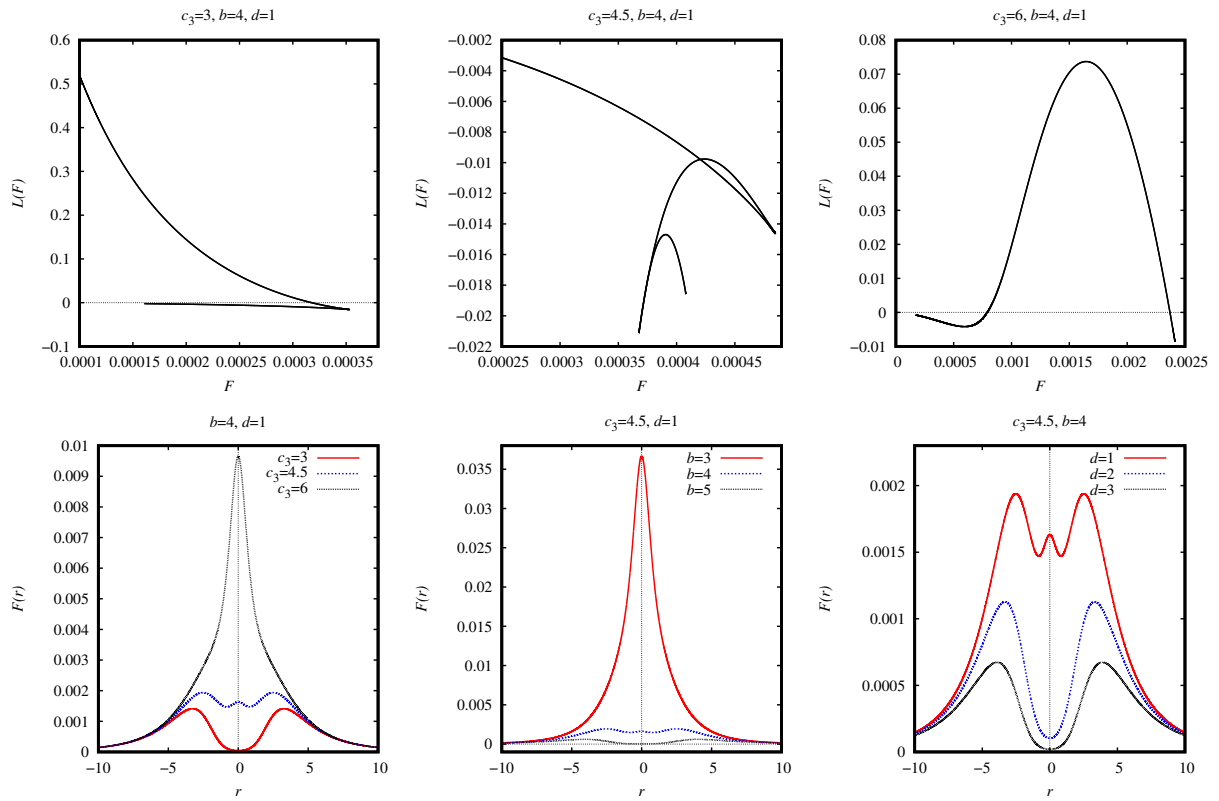
Apesar de bastante complexas, as funções eletromagnéticas obedecem à relação de consistência:

$$L_F \frac{dF}{dr} - \frac{dL}{dr} = 0. \quad (2.97)$$

Essa relação mostra que, embora sejam obtidas de forma independente por meio das equações de Maxwell e Einstein, as funções relacionadas ao campo eletromagnético,  $F$ ,  $L$  e  $L_F$ , estão interligadas. Na Fig. 11, observamos o comportamento das funções  $F$  e  $L$  em termos da coordenada radial, e notamos que essas funções são bem comportadas e simétricas sob a transformação  $r \rightarrow -r$ . Algo que se pode observar é que, dependendo da escolha dos parâmetros, a função  $F(r)$  pode apresentar diversos máximos e mínimos, e não conseguimos inverter analiticamente  $r(F)$  para expressar a função  $L(F)$  de forma explícita. Para cada máximo/mínimo não nulo de  $F(r)$ , haverá um bico presente na função  $L(F)$  [24, 120]. A presença desses bicos torna-se evidente na Fig. 12. Dependendo dos valores dos parâmetros, podemos ter bicos ou apenas uma função suave.

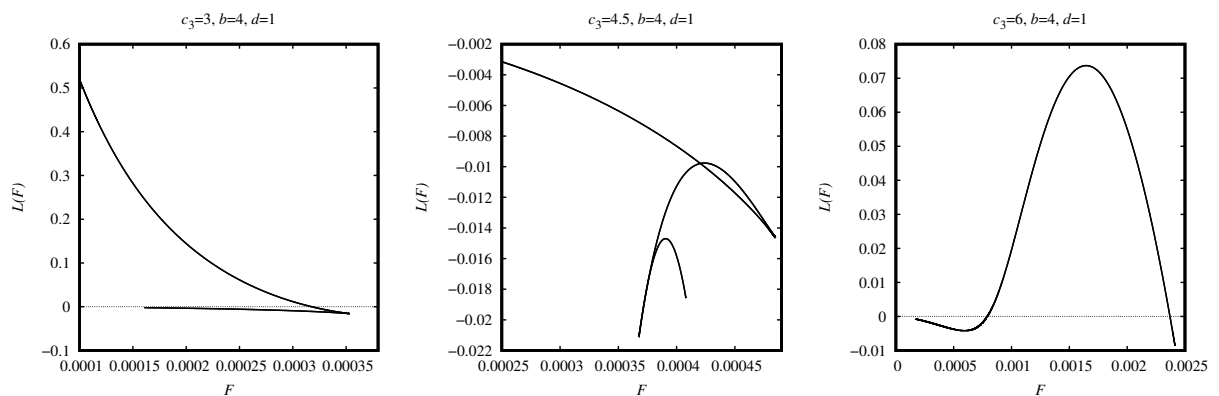
Dessa forma, o modelo escolhido para o campo escalar é consistente com o método e é capaz de satisfazer as equações de campo. Assim, o comportamento de todas as funções associadas aos campos fonte está descrito. A seguir, consideraremos outro modelo de campo escalar.

Figura 11: Comportamento da Lagrangiana eletromagnética  $L(r)$  (painel superior) e do invariante escalar eletromagnético  $F(r)$  (painel inferior) em função da coordenada  $r$  para diferentes combinações dos parâmetros do buraco de minhoca  $b, d$  e  $c_3$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 12: Comportamento da Lagrangiana eletromagnética  $L(F)$  em função do escalar  $F$  para diferentes combinações dos parâmetros do buraco de minhoca  $b, d$  e  $c_3$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 2.2.3.2 Modelo 2

Na subseção anterior, consideramos um modelo de campo escalar dado pela função arcotangente. Agora, exploramos uma escolha alternativa para investigar como diferentes perfis de campo escalar afetam a estrutura das funções, como o potencial  $V(\phi)$ . Especificamente, consideraremos  $\phi = \tanh(r/d)$ , uma forma que surge naturalmente em estudos de kink para potenciais do tipo  $V(\phi) = (\phi^2 - 1)^2/2$  [121, 122]. No entanto, focamos exclusivamente no perfil do campo escalar em si, sem considerar a forma do potencial.

Como as formas das funções  $L(r)$ ,  $L_F(r)$  e  $V(r)$  não dependem do campo escalar escolhido, elas permanecem as mesmas do modelo anterior. No entanto, as formas de  $h(r)$ ,  $h(\phi)$  e  $V(\phi)$  são modificadas. A partir de (2.87), obtemos:

$$\begin{aligned}
 h(\phi(r)) = & -\frac{d^2 \cosh^4\left(\frac{r}{d}\right)}{(c_3 + r^2)^4 (d^2 + r^2)^2} \left[ r^8 (b^2 + d^2) + d^2 r^2 (b^4 d^2 + 2b^2 c_3 (d^2 - 2c_3) + 4c_3^3) \right. \\
 & + r^4 (2b^4 d^2 + 3b^2 (d^4 - c_3^2) + 6c_3^2 d^2) + r^6 (b^4 + 4d^2 (b^2 + c_3) - 2b^2 c_3) \\
 & \left. + c_3^2 d^2 (c_3 - bd)(bd + c_3) \right]. \tag{2.98}
 \end{aligned}$$

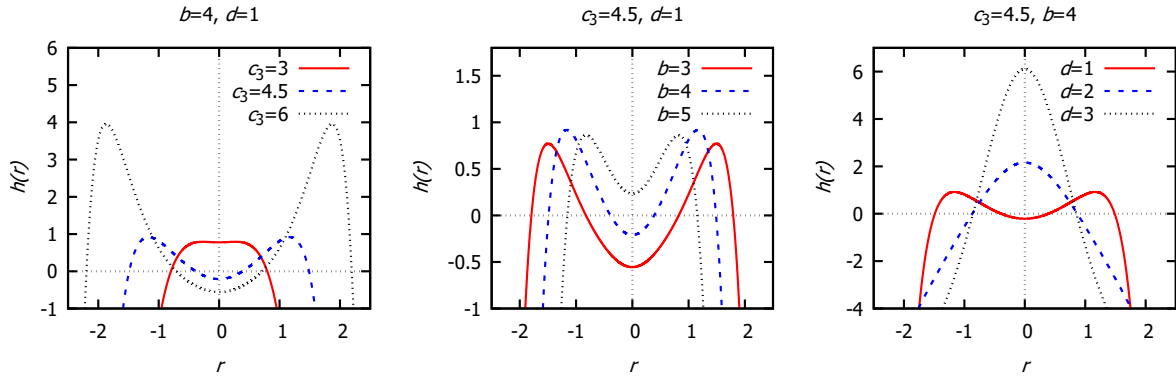
Como podemos ver, (2.92) e (2.98) são diferentes. Na Fig. 13, analisamos o comportamento de  $h(\phi(r))$ . Podemos observar que, apesar das funções (2.92) e (2.98) serem distintas, ambas apresentam valores negativos nas mesmas regiões. Isso indica que ambas as escolhas de campo escalar possuem o mesmo perfil tipo fantasma.

Embora  $V(r)$  não mude de forma neste segundo modelo,  $V(\phi)$  é diferente, já que o campo escalar foi alterado. As expressões analíticas de  $V(\phi)$  e  $h(\phi)$  são dadas por:

$$\begin{aligned}
 V(\phi) = & 2b^2 \left\{ \frac{3(b^2 d^2 + c_3^2 - d^4)}{(c_3 - d^2)^4} \ln \left[ \frac{d^2 (\tanh^{-1}(\phi)^2 + 1)}{c_3 + d^2 \tanh^{-1}(\phi)^2} \right] \right. \\
 & + \frac{1}{20(c_3 + d^2 \tanh^{-1}(\phi)^2)^5} \left[ 4b^4 c_3 + \frac{60(b^2 d^2 + c_3^2 - d^4)(c_3 + d^2 \tanh^{-1}(\phi)^2)^4}{(c_3 - d^2)^3} \right. \\
 & + \frac{30(b^2 d^2 + c_3^2 - d^4)(c_3 + d^2 \tanh^{-1}(\phi)^2)^3}{(c_3 - d^2)^2} - 5(b^4 - 6b^2 c_3)(c_3 + d^2 \tanh^{-1}(\phi)^2) \\
 & \left. \left. - \frac{10 [b^2(c_3 - 3d^2) + 4c_3(d^2 - c_3)] (c_3 + d^2 \tanh^{-1}(\phi)^2)^2}{c_3 - d^2} \right] \right\}, \tag{2.99}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h(\phi) = & -\frac{1}{(c_3 + d^2 \tanh^{-1}(\phi)^2)^4 (\phi^2 - 1)^2 (\tanh^{-1}(\phi)^2 + 1)^2} \left\{ d^2 \tanh^{-1}(\phi)^2 [b^4 d^2 \right. \\
 & + 2b^2 c_3 (d^2 - 2c_3) + d^4 (b^2 + d^2) \tanh^{-1}(\phi)^6 + \tanh^{-1}(\phi)^2 (2b^4 d^2 + 3b^2 (d^4 - c_3^2) + 6c_3^2 d^2) \\
 & \left. + d^2 \tanh^{-1}(\phi)^4 (b^4 + 4d^2 (b^2 + c_3) - 2b^2 c_3) + 4c_3^3 \right] + c_3^2 (c_3 - bd)(bd + c_3) \}. \tag{2.100}
 \end{aligned}$$

Figura 13: Comportamento da função  $h(\phi(r))$  em função da coordenada  $r$  para diferentes combinações dos parâmetros do buraco de minhoca  $b$ ,  $d$  e  $c_3$ , e o modelo  $\phi = \tanh(r/d)$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

As expressões analíticas são bastante extensas, mas podemos analisar o comportamento das funções graficamente por meio da Fig. 14. Embora o intervalo possível para o campo escalar seja menor do que no caso anterior, agora  $\phi(r \rightarrow \pm\infty) \rightarrow \pm 1$ , o comportamento continua similar ao mostrado na Fig. 10.

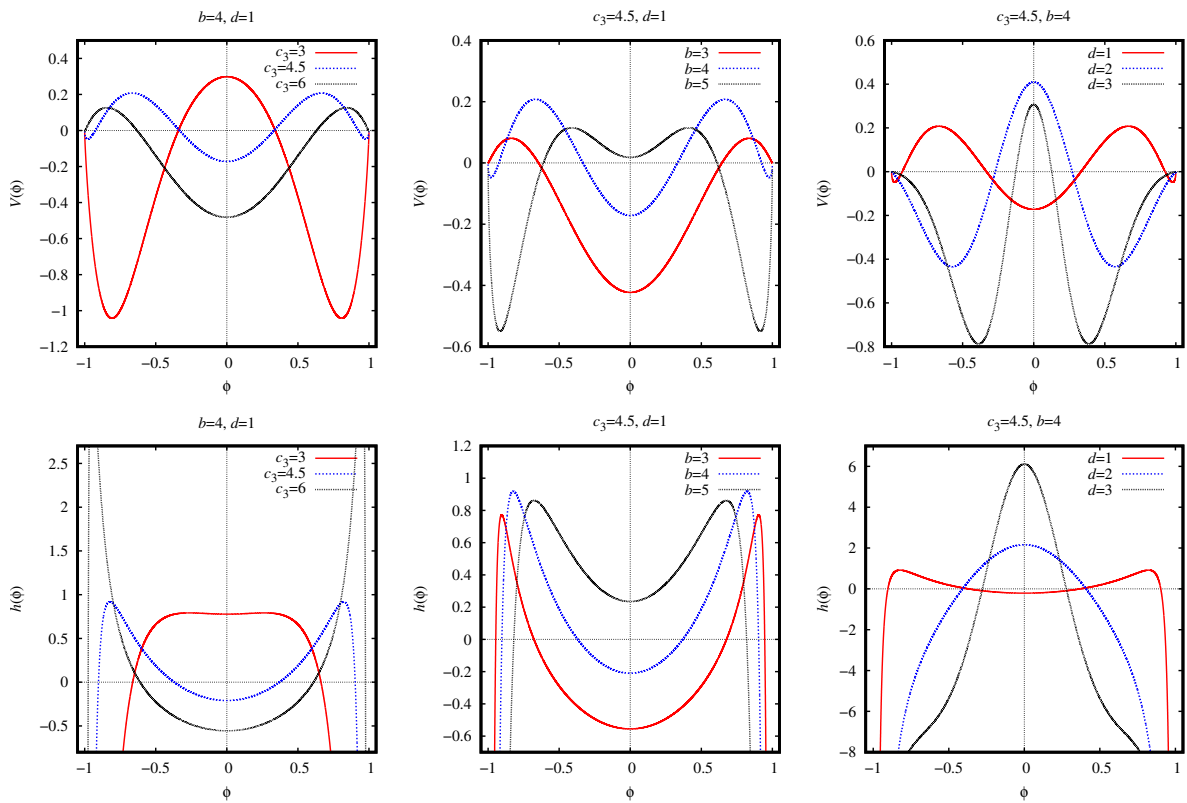
Portanto, vemos que, embora o método escolhido nos permita a liberdade de selecionar o campo escalar, o comportamento das funções para os modelos escolhidos é bastante semelhante. Assim, devido às mudanças introduzidas pelos novos parâmetros, torna-se agora de interesse investigar como essas modificações podem ajudar a mitigar a violação das condições de energia nesta solução.

#### 2.2.4 Condições de Energia

Buracos de minhoca são conhecidos por violar condições de energia, como a NEC. Para que um buraco de minhoca seja estável e permita a passagem de matéria, é necessário que exista matéria exótica, caracterizada por propriedades como densidade de energia negativa. Portanto, é essencial explorar as condições de energia em nosso modelo de buraco de minhoca para investigar se elas são violadas.

Além da NEC mencionada anteriormente, também analisamos a condição de energia forte (SEC), condição de energia fraca (WEC) e condição de energia dominante (DEC).

Figura 14: Comportamento gráfico das funções  $V(\phi)$  (painel superior) e  $h(\phi)$  (painel inferior) em função do campo escalar  $\phi$  para diferentes combinações dos parâmetros do buraco de minhoca  $b$ ,  $d$  e  $c_3$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Essas condições são dadas pelas seguintes desigualdades [123]:

$$NEC_{1,2} = WEC_{1,2} = SEC_{1,2} \iff \rho + p_{r,t} \geq 0, \quad (2.101)$$

$$SEC_3 \iff \rho + p_r + 2p_t \geq 0, \quad (2.102)$$

$$DEC_{1,2} \iff \rho - |p_{r,t}| \geq 0 \iff (\rho + p_{r,t} \geq 0) \text{ e } (\rho - p_{r,t} \geq 0), \quad (2.103)$$

$$DEC_3 = WEC_3 \iff \rho \geq 0, \quad (2.104)$$

onde  $\rho$ ,  $p_r$  e  $p_t$  representam a densidade de energia, pressão radial e pressão tangencial, respectivamente. Essas quantidades são identificadas através das componentes do tensor energia-momento:

$$T^\mu{}_\nu = \text{diag}[-\rho, p_r, p_t, p_t]. \quad (2.105)$$

Essa identificação é feita a partir das equações de Einstein, calculando o tensor de Einstein para o elemento de linha (2.53).

Calculando os componentes do tensor energia-momento, obtemos as seguintes combinações:

$$\rho + p_r = -\frac{2b^4 r^2}{(r^2 + c_3)^4} - \frac{2b^2 [d^2(3r^2 - c_3) + r^4 - 3r^2 c_3]}{(d^2 + r^2)(r^2 + c_3)^3} - \frac{2d^2}{(d^2 + r^2)^2}, \quad (2.106)$$

$$\rho + p_t = -\frac{2b^4 r^2}{(r^2 + c_3)^4} + \frac{e^{-\frac{b^2}{r^2 + c_3}} - 1}{d^2 + r^2} + \frac{b^2 [d^2(c_3 - 3r^2) + r^4 + 5r^2 c_3]}{(d^2 + r^2)(r^2 + c_3)^3}, \quad (2.107)$$

$$\rho + p_r + 2p_t = 0, \quad (2.108)$$

$$\rho - p_r = -\frac{4b^4 r^2}{(r^2 + c_3)^4} + \frac{2 \left( e^{-\frac{b^2}{r^2 + c_3}} - 1 \right)}{d^2 + r^2} + \frac{2b^2 [d^2(c_3 - 3r^2) + r^4 + 5r^2 c_3]}{(d^2 + r^2)(r^2 + c_3)^3}, \quad (2.109)$$

$$\rho - p_t = -\frac{4b^4 r^2}{(r^2 + c_3)^4} + \frac{e^{-\frac{b^2}{r^2 + c_3}}}{d^2 + r^2} - \frac{b^2 [d^2(9r^2 - 3c_3) + r^4 - 11r^2 c_3]}{(d^2 + r^2)(r^2 + c_3)^3} - \frac{3d^2 + r^2}{(d^2 + r^2)^2}, \quad (2.110)$$

$$\rho = -\frac{3b^4 r^2}{(r^2 + c_3)^4} + \frac{2b^2 [d^2(c_3 - 3r^2) + 4r^2 c_3]}{(d^2 + r^2)(r^2 + c_3)^3} + \frac{(d^2 + r^2)e^{-\frac{b^2}{r^2 + c_3}} - 2d^2 - r^2}{(d^2 + r^2)^2}. \quad (2.111)$$

Para consistência, ao definir  $b = 0$  nas expressões acima, recuperamos o caso Ellis-

Bronnikov, obtendo:

$$\rho + p_r = -\frac{2d^2}{(r^2 + d^2)^2} < 0, \quad \forall r \in (-\infty, +\infty), \quad (2.112)$$

$$\rho + p_t = 0, \quad (2.113)$$

$$\rho + p_r + 2p_t = 0, \quad (2.114)$$

$$\rho - p_r = 0, \quad (2.115)$$

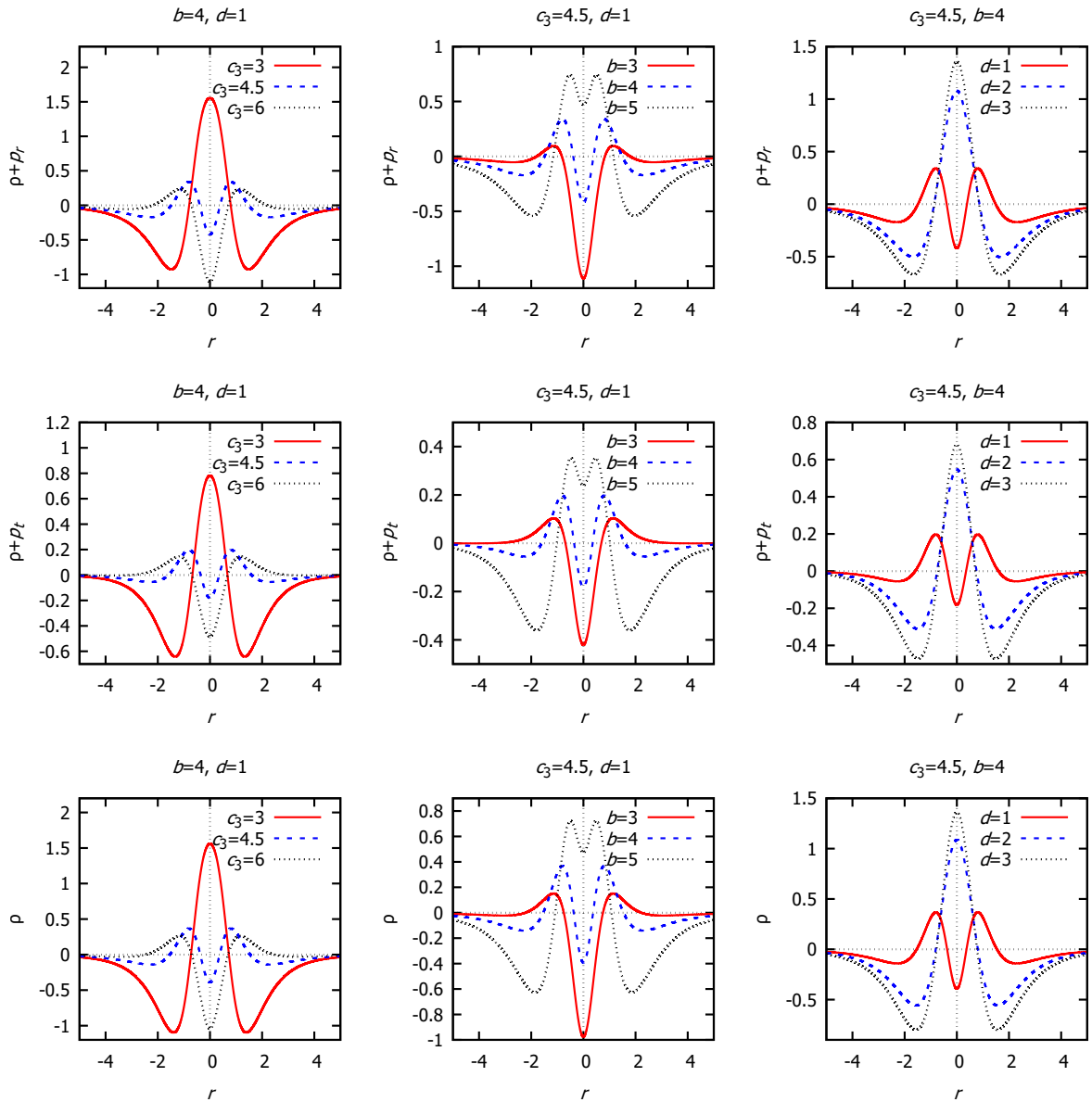
$$\rho - p_t = -\frac{2d^2}{(r^2 + d^2)^2} < 0, \quad \forall r \in (-\infty, +\infty), \quad (2.116)$$

confirmando que, para  $b = 0$ , as condições de energia são globalmente violadas, como esperado.

Para  $b \neq 0$ , a única condição identicamente satisfeita é  $SEC_3$ . As outras condições requerem análise adicional para determinar as regiões onde as desigualdades são válidas. Nas Figuras 15 e 16, ilustramos o comportamento da densidade de energia e suas combinações com as pressões. Verificamos que, independentemente da escolha dos parâmetros, existem sempre regiões onde as condições de energia são violadas. Contudo, dependendo dos parâmetros, todas as condições de energia podem ser satisfeitas próximo à região central  $r \rightarrow 0$ . Em distâncias maiores do buraco de minhoca, as violações tornam-se evidentes. Isso está de acordo com resultados anteriores para o campo escalar, que apresenta comportamento fantasma longe do buraco.

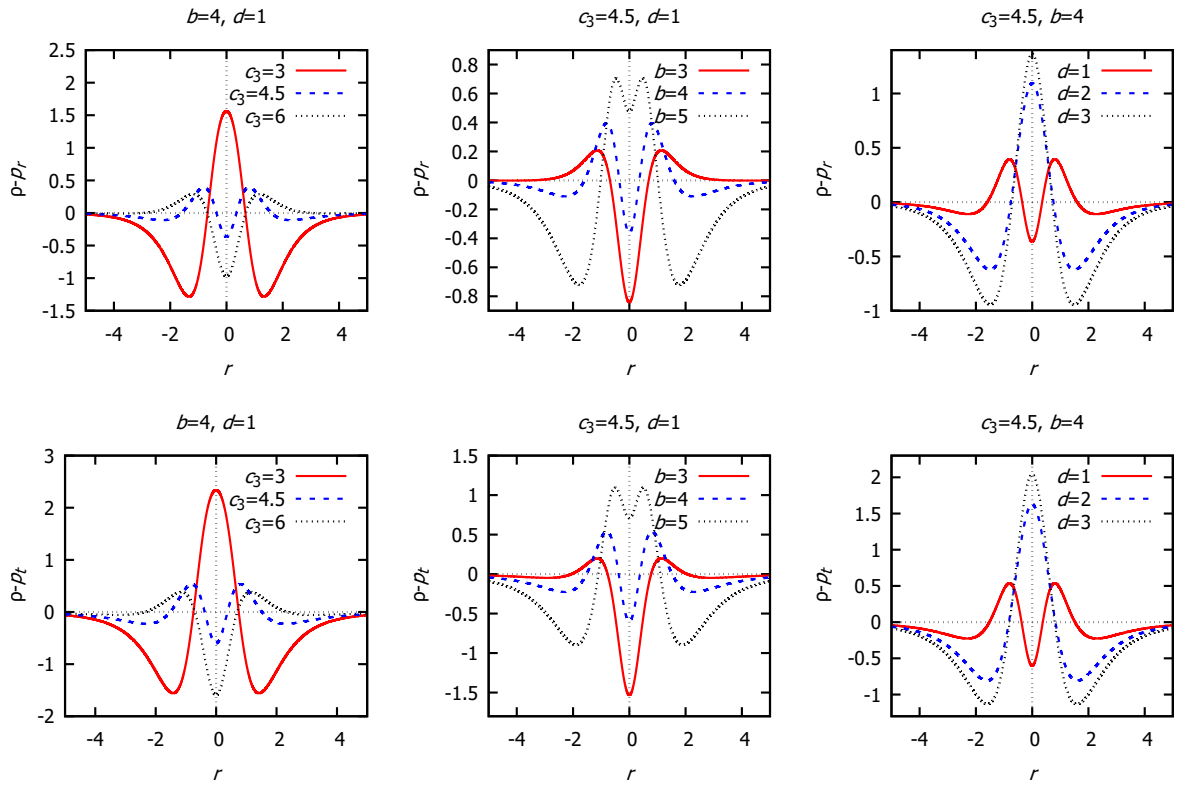
Portanto, nosso modelo apresenta tanto desvantagens quanto vantagens em comparação a outros modelos de buraco de minhoca, como o de Ellis-Bronnikov. Diferentemente do caso Ellis-Bronnikov, onde certas desigualdades eram sempre válidas, aqui as violações são relaxadas, permitindo que para algumas escolhas de parâmetros todas as condições de energia sejam satisfeitas, ao menos localmente. Essa flexibilização pode indicar menor instabilidade ou problemas patológicos como gravidade repulsiva ou violações de causalidade.

Figura 15: Comportamento da densidade de energia  $\rho$  (painel inferior) e das combinações  $\rho + p_r$  (painel superior) e  $\rho + p_t$  (painel do meio) para diferentes parâmetros do buraco de minhoca  $b$ ,  $d$  e  $c_3$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 16: Comportamento das combinações de pressão  $\rho - p_r$  (painel superior) e  $\rho - p_t$  (painel inferior) para diferentes parâmetros do buraco de minhoca  $b$ ,  $d$  e  $c_3$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3 BLACK BOUNCES COMO SOLUÇÕES DE TEORIAS $f(R)$

Teorias  $f(R)$  são teorias que modificam a RG de Einstein considerando que, em vez da ação usual de Einstein-Hilbert, dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (R + L_m), \quad (3.1)$$

onde  $L_m$  é a lagrangeana de matéria, temos que o termo gravitatório depende de forma não linear do escalar de Ricci, de modo que temos, em geral, uma ação dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (f(R) + L_m), \quad (3.2)$$

onde  $f$  é uma função arbitrária de  $R$ .

Variando a ação acima com respeito a  $g^{\mu\nu}$  encontramos a equação de Einstein modificada dada por

$$f_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f + (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) f_R = T_{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

onde  $f_R = df/dR$ .

A teoria  $f(R)$  tem ganhado atenção crescente no estudo de objetos compactos devido às suas correções à RG, com inúmeros estudos realizados em BNs[124–134], buracos de minhoca [135–138], BNs regulares [33, 139–142], e, mais recentemente, em BB[114, 143–147]. No entanto, o estudo de fontes de BB em teorias  $f(R)$  é um tema que tem sido muito pouco explorado na literatura. De fato, nosso trabalho é o primeiro a explorar esse tópico.

#### 3.1 Fontes de Campo de Black bounce em teorias $f(R)$

Sabe-se que a métrica de bounce SV é uma solução da RG quando consideramos o acoplamento entre um campo escalar fantasma e uma eletrodinâmica não linear [108, 117, 148, 149]. No entanto, ainda não está claro se esse tipo de comportamento persiste em teorias modificadas da gravitação. Em um artigo recente, os autores deste trabalho mostraram que isso é possível para teorias de gravidade  $K$  [114]. Porém, o caso  $f(R)$  é fundamentalmente diferente, pois deve recuperar GR ( $f(R) \rightarrow R$ ) para alguns parâmetros.

### 3.1.1 Aspectos Gerais

Assumimos que a métrica SV representa uma solução de uma teoria  $f(R)$  da gravidade e buscamos identificar os tipos de campos que poderiam agir como fontes para essa geometria. Consideramos, para melhor identificar as modificações, que:

$$f(R) = a_0 R + H(R). \quad (3.4)$$

Recuperamos RG para  $a_0 = 1$  e  $H(R) = 0$ . Fontes de campo para o termo linear já foram encontradas em muitos casos. Portanto, é interessante considerar que os campos materiais também se dividam como  $L^{(GR)} + L^{(H)}$ . Assim, consideramos uma ação da forma:

$$S = \int \sqrt{|g|} d^4x [a_0 R + H(R) - 2h(\phi)g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + 2V + L(F)], \quad (3.5)$$

onde  $H(R)$  é uma função do escalar de Ricci  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ ,  $\phi$  é o campo escalar,  $V(\phi) = V^{(GR)}(\phi) + V^{(H)}(\phi)$  é o potencial associado ao campo escalar,  $L(F) = L^{(GR)}(F) + L^{(H)}(F)$  é a Lagrangiana não linear, e  $h(\phi) = \varepsilon + h^{(H)}(\phi)$ , sendo  $h^{(H)}(\phi)$  uma correção para a ação fantasma.

Variando a ação (3.5) em relação a  $A_\mu$ , obtemos a equação (2.27) novamente, enquanto variando com respeito a  $\phi$ ,  $g^{\mu\nu}$  e separando o tensor energia-momento, obtemos as seguintes equações de campo:

$$2\varepsilon\nabla_\mu\nabla^\mu\phi + 2h^{(H)}(\phi)\nabla_\mu\nabla^\mu\phi + \frac{dh^{(H)}(\phi)}{d\phi}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi = -\frac{dV(\phi)}{d\phi}, \quad (3.6)$$

$$a_0 G_{\mu\nu} + H_{\mu\nu} = T^{(GR)}[\phi]_{\mu\nu} + T^{(H)}[\phi]_{\mu\nu} + T^{(GR)}[F]_{\mu\nu} + T^{(H)}[F]_{\mu\nu}. \quad (3.7)$$

Na última equação, definimos a variação de  $H$  como

$$H_{\mu\nu} = H_R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}H + (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu)H_R, \quad (3.8)$$

onde  $L_F = dL/dF$ ,  $H_R = dH(R)/dR$  e:

$$T^{(GR)}[F]_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}L^{(GR)}(F) - 2L_F^{(GR)}F_\nu^\alpha F_{\mu\alpha}, \quad (3.9)$$

$$T^{(H)}[F]_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}L^{(H)}(F) - 2L_F^{(H)}F_\nu^\alpha F_{\mu\alpha}, \quad (3.10)$$

$$T^{(GR)}[\phi]_{\mu\nu} = 2\varepsilon\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}(\varepsilon\partial^\alpha\phi\partial_\alpha\phi - V^{(GR)}(\phi)), \quad (3.11)$$

$$T^{(H)}[\phi]_{\mu\nu} = 2h^{(H)}(\phi)\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}(h^{(H)}(\phi)\partial^\alpha\phi\partial_\alpha\phi - V^{(H)}(\phi)). \quad (3.12)$$

Seguindo nossa abordagem, consideraremos o seguinte sistema de equações:

$$2\varepsilon\nabla_\mu\nabla^\mu\phi = -\frac{dV^{(GR)}(\phi)}{d\phi}, \quad (3.13)$$

$$a_0G_{\mu\nu} = T^{(GR)}[\phi]_{\mu\nu} + T^{(GR)}[F]_{\mu\nu}, \quad (3.14)$$

e procuramos por  $h^{(H)}$ ,  $L^{(H)}(F)$  e  $V^{(H)}$  tais que

$$\nabla_\mu(L_F F^{\mu\nu}) = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu(\sqrt{|g|}L_F F^{\mu\nu}) = 0, \quad (3.15)$$

$$2h^{(H)}(\phi)\nabla_\mu\nabla^\mu\phi + \frac{dh^{(H)}(\phi)}{d\phi}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi = -\frac{dV^{(H)}(\phi)}{d\phi}, \quad (3.16)$$

$$H_{\mu\nu} = T^{(H)}[\phi]_{\mu\nu} + T^{(H)}[F]_{\mu\nu}, \quad (3.17)$$

sejam satisfeitas.

Devemos ter cuidado com a possibilidade de que as soluções para  $F$  permitam a separação de  $T[F]_{\mu\nu}$ . Para analisar isso, consideraremos, a partir de agora, que nosso espaço-tempo é esfericamente simétrico. Resolvendo as equações de Maxwell, considerando cargas elétricas e magnéticas, as componentes não nulas são

$$F^{10} = \frac{q_e}{\Sigma(r)^2 L_F}, \quad F_{23} = q_m \sin\theta \rightarrow F = -\frac{q_e^2}{2L_F^2 \Sigma(r)^4}, \quad F = \frac{q_m^2}{2\Sigma(r)^4}, \quad (3.18)$$

onde  $q_e$  e  $q_m$  representam, respectivamente, cargas elétricas e magnéticas constantes. Devido à presença de  $L_F$  no denominador, é impossível separar o tensor energia-momento. Portanto, nossa abordagem é consistente apenas para carga magnética, a qual chamaremos simplesmente de  $q$  a partir de agora.

Vamos revisar alguns pontos-chave sobre a equação (3.14) e como o tensor energia-momento é determinado pela geometria. Primeiro, notamos que, combinando os componentes  $\binom{0}{0}$  e  $\binom{1}{1}$ , obtemos

$$T^{(GR)}[\phi]_1^1 - T^{(GR)}[\phi]_0^0 = -2\varepsilon A\phi'^2 = a_0 G_1^1 - a_0 G_0^0 = \frac{2a_0 A \Sigma''}{\Sigma}, \quad (3.19)$$

e

$$\phi'^2 = -\frac{a_0 \Sigma''}{\varepsilon \Sigma}. \quad (3.20)$$

A partir de agora, sem perda de generalidade, consideraremos  $a_0 = 1$ . Substituindo isso na Eq. (3.13), verificamos que  $\phi(r)$  e  $V^{(GR)}$  e, portanto,  $T^{(GR)}[\phi]_{\mu\nu}$  são determinados a partir dos

componentes  $\binom{0}{0}$  e  $\binom{1}{1}$  do tensor de Einstein. Com isso, reescrevemos (3.14) como

$$T^{(GR)}[F]_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - T^{(GR)}[\phi]_{\mu\nu}. \quad (3.21)$$

A partir do componente  $\binom{0}{0}$  e da combinação entre  $\binom{0}{0}$  e  $\binom{2}{2}$  da equação acima, obtemos

$$L^{(GR)}[F] = G^0_0 - T^{(GR)}[\phi]^0_0, \quad (3.22)$$

$$\frac{q^2}{2\Sigma(r)^4} L_F^{(GR)}[F] = (G^0_0 - G^2_2) - \left( T^{(GR)}[\phi]^0_0 - T^{(GR)}[\phi]^2_2 \right). \quad (3.23)$$

Portanto, como de costume,  $\phi(r)$ ,  $V^{(GR)}$ ,  $L(r)^{(GR)}$  e  $L_F(r)^{(GR)}$  são determinados a partir da geometria. A dependência explícita nos campos será caso a caso.

Agora mostraremos que, dada a solução acima, também podemos determinar  $T^{(H)}[\phi]_{\mu\nu}$  e  $T^{(H)}[F]_{\mu\nu}$  a partir da geometria. Para isso, voltamos à Eq. (3.17) e notamos que  $T^{(H)}[\phi]_{\mu\nu}$  e  $T^{(H)}[F]_{\mu\nu}$  possuem exatamente as mesmas simetrias que  $T^{(GR)}[\phi]_{\mu\nu}$  e  $T^{(GR)}[F]_{\mu\nu}$ , respectivamente. Portanto, os mesmos passos podem ser seguidos, e obtemos diretamente

$$T^{(H)}[\phi]^1_1 - T^{(H)}[\phi]^0_0 = -2h^{(H)} A \phi'^2 = 2Ah^{(H)} \frac{\Sigma''}{\varepsilon\Sigma} = H^1_1 - H^0_0. \quad (3.24)$$

Substituindo isso na Eq. (3.16), encontramos que  $h^{(H)}$ ,  $V^{(H)}$  e  $T^{(H)}[\phi]_{\mu\nu}$  são completamente determinados. Assim como antes, esses resultados podem ser utilizados para obter

$$L^{(H)}[F] = H^0_0 - T^{(H)}[\phi]^0_0, \quad (3.25)$$

$$\frac{q^2}{2\Sigma(r)^4} L_F^{(H)}[F] = (H^0_0 - H^2_2) - \left( T^{(H)}[\phi]^0_0 - T^{(H)}[\phi]^2_2 \right). \quad (3.26)$$

Os resultados acima podem ser ainda mais simplificados se notarmos que

$$H_{\mu\nu} = H_R \left( T_{\mu\nu}^{(GR)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (T^{(GR)})^\alpha_\alpha \right) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} H + (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) H_R. \quad (3.27)$$

Substituindo isso nas equações (3.24), (3.25) e (3.26), obtemos as fontes finais:

$$2Ah^{(H)} \frac{\Sigma''}{\varepsilon\Sigma} = H_R \left( (T^{(GR)})^1_1 - (T^{(GR)})^0_0 \right) - (\nabla^1 \nabla_1 - \nabla^0 \nabla_0) H_R, \quad (3.28)$$

$$L^{(H)}[F] = H_R \left( (T^{(GR)})^0_0 - \frac{1}{2} (T^{(GR)})^\alpha_\alpha \right) - \frac{1}{2} H + (\square - \nabla^0 \nabla_0) H_R - T^{(H)}[\phi]^0_0, \quad (3.29)$$

$$\frac{q^2}{2\Sigma(r)^4} L_F^{(H)}[F] = H_R \left( (T^{(GR)})^0_0 - (T^{(GR)})^2_2 \right) - (\nabla^0 \nabla_0 - \nabla^2 \nabla_2) H_R - \left( T^{(H)}[\phi]^0_0 - T^{(H)}[\phi]^2_2 \right). \quad (3.30)$$

Portanto, nossa abordagem pode ser usada para encontrar a fonte para qualquer teoria  $f(R)$

definida por (3.4).

Dada a forma das equações (3.7) e (3.14), considerando a maneira como construímos nossa ação, é fácil ver que nossas funções de interesse assumem a forma:

$$F(r) = \frac{2q^2}{(a^2 + r^2)^2}, \quad (3.31)$$

$$L(F) = L^{(GR)}(F) + L^{(H)}(F), \quad (3.32)$$

$$L_F(F) = L_F^{(GR)}(F) + L_F^{(H)}(F), \quad (3.33)$$

$$\phi(r) = \arctan\left(\frac{r}{a}\right), \quad (3.34)$$

$$h(\phi) = h^{(GR)}(\phi) + h^{(H)}(\phi), \quad (3.35)$$

$$V(\phi) = V^{(GR)}(\phi) + V^{(H)}(\phi), \quad (3.36)$$

onde as funções de RG são dadas por [108]:

$$L^{(GR)}(F(r)) = \frac{12a^2m}{5(a^2 + r^2)^{5/2}}, \quad (3.37)$$

$$L_F^{(GR)}(F(r)) = \frac{3a^2m}{2q^2\sqrt{a^2 + r^2}}, \quad (3.38)$$

$$h^{(GR)}(\phi(r)) = \varepsilon = -1, \quad (3.39)$$

$$V^{(GR)}(\phi(r)) = \frac{4a^2m}{5(a^2 + r^2)^{5/2}}. \quad (3.40)$$

Ou, em termos do invariante eletromagnético  $F$  e do campo escalar  $\phi$ :

$$L^{(GR)}(F) = \frac{3 \cdot 2^{3/4} a^2 F^{5/4} m}{5q^{5/2}}, \quad (3.41)$$

$$h^{(GR)}(\phi) = \varepsilon = -1, \quad (3.42)$$

$$V^{(GR)}(\phi) = \frac{4m \cos^5 \phi}{5a^3}. \quad (3.43)$$

Agora dividiremos nossa análise em diferentes casos, isto é, vários modelos de teorias  $f(R)$ .

### 3.1.2 Caso I: $H(R) = a_R R^2$

O modelo mais conhecido de teoria  $f(R)$  é o chamado modelo de Starobinsky [150–153], em que

$$f(R) = R + a_R R^2, \quad (3.44)$$

onde  $a_R$  é uma constante de acoplamento. Nesse contexto,  $H(R) = a_R R^2$ , e a RG é recuperada para  $H = 0$ , ou seja,  $a_R = 0$ . A função  $H_R$  é, conseqüentemente, dada por  $H_R = 2a_R R$ . Utilizando a métrica dada em (2.53) e seguindo a abordagem apresentada em 3.1.1, podemos determinar analiticamente todas as funções de correção de interesse, que são dadas por:

$$L^{(H)}(F(r)) = a_R a^2 \left( \frac{2(20a^4 + a^2(27m^2 + 100r^2) + 675m^2 r^2 + 80r^4)}{15(a^2 + r^2)^5} - \frac{16m(11a^2 + 81r^2)}{21(a^2 + r^2)^{9/2}} \right), \quad (3.45)$$

$$L_F^{(H)}(F(r)) = \frac{6a^2 a_R m (a^2 - 9r^2)}{q^2 (a^2 + r^2)^{5/2}} + \frac{2a^2 a_R (a^2 (4r^2 - 9m^2) + 45m^2 r^2 + 4r^4)}{q^2 (a^2 + r^2)^3}, \quad (3.46)$$

$$h^{(H)}(\phi(r)) = \frac{2a_R (a^2 - 10r^2) (2\sqrt{a^2 + r^2} - 9m)}{(a^2 + r^2)^{5/2}}, \quad (3.47)$$

$$V^{(H)}(\phi(r)) = a_R a^2 \left( \frac{2m(1290r^2 - 481a^2)}{21(a^2 + r^2)^{9/2}} + \frac{130a^4 + a^2(783m^2 - 70r^2) - 25r^2(135m^2 + 8r^2)}{15(a^2 + r^2)^5} \right). \quad (3.48)$$

$$(3.49)$$

Esses termos envolvendo  $a_R$  são as correções exigidas pela teoria da gravidade modificada para as fontes, de modo que a métrica SV possa ser gerada pela teoria.

É importante destacar algumas diferenças em relação à RG. Na RG, temos  $h(\phi) = -1$ , de modo que o campo escalar é sempre um campo fantasma. Aqui, usando a equação (3.35) e considerando o termo de correção encontrado acima, podemos expandir  $h(\phi)$ :

$$h(\phi) \approx -1 - \frac{40a_R}{r^2} + O(r^{-3}), \quad \text{se } r \rightarrow \infty, \quad (3.50)$$

$$h(\phi) \approx -1 + \frac{2a_R(2a - 9m)}{a^3} + O(r^2), \quad \text{se } r \rightarrow 0. \quad (3.51)$$

Essas expressões nos dizem que o campo escalar continua exibindo comportamento fantasma no infinito. No entanto, se  $a > \frac{9m}{2}$ , ou seja, no caso de buracos de minhoca atravessáveis, e  $a_R$  for suficientemente grande e positivo, o campo escalar pode deixar de ser fantasma nas regiões mais internas, tornando-se, assim, parcialmente fantasma. Dessa forma, a teoria  $f(R)$  pode relaxar a condição de o campo escalar ser fantasma em algumas regiões do espaço-tempo.

As funções  $F(r)$  e  $\phi(r)$  são facilmente invertíveis, de modo que podemos escrever

analiticamente  $L^{(H)}(F)$ ,  $V^{(H)}(\phi)$  e  $h^{(H)}(\phi)$ , que são expressas como:

$$L^{(H)}(F) = \frac{a^2 a_R F^{5/4}}{210 \sqrt{2} q^5} \left[ 5q \left( 945 \sqrt{2} F^{3/4} m^2 - 648 \cdot 2^{3/4} m \sqrt{Fq} + 224 \sqrt[4]{Fq} \right) - 28a^2 \left( 162 F^{5/4} m^2 + 15 \sqrt{2} F^{3/4} q - 100 \sqrt[4]{2Fm\sqrt{q}} \right) \right], \quad (3.52)$$

$$h^{(H)}(\phi) = \frac{a_R (11 \cos 2\phi - 9) \left( 2a \sqrt{\sec^2 \phi} - 9m \right)}{(a^2 \sec^2 \phi)^{3/2}}, \quad (3.53)$$

$$V^{(H)}(\phi) = \frac{a_R \cos^6 \phi}{105 a^6} \left( 35 a^2 (33 \cos 2\phi - 7) + m \cos^2 \phi (77 \cos 2\phi (189m - 115a \sec \phi) + 4045a \sec \phi - 9072m) \right) \quad (3.54)$$

A presença da teoria  $f(R)$  exige muito mais não-linearidades nos campos fonte do que a RG.

Assim, vemos que, mesmo com as complicações adicionais que a teoria  $f(R)$  exige dos campos fonte, é possível obter a solução SV em teorias modificadas da gravidade ao combinar uma eletrodinâmica não linear com um campo escalar parcialmente fantasma.

Também podemos escolher outros modelos de  $f(R)$  e verificar que tipos de fontes surgem. No entanto, na próxima subseção, tentaremos uma abordagem diferente.

### 3.1.3 Caso II: $H_R(R(r)) = a_1 r$

Nas referências [139, 140], os autores estudaram buracos negros regulares em teorias  $f(R)$  e encontraram que, devido à simetria do espaço-tempo considerado, a função  $f_R(R)$  era linear quando analisada em termos da coordenada radial. Como estamos considerando BB, que são estruturas mais complexas do que buracos negros regulares usuais, esse tipo de comportamento não surge naturalmente das equações de campo. No entanto, ainda podemos impor esse comportamento e investigar quais tipos de fontes de campo podem emergir.

Vamos considerar  $H_R$  escrito como

$$H_R(R(r)) = a_1 r, \quad (3.55)$$

isto é,  $f_R = 1 + a_1 r$ , onde  $a_1$  é uma constante. Nesse caso, a função  $H(R)$  como função da coordenada radial pode ser calculada como:

$$H(R(r)) = \int H_R \frac{dR}{dr} dr. \quad (3.56)$$

Quando  $a_1 = 0$ , recuperamos a RG.

Considerando o elemento de linha (2.53) e seguindo a abordagem apresentada em

3.1.1, encontramos que as funções relacionadas às correções das fontes dos campos são dadas por:

$$L^{(H)}(F(r)) = 2a_1 \left( -\frac{2m(10a^2r^3 + 7r^5)}{5a^2(a^2 + r^2)^{5/2}} - \frac{r}{a^2 + r^2} + \frac{2 \tan^{-1} \left( \frac{r - \sqrt{a^2 + r^2}}{a} \right)}{a} \right), \quad (3.57)$$

$$L_F^{(H)}(F(r)) = \frac{a_1}{2q^2} \left( -r\sqrt{a^2 + r^2} \left( \frac{3mr^2}{a^2 + r^2} - 6m \right) - r(a^2 + r^2) \right), \quad (3.58)$$

$$h^{(H)}(\phi(r)) = -a_1r, \quad \phi(r) = \arctan \left( \frac{r}{a} \right), \quad (3.59)$$

$$V^{(H)}(\phi(r)) = a_1 \left( \frac{\tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{a^2 + r^2} - r}{a} \right)}{a} + \frac{2mr(5a^4 + 5a^2r^2 + 2r^4)}{5a^2(a^2 + r^2)^{5/2}} - \frac{r}{2(a^2 + r^2)} \right) \quad (3.60)$$

Nesse caso, diferentemente do modelo anterior, como pela equação (3.35), temos  $h(\phi(r)) = -1 - a_1r$ , o campo escalar será sempre fantasma, já que  $h(\phi)$  será sempre negativo se considerarmos  $a_1$  como uma constante positiva. O campo escalar poderá ser canônico apenas em algumas regiões se  $a_1$  assumir valores negativos.

É possível inverter novamente as dependências funcionais, expressando as quantidades  $L^{(H)}$ ,  $V^{(H)}$  e  $h^{(H)}$  como funções de  $F$  e  $\phi$ , respectivamente:

$$L^{(H)}(F) = a_1 \left( -\sqrt{2\sqrt{\frac{2F}{q^2}} - \frac{2a^2F}{q^2}} - \frac{2^{3/4}m \left( \sqrt{\frac{2q^2}{F}} - a^2 \right)^{3/2} \left( 3a^2 + 7\sqrt{\frac{2q^2}{F}} \right) F^{5/4}}{5a^2q^{5/2}} + \frac{4}{a} \arctan \left( \frac{-2^{1/4}q^{1/2}F^{-1/4} + \sqrt{-a^2 + \sqrt{2}|q|F^{-1/2}}}{a} \right) \right), \quad (3.61)$$

$$h^{(H)}(\phi) = -a_1a \tan \phi, \quad (3.62)$$

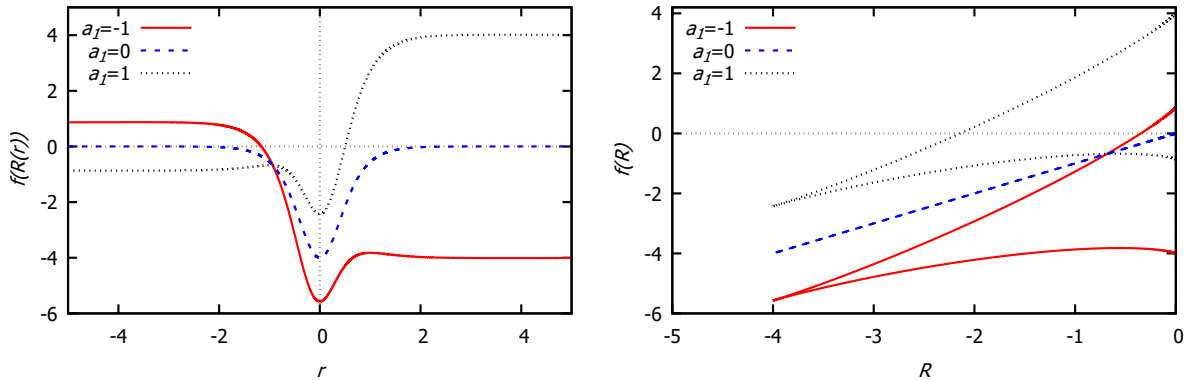
$$V^{(H)}(\phi) = \frac{a_1}{20a^2} (20a \arctan(\sec \phi - \tan \phi) - 5a \sin(2\phi) + 2m(13 + 6\cos(2\phi) + \cos(4\phi)) \sin \phi). \quad (3.63)$$

Mais uma vez, observamos que a presença da função  $H(R)$  induz maiores não linearidades nos campos obtidos. Integrando a equação (3.56), obtemos:

$$H(R(r)) = \frac{a_1mr^3(10a^2 + 4r^2)}{a^2(a^2 + r^2)^{5/2}} + \frac{a^2a_1r}{(a^2 + r^2)^2} - \frac{a_1r^3}{(a^2 + r^2)^2} - \frac{2a_1 \arctan \left( \frac{r - \sqrt{a^2 + r^2}}{a} \right)}{a}. \quad (3.64)$$

No entanto, nesse caso, não é possível inverter analiticamente  $R(r)$  na equação para o escalar de Ricci, de modo que não conseguimos escrever uma forma analítica para a função  $H(R)$ . Para gerar o gráfico, lembramos que a função  $f(R)$  é dada por  $f(R) = R + H(R)$ . Ainda assim, na

Figura 17: Comportamento de  $f(R)$  em função da coordenada radial (painel esquerdo) e em função do escalar de curvatura (painel direito), fixando  $a = m = 1$  e variando os valores do parâmetro  $a_1$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Fig. 17, observamos o comportamento da função  $f(R)$ . É claro que o único caso simétrico sob a troca  $r \rightarrow -r$  ocorre para  $a_1 = 0$ , que corresponde exatamente ao caso da RG. Para  $a_1 = 0$ , a função  $f(R)$  é apenas uma linha reta, como esperado, enquanto para outros casos temos uma função multivaluada com curvas distintas. Esse comportamento multivaluado surge justamente devido à assimetria na transformação  $r \rightarrow -r$  na função  $H(R(r))$ .

### 3.1.4 Caso III: $H_R(R(r)) = a_2 r^2$

No Caso II, vimos que o comportamento de  $f(R(r))$  muda ao fazermos a transformação  $r \rightarrow -r$ . Esse fato ocorre porque a função  $H_R$  não é simétrica sob essa transformação. Além disso, na referência [139], dada uma métrica da forma

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.65)$$

a condição (3.55) é obtida impondo  $A(r) = B(r)$ . No entanto, nas métricas do tipo BB, como a da equação (2.53), podemos sempre realizar uma transformação de coordenadas dada por

$$\tilde{r}^2 = \Sigma(r)^2, \quad (3.66)$$

de modo que a métrica possa ser escrita na forma

$$ds^2 = -U(\tilde{r})dt^2 + G^{-1}(\tilde{r})d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega^2, \quad (3.67)$$

onde  $U(\tilde{r}) \neq G(\tilde{r})$ . Nesse caso, como a função  $H_R(R(r))$  não precisa necessariamente manter a forma específica (3.56), podemos propor formulações alternativas para ela, de modo que permaneça invariante sob a transformação  $r \rightarrow -r$ . Assim, nesta subseção, focamos no caso em

que

$$H_R(R(r)) = a_2 r^2. \quad (3.68)$$

Considerando essa função, a métrica SV e novamente seguindo a abordagem apresentada em 3.1.1, encontramos que as funções relacionadas às correções das fontes dos campos são agora dadas por

$$L^{(H)}(F(r)) = \frac{(88a^4 a_2 m)}{5(a^2 + r^2)^{5/2}} + \frac{44a^2 a_2 m r^2}{(a^2 + r^2)^{5/2}} + \frac{24a_2 m r^4}{(a^2 + r^2)^{5/2}} - \frac{a_2(6a^4 + 16a^2 r^2 + 10r^4)}{(a^2 + r^2)^2} + 4a_2 \ln(a^2 + r^2), \quad (3.69)$$

$$L_F^{(H)}(F(r)) = \frac{-2a_2 r^4 (-3m + \sqrt{a^2 + r^2}) + a^2 a_2 r^2 (9m - 2\sqrt{a^2 + r^2})}{2q^2 \sqrt{a^2 + r^2}}, \quad (3.70)$$

$$h^{(H)}(\phi(r)) = -\frac{a_2 (a^4 + 3a^2 r^2 + r^4)}{a^2}, \quad (3.71)$$

$$V^{(H)}(\phi(r)) = \frac{a^2 a_2}{a^2 + r^2} - \frac{4m(6a^4 a_2 + 5a_2 r^4 + 10a^2 a_2 r^2)}{5(a^2 + r^2)^{5/2}} - 2a_2 \ln(a^2 + r^2). \quad (3.72)$$

Podemos, mais uma vez, escrever explicitamente  $L^{(H)}$  como função de  $F$ , e  $V^{(H)}$  e  $h^{(H)}$  como funções de  $\phi$ , que são:

$$L^{(H)}(F) = \frac{a_2}{5q^2 \sqrt{\frac{q}{\sqrt{F}}}} \left( -3 \cdot 2^{3/4} a^4 F m + 10q^2 \left( 6 \cdot 2^{3/4} m - 5 \sqrt{\frac{q}{\sqrt{F}}} \right) + 10 \cdot 2^{1/4} a^2 \sqrt{F} q \left( -m + 2^{1/4} \sqrt{\frac{q}{\sqrt{F}}} \right) + 20q^2 \sqrt{\frac{q}{\sqrt{F}}} \log \left( \frac{\sqrt{2}q}{\sqrt{F}} \right) \right), \quad (3.73)$$

$$h^{(H)}(\phi) = a^2 a_2 [1 - \sec^2 \phi (1 + \sec^2 \phi)], \quad (3.74)$$

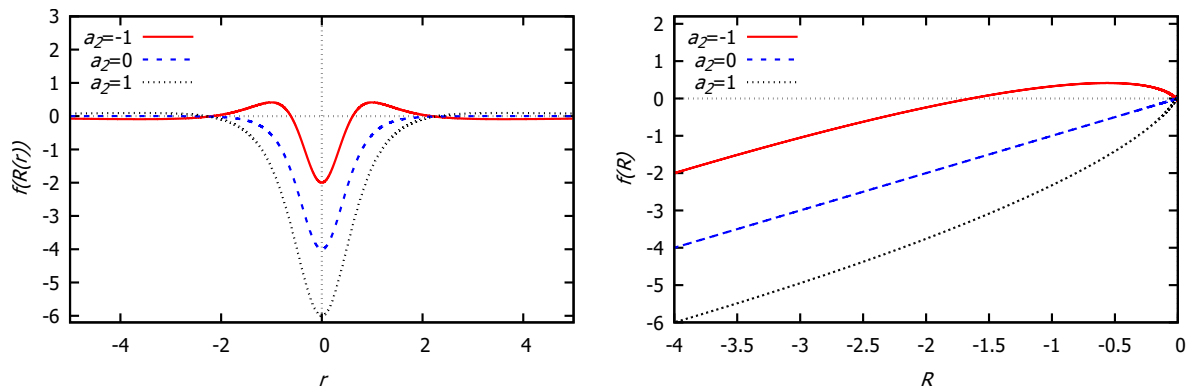
$$V^{(H)}(\phi) = a_2 \left( \cos^2 \phi - 2 \log(a^2 \sec^2 \phi) - \frac{(20m + 4m \cos^4 \phi) \cos \phi}{5a} \right). \quad (3.75)$$

É interessante notar que, para  $r \ll 1$ , temos

$$h(\phi) \approx -1 - a_2 a^2. \quad (3.76)$$

Isso sugere que a constante de regularização  $a$  também pode interferir na mudança do tipo de campo escalar próximo à origem, caso  $a_2$  seja negativo. Assim, dependendo do sinal do parâmetro  $a_2$  e dos valores de  $a$ , podemos ter um campo escalar fantasma, parcialmente fantasma ou canônico.

Figura 18: Comportamento da função  $f(R)$  em função da coordenada radial (painel esquerdo) e em função do escalar de curvatura (painel direito), fixando  $a = m = 1$  e variando os valores do parâmetro  $a_2$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Integrando novamente a equação (3.56), obtemos

$$H(R(r)) = \frac{2a^2 \left( a^2 a_2 \left( -2m + \sqrt{a^2 + r^2} \right) + a_2 r^2 \left( -5m + 2\sqrt{a^2 + r^2} \right) \right)}{(a^2 + r^2)^{5/2}}. \quad (3.77)$$

Analisando a equação acima, vemos claramente que  $H(R(r))$  é simétrica sob a transformação  $r \rightarrow -r$ . Ao realizar o gráfico paramétrico de  $f(r)$  vs  $R(r)$ , apresentado na Fig. 18, também observamos que essa simetria é preservada, ao contrário do caso anterior.

Os resultados obtidos podem ser generalizados considerando  $H_R = a_n r^n$ . No entanto, nem todos os valores de  $n$  satisfazem a relação de consistência eletromagnética (??).

### 3.1.5 Caso IV: $H_R(R(r)) = a_\Sigma \Sigma$

Podemos testar outra forma para  $H_R$ . Considerando que os BB geralmente surgem através da substituição  $r^2 \rightarrow r^2 + a^2$  e que, para buracos negros regulares, tínhamos  $H_R(R(r)) = a_1 r$ , podemos aplicar essa substituição para obter  $H_R(R(r)) = a_\Sigma \Sigma$ . Esse modelo também será simétrico sob a transformação  $r \rightarrow -r$ .

Considerando novamente que nosso espaço-tempo é descrito pela métrica SV e seguindo a abordagem apresentada em 3.1.1, encontramos que as funções de correção relaciona-

das às fontes da matéria são dadas por:

$$L^{(H)}(F(r)) = \frac{2a_\Sigma \left( 9m\sqrt{a^2 + r^2} - 4a^2 - 6r^2 \right)}{3(a^2 + r^2)^{3/2}}, \quad (3.78)$$

$$L_F^{(H)}(F(r)) = \frac{a_\Sigma \left( 3a^2m - r^2 \left( \sqrt{a^2 + r^2} - 3m \right) \right)}{2q^2}, \quad (3.79)$$

$$h^{(H)}(\phi(r)) = -\frac{3}{2}a_\Sigma\sqrt{a^2 + r^2}, \quad (3.80)$$

$$V^{(H)}(\phi(r)) = \frac{3a^2a_\Sigma m}{4(a^2 + r^2)^2} + \frac{a^2a_\Sigma}{2(a^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (3.81)$$

Como nos outros casos, só é possível ter um campo escalar canônico em algumas regiões, ou parcialmente fantasma, se a constante relacionada aos termos não lineares da teoria gravitacional,  $a_\Sigma$ , assumir valores negativos. Dependendo dos valores de  $a_\Sigma$  e  $a$ , é possível ter  $h(\phi)$  sempre positivo.

Podemos também escrever  $L^{(H)}(F)$ ,  $V^{(H)}(\phi)$  e  $h^{(H)}(\phi)$ , que são dados por:

$$L^{(H)}(F) = \frac{a_\Sigma \left( 10\sqrt{2}a^2\sqrt{F}q + 15q^2 \left( \frac{3 \cdot 2^{3/4}m}{\sqrt{\frac{q}{\sqrt{F}}}} - 4 \right) \right)}{15^4\sqrt{2}q^2\sqrt{\frac{q}{\sqrt{F}}}}, \quad (3.82)$$

$$h^{(H)}(\phi) = -\frac{3}{2}aa_\Sigma \sec \phi, \quad (3.83)$$

$$V^{(H)}(\phi) = \frac{a_\Sigma \cos^4 \phi (2a \sec \phi + 3m)}{4a^2}. \quad (3.84)$$

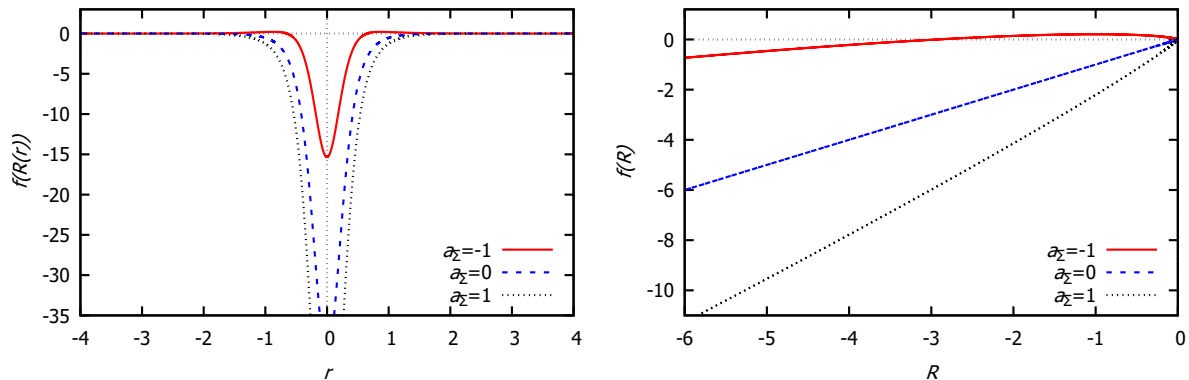
Considerando o escalar de curvatura para o caso SV, podemos escrever a função  $H(R(r))$  como:

$$H(R(r)) = -2a^2 \left( \frac{15a_\Sigma m}{4(a^2 + r^2)^2} - \frac{4a_\Sigma}{3(a^2 + r^2)^{3/2}} \right). \quad (3.85)$$

Essa função é simétrica sob a transformação  $r \rightarrow -r$ . Como nos casos anteriores, não conseguimos expressar analiticamente o comportamento de  $f(R)$ ; portanto, vamos analisá-lo graficamente na Fig. 19. Pelo comportamento de  $f(R(r))$ , observamos explicitamente a simetria da solução sob a transformação  $r \rightarrow -r$ . A partir do gráfico paramétrico, vemos que, como esperado, para  $a_\Sigma = 0$ , obtemos uma linha reta, que corresponde ao caso da RG.

Podemos generalizar esse modelo para  $H_R = a_\Sigma \Sigma(r)^n$ . O problema com essa generalização é que algumas funções apresentam divergências para certos valores de  $n$ . Curiosamente, essas divergências se cancelam ao combinar  $f(R) + L(F(r)) + 2V(\phi(r))$ , que é precisamente a combinação que aparece na ação. Os demais termos da ação não apresentam divergências.

Figura 19: Comportamento da função  $f(R)$  em função da coordenada radial (painel esquerdo) e em função do escalar de curvatura (painel direito), fixando  $a = m = 1$  e variando os valores do parâmetro  $a_1$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com isso, podemos provar que é possível encontrar diferentes tipos de fontes materiais para a métrica SV ao se considerar diferentes modelos de  $f(R)$ .

### 3.2 Condições de Energia

No contexto da RG, é bem conhecido que geometrias do tipo BB violam todas as condições de energia associadas ao tensor energia-momento [110, 154]. Isso não é totalmente surpreendente, já que geometrias BB interpolam entre BNs regulares e buracos de minhoca, ambos conhecidos por violarem as condições de energia [107]. Assim, é interessante investigar se essa violação persiste no contexto de teorias modificadas da gravidade, como no nosso caso.

Analisaremos agora se, no contexto dos nossos modelos de  $f(R)$ , a geometria BB satisfaz a condição de energia nula (NEC), a condição de energia forte (SEC), a condição de energia fraca (WEC) e a condição de energia dominante (DEC). Identificamos novamente o tensor energia momento como (2.105). Essa relação é válida em regiões onde  $A(r) > 0$ . Para regiões onde  $A(r) < 0$ , a assinatura da métrica se altera, e temos:

$$T_V^\mu = \text{diag}[p_r, -\rho, p_t, p_t]. \quad (3.86)$$

### 3.2.1 Caso I

Vamos agora analisar as condições de energia para o caso em que  $H(R) = a_R R^2$ .

Para regiões onde  $A(r) > 0$ , temos:

$$\begin{aligned} \rho + p_r = & \frac{2a^2 a \left(2m - \sqrt{a^2 + r^2}\right)}{(a^2 + r^2)^{5/2}} \\ & + \frac{4a^2 a_R (a^2 - 10r^2) \left(2a^2 + 18m^2 + 2r^2 - 13m\sqrt{a^2 + r^2}\right)}{(a^2 + r^2)^5}, \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$\rho + p_t = \frac{3a^2 m}{(a^2 + r^2)^{5/2}} + 4a^2 a_R \left[ \frac{a^2(4r^2 - 9m^2) + 45m^2 r^2 + 4r^4}{(a^2 + r^2)^5} + \frac{3m(a^2 - 9r^2)}{(a^2 + r^2)^{9/2}} \right], \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} \rho + p_r + 2p_t = & \frac{2a^2 m}{(a^2 + r^2)^{5/2}} \\ & + 4a^2 a_R \left[ \frac{r^2(7a^2 + 180m^2) - 5a^2(a^2 + 9m^2) + 12r^4}{(a^2 + r^2)^5} + \frac{m(31a^2 - 100r^2)}{(a^2 + r^2)^{9/2}} \right], \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} \rho - p_r = & \frac{4a^2 m}{(a^2 + r^2)^{5/2}} \\ & + 4a^2 a_R \left[ \frac{m(46r^2 - 25a^2)}{(a^2 + r^2)^{9/2}} + \frac{5a^4 + a^2(27m^2 + r^2) - 90m^2 r^2 - 4r^4}{(a^2 + r^2)^5} \right], \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$\begin{aligned} \rho - p_t = & \frac{5ma^2}{(a^2 + r^2)^{5/2}} - \frac{2a^2 a_0}{(a^2 + r^2)^2} \\ & + 4a^2 a_R \left[ \frac{m(203r^2 - 41a^2)}{(a^2 + r^2)^{9/2}} + \frac{7a^4 - 21r^2(a^2 + 15m^2) + 54a^2 m^2 - 28r^4}{(a^2 + r^2)^5} \right], \end{aligned} \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned} \rho = & \frac{a^2(4m - \sqrt{a^2 + r^2})}{(a^2 + r^2)^{5/2}} \\ & - a^2 a_R \left[ \frac{4m(19a^2 - 88r^2)}{(a^2 + r^2)^{9/2}} + \frac{-14a^4 + a^2(34r^2 - 90m^2) + 540m^2 r^2 + 48r^4}{(a^2 + r^2)^5} \right]. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Em regiões onde  $A(r) < 0$ , temos:

$$\begin{aligned} \rho + p_r = & \frac{2a^2 \left( \sqrt{a^2 + r^2} - 2m \right)}{(a^2 + r^2)^{5/2}} \\ & - \frac{4a^2 a_R (a^2 - 10r^2) \left( 2a^2 + 18m^2 + 2r^2 - 13m\sqrt{a^2 + r^2} \right)}{(a^2 + r^2)^5}, \end{aligned} \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned} \rho + p_t = & \frac{a^2 \left( 2\sqrt{a^2 + r^2} - m \right)}{(a^2 + r^2)^{5/2}} \\ & + 4a^2 a_R \left[ \frac{m(16a^2 - 157r^2)}{(a^2 + r^2)^{9/2}} + \frac{2a^4 + a^2(22r^2 - 27m^2) + 225m^2 r^2 + 24r^4}{(a^2 + r^2)^5} \right], \end{aligned} \quad (3.94)$$

$$\begin{aligned} \rho + p_r + 2p_t = & \frac{4a^2}{(a^2 + r^2)^2} - \frac{6a^2 m}{(a^2 + r^2)^{5/2}} \\ & + 4a^2 a_R \left[ \frac{m(360r^2 - 57a^2)}{(a^2 + r^2)^{9/2}} + \frac{9a^4 + a^2(81m^2 - 43r^2) - 540m^2 r^2 - 52r^4}{(a^2 + r^2)^5} \right], \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} \rho - p_r = & \frac{4a^2 m}{(a^2 + r^2)^{5/2}} \\ & + 4a^2 a_R \left[ \frac{m(46r^2 - 25a^2)}{(a^2 + r^2)^{9/2}} + \frac{5a^4 + a^2(27m^2 + r^2) - 90m^2 r^2 - 4r^4}{(a^2 + r^2)^5} \right], \end{aligned} \quad (3.96)$$

$$\begin{aligned} \rho - p_t = & \frac{a^2 m}{(a^2 + r^2)^{5/2}} \\ & + 4a^2 a_R \left[ \frac{m(73r^2 - 28a^2)}{(a^2 + r^2)^{9/2}} + \frac{5a^4 - 3r^2(a^2 + 45m^2) + 36a^2 m^2 - 8r^4}{(a^2 + r^2)^5} \right], \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} \rho = & \frac{a^2}{(a^2 + r^2)^2} \\ & - 2a^2 a_R \left[ \frac{12m(a^2 + 7r^2)}{(a^2 + r^2)^{9/2}} - \frac{3a^4 + a^2(9m^2 + 19r^2) + 90m^2 r^2 + 16r^4}{(a^2 + r^2)^5} \right]. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Os termos envolvendo  $a_R$  representam as correções da teoria  $f(R)$  para as condições de energia deste modelo. No entanto, as expressões analíticas não ilustram claramente como essas correções modificam as condições de energia.

Na Fig. 20, comparamos como a teoria  $f(R)$  modifica as condições de energia em

relação à RG. Observamos que, para  $a_R = -1$ , a combinação  $\rho + p_r$  é sempre negativa, com módulo ainda maior do que no caso da RG. Contudo, para  $a_R = 1$ , há certas regiões onde  $\rho + p_r$  assume valores positivos, indicando que a teoria  $f(R)$  suaviza a violação da condição de energia nula. Pela análise do comportamento de  $\rho$  e  $\rho - p_t$ , percebemos que, dependendo dos valores dos parâmetros escolhidos, em algumas regiões onde as desigualdades eram satisfeitas no caso da RG, elas passam a ser violadas, e em outras onde eram violadas, passam a ser satisfeitas. Assim, as contribuições de  $H(R)$ , neste caso o modelo  $H(R) = a_R R^2$ , podem levar a condições de energia que não são sempre violadas, como acontecia na RG.

### 3.2.2 Caso II

Neste caso, onde  $H_R = a_1 r$ , temos que, fora de qualquer possível horizonte, com  $A(r) > 0$ , as seguintes combinações para as funções  $\rho$ ,  $p_r$  e  $p_t$  são:

$$\rho + p_r = -\frac{2a^2(1+a_1r)(\sqrt{a^2+r^2}-2m)}{(a^2+r^2)^{5/2}}, \quad (3.99)$$

$$\rho + p_t = \frac{3a^2m}{(a^2+r^2)^{5/2}} + \frac{a_1r(6a^2m-(a^2+r^2)^{3/2}+3mr^2)}{(a^2+r^2)^{5/2}}, \quad (3.100)$$

$$\rho + p_r + 2p_t = \frac{2a^2m}{(a^2+r^2)^{5/2}} \quad (3.101)$$

$$+ a_1 \left( \frac{r}{a^2+r^2} + \frac{2mr(4a^4+5a^2r^2+2r^4)}{a^2(a^2+r^2)^{5/2}} + \frac{2 \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2+r^2}-r}{a}\right)}{a} \right),$$

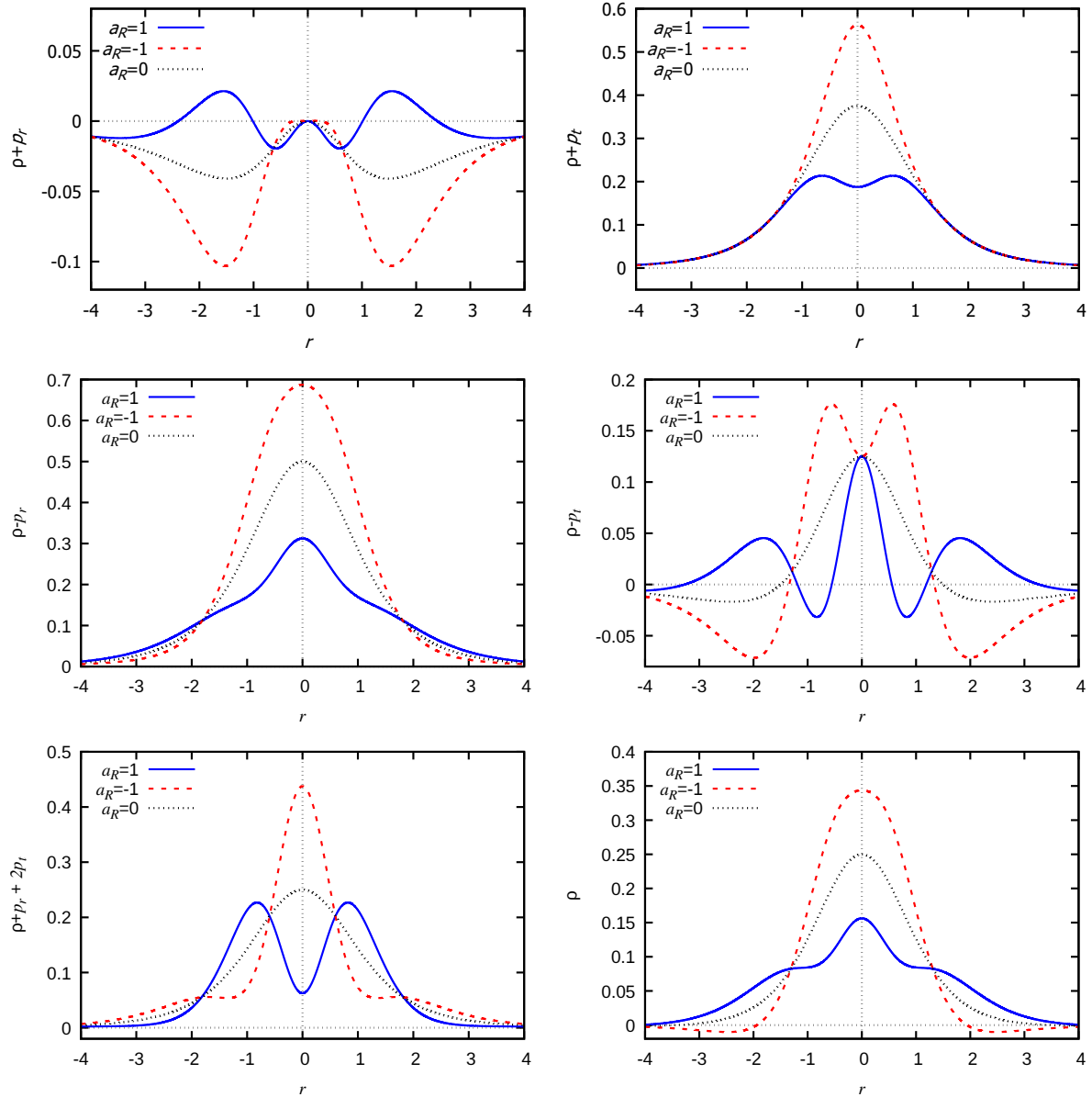
$$\rho - p_r = \frac{4a^2m}{(a^2+r^2)^{5/2}} \quad (3.102)$$

$$+ \frac{a_1}{a^2} \left( \frac{4mr(a^4-a^2r^2-r^4)}{(a^2+r^2)^{5/2}} - \frac{3a^2r}{a^2+r^2} + 2a \tan^{-1}\left(\frac{r-\sqrt{a^2+r^2}}{a}\right) \right),$$

$$\rho - p_t = \frac{5ma^2}{(a^2+r^2)^{5/2}} - \frac{2a^2a_0}{(a^2+r^2)^2} + \frac{a_1}{a^2} \left( \frac{mr(2a^4-7a^2r^2-4r^4)}{(a^2+r^2)^{5/2}} - \frac{2a^2r(2a^2+r^2)}{(a^2+r^2)^2} + 2a \tan^{-1}\left(\frac{r-\sqrt{a^2+r^2}}{a}\right) \right), \quad (3.103)$$

$$\rho = \frac{a^2(4m-\sqrt{a^2+r^2})}{(a^2+r^2)^{5/2}} + \frac{a_1}{2a^2} \left( \frac{4mr(2a^4-a^2r^2-r^4)}{(a^2+r^2)^{5/2}} - \frac{r(5a^4+3a^2r^2)}{(a^2+r^2)^2} + 2a \tan^{-1}\left(\frac{r-\sqrt{a^2+r^2}}{a}\right) \right). \quad (3.104)$$

Figura 20: Combinações dos componentes do tensor energia-momento para o modelo  $H(R) = a_R R^2$  em função da coordenada radial, com  $a = 2$  e  $m = 1$ , para diferentes valores do parâmetro  $a_R$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Já para  $A < 0$ , temos:

$$\rho + p_r = \frac{2a^2(1 + a_1 r)(\sqrt{a^2 + r^2} - 2m)}{(a^2 + r^2)^{5/2}}, \quad (3.105)$$

$$\rho + p_t = \frac{a^2(2\sqrt{a^2 + r^2} - m)}{(a^2 + r^2)^{5/2}} \quad (3.106)$$

$$+ \frac{a_1 \left[ r^3(3m - \sqrt{a^2 + r^2}) + a^2 r(2m + \sqrt{a^2 + r^2}) \right]}{(a^2 + r^2)^{5/2}},$$

$$\rho + p_r + 2p_t = \frac{(-6a^4 m + 4a^4 \sqrt{a^2 + r^2})}{a^2(a^2 + r^2)^{5/2}} + \frac{a_1}{a^2(a^2 + r^2)^{5/2}} \left[ 4mr^5 + 5a^4 r \sqrt{a^2 + r^2} \right. \\ \left. + a^2 r^3(10m + \sqrt{a^2 + r^2}) + 2a(a^2 + r^2)^{5/2} \arctan\left(\frac{-r + \sqrt{a^2 + r^2}}{a}\right) \right] \quad (3.107)$$

$$\rho - p_r = \frac{4a^2 m}{(a^2 + r^2)^{5/2}} + \frac{a_1}{a^2(a^2 + r^2)^{5/2}} \left[ 4a^4 m r - 4mr^5 - 3a^4 r \sqrt{a^2 + r^2} \right. \\ \left. - a^2 r^3(4m + 3\sqrt{a^2 + r^2}) + 2a(a^2 + r^2)^{5/2} \arctan\left(\frac{\sqrt{r^2 + a^2} - r}{a}\right) \right] \quad (3.108)$$

$$\rho - p_t = \frac{a^2 m}{(a^2 + r^2)^{5/2}} + \frac{a_1}{a^2(a^2 + r^2)^{5/2}} \left[ -4mr^5 - 2a^4 r(m + \sqrt{a^2 + r^2}) \right. \\ \left. - a^2 r^3(7m + 2\sqrt{a^2 + r^2}) + 2a(a^2 + r^2)^{5/2} \arctan\left(\frac{r - \sqrt{a^2 + r^2}}{a}\right) \right] \quad (3.109)$$

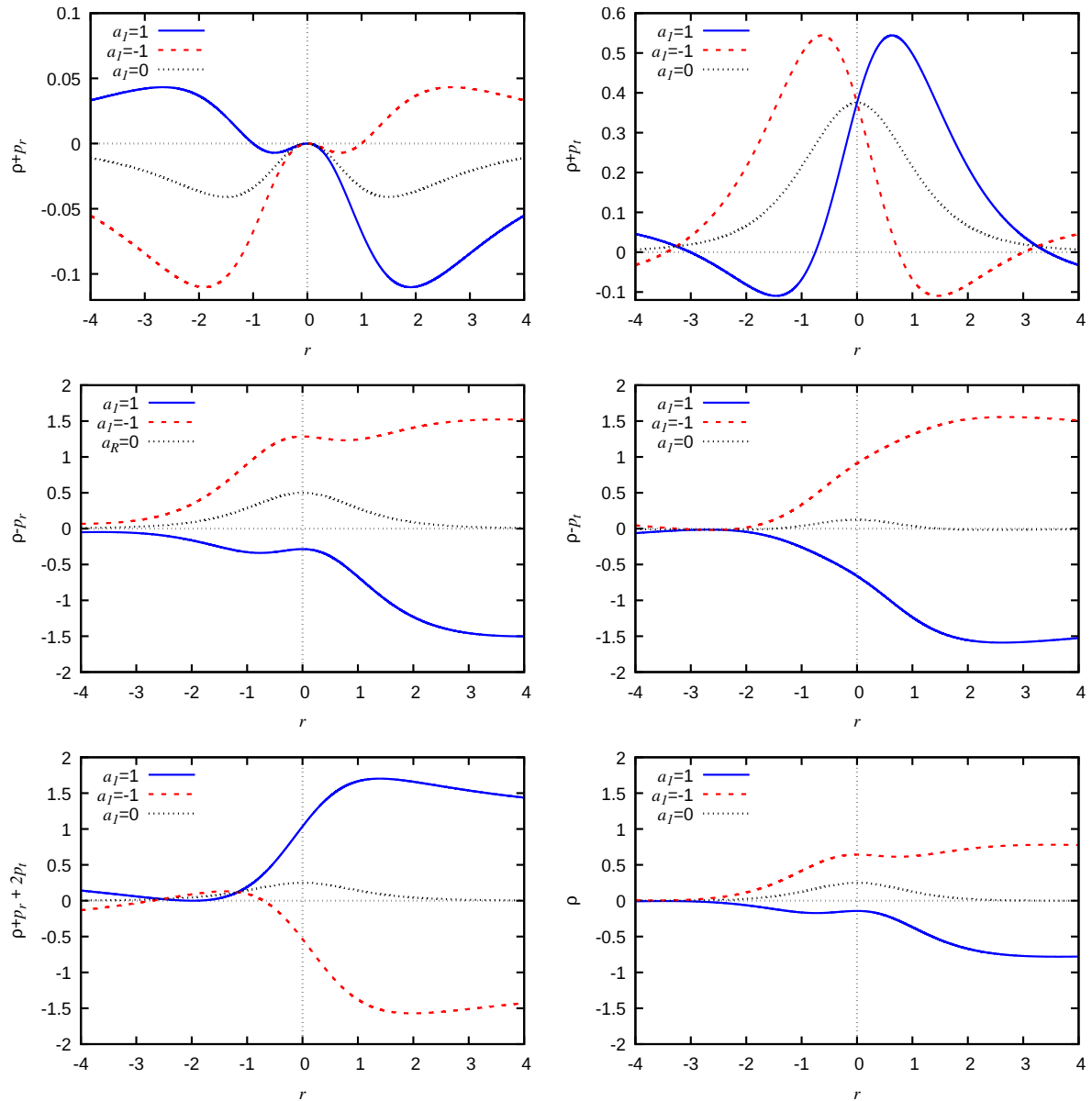
$$\rho = \frac{a^2}{(a^2 + r^2)^2} \quad (3.110)$$

$$- \frac{a_1}{2a^2} \left( \frac{4mr^3}{(a^2 + r^2)^{3/2}} + \frac{ra^2(a^2 + 3r^2)}{(a^2 + r^2)^2} - 2a \tan^{-1}\left(\frac{r - \sqrt{a^2 + r^2}}{a}\right) \right).$$

Os termos em que  $a_1$  aparece representam as correções da teoria  $f(R)$  para as condições de energia. Podemos extrair algumas informações diretamente das expressões analíticas de  $\rho + p_r$ . Se  $a_1 > 0$  e considerarmos a região com  $r > 0$ , a condição de energia nula será violada da mesma forma que na RG; já para  $r < 0$ , a desigualdade  $NEC_1$  será satisfeita se  $r < -1/a_1$ . Para  $a_1 < 0$ , o efeito é o oposto: a desigualdade  $NEC_1$  será satisfeita se  $r > -1/a_1$  e será violada nas demais regiões. Vamos analisar graficamente as condições de energia para obter mais informações.

Na Fig. 21, apresentamos a representação gráfica da densidade de energia e suas combinações com as pressões em função da coordenada  $r$ , para diferentes valores do parâmetro

Figura 21: Combinações dos componentes do tensor energia-momento para o modelo  $H_R = a_1 r$ , em função da coordenada radial, para  $m = 1$ ,  $a = 2$ , e diferentes valores de  $a_1$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

$a_1$ . Analisando a figura, vemos que a condição  $WEC_3 \geq 0$  é sempre satisfeita para  $a_1 = 0$  e  $a_1 = -1$ , enquanto é violada em todo o espaço-tempo para  $a_1 = 1$ . Por outro lado, é possível observar que a condição  $NEC_{1,2}$  é satisfeita apenas em certas regiões do espaço-tempo, tanto para  $a_1 = -1$  quanto para  $a_1 = 1$ . Em relação à condição  $SEC_3$ , vemos que ela é satisfeita para todos os valores de  $r$  para  $a_1 = 1$  e  $a_1 = 0$ . Quanto à condição  $DEC_{1,2}$ , embora  $\rho - p_{r,t} \geq 0$  para  $a_1 = -1$  e  $a_1 = 0$  em todo o intervalo de  $r$ , verificamos que esta condição só é satisfeita em certas regiões, já que  $\rho + p_{r,t} \geq 0$  apenas em regiões limitadas.

Dessa forma, concluímos que, dependendo dos valores escolhidos, essa forma da teoria  $f(R)$  contribui para que as condições de energia sejam satisfeitas, ao menos em certas regiões do espaço-tempo.

### 3.2.3 Caso III

Vamos agora considerar as correções às condições de energia para o modelo  $H_R = a_2 r^2$ . Nas regiões onde  $A(r) > 0$ , temos

$$\rho + p_r = -\frac{2[a^4 a_2 + a_2 r^4 + a^2(1 + 3a_2 r^2)] [a^2 + r^2 + 4m(m - \sqrt{a^2 + r^2})]}{(a^2 + r^2)^{5/2} (-2m + \sqrt{a^2 + r^2})} \quad (3.111)$$

$$\rho + p_t = \frac{-2a_2 r^4 (-3m + \sqrt{a^2 + r^2}) + a^2 [3m + a_2 r^2 (9m - 2\sqrt{a^2 + r^2})]}{(a^2 + r^2)^{5/2}} \quad (3.112)$$

$$\rho + p_r + 2p_t = -\frac{2a^2 m}{(a^2 + r^2)^{5/2}} - a_2 \left[ \frac{2a^2 + 3r^2}{a^2 + r^2} - \frac{m(4a^4 + 5a^2 r^2 + 2r^4)}{(a^2 + r^2)^{5/2}} \right], \quad (3.113)$$

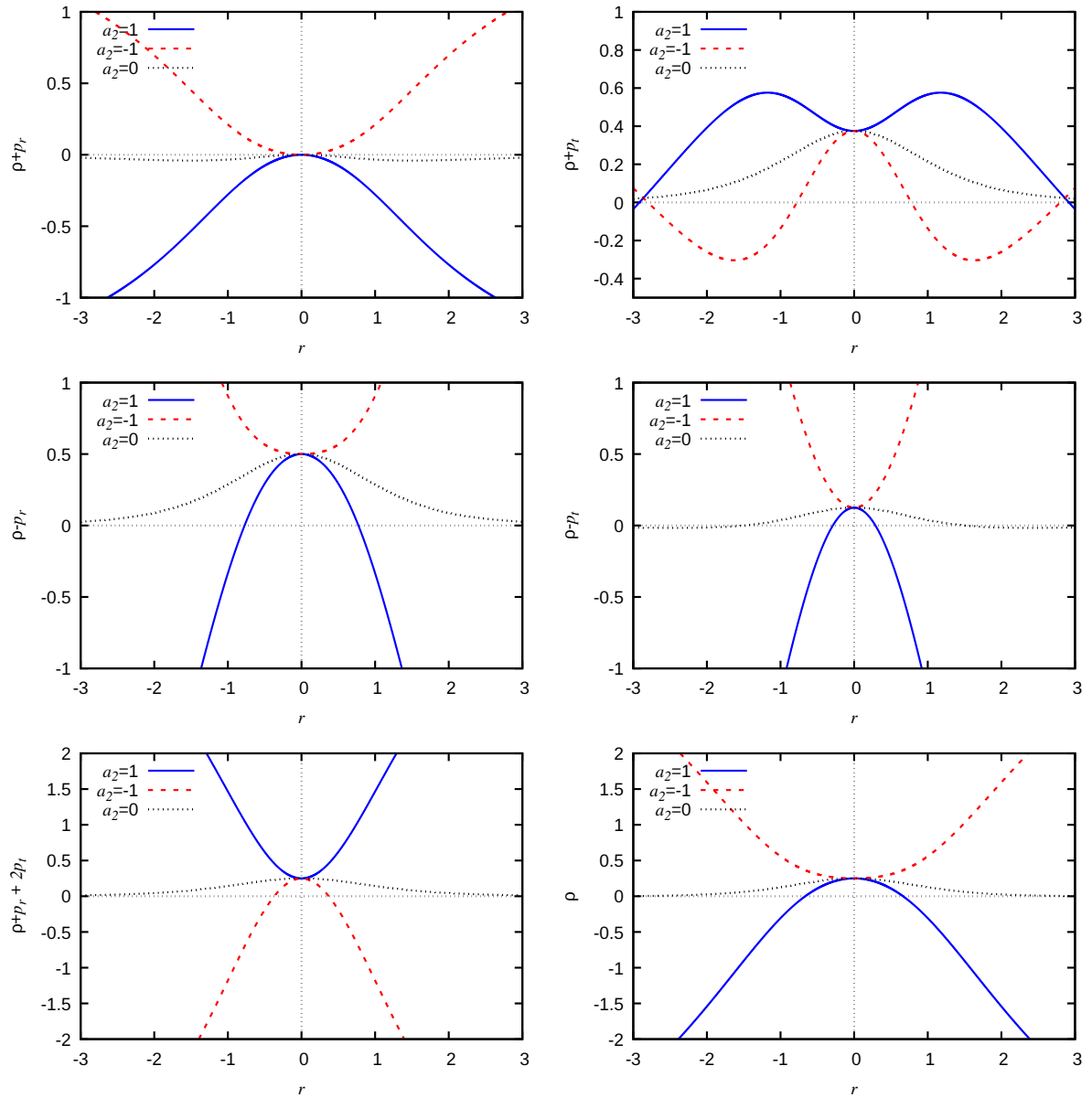
$$\rho - p_r = -\frac{4a^2 m}{(a^2 + r^2)^{5/2}} + 2a_2 \left[ \frac{2a^2 + 5r^2}{a^2 + r^2} - \frac{2m(2a^4 + 7a^2 r^2 + 4r^4)}{(a^2 + r^2)^{5/2}} \right], \quad (3.114)$$

$$\rho - p_t = \frac{a^2 (2\sqrt{a^2 + r^2} - 5m)}{(a^2 + r^2)^{5/2}} \quad (3.115)$$

$$- a_2 \left[ \frac{m(a^2 + 2r^2)(12a^2 + 7r^2)}{(a^2 + r^2)^{5/2}} - \frac{2(3a^4 + 9a^2 r^2 + 5r^4)}{(a^2 + r^2)^2} \right],$$

$$\rho = \frac{a^2 (4m - \sqrt{a^2 + r^2})}{(a^2 + r^2)^{5/2}} + \frac{a_2}{(a^2 + r^2)^{5/2}} \left[ 2r^4 (5m - 3\sqrt{a^2 + r^2}) - (3a^4 - 10a^2 r^2) (\sqrt{a^2 + r^2} - 2m) \right]. \quad (3.116)$$

Figura 22: Combinação dos componentes do tensor energia-momento para o modelo  $H_R = a_2 r^2$ , em função da coordenada radial, para  $m = 1$ ,  $a = 2$  e diferentes valores de  $a_2$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nas regiões onde  $A(r) < 0$ , temos

$$\rho + p_r = \frac{2 [a^4 a_2 + a_2 r^4 + a^2 (1 + 3a_2 r^2)] [a^2 + r^2 + 4m (m - \sqrt{a^2 + r^2})]}{(a^2 + r^2)^{5/2} (-2m + \sqrt{a^2 + r^2})}, \quad (3.117)$$

$$\rho + p_t = \frac{a^2 (2\sqrt{a^2 + r^2} - m)}{(a^2 + r^2)^{5/2}} + a_2 \left[ \frac{m (-4a^4 - 3a^2 r^2 + 2r^4)}{(a^2 + r^2)^{5/2}} + \frac{2(a^4 + 2a^2 r^2)}{(a^2 + r^2)^2} \right], \quad (3.118)$$

$$\rho + p_r + 2p_t = \frac{2a^2 (2\sqrt{a^2 + r^2} - 3m)}{(a^2 + r^2)^{5/2}} - 2a_2 \left[ \frac{m (8a^4 + 17a^2 r^2 + 6r^4)}{(a^2 + r^2)^{5/2}} + \frac{4a^4 + 11a^2 r^2 + 5r^4}{(a^2 + r^2)^2} \right], \quad (3.119)$$

$$\rho - p_r = \frac{4a^2 m}{(a^2 + r^2)^{5/2}} + 2a_2 \left( \frac{3a^2}{a^2 + r^2} - 5 \right) + \frac{4a_2 m (2a^4 + 7a^2 r^2 + 4r^4)}{(a^2 + r^2)^{5/2}}, \quad (3.120)$$

$$\rho - p_t = \frac{a^2 m}{(a^2 + r^2)^{5/2}} + 4a_2 \left( \frac{a^2}{a^2 + r^2} - 2 \right) + \frac{a_2 m (8a^4 + 19a^2 r^2 + 10r^4)}{(a^2 + r^2)^{5/2}}, \quad (3.121)$$

$$\rho = \frac{a^2}{(a^2 + r^2)^2} + \frac{2a_2 m (a^2 + 3r^2)}{(a^2 + r^2)^{3/2}} - \frac{a_2 (a^2 + 2r^2)^2}{(a^2 + r^2)^2}. \quad (3.122)$$

Os termos envolvendo  $a_2$  representam as correções da teoria  $f(R)$  às condições de energia. Como as expressões analíticas são pouco claras, priorizaremos a análise gráfica.

Na Fig. 22 mostramos como os componentes do tensor energia-momento são modificados pela presença da teoria  $f(R)$ . Como o modelo de  $f(R)$  é simétrico sob a transformação  $r \rightarrow -r$ , as condições de energia também são simétricas, permitindo focar apenas no comportamento para  $r > 0$ . Para  $a_2 = 1$ , assim como em RG, a condição  $NEC_1$  é sempre violada. Desconsiderando a condição  $SEC_3$ , a escolha  $a_2 = 1$  parece ampliar as regiões onde as demais condições são violadas em comparação à RG. Para  $a_2 = -1$ , a condição  $NEC_2$  é violada em mais regiões que em RG; contudo, essa violação não ocorre em todo o espaço-tempo. A condição  $NEC_1$  passa a ser satisfeita em algumas regiões. Observa-se que há regiões onde todas as combinações são positivas, indicando que, ao menos em algumas regiões do espaço-tempo, todas as condições de energia são satisfeitas.

### 3.2.4 Caso IV

Vamos agora analisar as condições de energia para o modelo final,  $H_R = a_\Sigma \Sigma$ . Nas regiões onde  $A > 0$ , temos

$$\rho + p_r = \frac{a^2 (4m - 2\sqrt{a^2 + r^2})}{(a^2 + r^2)^{5/2}} - \frac{3a^2 a_\Sigma (-2m\sqrt{a^2 + r^2} + a^2 + r^2)}{(a^2 + r^2)^{5/2}}, \quad (3.123)$$

$$\rho + p_t = \frac{3a^2 m}{(a^2 + r^2)^{5/2}} + a_\Sigma \left( \frac{3m}{a^2 + r^2} - \frac{r^2}{(a^2 + r^2)^{3/2}} \right), \quad (3.124)$$

$$\rho + p_r + 2p_t = \frac{2a^2 m}{(a^2 + r^2)^{5/2}} + \frac{a_\Sigma (10a^4 + a^2 (22r^2 - 9m\sqrt{a^2 + r^2}) + 12r^4)}{6(a^2 + r^2)^{5/2}}, \quad (3.125)$$

$$\rho - p_r = \frac{4a^2 m}{(a^2 + r^2)^{5/2}} + \frac{3a_\Sigma m (5a^2 + 4r^2)}{2(a^2 + r^2)^2} - \frac{a_\Sigma (5a^2 + 12r^2)}{3(a^2 + r^2)^{3/2}}, \quad (3.126)$$

$$\rho - p_t = \frac{a^2 (5m - 2\sqrt{a^2 + r^2})}{(a^2 + r^2)^{5/2}} + \frac{3a_\Sigma m (7a^2 + 2r^2)}{2(a^2 + r^2)^2} - \frac{a_\Sigma (14a^2 + 9r^2)}{3(a^2 + r^2)^{3/2}}, \quad (3.127)$$

$$\rho = -\frac{a^2 (\sqrt{a^2 + r^2} - 4m)}{(a^2 + r^2)^{5/2}} + \frac{3a_\Sigma m (9a^2 + 4r^2)}{4(a^2 + r^2)^2} - \frac{a_\Sigma (7a^2 + 6r^2)}{3(a^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (3.128)$$

Nas regiões onde  $A < 0$ , temos

$$\rho + p_r = \frac{2a^2 (\sqrt{a^2 + r^2} - 2m)}{(a^2 + r^2)^{5/2}} + \frac{3a^2 a_\Sigma (-2m\sqrt{a^2 + r^2} + a^2 + r^2)}{(a^2 + r^2)^{5/2}}, \quad (3.129)$$

$$\rho + p_t = \frac{a^2 (2\sqrt{a^2 + r^2} - m)}{(a^2 + r^2)^{5/2}} + \frac{3a_\Sigma m (r^2 - a^2)}{(a^2 + r^2)^2} + \frac{a_\Sigma (3a^2 - r^2)}{(a^2 + r^2)^{3/2}}, \quad (3.130)$$

$$\rho + p_r + 2p_t = \frac{2a^2 (2\sqrt{a^2 + r^2} - 3m)}{(a^2 + r^2)^{5/2}} - \frac{27a^2 a_\Sigma m}{2(a^2 + r^2)^2} + \frac{a_\Sigma (23a^2 + 6r^2)}{3(a^2 + r^2)^{3/2}}, \quad (3.131)$$

$$\rho - p_r = \frac{4a^2 m}{(a^2 + r^2)^{5/2}} + \frac{3a_\Sigma m (5a^2 + 4r^2)}{2(a^2 + r^2)^2} - \frac{a_\Sigma (5a^2 + 12r^2)}{3(a^2 + r^2)^{3/2}}, \quad (3.132)$$

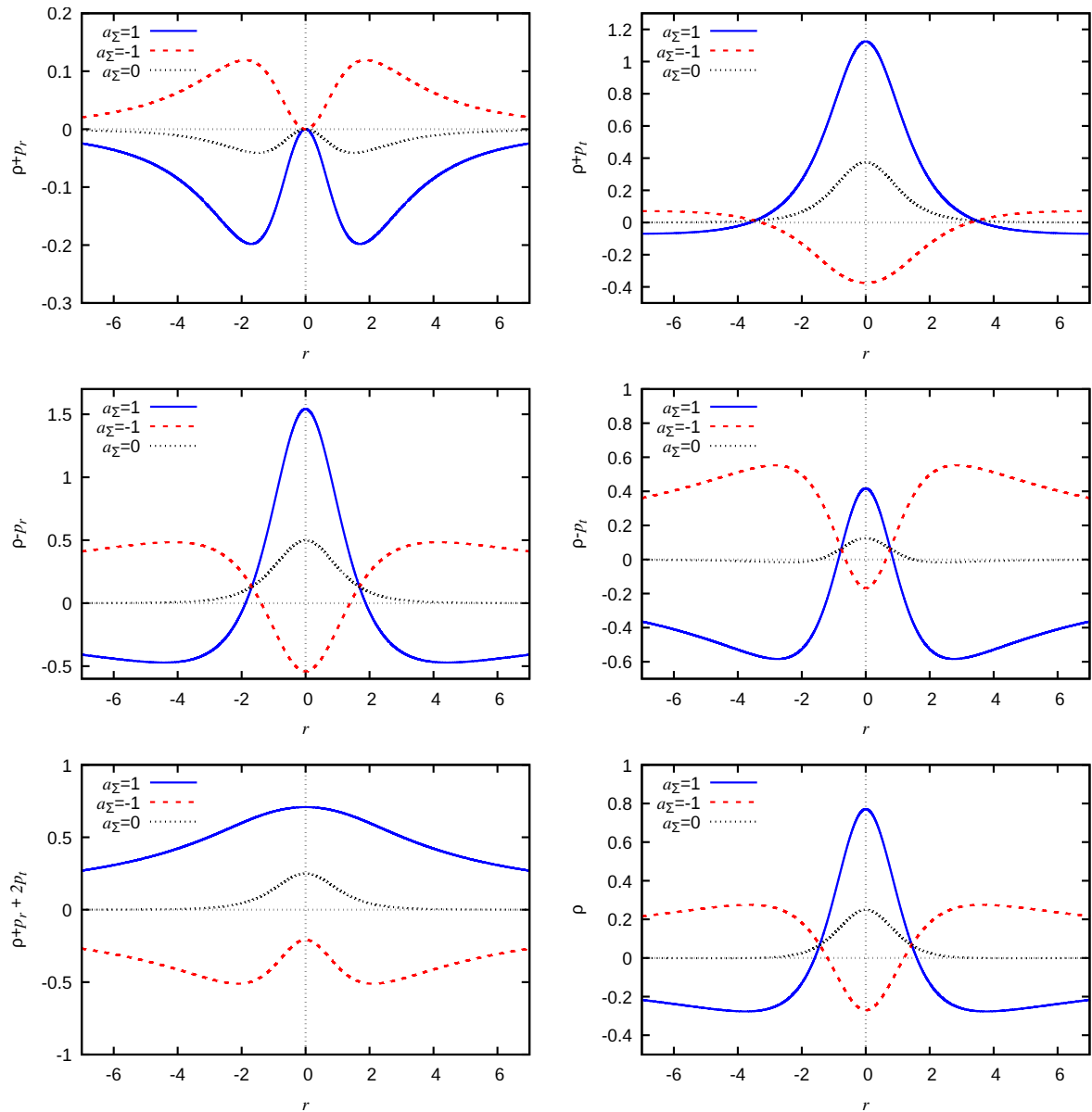
$$\rho - p_t = \frac{a^2 m}{(a^2 + r^2)^{5/2}} + \frac{3a_\Sigma m (3a^2 + 2r^2)}{2(a^2 + r^2)^2} - \frac{a_\Sigma (5a^2 + 9r^2)}{3(a^2 + r^2)^{3/2}}, \quad (3.133)$$

$$\rho = \frac{a^2}{(a^2 + r^2)^2} + \frac{3a_\Sigma m (a^2 + 4r^2)}{4(a^2 + r^2)^2} + \frac{2a_\Sigma (a^2 - 3r^2)}{3(a^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (3.134)$$

As correções introduzidas por este modelo da teoria  $f(R)$  nas condições de energia estão representadas pelos termos que envolvem  $a_\Sigma$ . Para melhor compreendermos tais modificações, analisaremos o comportamento dessas combinações graficamente.

Na Fig. 23, analisamos graficamente como as combinações dos componentes do

Figura 23: Combinação dos componentes do tensor energia-momento para o modelo  $H_R = a_\Sigma \Sigma$ , em função da coordenada radial, para  $m = 1$ ,  $a = 2$ , e diferentes valores de  $a_\Sigma$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

tensor energia-momento se comportam em função da coordenada radial. As combinações apresentam simetria sob a transformação  $r \rightarrow -r$ , assim como o próprio modelo escolhido para  $f(R)$ . Para  $a_\Sigma = 1$ , todas as condições, exceto  $NEC_1$ , são satisfeitas em pelo menos algumas regiões do espaço-tempo. Para  $a_\Sigma = -1$ , a condição  $NEC_1$  torna-se satisfeita. Contudo, as demais condições são violadas em regiões onde elas eram satisfeitas no caso da RG. Entretanto, com exceção da condição  $SEC_3$ , todas as condições são satisfeitas em pelo menos algumas regiões do espaço-tempo.

Concluimos, assim, que as modificações introduzidas pelo modelo de teoria  $f(R)$  utilizado podem relaxar a violação das condições de energia em algumas regiões do espaço-tempo.

## 4 FORÇAS DE MARÉ EM BLACK BOUNCES

Além dos buracos de minhoca, outra maneira de lidar com o problema das singularidades nas soluções é através dos espaços-tempos BB. Nesse tipo de espaço-tempo, a singularidade e seus arredores são removidos e substituídos pela garganta de um buraco de minhoca [118]. O primeiro modelo de BB foi proposto por Hochberg e Visser em 1997, e mais tarde estudado por Simpson e Visser em 2018 [154, 155]. Essa métrica, conhecida como espaço-tempo de Simpson-Visser (SV), pode ser obtida por um processo de regularização da métrica de Schwarzschild, introduzindo o parâmetro  $a$ , que regulariza o espaço-tempo ao substituir  $x \rightarrow \sqrt{x^2 + a^2}$  nos coeficientes métricos. Dependendo do valor desse parâmetro, a solução pode representar um BN singular, um BN regular ou um buraco de minhoca. Do ponto de vista das sombras dos BNs, essas soluções podem imitar de forma muito próxima suas contrapartes singulares [59, 156–158]. Vários modelos de BB são construídos usando esse método de regularização [159–165]; no entanto, outros modelos surgem a partir de abordagens distintas [109, 110, 166–171].

Esses espaços-tempos, conforme propostos na maioria dos casos, não são soluções das equações de campo de teorias conhecidas. No entanto, é possível realizar um procedimento de engenharia reversa, no qual os espaços-tempos são impostos como soluções das equações de campo, e a partir disso determina-se o tipo de fonte que gera tais soluções [84]. O tipo mais comum envolve um campo escalar fantasma, que também pode ser do tipo  $k$ -essência, combinado com uma eletrodinâmica não linear. Esse tipo de fonte foi encontrado para diversos tipos de soluções, como configurações esfericamente simétricas [108, 113, 117, 148, 149], soluções cilindricamente simétricas [116, 172], modelos em  $2 + 1$  dimensões [115], em teorias modificadas da gravidade [114, 145, 173], e até mesmo em cenários com quebra da simetria de Lorentz [174].

No entanto, espera-se que, uma vez que se alcance uma descrição quântica completa da gravidade, muitos dos problemas atuais da RG desapareçam, incluindo as singularidades. Nesse contexto, uma possível teoria candidata é a gravidade quântica em laços (LQG, em inglês), que busca quantizar o próprio espaço-tempo [175]. Inspirados por essa ideia, é possível adotar uma abordagem efetiva para introduzir correções quânticas na gravidade. Em [176, 177], foram consideradas correções de holonomia no espaço-tempo não homogêneo mais simples,

o esfericamente simétrico, obtendo-se assim uma solução de BN livre de singularidade contendo uma hipersuperfície tipo espaço mínima dentro do horizonte. Dessa forma, vemos que soluções BB também podem surgir naturalmente a partir de modelos efetivos inspirados pela LQG [178–181].

As forças de maré são o resultado da variação do campo gravitacional de um corpo massivo ao longo da extensão de outro corpo [182]. Essa diferença nas forças experimentadas pode causar deformações no corpo afetado, geralmente alongamento em uma direção e compressão em outra. Se o campo gravitacional for suficientemente intenso — um cenário astrofisicamente viável, por exemplo, quando estrelas estão localizadas próximas a BNs [183] — haverá um ponto no qual as forças de maré superam as forças internas do corpo secundário, levando à sua ruptura, chamada de *\*disrupção por maré\** [184, 185]. Esse ponto é denominado *\*raio de Roche\** [186]. No caso de um BH de Schwarzschild, um corpo em queda livre experimenta forças de maré que o alongam na direção radial e o comprimem nas direções tangenciais [182]. Essas forças aumentam à medida que o corpo se aproxima do BN, divergindo no centro, a singularidade. Dependendo da massa do BN, o raio de Roche pode situar-se dentro do horizonte de eventos, de modo que a disrupção por maré não seja observável [182].

Diferentes soluções de BN podem exibir forças de maré distintas e, conseqüentemente, propriedades diferentes. No caso do BN de Reissner–Nordström, as componentes radiais e tangenciais da força de maré atingem um máximo/mínimo e depois mudam de sinal, possibilitando um efeito de compressão no corpo em queda, ao invés de alongamento [187, 188]. As componentes da força de maré também podem divergir nesse caso, mas as partícula teste que caem nesse espaço-tempo atingem um ponto de aproximação máxima no qual a força de maré permanece finita [187]. Para BNs regulares, também se observa uma mudança de sinal nas componentes da força de maré; no entanto, ao contrário do caso de Reissner–Nordström, não há divergências nessas componentes [189, 190]. Por outro lado, existem soluções nas quais as forças de maré divergem mesmo no horizonte de eventos [191]. Portanto, vemos que, dependendo do modelo de BN considerado, as forças de maré podem apresentar comportamentos bastante distintos [192–201], e tais modificações podem afetar diretamente o raio de Roche.

#### 4.1 Espaço-tempos

No sistema de coordenadas em que a coordenada radial pode assumir valores entre  $-\infty < x < +\infty$  (incluindo zero), as geometrias BB geralmente têm seu elemento de linha escrito

na forma

$$ds^2 = -f(x)dt^2 + \frac{dx^2}{g(x)} + \Sigma(x)^2 d\Omega_2^2, \quad (4.1)$$

onde  $d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ .

Entretanto, por razões que se tornarão claras a seguir, é sempre possível realizar a transformação de coordenadas dada por  $r^2 = \Sigma(x)^2$ , em que agora a coordenada radial assume um valor mínimo dado por  $r = \Sigma(x=0)$ . Com isso, podemos reescrever o elemento de linha em uma forma mais conveniente, onde chamamos a coordenada radial simplesmente de  $r$ . Assim, temos

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{h(r)} + r^2 d\Omega_2^2, \quad (4.2)$$

onde é importante lembrar que a coordenada radial não pode assumir o valor  $r = 0$ . Ou seja, ela possui um valor mínimo, diferente de zero, que dependerá da geometria BB específica.

A seguir, discutiremos os aspectos gerais das geometrias BB que serão abordadas neste trabalho.

#### 4.1.1 Espaço-tempo SV

O espaço-tempo SV é a geometria BB mais simples [154, 155]. Esse espaço-tempo pode ser obtido por meio de um processo de regularização aplicado aos coeficientes da métrica de Schwarzschild, fazendo-se a substituição  $x \rightarrow \sqrt{x^2 + a^2}$ . Portanto, a métrica SV é um caso particular do elemento de linha (4.1), com:

$$f(x) = g(x) = 1 - \frac{2m}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad \Sigma(x) = \sqrt{x^2 + a^2}. \quad (4.3)$$

Esta é a forma mais conhecida e amplamente estudada do espaço-tempo SV. Contudo, podemos aplicar a transformação de coordenadas discutida anteriormente e expressar essa solução como um caso particular do elemento de linha (4.2), resultando em [202]

$$f(r) = 1 - \frac{2m}{r}, \quad h(r) = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right), \quad (4.4)$$

onde a coordenada radial assume valores entre  $a < r < +\infty$ .

É bem conhecido na literatura que, dependendo dos valores do parâmetro  $a$ , este elemento de linha pode descrever um buraco negro regular, um buraco de minhoca unidirecional, um buraco de minhoca bidirecional ou um buraco negro singular. No sistema de coordenadas que estamos utilizando, o horizonte de eventos está localizado em  $r = r_h = 2m$ , como

ocorre usualmente no caso de Schwarzschild, e o raio da garganta está localizado em  $r_t = a$ . Para  $a > 2m$ , o raio da garganta se torna maior que o raio do horizonte, e, nessa situação, o espaço-tempo representa um buraco de minhoca atravessável em ambas as direções.

#### 4.1.2 Tipo Bardeen

Um segundo modelo BB amplamente estudado na literatura é o tipo Bardeen [110]. No sistema de coordenadas original em que foi inicialmente proposto, esse espaço-tempo é descrito pelo elemento de linha (4.1), cujos coeficientes métricos são

$$f(x) = g(x) = 1 - \frac{2mx^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}}, \quad \Sigma(x) = \sqrt{x^2 + a^2}. \quad (4.5)$$

No sistema de coordenadas que estamos considerando, essa solução será descrita pelo elemento de linha (4.2), cujos coeficientes são

$$f(r) = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{2ma^2}{r^3}, \quad (4.6)$$

$$h(r) = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{2ma^2}{r^3}\right) \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right). \quad (4.7)$$

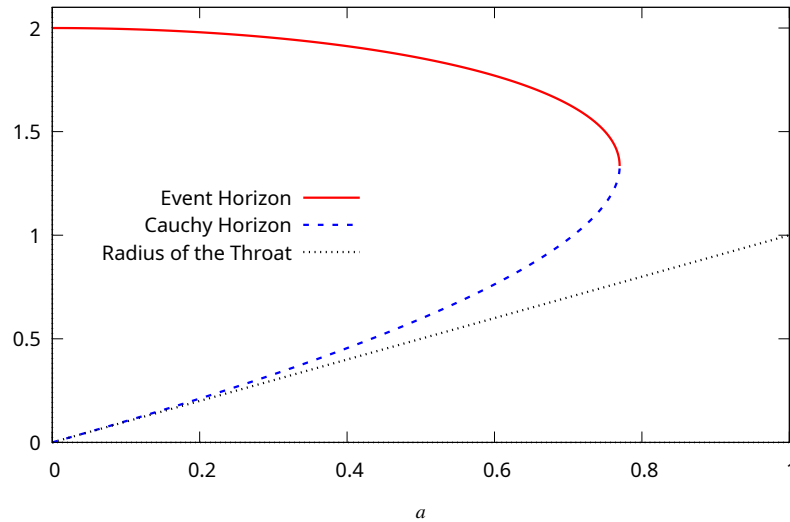
Essa solução apresenta dois horizontes e uma garganta de buraco de minhoca escondida atrás dos horizontes: um horizonte de eventos e um horizonte de Cauchy. Assim como no caso SV, o raio da garganta do buraco de minhoca é dado por  $r_t = a$ . As expressões analíticas para os horizontes são complicadas, mas podemos analisar seu comportamento em função do parâmetro de regularização graficamente. Na Fig. 24, observamos o comportamento dos raios do horizonte de eventos, do horizonte de Cauchy e da garganta do buraco de minhoca. Existe um valor extremo,  $a = a_{\text{ext}} = \frac{4m}{3\sqrt{3}}$ , acima do qual não existem horizontes, resultando em uma configuração de buraco de minhoca. Para  $a < a_{\text{ext}}$ , a garganta do buraco de minhoca permanece escondida atrás dos horizontes. A estrutura causal deste espaço-tempo foi estudada em detalhe em [110].

#### 4.1.3 Correções de holonomia

Um terceiro modelo BB que podemos estudar é o BN de Schwarzschild com correções de holonomia. Esse espaço-tempo é descrito pela métrica (4.2), cujos coeficientes são dados por [176, 177]:

$$f(r) = 1 - \frac{2m}{r}, \quad h(r) = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(1 - \frac{a}{r}\right), \quad (4.8)$$

Figura 24: Comportamento dos raios do horizonte e do raio da garganta do buraco de minhoca para a solução do tipo Bardeen em função do parâmetro de regularização. Escolhemos  $m = 1$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

onde  $a < 2m$ . De forma similar ao caso SV, essa solução apresenta um horizonte de eventos localizado em  $r = 2m$  e uma garganta de buraco de minhoca com raio  $r_t = a$ . Uma análise da estrutura causal desse espaço-tempo pode ser encontrada em [203].

Diferentemente dos outros modelos BB, esse espaço-tempo não exibirá buracos de minhoca atravessáveis, já que  $a < 2m$ , de modo que o raio da garganta não pode ser maior que o raio do horizonte de eventos.

Esse modelo também pode ser escrito em um sistema de coordenadas diferente, similar aos outros modelos, considerando  $r^2 = x^2 + a^2$ . Nesse caso, temos o elemento de linha (4.1) com:

$$f(x) = 1 - \frac{2m}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad (4.9)$$

$$g(x) = \left(1 - \frac{2m}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right) \left(1 + \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right)^{-1}, \quad (4.10)$$

com  $\Sigma(x) = \sqrt{x^2 + a^2}$ . Adotar esse sistema de coordenadas para o modelo não é particularmente vantajoso, pois leva a três funções que dependem da coordenada radial  $x$ , tornando o problema mais difícil do ponto de vista algébrico.

#### 4.1.4 Buraco negro polimerizado

O último modelo BB que consideraremos é o buraco negro polimerizado. Esse espaço-tempo é descrito pelo elemento de linha (4.2), cujos coeficientes são dados por [178]:

$$f(r) = \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2} - \frac{2m}{r}}, \quad (4.11)$$

$$h(r) = \left( \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2} - \frac{2m}{r}} \right) \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right). \quad (4.12)$$

Essa solução possui um horizonte de eventos em  $r_h = \sqrt{a^2 + 4m^2}$  e, como em todos os casos anteriores, possui uma garganta de buraco de minhoca localizada em  $r_t = a$ , a qual está escondida atrás do horizonte de eventos. É interessante notar que não há um limite superior finito para  $a$  que remova o horizonte de eventos neste modelo; portanto, não importa quão grande se torne o raio da garganta do buraco de minhoca, o raio do horizonte de eventos sempre será suficientemente grande para ocultá-la.

Assim como nos outros casos, ao escolher a transformação de coordenadas  $r^2 = x^2 + a^2$ , podemos reescrever esse espaço-tempo como (4.1) com:

$$f(x) = g(x) = \frac{x - 2m}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad \Sigma(x) = \sqrt{x^2 + a^2}. \quad (4.13)$$

Embora o espaço-tempo seja escrito de forma bastante simples nesse sistema de coordenadas, para os propósitos deste trabalho, consideraremos sempre os espaços-tempos expressos na forma (4.2).

Embora existam muitos outros modelos BB na literatura [110, 166], neste artigo focaremos nos quatro modelos apresentados aqui, pois estão entre os mais estudados em diversos contextos.

## 4.2 Geodésicas radiais

Vamos agora voltar nossa atenção para o movimento geodésico de partículas massivas neutras imersas em um espaço-tempo descrito por um elemento de linha geral escrito como na equação (4.2). Assim, temos que, para geodésicas tipo tempo:

$$-1 = -f(r)\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{h(r)} + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2, \quad (4.14)$$

onde o ponto representa a derivada em relação ao tempo próprio  $\tau$ . Assumiremos que os corpos de teste seguem geodésicas radiais, de modo que adotaremos  $\theta = \pi/2$ ,  $\dot{\theta} = 0$  e  $\dot{\phi} = 0$ . Além

disso, como temos um vetor de Killing tipo tempo, temos a seguinte equação de conservação:

$$E = f(r)\dot{t}. \quad (4.15)$$

Na equação acima, associada à conservação da energia da partícula ao longo do movimento geodésico, a constante  $E$  representa a energia por unidade de massa do corpo de teste. Com isso, podemos reescrever a equação (4.14) como

$$-\frac{E^2}{f(r)} + \frac{\dot{r}^2}{h(r)} = -1, \quad (4.16)$$

ou

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm \sqrt{\frac{[E^2 - f(r)]h(r)}{f(r)}}. \quad (4.17)$$

Como assumiremos que o corpo está se movendo radialmente em direção à geometria BB, a partir de agora consideraremos apenas o sinal negativo da equação acima. Ademais, se a partícula for liberada do repouso em  $r = b$ , sua energia por unidade de massa será então dada por  $E = \sqrt{f(r=b)}$ . Com isso, se o espaço-tempo for assintoticamente plano, temos o caso especial em que  $E = \sqrt{f(b \rightarrow \infty)} = 1$ .

### 4.3 Equações gerais

Como mencionado anteriormente, nosso principal objetivo aqui é investigar as forças de maré experimentadas por observadores imersos em espaços-tempos do tipo BB. Para isso, faremos uso da equação de desvio geodésico, que descreve a aceleração relativa entre duas partículas infinitesimalmente próximas, dada por

$$\frac{D^2 \xi^\mu}{D\tau^2} = K^\mu{}_\gamma \xi^\gamma, \quad (4.18)$$

onde  $\xi^\mu$  é o vetor de deslocamento infinitesimal entre geodésicas vizinhas e  $K^\mu{}_\gamma$  é o tensor de maré, dado em termos do tensor de Riemann por

$$K^\mu{}_\gamma = R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} u^\alpha u^\beta, \quad (4.19)$$

onde  $u^\mu$  é o vetor tipo-tempo tangente à geodésica, que satisfaz  $u^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta} = -1$ . Para calcular os componentes da força de maré, devemos utilizar o formalismo dos tetradas, ou seja, devemos empregar a base ortonormal de tetradas para analisar a força de maré experimentada por um corpo de teste nas proximidades do BB. Assumimos que o corpo de teste segue uma geodésica

radial. Assim, o tensor métrico escrito em termos dos tetradas é dado por

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\hat{a}\hat{b}} \hat{e}_{\hat{a}}^{\mu} \hat{e}_{\hat{b}}^{\nu}, \quad (4.20)$$

onde os índices com chapéu referem-se à base tetrádica, e  $\eta_{\hat{a}\hat{b}} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  é a métrica de Minkowski em coordenadas cartesianas.

Para compreender os efeitos das forças de maré, é necessário observar como evolui a aceleração espacial entre dois corpos de teste em queda livre em direção ao BB. Em nosso caso, consideraremos que o observador está fixo à primeira partícula, que segue uma linha mundo dada por  $x^{\mu}(\tau)$  e que passa por um evento  $P$  da variedade em um dado instante  $\tau$ . Nesse contexto, a base tetrádica definirá o Referencial de Repouso Instantâneo (IRF, do inglês Instantaneous Rest Frame) da primeira partícula, isto é, do observador, no ponto  $P$ . A base de tetradas  $\hat{e}_{\hat{a}}^{\mu}$  para um observador em queda livre radial em um espaço-tempo BB é tipicamente escolhida de forma que o vetor tipo-tempo se alinhe com a 4-velocidade do observador. Para um observador em queda a partir do repouso, os tetradas podem ser escritos como:

$$\hat{e}_{\hat{0}}^{\mu} = \left( \frac{E}{f}, -\sqrt{\frac{(E^2 - f)h}{f}}, 0, 0 \right), \quad (4.21)$$

$$\hat{e}_{\hat{1}}^{\mu} = \left( -\frac{E^2 - f}{f}, E\sqrt{\frac{h}{f}}, 0, 0 \right), \quad (4.22)$$

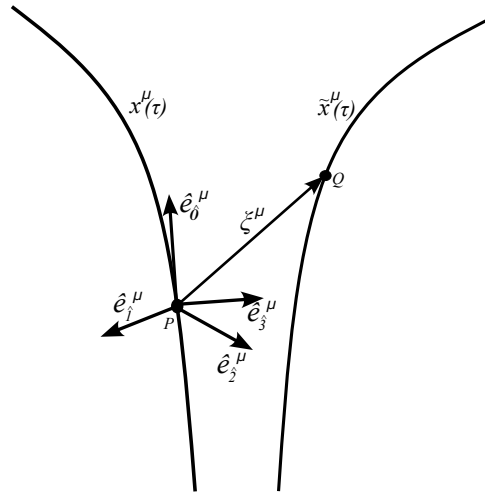
$$\hat{e}_{\hat{2}}^{\mu} = \left( 0, 0, \frac{1}{r}, 0 \right), \quad (4.23)$$

$$\hat{e}_{\hat{3}}^{\mu} = \left( 0, 0, 0, \frac{1}{r \sin \theta} \right). \quad (4.24)$$

Na Fig. 25, apresentamos um diagrama representando a linha de universo da primeira partícula, à qual está associada a base tetrádica. A figura também ilustra o vetor de deslocamento infinitesimal entre as geodésicas vizinhas  $x^{\mu}(\tau)$  e  $\tilde{x}^{\mu}(\tau)$ .

O vetor tipo-tempo  $\hat{e}_{\hat{0}}^{\mu}$  é a 4-velocidade, ou seja,  $\hat{e}_{\hat{0}}^{\mu} = u^{\mu}$ , enquanto  $\hat{e}_{\hat{1}}^{\mu}, \hat{e}_{\hat{2}}^{\mu}$  e  $\hat{e}_{\hat{3}}^{\mu}$  formam uma base ortonormal para o espaço tridimensional nas vizinhanças do observador em queda livre. O vetor  $\hat{e}_{\hat{1}}^{\mu}$  aponta na direção radial, descrevendo variações na coordenada  $r$ , sendo normalizado e ortogonal ao vetor temporal  $\hat{e}_{\hat{0}}^{\mu}$ . O vetor  $\hat{e}_{\hat{2}}^{\mu}$  aponta na direção polar  $\theta$ , correspondente a pequenas variações angulares de latitude, enquanto  $\hat{e}_{\hat{3}}^{\mu}$  aponta na direção azimutal  $\phi$ , descrevendo variações angulares em torno do eixo de simetria. Esses vetores são

Figura 25: Representação esquemática da base tetrádica associada à partícula no ponto  $P$ . Também é mostrado o vetor de deslocamento infinitesimal  $\xi^\mu$  entre duas geodésicas vizinhas  $x^\mu(\tau)$  e  $\tilde{x}^\mu(\tau)$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

mutuamente ortogonais e satisfazem a condição de normalização de Minkowski

$$\hat{e}_a^\mu \hat{e}_\mu^{\hat{b}} = \delta_a^{\hat{b}}, \quad (4.25)$$

assegurando que um observador local que mede distâncias e ângulos neste referencial obtenha resultados consistentes com a relatividade restrita. Calculando o tensor de Riemann associado à métrica (4.2) e projetando-o sobre a base tetrádica de um observador em queda livre em um espaço-tempo BB, pode-se mostrar que o tensor de maré no referencial tetrádico é dado por

$$K^{\hat{a}}_{\hat{b}} = \text{diag}(0, k_1, k_2, k_2), \quad (4.26)$$

onde

$$k_1 = -\frac{hf''}{2f} - \frac{f'h'}{4f} + \frac{hf'^2}{4f^2}, \quad (4.27)$$

$$k_2 = \frac{(E^2 - f)h'}{2rf} - \frac{E^2 hf'}{2rf^2}. \quad (4.28)$$

É interessante notar que, para soluções descritas pelo elemento de linha (4.2) com  $f(r) = h(r)$ , o componente  $k_2$  do tensor de maré não depende da energia.

Com as equações acima, podemos escrever as equações que descrevem a aceleração

relativa entre dois observadores próximos como

$$\frac{D^2 \xi^{\hat{r}}}{D\tau^2} = \left( -\frac{hf''}{2f} - \frac{f'h'}{4f} + \frac{hf'^2}{4f^2} \right) \xi^{\hat{r}}, \quad (4.29)$$

$$\frac{D^2 \xi^{\hat{\theta}}}{D\tau^2} = \left( \frac{(E^2 - f)h'}{2rf} - \frac{E^2 hf'}{2rf^2} \right) \xi^{\hat{\theta}}, \quad (4.30)$$

$$\frac{D^2 \xi^{\hat{\phi}}}{D\tau^2} = \left( \frac{(E^2 - f)h'}{2rf} - \frac{E^2 hf'}{2rf^2} \right) \xi^{\hat{\phi}}. \quad (4.31)$$

As equações específicas dependerão do tipo de espaço-tempo de BB considerado, o que será analisado caso a caso na subseção seguinte. No entanto, antes disso, é útil escrever as equações que descrevem a variação do vetor de deslocamento como função da coordenada  $r$ . Esse vetor fornece informações sobre a deformação experimentada por um corpo de teste em queda livre dentro do espaço-tempo BB. Para obter as componentes (4.29)-(4.31), devemos lembrar a equação (4.17), a qual nos permite escrever as seguintes equações diferenciais de segunda ordem para as componentes de  $\xi^{\hat{a}}$ :

$$\left( \frac{(E^2 - f)h}{f} \right) \xi^{\hat{r}''} + \left( \frac{(E^2 - f)fh' - E^2 hf'}{2f^2} \right) \xi^{\hat{r}'} + \left( \frac{hf''}{2f} + \frac{f'h'}{4f} - \frac{hf'^2}{4f^2} \right) \xi^{\hat{r}} = 0, \quad (4.32)$$

$$\left( \frac{(E^2 - f)h}{f} \right) \xi^{\hat{\theta}''} + \left( \frac{(E^2 - f)fh' - E^2 hf'}{2f^2} \right) \xi^{\hat{\theta}'} - \left( \frac{(E^2 - f)h'}{2rf} - \frac{E^2 hf'}{2rf^2} \right) \xi^{\hat{\theta}} = 0, \quad (4.33)$$

$$\left( \frac{(E^2 - f)h}{f} \right) \xi^{\hat{\phi}''} + \left( \frac{(E^2 - f)fh' - E^2 hf'}{2f^2} \right) \xi^{\hat{\phi}'} - \left( \frac{(E^2 - f)h'}{2rf} - \frac{E^2 hf'}{2rf^2} \right) \xi^{\hat{\phi}} = 0. \quad (4.34)$$

As equações acima geralmente não admitem soluções analíticas, sendo necessário utilizar métodos numéricos para resolvê-las. Consequentemente, precisamos estabelecer condições iniciais para sua resolução. Em nosso caso, há duas condições iniciais comumente utilizadas na literatura no contexto do estudo de forças de maré, a saber:

$$\xi^{\hat{\beta}}(b) > 0, \quad \xi^{\hat{\beta}'}(b) = 0, \quad (ICI), \quad (4.35)$$

$$\xi^{\hat{\beta}}(b) = 0, \quad \xi^{\hat{\beta}'}(b) > 0, \quad (ICII), \quad (4.36)$$

onde  $\xi^{\hat{\beta}}(b)$  é a componente  $\hat{\beta} = \{\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}\}$  do vetor de deslocamento infinitesimal em  $r = b$ . Além disso, a condição (ICI) corresponde à liberação do repouso em  $r = b$  de um corpo composto por poeira sem interação interna, enquanto a condição (ICII) corresponde a permitir que um corpo de poeira exploda em  $r = b$ . Neste trabalho, focaremos apenas na condição (ICI).

Com as equações gerais em mãos, podemos agora realizar uma análise detalhada das mesmas para diferentes espaços-tempos do tipo BB.

#### 4.3.1 Efeitos das forças de maré em espaços-tempos SV

Como primeira aplicação, voltamos agora ao espaço-tempo de SV. Com isso, considerando a equação (4.4), podemos reescrever as equações (4.29), (4.30) e (4.31) para este caso como

$$\frac{D^2 \xi^{\hat{r}}}{D\tau^2} = \frac{(2r^2 - 3a^2)m}{r^5} \xi^{\hat{r}}, \quad (4.37)$$

$$\frac{D^2 \xi^{\hat{\theta}}}{D\tau^2} = \frac{a^2[3m + r(E^2 - 1)] - mr^2}{r^5} \xi^{\hat{\theta}}, \quad (4.38)$$

$$\frac{D^2 \xi^{\hat{\phi}}}{D\tau^2} = \frac{a^2[3m + r(E^2 - 1)] - mr^2}{r^5} \xi^{\hat{\phi}}. \quad (4.39)$$

Podemos tirar algumas conclusões analíticas a partir dessas equações. Primeiramente, é fácil ver que a força de maré radial vai a zero no ponto  $r = r_0^r$

$$r_0^r = \sqrt{\frac{3}{2}}a, \quad (4.40)$$

e alcança um valor máximo no ponto  $r = r_{max}^r$

$$r_{max}^r = \sqrt{\frac{5}{2}}a. \quad (4.41)$$

Se  $a > 2\sqrt{2/3}m$ , o ponto onde a componente radial da força de maré é zero estará fora do horizonte de eventos, então neste caso será possível, em princípio, observar esse efeito de compressão. Para  $a > 2\sqrt{2/5}m$ , o máximo da componente radial estará localizado fora do horizonte de eventos. A força de maré angular vai a zero em  $r = r_0^a$

$$r_0^a = \frac{a^2(E^2 - 1) + \sqrt{a^4(E^2 - 1)^2 + 12a^2m^2}}{2m}, \quad (4.42)$$

e alcança um valor mínimo no ponto  $r_{min}^a$

$$r_{min}^a = \frac{2a^2(E^2 - 1) + \sqrt{4a^4(E^2 - 1)^2 + 45a^2m^2}}{3m}. \quad (4.43)$$

Observamos que as expressões para o ponto mínimo e para o ponto onde ocorre a mudança de sinal dependem explicitamente da energia. Essas expressões podem ser significativamente

simplificadas se considerarmos o caso  $E = 1$ , onde obtemos

$$r_0^a = \sqrt{3}a, \quad e \quad r_{min}^a = \sqrt{5}a. \quad (4.44)$$

Para um valor arbitrário da energia, o ponto onde a componente angular atinge seu valor mínimo ou onde muda de sinal estará fora do horizonte se  $a$  assumir os valores  $a > 2m/\sqrt{2E^2 + 1}$  e  $a > 2\sqrt{3}m/\sqrt{8E^2 + 7}$ , respectivamente. Esses valores podem ser simplificados para o caso em que escolhemos  $E = 1$ , obtendo-se assim  $a > 2m/\sqrt{3}$  e  $a > 2m/\sqrt{5}$ .

Também podemos calcular como essas forças se comportam na garganta da solução,  $r = a$ . Nesse caso, temos

$$\left. \frac{D^2 \xi^{\hat{r}}}{D\tau^2} \right|_{r=a} = -\frac{m}{a^3} \xi^{\hat{r}}, \quad (4.45)$$

$$\left. \frac{D^2 \xi^{\hat{\theta}}}{D\tau^2} \right|_{r=a} = \frac{2m + a(E^2 - 1)}{a^3} \xi^{\hat{\theta}}, \quad (4.46)$$

$$\left. \frac{D^2 \xi^{\hat{\phi}}}{D\tau^2} \right|_{r=a} = \frac{2m + a(E^2 - 1)}{a^3} \xi^{\hat{\phi}}. \quad (4.47)$$

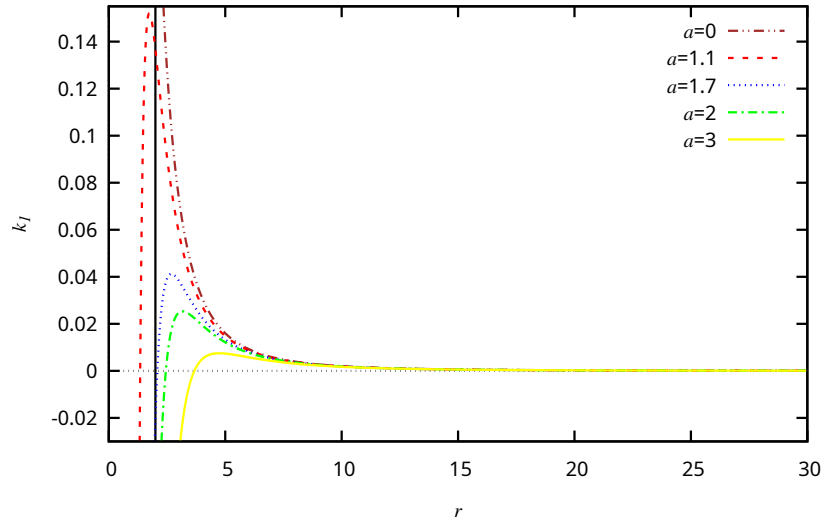
Todas as componentes são regulares na garganta e se tornam mais intensas conforme o valor de  $a$  diminui. No limite de Schwarzschild,  $a \rightarrow 0$ , essas componentes divergem.

Na Fig. 26, observamos o comportamento da componente radial da força de maré,  $k_1$ . Como discutido, podemos ver que se o valor do parâmetro  $a$  for pequeno o suficiente, tanto o ponto onde  $k_1$  alcança seu máximo quanto o ponto onde  $k_1$  muda de sinal permanecem ocultos atrás do horizonte de eventos. Na Fig. 27, observamos o comportamento da componente angular da força de maré,  $k_2$ . De maneira semelhante ao que acontece com a componente radial, se o valor de  $a$  for pequeno o suficiente, os pontos mínimos de  $k_2$  e o ponto onde  $k_2$  muda de sinal estão escondidos pelo horizonte de eventos, impossibilitando sua observação. Em geral, para pontos mais distantes,  $k_1$  assume valores positivos enquanto  $k_2$  assume valores negativos, levando a um estiramento dos corpos nessas regiões. Para distâncias menores,  $k_1$  assume valores negativos enquanto  $k_2$  assume valores positivos, resultando em um evento de compressão.

Sobre o vetor deslocamento para o caso de SV, podemos tentar escrever expressões analíticas para as soluções das equações (4.32)–(4.34). No entanto, essas expressões são bastante extensas e escritas em termos de integrais elípticas. Podemos tentar simplificar escolhendo o caso especial onde  $E \rightarrow 1$ . Neste caso, encontramos que

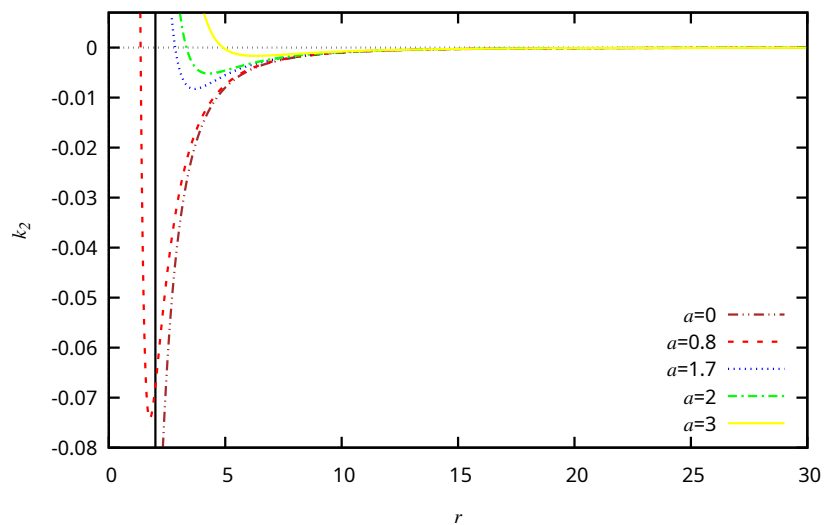
$$\xi^{\hat{r}} = \frac{a_1}{\sqrt{r}} + \frac{2}{5} a_2 r \left( \sqrt{r^2 - a^2} + a i_2 F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{3}{4}; \frac{7}{4}; \frac{r^2}{a^2} \right) \right), \quad (4.48)$$

Figura 26: Força de maré radial em função da coordenada  $r$  para diferentes valores de  $a$ , fixando  $m = 1$ . A linha vertical está localizada em  $r = 2m$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 27: Força de maré angular em função da coordenada  $r$  para diferentes valores de  $a$ , fixando  $m = 1$  e  $b = 30m$ . A linha vertical está localizada em  $r = 2m$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\xi^{\hat{\theta}} = b_1 r + \frac{2ib_2 r^{3/2} {}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{5}{4}; \frac{r^2}{a^2}\right)}{a}, \quad (4.49)$$

$$\xi^{\hat{\phi}} = b_1 r + \frac{2ib_2 r^{3/2} {}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{5}{4}; \frac{r^2}{a^2}\right)}{a}. \quad (4.50)$$

onde  ${}_2F_1(x_1, x_2; x_3; x_4)$  é a função hipergeométrica e as constantes de integração  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  e  $b_2$  podem ser determinadas impondo as condições de contorno em  $b$ . No entanto, essas componentes do vetor deslocamento tornam-se mais claras quando analisadas graficamente.

Na Figura 28, observamos o comportamento das componentes radial e angular do vetor deslocamento para geodésicas radiais no espaço-tempo de SV considerando a condição inicial (4.35). Quanto à componente radial, notamos que alterar o parâmetro de regularização  $a$  não altera significativamente a forma da curva. Além disso, para um dado ponto, a componente radial é maior para valores menores de  $a$ . Esse resultado é esperado, pois a aceleração radial é maior para valores menores de  $a$ , levando a uma separação menor para valores maiores do parâmetro de regularização. Para a componente angular, o comportamento é diferente. Embora as diferenças sejam pequenas, a separação angular aumenta com o aumento dos valores de  $a$ . Além disso, é importante notar que, para  $a \neq 0$ , algumas curvas terminam abruptamente. Isso ocorre porque, nesse sistema de coordenadas, a região permitida é  $a < r < +\infty$ , o que significa que os gráficos terminam na garganta do buraco de minhoca. Na Figura 29, fixamos o ponto no qual analisamos as componentes do vetor deslocamento e examinamos como elas se comportam para diferentes valores de  $a$ . Observamos que as diferenças na componente radial são bastante pequenas, enquanto na componente angular tornam-se mais evidentes apenas para valores maiores de  $a$ .

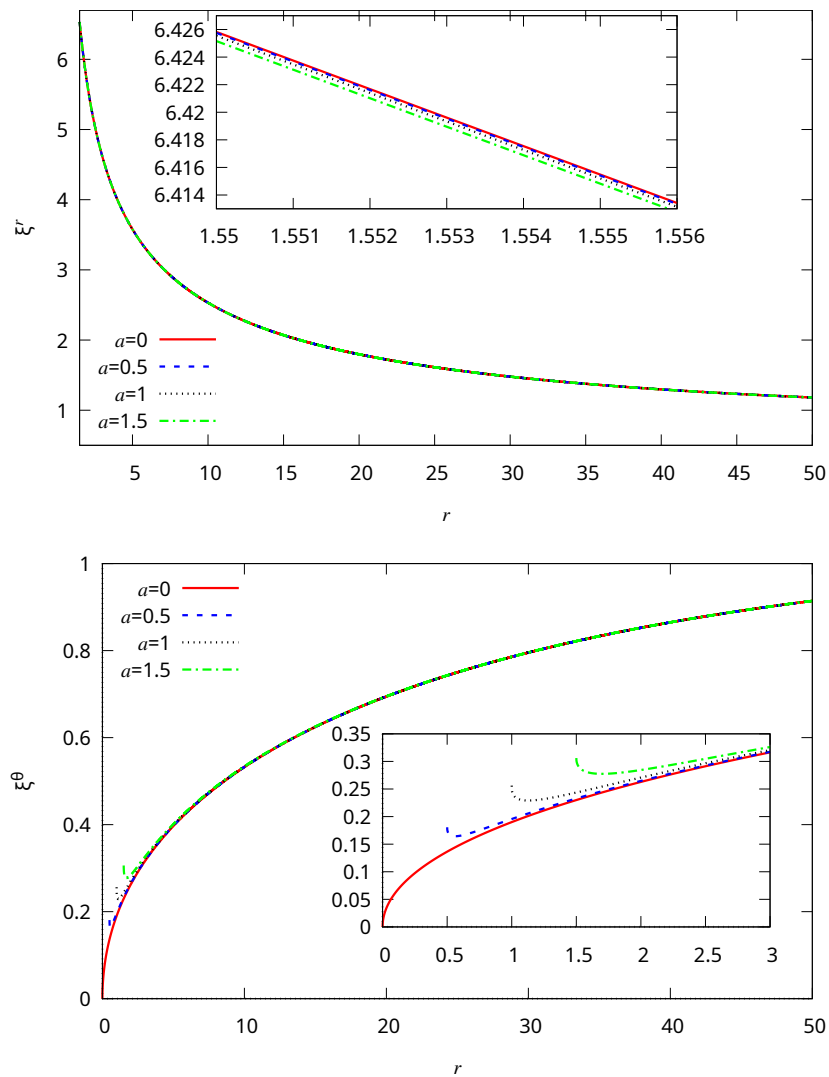
Embora possam parecer diferentes, nossos resultados são consistentes com os apresentados na referência [199]. A aparente discrepância surge devido à escolha do sistema de coordenadas, e esta seção demonstra como diferentes sistemas de coordenadas podem afetar a visualização dos resultados.

### 4.3.2 Efeitos das forças de maré em BB do tipo Bardeen

Agora iremos analisar os efeitos da força de maré no background dado por um BB do tipo Bardeen.

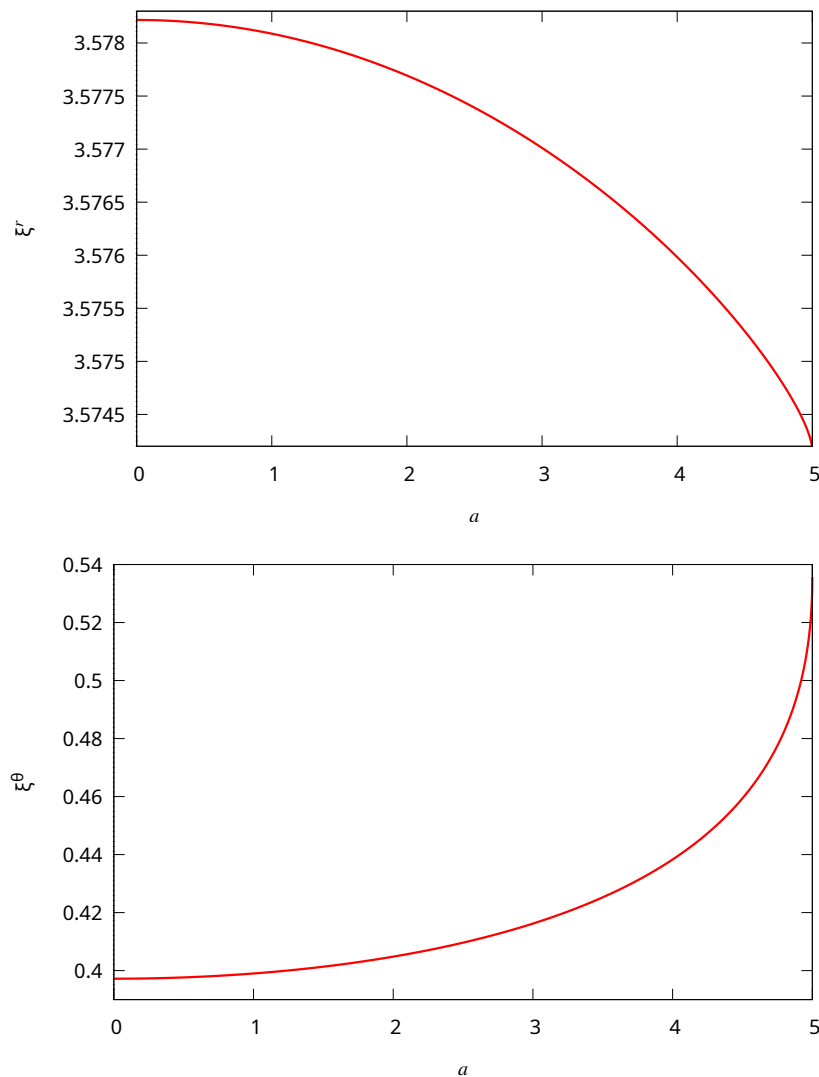
Levando em conta as equações (4.6) e (4.7), podemos reescrever as equações (4.29),

Figura 28: Componentes radial (acima) e tangencial (abaixo) do vetor deslocamento para geodésicas radiais no espaço-tempo de SV em função da coordenada radial para diferentes valores de  $a$ . Neste caso, foram usadas as condições de contorno (4.35) com  $b = 100$  e  $m = 1$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 29: Componentes radial (acima) e tangencial (abaixo) do vetor deslocamento para geodésicas radiais no espaço-tempo de SV em função do parâmetro  $a$  para um valor específico da coordenada radial  $r = 5$ . Neste caso, foram usadas as condições de contorno (4.35) com  $b = 100$  e  $m = 1$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

(4.30) e (4.31) para este caso como

$$\frac{D^2 \xi^{\hat{r}}}{D\tau^2} = \frac{m(15a^4 - 15a^2r^2 + 2r^4)}{r^7} \xi^{\hat{r}}, \quad (4.51)$$

$$\frac{D^2 \xi^{\hat{\theta}}}{D\tau^2} = \frac{-5a^4m + a^2r^2(6m + (E^2 - 1)r) - mr^4}{r^7} \xi^{\hat{\theta}}, \quad (4.52)$$

$$(4.53)$$

$$\frac{D^2 \xi^{\hat{\phi}}}{D\tau^2} = \frac{-5a^4m + a^2r^2(6m + (E^2 - 1)r) - mr^4}{r^7} \xi^{\hat{\phi}}. \quad (4.54)$$

$$(4.55)$$

Quanto à força radial, é possível concluir que ela se anula em dois pontos diferentes da coordenada radial, dados por

$$r_0^{r(1)} = \frac{a}{2} \sqrt{15 + \sqrt{105}}, \quad r_0^{r(2)} = \frac{a}{2} \sqrt{15 - \sqrt{105}}, \quad (4.56)$$

de modo que podemos concluir que, diferente do caso de SV, aqui a força de maré radial muda de sinal duas vezes. Dependendo do valor de  $a$ , a primeira mudança de sinal que  $k_1$  sofre pode estar localizada fora do horizonte de eventos. Entretanto, para os casos onde os horizontes existem, a segunda mudança de sinal estará sempre escondida atrás dos horizontes.

A força radial atinge seu valor máximo em  $r = a$ , como será melhor entendido mais adiante. Além disso, ela apresenta um máximo local e um mínimo global, ambos localizados em

$$r_{max}^r \text{ local} = \frac{a}{2} \sqrt{25 + \sqrt{345}}, \quad r_{min}^r = \frac{a}{2} \sqrt{25 - \sqrt{345}}. \quad (4.57)$$

Para casos onde os horizontes existem, o ponto mínimo estará sempre escondido atrás do horizonte, enquanto o ponto do máximo local ficará escondido atrás do horizonte de eventos somente para valores pequenos de  $a$ .

Quanto à força angular, ela também se anula em dois valores diferentes da coordenada radial. Entretanto, para valores arbitrários de  $E$ , essas expressões se tornam extremamente complicadas. Assim, para o caso específico onde  $E \rightarrow 1$ , os pontos onde a força de maré angular se anula são dados por

$$r_0^{a(1)} = \sqrt{5}a, \quad r_0^{a(2)} = a. \quad (4.58)$$

É interessante notar que para  $E \rightarrow 1$ , a força de maré angular se anula em  $r \rightarrow a$ , enquanto a força de maré radial atinge seu máximo no mesmo ponto. Esse comportamento difere significativamente do caso SV. De modo similar à componente radial, dependendo dos valores do

parâmetro  $a$ , a primeira mudança de sinal pode estar escondida atrás do horizonte ou ocorrer fora dele, enquanto a segunda mudança de sinal está sempre escondida atrás do horizonte nos casos em que o horizonte de eventos existe.

A força de maré angular apresenta um mínimo local e um máximo global, dados por

$$r_{min}^a{}^{local} = a\sqrt{5 + 2\sqrt{\frac{10}{3}}}, \quad r_{max}^a = a\sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{3}}}. \quad (4.59)$$

Nos casos em que os horizontes existem, o ponto máximo estará sempre escondido atrás do horizonte de eventos, enquanto o ponto mínimo pode estar localizado fora do horizonte de eventos para certos valores de  $a$ .

As componentes das forças de maré calculadas no mínimo da coordenada radial são dadas por

$$\left. \frac{D^2 \xi^{\hat{r}}}{D\tau^2} \right|_{r=a} = \frac{2m}{a^3} \xi^{\hat{r}}, \quad (4.60)$$

$$\left. \frac{D^2 \xi^{\hat{\theta}}}{D\tau^2} \right|_{r=a} = \frac{E^2 - 1}{a^3} \xi^{\hat{\theta}}, \quad (4.61)$$

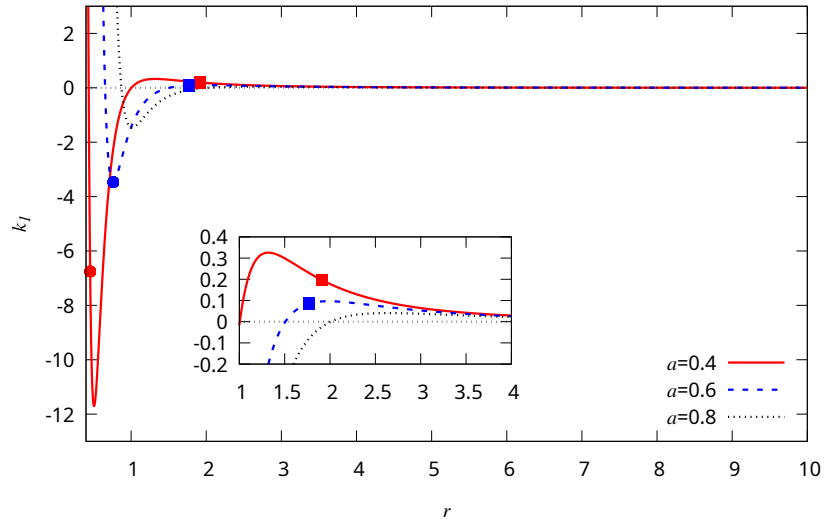
$$\left. \frac{D^2 \xi^{\hat{\phi}}}{D\tau^2} \right|_{r=a} = \frac{E^2 - 1}{a^3} \xi^{\hat{\phi}}. \quad (4.62)$$

Como mencionado acima, pode-se observar que para  $E \rightarrow 1$  a força de maré angular se anula na localização da garganta.

Na Fig. 30, mostramos o comportamento da força de maré radial em função de  $r$ . O gráfico revela que a força radial muda de sinal duas vezes. Para valores suficientemente grandes de  $r$ , ela assume valores positivos, atingindo um máximo local na posição dada por (4.57), após a qual começa a decrescer até atingir zero na posição dada por (4.56). Além desse ponto, ela se torna negativa, atingindo seu valor mínimo em (4.57), onde começa a crescer novamente até atingir zero mais uma vez em (4.56). A partir daí, volta a ser positiva até a garganta, localizada em  $r = a$ . Além disso, para os valores de parâmetro escolhidos, essas mudanças de sinal na força de maré radial ficam inicialmente ocultas pelo horizonte de eventos.

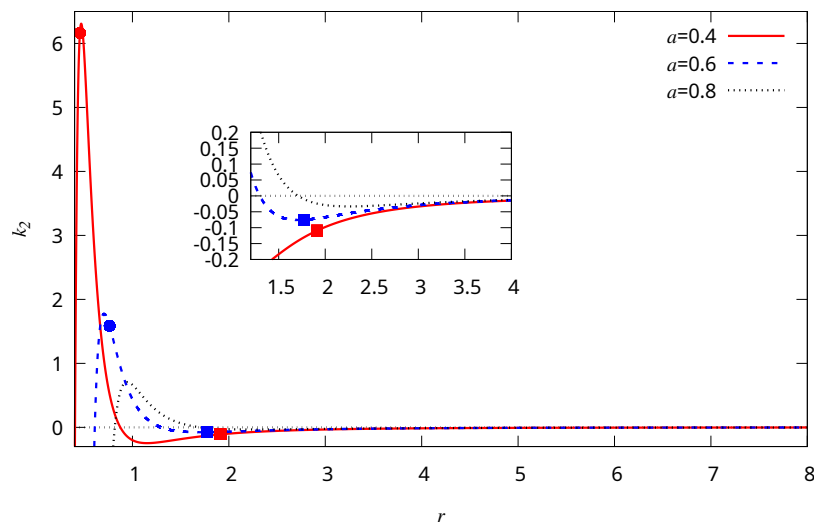
Quanto ao vetor deslocamento para o caso do tipo Bardeen, não é possível resolver (4.32)–(4.34) analiticamente para valores arbitrários da energia. Entretanto, podemos tentar

Figura 30: Força de maré radial para o BB do tipo Bardeen em função da coordenada  $r$  para diferentes valores de  $a$ , fixando  $m = 1$ . Os pontos quadrados nas curvas representam a posição do horizonte de eventos, enquanto os pontos circulares representam a posição do horizonte de Cauchy.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 31: Força de maré angular para o BB do tipo Bardeen em função da coordenada  $r$  para diferentes valores de  $a$ , fixando  $m = 1$  e  $b = 10m$ . Os pontos quadrados nas curvas representam a posição do horizonte de eventos, enquanto os pontos circulares representam a posição do horizonte de Cauchy.



Fonte: Elaborado pelo autor.

simplificar escolhendo o caso especial onde  $E \rightarrow 1$ . Nesse caso, encontramos que

$$\begin{aligned} \xi^{\hat{r}} &= \frac{c_1 \sqrt{r^2 - a^2}}{r^{3/2}} + c_2 \left( \frac{36a^2 r^2 + 4r^4 - 45a^4}{10r\sqrt{r^2 - a^2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{9a^{5/2} \sqrt{r^2 - a^2}}{4r^{3/2}} \left( \tan^{-1} \sqrt{\frac{r}{a}} + \tanh^{-1} \sqrt{\frac{r}{a}} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\xi^{\hat{\theta}} = d_1 r + \frac{d_2 r}{\sqrt{a}} \left( \tan^{-1} \sqrt{\frac{r}{a}} - \tanh^{-1} \sqrt{\frac{r}{a}} \right), \quad (4.64)$$

$$\xi^{\hat{\phi}} = d_1 r + \frac{d_2 r}{\sqrt{a}} \left( \tan^{-1} \sqrt{\frac{r}{a}} - \tanh^{-1} \sqrt{\frac{r}{a}} \right), \quad (4.65)$$

onde as constantes de integração  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $d_1$  e  $d_2$  podem ser determinadas impondo as condições de contorno em  $b$ . Embora as expressões não estejam escritas em termos de funções especiais, como no caso SV, as expressões analíticas não são nem claras nem informativas. Portanto, é mais apropriado analisar as componentes do vetor deslocamento graficamente.

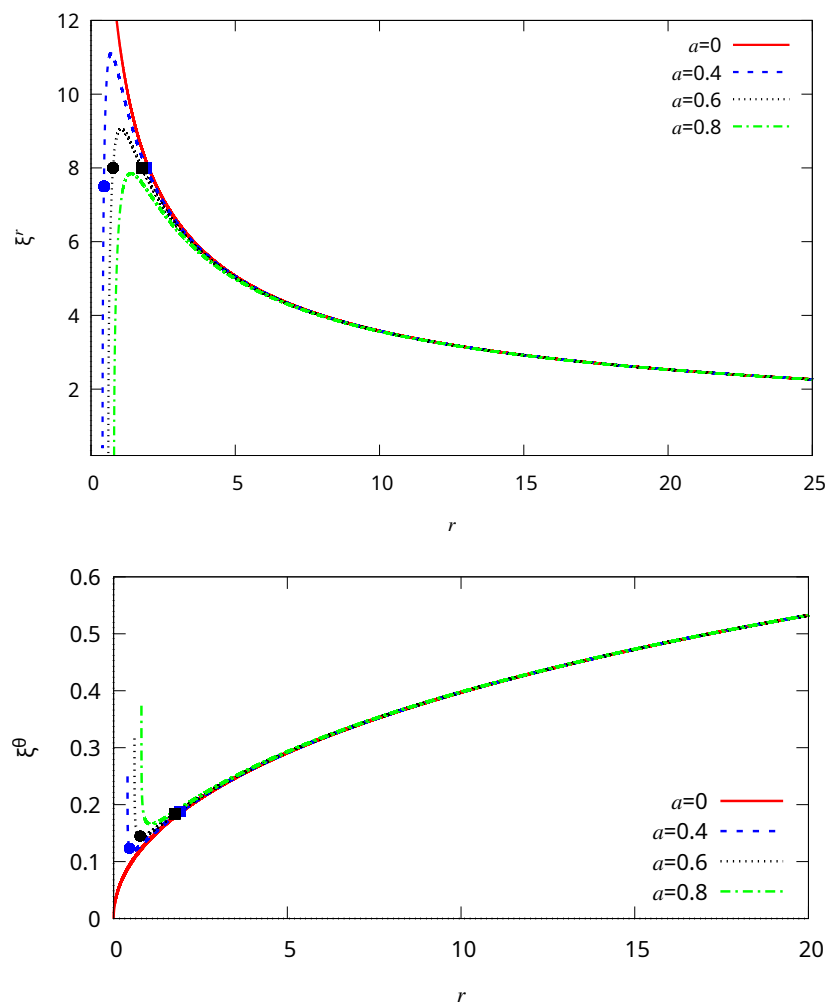
Na Fig. 32 mostramos o comportamento das componentes radial e angular do vetor deslocamento. As diferenças entre o espaço-tempo do tipo Bardeen e o espaço-tempo de Schwarzschild tornam-se bastante evidentes, em contraste com o que observamos no caso de SV. Fica claro que existem regiões onde a componente radial é comprimida ao invés de esticada e a componente angular é esticada ao invés de comprimida. Como resultado, em regiões mais internas, encontramos um efeito de compressão sobre os corpos. Esse efeito não ocorre no caso de Schwarzschild. Entretanto, ele é ocultado pela presença de um horizonte de eventos nos casos em que os horizontes existem. Esse fenômeno é ilustrado na Fig. 33, onde observamos que existem regiões em que os corpos sofrem estiramento e regiões em que eles sofrem compressão.

### 4.3.3 Efeitos das forças de maré no buraco negro com correção por holonomia

Agora procedemos ao estudo do comportamento das forças de maré para o modelo com correção por holonomia.

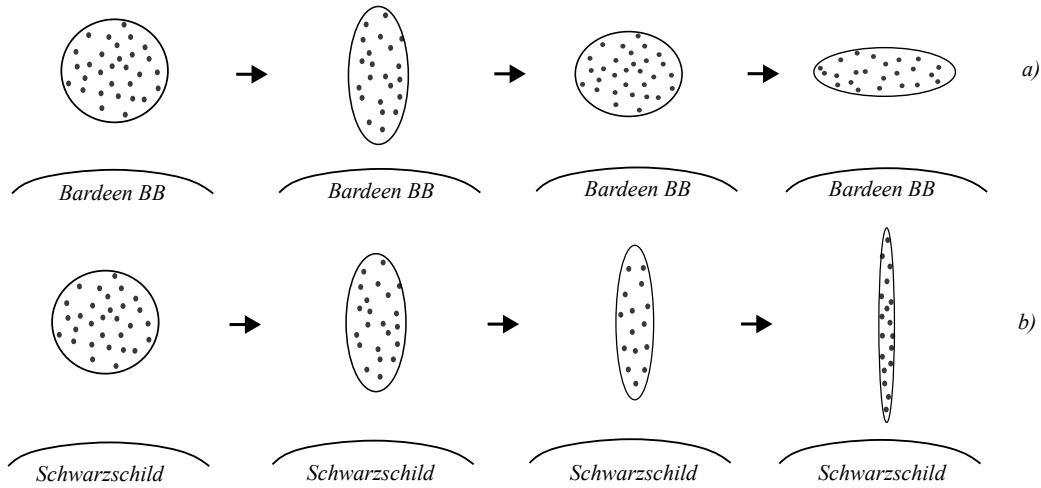
Considerando a equação (4.8), podemos reescrever as equações (4.29), (4.30) e

Figura 32: Componentes radial (em cima) e tangencial (embaixo) do vetor deslocamento para geodésicas radiais no espaço-tempo do tipo Bardeen em função da coordenada radial para diferentes valores de  $a$ . Neste caso, foram usadas as condições de contorno (4.35) com  $b = 200$  e  $m = 1$ . Os pontos quadrados nas curvas representam a posição do horizonte de eventos, enquanto os pontos circulares representam a posição do horizonte de Cauchy. As posições dos horizontes são mostradas apenas para os casos BB.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 33: Representação esquemática dos fenômenos de estiramento e compressão que um corpo sofre nas proximidades de um BB do tipo Bardeen (a), comparado ao caso de Schwarzschild (b), onde ocorre apenas o estiramento.



Fonte: Elaborado pelo autor.

(4.31) para este caso como

$$\frac{D^2 \xi^{\hat{r}}}{D\tau^2} = \frac{(4r - 5a)m}{2r^4} \xi^{\hat{r}}, \quad (4.66)$$

$$\frac{D^2 \xi^{\hat{\theta}}}{D\tau^2} = \frac{(4a - 2r)m + ar(E^2 - 1)}{2r^4} \xi^{\hat{\theta}}, \quad (4.67)$$

$$\frac{D^2 \xi^{\hat{\phi}}}{D\tau^2} = \frac{(4a - 2r)m + ar(E^2 - 1)}{2r^4} \xi^{\hat{\phi}}. \quad (4.68)$$

A força de maré radial para este caso se anula na posição dada por  $r_0^r = 5a/4$ , enquanto seu valor máximo é alcançado em  $r_{max}^r = 5a/3$ . Para  $a < 6m/5$ , o ponto máximo da componente radial fica oculto pelo horizonte de eventos, enquanto o ponto onde  $k_1 = 0$  fica oculto pelo horizonte para  $a < 8m/5$ .

Quanto à parte angular da força de maré, ela se anula e atinge um valor mínimo em

$$r_0^a = \frac{4ma}{2m - a(E^2 - 1)}, \quad (4.69)$$

$$r_{min}^a = \frac{16ma}{3(2m - a(E^2 - 1))}. \quad (4.70)$$

Para  $a < 2m/(1 + E^2)$ , o ponto onde  $k_2$  se anula fica oculto pelo horizonte de eventos, enquanto para  $a < 6m/(5 + 3E^2)$ , o ponto onde  $k_2$  atinge seu valor mínimo também fica oculto pelo horizonte de eventos.

Também podemos analisar o comportamento das forças de maré na garganta do buraco de minhoca, dadas por:

$$\frac{D^2 \xi^{\hat{r}}}{D\tau^2} \Big|_{r=a} = -\frac{m}{2a^3} \xi^{\hat{r}}, \quad (4.71)$$

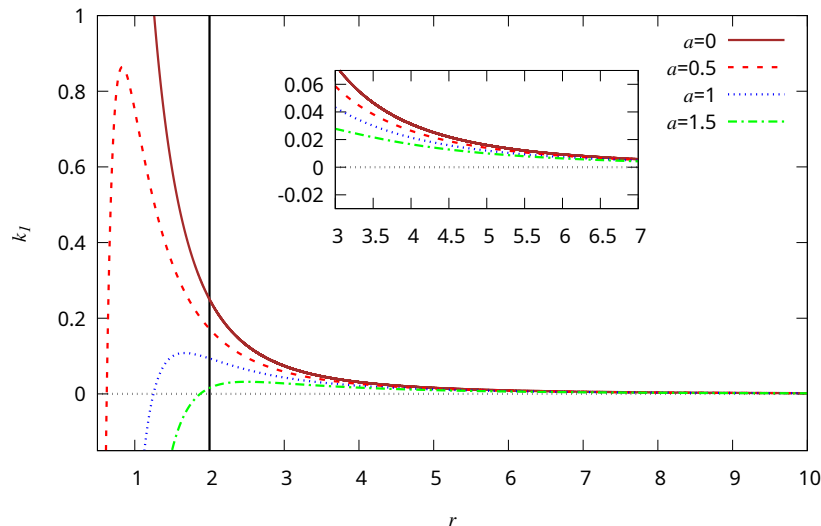
$$\frac{D^2 \xi^{\hat{\theta}}}{D\tau^2} \Big|_{r=a} = \frac{2m + a(E^2 - 1)}{2a^3} \xi^{\hat{\theta}}, \quad (4.72)$$

$$\frac{D^2 \xi^{\hat{\phi}}}{D\tau^2} \Big|_{r=a} = \frac{2m + a(E^2 - 1)}{2a^3} \xi^{\hat{\phi}}. \quad (4.73)$$

Esses resultados, ao menos na garganta, são bastante semelhantes ao caso SV. Mais precisamente, a magnitude dessas componentes é metade do valor das componentes no caso SV.

Na Fig. 34, mostramos o comportamento da componente radial da força de maré,  $k_1$ , em função da coordenada radial. Observamos que para pontos distantes,  $k_1$  é positivo para todos os valores escolhidos de  $a$ . No caso de Schwarzschild,  $k_1$  nunca muda de sinal e diverge na origem, enquanto para casos com  $a \neq 0$ , sempre existe um valor máximo positivo que  $k_1$  pode atingir, após o qual ele muda de sinal. Essa mudança de sinal pode levar a um efeito de compressão ao invés de estiramento. Esses pontos só estarão expostos, ou seja, localizados fora do horizonte de eventos, para valores suficientemente grandes de  $a$ , próximos ao valor limite que esse parâmetro pode assumir.

Figura 34: Força de maré radial para o buraco negro de Schwarzschild com correção por holonomia em função da coordenada  $r$  para diferentes valores de  $a$ , fixando  $m = 1$ . A linha vertical está localizada em  $r = 2m$ .

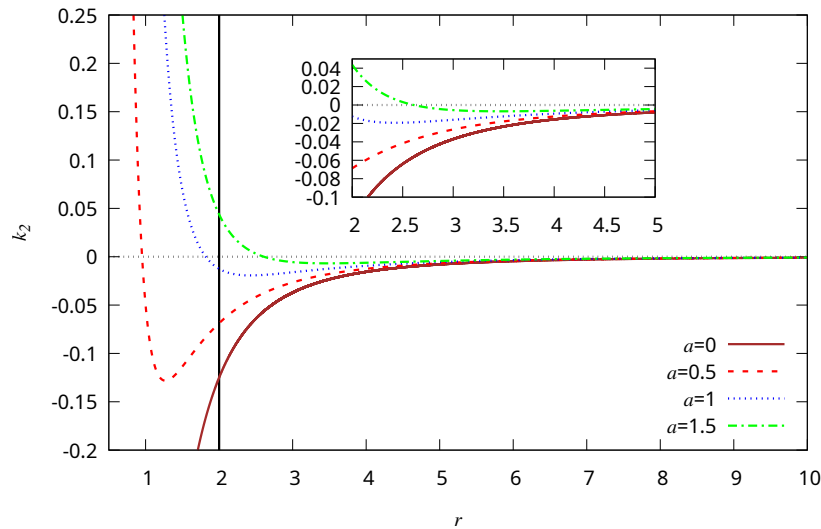


Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Fig. 35, mostramos o comportamento da componente angular da força de maré,  $k_2$ , em função da coordenada radial. Os efeitos são similares aos observados em casos anteriores, onde para  $a \neq 0$ ,  $k_2$  sempre alcança um valor mínimo negativo e então muda de sinal,

tornando-se positivo. No caso  $a = 0$ , que corresponde ao espaço-tempo de Schwarzschild, essa mudança de sinal não ocorre. Mais uma vez, esses pontos, que diferem do caso Schwarzschild, podem estar escondidos atrás do horizonte de eventos dependendo do valor do parâmetro  $a$ . Juntamente com o resultado observado para  $k_1$ , esses efeitos podem levar a um fenômeno de compressão ao invés de estiramento.

Figura 35: Força de maré angular para o buraco negro de Schwarzschild com correção por holonomia em função da coordenada  $r$  para diferentes valores de  $a$ , fixando  $m = 1$  e  $b = 10$ . A linha vertical está localizada em  $r = 2m$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Apesar da mudança de sinal em  $k_1$  e  $k_2$ , não há garantia de que uma transição de estiramento para compressão realmente ocorra. O que pode acontecer é simplesmente um efeito de estiramento mais fraco comparado ao caso Schwarzschild. Para confirmar se o efeito de compressão ocorre de fato, é necessário analisar o comportamento do vetor deslocamento.

Para valores arbitrários da energia  $E$ , as equações (4.32)–(4.34) podem ser resolvidas analiticamente dentro do modelo (4.8), sem necessidade de funções especiais. Contudo, a expressão para  $\xi^r$  é bastante complexa. Portanto, consideraremos o caso específico  $E = 1$ , que resulta em:

$$\xi^{\hat{r}} = \frac{a_1}{\sqrt{r}} + \frac{2}{15}a_2\sqrt{1 - \frac{a}{r}}(8a^2 + 4ar + 3r^2), \quad (4.74)$$

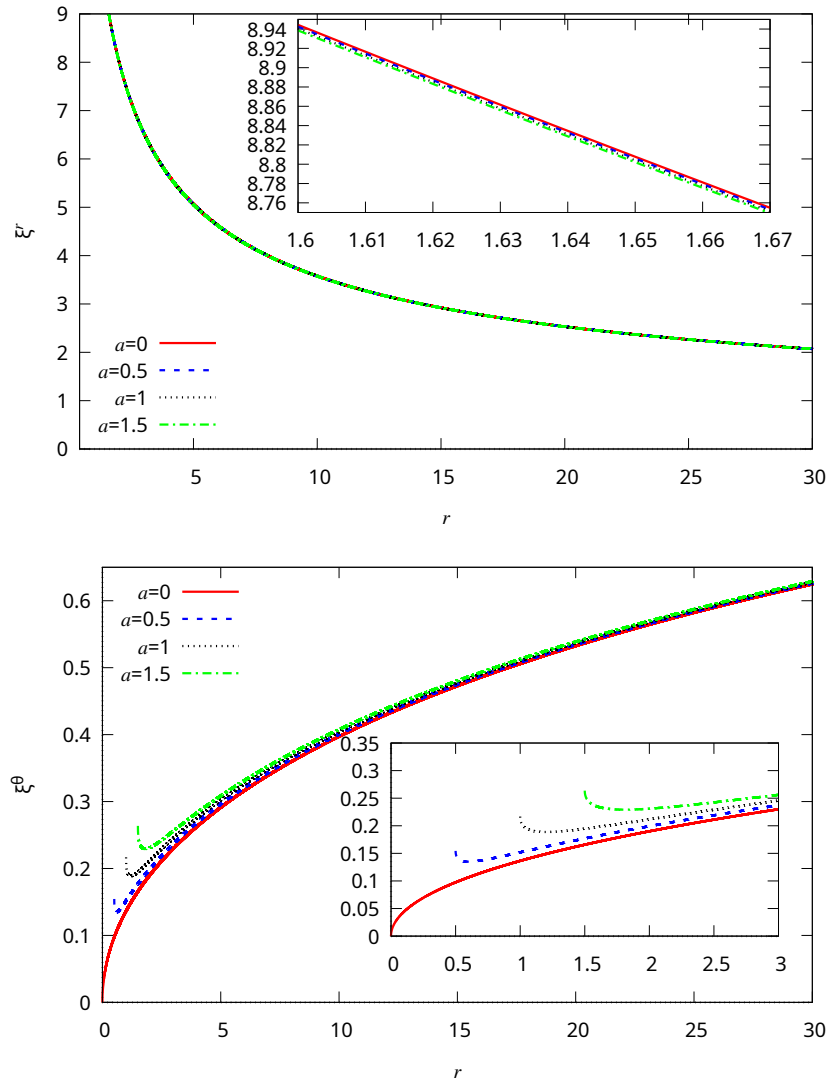
$$\xi^{\hat{\theta}} = b_1r + \frac{2b_2r \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{r-a}{a}}\right)}{\sqrt{a}}, \quad (4.75)$$

$$\xi^{\hat{\phi}} = b_1r + \frac{2b_2r \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{r-a}{a}}\right)}{\sqrt{a}}, \quad (4.76)$$

onde as constantes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  e  $b_2$  são determinadas impondo as condições de contorno apro-

priadas. Embora as expressões analíticas sejam simples, a melhor forma de extrair informação dessas soluções é por meio de representações gráficas.

Figura 36: Componentes radial (em cima) e tangencial (embaixo) do vetor deslocamento para geodésicas radiais no buraco negro de Schwarzschild com correção por holonomia em função da coordenada radial para diferentes valores de  $a$ . Neste caso, foram usadas as condições de contorno (4.35) com  $b = 200$  e  $m = 1$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Fig. 36, analisamos o comportamento do vetor deslocamento para diferentes valores do parâmetro  $a$ . Observamos que, para o buraco negro de Schwarzschild com correção por holonomia, o vetor deslocamento se comporta de forma muito semelhante ao caso SV. A variação de  $a$  não afeta significativamente a componente radial,  $\xi^r$ , enquanto as maiores mudanças na componente angular ocorrem próximas à garganta do buraco de minhoca, que permanece escondida atrás do horizonte de eventos.

#### 4.3.4 Efeitos das forças de maré no buraco negro polimerizado

No caso final, calcularemos as forças de maré para o buraco negro polimerizado. Considerando as equações (4.11) e (4.12) nas equações (4.29), (4.30) e (4.31), obtemos:

$$\frac{D^2 \xi^{\hat{r}}}{D\tau^2} = \frac{4mr^2 + 3a^2(\sqrt{r^2 - a^2} - 2m)}{2r^5} \xi^{\hat{r}}, \quad (4.77)$$

$$\frac{D^2 \xi^{\hat{\theta}}}{D\tau^2} = \frac{a^2(6m - 3\sqrt{r^2 - a^2} + 2rE^2) - 2mr^2}{2r^5} \xi^{\hat{\theta}}, \quad (4.78)$$

$$\frac{D^2 \xi^{\hat{\phi}}}{D\tau^2} = \frac{a^2(6m - 3\sqrt{r^2 - a^2} + 2rE^2) - 2mr^2}{2r^5} \xi^{\hat{\phi}}. \quad (4.79)$$

A força de maré radial se anula em

$$r_0^r = \frac{a}{4m} \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{3a^2 + 16m^2 - a\sqrt{9a^2 + 32m^2}}. \quad (4.80)$$

Esse ponto estará sempre oculto atrás do horizonte de eventos. Também podemos calcular o ponto máximo, mas a expressão analítica é bastante extensa. Dependendo do valor escolhido para o parâmetro  $a$ , o ponto máximo pode estar localizado dentro ou fora do horizonte de eventos. Para a componente angular, as expressões analíticas para os pontos extremos ou os pontos onde  $k_2 = 0$  são ainda mais complicadas. Em geral, esses pontos podem estar ou não ocultos atrás do horizonte de eventos, dependendo do valor de  $a$ , assim como no caso de  $k_1$ .

Também podemos analisar o comportamento das forças de maré na garganta do buraco de minhoca, dadas por:

$$\left. \frac{D^2 \xi^{\hat{r}}}{D\tau^2} \right|_{r=a} = -\frac{m}{a^3} \xi^{\hat{r}}, \quad (4.81)$$

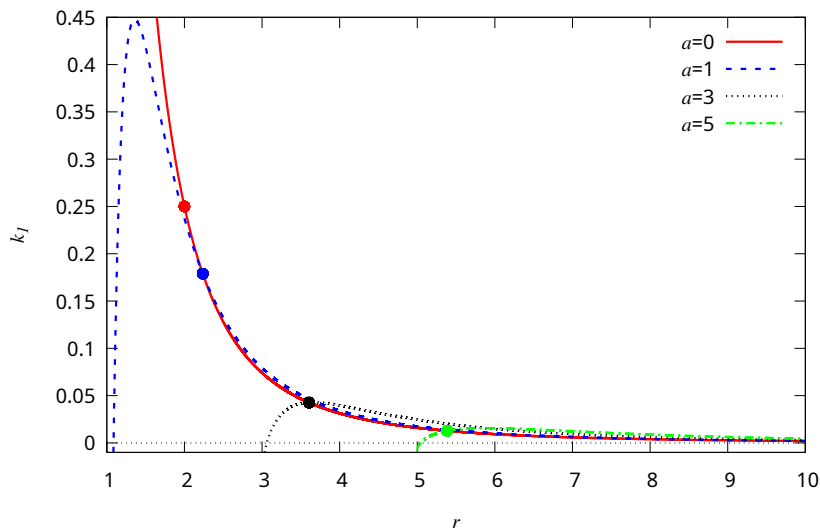
$$\left. \frac{D^2 \xi^{\hat{\theta}}}{D\tau^2} \right|_{r=a} = \frac{aE^2 + 2m}{a^3} \xi^{\hat{\theta}}, \quad (4.82)$$

$$\left. \frac{D^2 \xi^{\hat{\phi}}}{D\tau^2} \right|_{r=a} = \frac{aE^2 + 2m}{a^3} \xi^{\hat{\phi}}. \quad (4.83)$$

Na garganta do buraco de minhoca, a componente radial tem a mesma expressão do caso de SV, enquanto a diferença na componente angular se assemelha a uma modificação no termo de energia da partícula.

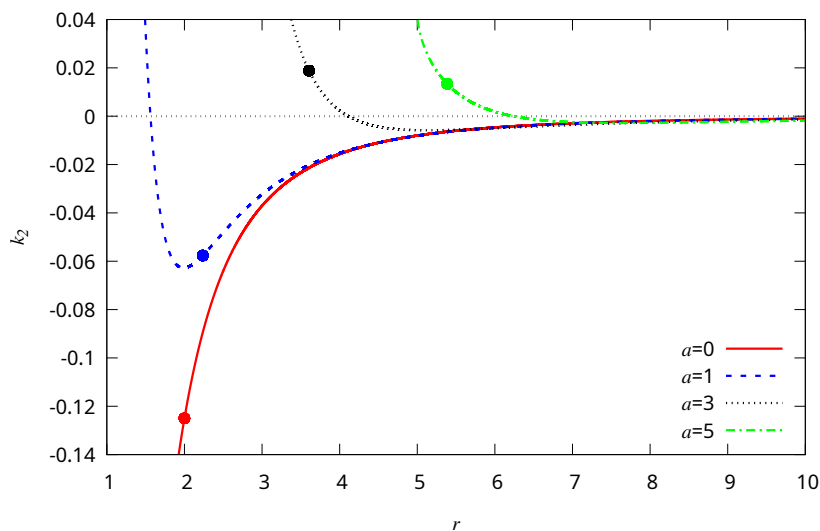
Nas Figs. 37 e 38, mostramos o comportamento das componentes radial e tangencial, respectivamente, em função da coordenada radial para diferentes valores de  $a$ . Embora não possamos extrair novas informações analíticas, observamos que a mudança de sinal em  $k_2$  pode ocorrer fora do horizonte de eventos, enquanto a mudança de sinal em  $k_1$  permanece oculta. Para ambas as componentes, o ponto extremo pode estar oculto dependendo do valor de  $a$ .

Figura 37: Força de maré radial para o buraco negro polimerizado em função da coordenada  $r$  para diferentes valores de  $a$ , fixando  $m = 1$ . Os pontos circulares representam a posição do horizonte de eventos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

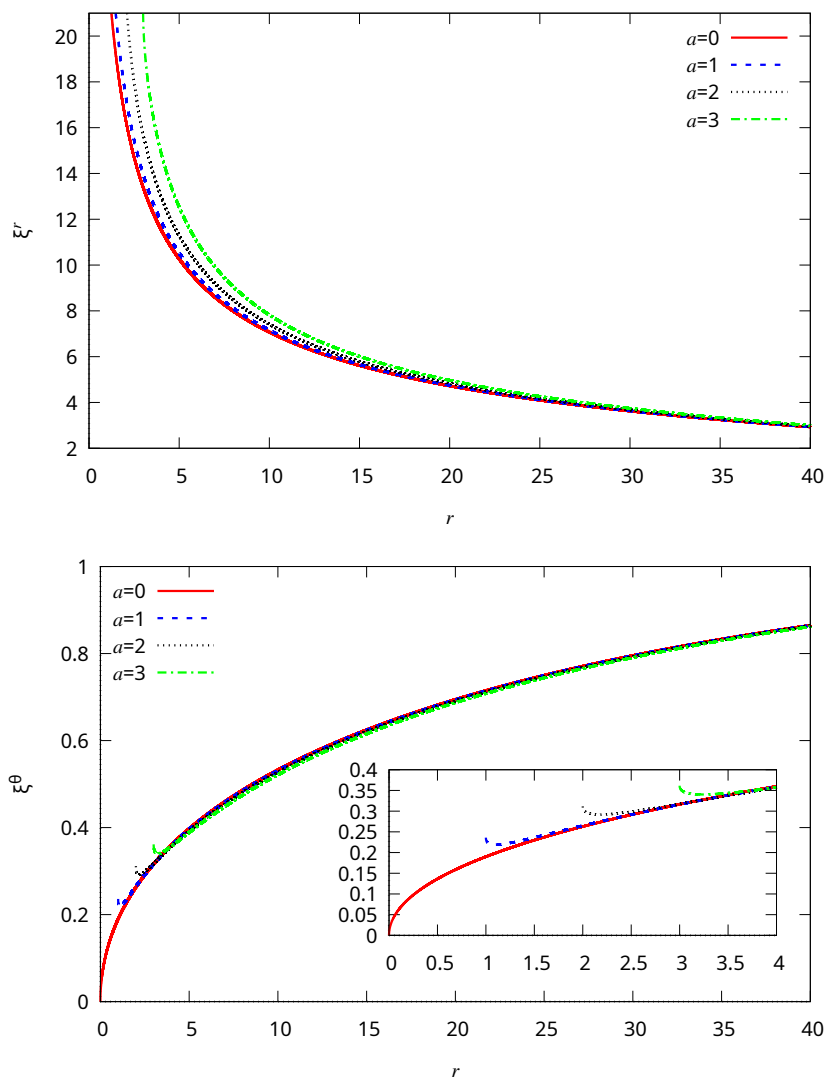
Figura 38: Força de maré angular para o buraco negro polimerizado em função da coordenada  $r$  para diferentes valores de  $a$ , fixando  $m = 1$  e  $b = 10m$ . Os pontos circulares representam a posição do horizonte de eventos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com relação ao vetor deslocamento, a situação se torna mais complexa para este espaço-tempo. Devido ao termo de raiz quadrada nas componentes da métrica, não é possível obter soluções analíticas, mesmo no limite  $E \rightarrow 1$ . Analisamos numericamente o comportamento dessas componentes na Fig. 39. É interessante notar que, em determinado ponto, a componente radial do vetor deslocamento se torna maior à medida que o valor de  $a$  aumenta. Esse comportamento não foi observado nos casos discutidos anteriormente. A componente tangencial apresenta uma tendência similar, diminuindo à medida que  $a$  aumenta, exceto em regiões muito próximas à garganta do buraco de minhoca. Nos casos anteriores, a componente radial do vetor deslocamento sempre diminuía com o aumento de  $a$ , enquanto a componente tangencial aumentava com  $a$ , mesmo em regiões distantes da garganta.

Figura 39: Componentes radial (acima) e tangencial (abaixo) do vetor deslocamento para geodésicas radiais no buraco negro polimerizado em função da coordenada radial para diferentes valores de  $a$ . Neste caso, foram usadas as condições de contorno (4.35) com  $b = 100$  e  $m = 1$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

## 5 CONCLUSÕES

Nós começamos nossa investigação analisando as características e propriedades da geometria do buraco de minhoca do tipo EBG no contexto da RG. Inicialmente, analisamos como os diagramas de imersão são afetados pelo parâmetro  $m$  e, em seguida, estudamos brevemente o processo de acreção de poeira nesse espaço-tempo. Observamos que, diferentemente do que ocorre tipicamente em buracos negros, a velocidade radial da poeira diminui à medida que a partícula se aproxima da garganta do buraco de minhoca, sendo essa desaceleração cada vez mais abrupta para valores crescentes de  $m$ . Com relação à densidade de energia, verificamos que ela se concentra com maior intensidade nas proximidades da garganta.

Também exploramos a possibilidade de que campos escalares acoplados com uma eletrodinâmica não linear possam atuar como fontes para o espaço-tempo de EBG. Por meio de fontes magnéticas e elétricas no contexto de teorias de eletrodinâmica não linear, obtivemos expressões analíticas para o campo escalar, seu potencial associado e a Lagrangiana da teoria eletromagnética. Um resultado relevante é que, no caso magnético, conseguimos inverter as equações e expressar a Lagrangiana como uma função do invariante eletromagnético  $F = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ . Observamos ainda que, para  $m = 2$ , a solução recupera o conhecido espaço-tempo de Ellis-Bronnikov, sustentado por um campo escalar fantasma livre. Essa correspondência evidencia a versatilidade do campo escalar com perfil arcotangente, frequentemente presente em geometrias livres de singularidade, como aquelas da classe de BB.

No caso elétrico, verificamos que o decaimento do campo elétrico depende do parâmetro  $m$ , sendo que valores maiores de  $m$  aceleram a aproximação ao comportamento assintoticamente plano, como demonstrado em nossos resultados. Essas distinções entre os casos magnético e elétrico revelam como a estrutura da fonte influencia diretamente a geometria do espaço-tempo.

Além disso, estudamos um modelo mais geral de buraco de minhoca com múltiplas gargantas e antigargantas, construído a partir de uma modificação da métrica de BB com múltiplas gargantas/anti-gargantas, com função de redshift trivial. Verificamos que a presença dessas estruturas pode ser identificada tanto pela análise dos extremos da área da esfera quanto por diagramas de imersão. A depender dos parâmetros escolhidos, é possível obter desde uma única garganta até múltiplas estruturas. Analisamos também as trajetórias geodésicas nesse espaço-

tempo, mostrando que partículas massivas seguem trajetórias radiais livres, em contraste com o caso de Schwarzschild.

Para investigar possíveis fontes para essa geometria, consideramos uma ação da RG minimamente acoplada a um campo escalar com potencial não trivial e uma eletrodinâmica não linear. Obtivemos expressões gerais para o potencial escalar, a função de acoplamento e a Lagrangiana da NED, todas expressas em termos da função métrica  $\Sigma(r)$ . Um resultado relevante é que essas expressões, quando escritas em função da coordenada radial, são independentes da forma funcional do campo escalar. Testamos dois perfis comumente utilizados na literatura, baseados nas funções arcotangente e tangente hiperbólica, observando que o comportamento qualitativo das funções obtidas é preservado em ambos os casos. Notamos que a função de acoplamento  $h(\phi)$  assume valores positivos e negativos, alternando entre comportamento padrão e fantasma para o campo escalar, enquanto o potencial  $V(\phi)$  decresce para zero no infinito. A Lagrangiana da NED apresenta comportamento regular, tendendo a uma constante para  $r \rightarrow 0$  e decaindo como  $1/r^6$  para  $r \rightarrow \infty$ .

A análise das condições de energia revelou que, embora violações sejam inevitáveis em regiões afastadas, é possível satisfazer todas as condições próximas à garganta para escolhas adequadas dos parâmetros, apontando para uma suavização das exigências de matéria exótica nesses modelos mais gerais.

Também investigamos soluções para teorias modificadas da gravidade, com ênfase na gravidade  $f(R)$ . Nosso objetivo foi estudar a possibilidade de generalizar soluções do tipo BB, já bem estabelecidas na RG, impondo métricas conhecidas, como a de SV, como soluções dentro de diferentes modelos de  $f(R)$ .

Mostramos que, assumindo uma fonte magnética dentro da eletrodinâmica não linear, é sempre possível determinar o tensor energia-momento em  $f(R)$  a partir de seu análogo na RG, desde que a função gravitacional seja da forma  $f(R) = R + H(R)$ . Obtemos expressões analíticas gerais para as funções  $L^{(H)}$ ,  $L_F^{(H)}$ ,  $V^{(H)}$  e  $h^{(H)}$ , cujas formas dependem de  $H(R)$  e da geometria imposta. Um resultado relevante é que, em alguns modelos analisados, é possível satisfazer todas as condições de energia em regiões específicas do espaço-tempo, algo que raramente ocorre em soluções de buracos de minhoca dentro da RG. Assim, a inclusão de uma modificação do tipo  $f(R)$  amplia significativamente o espectro de soluções fisicamente aceitáveis.

A necessidade de introdução de não linearidades adicionais, tanto no setor escalar

quanto eletromagnético, abre caminho para análises mais profundas sobre estabilidade, estrutura causal, e efeitos físicos associados, como as trajetórias de fótons e a termodinâmica desses objetos. A abordagem aqui desenvolvida é suficientemente geral para ser aplicada a outros modelos de BB da literatura, como os baseados em Reissner-Nordström, BTZ, black strings, entre outros.

Outro aspecto importante investigado nesta dissertação foram os efeitos das forças de maré em diferentes modelos de BB. Verificamos que, ao contrário do caso de Schwarzschild, todos os modelos analisados — inclusive com fontes do tipo campo escalar e NED — exibem forças de maré finitas em toda a variedade. Destaca-se o caso do BB do tipo Bardeen, cuja estrutura causal mais rica, com presença de horizonte de Cauchy, induz uma inversão no comportamento típico das forças de maré: em certas regiões, o corpo de prova sofre compressão radial e alongamento angular, em contraste com o estiramento radial usual observado em BNs clássicos.

Esse resultado mostra que a geometria de fundo afeta de forma significativa os efeitos físicos experimentados por corpos extensos, sendo possível, ao menos em princípio, distinguir diferentes classes de BBs com base em suas assinaturas de maré. Além disso, tais efeitos reforçam a importância de se considerar fontes realistas e regularizadas para essas soluções, como as estudadas ao longo deste trabalho via campos escalares acoplados a eletrodinâmica não linear. Futuras extensões podem incluir a análise de ruptura por maré (tidal disruption) nesses espaços-tempos e a consideração de rotação, o que pode modificar intensamente a estrutura causal e o comportamento das forças envolvidas.

Dessa forma, esta dissertação oferece uma contribuição significativa ao entendimento de soluções regulares e exóticas em gravitação clássica e modificada, estabelecendo novas possibilidades para a construção e interpretação de geometrias que evitam singularidades e expandindo o conjunto de ferramentas teóricas disponíveis para a física de BN e buracos de minhoca. Espera-se que os resultados aqui obtidos sirvam de base para futuros avanços no estudo da gravidade em regimes extremos.

Uma continuidade natural deste trabalho seria realizar o estudo da aparência óptica dessas geometrias quando iluminadas por discos de acreções, abordagem bastante utilizada ultimamente [59, 204–217], como um meio de comparar os modelos teóricos regulares com dados observacionais reais obtidos pelo EHT.

## REFERÊNCIAS

- [1] RINDLER, W. *Relativity: special, general, and cosmological*. 2nd. ed. Oxford: Oxford University Press, 2006. ISBN 978-0-19-856731-6.
- [2] TAYLOR, E. F.; WHEELER, J. A. *Spacetime Physics: introduction to special relativity*. 2nd. ed. New York: W. H. Freeman, 1992. ISBN 978-0-7167-2214-9.
- [3] WALD, R. M. *General Relativity*. Chicago: University of Chicago Press, 1984. ISBN 978-0-226-87033-8.
- [4] CARROLL, S. M. *Spacetime and Geometry: an introduction to general relativity*. San Francisco: Addison Wesley, 2004. ISBN 978-0-8053-8732-2.
- [5] SCHUTZ, B. F. *A First Course in General Relativity*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. ISBN 978-0-521-28261-6.
- [6] ABBOTT, B. P. *et al.* Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016.
- [7] ABBOTT, R. *et al.* GWTC-3: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo during the Second Part of the Third Observing Run. *Phys. Rev. X*, v. 13, n. 4, p. 041039, 2023.
- [8] KALUZA, T. On the Problem of Unity in Physics. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, v. 1921, p. 966–972, 1921.
- [9] KLEIN, O. Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity. *Z. Phys.*, v. 37, p. 895–906, 1926.
- [10] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. A Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension. *Phys. Rev. Lett.*, v. 83, p. 3370–3373, 1999.
- [11] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. An Alternative to Compactification. *Phys. Rev. Lett.*, v. 83, p. 4690–4693, 1999.
- [12] PENROSE, R. Gravitational collapse and space-time singularities. *Phys. Rev. Lett.*, v. 14, p. 57–59, 1965.
- [13] GUBSER, S. S. Curvature singularities: the good, the bad, and the naked. *Adv. Theor. Math. Phys.*, v. 4, p. 679–745, 2000.
- [14] BRONNIKOV, K. A.; RUBIN, S. G. *Black Holes, Cosmology and Extra Dimensions*. [S.l.]: WSP, 2012. ISBN 978-981-4374-20-0, 978-981-4440-02-8.

- [15] PENROSE, R. Gravitational collapse: the role of general relativity. *Riv. Nuovo Cim.*, v. 1, p. 252–276, 1969.
- [16] ANSOLDI, S. Spherical black holes with regular center: A Review of existing models including a recent realization with Gaussian sources. In: *Conference on Black Holes and Naked Singularities*. [S.l.: s.n.], 2008.
- [17] AYON-BEATO, E.; GARCIA, A. The Bardeen model as a nonlinear magnetic monopole. *Phys. Lett. B*, v. 493, p. 149–152, 2000.
- [18] RODRIGUES, M. E.; SILVA, M. V. de S. Bardeen Regular Black Hole With an Electric Source. *JCAP*, v. 06, p. 025, 2018.
- [19] BRONNIKOV, K. A. Regular black holes as an alternative to black bounce. *Phys. Rev. D*, v. 110, n. 2, p. 024021, 2024.
- [20] SIMPSON, A.; VISSER, M. Regular black holes with asymptotically Minkowski cores. *Universe*, v. 6, n. 1, p. 8, 2019.
- [21] CULETU, H. On a regular charged black hole with a nonlinear electric source. *Int. J. Theor. Phys.*, v. 54, n. 8, p. 2855–2863, 2015.
- [22] CULETU, H. Nonsingular black hole with a nonlinear electric source. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 24, n. 09, p. 1542001, 2015.
- [23] BRONNIKOV, K. A. Regular black holes sourced by nonlinear electrodynamics. 2022. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2211.00743>. Acesso em: 22 jan. 2025.
- [24] BRONNIKOV, K. A. Regular magnetic black holes and monopoles from nonlinear electrodynamics. *Phys. Rev. D*, v. 63, p. 044005, 2001.
- [25] AYON-BEATO, E.; GARCIA, A. Regular black hole in general relativity coupled to nonlinear electrodynamics. *Phys. Rev. Lett.*, v. 80, p. 5056–5059, 1998.
- [26] AYON-BEATO, E.; GARCIA, A. New regular black hole solution from nonlinear electrodynamics. *Phys. Lett. B*, v. 464, p. 25, 1999.
- [27] AYON-BEATO, E.; GARCIA, A. Nonsingular charged black hole solution for nonlinear source. *Gen. Rel. Grav.*, v. 31, p. 629–633, 1999.
- [28] DYMNIKOVA, I. Regular electrically charged structures in nonlinear electrodynamics coupled to general relativity. *Class. Quant. Grav.*, v. 21, p. 4417–4429, 2004.
- [29] BALART, L.; VAGENAS, E. C. Regular black holes with a nonlinear electrodynamics source. *Phys. Rev. D*, v. 90, n. 12, p. 124045, 2014.

- [30] KRUGLOV, S. I. Black hole as a magnetic monopole within exponential nonlinear electrodynamics. *Annals Phys.*, v. 378, p. 59–70, 2017.
- [31] SILVA, M. V. de S.; RODRIGUES, M. E. Regular black holes in  $f(G)$  gravity. *Eur. Phys. J. C*, v. 78, n. 8, p. 638, 2018.
- [32] RODRIGUES, M. E.; BARROS JUNIOR, E. L.; SILVA, M. V. de S. Using dominant and weak energy conditions for build new classe of regular black holes. *JCAP*, v. 02, p. 059, 2018.
- [33] RODRIGUES, M. E.; SILVA, M. V. de S. Regular multihorizon black holes in  $f(G)$  gravity with nonlinear electrodynamics. *Phys. Rev. D*, v. 99, n. 12, p. 124010, 2019.
- [34] BARROS JUNIOR, E. L.; RODRIGUES, M. E.; SILVA, M. V. de S. Regular black holes in Rainbow Gravity. *Nucl. Phys. B*, v. 961, p. 115244, 2020.
- [35] HABIBINA, A. S.; RAMADHAN, H. S. Geodesic of nonlinear electrodynamics and stable photon orbits. *Phys. Rev. D*, v. 101, n. 12, p. 124036, 2020.
- [36] TOSHMATOV, B.; AHMEDOV, B.; MALAFARINA, D. Can a light ray distinguish charge of a black hole in nonlinear electrodynamics? *Phys. Rev. D*, v. 103, n. 2, p. 024026, 2021.
- [37] PAULA, M. A. A. de *et al.* Good tachyons, bad bradyons: role reversal in Einstein-nonlinear-electrodynamics models. *Phys. Lett. B*, v. 866, p. 139513, 2025.
- [38] KRUGLOV, S. I. The shadow of M87\* black hole within rational nonlinear electrodynamics. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 35, n. 35, p. 2050291, 2020.
- [39] ALLAHYARI, A. *et al.* Magnetically charged black holes from non-linear electrodynamics and the Event Horizon Telescope. *JCAP*, v. 02, p. 003, 2020.
- [40] STUHL'K, Z.; SCHEE, J. Shadow of the regular Bardeen black holes and comparison of the motion of photons and neutrinos. *Eur. Phys. J. C*, v. 79, n. 1, p. 44, 2019.
- [41] PAULA, M. A. A. de *et al.* Electrically charged regular black holes in nonlinear electrodynamics: Light rings, shadows, and gravitational lensing. *Phys. Rev. D*, v. 108, n. 8, p. 084029, 2023.
- [42] MALUF, R. V.; NEVES, J. C. S. Thermodynamics of a class of regular black holes with a generalized uncertainty principle. *Phys. Rev. D*, v. 97, n. 10, p. 104015, 2018.
- [43] ZHANG, Y.; GAO, S. First law and Smarr formula of black hole mechanics in nonlinear gauge theories. *Class. Quant. Grav.*, v. 35, n. 14, p. 145007, 2018.
- [44] MA, M.-S.; ZHAO, R. Corrected form of the first law of thermodynamics for regular black holes. *Class. Quant. Grav.*, v. 31, p. 245014, 2014.

- [45] KUMAR, A.; GHOSH, S. G.; MAHARAJ, S. D. Nonsingular black hole chemistry. *Phys. Dark Univ.*, v. 30, p. 100634, 2020.
- [46] RODRIGUES, M. E.; SILVA, M. V. de S.; VIEIRA, H. A. Bardeen-Kiselev black hole with a cosmological constant. *Phys. Rev. D*, v. 105, n. 8, p. 084043, 2022.
- [47] PAULA, M. A. A. de *et al.* Absorption and unbounded superradiance in a static regular black hole spacetime. *Phys. Rev. D*, v. 109, n. 6, p. 064053, 2024.
- [48] DOLAN, S. R. *et al.* Superradiant instability of a charged regular black hole. *Phys. Rev. D*, v. 109, n. 12, p. 124037, 2024.
- [49] PAULA, M. A. A. de; LEITE, L. C. S.; CRISPINO, L. C. B. Sufficient conditions for unbounded superradiance in black hole spacetimes sourced by nonlinear electrodynamics. *Phys. Rev. D*, v. 111, n. 10, p. 104010, 2025.
- [50] AKIYAMA, K. *et al.* First Sagittarius A\* Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way. *Astrophys. J. Lett.*, v. 930, n. 2, p. L12, 2022.
- [51] AKIYAMA, K. *et al.* First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *Astrophys. J. Lett.*, v. 875, p. L1, 2019.
- [52] CARDOSO, V.; FRANZIN, E.; PANI, P. Is the gravitational-wave ringdown a probe of the event horizon? *Phys. Rev. Lett.*, v. 117, n. 17, p. 089902, 2016.
- [53] BAMBI, C.; FREESE, K. Apparent shape of super-spinning black holes. *Phys. Rev. D*, v. 79, p. 043002, 2009.
- [54] ORTIZ, N.; SARBACH, O.; ZANNIAS, T. Shadow of a naked singularity. *Phys. Rev. D*, v. 92, n. 4, p. 044035, 2015.
- [55] SHAIKH, R. *et al.* Shadows of spherically symmetric black holes and naked singularities. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 482, n. 1, p. 52–64, 2019.
- [56] BAMBI, C. Can the supermassive objects at the centers of galaxies be traversable wormholes? The first test of strong gravity for mm/sub-mm very long baseline interferometry facilities. *Phys. Rev. D*, v. 87, p. 107501, 2013.
- [57] AZREG-AÏNOU, M. Confined-exotic-matter wormholes with no gluing effects—Imaging supermassive wormholes and black holes. *JCAP*, v. 07, p. 037, 2015.
- [58] ISHKAEVA, V. A.; SUSHKOV, S. V. Image of an accreting general Ellis-Bronnikov wormhole. *Phys. Rev. D*, v. 108, n. 8, p. 084054, 2023.

- [59] GUERRERO, M. *et al.* Shadows and optical appearance of black bounces illuminated by a thin accretion disk. *JCAP*, v. 08, p. 036, 2021.
- [60] KONOPLYA, R. A.; ZHIDENKO, A. Wormholes versus black holes: quasinormal ringing at early and late times. *JCAP*, v. 12, p. 043, 2016.
- [61] MUSTAFA, G. *et al.* Shadows and gravitational weak lensing by the Schwarzschild black hole in the string cloud background with quintessential field\*. *Chin. Phys. C*, v. 46, n. 12, p. 125107, 2022.
- [62] SHAIKH, R. Shadows of rotating wormholes. *Phys. Rev. D*, v. 98, n. 2, p. 024044, 2018.
- [63] ELLIS, H. G. Ether flow through a drainhole - a particle model in general relativity. *J. Math. Phys.*, v. 14, p. 104–118, 1973.
- [64] BRONNIKOV, K. A. Scalar-tensor theory and scalar charge. *Acta Phys. Polon. B*, v. 4, p. 251–266, 1973.
- [65] MORRIS, M. S.; THORNE, K. S. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: a tool for teaching general relativity. *American Journal of Physics*, v. 56, p. 395–412, 1988.
- [66] MUNIZ, C. R.; MALUF, R. V. A class of traversable wormholes in the Starobinsky-like  $f(R)$  gravity with anisotropic dark matter. *Annals Phys.*, v. 446, p. 169129, 2022.
- [67] MUSTAFA, G.; MAURYA, S. K.; RAY, S. Relativistic wormhole surrounded by dark matter halos in symmetric teleparallel gravity. *Fortsch. Phys.*, v. 71, n. 6-7, p. 2200129, 2023.
- [68] NILTON, M. *et al.* Generalized Ellis–Bronnikov wormholes in asymptotically safe gravity. *Annals Phys.*, v. 448, p. 169195, 2023.
- [69] LOEWER, N.; TAYDE, M.; SAHOO, P. K. A study of stable wormhole solution with non-commutative geometry in the framework of linear  $f(R, \mathcal{L}_m, T)$  gravity. *Eur. Phys. J. C*, v. 84, n. 11, p. 1196, 2024.
- [70] MUNIZ, C. R. *et al.* Casimir wormholes with GUP correction in the Loop Quantum Cosmology. *Phys. Dark Univ.*, v. 46, p. 101673, 2024.
- [71] BATTISTA, E.; CAPOZZIELLO, S.; ERREHMY, A. Generalized uncertainty principle corrections in Rastall-Rainbow Casimir wormholes. 2024. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2409.09750>. Acesso em: 22 jan. 2025.
- [72] FALCO, V. D. *et al.* Reconstructing wormhole solutions in curvature based Extended Theories of Gravity. *Eur. Phys. J. C*, v. 81, n. 2, p. 157, 2021.

- [73] BAMBI, C.; STOJKOVIC, D. Astrophysical Wormholes. *Universe*, v. 7, n. 5, p. 136, 2021.
- [74] AES, R. B. M.; CRISPINO, L. C. B.; OLMO, G. J. Compact objects in quadratic palatini gravity generated by a free scalar field. *Phys. Rev. D*, v. 105, n. 6, p. 064007, 2022.
- [75] JUSUFI, K.; CHANNUIE, P.; JAMIL, M. Traversable Wormholes Supported by GUP Corrected Casimir Energy. *Eur. Phys. J. C*, v. 80, n. 2, p. 127, 2020.
- [76] AES, R. B. M. *et al.* Asymmetric wormholes in Palatini  $f(R)$  gravity: Energy conditions, absorption, and quasibound states. *Phys. Rev. D*, v. 108, n. 2, p. 024063, 2023.
- [77] KONOPLYA, R. A.; ZHIDENKO, A. Traversable Wormholes in General Relativity. *Phys. Rev. Lett.*, v. 128, n. 9, p. 091104, 2022.
- [78] KAIN, B. Einstein-Dirac-Maxwell wormholes in quantum field theory. *Phys. Rev. D*, v. 108, n. 8, p. 084010, 2023.
- [79] KAIN, B. Are Einstein-Dirac-Maxwell wormholes traversable? *Phys. Rev. D*, v. 108, n. 4, p. 044019, 2023.
- [80] BLÁZQUEZ-SALCEDO, J. L.; KNOLL, C.; RADU, E. Einstein–Dirac–Maxwell wormholes: ansatz, construction and properties of symmetric solutions. *Eur. Phys. J. C*, v. 82, n. 6, p. 533, 2022.
- [81] BLÁZQUEZ-SALCEDO, J. L.; KNOLL, C.; RADU, E. Traversable wormholes in Einstein-Dirac-Maxwell theory. *Phys. Rev. Lett.*, v. 126, n. 10, p. 101102, 2021.
- [82] BOLOKHOV, S. *et al.* A Note on “Traversable Wormholes in Einstein–Dirac–Maxwell Theory”. *Grav. Cosmol.*, v. 27, n. 4, p. 401–402, 2021.
- [83] MALDACENA, J.; MILEKHIN, A.; POPOV, F. Traversable wormholes in four dimensions. *Class. Quant. Grav.*, v. 40, n. 15, p. 155016, 2023.
- [84] BRONNIKOV, K. A. Black bounces, wormholes, and partly phantom scalar fields. *Phys. Rev. D*, v. 106, n. 6, p. 064029, 2022.
- [85] SHAIKH, R. Wormholes with nonexotic matter in Born-Infeld gravity. *Phys. Rev. D*, v. 98, n. 6, p. 064033, 2018.
- [86] JAVED, F. *et al.* Effects of variable equations of state on the stability of nonlinear electrodynamics thin-shell wormholes. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, v. 20, n. 01, p. 2350010, 2023.

- [87] NATE, P. C.; MALDONADO-VILLAMIZAR, F. H. Novel traversable wormhole in general relativity and Einstein-Scalar-Gauss-Bonnet theory supported by nonlinear electrodynamics. *Phys. Rev. D*, v. 106, n. 4, p. 044063, 2022.
- [88] DZHUNUSHALIEV, V. *et al.* Compact and extended objects from self-interacting phantom fields. *Phys. Rev. D*, v. 94, n. 2, p. 024004, 2016.
- [89] KAMAL, V. *et al.* Wormholes in a Theory of Scalar Phantom Field. *Few Body Syst.*, v. 59, n. 4, p. 70, 2018.
- [90] CRISPIM, T. M.; ALENCAR, G.; MUNIZ, C. R. Field sources for generalized Ellis-Bronnikov wormhole. 2024. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2410.11147>. Acesso em: 20 fev. 2025.
- [91] KAR, S. *et al.* Resonance in the transmission of massless scalar waves in a class of wormholes. *Physical Review D*, v. 51, p. 1632–1638, 1995.
- [92] ROY, P. D.; ANEESH, S.; KAR, S. Revisiting a family of wormholes: geometry, matter, scalar quasinormal modes and echoes. *Eur. Phys. J. C*, v. 80, n. 9, p. 850, 2020.
- [93] ROY, P. D. Novel triple barrier potential for axial gravitational perturbations of a family of Lorentzian wormholes. *Eur. Phys. J. C*, v. 82, n. 8, p. 673, 2022.
- [94] SHARMA, V.; GHOSH, S. Geodesics in generalised Ellis–Bronnikov spacetime embedded in warped 5D background. *Eur. Phys. J. C*, v. 82, n. 8, p. 702, 2022.
- [95] SHARMA, V.; GHOSH, S. Geodesic congruences in 5D warped Ellis–Bronnikov spacetimes. *Eur. Phys. J. Plus*, v. 137, n. 8, p. 881, 2022.
- [96] SHARMA, V.; GHOSH, S. Generalised Ellis–Bronnikov wormholes embedded in warped braneworld background and energy conditions. *Eur. Phys. J. C*, v. 81, n. 11, p. 1004, 2021.
- [97] MUNIZ, R. C.; MALUF, R. V. Generalized Ellis-Bronnikov traversable wormholes in  $f(R)$  gravity with anisotropic dark matter. 2022. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2203.09263>. Acesso em: 24 fev. 2025.
- [98] MACH, P.; MALEC, E.; KARKOWSKI, J. Spherical steady accretion flows: Dependence on the cosmological constant, exact isothermal solutions, and applications to cosmology. *Phys. Rev. D*, v. 88, n. 8, p. 084056, 2013.
- [99] YANG, R. Quantum gravity corrections to accretion onto a Schwarzschild black hole. *Phys. Rev. D*, v. 92, n. 8, p. 084011, 2015.

- [100] BAHAMONDE, S.; JAMIL, M. Accretion Processes for General Spherically Symmetric Compact Objects. *Eur. Phys. J. C*, v. 75, p. 508, 2015.
- [101] AHMED, A. K. *et al.* Astrophysical flows near  $f(T)$  gravity black holes. *Eur. Phys. J. C*, v. 76, n. 5, p. 269, 2016.
- [102] AZREG-AÏNOU, M.; AHMED, A. K.; JAMIL, M. Spherical accretion by normal and phantom Einstein–Maxwell–dilaton black holes. *Class. Quant. Grav.*, v. 35, n. 23, p. 235001, 2018.
- [103] NEVES, J. C. S.; SAA, A. Accretion of perfect fluids onto a class of regular black holes. *Annals Phys.*, v. 420, p. 168269, 2020.
- [104] PANOTOPOULOS, G.; RINCON, A.; LOPES, I. Accretion of matter and spectra of binary X-ray sources in massive gravity. *Annals Phys.*, v. 433, p. 168596, 2021.
- [105] RUEDA, A.; CONTRERAS, E. Geodesic analysis and steady accretion on a traversable wormhole. *Annals Phys.*, v. 459, p. 169540, 2023.
- [106] COMBI, L. *et al.* General relativistic magnetohydrodynamical simulations of accretion flows through traversable wormholes. *Phys. Rev. D*, v. 109, n. 10, p. 103034, 2024.
- [107] BRONNIKOV, K. A. Scalar fields as sources for wormholes and regular black holes. *Particles*, v. 1, n. 1, p. 56–81, 2018.
- [108] BRONNIKOV, K. A.; WALIA, R. K. Field sources for Simpson-Visser spacetimes. *Phys. Rev. D*, v. 105, n. 4, p. 044039, 2022.
- [109] RODRIGUES, M. E.; SILVA, M. V. d. S. Black-bounces with multiple throats and anti-throats. *Class. Quant. Grav.*, v. 40, n. 22, p. 225011, 2023.
- [110] LOBO, F. S. N. *et al.* Novel black-bounce spacetimes: wormholes, regularity, energy conditions, and causal structure. *Phys. Rev. D*, v. 103, n. 8, p. 084052, 2021.
- [111] BOONSERM, P. *et al.* Exponential metric represents a traversable wormhole. *Phys. Rev. D*, v. 98, n. 8, p. 084048, 2018.
- [112] XAVIER, S. V. M. C. B.; HERDEIRO, C. A. R.; CRISPINO, L. C. B. Traversable wormholes and light rings. *Phys. Rev. D*, v. 109, n. 12, p. 124065, 2024.
- [113] RODRIGUES, M. E.; SILVA, M. V. d. S. Spherically symmetric and static black bounces with multiple horizons, throats, and anti-throats in four dimensions. *Class. Quant. Grav.*, v. 42, n. 5, p. 055005, 2025.
- [114] ALENCAR, G. *et al.* Field sources for  $f(R, R_{\mu\nu})$  black-bounce solutions: The case of K-gravity. *Phys. Dark Univ.*, v. 49, p. 102060, 2025.

- [115] ALENCAR, G. *et al.* On black bounce space-times in non-linear electrodynamics. *Eur. Phys. J. C*, v. 84, n. 7, p. 745, 2024.
- [116] BRONNIKOV, K. A.; RODRIGUES, M. E.; SILVA, M. V. de S. Cylindrical black bounces and their field sources. *Phys. Rev. D*, v. 108, n. 2, p. 024065, 2023.
- [117] RODRIGUES, M. E.; SILVA, M. V. d. S. Source of black bounces in general relativity. *Phys. Rev. D*, v. 107, n. 4, p. 044064, 2023.
- [118] BOLOKHOV, S. V.; BRONNIKOV, K. A.; SKVORTSOVA, M. V. A Regular Center Instead of a Black Bounce. *Grav. Cosmol.*, v. 30, n. 3, p. 265–278, 2024.
- [119] BRONNIKOV, K. A.; GALIAKHMETOV, A. M. Wormholes and black universes without phantom fields in Einstein-Cartan theory. *Phys. Rev. D*, v. 94, n. 12, p. 124006, 2016.
- [120] RODRIGUES, M. E.; SILVA, M. V. de S.; SIQUEIRA, A. S. de. Regular multihorizon black holes in General Relativity. *Phys. Rev. D*, v. 102, n. 8, p. 084038, 2020.
- [121] VACHASPATI, T. *Kinks and Domain Walls : an introduction to classical and quantum solitons.* [S.l.]: Oxford University Press, 2007. ISBN 978-1-009-29045-6, 978-1-009-29041-8, 978-1-009-29042-5, 978-0-521-14191-8, 978-0-521-83605-0, 978-0-511-24290-8.
- [122] BAZEIA, D.; BELENDRYASOVA, E.; GANI, V. A. Scattering of kinks of the sinh-deformed  $\phi^4$  model. *Eur. Phys. J. C*, v. 78, n. 4, p. 340, 2018.
- [123] VISSER, M. *Lorentzian wormholes: from Einstein to Hawking.* [S.l.]: [s.n.], 1995. ISBN 978-1-56396-653-8.
- [124] CAPOZZIELLO, S.; STABILE, A.; TROISI, A. Spherical symmetry in f(R)-gravity. *Class. Quant. Grav.*, v. 25, p. 085004, 2008.
- [125] SEBASTIANI, L.; ZERBINI, S. Static Spherically Symmetric Solutions in F(R) Gravity. *Eur. Phys. J. C*, v. 71, p. 1591, 2011.
- [126] CAPOZZIELLO, S.; STABILE, A.; TROISI, A. Spherically symmetric solutions in f(R)-gravity via Noether Symmetry Approach. *Class. Quant. Grav.*, v. 24, p. 2153–2166, 2007.
- [127] KAINULAINEN, K. *et al.* Spherically symmetric spacetimes in f(R) gravity theories. *Phys. Rev. D*, v. 76, p. 024020, 2007.
- [128] NASHED, G. G. L.; CAPOZZIELLO, S. Charged spherically symmetric black holes in f(R) gravity and their stability analysis. *Phys. Rev. D*, v. 99, n. 10, p. 104018, 2019.
- [129] MULTAMAKI, T.; VILJA, I. Spherically symmetric solutions of modified field equations in f(R) theories of gravity. *Phys. Rev. D*, v. 74, p. 064022, 2006.

- [130] RÓIS, G. I. *et al.* Charged black hole solutions in  $f(R,T)$  gravity coupled to nonlinear electrodynamics. *Phys. Rev. D*, v. 111, n. 12, p. 124044, 2025.
- [131] NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. Black holes and their shadows in  $F(R)$  gravity. *Phys. Dark Univ.*, v. 47, p. 101785, 2025.
- [132] ELIZALDE, E. *et al.* Spherically symmetric black holes with electric and magnetic charge in extended gravity: physical properties, causal structure, and stability analysis in Einstein's and Jordan's frames. *Eur. Phys. J. C*, v. 80, n. 2, p. 109, 2020.
- [133] NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. Regular multihorizon black holes in modified gravity with nonlinear electrodynamics. *Phys. Rev. D*, v. 96, n. 10, p. 104008, 2017.
- [134] NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. Instabilities and anti-evaporation of Reissner–Nordström black holes in modified  $F(R)$  gravity. *Phys. Lett. B*, v. 735, p. 376–382, 2014.
- [135] DEBENEDICTIS, A.; HORVAT, D. On Wormhole Throats in  $f(R)$  Gravity Theory. *Gen. Rel. Grav.*, v. 44, p. 2711–2744, 2012.
- [136] SAMANTA, G. C.; GODANI, N. Validation of energy conditions in wormhole geometry within viable  $f(R)$  gravity. *Eur. Phys. J. C*, v. 79, n. 7, p. 623, 2019.
- [137] BHATTACHARYA, S.; CHAKRABORTY, S.  $f(R)$  gravity solutions for evolving wormholes. *Eur. Phys. J. C*, v. 77, n. 8, p. 558, 2017.
- [138] BAMBI, C. *et al.* Wormholes and nonsingular spacetimes in Palatini  $f(R)$  gravity. *Phys. Rev. D*, v. 93, n. 6, p. 064016, 2016.
- [139] RODRIGUES, M. E. *et al.* Regular black holes in  $f(R)$  gravity coupled to nonlinear electrodynamics. *Phys. Rev. D*, v. 94, n. 2, p. 024062, 2016. [Addendum: *Phys. Rev. D* 94, 049904 (2016)].
- [140] RODRIGUES, M. E. *et al.* Generalisation for regular black holes on general relativity to  $f(R)$  gravity. *Eur. Phys. J. C*, v. 76, n. 5, p. 250, 2016.
- [141] SANTOS, A. C. L.; MALUF, R. V.; MUNIZ, C. R. Regular Black Holes in  $D = 2 + 1$  with  $f(R)$  Gravity. 2023. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2312.05326>. Acesso em: 12 set. 2024.
- [142] TANGPHATI, T.; YOUK, M.; PONGLERTSAKUL, S. Magnetically charged regular black holes in  $f(R,T)$  gravity coupled to nonlinear electrodynamics. *JHEAp*, v. 43, p. 66–78, 2024.
- [143] FABRIS, J. C.; BARROS JUNIOR, E. L.; RODRIGUES, M. E. Generalized models for black-bounce solutions in  $f(R)$  gravity. *Eur. Phys. J. C*, v. 83, n. 10, p. 884, 2023.

- [144] SILVA JUNIOR, J. T. S.; RODRIGUES, M. E. Coincident  $f(\mathbb{Q})$  gravity: black holes, regular black holes, and black bounces. *Eur. Phys. J. C*, v. 83, n. 6, p. 475, 2023.
- [145] SILVA JUNIOR, J. T. S.; LOBO, F. S. N.; RODRIGUES, M. E. Black bounces in conformal Killing gravity. *Eur. Phys. J. C*, v. 84, n. 6, p. 557, 2024.
- [146] BARROS JUNIOR, E. L. *et al.* Black bounces in Cotton gravity. *Eur. Phys. J. C*, v. 84, n. 11, p. 1190, 2024.
- [147] RÓIS, G. I. *et al.* Novel electrically charged wormhole, black hole, and black bounce exact solutions in hybrid metric-Palatini gravity. *Phys. Rev. D*, v. 111, n. 12, p. 124012, 2025.
- [148] NATE, P. C. Black bounces as magnetically charged phantom regular black holes in Einstein-nonlinear electrodynamics gravity coupled to a self-interacting scalar field. *Phys. Rev. D*, v. 106, n. 2, p. 024031, 2022.
- [149] PEREIRA, C. F. S. *et al.* Magnetically charged black-bounce solution via nonlinear electrodynamics in a k-essence theory. *Phys. Rev. D*, v. 111, n. 8, p. 084025, 2025.
- [150] STAROBINSKY, A. A. A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity. *Phys. Lett. B*, v. 91, p. 99–102, 1980.
- [151] FELICE, A. D.; TSUJIKAWA, S.  $f(R)$  theories. *Living Rev. Rel.*, v. 13, p. 3, 2010.
- [152] NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. Unified cosmic history in modified gravity: from  $F(R)$  theory to Lorentz non-invariant models. *Phys. Rept.*, v. 505, p. 59–144, 2011.
- [153] NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D.; OIKONOMOU, V. K. Modified Gravity Theories on a Nutshell: Inflation, Bounce and Late-time Evolution. *Phys. Rept.*, v. 692, p. 1–104, 2017.
- [154] SIMPSON, A.; VISSER, M. Black-bounce to traversable wormhole. *JCAP*, v. 02, p. 042, 2019.
- [155] VISSER, M.; HOCHBERG, D. Generic wormhole throats. *Annals Israel Phys. Soc.*, v. 13, p. 249, 1997.
- [156] LIMA JUNIOR., H. C. D. *et al.* Can different black holes cast the same shadow? *Phys. Rev. D*, v. 103, n. 8, p. 084040, 2021.
- [157] VAGNOZZI, S. *et al.* Horizon-scale tests of gravity theories and fundamental physics from the Event Horizon Telescope image of Sagittarius A. *Class. Quant. Grav.*, v. 40, n. 16, p. 165007, 2023.
- [158] TSUKAMOTO, N. Gravitational lensing in the Simpson-Visser black-bounce spacetime in a strong deflection limit. *Phys. Rev. D*, v. 103, n. 2, p. 024033, 2021.

- [159] SIMPSON, A.; MARTIN-MORUNO, P.; VISSER, M. Vaidya spacetimes, black-bounces, and traversable wormholes. *Class. Quant. Grav.*, v. 36, n. 14, p. 145007, 2019.
- [160] FRANZIN, E. *et al.* Charged black-bounce spacetimes. *JCAP*, v. 07, p. 036, 2021.
- [161] FURTADO, J.; ALENCAR, G. BTZ Black-Bounce to Traversable Wormhole. *Universe*, v. 8, n. 12, p. 625, 2022.
- [162] LIMA, A. M.; ALENCAR, G.; FURTADO, J. Black String Bounce to Traversable Wormhole. *Symmetry*, v. 15, n. 1, p. 150, 2023.
- [163] LIMA, A.; ALENCAR, G.; GÓMEZ, D. S.-C. Regularizing rotating black strings with a new black-bounce solution. *Phys. Rev. D*, v. 109, n. 6, p. 064038, 2024.
- [164] CRISPIM, T. M.; ALENCAR, G.; ESTRADA, M. Braneworld Black Bounce to Traversable Wormhole Analytically Connected to an asymptotically  $AdS_5$  Boundary. 2024. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2407.03528>. Acesso em: 12 set. 2024.
- [165] CRISPIM, T. M. *et al.* Braneworld black bounce to transversable wormhole. *JCAP*, v. 10, p. 063, 2024.
- [166] HUANG, H.; YANG, J. Charged Ellis Wormhole and Black Bounce. *Phys. Rev. D*, v. 100, n. 12, p. 124063, 2019.
- [167] FITKEVICH, M. Black bounces and remnants in dilaton gravity. *Phys. Rev. D*, v. 105, n. 10, p. 106027, 2022.
- [168] RODRIGUES, M. E.; SILVA, M. V. d. S. Embedding regular black holes and black bounces in a cloud of strings. *Phys. Rev. D*, v. 106, n. 8, p. 084016, 2022.
- [169] PEREIRA, C. F. S. *et al.* Black-bounce solution in k-essence theories. *Phys. Rev. D*, v. 109, n. 4, p. 044011, 2024.
- [170] RODRIGUES, M. E.; VIEIRA, H. A. A regular metric does not ensure the regularity of spacetime. *Eur. Phys. J. Plus*, v. 138, n. 11, p. 974, 2023.
- [171] PEREIRA, C. F. S. *et al.* New sources of ghost fields in k-essence theories for black-bounce solutions. *Class. Quant. Grav.*, v. 42, n. 1, p. 015001, 2025.
- [172] LIMA, A. *et al.* Charged black string bounce and its field source. *Gen. Rel. Grav.*, v. 55, n. 10, p. 108, 2023.
- [173] SILVA, M. V. d. S. *et al.* Generalized black-bounces solutions in  $f(R)$  gravity and their field sources. 2025. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2502.19186>. Acesso em: 12 set. 2024.

- [174] PEREIRA, C. F. S. *et al.* Black-bounce solutions in a k-essence theory under the effects of bumblebee gravity. *Phys. Rev. D*, v. 111, n. 12, p. 124005, 2025.
- [175] ASHTEKAR, A.; BIANCHI, E. A short review of loop quantum gravity. *Rept. Prog. Phys.*, v. 84, n. 4, p. 042001, 2021.
- [176] ALONSO-BARDAJI, A.; BRIZUELA, D.; VERA, R. An effective model for the quantum Schwarzschild black hole. *Phys. Lett. B*, v. 829, p. 137075, 2022.
- [177] ALONSO-BARDAJI, A.; BRIZUELA, D.; VERA, R. Nonsingular spherically symmetric black-hole model with holonomy corrections. *Phys. Rev. D*, v. 106, n. 2, p. 024035, 2022.
- [178] PELTOLA, A.; KUNSTATTER, G. A Complete, Single-Horizon Quantum Corrected Black Hole Spacetime. *Phys. Rev. D*, v. 79, p. 061501, 2009.
- [179] BODENDORFER, N.; MELE, F. M.; MÜNCH, J. Effective Quantum Extended Spacetime of Polymer Schwarzschild Black Hole. *Class. Quant. Grav.*, v. 36, n. 19, p. 195015, 2019.
- [180] ZHANG, C. *et al.* Black holes and covariance in effective quantum gravity. *Phys. Rev. D*, v. 111, n. 8, p. L081504, 2025.
- [181] ZHANG, C. *et al.* Black holes and covariance in effective quantum gravity: a solution without cauchy horizons. 2024. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2412.02487>. Acesso em: 12 jun. 2025.
- [182] HOBSON, M. P.; EFSTATHIOU, G. P.; LASENBY, A. N. *General relativity: an introduction for physicists*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006.
- [183] GEZARI, S. Tidal Disruption Events. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, v. 59, p. 21–58, 2021.
- [184] REES, M. J. Tidal disruption of stars by black holes of 10 to the 6th-10 to the 8th solar masses in nearby galaxies. *Nature*, v. 333, p. 523–528, 1988.
- [185] EVANS, C. R.; KOCHANNEK, C. S. The tidal disruption of a star by a massive black hole. *Astrophys. J. Lett.*, v. 346, p. L13–L16, 1989.
- [186] AGGARWAL, H. R.; OBERBECK, V. R. Roche limit of a solid body. *Astrophysical Journal*, v. 191, p. 577, 1974.
- [187] CRISPINO, L. C. B. *et al.* Tidal forces in Reissner–Nordström spacetimes. *Eur. Phys. J. C*, v. 76, n. 3, p. 168, 2016.

- [188] SHARIF, M.; KOUSAR, L. Tidal Forces in Dyonic Reissner-Nördstrom Black Hole. *Commun. Theor. Phys.*, v. 69, n. 3, p. 257, 2018.
- [189] SHARIF, M.; SADIQ, S. Tidal Effects in Some Regular Black Holes. *J. Exp. Theor. Phys.*, v. 126, n. 2, p. 194–200, 2018.
- [190] LIMA, H. C. D.; CRISPINO, L. C. B. Tidal forces in the charged Hayward black hole spacetime. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 29, n. 11, p. 2041014, 2020.
- [191] NANDI, K. K. *et al.* Tidal forces in cold black hole space-times. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 10, p. 529–538, 2001.
- [192] LIMA JUNIOR, H. C. D. *et al.* Tidal forces in dirty black hole spacetimes. *Eur. Phys. J. C*, v. 82, p. 479, 2022.
- [193] MASI, M. On compressive radial tidal forces. *Am. J. Phys.*, v. 75, p. 116–124, 2007.
- [194] SHAHZAD, M. U.; JAWAD, A. Tidal Forces in Kiselev Black Hole. *Eur. Phys. J. C*, v. 77, n. 6, p. 372, 2017.
- [195] LIMA JUNIOR, H. C. D.; CRISPINO, L. C. B.; HIGUCHI, A. On-axis tidal forces in Kerr spacetime. *Eur. Phys. J. Plus*, v. 135, n. 3, p. 334, 2020.
- [196] ANDRE, E. L. *et al.* Tidal forces near a black hole with scalar hairy. *J. Phys. Conf. Ser.*, v. 1690, n. 1, p. 012181, 2020.
- [197] VANDEEV, V. P.; SEMENOVA, A. N. Tidal forces in Kottler spacetimes. *Eur. Phys. J. C*, v. 81, n. 7, p. 610, 2021.
- [198] UNIYAL, R. Tidal forces around Schwarzschild black hole in cloud of strings and quintessence. *Eur. Phys. J. C*, v. 82, n. 6, p. 567, 2022.
- [199] ARORA, D. *et al.* Tidal forces in the Simpson–Visser black-bounce and wormhole spacetimes. *Phys. Dark Univ.*, v. 44, p. 101487, 2024.
- [200] TOSHMATOV, B.; AHMEDOV, B. Tidal forces in parametrized spacetime: Rezzolla-Zhidenko parametrization. *Phys. Rev. D*, v. 108, n. 8, p. 084035, 2023.
- [201] ALBACETE, E.; RICHARTZ, M. Tidal Forces in Majumdar-Papapetrou Spacetimes. *Universe*, v. 10, n. 2, p. 62, 2024.
- [202] FRANZIN, E.; LIBERATI, S.; VELLUCCI, V. From regular black holes to horizonless objects: quasi-normal modes, instabilities and spectroscopy. *JCAP*, v. 01, p. 020, 2024.
- [203] MOREIRA, Z. S. *et al.* Quasinormal modes of a holonomy corrected Schwarzschild black hole. *Phys. Rev. D*, v. 107, n. 10, p. 104016, 2023.

- [204] GRALLA, S. E.; HOLZ, D. E.; WALD, R. M. Black Hole Shadows, Photon Rings, and Lensing Rings. *Phys. Rev. D*, v. 100, n. 2, p. 024018, 2019.
- [205] ROSA, J. a. L.; RUBIERA-GARCIA, D. Shadows of boson and Proca stars with thin accretion disks. *Phys. Rev. D*, v. 106, n. 8, p. 084004, 2022.
- [206] POMARES, D. J. P.; RUBIERA-GARCIA, D. Gravitational lensing and shadows from thin-disks in Loop Quantum Gravity self-dual black holes. 2024. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2409.05371>. Acesso em: 11 set. 2024.
- [207] BARROS JUNIOR, E. L. *et al.* Constraints on the  $\gamma$ -parameter for the vacuum solution of Cotton gravity with geodesics and shadows. 2024. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2407.21655>. Acesso em: 22 jun. 2025.
- [208] MARTINO, I. D.; MONICA, R. D.; RUBIERA-GARCIA, D. Optical appearance of a nonsingular de Sitter core black hole geometry under several thin disk emissions. *Phys. Rev. D*, v. 108, n. 12, p. 124054, 2023.
- [209] SILVA, L. F. D. da *et al.* Photon rings as tests for alternative spherically symmetric geometries with thin accretion disks. *Phys. Rev. D*, v. 108, n. 8, p. 084055, 2023.
- [210] MACEDO, C. F. B.; ROSA, J. a. L.; RUBIERA-GARCIA, D. Optical appearance of black holes surrounded by a dark matter halo. *JCAP*, v. 07, p. 046, 2024.
- [211] ROSA, J. a. L. *et al.* Observational imprints of gravastars from accretion disks and hot spots. *Phys. Rev. D*, v. 109, n. 8, p. 084002, 2024.
- [212] ROSA, J. a. L.; MACEDO, C. F. B.; RUBIERA-GARCIA, D. Imaging compact boson stars with hot spots and thin accretion disks. *Phys. Rev. D*, v. 108, n. 4, p. 044021, 2023.
- [213] ROSA, J. a. L.; PELLE, J.; PÉREZ, D. Accretion disks and relativistic line broadening in boson star spacetimes. *Phys. Rev. D*, v. 110, n. 8, p. 084068, 2024.
- [214] FARAJI, S.; ROSA, J. L. Effect of dark matter on the shadow of a distorted and deformed compact object. 2024. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2403.02597>. Acesso em: 22 fev. 2025.
- [215] TAMM, H. L.; ROSA, J. a. L. Observational properties of hot spots orbiting relativistic fluid spheres. *Phys. Rev. D*, v. 109, n. 4, p. 044062, 2024.
- [216] OLMO, G. J. *et al.* Shadows and photon rings of regular black holes and geonic horizonless compact objects. *Class. Quant. Grav.*, v. 40, n. 17, p. 174002, 2023.
- [217] ROSA, J. a. L. *et al.* Observational signatures of hot spots orbiting horizonless objects. *Phys. Rev. D*, v. 106, n. 4, p. 044031, 2022.