



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

LAIANE MIRANDA ALVES

UMA PROVA SIMPLES DO TEOREMA DE CALABI-BERNSTEIN SOBRE
SUPERFÍCIES TIPO-ESPAÇO MÁXIMAS

FORTALEZA

2025

LAIANE MIRANDA ALVES

UMA PROVA SIMPLES DO TEOREMA DE CALABI-BERNSTEIN SOBRE SUPERFÍCIES
TIPO-ESPAÇO MÁXIMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto.

FORTALEZA

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A48p

Alves, Laiane Miranda.

Uma prova simples do Teorema de Calabi-Bernstein sobre superfícies tipo-espaço máximas / Laiane Miranda Alves. – 2025.
70 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2025.

Orientação: Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto.

1. Superfícies máximas. 2. Geometria lorentziana. 3. Espaço de Lorentz-Minkowski. 4. Teorema de Calabi-Bernstein. I. Título.

CDD 510

LAIANE MIRANDA ALVES

UMA PROVA SIMPLES DO TEOREMA DE CALABI-BERNSTEIN SOBRE SUPERFÍCIES
TIPO-ESPAÇO MÁXIMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 16/12/2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Frederico Vale Girão
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Francisco Yure Santos do Nascimento Jansel
Universidade Federal do Ceará (UFC - Crateús)

Aos colegas de curso, cuja paciência e companheirismo me ajudaram a chegar até aqui.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Graça Miranda e Carlos Alves, e à minha irmã, Airama Miranda, por todo o suporte e confiança depositados em mim, desde o começo de minha jornada acadêmica, respeitando minhas escolhas e acreditando na minha capacidade.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto, pelo excelente trabalho de orientação, estando sempre presente e solícito para falar de Matemática e também para conversar um pouco sobre a vida, me oferecendo conselhos imprescindíveis que guardarei em mente por muito tempo. Também agradeço por suas disciplinas ministradas que acompanhei durante a graduação e o mestrado, em que sua dedicação e comprometimento com o rigor e a didática sempre me geravam motivação e inspiração para seguir o caminho da Matemática.

Aos amigos e colegas de curso, Gabriel Cândido, Jackson Ályson, Maria Eduarda Bezerra, Maikon Lima, Matheus Mendes, Matheus Miler, Tiago de Vasconcelos, Victor Pires e Wesley Freitas, pelo carinho, apoio e companheirismo, que tornaram esta dura jornada consideravelmente mais leve. Em especial, agradeço aos amigos Vinícius de Oliveira Prado e Thiago Lima Gonçalves, não só pelo que citei acima, mas também pela imensurável paciência e solicitude para me tirarem as mais diversas dúvidas.

À minha psicóloga Drieli Venâncio, pelo auxílio na construção do alicerce emocional que me foi essencial em diversos momentos desta fase de minha vida.

Aos membros da banca, Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto, Prof. Dr. Frederico Vale Girão e Prof. Dr. Francisco Yure Santos do Nascimento Jansel, por se disponibilizarem a revisar este trabalho.

À Prof.^a Dr.^a Ana Shirley Silva e ao Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides pela atenção, solicitude e suporte nas disciplinas ministradas e na bolsa de iniciação científica, que me foram de extrema importância no início e meio da graduação.

Ao Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo e ao amigo Francisco Igor de Souza Oliveira por oferecerem minhas primeiras oportunidades na docência, o que diversificou minha experiência e possibilitou uma válvula de escape da rotina puramente acadêmica.

Aos demais amigos, Amanda, Caleb, Débora, Lara, Maiara, Matheus Almeida, Pederio e Vitor Vieira, pelo acolhimento, apoio emocional, solicitude, consideração e momentos de descontração.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

"Até eu fui obrigada a me respeitar."

(Clarice Lispector)

RESUMO

O Teorema de Calabi-Bernstein, segundo o qual as únicas soluções inteiras para a equação das superfícies máximas são funções afins, é um resultado conhecido da Geometria Lorentziana, que colecionou diferentes demonstrações ao longo dos anos desde sua prova original, devida a E. Calabi. Neste trabalho, estudamos uma demonstração simples e direta dada por A. Romero, com a intenção de ser facilmente entendida por pesquisadores iniciantes. Assim sendo, tal prova requer apenas preliminares básicos de Geometria Riemanniana e Semi-Riemanniana, os quais foram incluídos no texto, além do Teorema de Liouville sobre funções holomorfas de uma variável complexa.

Palavras-chave: superfícies máximas; geometria lorentziana; espaço de Lorentz-Minkowski; teorema de Calabi-Bernstein.

ABSTRACT

The Calabi-Bernstein Theorem, which states that the only entire solutions to the maximal surface equation are affine functions, is a very well known result in Lorentzian Geometry, collecting many different proofs along the years since its original, one due to E. Calabi. In this work, we study a direct and simple proof of this theorem given by A. Romero, aiming to be easily understood by beginning researchers. As such, this proof only requires basic Riemannian and Semi-Riemannian Geometry preliminaries, which have been included in the text, in addition to Liouville Theorem on holomorphic functions of one complex variable.

Keywords: maximal surfaces; lorentzian geometry; Lorentz-Minkowski space; Calabi-Bernstein Theorem.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	PRELIMINARES	11
2.1	Espaços de Lorentz-Minkowski e Subvariedades Semi-riemannianas . .	11
2.2	Conexões, Curvatura Média e Superfícies Máximas	17
2.3	Tensor Curvatura, a Equação de Gauss e a Equação de Codazzi	24
2.4	Referenciais Geodésicos	30
2.5	Variedades Riemannianas Completas	34
2.6	Subvariedades Totalmente Geodésicas	36
2.7	Funções Harmônicas e o Teorema de Liouville	38
2.8	Mudanças Conformes de Métrica	41
2.9	Superfícies Parametrizadas	43
2.10	Preliminares Topológicos	44
3	ENCONTRANDO UMA FUNÇÃO HARMÔNICA POSITIVA	48
4	A EQUAÇÃO DAS SUPERFÍCIES MÁXIMAS	53
5	UMA MÉTRICA <i>FLAT</i> E COMPLETA PARA O GRÁFICO	58
6	ISOMETRIA ENTRE O PLANO EUCLIDIANO E O GRÁFICO COM A NOVA MÉTRICA	62
7	MOSTRANDO QUE A FUNÇÃO É AFIM	67
8	CONCLUSÃO	68
	REFERÊNCIAS	69

1 INTRODUÇÃO

Seja $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Uma condição suficiente para que o gráfico de u em \mathbb{R}^{n+1} seja uma hipersuperfície mínima, ou seja, que tenha curvatura média nula, é que u satisfaça a *equação das hipersuperfícies mínimas*:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0, \quad (1.1)$$

em que div denota o operador divergência e ∇ denota o operador gradiente. Em 1910, S. Bernstein [1] provou que as únicas soluções suaves para (1.1) definidas em todo o \mathbb{R}^2 são as funções afins. Ao longo dos anos 60, tal resultado foi gradualmente expandido para dimensões maiores: de \mathbb{R}^3 até \mathbb{R}^7 . No entanto, E. Bombieri, E. de Giorgi e É. Dzhusti [2] encontram, em 1969, contraexemplos para $n \geq 8$.

Considerando, porém, o gráfico de $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como uma hipersuperfície no espaço de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^{n+1} , a história é outra. Nesse contexto, as hipersuperfícies tipo-espaço de curvatura média nula são chamadas *máximas* e, em 1970, E. Calabi [3] demonstrou o seguinte resultado, análogo àquele de Bernstein, que ficou conhecido como *Teorema de Calabi-Bernstein*:

Teorema 1.1. *As únicas soluções $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suaves para a equação das superfícies máximas*

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 - |\nabla u|^2}} \right) = 0, \quad |\nabla u| < 1, \quad (1.2)$$

são funções afins.

O caso tipo-espaço em \mathbb{L}^{n+1} , diferentemente do caso riemanniano em \mathbb{R}^{n+1} , permite generalização para todo $n \geq 2$, como demonstrado por S.Y. Cheng e S.T. Yau [5], em 1976. Além de tal generalização, muitas outras foram formuladas e provadas, bem como novas demonstrações do Teorema de Calabi-Bernstein foram surgindo ao longo dos anos, como mostra R. Rubio [12].

Esta dissertação tem como objetivo demonstrar o Teorema (1.1), seguindo a estratégia simplificada apresentada por A. Romero em [11], da maneira mais autocontida possível e expandindo os argumentos deixados implícitos no referido artigo.

Diante disso, no segundo capítulo, as noções preliminares necessárias para a demonstração são apresentadas, assumindo um leitor bem habituado aos conceitos e resultados de variedades suaves, porém pouco familiarizado com Geometria Riemanniana. A definição de variedade semi-riemanniana é tomada como ponto de partida, passando, em seguida, pelas definições e resultados essenciais para se trabalhar com variedades e subvariedades semi-riemannianas.

Também é apresentado o ingrediente-chave para a demonstração simplificada de A. Romero: o Teorema de Liouville sobre funções holomorfas de uma variável complexa.

No terceiro capítulo, uma função harmônica positiva que pode ser definida em qualquer superfície máxima de \mathbb{L}^3 é obtida, além de equações a ela relacionadas, que serão utilizadas, mais tarde, no quinto capítulo, para construir uma nova métrica para o gráfico e, no sétimo capítulo, para concluir por aplicação do Teorema de Liouville, que o gráfico que estamos analisando está contido em um plano.

No quarto capítulo, a equação (1.2) é investigada para analisar sua relação com a curvatura média do gráfico e concluir que ela é, de fato, condição para que o gráfico seja uma superfície máxima em \mathbb{L}^3 , de modo que a função harmônica positiva encontrada no capítulo anterior possa ser definida nele.

No quinto e sexto capítulos, construímos um meio de "transportar" a função harmônica positiva definida no gráfico para o \mathbb{R}^2 , de forma que o Teorema de Liouville possa, de fato, ser aplicado. No artigo de A. Romero, tal meio é uma isometria fornecida pelo Teorema de Cartan, que requer, para sua aplicação, munir o gráfico com uma métrica *flat* e completa. Tal métrica será construída no quinto capítulo; porém, nesta dissertação, conseguimos evitar o uso do Teorema de Cartan, que é bem mais forte do que o necessário no presente contexto. No sexto capítulo, então, construímos a isometria que será utilizada. Por fim, no sétimo capítulo, os ingredientes obtidos nos cinco capítulos anteriores são reunidos para chegar à conclusão desejada pelo Teorema (1.1).

2 PRELIMINARES

Com o objetivo de tornar o texto o mais autocontido possível, traremos, neste capítulo, um apanhado das definições e fatos da Geometria Riemanniana e Semi-riemanniana que serão essenciais para o entendimento do Teorema de Calabi-Bernstein e de sua demonstração simplificada. Nos preocupamos em apresentar as provas de fatos relevantes que são comumente deixados como exercícios em livros-textos e as demonstrações dos principais teoremas que utilizaremos. No entanto, será esperado do leitor um nível de familiaridade com variedades suaves e Geometria riemanniana equivalente, respectivamente, aos dezesseis primeiros capítulos de [8] e o primeiro capítulo de [4].

2.1 Espaços de Lorentz-Minkowski e Subvariedades Semi-riemannianas

No Teorema de Calabi-Bernstein, o espaço ambiente considerado é uma variedade semi-riemanniana, que nada mais é do que uma variedade suave munida com um tipo de 2-tensor covariante que generaliza as métricas riemannianas. Para definir tal tipo de 2-tensor covariante, precisamos desenvolver alguns preliminares de Álgebra Linear.

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita e g uma forma bilinear simétrica em V , ou seja, um 2-tensor covariante e simétrico em V . Diremos que g é *não degenerado* se, dado $v \in V$, tivermos que

$$g(v, w) = 0, \forall w \in V \implies v = 0.$$

Digamos que $\dim V = n$ e seja e_1, \dots, e_n uma base para V . Se $v = \sum_j v_j e_j$ e $g_{ij} = g(e_i, e_j)$, então, utilizando da simetria de g para escrever $g_{ij} = g_{ji}$, temos

$$\begin{aligned} g(v, w) = 0, \forall w \in V &\iff \sum_j g_{ij} v_j = g(v, e_i) = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ &\iff \sum_j \begin{bmatrix} g_{1j} \\ \vdots \\ g_{nj} \end{bmatrix} v_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, a condição para que g seja não degenerado é equivalente às colunas da matriz $[g_{ij}]_{ij}$ serem linearmente independentes. Em outras palavras, g é não degenerado se, e somente se, sua matriz, em relação a qualquer base, for invertível.

Chamaremos de *produto escalar*, um 2-tensor covariante, simétrico e não degenerado em um espaço vetorial real de dimensão finita. Note que um produto interno nada mais é do que um produto escalar positivo definido. Se g é um produto escalar em um espaço vetorial V , diremos que (V, g) é um *espaço de produto escalar*. Considerando um tal (V, g) , diremos que $v, w \in V$ são ortogonais e denotaremos $v \perp w$, quando $g(v, w) = 0$. Perceba que, sendo g um produto escalar, pode haver $a \in V$ tal que $a \neq 0$, mas $g(a, a) = 0$, sendo, portanto, $a \perp a$.

Se W for um subespaço de V , definimos

$$W^\perp = \{v \in V; v \perp u, \forall u \in W\}.$$

Pela bilinearidade de g , é claro que W^\perp também será um subespaço de V . Veja também que se $v \in W$, então $v \perp u, \forall u \in W^\perp$, logo

$$W \subseteq (W^\perp)^\perp. \quad (2.1)$$

Provaremos, agora, que

$$\dim W^\perp = \dim V - \dim W. \quad (2.2)$$

Se assim for, teremos que $\dim(W^\perp)^\perp = \dim V - (\dim V - \dim W) = \dim W$, de onde seguirá que $(W^\perp)^\perp = W$. Com efeito, denote $n = \dim V$, $k = \dim W$ e considere e_1, \dots, e_n uma base para V , tal que e_1, \dots, e_k seja base para W . Temos que,

$$\begin{aligned} v = \sum_j v_j e_j \in W^\perp &\iff \sum_j g_{ij} v_j = g(v, e_i) = 0, \forall i \in \{1, \dots, k\} \\ &\iff \begin{cases} g_{11}v_1 + \dots + g_{1n}v_n = 0 \\ \vdots \\ g_{k1}v_1 + \dots + g_{kn}v_n = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Logo W^\perp será isomorfo ao espaço vetorial das soluções do sistema de equações lineares acima. Como g é produto escalar e, por conseguinte, não degenerado, sua matriz, em relação a base e_1, \dots, e_n , é invertível. Segue, então, que a matriz dos coeficientes do sistema acima tem linhas linearmente independentes e, portanto, possui posto k . Logo, pela Álgebra Linear, sabemos que o espaço vetorial das soluções do sistema terá dimensão $n - k$, o que prova o que queríamos.

Agora, dado W subespaço de V , diremos que W é *não degenerado*, quando $g|_W$ for não degenerado e diremos que W é *degenerado*, caso contrário. Assim, W é não degenerado se,

e somente se, dado $w \in W$, w for igual 0, sempre que for ortogonal a todo elemento de W . Em outras palavras, W não degenerado é equivalente à condição $W \cap W^\perp = \{0\}$.

Considere, agora, a seguinte identidade provinda da Álgebra Linear:

$$\dim(W + W^\perp) + \dim(W \cap W^\perp) = \dim W + \dim W^\perp.$$

Levando em conta tal identidade, o parágrafo anterior, (2.2) e que $W + W^\perp \subseteq V$, temos que

$$W \text{ não degenerado} \iff \dim(W \cap W^\perp) = 0 \iff \dim(W + W^\perp) = \dim V \iff W + W^\perp = V.$$

Diante disso,

$$W^\perp \text{ não degenerado} \iff V = W^\perp + (W^\perp)^\perp = W^\perp + W \iff W \text{ não degenerado.} \quad (2.3)$$

Para o que segue, defina a *norma* de um vetor $v \in V$ por

$$|v| = \sqrt{|g(v, v)|}.$$

Diremos que v é *unitário*, quando $|v| = 1$, ou seja, quando $g(v, v) = 1$ ou $g(v, v) = -1$. Um conjunto de vetores de V será dito *ortonormal*, quando todos os vetores deste conjunto forem unitários e dois a dois ortogonais. Vale notar que o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt não necessariamente funcionará em todo conjunto de vetores linearmente independentes, em um espaço de produto escalar, já que pode ocorrer $g(v, v) = 0$, com $v \neq 0$, o que geraria denominadores nulos nas expressões envolvidas no algoritmo. Apesar disto, é possível provar que todo espaço de produto escalar (V, g) , com $V \neq \{0\}$, possui uma base ortonormal.

Para tanto, será necessário notar que todo subespaço não trivial e não degenerado de V possui um vetor de norma não nula. De fato, seja $W \neq \{0\}$ um subespaço tal que $g(w, w) = 0, \forall w \in W$. Então,

$$\forall v, w \in W, g(v, w) = \frac{1}{2} \left(\underbrace{g(v+w, v+w)}_{\in W} - g(v, v) - g(w, w) \right) = 0,$$

logo $W \cap W^\perp = W \neq \{0\} \implies W$ é degenerado. Sendo assim, em todo subespaço não trivial e não degenerado, podemos tomar um vetor unitário. Realmente, basta tomar v tal que $|v| \neq 0$ e considerar $v/|v|$.

Assim, sendo V ele mesmo um subespaço não degenerado, podemos começar tomando $e_1 \in V$ unitário. Suponha, agora, como hipótese de indução, que tenhamos construído $\{e_1, \dots, e_k\}$, com $k < n = \dim V$, conjunto ortonormal. Garantiremos que é possível tomar e_{k+1}

unitário e ortogonal a e_i , para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Primeiramente, afirmo que todo espaço gerado por um conjunto finito de vetores ortonormais é não degenerado. Realmente, chamando $W = \text{span}\{e_1, \dots, e_k\}$, a matriz de $g|_W$, em relação a base e_1, \dots, e_k , será diagonal e com os elementos da diagonal principal iguais a 1 ou -1 , sendo, portanto, invertível, o que prova a afirmação. Assim, seguirá de (2.3) que W^\perp é não degenerado, sendo também não trivial, já que $\dim W^\perp = n - k > 0$. Daí, bastará tomar $e_{k+1} \in W^\perp$ unitário. Isso nos garante que é possível obter um conjunto ortonormal de n vetores e, como qualquer conjunto de vetores ortonormais é linearmente independente, obtemos, portanto, uma base ortonormal, como queríamos.

Agora, considere (ξ_1, \dots, ξ_n) a base dual de uma base ortonormal (e_1, \dots, e_n) para (V, g) . Pela ortonormalidade da base e pela simetria de g , podemos escrever

$$g = \sum_{i=1}^n g(e_i, e_i) \xi_i^2,$$

e, reordenando índices, se necessário,

$$g = \xi_1^2 + \dots + \xi_r^2 - \xi_{r+1}^2 - \dots - \xi_{r+s}^2, \quad (2.4)$$

em que r e s são inteiros não negativos tais que $r + s = n$. Na verdade, r e s serão independentes da escolha da base, sendo

$$s = \max\{\dim W; W \subseteq V \text{ é subespaço e } g|_W \text{ é negativo definido}\}. \quad (2.5)$$

Diremos que s e (r, s) são, respectivamente, o *índice* e a *assinatura* de (V, g) .

Para provar (2.5), denote por η o termo a direita na equação. Veja que o resultado é trivial, caso g seja positiva definida ($s = 0$) e, caso g seja negativa definida ($s = n$). Suponha, então, que $0 < s < n$ e denote $U = \text{span}\{e_{r+1}, \dots, e_{r+s}\}$. Por (2.4), é claro que $g|_U$ é negativa definida, logo

$$s = \dim U \leq \eta.$$

Para a desigualdade inversa, considere W' o subespaço tal que $g|_{W'}$ é negativa definida e $\dim W' = \eta$. O fato de que $\dim W' \leq \dim U$, vem da injetividade da aplicação linear $\pi : W' \rightarrow U$ dada por

$$\pi(v) = - \sum_{i=r+1}^{r+s} g(v, e_i) e_i.$$

Estamos finalmente aptos a definir uma variedade semi-riemanniana. Seja M uma variedade suave. Uma *métrica semi-riemanniana* em M é um 2-tensor covariante suave g em

M tal que, para cada $p \in M$, g_p é um produto escalar, sendo o índice de (T_pM, g_p) constante ao variar p . Uma *variedade semi-riemanniana*, que denotaremos por (M, g) nas notações acima, é, portanto, uma variedade suave munida de uma métrica semi-riemanniana. Note que toda métrica riemanniana de uma variedade suave é um produto escalar positivo definido em cada ponto, logo, em particular, toda variedade riemanniana é também uma variedade semi-riemanniana. Um tipo específico de variedade semi-riemanniana, que será relevante neste texto, são as *variedades lorentzianas*, cuja métrica semi-riemanniana tem índice igual a 1.

Denotaremos por \mathbb{L}^{n+1} , o espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+1} munido com a métrica semi-riemanniana \bar{g} de índice 1, definida globalmente por

$$\bar{g} = (dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2 - (dx_{n+1})^2, \quad (2.6)$$

em que (x_1, \dots, x_{n+1}) são as coordenadas canônicas de \mathbb{R}^{n+1} . Tal variedade lorentziana será chamada *Espaço de Lorentz-Minkowski $(n+1)$ -dimensional*.

Considerando $(M^n, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade semi-riemanniana e, dado $p \in M$, sempre haverá um referencial local suave definido em uma vizinhança de p , provindo dos sistemas de coordenadas locais. Porém, apesar de nunca se anularem, os campos de um certo referencial podem vir a ter norma nula, devido a natureza do produto escalar. Dessa maneira, não é possível aplicar diretamente o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt para obter um referencial ortonormal a partir de qualquer referencial dado.

Apesar disso, é possível provar que existem E_1, \dots, E_n campos vetoriais suaves definidos em uma vizinhança de p , tais que (E_1, \dots, E_n) é referencial ortonormal nesta vizinhança. Como mostramos, sendo (T_pM, g_p) espaço de produto escalar, existe (e_1, \dots, e_n) base ortonormal para T_pM e, utilizando um sistema de coordenadas locais em volta de p e uma função pulso, podemos construir campos vetoriais $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$, tais que $X_i|_p = e_i$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Como $|e_1| = 1 > 0$, por continuidade, existe U_1 vizinhança de p , em que $|X_1| > 0$. Defina, então, em U_1 ,

$$E_1 = \frac{X_1}{|X_1|}.$$

É claro que $E_1|_p = e_1$. Suponha, como hipótese de indução, que tenhamos construído, para $k < n$, E_1, \dots, E_k campos vetoriais ortonormais definidos em uma vizinhança U_k de p , tais que $E_i|_p = e_i$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Seja, então,

$$\bar{E}_{k+1} = X_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle E_i, X_{k+1} \rangle}{\langle E_i, E_i \rangle} E_i.$$

Veja que, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, $\langle E_i|_p, X_{k+1}|_p \rangle = \langle e_i, e_{k+1} \rangle = 0$, logo $\bar{E}_{k+1}|_p = X_{k+1}|_p = e_{k+1}$. Uma vez que $|e_{k+1}| = 1 > 0$, por continuidade, existe vizinhança V_{k+1} de p , em que $|\bar{E}_{k+1}| > 0$. Faça, então, $U_{k+1} = U_k \cap V_{k+1}$. Além disso, para todo $j \in \{1, \dots, k\}$, é claro que $\langle E_j, \bar{E}_{k+1} \rangle = 0$. Diante disso, defina, em U_{k+1} ,

$$E_{k+1} = \frac{\bar{E}_{k+1}}{|\bar{E}_{k+1}|}.$$

Isso prova o que queríamos.

Sendo $X \in \mathfrak{X}(M)$, (E_1, \dots, E_n) um referencial ortonormal local para M definido em um aberto $U \subseteq M$ e escrevendo $X = \sum_{i=1}^n a_i E_i$, em U , temos, para $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\langle X, E_k \rangle = \left\langle \sum_i a_i E_i, E_k \right\rangle = \varepsilon_k a_k,$$

em que $\varepsilon_k = \langle E_k, E_k \rangle$ é igual 1 ou -1 . Assim, obtemos, em U ,

$$X = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle X, E_i \rangle E_i. \quad (2.7)$$

Dado $p \in M$, um vetor $v \in T_p M$ é dito *tipo-espaço*, quando $\langle v, v \rangle > 0$ ou $v = 0$, e é dito *tipo-tempo*, quando $\langle v, v \rangle < 0$. Assim, um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ é dito *tipo-espaço*, se X_p for tipo-espaço, para todo $p \in M$; e, analogamente, é dito *tipo-tempo*, se X_p for tipo-tempo, para todo $p \in M$.

Agora, sejam $(\bar{M}^{n+k}, \bar{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade semi-riemanniana, $M^n \subseteq \bar{M}$ uma subvariedade imersa e $\iota : M \hookrightarrow \bar{M}$ a aplicação inclusão. Diremos que M é uma *subvariedade semi-riemanniana* se $\iota^*(\bar{g})$ for uma métrica semi-riemanniana. Diremos, então, que $g = \iota^*(\bar{g})$ é a *métrica induzida* por \bar{g} em M . Se todo vetor tangente a M for tipo-espaço em relação à métrica induzida g , diremos que M é *subvariedade tipo-espaço*. Note que isso ocorre se, e somente se, g for positiva definida, ou seja, se, e somente se, g for uma métrica riemanniana.

Dado $p \in M$, pela convenção de identificar $T_p M$ com $d\iota_p(T_p \bar{M})$, podemos ver $T_p M$ como um subespaço de $T_p \bar{M}$. Tal fato será usado em tudo que segue, sem maiores comentários, e também nos permitirá utilizar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para denotar tanto \bar{g} , quanto g , sem que haja ambiguidade, uma vez que, para $p \in M$ e $v, w \in T_p M$, temos

$$g_p(v, w) = (\iota^* \bar{g})_{\iota(p)}(v, w) = \bar{g}_p(d\iota_p(v), d\iota_p(w)) = \bar{g}_p(v, w) = \langle v, w \rangle_p.$$

Além disso, denotaremos por $\bar{\mathfrak{X}}(M)$ o conjunto dos campos vetoriais suaves da forma

$$\begin{aligned} X : M &\longrightarrow T\bar{M} \\ p &\longmapsto X_p \in T_p \bar{M}, \end{aligned}$$

isto é, campos vetoriais suaves definidos em M , tais que, para cada $p \in M$, X_p é tangente a \overline{M} , mas não necessariamente é tangente a M . É claro que $\mathfrak{X}(M) \subseteq \overline{\mathfrak{X}}(M)$.

Ainda considerando um $p \in M$ fixado, sabemos que existe uma vizinhança V de p em M que é subvariedade mergulhada de \overline{M} . Considerando $X \in \overline{\mathfrak{X}}(W)$, em que W é uma vizinhança de p , em M (podendo ocorrer $W = M$), podemos diminuir V , se necessário, para supor que X está definida em V (bastaria usarmos $W \cap V$, em vez de V). Como V é subvariedade mergulhada, diminuindo V mais ainda, se necessário, podemos cobri-la por um único domínio de coordenadas locais adaptadas, isto é, existe uma carta $(U, \overline{\varphi})$ para \overline{M} , tal que $V \subseteq U$ e $\overline{\varphi} = (x_1, \dots, x_n, \dots, x_{n+k})$, sendo $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ coordenadas globais para V e

$$\overline{\varphi}(U \cap V) = \overline{\varphi}(U) \cap \{(x_1, \dots, x_{n+k}) \in \mathbb{R}^{n+k}, x_{k+1} = \dots = x_{n+k} = 0\}.$$

Seja $\pi : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação projeção das n primeiras coordenadas. Denotando $\partial_i = \partial / \partial x_i$ e escrevendo $X = \sum_{i=1}^{n+k} a_i \partial_i$ em V , defina

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n+k} (a_i \circ \varphi^{-1} \circ \pi \circ \overline{\varphi}) \partial_i,$$

em U . Temos \overline{X} suave, pela suavidade das aplicações envolvidas. Além disso, \overline{X} estende $X|_V$, uma vez que $(\varphi^{-1} \circ \pi \circ \overline{\varphi})|_V = Id_V$, em que $Id_V : V \rightarrow V$ é a aplicação identidade.

Agora, diminuindo V , se necessário, podemos supor que existe (E_1, \dots, E_n) um referencial ortonormal para V definido globalmente. Pelo o que mostramos no parágrafo anterior, sabemos que existem $\overline{E}_1, \dots, \overline{E}_n$ campos vetoriais suaves, definidos em um aberto de \overline{M} , que estendem, respectivamente, E_1, \dots, E_n . Além disso, como $\text{span}\{E_1|_p, \dots, E_n|_p\} = T_p M$ é não degenerado, podemos obter uma base ortonormal $(E_1|_p, \dots, E_n|_p, e_{n+1}, \dots, e_{n+k})$ para $T_p \overline{M}$. Tome $X_{n+1}, \dots, X_{n+k} \in \overline{\mathfrak{X}}(\overline{M})$ tais que, $X_i|_p = e_i$, para todo $i \in \{n+1, \dots, n+k\}$. Procedendo de maneira análoga àquela feita na demonstração da existência de referenciais ortonormais locais em variedades semi-riemannianas, utilizando ortonormalizações indutivas, com atenção aos domínios de definição de cada campo, obtém-se, a partir de $(\overline{E}_1, \dots, \overline{E}_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+k})$, um referencial ortonormal (F_1, \dots, F_{n+k}) para \overline{M} , em uma vizinhança de p , tal que $(F_1|_V, \dots, F_n|_V) = (E_1, \dots, E_n)$ é referencial em V , chamado *referencial adaptado a V* . Tal resultado e a existência de extensões de campos restritos a uma vizinhança nos serão úteis na próxima seção.

2.2 Conexões, Curvatura Média e Superfícies Máximas

Para compreender o enunciado do Teorema de Calabi-Bernstein, faz-se necessário entender o significado da Equação da Superfície Máxima nele apresentada. Para tanto, é

essencial definir o conceito de *curvatura média*. O primeiro passo para isso será discorrer acerca do conceito básico de *conexão* em uma variedade suave M^n , que se trata de uma aplicação

$$\begin{aligned} D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto D_X Y, \end{aligned}$$

\mathbb{R} -linear em Y , $C^\infty(M)$ -linear em X e tal que, para todo $f \in C^\infty(M)$ e todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, vale a *regra do produto*:

$$D_X(fY) = X(f)Y + fD_X Y.$$

Chamaremos $D_X Y$ de *derivada covariante* de Y em relação a X na conexão D .

Mais adiante, será útil notar que, para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $p \in M$ fixados, $(D_X Y)_p$ só depende de X_p e de Y restrito a uma curva integral de X passando por p . Para prova isso, precisaremos escrever X e Y em coordenadas locais (x_1, \dots, x_n) para M em uma vizinhança U de p , como $X = \sum_i X_i \partial_i$ e $Y = \sum_j Y_j \partial_j$. A intenção é utilizar as propriedades da conexão, para obter

$$(D_X Y)_p = \sum_{j=1}^n X_p(Y_j) \partial_j|_p + \sum_{i,j=1}^n X_i(p) Y_j(p) (D_{\partial_i} \partial_j)_p.$$

e ver que a expressão só depende dos termos $X_i(p)$, $Y_j(p)$ e $X_p(Y_j)$, sendo os dois primeiros inteiramente determinados por X_p e Y_p , respectivamente; e sendo

$$X_p(Y_j) = \left. \frac{d}{dt} (Y_j \circ \gamma) \right|_{t=0},$$

em que $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ é uma curva suave tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = X_p$. No entanto, a princípio, não faz sentido escrever $D_{\partial_i} \partial_j$, pois os campos ∂_k , para $k \in \{1, \dots, n\}$, só estão definidos em U e não necessariamente definidos em todo ponto de M .

Podemos provar, porém, que a conexão D pode ser estendida a campos vetoriais suaves definidos apenas em abertos de M , mostrando que, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $p \in M$, $(D_X Y)_p$ só depende de X e Y em uma vizinhança arbitrária de p . Para a localidade em X , suponha que X é nulo em uma vizinhança U de p e tome φ , função pulso em M , com $\varphi(p) = 1$ e $\text{supp } \varphi \subseteq U$. Teremos $\varphi X \equiv 0$, logo

$$(D_X Y)_p = \varphi(p) (D_X Y)_p = (D_{\varphi X} Y)_p = (D_{0 \cdot \varphi X} Y)_p = 0 \cdot (D_{\varphi X} Y)_p = 0.$$

Isso prova o que queríamos, pois dados campos X_1 e X_2 que coincidem em uma vizinhança de p , teremos $X_1 - X_2$ nulo nesta vizinhança, de sorte que

$$(D_{X_1} Y)_p - (D_{X_2} Y)_p = (D_{X_1 - X_2} Y)_p = 0 \implies (D_{X_1} Y)_p = (D_{X_2} Y)_p.$$

Por motivo análogo, para a localidade em Y , basta mostrar que, se Y é nulo em uma vizinhança V de p , então $(D_X Y)_p = 0$. Como antes, tomemos ψ função pulso em M , com $\psi(p) = 1$ e $\text{supp } \psi \subseteq V$. Tendo em vista que $\psi Y \equiv 0$, temos

$$(D_X Y)_p = X_p(\psi) \underbrace{Y_p}_{=0} + \underbrace{\psi(p)}_{=1} (D_X Y)_p = (D_X \psi Y)_p = (D_X(0 \cdot \psi Y))_p = 0 \cdot (D_X \psi Y)_p = 0.$$

Agora, dada $(M^n, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade semi-riemanniana, é provado no Teorema 11 do Capítulo 3 de [10], de maneira idêntica ao caso riemanniano, que existe uma única conexão ∇ em M que cumpre, simultaneamente, a propriedade de *compatibilidade com a métrica*,

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M);$$

e a propriedade de *simetria*,

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

em que $[\cdot, \cdot]$ denota os *colchetes de Lie* em M . Tal conexão é chamada *conexão de Levi-Civita de (M, g)* . Sendo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e tomando coordenadas locais (x_1, \dots, x_n) em um aberto U de M , podemos tomar funções suaves Γ_{ij}^k em U , com $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, tais que

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

Escrevendo $X = \sum_i X_i \partial_i$ e $Y = \sum_j Y_j \partial_j$ em U , obtemos, pelas propriedades de definição das conexões, a expressão

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^n \left(X(Y_k) + \sum_{i,j=1}^n X_i Y_j \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k, \quad (2.8)$$

em U . É provado no Corolário 5.11 de [7], que, se $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$ e a matriz (g^{kl}) é definida como a matriz inversa de (g_{ij}) , então

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \left(\partial_i(g_{jl}) + \partial_j(g_{il}) - \partial_l(g_{ij}) \right). \quad (2.9)$$

Provemos, agora, que a conexão de Levi-Civita do espaço de Lorentz-Minkowski, \mathbb{L}^{n+1} , em suas coordenadas canônicas (x_1, \dots, x_{n+1}) e com sua métrica $\bar{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle$, definida em (2.6), é dada por

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^{n+1} X(Y_i) \partial_i, \quad (2.10)$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{L}^{n+1})$ com $Y = \sum_i Y_i \partial_i$. Realmente, a $C^\infty(\mathbb{L}^{n+1})$ -linearidade em X é óbvia, enquanto que a \mathbb{R} -linearidade em Y e a regra do produto seguem diretamente das propriedades de definição dos vetores tangentes. Isso garante que a expressão, de fato, define uma conexão. Note também que a propriedade de simetria segue diretamente da definição de colchetes de Lie. Sendo $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{L}^{n+1})$ e escrevendo $Z = \sum_j Z_j \partial_j$, temos

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle &= X\left(\sum_{i=1}^n Y_i Z_i - Y_{n+1} Z_{n+1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n Y_i X(Z_i) - Y_{n+1} X(Z_{n+1}) + \sum_{i=1}^n Z_i X(Y_i) - Z_{n+1} X(Y_{n+1}) \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n+1} X(Y_i) \partial_i, \sum_{j=1}^{n+1} Z_j \partial_j \right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{n+1} X(Z_i) \partial_i, \sum_{j=1}^{n+1} Y_j \partial_j \right\rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle \nabla_X Z, Y \rangle. \end{aligned}$$

O resultado, então, segue da unidade da conexão com estas propriedades. Analogamente, prova-se que (2.6) também é expressão para a conexão de Levi-Civita de \mathbb{R}^{n+1} , com sua métrica euclidiana $\hat{g} = (dx_1)^2 + \dots + (dx_{n+1})^2$. Segue que, para a conexão de Levi-Civita de $(\mathbb{R}^{n+1}, \hat{g})$, as funções Γ_{ij}^k são todas identicamente nulas.

Sendo $(M^n, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ novamente uma variedade semi-riemanniana qualquer e dada $f \in C^\infty(M)$, o Teorema de Representação de Riesz nos garante a existência de um campo vetorial ∇f , chamado *gradiente de f* , tal que, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, vale

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f).$$

Sendo $f, g \in C^\infty(M)$, temos

$$\langle \nabla(fg), X \rangle = X(fg) = fX(g) + gX(f) = f\langle \nabla g, X \rangle + g\langle \nabla f, X \rangle = \langle f\nabla g + g\nabla f, X \rangle,$$

e, portanto,

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f. \quad (2.11)$$

Além disso, da mesma maneira encontra-se que o gradiente é \mathbb{R} -linear. Dado $p \in M$ e (E_1, \dots, E_n) um referencial ortonormal em uma vizinhança U de p , (2.7) nos dá que, em U

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i E_i(f) E_i, \quad (2.12)$$

de onde segue que ∇f é suave, uma vez que os coeficientes $\varepsilon_i E_i(f)$ são suaves. Também segue desta expressão que, se f for aplicação constante, então seu gradiente é identicamente nulo.

Considerando $M = \mathbb{L}^{n+1}$, nas notações do parágrafo anterior, temos, portanto,

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \partial_i - \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} \partial_{n+1}. \quad (2.13)$$

Ademais, note que podemos reescrever (2.10) como

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^{n+1} \langle \nabla Y_i, X \rangle \partial_i. \quad (2.14)$$

Seja, agora, $(\overline{M}, \overline{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle, \overline{\nabla})$ uma variedade semi-riemanniana, munida com sua conexão de Levi-Cevita, $\overline{\nabla}$. Dada $M^n \subseteq \overline{M}^{n+k}$, uma subvariedade semi-riemanniana com sua métrica induzida g , iremos mostrar como obter uma conexão em M , a partir de $\overline{\nabla}$, chamada *conexão induzida* e que, em particular, tal conexão induzida será a conexão de Levi-Civita de (M, g) .

Dados $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$ e $p \in M$ mostraremos que faz sentido escrever $\overline{\nabla}_X Y \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$, apesar de X, Y não pertencerem a $\mathfrak{X}(\overline{M})$, nem serem definidas em um aberto de \overline{M} . Na seção anterior, mostramos que, para cada $p \in M$, existe vizinhança V_p de p , em M , e $\overline{X}, \overline{Y}$ extensões suaves para $X|_{V_p}, Y|_{V_p}$, definidas em um aberto U de \overline{M} contendo V_p . Veja que $\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}$ é suave e está definida para todo ponto de U , pelo o que desenvolvemos sobre estender conexões a campos vetoriais definidos em abertos, no começo desta seção. Então, para cada $p \in M$, defina

$$(\overline{\nabla}_X Y)|_{V_p} = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})|_{V_p}.$$

Se estiver bem definido, $\overline{\nabla}_X Y$ será suave, já que é suave em uma vizinhança de cada ponto de M . Para garantir a boa definição, devemos tomar dois pontos $x, y \in M$ e mostrar que, se $V_x \cap V_y \neq \emptyset$, então, para todo $p \in V_x \cap V_y$, $\overline{\nabla}_X Y$, em p , coincide segundo as definições em V_x e em V_y . Isso de fato ocorrerá, pois $(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})_p$ independe das extensões $\overline{X}, \overline{Y}$ escolhidas. Com efeito, pelo que mostramos no começo da seção, $(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})_p$ só depende de $\overline{X}_p = X_p$ e de \overline{Y} em uma curva integral de \overline{X} passando por p . Seja $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ uma curva integral de X , com $\gamma(0) = p$. Diminua ε , se necessário, para que $\text{Im}(\gamma)$ esteja contido na vizinhança de p em que Y e \overline{Y} coincidem. Segue, pela regra da cadeia, que $\overline{\gamma} = \iota \circ \gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \overline{M}$ é curva integral de \overline{X} passando por p . Como $\overline{Y}|_{\text{Im}(\overline{\gamma})} = Y|_{\text{Im}(\gamma)}$, $(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})_p$ só depende de X_p e de Y em uma curva integral de X passando por p , para quaisquer extensões \overline{X} e \overline{Y} como acima.

Apesar de bem definida, $(X, Y) \mapsto \overline{\nabla}_X Y$, para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, não define uma conexão em M , pois não necessariamente $\overline{\nabla}_X Y$ pertence a $\mathfrak{X}(M)$, uma vez que nada nos garante que $(\overline{\nabla}_X Y)_p$ pertence a $T_p M$, para todo $p \in M$. Para lidar com isso, note que, como (M, g) é

subvariedade semi-riemanniana, temos que g_p é produto escalar em T_pM , para cada $p \in M$, de sorte que T_pM é um subespaço não degenerado de $T_p\bar{M}$. Logo, como visto na seção anterior, podemos escrever $T_p\bar{M} = T_pM \oplus T_pM^\perp$. Segue que todo $v \in T_p\bar{M}$ pode ser decomposto, de maneira única, como

$$v = v^\top + v^\perp, \text{ em que } v^\top \in T_pM \text{ e } v^\perp \in T_pM^\perp.$$

Assim, dado $X \in \bar{\mathfrak{X}}(M)$, podemos definir os campos vetoriais X^\top e X^\perp , dados por

$$X^\top|_p = (X_p)^\top \text{ e } X^\perp|_p = (X_p)^\perp,$$

para todo $p \in M$, que, como mostraremos a seguir, serão suaves. Ou seja, $X^\top \in \mathfrak{X}(M)$ e $X^\perp \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, em que $\mathfrak{X}(M)^\perp$ denota o conjunto dos campos vetoriais suaves definidos em M que assumem valores em T_pM^\perp , para cada $p \in M$. Um elemento de $\mathfrak{X}(M)^\perp$ será dito *campo vetorial normal a M*.

Para mostrar que X^\top é suave, para cada $p \in M$, tome (E_1, \dots, E_{n+k}) referencial ortonormal local para \bar{M} , em uma vizinhança de p , que seja adaptado a uma vizinhança mergulhada V de p , em M . Então, por (2.7), temos que, em V ,

$$X = \sum_{i=1}^{n+k} \varepsilon_i \langle X, E_i \rangle E_i \implies X^\top = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle X, E_i \rangle E_i,$$

o que prova o que queríamos, pois os coeficientes $\varepsilon_i \langle X, E_i \rangle$ são suaves. A demonstração de que X^\perp é suave é análoga. Perceba que, sendo $Y \in \bar{\mathfrak{X}}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$, demonstra-se também, utilizando um referencial ortonormal local adaptado e mostrando que são iguais localmente, que $(X + fY)^\perp = X^\perp + fY^\perp$.

Diante disso, estamos aptos a definir a *conexão induzida* por $\bar{\nabla}$ em M :

$$\begin{aligned} D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto D_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^\top. \end{aligned}$$

Passando às extensões dos campos e utilizando a $C^\infty(M)$ -linearidade de $X \longmapsto X^\top$, assim como as propriedades de $\bar{\nabla}$, cálculos diretos nos dão que D , de fato, define uma conexão e que, mais ainda, D é a conexão de Levi-Civita de M , de modo que passaremos a denotá-la por ∇ , em vez de D .

Agora, dada uma aplicação $C^\infty(M)$ -multilinear $Q : \mathfrak{X}(M)^s \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$, será útil ver Q como um $(1, s)$ -tensor, pela identificação $Q \longmapsto \bar{Q} : \mathfrak{X}(M)^* \times \mathfrak{X}(M)^s \longrightarrow C^\infty(M)$, em que

$$\bar{Q}(\theta, X_1, \dots, X_s) = \theta(Q(X_1, \dots, X_s)), \quad (2.15)$$

para todo $\theta \in \mathfrak{X}(M)^*$ e $X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$. Neste caso, podemos ver Q como um operador multilinear definido em cada ponto $p \in M$, por

$$\begin{aligned} Q_p : T_p M^s &\longrightarrow T_p M \\ (v_1, \dots, v_s) &\longmapsto Q_p(v_1, \dots, v_s), \end{aligned}$$

em que $Q_p(v_1, \dots, v_s) = Q(V_1, \dots, V_s)|_p$, para $V_1, \dots, V_s \in \mathfrak{X}(M)$ quaisquer tais que, para todo $i \in \{1, \dots, s\}$, vale $V_i|_p = v_i$. Isso nos permite escrever $\nabla_{X_p} Y$ para designar $(\nabla_X Y)_p$, uma vez que $(X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$ é $C^\infty(M)$ -linear em X .

Tendo isso em mente, podemos definir o *tensor segunda forma fundamental*, por

$$\begin{aligned} \text{II} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp \\ (X, Y) &\longmapsto \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^\perp, \end{aligned}$$

e, dado $N \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ unitário, podemos definir o *tensor de Weingarten associado a N* , por

$$\begin{aligned} A_N : \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ X &\longmapsto -(\bar{\nabla}_X N)^\top. \end{aligned}$$

Novamente, passando às extensões dos campos e aplicando as propriedades das conexões, obtemos a $C^\infty(M)$ -bilinearidade de II e a $C^\infty(M)$ -linearidade de A_N , por meio de cálculos diretos. II e A_N são, portanto, de fato, tensores, pela identificação definida acima. Logo, dado $p \in M$ e $v, w \in T_p M$, faz sentido escrever $A_N(v)$ e $\text{II}(v, w)$. Utilizando a propriedade de simetria de $\bar{\nabla}$ e ∇ , também obtém-se que II é simétrico, ou seja, que para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ temos

$$\text{II}(X, Y) = \text{II}(Y, X).$$

Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$ qualquer e $N \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ unitário, será útil notar que

$$\langle \bar{\nabla}_X N, N \rangle = 0. \quad (2.16)$$

De fato, $\langle N, N \rangle$ é constante, logo $X \langle N, N \rangle = 0$, de onde segue (2.16), já que, pela compatibilidade da conexão com a métrica, temos $X \langle N, N \rangle = 2 \langle \bar{\nabla}_X N, N \rangle$. Daí, no caso particular em que M tem codimensão 1, poderemos escrever, para $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\bar{\nabla}_X N = (\bar{\nabla}_X N)^\top + \varepsilon_N \langle \bar{\nabla}_X N, N \rangle N = (\bar{\nabla}_X N)^\top = -A_N(X), \quad (2.17)$$

em que $\varepsilon_N = \langle N, N \rangle$ é igual a 1 ou -1 .

Mostraremos, agora, que, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, os dois tensores definidos, no parágrafo anterior, são associados pela expressão

$$\langle A_N(X), Y \rangle = \langle \Pi(X, Y), N \rangle, \quad (2.18)$$

devido a qual, podemos concluir que A_N é autoadjunto, uma vez que Π é simétrico. Com efeito,

$$\begin{aligned} \langle \Pi(X, Y), N \rangle &= \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle - \underbrace{\langle \nabla_X Y, N \rangle}_{=0} \\ &= X \underbrace{\langle Y, N \rangle}_{=0} - \langle \bar{\nabla}_X N, Y \rangle \\ &= \langle -(\bar{\nabla}_X N)^\top, Y \rangle - \underbrace{\langle (\bar{\nabla}_X N)^\perp, Y \rangle}_{=0} \\ &= \langle A_N(X), Y \rangle, \end{aligned}$$

em que utilizamos que $Y, \nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$, enquanto que $N, (\bar{\nabla}_X N)^\perp \in \mathfrak{X}(M)^\perp$.

Chegamos ao objetivo desta seção: definir a *curvatura média* de M , dada por

$$H = \frac{1}{n} \text{tr}(A_N),$$

em que $n = \dim M$ e $\text{tr}(A_N)$ denota o traço do tensor A_N . Uma subvariedade semi-riemanniana é dita *máxima*, se for tipo-espaço e sua curvatura média for identicamente nula.

2.3 Tensor Curvatura, a Equação de Gauss e a Equação de Codazzi

Na demonstração do Teorema de Calabi-Bernstein, utilizaremos a Equação de Gauss e uma consequência da Equação de Codazzi que estabelece uma espécie de "simetria" da derivada covariante do tensor de Weingarten, que ocorre dadas certas condições. Para compreender tal resultado, precisamos, inicialmente, definir em $(M, g = \langle \cdot, \cdot \rangle, \nabla)$ o *tensor curvatura*:

$$\begin{aligned} R : \mathfrak{X}(M)^3 &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y, V) &\longmapsto R_{XY}V = \nabla_{[X, Y]}V - \nabla_X \nabla_Y V + \nabla_Y \nabla_X V. \end{aligned}$$

Tal definição é utilizada em [10] e [4], porém o tensor curvatura também pode vir definido por

$$\nabla_X \nabla_Y V - \nabla_Y \nabla_X V - \nabla_{[X, Y]}V, \quad (2.19)$$

como ocorre em [7], havendo apenas uma inversão nos sinais dos termos. É provado, na Proposição 7.3 de [7] (a menos da inversão dos sinais), que R é $C^\infty(M)$ -linear em X e Y ,

assim como é provado na Proposição 2.2 do Capítulo IV de [4], que R é $C^\infty(M)$ -linear em V . Diante disso, segue que R de fato é tensor, pela identificação (2.15). Logo, R também pode ser visto pontualmente como um operador multilinear e faz sentido escrever $R_{xy}v$ para $p \in M$ e $x, y, v \in T_pM$.

Ainda nas notações do parágrafo anterior, perceba que, pela anti-simetria dos colchetes de Lie e pela definição de R , segue diretamente que

$$R_{XY}(\cdot) = -R_{YX}(\cdot).$$

Logo, dado $x \in T_pM$, temos $R_{xx}(\cdot) \equiv 0$. Além disso, sendo $W \in \mathfrak{X}(M)$ e utilizando a compatibilidade da conexão com a métrica algumas vezes, temos que

$$\begin{aligned} \langle R_{XY}V, W \rangle &= \langle \nabla_{[X,Y]}V, W \rangle - \langle \nabla_X \nabla_Y V, W \rangle + \langle \nabla_Y \nabla_X V, W \rangle \\ &= [X, Y] \langle V, W \rangle - \langle V, \nabla_{[X,Y]}W \rangle - X \langle \nabla_Y V, W \rangle + \langle \nabla_Y V, \nabla_X W \rangle \\ &\quad + Y \langle \nabla_X V, W \rangle - \langle \nabla_X V, \nabla_Y W \rangle \\ &= \underbrace{([X, Y] - (XY - YX))}_{=0} \langle V, W \rangle + X \langle V, \nabla_Y W \rangle - \langle \nabla_X V, \nabla_Y W \rangle \\ &\quad - Y \langle V, \nabla_X W \rangle + \langle \nabla_Y V, \nabla_X W \rangle - \langle V, \nabla_{[X,Y]}W \rangle \\ &= -\langle \nabla_{[X,Y]}W, V \rangle + \langle \nabla_X \nabla_Y W, V \rangle - \langle \nabla_Y \nabla_X W, V \rangle \\ &= -\langle R_{XY}W, V \rangle. \end{aligned}$$

Devido a isso, dados $x, y, v \in T_pM$, concluímos que $\langle R_{xy}v, v \rangle = 0$.

Se R for identicamente nulo, (M, g) é dita *flat*. É o caso de $(\mathbb{L}^{n+1}, \bar{g})$. Realmente, sendo (x_1, \dots, x_{n+1}) suas coordenadas canônicas, temos que $\nabla_{\partial_i} \partial_j \equiv 0$ e $[\partial_i, \partial_j] \equiv 0$, para todo $i, j \in \{1, \dots, n+1\}$, devido a (2.10) e uma vez que as componentes dos campos coordenados são funções constantes. Daí, pela $C^\infty(\mathbb{L}^{n+1})$ -trilinearidade de R e pelo fato do sistema de coordenadas de \mathbb{L}^{n+1} ser global, segue que $R_{XY}V = 0$, para todo $X, Y, V \in \mathfrak{X}(\mathbb{L}^{n+1})$.

Voltando para $(M, g = \langle \cdot, \cdot \rangle, \nabla)$ genérica e fixando $p \in M$, vimos na seção 2.1 que, se (e_1, e_2) é uma base qualquer para um plano $\Pi \subseteq T_pM$ (isto é, um subespaço vetorial de dimensão 2), então, Π é não degenerado se, e somente se, a matriz $[\langle e_i, e_j \rangle]_{ij}$ for invertível, ou seja, se, e somente se,

$$\langle e_1, e_1 \rangle \langle e_2, e_2 \rangle - \langle e_1, e_2 \rangle^2 \neq 0.$$

Assim, sendo Π não degenerado, afirmo que o valor

$$K(\Pi) = \frac{\langle R_{e_1 e_2} e_1, e_2 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle \langle e_2, e_2 \rangle - \langle e_1, e_2 \rangle^2} \quad (2.20)$$

independe da base de Π escolhida. Com efeito, considere outra base (b_1, b_2) e escreva

$$b_1 = ae_1 + be_2;$$

$$b_2 = ce_1 + de_2.$$

Suprimindo os termos que serão nulos devido às duas propriedades de R que demonstramos anteriormente, obtemos

$$\begin{aligned} \langle R_{b_1 b_2} b_1, b_2 \rangle &= a^2 d^2 \langle R_{e_1 e_2} e_1, e_2 \rangle + bcad \langle R_{e_2 e_1} e_1, e_2 \rangle + adbc \langle R_{e_1 e_2} e_2, e_1 \rangle + b^2 c^2 \langle R_{e_2 e_1} e_2, e_1 \rangle \\ &= a^2 d^2 \langle R_{e_1 e_2} e_1, e_2 \rangle - 2abcd \langle R_{e_1 e_2} e_1, e_2 \rangle + b^2 c^2 \langle R_{e_1 e_2} e_1, e_2 \rangle \\ &= (ad - bc)^2 \langle R_{e_1 e_2} e_1, e_2 \rangle. \end{aligned}$$

Ademais,

$$\begin{aligned} \langle b_1, b_1 \rangle \langle b_2, b_2 \rangle - \langle b_1, b_2 \rangle^2 &= \\ &= \langle ae_1 + be_2, ae_1 + be_2 \rangle \langle ce_1 + de_2, ce_1 + de_2 \rangle - \langle ae_1 + be_2, ce_1 + de_2 \rangle^2 \\ &= (a^2 \langle e_1, e_1 \rangle + 2ab \langle e_1, e_2 \rangle + b^2 \langle e_2, e_2 \rangle) (c^2 \langle e_1, e_1 \rangle + 2cd \langle e_1, e_2 \rangle + d^2 \langle e_2, e_2 \rangle) \\ &\quad - (ac \langle e_1, e_1 \rangle + (ad + bc) \langle e_1, e_2 \rangle + bd \langle e_2, e_2 \rangle)^2 \\ &= a^2 d^2 \langle e_1, e_1 \rangle \langle e_2, e_2 \rangle + 2abcd \langle e_1, e_2 \rangle^2 + b^2 c^2 \langle e_2, e_2 \rangle \langle e_1, e_1 \rangle \\ &\quad - 2abcd \langle e_1, e_1 \rangle \langle e_2, e_2 \rangle - (a^2 d^2 + b^2 c^2) \langle e_1, e_2 \rangle^2 \\ &= a^2 d^2 + b^2 c^2 (\langle e_1, e_1 \rangle \langle e_2, e_2 \rangle - \langle e_1, e_2 \rangle^2) - 2abcd (\langle e_1, e_1 \rangle \langle e_2, e_2 \rangle - \langle e_1, e_2 \rangle^2) \\ &= (ad - bc)^2 (\langle e_1, e_1 \rangle \langle e_2, e_2 \rangle - \langle e_1, e_2 \rangle^2). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\langle R_{b_1 b_2} b_1, b_2 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle \langle b_2, b_2 \rangle - \langle b_1, b_2 \rangle^2} = \frac{\langle R_{e_1 e_2} e_1, e_2 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle \langle e_2, e_2 \rangle - \langle e_1, e_2 \rangle^2},$$

como queríamos provar. O valor $K(\Pi)$, em (2.20), é chamado *curvatura seccional* de Π em M . Vale mencionar que, se o tensor curvatura for definido por (2.19), a curvatura seccional deve vir definida por

$$\frac{\langle R_{e_1 e_2} e_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle \langle e_2, e_2 \rangle - \langle e_1, e_2 \rangle^2}.$$

Se $\Pi \mapsto K(\Pi)$ é constante, ao variar Π entre todos os planos contidos em espaços tangentes a M (que serão chamados de *planos tangentes a M* , daqui em diante), diremos que M tem *curvatura constante*. Nesse caso, se a curvatura seccional for constante, digamos, igual a $C \in \mathbb{R}$, o Corolário 43 do Capítulo 3 de [10] prova que o tensor curvatura será dado, para $X, Y, V \in \mathfrak{X}(M)$, por

$$R_{XY}V = C(\langle V, X \rangle Y - \langle V, Y \rangle X). \quad (2.21)$$

Em particular, se a curvatura for constante igual a zero, então (M, g) será *flat*.

Agora, dado um tensor $Q : \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ e $V \in \mathfrak{X}(M)$, definidos a *derivada covariante* de Q em relação a V por

$$(\nabla_V Q)(X_1, \dots, X_s) = \nabla_V(Q(X_1, \dots, X_s)) - \sum_{i=1}^s Q(X_1, \dots, \nabla_V X_i, \dots, X_s). \quad (2.22)$$

Mostremos que $\nabla_V Q$ é um $(1, s)$ -tensor, pela identificação (2.15). Realmente, sendo $f \in C^\infty(M)$, temos, pela $C^\infty(M)$ -linearidade de Q , para $k \in \{1, \dots, s\}$ fixado,

$$\begin{aligned} (\nabla_V Q)(X_1, \dots, fX_k, \dots, X_s) &= \\ &= \nabla_V(fQ(X_1, \dots, X_s)) - \sum_{i \neq k} fQ(X_1, \dots, \nabla_V X_i, \dots, X_s) - Q(X_1, \dots, \nabla_V fX_k, \dots, X_s) \\ &= V(f)Q(X_1, \dots, X_s) + f\nabla_V(Q(X_1, \dots, X_s)) - f \sum_{i \neq k} Q(X_1, \dots, \nabla_V X_i, \dots, X_s) \\ &\quad - V(f)Q(X_1, \dots, X_s) - fQ(X_1, \dots, \nabla_V X_k, \dots, X_s) \\ &= f(\nabla_V Q)(X_1, \dots, X_s), \end{aligned}$$

como queríamos.

Considere, agora, $(\bar{M}, \bar{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle, \bar{\nabla})$ uma variedade semi-riemanniana, munida com sua conexão de Levi-Civita, e (M, g, ∇) subvariedade semi-riemanniana de \bar{M} , munida com a métrica e a conexão induzidas. Denotaremos o tensor curvatura de \bar{M} por \bar{R} , enquanto que o tensor curvatura de M será denotado por R . Estamos prontos para enunciar a Equação de Gauss no teorema a seguir.

Teorema 2.1. *Seja M uma subvariedade semi-riemanniana de \bar{M} , como nas notações acima e $X, Y, V, W \in \mathfrak{X}(M)$. Então,*

$$\langle \bar{R}_{XY}V, W \rangle = \langle R_{XY}V, W \rangle + \langle \Pi(X, W), \Pi(Y, V) \rangle - \langle \Pi(X, V), \Pi(Y, W) \rangle.$$

Demonstração. Veja que, pela definição de Π , e utilizando o fato de Π ser sempre normal a M , enquanto que W e $\nabla_X W$ são tangentes a M , obtemos

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y V, W \rangle &= \langle \bar{\nabla}_X \nabla_Y V, W \rangle + \langle \bar{\nabla}_X \Pi(Y, V), W \rangle \\ &= \langle \nabla_X \nabla_Y V, W \rangle + \underbrace{\langle \Pi(X, \nabla_Y V), W \rangle}_{=0} + X \underbrace{\langle \Pi(Y, V), W \rangle}_{=0} - \langle \Pi(Y, V), \bar{\nabla}_X W \rangle \\ &= \langle \nabla_X \nabla_Y V, W \rangle - \underbrace{\langle \Pi(Y, V), \nabla_X W \rangle}_{=0} - \langle \Pi(Y, V), \Pi(X, W) \rangle \\ &= \langle \nabla_X \nabla_Y V, W \rangle - \langle \Pi(X, W), \Pi(Y, V) \rangle. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\langle \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X V, W \rangle = \langle \nabla_Y \nabla_X V, W \rangle - \langle \Pi(Y, W), \Pi(X, V) \rangle.$$

Ademais,

$$\langle \bar{\nabla}_{[X,Y]} V, W \rangle = \langle \nabla_{[X,Y]} V, W \rangle + \underbrace{\langle \Pi([X, Y], V), W \rangle}_{=0} = \langle \nabla_{[X,Y]} V, W \rangle.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}_{XY} V, W \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{[X,Y]} V, W \rangle - \langle \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y V, W \rangle + \langle \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X V, W \rangle \\ &= \langle \nabla_{[X,Y]} V - \nabla_X \nabla_Y V + \nabla_Y \nabla_X V, W \rangle \\ &\quad + \langle \Pi(X, W), \Pi(Y, V) \rangle - \langle \Pi(X, V), \Pi(Y, W) \rangle, \end{aligned}$$

de onde segue o resultado. □

Para o que segue, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, denotaremos

$$\nabla_X^\perp Y = (\bar{\nabla}_X Y)^\perp.$$

Tal expressão define a chamada *conexão normal*, porém, aqui, suas propriedades específicas não serão relevantes e utilizaremos ∇^\perp apenas como uma notação. Sendo $X, Y, V \in \mathfrak{X}(M)$, denotaremos também

$$\Lambda_V \Pi(X, Y) = \nabla_V^\perp (\Pi(X, Y)) - \Pi(\nabla_V X, Y) - \Pi(X, \nabla_V Y).$$

Podemos, agora, enunciar e demonstrar a Equação de Codazzi, no seguinte teorema.

Teorema 2.2. *Seja M uma subvariedade semi-riemanniana de \bar{M} e $X, Y, V \in \mathfrak{X}(M)$. Então,*

$$(\bar{R}_{XY} V)^\perp = -\Lambda_X \Pi(Y, V) + \Lambda_Y \Pi(X, V).$$

Demonstração. Utilizando a linearidade de $X \mapsto X^\perp$ e a definição de Π , obtemos:

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y V)^\perp &= (\bar{\nabla}_X (\Pi(Y, V) + \nabla_Y V))^\perp \\ &= (\bar{\nabla}_X (\Pi(Y, V)))^\perp + (\bar{\nabla}_X \nabla_Y V)^\perp = \nabla_X^\perp (\Pi(Y, V)) + \Pi(X, \nabla_Y V). \end{aligned}$$

E, analogamente,

$$(\bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X V)^\perp = \nabla_Y^\perp (\Pi(X, V)) + \Pi(Y, \nabla_X V).$$

Agora, pela propriedade de simetria da conexão de Levi-Civita ∇ ,

$$(\bar{\nabla}_{[X, Y]} V)^\perp = (\bar{\nabla}_{\nabla_X Y - \nabla_Y X} V)^\perp = (\bar{\nabla}_{\nabla_X Y} V)^\perp - (\bar{\nabla}_{\nabla_Y X} V)^\perp = \Pi(\nabla_X Y, V) - \Pi(\nabla_Y X, V).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (\bar{R}_{XY} V)^\perp &= (\bar{\nabla}_{[X, Y]} V)^\perp - (\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y V)^\perp + (\bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X V)^\perp \\ &= -\nabla_X^\perp (\Pi(Y, V)) + \Pi(\nabla_X Y, V) + \Pi(Y, \nabla_X V) \\ &\quad + \nabla_Y^\perp (\Pi(X, V)) - \Pi(\nabla_Y X, V) - \Pi(X, \nabla_Y V) \\ &= -\Lambda_X \Pi(Y, V) + \Lambda_Y \Pi(X, V). \end{aligned}$$

□

Corolário 2.3. *Seja M uma subvariedade semi-riemanniana de \bar{M} de codimensão 1, $N \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ um campo vetorial normal unitário em M e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Se \bar{M} tiver curvatura constante, então*

$$(\nabla_X A_N)(Y) = (\nabla_Y A_N)(X), \quad (2.23)$$

em que A_N denota o tensor de Weingarten associado a N .

Demonstração. Seja $V \in \mathfrak{X}(M)$ qualquer. Utilizando a definição (2.22), a compatibilidade da conexão com a métrica, o fato de A_N ser autoadjunto e (2.18), obtemos:

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_X A_N)(Y), V \rangle &= \langle \nabla_X (A_N(Y)) - A_N(\nabla_X Y), V \rangle \\ &= X \langle A_N(Y), V \rangle - \underbrace{\langle \nabla_X V, A_N(Y) \rangle}_{= \langle A_N(\nabla_X V), Y \rangle} - \langle A_N(\nabla_X Y), V \rangle \\ &= X \langle \Pi(Y, V), N \rangle - \langle \Pi(Y, \nabla_X V), N \rangle - \langle \Pi(\nabla_X Y, V), N \rangle. \end{aligned}$$

Note que, tendo M codimensão 1 e sendo $\Pi(Y, V)$ normal a M , podemos escrever

$$\Pi(Y, V) = \varepsilon_N \langle \Pi(Y, V), N \rangle N,$$

em que $\varepsilon_N = \langle N, N \rangle$ pode ser 1 ou -1. Dessa maneira, pela compatibilidade da conexão $\bar{\nabla}$ com a métrica e por (2.16), obtemos

$$\begin{aligned} X \langle \Pi(Y, V), N \rangle &= \langle \bar{\nabla}_X (\Pi(Y, V)), N \rangle + \underbrace{\langle \Pi(Y, V), \bar{\nabla}_X N \rangle}_{=0} \\ &= \langle \nabla_X^\perp (\Pi(Y, V)), N \rangle + \underbrace{\langle (\nabla_X (\Pi(Y, V)))^\top, N \rangle}_{=0} \\ &= \langle \nabla_X^\perp (\Pi(Y, V)), N \rangle. \end{aligned}$$

Ficamos, portanto, com

$$\langle (\nabla_X A_N)(Y), V \rangle = \langle \nabla_X^\perp (\Pi(Y, V)) - \Pi(\nabla_X Y, V) - \Pi(Y, \nabla_X V), N \rangle = \langle \Lambda_X \Pi(Y, V), N \rangle.$$

E, analogamente,

$$\langle (\nabla_Y A_N)(X), V \rangle = \langle \Lambda_Y \Pi(X, V), N \rangle.$$

Perceba, porém, que, tendo \bar{M} curvatura constante, segue de (2.21), que $\bar{R}_{XY}V$ será combinação linear de X e Y . Logo, $\bar{R}_{XY}V$ é tangente a M , de modo que $(\bar{R}_{XY}V)^\perp \equiv 0$. Obtemos, então, pela Equação de Codazzi, que

$$\Lambda_X \Pi(Y, V) = \Lambda_Y \Pi(X, V).$$

Assim, $\langle (\nabla_X A_N)(Y), V \rangle = \langle (\nabla_Y A_N)(X), V \rangle$, de onde segue o resultado. \square

2.4 Referenciais Geodésicos

Dada uma variedade semi-riemanniana $(M^n, g = \langle \cdot, \cdot \rangle, \nabla)$ e $p \in M$, um referencial local (E_1, \dots, E_n) em volta de p é dito *geodésico em p* , se $(\nabla_{E_i} E_j)_p = 0$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Nesta seção, demonstraremos que, dado qualquer ponto $p \in M$, sempre existirá um referencial local em volta de p que seja ortonormal e geodésico em p , o que será muito útil no que segue. Para tanto, apresentaremos brevemente os conceitos de *curvas geodésicas*, *transporte paralelo* e *aplicação exponencial*. As demonstrações dos resultados mais usuais desta construção serão omitidas, no entanto, todas podem ser encontradas ao longo dos Capítulos 4 e 5 de [7].

Diante disso, considere, primeiramente, uma variedade suave M e uma curva suave $\gamma: I \rightarrow M$. Um *campo vetorial ao longo de γ* será uma aplicação suave $V: I \rightarrow TM$ tal que $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$ para todo $t \in I$. Denotaremos por $\mathfrak{X}(\gamma)$ o conjunto de tais campos. Um campo

vetorial ao longo de γ é dito *estendível*, se existir $\tilde{V} \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $V(t) = \tilde{V}_{\gamma(t)}$ para todo $t \in I$. Munindo M com uma métrica g e sua conexão de Levi-Civita ∇ , é possível provar que existe único operador

$$\frac{D}{dt} : \mathfrak{X}(\gamma) \longrightarrow \mathfrak{X}(\gamma)$$

que cumpre as propriedades de \mathbb{R} -linearidade,

$$\frac{D}{dt}(aV + bW) = a\frac{DV}{dt} + b\frac{DW}{dt}, \forall V, W \in \mathfrak{X}(\gamma), \forall a, b \in \mathbb{R};$$

regra do produto,

$$\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}, \forall V \in \mathfrak{X}(\gamma), \forall f \in C^\infty(I);$$

e que, se $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ for estendível, então

$$\frac{DV}{dt}(t_0) = \nabla_{\gamma'(t_0)}\tilde{V},$$

para qualquer extensão \tilde{V} de V e $t_0 \in I$. Chamamos DV/dt de *derivada covariante de V* . Derivadas das propriedades acima e da compatibilidade da conexão com a métrica que

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad (2.24)$$

para todo $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$.

Uma curva suave $\gamma: I \longrightarrow M$ é chamada *geodésica*, se $\frac{D\gamma'}{dt} \equiv 0$. Tal expressão escrita em coordenadas locais e o Teorema D.1 de existência, unicidade e suavidade de soluções de EDO's autônomas, apresentado em [8], nos permitem concluir que, dados $p \in M$, $v \in T_pM$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, existe intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ com $t_0 \in I$ e curva geodésica $\gamma: I \longrightarrow M$ tal que $\gamma(t_0) = p$ e $\gamma'(t_0) = v$, e que duas geodésicas com essas mesmas propriedades coincidirão em seu domínio em comum. Chamamos de *maximal* e denotamos por γ_v a única geodésica de ponto inicial p e velocidade inicial v (ou seja, tal que $\gamma_v(0) = p$ e $\gamma_v'(0) = v$) que não puder ser estendida a uma geodésica definida em um intervalo maior. Se toda geodésica maximal de M for definida para todo parâmetro $t \in \mathbb{R}$, diremos que (M, g) é *geodesicamente completa*. Além disso, será útil notar que, devido a (2.24), se γ for geodésica, então $\frac{d}{dt}\langle \gamma', \gamma' \rangle = 0$, de sorte que $|\gamma'|$ é constante. Se $|\gamma'| = 1$, a geodésica é dita *normalizada*. Também será útil definir uma *geodésica quebrada* como uma curva suave por partes cujos segmentos suaves são geodésicas.

Agora, dada uma curva suave $\gamma: I \longrightarrow M$ qualquer, $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ é dito *paralelo*, se $\frac{DV}{dt} \equiv 0$. Assim como no parágrafo anterior, temos que tal expressão escrita em coordenadas

locais e o Teorema de Existência, Unicidade e Suavidade de Soluções de EDO's lineares nos garantem que, dados $t_0 \in I$ e $v \in T_{\gamma(t_0)}M$, existe único $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ paralelo tal que $V(t_0) = v$. Tal V com estas propriedades é chamado *transporte paralelo de v ao longo de γ* . Para o que segue, vale mencionar que, se $\varphi : J \rightarrow I$ for um difeomorfismo, de modo que $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ é uma reparametrização de γ , então a unicidade das soluções de EDO's lineares nos permite concluir que, sendo V transporte paralelo ao longo de γ , $V \circ \varphi$ será transporte paralelo ao longo de $\tilde{\gamma}$. Ademais, note que, dados $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$ paralelos quaisquer, (2.24) nos dá que $\frac{d}{dt}\langle V, V \rangle = 0 = \frac{d}{dt}\langle V, W \rangle$, de sorte que podemos concluir que o transporte paralelo preserva a norma de um vetor e o ângulo entre vetores. Também será útil saber que a seguinte aplicação é um isomorfismo:

$$\begin{aligned} P_a^b : T_{\gamma(a)}M &\longrightarrow T_{\gamma(b)}M \\ v &\longmapsto V(b), \end{aligned}$$

em que $a, b \in I$ e V é o transporte paralelo de v ao longo de γ .

Finalmente, denote por \mathcal{E} o conjunto dos $v \in TM$ tais que γ_v esteja definida em um intervalo contendo $[0, 1]$ e, para cada $p \in M$, denote $\mathcal{E}_p = \mathcal{E} \cap T_pM$. Definimos, então, a *aplicação exponencial* por

$$\begin{aligned} \exp : \mathcal{E} &\longrightarrow M \\ v &\longmapsto \gamma_v(1) \end{aligned}$$

e, para cada $p \in M$, denotamos $\exp|_{\mathcal{E}_p}$ por \exp_p .

Por meio da teoria de fluxos em uma variedade suave e da existência de um campo vetorial em TM cujas curvas integrais são enviadas pela projeção canônica $\pi : TM \rightarrow M$ nas geodésicas de M , é possível provar que \mathcal{E} é subconjunto aberto de TM e que \exp é suave. Além disso, devido a propriedade das geodésicas segundo a qual $\gamma_{cv}(t) = \gamma(ct)$ para todo $c, t \in \mathbb{R}$ tais que algum dos lados da igualdade esteja definido, obtemos que

$$\gamma_v(t) = \exp(tv)$$

e que \mathcal{E}_p é *estrelado* em relação ao 0, ou seja, para todo $v \in \mathcal{E}_p$, o segmento de reta entre 0 e v está contido em \mathcal{E}_p . Utilizando esse último fato, prova-se que $(d\exp_p)_0$ é a aplicação identidade, de modo que é invertível, o que nos permite concluir, pelo Teorema da Aplicação Inversa, que existem vizinhanças $V \subseteq T_pM$ de 0 e $U \subseteq M$ de $\exp_p(0) = p$ tais que $\exp_p|_V : V \rightarrow U$ é

difeomorfismo. A imagem difeomorfa por \exp_p de uma vizinhança de 0 que seja contida em V e estrelada em relação a 0 é chamada *vizinhança normal de p* . Note que, como V é aberto, existem bolas abertas $B_\varepsilon(0)$ contidas em V , para ε suficientemente pequeno. Como bolas centradas em 0 são obviamente estreladas em relação a 0, os conjuntos da forma $\exp_p(B_\varepsilon(0))$ são vizinhanças normais de p chamadas *bolas normais centradas em p* . Utilizando vizinhanças normais em torno de cada ponto, o Lema 32 do Capítulo 3 de [10] prova que, se M for conexa, então qualquer par de pontos de M pode ser ligado por uma geodésica quebrada.

Dado $p \in M$ e $U = \exp_p(B_\varepsilon(0))$ uma bola normal centrada em p , construiremos, agora, um referencial (E_1, \dots, E_n) em U que será ortonormal e geodésico em p . Defina $E_i|_p$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, de modo que $E_1|_p, \dots, E_n|_p$ seja uma base ortonormal de T_pM . Para cada $q \neq p$ em U , defina $E_i|_q$ como o transporte paralelo de $E_i|_p$ ao longo de γ_v no ponto q , em que $v = \exp_p^{-1}(q)$. Note que $\gamma_v(1) = \exp_p(v) = q$, logo, sendo $V(q) \in \mathfrak{X}(\gamma_v)$ o transporte paralelo de $E_i|_p$ ao longo de γ_v , temos que $E_i|_q = V(q)(1)$ para todo $q \in U$. Denotando $V(q)(\cdot)$ por $V(q, \cdot)$, temos que, devido à dependência suave em (t, q) dos parâmetros da EDO do transporte paralelo que dá origem a $V(q)$, podemos concluir que $(t, q) \mapsto V(q, t)$ é suave, logo E_i é suave. Além disso, o fato do transporte paralelo preservar normas e ângulos nos garante que (E_1, \dots, E_n) é ortonormal em todo ponto de U . Por fim, fixado $v \in B_\varepsilon(0)$ e escrevendo $E_i(t)$ para denotar $E_i|_{\gamma_v(t)}$, temos que $t \mapsto E_i(t)$ é campo paralelo ao longo de γ_v . De fato, para $t \in [0, 1]$ fixado, sabemos que $\gamma_{tv}(s) = \gamma_v(ts)$, para $s \in [0, 1]$, ou seja, γ_{tv} é uma reparametrização de γ_v . Logo, para obter o transporte paralelo de $E_i|_p$ ao longo de γ_{tv} , basta reparametrizar $V(\gamma_v(1))$ da mesma maneira, obtendo

$$V(\gamma_{tv}(1), s) = V(\gamma_v(1), ts).$$

Notando que $\gamma_{tv}(1) = \gamma_v(1)$ e fazendo $s = 1$ na expressão acima, obtemos que $E_i(t) = V(\gamma_v(1), t)$, que é paralelo, como queríamos. Assim, para todo $v \in B_\varepsilon(0)$

$$(\nabla_v E_i)_p = \nabla_{\gamma_v'(0)} E_i = \frac{DE_i}{dt}(0) = 0.$$

Como todo elemento de T_pM pode ser escrito como combinação linear de elementos de $B_\varepsilon(0)$, segue que $(\nabla_v E_i)_p = 0$, para todo $v \in T_pM$. Em particular, (E_1, \dots, E_n) é geodésico em p .

2.5 Variedades Riemannianas Completas

Dada uma variedade riemanniana $(M, g = \langle \cdot, \cdot \rangle, \nabla)$ e uma curva regular por partes $\gamma: [a, b] \rightarrow M$, definimos o comprimento de γ como

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

e, dados pontos $p, q \in M$, a distância riemanniana entre p e q , denotada por $d_g(p, q)$, é definida como o ínfimo dos comprimentos das curvas regulares por partes que vão de p até q . O Teorema 2.55 de [7] mostra que, se M for conexa, então d_g é uma métrica sobre M , de modo que (M, d_g) é um espaço métrico cuja topologia proveniente da métrica é igual a topologia de M como variedade. Neste caso, diremos que (M, g) é completa se (M, d_g) for espaço métrico completo. A respeito desta definição, o conhecido Teorema de Hopf-Rinow, provado em [4] como Teorema 2.8 do Capítulo VII, nos dá que

Teorema 2.4. *Se (M, g) é uma variedade riemanniana conexa e $p \in M$, as seguintes afirmações são equivalentes*

- (a) (M, g) é completa.
- (b) (M, g) é geodesicamente completa.
- (c) \exp_p está definida em todo o T_pM

Tal teorema nos permite concluir que (\mathbb{R}^n, \dot{g}) é completa, uma vez que é geodesicamente completa. Realmente, se $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ for dada por $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, teremos

$$\frac{D\gamma'}{dt} = \frac{D}{dt} \left(\sum_{i=1}^n x'_i \partial_i \right) = \sum_{i=1}^n (x''_i \partial_i + x'_i \nabla_{\gamma'} \partial_i).$$

Mas

$$\nabla_{\gamma'} \partial_i = \sum_{j=1}^n x'_j \nabla_{\partial_j} \partial_i = \sum_{j,k=1}^n x'_j \underbrace{\Gamma_{ij}^k}_{=0} \partial_k = 0,$$

de forma que $\frac{D\gamma'}{dt} = \sum_{i=1}^n x''_i \partial_i$. Obtemos, portanto que

$$\gamma \text{ é geodésica} \iff x''_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\} \iff \exists p, v \in \mathbb{R}^n; \gamma(t) = p + vt.$$

Ou seja, as geodésicas de \mathbb{R}^n são as retas parametrizadas com velocidade constante e, analogamente, é possível chegar a mesma conclusão para as geodésicas de \mathbb{L}^{n+1} . Como estas retas estão definidas para todo parâmetro $t \in \mathbb{R}$, fica provado o que queríamos.

Para a demonstração do Teorema de Calabi-Bernstein, nos interessará uma outra caracterização da completude de uma variedade riemanniana. A fim de enunciá-la, diremos que uma aplicação suave $\alpha : [0, T) \rightarrow M$, com $0 < T \leq \infty$, é uma *curva divergente* se para cada compacto $K \subseteq M$ existir $t_0 \in (0, T)$ tal que $\alpha(t) \notin K$, para todo $t_0 < t < T$. Além disso, o *comprimento de uma curva divergente* será dado por

$$L_g(\alpha) = \lim_{s \rightarrow T} \int_0^s |\alpha'(t)| dt.$$

Para a demonstração da caracterização, diremos que um subconjunto $W \subseteq M$ é *uniformemente normal* se existir $\delta > 0$ tal que, para cada $q \in W$, W está contido na bola normal de raio δ e centrada em q . O Lema 6.14 de [7] nos dá que, dados quaisquer $p \in M$ e $U \subseteq M$ vizinhança de p , existe vizinhança uniformemente normal de p que está contida em U .

Podemos, agora, enunciar e provar a seguinte caracterização:

Teorema 2.5. *Uma variedade riemanniana conexa é completa se, e somente se, o comprimento de toda curva divergente for infinito.*

Demonstração. Tome (M, g) uma variedade riemanniana completa e $\alpha : [0, T) \rightarrow M$ uma curva divergente. Segue da completude de (M, d_g) como espaço métrico que, para cada $N \in \mathbb{N}$, as bolas fechadas e limitadas $\bar{B}_N(\alpha(0))$ são conjuntos compactos. Logo, para cada $N \in \mathbb{N}$ existe $t_N \in (0, T)$ tal que $\alpha(t) \notin \bar{B}_N(\alpha(0))$, para todo $t \geq t_N$. Daí, para todo $s > t_N$,

$$\int_0^s |\alpha'(t)| dt \geq \int_0^{t_N} |\alpha'(t)| dt = L_g(\alpha|_{[0, t_N]}) \geq d_g(\alpha(0), \alpha(t_N)) > N.$$

Disso segue que $L_g(\alpha) > N$, para todo $N \in \mathbb{N}$, de sorte que $L(\alpha) = \infty$.

Agora, pela contrapositiva, suponha que a variedade riemanniana conexa (M, g) não seja completa. Mostraremos que existe uma curva divergente com comprimento finito. Para isso, note que, pelo Teorema de Hopf-Rinow, existe uma geodésica $\gamma : [0, T) \rightarrow M$ que não pode ser estendida para além de T . Como $|\gamma'|$ é constante, $L_g(\gamma)$ é finito. A menos de reparametrização, podemos supor que γ é normalizada.

Mostraremos que γ é divergente. Realmente, supondo que γ não é divergente, existe compacto K tal que para todo $t \in (0, T)$ existe $t < t_0 < T$ tal que $\gamma(t_0) \in K$. Isto nos garante que existe sequência $(t_n)_{n \geq 1}$ em $[0, T)$ tal que $t_n \rightarrow T$ e $(\gamma(t_n))_{n \geq 1}$ é sequência em K . Uma vez que M é espaço métrico, a menos de passagem a uma subsequência, podemos supor que existe $p \in K$ tal que $\gamma(t_n) \rightarrow p$. Tome W vizinhança uniformemente normal para p e seja $\delta > 0$ tal que W está contido em toda bola normal de raio δ e centro em $q \in W$. Isso significa que,

para qualquer ponto $q \in M$, as geodésicas normalizadas de ponto inicial em q estão definidas pelo menos no intervalo $(-\delta, \delta)$. Tome, então, N suficientemente grande tal que $\gamma(t_N) \in W$ e $T - t_N < \delta$, e seja $\beta : (-\delta, \delta) \rightarrow M$ a geodésica com ponto inicial em $\gamma(t_N)$ e velocidade inicial $\gamma'(t_N)$. Considerando a reparametrização $\tilde{\beta} : (-\delta + t_N, \delta + t_N) \rightarrow M$, com $\tilde{\beta}(t) = \beta(t - t_N)$, sabemos, pelo Teorema de Existência e Unicidade de Geodésicas, que γ e $\tilde{\beta}$ coincidem em seu domínio em comum. Diante disso, a curva $\tilde{\gamma} : [0, t_N + \delta) \rightarrow M$ dada por

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t), & \text{se } t \in [0, t_N) \\ \tilde{\beta}(t), & \text{se } t \in [t_N, \delta + t_N) \end{cases}$$

estende γ e é suave. Ademais, segue diretamente que $\tilde{\gamma}$ é geodésica, o que é absurdo. Fica, portanto, provado o que queríamos. \square

2.6 Subvariedades Totalmente Geodésicas

Seja $(\bar{M}^{n+k}, \bar{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle, \bar{\nabla})$ uma variedade semi-riemanniana, munida com sua conexão de Levi-Civita, e (M^n, g, ∇) subvariedade semi-riemanniana de \bar{M} , munida com a métrica e a conexão induzidas. Diremos que M é *totalmente geodésica* se seu operador segunda forma fundamental for identicamente nulo. Tal definição nos interessará, pois nos dará ferramentas para garantir que o gráfico de uma função solução da equação das superfícies máximas esteja contido em um plano, de onde seguirá que a função é afim. Veja que, se M tiver codimensão 1, temos, por (2.18),

$$\Pi(X, Y) = \varepsilon_N \langle \Pi(X, Y), N \rangle N = \varepsilon_N \langle A_N(X), Y \rangle N,$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, de onde segue que M é totalmente geodésica, se o operador de Weingarten for identicamente nulo.

Tomando $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva suave, $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$, $p \in \text{Im}(\gamma)$ e (x_1, \dots, x_n) um sistema de coordenadas de M em uma vizinhança U de p , podemos escrever $V = \sum_i V_i \partial_i|_\gamma$ em U . Assim, sendo $\bar{D}V/dt$ a derivada covariante de V em relação à $\bar{\nabla}$, temos, em p ,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{D}V}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left(V_i' \partial_i|_\gamma + V_i \bar{\nabla}_{\gamma'} \partial_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (V_i' \partial_i|_\gamma + V_i \nabla_{\gamma'} \partial_i) + \Pi \left(\gamma', \sum_{i=1}^n V_i \partial_i|_\gamma \right) = \frac{DV}{dt} + \Pi(\gamma', V). \end{aligned}$$

Como a expressão obtida acima é válida para todo ponto da imagem de γ , temos que, se M for totalmente geodésica, então todo campo ao longo de γ que for paralelo em M também será

paralelo em \bar{M} . Em particular, toda geodésica de M também será geodésica de \bar{M} e, dado v vetor tangente a M em algum ponto da imagem de γ , o transporte paralelo de v ao longo de γ será o mesmo em M e em \bar{M} .

Podemos, agora, provar o seguinte resultado, que será o passo final para a demonstração do Teorema de Calabi-Bernstein:

Teorema 2.6. *Sejam M e N subvariedades tipo-espaço totalmente geodésicas de uma variedade semi-riemanniana \bar{M} . Se M for conexa, N for completa e se houver um ponto $p \in M \cap N$ em que $T_p M = T_p N$, então $M \subseteq N$.*

Demonstração. Considere $q \in M$. Como M é conexa, existe geodésica quebrada ligando p a q . Provaremos que cada segmento geodésico desta geodésica quebrada está contido em N , de modo que, em particular, $q \in N$.

Suponha, inicialmente, que p e q possam ser ligados por apenas um segmento geodésico, digamos $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$. Como $T_p M = T_p N$, temos que $v = \alpha'(0) \in T_p N$. Logo, existe γ_v geodésica maximal em N de velocidade inicial igual a v . Como M e N são totalmente geodésicas, α e γ_v são geodésicas em \bar{M} de velocidade inicial v . Pela unicidade das geodésicas, segue que α e γ_v coincidem em seu domínio em comum. Porém, uma vez que N é completa e já que subvariedades tipo-espaço podem ser vistas como variedades riemannianas, segue do Teorema de Rinow-Hopf que γ_v está definida na reta real inteira, de modo que o domínio de α necessariamente está contido no domínio de γ_v . Obtemos, portanto, que $\text{Im } \alpha \subseteq N$, como queríamos.

Agora, se forem necessários mais de um segmentos geodésico para ligar p a q , basta aplicar indutivamente o argumento anterior para cada segmento. No entanto, para que isso funcione, precisamos garantir que $T_q M = T_q N$, quando p e q puderem ser ligados por apenas um segmento de geodésica. Isso será consequência do fato de que o transporte paralelo sobre α de um vetor tangente a M e a N será o mesmo em M e em N , uma vez que o transporte paralelo em cada subvariedade precisa coincidir com o transporte paralelo em \bar{M} . Assim, uma vez que $P_0^1(\alpha)$ é isomorfismo, temos $T_q N = P_0^1(\alpha)(T_p N) = P_0^1(\alpha)(T_p M) = T_q M$. \square

2.7 Funções Harmônicas e o Teorema de Liouville

Seja $(M^n, g = \langle \cdot, \cdot \rangle, \nabla)$ uma variedade riemanniana e dados $X \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$, considere a seguinte aplicação linear

$$\begin{aligned} D_p : T_p M &\longrightarrow T_p M \\ v &\longmapsto \nabla_v X. \end{aligned}$$

Definimos, então, a função $\operatorname{div} X$, chamada *divergência* de X , por

$$\operatorname{div} X(p) = \operatorname{tr}(D_p).$$

Afirmo que $\operatorname{div} X$ é suave. De fato, para cada $p \in M$, basta tomar (E_1, \dots, E_n) referencial ortonormal em uma vizinhança U de p e notar que, em U , temos

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle, \quad (2.25)$$

que é a soma de funções suaves. Mais ainda, aplicando a compatibilidade da conexão com a métrica, na expressão acima, obtemos

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n E_i \langle X, E_i \rangle - \langle \nabla_{E_i} E_i, X \rangle, \quad (2.26)$$

que nos será útil mais adiante. Da expressão (2.25) também obtemos que div é \mathbb{R} -linear. Dada $f \in C^\infty(M)$, veja que, por (2.25) e por (2.12), temos que, em p ,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(fX) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} fX, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle E_i(f)X + f \nabla_{E_i} X, E_i \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n E_i(f)E_i, X \right\rangle + f \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle \\ &= \langle \nabla f, X \rangle + f \operatorname{div} X. \end{aligned}$$

Uma vez que p foi escolhido arbitrariamente, obtemos que

$$\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + \langle \nabla f, X \rangle. \quad (2.27)$$

Agora, sendo $M = \mathbb{R}^n$, com suas coordenadas canônicas (x_1, \dots, x_n) , e munido com a métrica Euclidiana tradicional e $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, dado por $X = \sum_i X_i \partial_i$, temos que

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i}. \quad (2.28)$$

Realmente, tal expressão segue diretamente de (2.26) e dos fatos de que $\nabla_{\partial_i} \partial_j \equiv 0$ e $\langle X, \partial_i \rangle = X_i$, para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Voltando ao caso geral $(M^n, g = \langle \cdot, \cdot \rangle, \nabla)$, dada $f \in C^\infty(M)$, definimos o *laplaciano* de f como a função suave

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f).$$

Da \mathbb{R} -linearidade do gradiente e da divergência, segue que o laplaciano também é \mathbb{R} -linear.

Diremos que f é *harmônica*, quando $\Delta f \equiv 0$.

Dado $p \in M$, se (E_1, \dots, E_n) é um referencial ortonormal em uma vizinhança U de p , segue diretamente de (2.26) e da definição de gradiente que, em U ,

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \left(E_i(E_i(f)) - (\nabla_{E_i} E_i) f \right). \quad (2.29)$$

Se tomarmos o referencial acima sendo geodésico em p , em particular, teremos

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^n E_i|_p(E_i(f)). \quad (2.30)$$

Note que em \mathbb{R}^n , $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ é um referencial global ortonormal e geodésico em todo ponto em relação a conexão de Levi-Civita, de modo que, se $f \in C^\infty(U)$ para $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, então

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}. \quad (2.31)$$

Agora, seja I um intervalo aberto e suponha que $\operatorname{Im}(f) \subseteq I$. Se $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave, então o laplaciano de $\psi \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por

$$\Delta(\psi \circ f) = (\psi'' \circ f) |\nabla f|^2 + (\psi' \circ f) \Delta f. \quad (2.32)$$

De fato, tomando $p \in M$ e um referencial ortonormal local e geodésico em p , como nas notações

acima, podemos escrever, por (2.30), em p

$$\begin{aligned}\nabla(\psi \circ f) &= \sum_{i=1}^n E_i(E_i(\psi \circ f)) \\ &= \sum_{i=1}^n E_i((\psi' \circ f)E_i(f)) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(E_i(\psi' \circ f)E_i(f) + (\psi' \circ f)E_i(E_i(f)) \right) \\ &= (\psi'' \circ f) \sum_{i=1}^n (E_i(f))^2 + (\psi' \circ f) \sum_{i=1}^n E_i(E_i(f)).\end{aligned}$$

Note que, de (2.12) segue que

$$|\nabla f|^2 = \langle \nabla f, \nabla f \rangle = \sum_{i=1}^n (E_i(f))^2.$$

Fica, então, provado o que queríamos, uma vez que p foi escolhido arbitrariamente.

Na demonstração do Teorema de Calabi-Bernstein, será construída uma função harmônica positiva que será provada constante por meio do resultado que apresentaremos a seguir. Para tal resultado, precisaremos do chamado Teorema de Liouville, cuja demonstração pode ser encontrada em [6], em que é referido como Teorema 3.4.3. Para enunciá-lo, precisamos dar sentido ao termo *função holomorfa*, que se refere a funções da forma

$$\begin{aligned}f : U &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x + iy = z &\longmapsto f(z) = u(x, y) + iv(x, y),\end{aligned}$$

em que $U \subseteq \mathbb{C}$ é um aberto e u, v são funções C^1 que assumem valores reais. Diremos que f é holomorfa se u e v satisfizerem as equações

$$u_x = v_y \quad \text{e} \quad u_y = -v_x.$$

Enunciemos, então o Teorema de Liouville:

Teorema 2.7. *Se uma função $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa e limitada, então f é constante.*

Para a prova de Calabi-Bernstein, utilizaremos a seguinte consequência:

Corolário 2.8. *Se $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é harmônica e positiva, então u é constante.*

Demonstração. Defina $v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$v(x, y) = - \int_0^x u_y(t, 0) dt + \int_0^y u_x(x, s) ds.$$

Veja que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $v_y = u_x$. Além disso, também pelo Teorema Fundamental do Cálculo e pelo Teorema da Derivação Sob o Sinal de Integral, temos

$$v_x(x, y) = -u_y(x, 0) + \int_0^y u_{xx}(x, s) ds.$$

Usando (2.31) e o fato de que u é harmônica, obtemos $u_{xx} = -u_{yy}$, e, pelo Teorema Fundamental do Cálculo novamente, $\int_0^y u_{yy}(x, s) ds = u_y(x, y) - u_y(x, 0)$. Disto segue que $v_x = -u_y$. Temos, então, que a função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f = u + iv$ é holomorfa. Sendo $g = e^{-f}$, temos g holomorfa e

$$|g| = \frac{1}{e^u} \cdot \underbrace{|\operatorname{cis}(-v)|}_{=1} < 1,$$

de modo que, pelo Teorema de Liouville, g é constante, logo f é constante, de sorte que u é constante. \square

2.8 Mudanças Conformes de Métrica

Diremos que duas métricas riemannianas g e \tilde{g} definidas em uma mesma variedade suave M^n são *conformes*, quando existir $h \in C^\infty(M)$ tal que $\tilde{g} = e^{2h}g$. Nesta seção, encontraremos expressões para a conexão de Levi-Civita e para o gradiente nesta nova métrica \tilde{g} . Considerando o caso $n = 2$, encontraremos também a expressão para o laplaciano em \tilde{g} .

Denote por $\tilde{\nabla}$ e ∇ as conexões de Levi-Civita de (M, \tilde{g}) e de (M, g) , respectivamente, e tome coordenadas locais (x_1, \dots, x_n) em uma vizinhança U de um ponto $p \in M$. Escrevendo

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k \quad \text{e} \quad \tilde{\nabla}_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \tilde{\Gamma}_{ij}^k \partial_k,$$

temos, por (2.9), que

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ij}^k &= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n e^{-2h} g^{kl} \left(\partial_i(e^{2h} g_{jl}) + \partial_j(e^{2h} g_{il}) - \partial_l(e^{2h} g_{ij}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n e^{-2h} g^{kl} \left(e^{2h} (\partial_i(g_{jl}) + \partial_j(g_{il}) - \partial_l(g_{ij})) + (g_{jl} \partial_i(e^{2h}) + g_{il} \partial_j(e^{2h}) - g_{ij} \partial_l(e^{2h})) \right) \\ &= \Gamma_{ij}^k + \sum_{l=1}^n g^{kl} \left((\partial_i h) g_{jl} + (\partial_j h) g_{il} - (\partial_l h) g_{ij} \right) \\ &= \Gamma_{ij}^k + (\partial_i h) \delta_j^k + (\partial_j h) \delta_i^k - \sum_{l=1}^n g^{kl} (\partial_l h) g_{ij}. \end{aligned}$$

Assim, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e escrevendo $X = \sum_i X_i \partial_i$ e $Y = \sum_j Y_j \partial_j$ em U , temos, por (2.8), que no ponto p vale

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X Y &= \sum_{k=1}^n \left(X(Y_k) + \sum_{i,j=1}^n X_i Y_j \tilde{\Gamma}_{ij}^k \right) \partial_k \\ &= \nabla_X Y + \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n X_i (\partial_i h) Y_k + \sum_{j=1}^n Y_j (\partial_j h) X_k - \sum_{l=1}^n g^{kl} (\partial_l h) \sum_{i,j=1}^n g(X_i \partial_i, Y_j \partial_j) \right) \partial_k \\ &= \nabla_X Y + \sum_{k=1}^n \left(X(h) Y_k + Y(h) X_k - g(X, Y) \sum_{l=1}^n g^{kl} (\partial_l h) \right) \partial_k.\end{aligned}$$

Afirmo que $\nabla h = \sum_k (\sum_l g^{kl} (\partial_l h)) \partial_k$. Com efeito, escrevendo $\nabla h = \sum_i a_i \partial_i$, em que as a_i 's são funções suaves em U , temos, pela definição de gradiente, que

$$\partial_l h = g(\nabla h, \partial_l) = \sum_{i=1}^n a_i g_{il} \implies \sum_{l=1}^n g^{kl} (\partial_l h) = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{l=1}^n g^{kl} g_{il} = \sum_{i=1}^n a_i \delta_i^k = a_k,$$

de onde segue o resultado.

Diante disso, obtemos, no ponto p ,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(h)Y + Y(h)X - g(X, Y)\nabla h, \quad (2.33)$$

que vale globalmente, já que p foi escolhido arbitrariamente.

Agora, dado $f \in C^\infty(M)$, denotemos por $\tilde{\nabla} f$ o gradiente de f na métrica \tilde{g} . Seja (E_1, \dots, E_n) um referencial local ortonormal na métrica \tilde{g} e definido em um aberto U . Note que $(e^h E_1, \dots, e^h E_n)$ é referencial local ortonormal na métrica g . De fato,

$$g(e^h E_i, e^h E_j) = e^{2h} g(E_i, E_j) = \tilde{g}(E_i, E_j) = \delta_j^i.$$

Dessa maneira, por (2.12), temos, em U ,

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n e^h E_i(f) e^h E_i = e^{2h} \sum_{i=1}^n E_i(f) E_i = e^{2h} \tilde{\nabla} f.$$

Suponha, agora, que o referencial (E_1, \dots, E_n) do parágrafo anterior seja geodésico em um ponto $p \in U$ em relação à conexão de Levi-Civita de (M, \tilde{g}) . Então, como $\tilde{\nabla}_{E_i} E_i$ se anula em p , teremos, por (2.33), que, no ponto p , vale

$$\nabla_{E_i} E_i = e^{-2h} \nabla h - 2E_i(h)E_i.$$

Considere, agora, que a dimensão da variedade M é $n = 2$. Para encontrar uma expressão para o laplaciano $\tilde{\Delta} f$ de f na métrica \tilde{g} , utilizaremos a expressão encontrada no

parágrafo anterior, (2.29) e (2.30) de maneira que

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \sum_{i=1}^2 \left(e^h E_i(e^h E_i(f)) - (\nabla_{e^h E_i} e^h E_i)(f) \right) \\
&= \sum_{i=1}^2 \left(e^h E_i(e^h) E_i(f) + e^{2h} E_i(E_i(f)) - e^h E_i(e^h) E_i(f) - e^{2h} (\nabla_{E_i} E_i)(f) \right) \\
&= e^{2h} \tilde{\Delta} f - 2 \nabla h(f) + 2 e^{2h} \sum_{i=1}^2 E_i(h) E_i(f) \\
&= e^{2h} \tilde{\Delta} f + 2 \underbrace{(e^{2h} \tilde{\nabla} h(f) - \nabla h(f))}_{=0} \\
&= e^{2h} \tilde{\Delta} f.
\end{aligned}$$

Pela arbitrariedade da escolha de p , obtemos que a expressão vale globalmente. Em particular, fazendo $\Delta f \equiv 0$ na expressão, obtemos que a propriedade de ser função harmônica é invariante sob mudanças conformes de métrica.

2.9 Superfícies Parametrizadas

Dada uma variedade riemanniana $(M^n, g = \langle \cdot, \cdot \rangle, \nabla)$ e um conjunto conexo $A \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $U \subseteq A \subseteq \bar{U}$, para um $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto, e tal que ∂A seja uma curva suave por partes com ângulos dos vértices distintos de π , chamamos de *superfície parametrizada em M* uma aplicação suave $f : A \rightarrow M$. Um *campo vetorial ao longo de s* é uma aplicação $V : A \rightarrow TM$ tal que $V(q) = T_{f(q)}M$ para todo $q \in A$. Denotaremos por $\mathfrak{X}(f)$ o conjunto de tais campos.

Nessa seção, apresentaremos resultados sobre campos vetoriais ao longo de superfícies paramétricas que serão úteis na prova do Teorema de Calabi-Bernstein. Por simplicidade, tomaremos $A = J \times I$, em que J e I são intervalos, o que será suficiente para o que apresentaremos nesta dissertação.

Fixado o ponto $(s_0, t_0) \in A$ e coordenadas (s, t) em \mathbb{R}^2 , consideremos as curvas $f_{s_0} : I \rightarrow M$ dada por $t \mapsto f(s_0, t)$ e $f^{(t_0)} : J \rightarrow M$ dada por $s \mapsto f(s, t_0)$. Definimos, então, os seguintes campos vetoriais ao longo de f :

$$\frac{\partial f}{\partial s}(s_0, t_0) = (f^{(t_0)})'(s_0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial t}(s_0, t_0) = (f_{s_0})'(t_0).$$

Dado $V \in \mathfrak{X}(f)$, podemos definir, analogamente, $V_{s_0} : I \rightarrow M$ por $t \mapsto V(s_0, t)$ e $V^{(t_0)} : J \rightarrow M$ por $s \mapsto V(s, t_0)$. Veja que

$$V_{s_0} \in \mathfrak{X}(f_{s_0}) \quad \text{e} \quad V^{(t_0)} \in \mathfrak{X}(f^{(t_0)}).$$

Logo, faz sentido definir os operadores *derivada covariante*

$$\frac{D}{ds}, \frac{D}{dt} : \mathfrak{X}(f) \longrightarrow \mathfrak{X}(f)$$

tais que

$$\frac{DV}{\partial s}(s_0, t_0) = \frac{DV^{(t_0)}}{dt}(s_0) \quad e \quad \frac{DV}{\partial t}(s_0, t_0) = \frac{DV_{s_0}}{dt}(t_0).$$

Utilizando coordenadas locais e a simetria da conexão de Levi-Civita ∇ , prova-se, por cálculos diretos, que

$$\frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (2.34)$$

como feito no Lema 3.4 do Capítulo III de [4].

Também por cálculos diretos e utilizando um sistema de coordenadas locais, o Lema 4.1 do Capítulo IV de [4] mostra que

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V = R_{\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}} V, \quad (2.35)$$

em que R representa o tensor curvatura.

2.10 Preliminares Topológicos

Sejam E, X espaços topológicos e $\pi : E \longrightarrow X$ uma aplicação contínua. Chamaremos de *caminho* em X uma aplicação $\alpha : [0, l] \longrightarrow X$ que é apenas contínua. Um caminho $\tilde{\alpha} : [0, l] \longrightarrow E$ é dito *levantamento de α por π partindo de $\tilde{\alpha}(0)$* , se $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$. Diremos que π tem *propriedade de levantamento de caminhos* se dado caminho $\alpha : [0, l] \longrightarrow X$ e $q \in E$ tal que $\pi(q) = \alpha(0)$, existe levantamento de α partindo de q .

Provemos que se π for homeomorfismo local, então temos uma espécie de unicidade dos levantamentos de caminhos. Mais precisamente, dado um caminho $\alpha : [0, l] \longrightarrow X$, se $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} : [0, l] \longrightarrow E$ são levantamentos de α que coincidem em algum $t \in [0, l]$, então $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$. Realmente, sendo $\mathcal{A} = \{t \in [0, l]; \tilde{\alpha}(t) = \tilde{\beta}(t)\}$, temos $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Uma vez que $[0, l]$ é conexo, basta mostrar que \mathcal{A} é aberto e fechado em $[0, l]$, e teremos que $\mathcal{A} = [0, l]$, de onde segue o resultado. Para o primeiro, tome $b \in \mathcal{A}$ e seja U uma vizinhança de $\tilde{\alpha}(b) = \tilde{\beta}(b)$ em E tal que $\pi|_U$ é homeomorfismo. Sendo $V = \tilde{\alpha}^{-1}(U) \cap \tilde{\beta}^{-1}(U)$ vizinhança de b em $[0, l]$, temos $\tilde{\alpha}(V) \subseteq U$ e $\tilde{\beta}(V) \subseteq U$. Como $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha = \pi \circ \tilde{\beta}$ e $\pi|_U$ é injetiva, segue que $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$ em V , de forma que $V \subseteq \mathcal{A}$. De maneira análoga prova-se que, dado $b \in [0, l] \setminus \mathcal{A}$, existe uma vizinhança de b contida em $[0, l] \setminus \mathcal{A}$.

Dados dois caminhos $\alpha_0 : [0, l] \rightarrow X$ e $\alpha_1 : [0, l] \rightarrow X$ ligando os pontos $\alpha_0(0) = p = \alpha_1(0)$ e $\alpha_0(l) = q = \alpha_1(l)$. Uma *homotopia* entre α_0 e α_1 é uma aplicação contínua $H : [0, l] \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que

$$(a) \ H(s, 0) = \alpha_0(s), \forall s \in [0, l];$$

$$(b) \ H(s, 1) = \alpha_1(s), \forall s \in [0, l];$$

$$(c) \ H(0, t) = p, \forall t \in [0, 1];$$

$$(d) \ H(l, t) = q, \forall t \in [0, 1].$$

Quando existir homotopia entre α_0 e α_1 , diremos que estes dois caminhos são *homotópicos*. Além disso, denotaremos por H_t a aplicação $s \mapsto H(s, t)$, para t fixado.

Diremos que X é *simplesmente conexo* se for conexo por caminhos e dados dois pontos $p, q \in X$, quaisquer caminhos ligando p e q são homotópicos. Equivalentemente, X é simplesmente conexo se todo caminho fechado $\alpha : [0, l] \rightarrow X$, ou seja, com $\alpha(0) = \alpha(l) = p$, for homotópico ao caminho constante $t \mapsto p$, com $t \in [0, l]$.

Afirmo agora que, se X for conexo por caminhos, π for homeomorfismo local com a propriedade de levantamento de caminhos, $\alpha_0, \alpha_1 : [0, l] \rightarrow X$ forem caminhos homotópicos ligando p e q , e $\tilde{p} \in E$ for tal que $\pi(\tilde{p}) = p$, então os levantamentos de α_0 e α_1 partindo de \tilde{p} , que denotaremos por $\tilde{\alpha}_0$ e $\tilde{\alpha}_1$, são também homotópicos. Sendo $H : [0, l] \times [0, 1] \rightarrow X$ a homotopia entre α_0 e α_1 , o primeiro passo é provar que existe levantamento $\tilde{H} : [0, l] \times [0, 1] \rightarrow E$ de H tal que $\tilde{H}_0 = \tilde{\alpha}_0$. O Teorema 11.13 de [9] prova justamente isto, porém sendo π uma aplicação de recobrimento, em vez de um homeomorfismo local com propriedade de levantamento, e sendo α_0 e α_1 aplicações contínuas definidas em um espaço topológico localmente conexo, em vez de caminhos. Apesar dessas diferenças, a demonstração do Teorema 11.13 pode ser adaptada às hipóteses aqui colocadas da maneira que apresentaremos agora.

Como $[0, l]$ é conexo, em particular, é localmente conexo e nada há o que se adaptar nesse sentido. Agora, dado $x \in X$ qualquer e sabendo que X é conexo por caminhos, podemos tomar um caminho $c : [0, 1] \rightarrow X$ que liga p a x . Pela propriedade de levantamento de caminhos de π , existe levantamento \tilde{c} de c , de forma que $\pi(\tilde{c}(1)) = c(1) = x$. Isso prova que π é sobrejetiva. Sabendo disso, podemos substituir as vizinhanças uniformemente cobertas (evenly covered neighborhoods) de pontos de X , utilizadas na prova do Teorema 11.13, por vizinhanças que são imagem homeomorfa por π de um aberto de E . Dado $x \in X$, basta tomar $\tilde{x} \in E$ tal que

$\pi(\tilde{x}) = x$, escolher \tilde{U} vizinhança de \tilde{x} tal que $\pi|_{\tilde{U}}$ seja homeomorfismo e considerar a vizinhança $U = \pi(\tilde{U})$ de x . Além disso, em vez de usar uma seção local (local section) definida em uma vizinhança uniformemente coberta, basta utilizar $\pi|_{\tilde{U}}^{-1}$. Sabendo também que, para a unicidade dos levantamentos, basta que π seja homeomorfismo local, não sendo necessário ser aplicação de recobrimento, estas modificações citadas acima são suficientes para adaptar a demonstração do teorema citado.

Agora, precisamos mostrar que \tilde{H} é homotopia entre $\tilde{\alpha}_0$ e $\tilde{\alpha}_1$. Por ser levantamento, segue que é contínua. Veja também que, para $t \in [0, 1]$, $t \mapsto \tilde{H}(0, t)$ é levantamento de $t \mapsto H(0, t) = p$ partindo de $\tilde{H}(0, 0) = \tilde{\alpha}_0(0) = \tilde{p}$, assim como o caminho constante $t \mapsto \tilde{p}$. Pela unicidade dos levantamentos, segue que $\tilde{H}(0, t) = \tilde{p}$, para todo $t \in [0, 1]$. Analogamente, \tilde{H}_1 é levantamento de $H_1 = \alpha_1$ partindo de $\tilde{H}(0, 1) = \tilde{p}$. Pela unicidade dos levantamentos novamente, temos que $\tilde{H}_1 = \tilde{\alpha}_1$. Por fim, para t variando em $[0, 1]$, $t \mapsto \tilde{H}(l, t)$ é levantamento de $t \mapsto H(l, t) = q$ passando por $\tilde{H}(l, 1) = \tilde{\alpha}_1(l)$, assim como o caminho constante $t \mapsto \tilde{\alpha}_1(l)$, uma vez que $\pi(\tilde{\alpha}_1(l)) = \alpha_1(l) = q$. Portanto, pela unicidade dos levantamentos $\tilde{H}(l, t) = \tilde{\alpha}_1(l)$, para todo $t \in [0, 1]$ e, em particular, $\tilde{\alpha}_0(l) = \tilde{H}(l, 0) = \tilde{\alpha}_1(l)$. Fica, então, provado o que queríamos.

Trocando, agora, os espaços topológicos X e E por variedades suaves M e N , diremos que a aplicação suave $\pi : M \rightarrow N$ tem *propriedade de levantamento de curvas suaves* se, dada uma curva suave $c : [0, 1] \rightarrow N$ e $q \in M$ com $\pi(q) = c(0)$, existe levantamento suave $\tilde{c} : [0, 1] \rightarrow M$ para c , ou seja, \tilde{c} suave tal que $\pi \circ \tilde{c} = c$. Podemos, finalmente, enunciar e provar o seguinte resultado, que utilizaremos na prova do Teorema de Calabi- Bernstein, para superfícies máximas:

Teorema 2.9. *Sejam M e N variedades suaves e $\pi : M \rightarrow N$ um difeomorfismo local com propriedade de levantamento para curvas suaves. Se M for conexo por caminhos e N for simplesmente conexo, então π é difeomorfismo global.*

Demonstração. Seja $\tilde{p} \in M$ e $p = \pi(\tilde{p})$. Dado qualquer $x \in N$, existe curva suave por partes $c : [0, 1] \rightarrow N$ ligando p e x , uma vez que N é conexa por caminhos. Tomando, então, os levantamentos de cada segmento suave de c de forma indutiva, de modo que o ponto final de um levantamento seja o ponto inicial do seguinte, obtemos um levantamento suave por partes \tilde{c} partindo de \tilde{p} e com $\pi(\tilde{c}(1)) = c(1) = x$. Isso prova que π é sobrejetiva.

Resta, então, provar a injetividade. Sejam $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2 \in M$ tais que $\pi(\tilde{p}_1) = \pi(\tilde{p}_2) = p$. Uma vez que M é conexo por caminhos, existe caminho $\tilde{c}_0 : [0, 1] \rightarrow M$ ligando \tilde{p}_1 a \tilde{p}_2 . Como $c_0 = \pi \circ \tilde{c}_0$ é um caminho fechado em N e N é simplesmente conexo, c_0 é homotópico ao

caminho constante $c_1 : [0, 1] \rightarrow X$ com $c_1(t) = p$, para todo $t \in [0, 1]$. Sendo c_1 suave, existe levantamento \tilde{c}_1 de c_1 partindo de \tilde{p}_1 . Segue da unicidade dos levantamentos, que $\tilde{c}_1(t) = \tilde{p}_1$, para todo $t \in [0, 1]$. Porém, pelo que mostramos nesta seção, \tilde{c}_0 e \tilde{c}_1 são caminhos homotópicos, logo $\tilde{p}_1 = \tilde{c}_1(1) = \tilde{c}_0(1) = \tilde{p}_2$. \square

3 ENCONTRANDO UMA FUNÇÃO HARMÔNICA POSITIVA

Para tudo a que segue, denotaremos o espaço de Lorentz-Minkowski $(\mathbb{L}^3, \bar{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle, \bar{\nabla})$ apenas por \mathbb{L}^3 , sendo

$$\bar{g} = (dx)^2 + (dy)^2 - (dz)^2 \quad (3.1)$$

nas coordenadas canônicas (x, y, z) de \mathbb{L}^3 , e $\bar{\nabla}$ sua conexão de Levi-Civita. Dado $p \in \mathbb{L}^3$, faremos, daqui em diante, a identificação

$$\begin{aligned} T_p\mathbb{L}^3 &\longrightarrow \mathbb{L}^3 \\ a \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + b \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p + c \frac{\partial}{\partial z} \Big|_p &\longmapsto (a, b, c), \end{aligned}$$

com o objetivo de simplificar a notação nos cálculos a seguir.

Seja (M^2, g, ∇) uma subvariedade semi-riemanniana máxima em \mathbb{L}^3 , em que g é a métrica induzida e ∇ é a conexão induzida. Suponha que M seja tipo-espaço, de modo que possamos vê-la simplesmente como uma superfície riemanniana. Afirmo que existe um campo vetorial normal unitário e tipo-tempo N em M . Realmente, sendo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{L}^3)$ o campo constante igual a $(0, 0, 1)$ em todo ponto, temos que X é tipo-tempo. Fixado um ponto $p \in M$, temos que $X_p \notin T_pM$, já que todos os vetores de T_pM são tipo-espaço. Desse modo, X^\perp nunca se anula em M . Além disso, $|X_p^\perp| \neq 0$, pois, do contrário, todos os vetores de $\text{span}\{X_p^\perp\} = T_pM^\perp$ teriam norma nula, o que não pode ocorrer, já que T_pM^\perp é não degenerado. Diante disso, basta definir $N = X^\perp / |X^\perp|$.

Para cada $a \in \mathbb{L}^3$, podemos considerar a função suave $\langle N, a \rangle$ em M , vendo a como um campo vetorial constante. Neste capítulo, provaremos que, escolhendo a apropriadamente, $1/\langle N, a \rangle$ é uma função harmônica positiva em M .

Afirmamos que, tomando $a \neq 0$, tal que $\langle a, a \rangle = 0$, a função $\langle N, a \rangle$ nunca se anulará. De fato, escrevendo $N = (N_1, N_2, N_3)$, $a = (a_1, a_2, a_3)$ e supondo, por contradição, que exista um ponto em M em que $\langle N, a \rangle$ se anule, teremos, neste ponto:

$$\begin{aligned} \langle a, a \rangle = 0 &\implies a_1^2 + a_2^2 = a_3^2; \\ \langle N, N \rangle = -1 &\implies N_1^2 + N_2^2 = N_3^2 - 1; \\ \langle N, a \rangle = 0 &\implies N_1 a_1 + N_2 a_2 = N_3 a_3. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Mas, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} (N_1 a_1 + N_2 a_2)^2 &\leq (N_1^2 + N_2^2)(a_1^2 + a_2^2) \implies \\ \implies (N_3 a_3)^2 &\leq (N_3^2 - 1)a_3^2 = (N_3 a_3)^2 - a_3^2 \implies a_3 = 0; \end{aligned}$$

então, segue de (3.2) que $a_1 = a_2 = 0$, o que não pode ocorrer, já que estamos tomando $a \neq 0$.

Assim, como a função $\langle N, a \rangle$ nunca se anula, sua continuidade nos permite supor, sem perda de generalidade, que $\langle N, a \rangle > 0$ (caso ocorra $\langle N, a \rangle < 0$, basta escolher $-a$, em vez de a). Daí, uma vez que $\psi(x) = 1/x$ é suave em $(0, +\infty)$, podemos utilizar (2.32) para calcular $\Delta(1/\langle N, a \rangle)$. Para tanto, será útil calcularmos $\Delta\langle N, a \rangle$ e $|\nabla\langle N, a \rangle|^2$.

Para o primeiro cálculo, fixe $p \in M$ e considere (E_1, E_2) , um referencial ortonormal local para M que seja geodésico em p . Convencionamos que todos os cálculos a seguir, com o objetivo de encontrar uma expressão para $\Delta\langle N, a \rangle$, serão feitos no ponto p , o que tornaremos implícito daqui em diante, a fim de não carregar a notação e evitar repetições. Tendo isso em mente, por (2.30), podemos escrever,

$$\Delta\langle N, a \rangle = \sum_{i=1}^2 E_i(E_i\langle N, a \rangle) = \sum_{i=1}^2 E_i(\langle \bar{\nabla}_{E_i} N, a \rangle + \langle N, \bar{\nabla}_{E_i} a \rangle),$$

em que a segunda igualdade vem da compatibilidade de $\bar{\nabla}$ com a métrica. Segue de (2.10), que $\bar{\nabla}_{E_i} a = 0$, uma vez que, sendo a um campo vetorial constante, suas componentes, nas coordenadas usuais de \mathbb{L}^3 , são funções constantes. Além disso, como M tem codimensão 1, temos por (2.17), que

$$\bar{\nabla}_{E_i} N = -A(E_i),$$

em que A denota o tensor de Weingarten associado a N .

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta\langle N, a \rangle &= \sum_{i=1}^2 E_i\langle -A(E_i), a \rangle \\ &= -\sum_{i=1}^2 \left(\langle \bar{\nabla}_{E_i}(A(E_i)), a \rangle + \underbrace{\langle A(E_i), \bar{\nabla}_{E_i} a \rangle}_{=0} \right) \\ &= -\sum_{i=1}^2 \langle \Pi(E_i, A(E_i)) + \nabla_{E_i}(A(E_i)), a \rangle, \end{aligned} \tag{3.3}$$

em que Π denota o tensor segunda forma fundamental.

Como M tem codimensão 1 e $\Pi(A(E_i), E_i)$ é normal a M , podemos escrever

$$\begin{aligned}\Pi(E_i, A(E_i)) &= -\langle \Pi(E_i, A(E_i)), N \rangle N \\ &= -\langle A(E_i), A(E_i) \rangle N \\ &= -\langle A^2(E_i), E_i \rangle N,\end{aligned}$$

em que o sinal negativo vem do fato de N ser de tipo-tempo e utilizamos (2.18), além do fato de A ser autoadjunto.

Ademais, será útil notar que

$$\langle \nabla_{E_i}(A(E_i)), a \rangle = \langle \nabla_{E_i}(A(E_i)), a^\top - \langle N, a \rangle N \rangle = \langle \nabla_{E_i}(A(E_i)), a^\top \rangle,$$

levando em conta que $\langle \nabla_{E_i}(A(E_i)), N \rangle = 0$, uma vez que $\nabla_{E_i}(A(E_i))$ é tangente a M e N é normal. Agora, utilizando, respectivamente, a compatibilidade de ∇ com a métrica induzida, a autoadjunção de A e o fato do referencial ser geodésico em p , obtemos

$$\begin{aligned}\langle \nabla_{E_i}(A(E_i)), a^\top \rangle &= E_i \langle A(E_i), a^\top \rangle - \langle A(E_i), \nabla_{E_i} a^\top \rangle \\ &= E_i \langle E_i, A(a^\top) \rangle - \langle E_i, A(\nabla_{E_i} a^\top) \rangle \\ &= \underbrace{\langle \nabla_{E_i} E_i, A(a^\top) \rangle}_{=0} + \langle E_i, \nabla_{E_i}(A(a^\top)) \rangle - \langle E_i, A(\nabla_{E_i} a^\top) \rangle.\end{aligned}$$

Perceba que, por (2.22),

$$\langle E_i, A(\nabla_{E_i} a^\top) \rangle = \langle E_i, \nabla_{E_i}(A(a^\top)) - (\nabla_{E_i} A)(a^\top) \rangle,$$

de modo que

$$\langle \nabla_{E_i}(A(E_i)), a^\top \rangle = \langle E_i, (\nabla_{E_i} A)(a^\top) \rangle.$$

Então, uma vez que M tem codimensão 1 e \mathbb{L}^3 tem tensor curvatura nulo e, portanto, curvatura constante, temos, pelo Corolário (2.3) que

$$\langle \nabla_{E_i}(A(E_i)), a \rangle = \langle E_i, (\nabla_{a^\top} A)(E_i) \rangle.$$

Agora, utilizando novamente (2.22) e o fato do referencial ser geodésico em p , podemos escrever

$$\langle E_i, (\nabla_{a^\top} A)(E_i) \rangle = \langle E_i, \nabla_{a^\top}(A(E_i)) - A(\underbrace{\nabla_{a^\top} E_i}_{=0}) \rangle = \langle E_i, \nabla_{a^\top}(A(E_i)) \rangle.$$

Novamente, pela compatibilidade de ∇ com a métrica induzida, obtemos

$$\langle E_i, \nabla_{a^\top}(A(E_i)) \rangle = a^\top \langle E_i, A(E_i) \rangle - \underbrace{\langle \nabla_{a^\top} E_i, A(E_i) \rangle}_{=0} = a^\top \langle E_i, A(E_i) \rangle.$$

Assim, (3.3) se torna

$$\begin{aligned}
\Delta\langle N, a \rangle &= - \sum_{i=1}^2 \left(\langle -\langle A^2(E_i), E_i \rangle N, a \rangle + a^\top \langle E_i, A(E_i) \rangle \right) \\
&= \langle N, a \rangle \sum_{i=1}^2 \langle A^2(E_i), E_i \rangle + a^\top \left(\sum_{i=1}^2 \langle E_i, A(E_i) \rangle \right) \\
&= \langle N, a \rangle \operatorname{tr}(A^2) - a^\top (\operatorname{tr}(A)).
\end{aligned}$$

Note, porém, que, sendo H a curvatura média de M , temos $2H = \operatorname{tr}(A)$, de sorte que $\operatorname{tr}(A) = 0$, já que M é superfície máxima, ou seja, $H \equiv 0$. Portanto, obtemos, em p

$$\Delta\langle N, a \rangle = \operatorname{tr}(A^2)\langle N, a \rangle. \quad (3.4)$$

Como p foi escolhido arbitrariamente, segue que (3.4) vale em todo ponto de M .

Agora, afirmamos que $\nabla\langle N, a \rangle = -A(a^\top)$. De fato, tomando $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned}
\langle -A(a^\top), X \rangle &= \langle a^\top, -A(X) \rangle = \langle a^\top, (\bar{\nabla}_X N)^\top \rangle \\
&= \langle a + \langle N, a \rangle N, \bar{\nabla}_X N + \underbrace{\langle N, \bar{\nabla}_X N \rangle N}_{=0} \rangle \\
&= \langle a, \bar{\nabla}_X N \rangle + \langle N, a \rangle \underbrace{\langle N, \bar{\nabla}_X N \rangle}_0 \\
&= \langle a, \bar{\nabla}_X N \rangle \\
&= \langle a, \bar{\nabla}_X N \rangle + \underbrace{\langle \bar{\nabla}_X a, N \rangle}_{=0} = X\langle N, a \rangle = \langle \nabla\langle N, a \rangle, X \rangle,
\end{aligned}$$

em que utilizamos, respectivamente, o fato A ser autoadjunto, (2.16), o fato de a ser um campo vetorial constante, a compatibilidade de $\bar{\nabla}$ com a métrica e a definição de gradiente de uma função. Como a expressão vale para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, segue o que queríamos provar.

Para calcular $|\nabla\langle N, a \rangle|^2$, fixe um ponto $p \in M$ e tome (e_1, e_2) uma base ortonormal para $T_p M$ composta por autovetores de A (que existe, pelo Teorema Espectral e pelo fato de A

ser autoadjunto). Digamos que seja $A(e_i) = \lambda_i e_i$, para $i \in \{1, 2\}$, com $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Temos, em p ,

$$\begin{aligned}
|\nabla\langle N, a \rangle|^2 &= \langle \nabla\langle N, a \rangle, \nabla\langle N, a \rangle \rangle \\
&= \langle -A(a^\top), -A(a^\top) \rangle \\
&= \langle A^2(a^\top), a^\top \rangle \\
&= \left\langle A^2 \left(\sum_{i=1}^2 \langle a^\top, e_i \rangle e_i \right), \sum_{j=1}^2 \langle a^\top, e_j \rangle e_j \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^2 \langle a^\top, e_i \rangle \langle a^\top, e_j \rangle \langle A^2(e_i), e_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^2 \langle a^\top, e_i \rangle^2 \lambda_i^2 \underbrace{\langle e_i, e_i \rangle}_{=1} + \langle a^\top, e_1 \rangle \langle a^\top, e_2 \rangle (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \underbrace{\langle e_1, e_2 \rangle}_{=0} \\
&= \sum_{i=1}^2 \langle a^\top, e_i \rangle^2 \lambda_i^2.
\end{aligned}$$

Como vimos anteriormente, $\text{tr}(A) = 0$, uma vez que M é uma superfície máxima, de onde $\lambda_2 = -\lambda_1$, já que $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$. Daí, $\text{tr}(A^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 2\lambda_1^2$. Portanto, em p , temos

$$|\nabla\langle N, a \rangle|^2 = \lambda_1^2 \sum_{i=1}^2 \langle a^\top, e_i \rangle^2 = \frac{1}{2} \text{tr}(A^2) |a^\top|^2. \quad (3.5)$$

Podemos, porém, reescrever

$$\begin{aligned}
|a^\top|^2 &= \langle a^\top, a^\top \rangle = \langle a^\top, a + \langle N, a \rangle N \rangle \\
&= \langle a^\top, a \rangle + \langle N, a \rangle \underbrace{\langle a^\top, N \rangle}_{=0} \\
&= \langle a + \langle N, a \rangle N, a \rangle = \underbrace{\langle a, a \rangle}_{=0} + \langle N, a \rangle^2 = \langle N, a \rangle^2.
\end{aligned}$$

Obtemos, desse modo, em p ,

$$|\nabla\langle N, a \rangle|^2 = \frac{1}{2} \text{tr}(A^2) \langle N, a \rangle^2. \quad (3.6)$$

Como p foi escolhido arbitrariamente, tal expressão é válida em toda M .

Finalmente, sendo $\psi(x) = 1/x$, como definido anteriormente, e por (2.32), (3.4) e (3.6), temos

$$\Delta \left(\frac{1}{\langle N, a \rangle} \right) = \frac{2}{\langle N, a \rangle^3} \cdot \frac{1}{2} \text{tr}(A^2) \langle N, a \rangle^2 + \left(-\frac{1}{\langle N, a \rangle^2} \right) \text{tr}(A^2) \langle N, a \rangle = 0,$$

como queríamos provar.

4 A EQUAÇÃO DAS SUPERFÍCIES MÁXIMAS

Sendo $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, mostraremos que a equação (1.2) realmente expressa o fato de que o gráfico de u , que denotaremos por M , visto como subvariedade do espaço de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^3 , seja uma superfície máxima.

Sabemos que M é uma superfície mergulhada em \mathbb{L}^3 , já que sua parametrização global, $\varphi(x, y) = (x, y, u(x, y))$, é um homeomorfismo sobre sua imagem. Suponha que $|\nabla u| < 1$. Mostraremos que M é subvariedade semi-riemanniana tipo-espaço. Com efeito, sendo $p = (x_0, y_0, u(x_0, y_0)) \in M$ e $v = (v_1, v_2, v_3) \in T_p M$, $v \neq 0$, existe uma curva suave $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, e podemos escrever

$$\gamma(t) = (\bar{\gamma}(t), u(\bar{\gamma}(t))),$$

em que $\bar{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ é curva suave com $\bar{\gamma}(0) = (x_0, y_0)$ e $\bar{\gamma}'(0) = (v_1, v_2)$. Daí,

$$v = \gamma'(0) = (\bar{\gamma}'(0), (u \circ \bar{\gamma})'(0)) = (v_1, v_2, v_1 u_x + v_2 u_y),$$

e, por Cauchy-Schwarz,

$$\langle v, v \rangle = v_1^2 + v_2^2 - (v_1 u_x + v_2 u_y)^2 \geq v_1^2 + v_2^2 - \underbrace{(v_1^2 + v_2^2)}_{=|\nabla u|^2} \underbrace{(u_x^2 + u_y^2)}_{>0} = \underbrace{(v_1^2 + v_2^2)}_{>0} \underbrace{(1 - |\nabla u|^2)}_{>0} > 0.$$

Ou seja, a métrica induzida é positiva definida e, em particular, não degenerada, como queríamos provar.

Agora, queremos mostrar que a curvatura média de M é dada por

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 - |\nabla u|^2}} \right),$$

de modo que (1.2) implica que M é superfície máxima. Para tanto, precisamos encontrar um campo vetorial unitário normal a M e calcular seu tensor de Weingarten associado.

Note que, sendo $f : \mathbb{L}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = z - u(x, y)$, temos, por (2.13), $\nabla f = (-u_x, -u_y, -1) \neq 0$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{L}^3$, e $M = f^{-1}(0)$. Como f restrita a qualquer curva em M é constante igual a 0, temos que $T_p M \subseteq \ker(df_p)$ para todo $p \in M$, em que $\ker(df_p)$ denota o núcleo do operador linear df_p . Daí, uma vez que, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem e pelo fato de f ser submersão nos pontos de M , temos $\dim \ker(df_p) = \dim \mathbb{L}^3 - \dim \mathbb{R} = 2 = \dim T_p M$, segue que $T_p M = \ker(df_p)$. Além disso, como $df_p(v) = v(f) = \langle \nabla f, v \rangle$, para todo

$v \in T_p\mathbb{L}^3$, temos que $\ker(df_p) = \{\nabla f\}^\perp$, logo $T_pM = \{\nabla f(p)\}^\perp$ para todo $p \in M$. Tomemos, então, o campo vetorial unitário normal a M dado por

$$N = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - |\nabla u|^2}} \right) (-u_x, -u_y, -1). \quad (4.1)$$

Veja que N é tipo-tempo.

Agora, sendo $\bar{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de (\mathbb{L}^3, \bar{g}) e dados $X, Y = (Y_1, Y_2, Y_3) \in \mathfrak{X}(M)$, podemos escrever, por (2.14),

$$\bar{\nabla}_X Y = \left(\langle \nabla Y_1, X \rangle, \langle \nabla Y_2, X \rangle, \langle \nabla Y_3, X \rangle \right).$$

Como M tem codimensão 1, sabemos, por (2.17), que

$$A(X) = -\bar{\nabla}_X N,$$

em que A denota o tensor de Weingarten associado a N . Portanto, escrevendo

$$F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - |\nabla u(x, y)|^2}},$$

obtemos $N = (-Fu_x, -Fu_y, -F)$, de sorte que

$$A(X) = -\left(\langle \nabla(-Fu_x), X \rangle, \langle \nabla(-Fu_y), X \rangle, \langle \nabla(-F), X \rangle \right).$$

Pela \mathbb{R} -linearidade do gradiente e da métrica semi-riemanniana, obtemos que

$$A(X) = \left(\langle \nabla(Fu_x), X \rangle, \langle \nabla(Fu_y), X \rangle, \langle \nabla F, X \rangle \right). \quad (4.2)$$

Agora, para calcular $\text{tr}(A)$, precisamos encontrar referenciais ortonormais em M .

Sabemos que, para cada $p \in M$,

$$d\varphi_p((1, 0)) = \varphi_x(p) = (1, 0, u_x(p)) \quad \text{e} \quad d\varphi_p((0, 1)) = \varphi_y(p) = (0, 1, u_y(p))$$

formam uma base para T_pM , não necessariamente ortonormal. Porém, como M é subvariedade semi-riemanniana tipo-espaço, podemos utilizar o algoritmo de Gram-Schmidt para ortonormalizar o referencial global (φ_x, φ_y) . Portanto, defina

$$E_1 = \frac{\varphi_x}{|\varphi_x|} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - u_x^2}} \right) (1, 0, u_x),$$

e, sendo

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}_y &= \varphi_y - \frac{\langle \varphi_y, E_1 \rangle}{\langle E_1, E_1 \rangle} E_1 = (0, 1, u_y) - \frac{(-u_x u_y)}{1 - u_x^2} (1, 0, u_x) \\ &= \left(\frac{u_x u_y}{1 - u_x^2}, 1, u_y + \frac{u_x^2 u_y}{1 - u_x^2} \right) \\ &= \frac{1}{1 - u_x^2} (u_x u_y, 1 - u_x^2, u_y)\end{aligned}$$

e

$$\langle \overline{\varphi}_y, \overline{\varphi}_y \rangle = \left(\frac{1}{1 - u_x^2} \right)^2 (u_x^2 u_y^2 + (1 - u_x^2)^2 - u_y^2) = \frac{1 - u_x^2 - u_y^2}{1 - u_x^2} = \frac{1 - |\nabla u|^2}{1 - u_x^2},$$

defina

$$E_2 = \frac{\overline{\varphi}_y}{|\overline{\varphi}_y|} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - |\nabla u|^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - u_x^2}} \right) (u_x u_y, 1 - u_x^2, u_y).$$

Denotando $G(x, y) = 1/\sqrt{1 - u_x(x, y)^2}$, podemos escrever

$$E_1 = G(1, 0, u_x)$$

$$E_2 = FG(u_x u_y, 1 - u_x^2, u_y).$$

Agora, calcularemos

$$2H = \text{tr}(A) = \langle A(E_1), E_1 \rangle + \langle A(E_2), E_2 \rangle.$$

Para tanto, calculemos, separadamente, o primeiro termo da soma e, em seguida, o segundo. Por (4.2), temos

$$\begin{aligned}\langle A(E_1), E_1 \rangle &= \left\langle \left(\langle \nabla(Fu_x), E_1 \rangle, \langle \nabla(Fu_y), E_1 \rangle, \langle \nabla F, E_1 \rangle \right), G(1, 0, u_x) \right\rangle \\ &= G \left(1 \cdot \langle \nabla(Fu_x), E_1 \rangle + 0 \cdot \langle \nabla(Fu_y), E_1 \rangle - u_x \langle \nabla F, E_1 \rangle \right) \\ &= G \langle \nabla(Fu_x) - u_x \nabla F, E_1 \rangle.\end{aligned}$$

Por (2.11),

$$\nabla(Fu_x) - u_x \nabla F = F \nabla u_x = F(u_{xx}, u_{xy}, \underbrace{u_{xz}}_{=0}).$$

Logo,

$$\langle A(E_1), E_1 \rangle = FG^2 \langle (u_{xx}, u_{xy}, 0), (1, 0, u_x) \rangle = FG^2 u_{xx}.$$

Agora, operando de maneira análoga a como fizemos para $\langle A(E_1), E_1 \rangle$, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle A(E_2), E_2 \rangle &= FG \langle u_x u_y \nabla(F u_x) + (1 - u_x^2) \nabla(F u_y) - u_y \nabla F, E_2 \rangle \\
&= FG \langle u_x y_y F \nabla u_x + u_x^2 u_y \nabla F + (1 - u_x^2) F \nabla u_y + (1 - u_x^2) u_y \nabla F - u_y \nabla F, E_2 \rangle \\
&= FG \langle u_x u_y F \nabla u_x + (1 - u_x^2) F \nabla u_y, E_2 \rangle \\
&= F^2 G \langle u_x u_y (u_{xx}, u_{xy}, 0) + (1 - u_x^2) (u_{yx}, u_{yy}, 0), E_2 \rangle \\
&= F^3 G^2 \langle (u_x u_y u_{xx} + (1 - u_x^2) u_{xy}, u_x u_y u_{xy} + (1 - u_x^2) u_{yy}, 0), (u_x u_y, 1 - u_x^2, u_y) \rangle \\
&= F^3 G^2 (u_x^2 u_y^2 u_{xx} + u_x y_y (1 - u_x^2) u_{xy} + (1 - u_x^2) u_x u_y u_{xy} + (1 - u_x^2)^2 u_{yy}) \\
&= F^3 G^2 (u_x^2 u_y^2 u_{xx} + 2u_x y_y (1 - u_x^2) u_{xy} + (1 - u_x^2)^2 u_{yy}).
\end{aligned}$$

Note que,

$$\langle A(E_1), E_1 \rangle = FG^2 u_{xx} = F^3 G^2 u_{xx} (1 - u_x^2 - u_y^2).$$

Assim, obtemos que

$$\begin{aligned}
2H &= F^3 G^2 (u_{xx} (1 - u_x^2 - u_y^2 + u_x^2 u_y^2) + 2u_x y_y (1 - u_x^2) u_{xy} + (1 - u_x^2)^2 u_{yy}) \\
&= F^3 \left(\frac{1}{1 - u_x^2} \right) (u_{xx} (1 - u_x^2) (1 - u_y^2) + 2u_x y_y (1 - u_x^2) u_{xy} + (1 - u_x^2)^2 u_{yy}) \\
&= F^3 (u_{xx} - u_y^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_{yy} - u_x^2 u_{yy}) \\
&= F^3 (u_{xx} - u_x^2 u_{xx} - u_y^2 u_{xx} + u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_{yy} - u_x^2 u_{yy} - u_y^2 u_{yy} + u_y^2 u_{yy}) \\
&= F^3 (u_{xx} (1 - |\nabla u|^2) + u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_{yy} (1 - |\nabla u|^2) + u_y^2 u_{yy}) \\
&= F (u_{xx} + u_{yy}) + F^3 (u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy})
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Veja que, pela regra da cadeia,

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x} \left((1 - u_x^2 - u_y^2)^{-1/2} \right) = -\frac{1}{2} F^3 \frac{\partial}{\partial x} (1 - u_x^2 - u_y^2) = F^3 (u_x u_{xx} + u_y u_{yx}),$$

e, analogamente,

$$F_y = F^3 (u_x u_{xy} + u_y u_{yy}).$$

Logo, uma vez que $F_z = 0$, temos

$$\nabla F = F^3 (u_x u_{xx} + u_y u_{xy}, u_x u_{xy} + u_y u_{yy}, 0).$$

Além disso, por (2.28), temos

$$\operatorname{div}(\nabla u) = u_{xx} + u_{yy}.$$

Diante disso, (4.3) se torna

$$2H = F \operatorname{div}(\nabla u) + \langle \nabla F, \nabla u \rangle = \operatorname{div}(F \nabla u),$$

em que, na última igualdade, utilizamos (2.27). Fica, portanto, provado o que queríamos.

Sendo o gráfico de u , portanto, uma superfície máxima, podemos nele definir a função harmônica $1/\langle N, a \rangle$ que apresentamos no capítulo anterior.

5 UMA MÉTRICA *FLAT* E COMPLETA PARA O GRÁFICO

Nas notações do capítulo anterior, seja $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ a métrica induzida em M por \bar{g} e $b = (0, 0, 1) \in \mathbb{L}^3$. Sendo N dado por (4.1), obtemos

$$\langle N, b \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 - |\nabla u|^2}} > 0.$$

Neste capítulo, provaremos que a métrica

$$\tilde{g} = (\langle N, b \rangle + 1)^2 g$$

torna (M, \tilde{g}) *flat* e completa. Para tanto, denotaremos $\tilde{g} = e^{2h}g$, de modo que

$$h = \ln(\langle N, b \rangle + 1).$$

Além disso, no que segue, tudo que for calculado em relação à métrica \tilde{g} virá com um sobrescrito $\tilde{\cdot}$, por exemplo, $\tilde{\nabla}$, \tilde{R} e \tilde{K} , para a conexão de Levi-Civita, o tensor curvatura e a curvatura seccional, respectivamente, enquanto o que for calculado em relação à g virá com a notação padrão sem sobrescrito.

Para mostrar que (M, \tilde{g}) é *flat*, precisamos garantir que M tem curvatura constante e igual a zero, quando munida com a métrica \tilde{g} . Como M tem dimensão 2, o único plano tangente a M em um ponto $p \in M$ será o próprio T_pM . Logo, queremos provar que $\tilde{K}(T_pM)$, que denotaremos apenas por $\tilde{K}(p)$, é igual a zero para todo $p \in M$. Seja, então, (E_1, E_2) um referencial ortonormal na métrica g , definido em uma vizinhança de p e geodésico em p em relação à conexão ∇ . Veja que (E_1, E_2) também é referencial na métrica \tilde{g} , ainda que não seja mais ortonormal. Como (2.20) independe da base escolhida, temos, em p ,

$$\tilde{K} = \frac{\tilde{g}(\tilde{R}_{E_1E_2}E_1, E_2)}{\tilde{g}(E_1, E_1)\tilde{g}(E_2, E_2) - \tilde{g}(E_1, E_2)^2} = \frac{e^{2h}g(\tilde{R}_{E_1E_2}E_1, E_2)}{e^{2h}g(E_1, E_1)e^{2h}g(E_2, E_2) - (e^{2h}g(E_1, E_2))^2},$$

logo,

$$\tilde{K} = e^{-2h} \langle \tilde{R}_{E_1E_2}E_1, E_2 \rangle.$$

Para calcular $\tilde{R}_{E_1E_2}E_1$, veja que, por (2.33), temos, no ponto p ,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{E_1}\tilde{\nabla}_{E_2}E_1 &= \tilde{\nabla}_{E_1}(\underbrace{\nabla_{E_2}E_1 + E_1(h)E_2 + E_2(h)E_1}_{=0} - \langle E_1, E_2 \rangle \nabla h) \\ &= \tilde{\nabla}_{E_1}\nabla_{E_2}E_1 + E_1(E_1(h))E_2 + E_1(h)\tilde{\nabla}_{E_1}E_2 + E_1(E_2(h))E_1 + E_2(h)\tilde{\nabla}_{E_1}E_1. \end{aligned}$$

Usando que $\nabla_{E_i} E_j$ se anula no ponto p com $i, j \in \{1, 2\}$, temos, em p ,

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{E_1} \tilde{\nabla}_{E_2} E_1 &= \nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_1 + E_1(E_1(h))E_2 + E_1(h)(E_1(h)E_2 + E_2(h)E_1) \\ &\quad + E_1(E_2(h))E_1 + E_2(h)(2E_1(h)E_1 - \nabla h).\end{aligned}$$

Analogamente, temos, também em p ,

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{E_2} \tilde{\nabla}_{E_1} E_1 &= \tilde{\nabla}_{E_2} (\nabla_{E_1} E_1 + 2E_1(h)E_1 - \underbrace{\langle E_1, E_1 \rangle}_{=1} \nabla h) \\ &= \tilde{\nabla}_{E_2} \nabla_{E_1} E_1 + 2E_2(E_1(h))E_1 + 2E_1(h)\tilde{\nabla}_{E_2} E_1 - \tilde{\nabla}_{E_2} \nabla h. \\ &= \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_1 + 2E_2(E_1(h))E_1 + 2E_1(h)(E_2(h)E_1 + E_1(h)E_2) \\ &\quad - (\nabla_{E_2} \nabla h + E_2(h)\nabla h + \nabla h(h)E_2 - \langle E_2, \nabla h \rangle \nabla h)\end{aligned}$$

Além disso, pela propriedade de simetria da conexão de Levi-Civita, temos que

$$[E_1, E_2]_p = \underbrace{(\nabla_{E_1} E_2)_p}_{=0} - \underbrace{(\nabla_{E_2} E_1)_p}_{=0} = 0,$$

de modo que $(\tilde{\nabla}_{[E_1, E_2]} E_1)_p = 0 = (\nabla_{[E_1, E_2]} E_1)_p$. Reorganizando os termos, obtemos, em p ,

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{E_1 E_2} E_1 &= \tilde{\nabla}_{[E_1, E_2]} E_1 - \tilde{\nabla}_{E_1} \tilde{\nabla}_{E_2} E_1 + \tilde{\nabla}_{E_2} \tilde{\nabla}_{E_1} E_1 \\ &= -\nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_1 + \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_1 \\ &\quad - E_1(E_1(h))E_2 - E_1(E_2(h))E_1 + 2E_2(E_1(h))E_1 \\ &\quad - E_1(h)(E_1(h)E_2 + E_2(h)E_1) - E_2(h)(2E_1(h)E_1 - \nabla h) \\ &\quad + 2E_1(h)(E_1(h)E_2 + E_2(h)E_1) \\ &\quad - \nabla_{E_2} \nabla h - \underbrace{\nabla h(h)}_{\langle \nabla h, \nabla h \rangle} E_2 - E_2(h)\nabla h + \underbrace{\langle E_2, \nabla h \rangle}_{=E_2(h)} \nabla h,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{E_1 E_2} E_1 &= R_{E_1, E_2} E_1 + \left(-E_1(E_2(h)) - E_1(h)E_2(h) + 2E_2(E_1(h)) \right) E_1 \\ &\quad + \left(-E_1(E_1(h)) + E_1(h)^2 - \langle \nabla h, \nabla h \rangle \right) E_2 + E_2(h)\nabla h - \nabla_{E_2} \nabla h.\end{aligned}$$

Utilizando que $\langle \nabla h, \nabla h \rangle = E_1(h)^2 + E_2(h)^2$ juntamente com a compatibilidade da conexão ∇ com a métrica g , temos, ainda em p ,

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{R}_{E_1 E_2} E_1, E_2 \rangle &= \langle R_{E_1 E_2} E_1, E_2 \rangle - E_1(E_1(h)) \underbrace{- E_2(h)^2 + E_2(h) \langle \nabla h, E_2 \rangle}_{=0} - \langle \nabla_{E_2} \nabla h, E_2 \rangle \\
&= \langle R_{E_1 E_2} E_1, E_2 \rangle - E_1(E_1(h)) - E_2(\langle \nabla h, E_2 \rangle) + \underbrace{\langle \nabla h, \nabla_{E_2} E_2 \rangle}_{=0} \\
&= \langle R_{E_1 E_2} E_1, E_2 \rangle - E_1(E_1(h)) - E_2(E_2(h)) \\
&= \langle R_{E_1 E_2} E_1, E_2 \rangle - \Delta h \\
&= \frac{\langle R_{E_1 E_2} E_1, E_2 \rangle}{\langle E_1, E_1 \rangle \langle E_2, E_2 \rangle - \langle E_1, E_2 \rangle^2} - \Delta h \\
&= K - \Delta h.
\end{aligned}$$

Para calcular $K(p)$, utilizaremos uma base ortonormal (e_1, e_2) para $T_p M$ composta por autovetores do tensor de Weingarten A , digamos com $A(e_i) = \lambda_i e_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ para $i \in \{1, 2\}$. Uma vez que M é máxima, vimos, no Capítulo 3, que $\lambda_2 = -\lambda_1$ e $\text{tr}(A^2) = 2\lambda_1^2$. Como \mathbb{L}^3 é *flat*, temos, pela Equação de Gauss,

$$0 = \underbrace{\langle \bar{R}_{e_1 e_2} e_1, e_2 \rangle}_{=0} = \langle R_{e_1 e_2} e_1, e_2 \rangle + \langle \Pi(e_1, e_2), \Pi(e_2, e_1) \rangle - \langle \Pi(e_1, e_1), \Pi(e_2, e_2) \rangle.$$

Utilizando o fato de M ter codimensão 1 e (2.18), obtemos

$$\begin{aligned}
\langle R_{e_1 e_2} e_1, e_2 \rangle &= -\langle \Pi(e_1, e_2), -\langle \Pi(e_1, e_2), N \rangle N \rangle + \langle \Pi(e_1, e_1), -\langle \Pi(e_2, e_2), N \rangle N \rangle \\
&= \langle A(e_1), e_2 \rangle^2 - \langle A(e_1), e_1 \rangle \langle A(e_2), e_2 \rangle \\
&= \lambda_1 \langle e_1, e_2 \rangle^2 - \lambda_1 \langle e_1, e_1 \rangle \lambda_2 \langle e_2, e_2 \rangle \\
&= -\lambda_1 \lambda_2,
\end{aligned}$$

e, assim,

$$K = \frac{\langle R_{e_1 e_2} e_1, e_2 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle \langle e_2, e_2 \rangle - \langle e_1, e_2 \rangle^2} = \langle R_{e_1 e_2} e_1, e_2 \rangle = -\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_1^2 = \frac{1}{2} \text{tr}(A^2).$$

Para calcular $\Delta h = \Delta \ln(\langle N, b \rangle + 1)$, tomaremos $\psi = \ln$ e utilizaremos (2.32), o que requererá calcular $\Delta(\langle N, b \rangle + 1)$ e $|\nabla(\langle N, b \rangle + 1)|^2$, em que $|\cdot| = \sqrt{g(\cdot, \cdot)}$. Note que, para encontrar (3.4), não foi utilizado nenhum fato específico sobre $a \in \mathbb{L}^3$. Diante disso, podemos escrever

$$\Delta(\langle N, b \rangle + 1) = \Delta \langle N, b \rangle = \text{tr}(A^2) \langle N, b \rangle.$$

Da mesma forma, encontramos (3.5) sem utilizar nenhum fato específico sobre a ; portanto,

$$|\nabla(\langle N, b \rangle + 1)|^2 = |\nabla \langle N, b \rangle|^2 = \frac{1}{2} \text{tr}(A^2) |b^\top|^2.$$

De maneira análoga àquela feita no Capítulo 3, encontra-se $|b^\top|^2 = \langle N, b \rangle^2 + \langle b, b \rangle$, modo que

$$|\nabla(\langle N, b \rangle + 1)|^2 = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(A^2)(\langle N, b \rangle^2 - 1).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Delta h &= -\frac{1}{(\langle N, b \rangle + 1)^2} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{tr}(A^2)(\langle N, b \rangle^2 - 1) + \frac{1}{\langle N, b \rangle + 1} \cdot \operatorname{tr}(A^2) \langle N, b \rangle \\ &= \frac{\operatorname{tr}(A^2)(\langle N, b \rangle^2 + 2\langle N, b \rangle + 1)}{2(\langle N, b \rangle + 1)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(A^2). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\tilde{K} = e^{-2h}(K - \Delta h) = e^{-2h} \left(\frac{1}{2} \operatorname{tr}(A^2) - \frac{1}{2} \operatorname{tr}(A^2) \right) = 0,$$

como queríamos provar.

Agora, para mostrar que (M, \tilde{g}) é completa, consideraremos uma curva divergente $\alpha : [0, T) \rightarrow M$. Lembre-se de que $\varphi(x, y) = (x, y, u(x, y))$ define um homeomorfismo entre \mathbb{R}^2 e M , cuja inversa é a aplicação projeção $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$. Logo, devido à correspondência entre os compactos de \mathbb{R}^2 e de M , segue que a curva $\bar{\alpha} = \pi \circ \alpha : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$ é divergente. Do homeomorfismo citado também vem o fato de M ser conexa, uma vez que \mathbb{R}^2 o é.

Encontraremos, agora, uma relação entre o comprimento de α e o comprimento de $\bar{\alpha}$. Escrevendo $\alpha(t) = (\bar{\alpha}(t), u(\bar{\alpha}(t)))$, obtemos, por um cálculo análogo àquele feito no Capítulo 4 para mostrar que M é tipo-espaço, que

$$g(\alpha', \alpha') \geq |\bar{\alpha}'|^2(1 - |\nabla u|^2).$$

Segue, então, que

$$\tilde{g}(\alpha', \alpha') = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - |\nabla u|^2}} + 1 \right)^2 g(\alpha', \alpha') \geq \frac{1}{1 - |\nabla u|^2} \cdot g(\alpha', \alpha') \geq |\bar{\alpha}'|^2.$$

Daí, denotando por \hat{g} a métrica euclidiana de \mathbb{R}^2 , temos que

$$L_{\tilde{g}}(\alpha) = \lim_{t \rightarrow T^-} \int_0^t \tilde{g}(\alpha', \alpha')^{\frac{1}{2}} dt \geq \lim_{t \rightarrow T^-} \int_0^t |\bar{\alpha}'| dt = L_{\hat{g}}(\bar{\alpha}).$$

Uma vez que (\mathbb{R}^2, \hat{g}) é completo e $\bar{\alpha}$ é divergente, temos, pelo Teorema 2.5, que $L_{\hat{g}}(\bar{\alpha}) = +\infty$. Então, segue da desigualdade acima que $L_{\tilde{g}}(\alpha) = +\infty$, ou seja, toda curva divergente de (M, \tilde{g}) possui comprimento infinito; por sua vez, isso garante a completude desta variedade riemanniana, novamente pelo Teorema 2.5.

6 ISOMETRIA ENTRE O PLANO EUCLIDIANO E O GRÁFICO COM A NOVA MÉTRICA

Ao longo deste capítulo, \tilde{g} denota a métrica em M construída no capítulo anterior, de modo que (M, \tilde{g}) é uma variedade riemanniana *flat* e completa.

Uma vez que (M, \tilde{g}) é completa, sabemos pelo Teorema de Rinow-Hopf que, para qualquer p fixado, \exp_p está definida em todo o T_pM . Diante disso, o primeiro objetivo deste capítulo é provar que $\exp_p : (T_pM, \tilde{g}_p) \rightarrow (M, \tilde{g})$ é isometria local. Para tanto, dado $v \in T_pM$, identificaremos $T_v(T_pM)$ com T_pM . Além disso, denotaremos \tilde{g} por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, sendo também $|\cdot| = \sqrt{\tilde{g}(\cdot, \cdot)}$. Então, tomando $w \in T_vT_pM \approx T_pM$, mostraremos que

$$|(d\exp_p)_v(w)| = |w|. \quad (6.1)$$

Como o resultado é trivial para $w = 0$, considere, daqui em diante, $w \neq 0$. Para $v = 0$, temos que $(d\exp_p)_v$ é a aplicação identidade e o resultado também segue trivialmente. Portanto, no que segue também consideraremos $v \neq 0$.

Primeiro, analisemos o caso em que w é paralelo a v , digamos $w = \lambda v$, com $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Considerando a geodésica $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$, partindo p , veja que, pela Regra da Cadeia, $\gamma'_v(t) = (d\exp_p)_{tv}(v)$. Como $\gamma'_v(0) = v$ e $|\gamma'_v|$ é constante, segue que $|(d\exp_p)_v(v)| = |v|$. Multiplicando por $|\lambda|$ dos dois lados e utilizando a linearidade de $(d\exp_p)_v$, obtemos (6.1).

Agora, suponha $w \perp v$; mostraremos que

$$\langle (d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w) \rangle = 0 \quad (6.2)$$

de forma que ainda vale (6.1). Seja $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow T_pM$ uma parametrização do círculo centrado em $0_p \in T_pM$ e de raio $|v|$, com $\alpha(0) = v$ e $\alpha'(0) = w$. Tome

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow M \\ (s, t) &\mapsto \exp_p(t\alpha(s)) \end{aligned}$$

superfície parametrizada. Obtemos que

$$\frac{\partial f}{\partial t}(s, t) = (d\exp_p)_{t\alpha(s)}(\alpha(s)) = \gamma'_{\alpha(s)}(t) \quad (6.3)$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial s}(s, t) = (d\exp_p)_{t\alpha(s)}(t\alpha'(s)), \quad (6.4)$$

de modo que

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle(0, 1) = \langle (d \exp_p)_v(v), (d \exp_p)_v(w) \rangle.$$

Note que, para qualquer $s \in \mathbb{R}$, vale

$$\frac{\partial f}{\partial s}(s, 0) = (d \exp_p)_0(0) = 0,$$

logo, $\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle(s, 0) = 0$. Assim, se provarmos que $\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle$ independe de t , teremos que, para quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$,

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle(s, t) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle(s, 0) = 0$$

o que provará (6.2). Para tanto, vale notar que, por $\gamma_{\alpha(s)}$ ser geodésica, temos:

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|^2 = |\gamma_{\alpha(s)}'(t)|^2 = |\alpha(s)|^2 = |v|^2, \text{ constante e } \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Daí, por (2.24), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle &= \left\langle \underbrace{\frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t}}_{=0}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

em que utilizamos (2.34) na segunda igualdade. Segue o que queríamos provar.

Para o que falta, seja

$$J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t) = (d \exp_p)_{tv}(tw) = t(d \exp_p)_{tv}(w) = tH(t).$$

Veja que, sendo (M, \tilde{g}) flat, segue de (2.35) que

$$0 = \tilde{R}_{\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{D}{\partial s} \underbrace{\frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t}}_{=0} = \frac{D^2}{\partial t^2} \frac{\partial f}{\partial s},$$

em que utilizamos (2.34) na última igualdade. Em particular,

$$J'' = \frac{D^2}{dt^2} J = 0 \tag{6.5}$$

Além disso, pela Regra da Cadeia, temos

$$J'(t) = (d \exp_p)_{tv}(w) + t \cdot H'(t),$$

logo,

$$J'(0) = (d \exp_p)_0(w) = w.$$

Temos, por (6.5),

$$\frac{d}{dt} \langle J', J' \rangle = 2 \langle J'', J' \rangle = 0.$$

Daí, $t \mapsto |J'(t)|$ é função constante e temos $|J'(t)| = |J'(0)| = |w|$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Agora, note que

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle J(t), J(t) \rangle = 2 \langle J'(0), \underbrace{J(0)}_{=0} \rangle = 0.$$

Além disso, por (6.5) novamente,

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle J, J \rangle = 2 \underbrace{\langle J'', J \rangle}_{=0} + 2 \langle J', J' \rangle = 2|w|^2.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\frac{d}{dt} \langle J(t), J(t) \rangle - \underbrace{\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle J(t), J(t) \rangle}_{=0} = \int_0^t \frac{d^2}{dt^2} \langle J(t), J(t) \rangle dt = \int_0^t 2|w|^2 dt = 2|w|^2 t,$$

portanto,

$$|J(t)|^2 = |w|^2 t^2.$$

Segue que

$$|(d \exp_p)_v(w)| = |J(1)| = |w|, \tag{6.6}$$

como queríamos provar.

Agora, tomando $w \in T_p M$ qualquer, escreva $w = w^\perp + w^\top$, em que $w^\perp \perp v$ e w^\top é paralelo a v . Uma vez que temos (6.2), podemos utilizar o Teorema de Pitágoras para obter

$$\begin{aligned} |(d \exp_p)_v(w)|^2 &= |(d \exp_p)_v(w^\perp)|^2 + |(d \exp_p)_v(w^\top)|^2 \\ &= |w^\perp|^2 + |w^\top|^2 \\ &= |w|^2 \end{aligned}$$

atingindo, assim, o primeiro objetivo deste capítulo.

O segundo objetivo é provar que $\exp_p : (T_p M, \tilde{g}_p) \longrightarrow (M, \tilde{g})$ é difeomorfismo. Para tanto, utilizaremos o Teorema (2.9).

Seja $v \in T_p M$. Dado $w \in T_p M$ tal que $(d \exp_p)_v(w) = 0$, de (6.1) segue que $|w| = 0$, logo, $w = 0$, já que \tilde{g} é métrica riemanniana. Portanto, $(d \exp_p)_v$ é injetiva e, tendo em vista que $\dim T_p M = \dim M = 2$, segue que $(d \exp_p)_v$ é isomorfismo. Isso prova que \exp_p é difeomorfismo local, pelo Teorema da Aplicação Inversa.

Além disso, uma vez que $T_p M$ é homeomorfo a \mathbb{R}^2 , $T_p M$ é conexo por caminhos. Pela mesma razão, M é simplesmente conexo. Resta, então, mostrar que \exp_p possui a propriedade de levantamento de curvas suaves. Sejam $c : [0, 1] \longrightarrow M$ uma curva suave e $v \in T_p M$ com $\exp_p(v) = c(0)$. Defina

$$\mathcal{A} = \{t \in [0, 1]; \exists \tilde{c} : [0, t] \longrightarrow T_p M \text{ suave t.q. } \exp_p \circ \tilde{c} = c|_{[0, t]} \text{ e } \tilde{c}(0) = v\}.$$

Veja que $\mathcal{A} \neq \emptyset$, já que $0 \in \mathcal{A}$. É suficiente provar que \mathcal{A} é aberto e fechado em $[0, 1]$, de modo que, sendo $[0, 1]$ conexo, tenhamos $\mathcal{A} = [0, 1]$.

Fixado $t \in \mathcal{A}$, note que, por definição de \mathcal{A} , $[0, t] \subseteq \mathcal{A}$. Para o que segue, considere $t \neq 1$, pois, do contrário, teríamos $\mathcal{A} = [0, 1]$ e nada haveria mais a provar. Considere também $t \neq 0$, pois, para $t = 0$, os argumentos são análogos. Tome uma vizinhança \tilde{V} de $\tilde{c}(t)$ tal que $\exp_p|_{\tilde{V}}$ seja difeomorfismo sobre a vizinhança $V = \exp_p(\tilde{V})$ de $c(t)$. Como V é aberto e c é contínua, haverá $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subseteq c^{-1}(V)$. Defina, então, $\tilde{c}_1 = \exp_p|_{\tilde{V}}^{-1} \circ c$ em $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$. Sendo composição de funções suaves, \tilde{c}_1 é suave. Além disso, uma vez que \exp_p é injetiva em \tilde{V} e $\exp_p(\tilde{c}(t)) = c(t) = \exp_p(\tilde{c}_1(t))$, temos $\tilde{c}(t) = \tilde{c}_1(t)$. Logo, \tilde{c}_1 e \tilde{c} coincidem em seu domínio comum $(t - \varepsilon, t]$. Utilizando \tilde{c}_1 para estender \tilde{c} a $(t, t + \varepsilon)$, temos $\tilde{c}|_{[0, s]} : [0, s] \longrightarrow T_p M$, levantamento suave de $c|_{[0, s]}$ para todo $t \leq s < t + \varepsilon$. Isso prova que todo ponto de \mathcal{A} possui uma vizinhança aberta em $[0, 1]$ e contida em \mathcal{A} .

Agora, provemos que $\partial \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$. Seja $t_0 \in \partial \mathcal{A}$ e tome sequência $(t_n)_{n \geq 1}$ em \mathcal{A} tal que $t_n \longrightarrow t_0$. Se houver n tal que $t_n > t_0$, então $t_0 \in [0, t_n] \subseteq \mathcal{A}$. Suponha, então, que $t_n < t_0$ para todo n e suponha, sem perda de generalidade, que a sequência seja crescente. Uma vez que $[0, t_n] \subseteq \mathcal{A}$, para todo n , segue que $[0, t_0) \subseteq \mathcal{A}$. Queremos provar que a sequência $(\tilde{c}(t_n))_{n \geq 1}$ está contida em um subconjunto compacto de $T_p M$. Utilizando a Regra da Cadeia e o fato de

\exp_p ser isometria local, temos

$$\begin{aligned} L_{\tilde{g}}(c|_{[0,t_n]}) &= \int_0^{t_n} |c'(t)| dt = \int_0^{t_n} \left| (d\exp_p)_{\tilde{c}(t)}(\tilde{c}'(t)) \right| dt \\ &= \int_0^{t_n} |\tilde{c}'(t)| dt = L(\tilde{c}|_{[0,t_n]}) \geq d_{g_p}(\tilde{c}(0), \tilde{c}(t_n)). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Uma vez que $\text{Im}(c)$ é compacto, $L_{\tilde{g}}(c)$ é finito. Porém, caso $(\tilde{c}(t_n))_{n \geq 1}$ não esteja contida em um compacto, teremos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{g_p}(\tilde{c}(0), \tilde{c}(t_n)) = +\infty,$$

o que contradiz (6.7), já que $L_{\tilde{g}}(c|_{[0,t_n]}) \leq L_{\tilde{g}}(c)$, para todo n .

Diante disso, a menos da passagem a uma subsequência, podemos supor que $(\tilde{c}(t_n))_{n \geq 1}$ converge para $r \in T_p M$. Tome vizinhança \tilde{U} em torno de r tal que $\exp_p|_{\tilde{U}}$ seja difeomorfismo, e seja $U = \exp_p(\tilde{U})$. Veja que, pela continuidade de \exp_p e de c ,

$$\exp_p(r) = \exp_p\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{c}(t_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(\tilde{c}(t_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} c(t_n) = c\left(\lim_{n \rightarrow \infty} t_n\right) = c(t_0).$$

Portanto, $c(t_0) \in U$. Como U é aberto e c é contínua, existe intervalo I aberto em $[0, 1]$, contendo t_0 e tal que $c(I) \subseteq U$. Defina $\tilde{c}_2 = \exp_p|_{\tilde{U}}^{-1} \circ c$ em I e seja n_1 um índice suficientemente grande para que t_{n_1} esteja em I e $\tilde{c}(t_{n_1})$ esteja em \tilde{U} . De forma análoga à prova de que \mathcal{A} é aberto, obtemos que $\tilde{c}(t_{n_1}) = \tilde{c}_2(t_{n_1})$, pela injetividade de \exp_p em \tilde{U} , de sorte que \tilde{c}_2 e \tilde{c} coincidem em seu domínio comum $I \cap [0, t_0)$, que contém o aberto (t_{n_1}, t_0) . Podemos, então, estender \tilde{c} suavemente a t_0 usando \tilde{c}_2 , de modo que $\tilde{c}(t_0) = \exp_p|_{\tilde{U}}^{-1}(c(t_0)) = r$. Fica provado que $t_0 \in \mathcal{A}$, como queríamos.

Sendo, portanto, \exp_p isometria local e difeomorfismo, concluímos que \exp_p é isometria global. Seja e_1, e_2 a base canônica de \mathbb{R}^2 e \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 uma base ortonormal para $T_p M$ na norma \tilde{g}_p . Defina a isometria linear $J : (\mathbb{R}^2, \mathring{g}) \rightarrow (T_p M, \tilde{g}_p)$ fazendo $J(e_i) = \tilde{e}_i$, para $i \in \{1, 2\}$. Finalmente, defina a isometria

$$\mathcal{T} = \exp_p \circ J : (\mathbb{R}^2, \mathring{g}) \rightarrow (M, \tilde{g}).$$

7 MOSTRANDO QUE A FUNÇÃO É AFIM

Dos capítulos 3 e 4, sabemos que existe $a \in \mathbb{L}^3$, tal que $1/\langle N, a \rangle$, com N definido por (4.1), é função positiva e harmônica na superfície máxima (M, g) . Tendo em vista que $(\langle N, b \rangle + 1)^2 > 0$ e que a propriedade de ser harmônica é invariante por mudanças conformes de métrica, $1/\langle N, a \rangle$ continua positiva e harmônica em (M, \tilde{g}) . Sendo $\mathcal{T} : (\mathbb{R}^2, \tilde{g}) \rightarrow (M, \tilde{g})$, a isometria encontrada no capítulo anterior, temos que

$$\frac{1}{\langle N, a \rangle} \circ \mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

é positiva e harmônica, logo constante, pelo Corolário (2.8). Disso segue que $1/\langle N, a \rangle$ é constante, e, daí, que $\langle N, a \rangle$ é constante. Por (2.29), temos que o laplaciano de uma função constante é nulo, logo, $\Delta \langle N, a \rangle \equiv 0$ e, de (3.4), obtemos que $\text{tr}(A^2) \equiv 0$, já que $\langle N, a \rangle > 0$. Disso segue que A é um operador identicamente nulo, de sorte que (M, g) é totalmente geodésica.

A fim de utilizar o Teorema (2.6), provemos que todo plano em \mathbb{L}^3 é totalmente geodésico e completo. Como um plano é uma subvariedade de codimensão 1, fixado um campo vetorial unitário e normal, temos que o operador de Weingarten associado será dado por (2.17). Como todo campo vetorial unitário normal ao plano é constante, segue que o operador de Weingarten associado será identicamente nulo. Logo, as geodésicas dos planos serão também geodésicas de \mathbb{L}^3 , ou seja, serão retas parametrizadas com velocidade constante. Segue, então, da geometria espacial, que todo plano com a métrica induzida de \mathbb{L}^3 será uma variedade completa.

Agora, tome ponto $p \in M$ e considere o plano $\Lambda = \{p + v \in \mathbb{L}^3; v \perp N(p)\}$. É claro que $T_p M = \{v \in \mathbb{L}^3; v \perp N(p)\} = T_p \Lambda$. Mais ainda, todo plano tangente a Λ coincide com $T_p M$, o que nos garante que Λ é tipo-espaço. Como M é conexa, obtemos do Teorema (2.6) que $M \subseteq \Lambda$. Note que, escrevendo $N(p) = (a, b, c)$ e $p = (x_0, y_0, z_0)$, temos

$$\begin{aligned} \Lambda &= \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3; a(x - x_0) + b(y - y_0) - c(z - z_0) = 0\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{L}^3; z = \frac{a}{c}x + \frac{b}{c}y - \frac{1}{c}\langle N(p), p \rangle \right\} \end{aligned}$$

Então, tomando $(x, y, u(x, y)) \in M$, temos

$$u(x, y) = \frac{a}{c}x + \frac{b}{c}y - \frac{1}{c}\langle N(p), p \rangle,$$

o que prova o Teorema de Calabi-Bernstein para superfícies máximas.

8 CONCLUSÃO

Uma vez cumprido o objetivo estabelecido nesta dissertação, qual seja, o de demonstrar o Teorema de Calabi-Bernstein seguindo a estratégia simplificada apresentada por A. Romero em [11], a realização deste trabalho possibilita estudos subsequentes, mais aprofundados, a respeito dos problemas de Bernstein e de Calabi-Bernstein em contextos mais gerais, tanto no sentido de compreender a bibliografia já existente, quanto no sentido de buscar resultados originais para problemas relacionados.

REFERÊNCIAS

- [1] BERNSTEIN, Serge. Sur les surfaces définies au moyen de leur courbure moyenne ou totale **Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.** , France, v. 27, p. 233–256, 1910.
- [2] BOMBIERI, Enrico; DE GIORGI, Ennio; DZHUSTI, É. Minimal cones and the Bernstein problem. **Invent Math.** , Germany, v.7, p.243–268, 1969.
- [3] CALABI, Eugenio. Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations. **Proc. Symp. Pure Math.** , [s.l.], v. 15 ,p. 223–230, 1970.
- [4] CARMO, Manfredo P. do. **Geometria riemanniana**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
- [5] CHENG, Shiu-Yuen; YAU, Shing-Tung. Maximal spacelike hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski spaces. **Ann. Math.** , United States, v. 104, n. 3, p. 407-419., 1976.
- [6] GREENE, Robert E.; KRANTZ, Steven G. **Function theory of one complex variable**. Providence: American Mathematical Society, 2006.
- [7] LEE, John M. **Introduction to Riemannian manifolds**, 2. ed. New York: Springer, 2018.
- [8] LEE, John M. **Introduction to smooth manifolds**, 2. ed. New York: Springer, 2012.
- [9] LEE, John M. **Introduction to topological manifolds**, 2. ed. New York: Springer, 2000.
- [10] O’NEILL, Barrett. **Semi-Riemannian geometry with applications to relativity**. New York: Academic Press, 1983.
- [11] ROMERO, Alfonso. Simple proof of Calabi-Bernstein’s Theorem on maximal surfaces. **Proc. Ame. Math. Soc.** , [s.l.], v.124, p. 1315-1317, 1996.
- [12] RUBIO, Rafael M. Calabi–Bernstein-Type Problems in Lorentzian Geometry. **International Meeting on Lorentzian Geometry.** , [s.l.], p. 213–236, 2016.