



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
MESTRADO EM ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA

LÚCIO ANDRÉ BASTOS RAMOS

**APLICAÇÃO DA FUNÇÃO DE LAMBERT-TSALLIS NA SOLUÇÃO DE UM
CIRCUITO RESISTOR-CAPACITOR COM DECAIMENTO NÃO EXPONENCIAL**

FORTALEZA

2025

LÚCIO ANDRÉ BASTOS RAMOS

APLICAÇÃO DA FUNÇÃO DE LAMBERT-TSALLIS NA SOLUÇÃO DE UM
CIRCUITO RESISTOR-CAPACITOR COM DECAIMENTO NÃO EXPONENCIAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Teleinformática. Área de concentração: Eletromagnetismo Aplicado

Orientador: Prof. Dr. Rubens Viana Ramos.

FORTALEZA
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R144a Ramos, Lucio André Bastos.

Aplicação da função de Lambert-Tsallis na solução de um circuito resistor-capacitor com decaimento não exponencial / Lucio André Bastos Ramos. – 2025.
37 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática, Fortaleza, 2025.

Orientação: Prof. Dr. Rubens Viana Ramos.

1. Função W_q de Lambert-Tsallis. 2. Circuito resistor-capacitor. 3. Números transcendentais e algébricos. 4. Decaimento não exponencial. I. Título.

CDD 621.38

LÚCIO ANDRÉ BASTOS RAMOS

APLICAÇÃO DA FUNÇÃO DE LAMBERT-TSALLIS NA SOLUÇÃO DE UM
CIRCUITO RESISTOR-CAPACITOR COM DECAIMENTO NÃO EXPONENCIAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Teleinformática. Área de concentração: Eletromagnetismo Aplicado

Aprovada em: ____ / ____ / ____.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rubens Viana Ramos (Orientador)
Universidade Federal do Ceará - UFC

Prof. Dr. Kleber Zuza Nobrega
Universidade Federal do Ceará - UFC

Prof. Dr. José Leonardo Esteves da Silva
Universidade Federal do Ceará - UFC

Aos meus filhos, André e Dudinha.

À minha esposa, Michele.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por acompanhar os meus passos no decorrer de toda essa jornada de vida e acadêmica.

À minha esposa, Michele, que esteve comigo durante o Mestrado e que sempre me apoiou nas decisões e nas realizações.

Ao meu orientador, Rubens Viana Ramos, que é um ser humano grandioso, por me conduzir para a realização desta dissertação.

Aos meus professores do Grupo de Informação Quântica (GIQ), Kleber Zuza, Hilma Helena e João Batista, por seus ensinamentos e contribuição no meu mestrado, assim como aos meus amigos do GIQ.

Ao funcionário Renato Barbosa, pelo trabalho competente na secretaria do PPGETI.

RESUMO

A presente dissertação usa a função W_q de Lambert-Tsallis para obter a solução analítica do decaimento da corrente elétrica total em um circuito elétrico, alimentado por uma fonte de tensão contínua, composto por dois circuitos resistor-capacitor série, em paralelo. O resultado obtido permite o cálculo analítico do tempo de meia vida da corrente total, ou seja, o tempo necessário para a corrente total decair para metade de seu valor inicial. Em seguida, foi demonstrado que a solução para o tempo de meia vida da corrente total obedece à equação de Fermat portanto, dependendo dos valores dos resistores e capacitores escolhidos serem números transcendentais ou algébricos, valores inteiros maiores que dois para o tempo de meia vida pode ou não serem proibidos. Este é um exemplo físico do famoso último teorema de Fermat da teoria dos números, bem como apresenta uma implicação física do uso de números algébricos e transcendentais. Por fim, foi apresentado um circuito eletrônico para um oscilador, chamado oscilador de Fermat, cujo período de oscilação depende da solução da equação de Fermat.

Palavras-chave: Função W_q de Lambert-Tsallis; Circuito resistor-capacitor; Números transcendentais e algébricos; Decaimento não exponencial.

ABSTRACT

The present dissertation uses the Lambert-Tsallis W_q function in order to get the analytical solution for the non-exponential decay of the total electric current in an electric circuit, fed with a DC power supply, composed by two parallel branches of resistor-capacitor series circuits. The result obtained permits the analytical calculation of the half-life time of the total electrical current, that is, the time required for the total current to decay to half of its initial value. Following, it was shown that the solution for the half-life time of the total electrical current obeys a Fermat-type equation therefore, depending on the values chosen for the resistors and capacitors be algebraic or transcendental numbers, integers value larger than two for the half-life time can be forbidden or not. This is a physical example of the famous Fermat last theorem from number theory, as well it demonstrates a physical implication of the usage of algebraic and transcendental numbers. At last, it was presented the electronic circuit of an oscillator, named Fermat's oscillator, whose oscillation period depends on the solution of the Fermat equation.

Keyword: Lambert-Tsallis W_q function; Resistor-capacitor circuit; Transcendental and algebraic numbers; Non-exponential decay.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - $W(z)$ versus z . $W_0(z)$ – linha vermelha, $W_{-1}(z)$ – linha verde.	12
Figura 2 - $W_q(z)$ versus z para $q = 3/4$ (linha pontilhada) e $q = 5/4$ (linha contínua).	16
Figura 3 - $W_q(z)$ versus z para $q = \pi/4$ (vermelho), $q = 2\pi/3$ (verde) e $W(z)$ versus z (azul)...	23
Figura 4 - Circuito elétrico com uma fonte de tensão contínua (V), um resistor (R) e um capacitor (C).	25
Figura 5 - Circuito elétrico com fonte de tensão contínua (V), dois resistores (R_1 e R_2) e dois capacitores (C_1 e C_2)	26
Figura 6 - $t_{1/2}$ versus C_1 (eq. (26)). $R = 1\text{k}\Omega$, $C_2 = 1\mu\text{F}$	29
Figura 7 - $t_{1/2}$ versus C_1 . $R = 1\text{k}\Omega$, $C_2 = 1/\ln(101/20) \mu\text{F}$	30
Figura 8 - Circuito eletrônico do oscilador de Fermat.	33

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - N é o valor desejado e $t_{1/2}$ é o valor real calculado usando a eq. (3.14). As constantes de tempo são $\tau_1 = \ln(2)RC_1 = \ln(c/a)$ [ms], $\tau_2 = \ln(2)RC_2 = \ln(c/b)$ [ms] (R [k Ω], C_1 [μ F] and C_2 [μ F]).	32
--	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	11
2	AS FUNÇÕES W DE LAMBERT E W_q DE LAMBERT-TSALLIS	12
2.1	A Função W de Lambert	12
2.2	A Função W_q de Lambert-Tsallis	14
2.3	Aplicações de W_q em mecânica	19
2.4	Cálculo Numérico de W_q	22
3	APLICAÇÃO DA FUNÇÃO W_q DE LAMBERT-TSALLIS EM UM CIRCUITO RC DUPLO	25
3.1	Circuitos Simples com Resistores e Capacitores.....	25
3.2	Solução Analítica para o Decaimento não Exponencial no Circuito RC Duplo	26
3.3	Equação de Fermat no Circuito RC Duplo	28
4	CONCLUSÃO.....	35
	REFERÊNCIAS	36
	ANEXO I.....	37

1 INTRODUÇÃO

As funções matemáticas especiais possuem um papel importante na engenharia e na física, permitindo a obtenção de soluções analíticas para problemas importantes. Por exemplo, as funções de Bessel no cálculo do campo elétrico em fibras ópticas, os polinômios de Hermite no cálculo da função de onda no oscilador harmônico quântico e a função W de Lambert no cálculo da corrente elétrica em circuitos com diodos, dentre outros. Entretanto, nem sempre uma solução analítica permite o bom entendimento do papel de uma determinada variável no problema considerado, como no caso das soluções de polinômios quárticos com funções hipergeométricas. Além disso, o cálculo numérico de tais funções, normalmente representadas por séries de potência, pode ser complexo com problemas de convergência.

Uma nova função matemática especial, chamada função W_q de Lambert-Tsallis, uma generalização da função W de Lambert, foi proposta em 2018 e tem sido utilizada em diferentes campos da engenharia e da física, como informação quântica, comunicações ópticas, laser de elétrons livres, dentre outros. A função W_q está associada ao cálculo das raízes de trinômios, com potências inteiras ou fracionárias. É uma função de fácil utilização, gráfico simples e fácil cálculo numérico de seus valores reais.

Nesta direção, a presente dissertação traz uma aplicação da função W_q na solução de um circuito elétrico simples, composto por dois resistores e dois capacitores. Apesar da simplicidade, uma solução analítica para o problema considerado, o cálculo do tempo necessário para a corrente total cair para um valor predeterminado, não era conhecida, sendo esta a principal contribuição desta dissertação. Adicionalmente, uma versão simplificada do problema considerado, quando os dois resistores assumem o mesmo valor, resulta em uma equação similar à equação de Fermat, permitindo analisar as consequências do último teorema de Fermat no circuito elétrico considerado, bem como mostrar que a escolha de valores numéricos algébricos ou transcendentais, influencia no comportamento do circuito.

Diante do acima exposto, esta dissertação está dividida em quatro capítulos. O Capítulo 2 traz uma breve revisão das funções W de Lambert e W_q de Lambert-Tsallis. O Capítulo 3 mostra a solução analítica para o tempo de meia vida da corrente total do circuito elétrico considerado bem como o elo entre o circuito utilizado e o último teorema de Fermat. Por fim, o Capítulo 4 apresenta as conclusões e as perspectivas de trabalhos futuros.

2 AS FUNÇÕES W DE LAMBERT E W_q DE LAMBERT-TSALLIS

Neste capítulo serão expressas as conceituações acerca das funções de W de Lambert e W_q de Lambert-Tsallis.

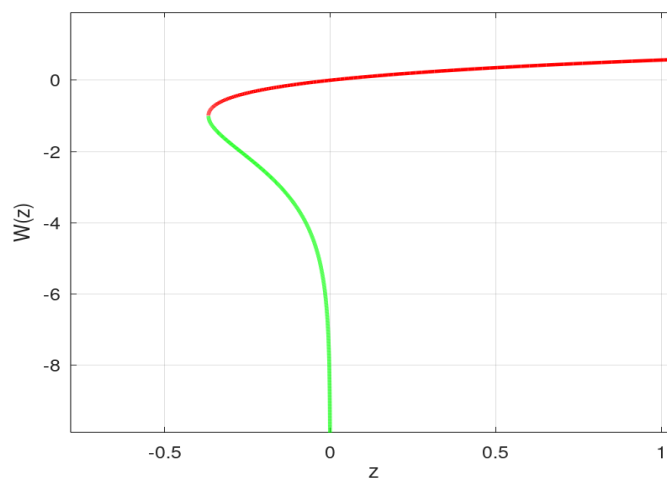
2.1 A Função W de Lambert

A função $W(z)$ de Lambert é uma função elementar bastante útil que pode ser usada para encontrar soluções analíticas em diversos ramos da engenharia e física [1,2]. Ela é útil na solução de problemas onde as variáveis dependente e independente são relacionadas por uma lei exponencial. A função $W(z)$ é definida para o número complexo z como a função que resolve a seguinte equação:

$$W(z)e^{W(z)} = z \quad (2.1)$$

A função $W(z)$ é uma função não injetora e multivalorada. Existem infinitas soluções e estas são diferenciadas por números inteiros que representam os ramos de W . Assim, as soluções são representadas por $W_t(z)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$. Dentre todas essas soluções, as únicas que são reais quando z é real são os ramos $W_0(z)$ e $W_{-1}(z)$ e, por isso, são de especial interesse na engenharia e na física. O gráfico da função $W(z)$ é mostrado na Figura 1 expressa a seguir:

Figura 1 - $W(z)$ versus z . $W_0(z)$ - linha vermelha, $W_{-1}(z)$ - linha verde



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como pode ser observado na Figura 1, entre $-1/e \leq z \leq 0$ existem dois ramos reais de $W(z)$. O ramo que satisfaz $W(z) \geq -1$ é o ramo principal chamado $W_0(z)$ enquanto o ramo que satisfaz $W(z) \leq -1$ é chamado de $W_{-1}(z)$. Para $z > 0$ só $W_0(z)$ é real e para $z < -1/e$ não há soluções reais. Desta forma, $-1 < W_{-1}(z) < 0$ para $-1/e \leq z < 0$, e $-1 < W_0(z) < +\infty$ para $-1/e \leq z < +\infty$. Além disso, o ponto $(z_b = -1/e, W(z_b) = 1)$, onde os ramos W_0 e W_{-1} se encontram é chamado ponto de branch. Ele é obtido calculando-se $dW/dz = \infty$.

A utilização da função $W(z)$ na solução de problemas requer que o problema considerado seja reescrito na forma da eq. (2.1). Alguns exemplos são mostrados abaixo.

I) Por definição, a solução de $ye^y = x$ é $y = W(x)$, ou seja

$$ye^y = x \rightarrow W(ye^y) = W(x) \rightarrow y = W(x). \quad (2.2)$$

II)

$$\begin{aligned} y \ln(y) = x &\rightarrow y = e^{x/y} \rightarrow 1 = \frac{1}{y} e^{x/y} \rightarrow x = \frac{x}{y} e^{x/y} \rightarrow W(x) = W\left(\frac{x}{y} e^{x/y}\right) \\ &\rightarrow W(x) = \frac{x}{y} \rightarrow y = \frac{x}{W(x)}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

III)

$$y \ln(y) = x \rightarrow x = \ln(y) e^{\ln(y)} \rightarrow W(x) = W[\ln(y) e^{\ln(y)}] \rightarrow W(x) = \ln(y) \rightarrow y = e^{W(x)}. \quad (2.4)$$

IV)

$$\begin{aligned} \frac{\ln(y)}{y} = x &\rightarrow \ln(y) = xy \rightarrow y = e^{xy} \rightarrow -xy = -xe^{xy} \rightarrow -xye^{-xy} = -x \\ &\rightarrow W(-xye^{-xy}) = W(-x) \rightarrow -xy = W(-x) \rightarrow y = -\frac{W(-x)}{x}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Existem diferentes generalizações de $W(z)$, uma generalização de $W(z)$ é obtida substituindo-se na equação (1) a função exponencial pela função q -exponencial de Tsallis, $\exp_q(z)$. A função q -exponencial é definida como [4, 5,6]

$$e_q^z =: \begin{cases} e^z & \text{se } q = 1 \\ [1 + (1-q)z]^{1/(1-q)} & \text{se } q \neq 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

O parâmetro q é um número real, chamado de parâmetro de não extensividade de Tsallis. As duas propriedades de e_q^z usada neste trabalho são as seguintes:

$$\left(e_q^z\right)^\alpha = \left\{ [1 + (1-q)z]^{1/(1-q)} \right\}^\alpha = [1 + (1-q)z]^{\alpha/(1-q)} = \left[1 + \frac{(1-q)}{\alpha} \alpha z \right]^{\alpha/(1-q)} = e_{1-(1-q)/\alpha}^{\alpha z} \quad (2.7a)$$

$$e_q^z = 1 + z. \quad (2.7b)$$

A função inversa da q -exponencial é o logaritmo natural de Tsallis, $\ln_q(z)$, definido como sendo:

$$\ln_q(x) =: \begin{cases} \ln(x) & x > 0 \text{ \& } q = 1 \\ \frac{x^{(1-q)} - 1}{1-q} & x > 0 \text{ \& } q \neq 1 \\ \text{não definido} & x \leq 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Assim,

$$e_q^{\ln_q(x)} = x \text{ para } x > 0 \quad (2.9)$$

$$\ln_q(e_q^x) = x \text{ para } 0 < e_q^x < \infty. \quad (2.10)$$

2.2 A Função W_q de Lambert-Tsallis

A função W_q de Lambert-Tsallis é definida como a função que resolve a seguinte equação:

$$W_q(z) e_q^{W_q(z)} = z, \quad (2.11)$$

As soluções de (2.11) são as funções W_q de Lambert-Tsallis introduzida em [1]. Tem-se que $\lim_{q \rightarrow 1} e_q^z = e^z$ e $\lim_{q \rightarrow 1} W_q(z) = W(z)$. Usando a definição da função q -exponencial descrita em (2.6) em (2.11) pode-se encontrar uma expressão analítica de $W_q(z)$ para alguns valores especiais de q :

$$W_q^{(1-q)} + (1-q)W_q^{(2-q)} - z^{(1-q)} = 0. \quad (2.12)$$

No caso mais simples, $q = 2$, tem-se:

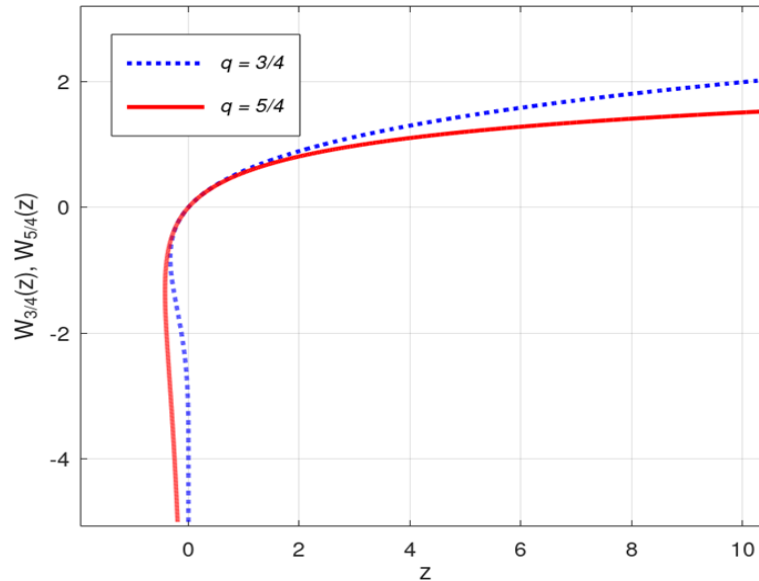
$$W_2(z)e_2^{W_2(z)} = z \Rightarrow W_2(z)[1 + (1-2)W_2(z)]^{\frac{1}{1-2}} = z \Rightarrow \frac{W_2(z)}{1-W_2(z)} = z \Rightarrow W_2(z) = \frac{z}{1+z}, \quad (2.13)$$

para $z \in (-1, +\infty)$. Para $q = 3/2$ tem-se :

$$W_{\frac{3}{2}}^{\pm}(z) = \frac{2(z+1) \pm 2\sqrt{2z+1}}{z}. \quad (2.14)$$

A função $W_{3/2}^+(z)$ satisfaz a equação (2.11) no intervalo $z \in [-1/2, \infty)$, enquanto a função $W_{3/2}^-(z)$ satisfaz a equação (2.11) no intervalo $z \in [-1/2, 0)$. Pode-se mostrar que o ponto de branch da função de Lambert-Tsallis W_q é $(z_b = \exp_q(1/(q-2))/(q-2), W_q(z_b) = 1/(q-2))$, para $q \neq 2$. Não há ponto de branch com z_b finito para $q = 2$. Assim, o ponto de branch para $q = 3/2$, por exemplo, possui $z_b = -1/2$. De forma geral, a solução no intervalo $[z_b, 0)$ é $W_q^-(z)$ enquanto a solução no intervalo $[z_b, \infty)$ é $W_q^+(z)$. As curvas de $W_q(z)$ versus z para $q = 3/4$ e $q = 5/4$ são mostradas na Figura 2.

Figura 2 - $W_q(z)$ versus z para $q = 3/4$ (linha pontilhada) e $q = 5/4$ (linha contínua)



Fonte: Elaborada pelo autor.

De uma forma geral, a fórmula analítica de $W_q(z)$ não é conhecida e o valor de $W_q(z)$ precisa ser calculado numericamente [4].

A utilização da função $W_q(z)$ na solução de problemas matemáticos requer que o referido problema seja escrito na forma da equação (2.11). É fácil mostrar que qualquer trinômio pode ser escrito na forma da equação (2.11). Seja o trinômio $ax^\alpha + bx^\beta + c = 0$, então:

$$ax^\alpha + bx^\beta = -c \quad (2.15.a)$$

$$ax^\alpha \left(1 + \frac{b}{a} x^{\beta-\alpha} \right) = -c \Rightarrow x^\alpha e_0^{\frac{b}{a} x^{\beta-\alpha}} = -\frac{c}{a} \quad (2.15.b)$$

$$\left(x^\alpha e_0^{\frac{b}{a} x^{\beta-\alpha}} \right)^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} = \left(-\frac{c}{a} \right)^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} \Rightarrow x^{\beta-\alpha} e^{\frac{b \beta-\alpha}{\alpha} x^{\beta-\alpha}} = \left(-\frac{c}{a} \right)^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} \quad (2.15.c)$$

$$\frac{b \beta-\alpha}{a \alpha} x^{\beta-\alpha} e^{\frac{b \beta-\alpha}{\alpha} x^{\beta-\alpha}} = \frac{b \beta-\alpha}{a \alpha} \left(-\frac{c}{a} \right)^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} \Rightarrow \frac{b \beta-\alpha}{a \alpha} x^{\beta-\alpha} = W_{1-\frac{\alpha}{\beta-\alpha}} \left[\frac{b \beta-\alpha}{a \alpha} \left(-\frac{c}{a} \right)^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} \right] \quad (2.15.d)$$

$$x = \left\{ \frac{a}{b} \frac{\alpha}{\beta - \alpha} W_{1 - \frac{\alpha}{\beta - \alpha}} \left[\frac{b}{a} \frac{\beta - \alpha}{\alpha} \left(-\frac{c}{a} \right)^{\frac{\beta - \alpha}{\alpha}} \right] \right\}^{1/(\beta - \alpha)}. \quad (2.15.e)$$

Alguns exemplos são mostrados abaixo [3]:

$$I) x^5 + Ax + B = 0$$

Colocando x^5 em evidência e subtraindo B em ambos os lados da igualdade, temos:

$$x^5(1 + Ax^{-4}) = -B \quad (2.16.a)$$

Considerando a relação $1 + z = e_0^z$ e substituindo na equação (2.16.a), tem-se:

$$x^5 e_0^{Ax^{-4}} = -B \quad (2.16.b)$$

Elevando ambos os lados da equação (2.16.b) por $-4/5$, tem-se:

$$\left[x^5 e_0^{Ax^{-4}} \right]^{\frac{-4}{5}} = (-B)^{\frac{-4}{5}}. \quad (2.16.c)$$

Utilizando a relação (2.7) em (2.16.c) chega-se a:

$$x^{-4} e^{\frac{-4}{5} Ax^{-4}} = (-B)^{\frac{-4}{5}}. \quad (2.16.d)$$

Multiplicando ambos os lados da equação (2.16.d) por $\frac{-4}{5} A$ resulta em:

$$\frac{-4}{5} Ax^{-4} e^{\frac{-4}{5} Ax^{-4}} = \frac{4}{5} A (-B)^{\frac{-4}{5}}. \quad (2.16.e)$$

Portanto, usando-se a definição de $W_q(z)$ chega-se, finalmente, a:

$$\frac{-4}{5}Ax^{-4} = W_{\frac{9}{4}}\left(\frac{4}{5}AB^{-\frac{4}{5}}\right) \rightarrow x^{-4} = \frac{-5}{4A}W_{\frac{9}{4}}\left(\frac{4}{5}AB^{-\frac{4}{5}}\right). \quad (2.16.f)$$

$$\text{II) } \frac{e^x + ae^{-x}}{2} = y$$

Colocando e^x em evidência, tem-se:

$$\frac{1}{2}e^x(1 + ae^{-2x}) = y \quad (2.17.a)$$

Considerando a relação $1 + z = e_0^z$ e substituindo na equação (2.17.a), obtém-se:

$$\frac{1}{2}e^x e_0^{ae^{-2x}} = y \quad (2.17.b)$$

Elevando ambos os lados da equação (2.17.b) por -2 , chega-se a:

$$\left[\frac{1}{2}e^x e_0^{ae^{-2x}}\right]^{-2} = y^{-2} \quad (2.17.c)$$

Utilizando a equação (2.7) em (2.17.c) resulta em:

$$4e^{-2x} e_{1-\frac{(1-0)}{-2}}^{-2ae^{-2x}} = y^{-2} \quad (2.17.d)$$

Multiplicando ambos os lados da equação (2.17.d) por $\frac{-1}{2}a$, resulta em:

$$-2ae^{-2x} e_{\frac{3}{2}}^{-2ae^{-2x}} = -\frac{a}{2}y^{-2}. \quad (2.17.e)$$

Por fim, usando-se a definição de $W_q(z)$ chega-se, finalmente, a:

$$-2ae^{-2x} = W_{\frac{3}{2}}\left(-\frac{a}{2}y^{-2}\right) \rightarrow x = -\frac{1}{2}\ln\left[-\frac{1}{2a}W_{\frac{3}{2}}\left(-\frac{a}{2}y^{-2}\right)\right]. \quad (2.17.f)$$

$$\text{III) } x(1+x)^{\pi/2} = z$$

$$x(e_0^x)^{\pi/2} = z \quad (2.18.a)$$

$$xe^{\frac{\pi}{2}x} = z \quad (2.18.b)$$

$$\frac{\pi}{2}xe^{\frac{\pi}{2}x} = \frac{\pi}{2}z \quad (2.18.c)$$

$$\frac{\pi}{2}x = W_{1-\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\pi}{2}z\right) \rightarrow x = \frac{2}{\pi}W_{1-\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\pi}{2}z\right). \quad (2.18.d)$$

2.3 Aplicações de W_q em mecânica

Oscilações requerem uma força restauradora. No regime linear, em sistemas mecânicos, essa força é proporcional ao deslocamento e atua em sentido contrário ao do movimento: $F = -kx$. Neste caso, usando a Segunda Lei de Newton, com massa constante, tem-se

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x = 0 \quad (2.19)$$

cuja solução geral é $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$, o que pode ser verificado por substituição. O parâmetro $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$ é a frequência natural de oscilação do sistema. Caso haja um fator que atrapalhe o movimento de oscilação, como forças de atrito, a equação (2.19) deve incluir esse termo, ficando da seguinte forma:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2b}{2m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = 0 \quad (2.20)$$

Nota-se em (2.20) que a força de atrito é proporcional à velocidade do corpo em movimento. O parâmetro $\beta = b/(2m)$ é chamado de parâmetro de amortecimento. A solução geral de (2.20) é obtida fazendo-se a substituição de x por $\exp(\lambda t)$. Isso transforma (2.20) em um polinômio de segundo grau em λ . As raízes desse polinômio são os valores de λ que tornam $\exp(\lambda t)$ solução de (2.20). Desta forma, a solução geral de (2.20) é dada por

$$x(t) = e^{-\beta t} \left[A_1 \exp\left(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t\right) + A_2 \exp\left(-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t\right) \right]. \quad (2.21)$$

Há três casos importantes a serem considerados em (2.21): 1) sistema subamortecido: $\omega_0^2 > \beta^2$, 2) sistema criticamente amortecido: $\omega_0^2 = \beta^2$ e 3) sistema superamortecido: $\omega_0^2 < \beta^2$. Todas essas situações estão fartamente descritas na literatura. Nesta dissertação, somente o sistema superamortecido é considerado. Neste caso, a solução de (2.20) fica da forma:

$$x(t) = A_1 \exp\left(\left(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} - \beta\right)t\right) + A_2 \exp\left(-\left(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} + \beta\right)t\right) = A_1 \exp(\xi_1 t) + A_2 \exp(\xi_2 t). \quad (2.22)$$

Se os valores iniciais de posição e velocidade são, respectivamente, x_0 e v_0 , então A_1 e A_2 são dados por:

$$A_1 = \left[\left(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \right) x_0 + v_0 \right] / 2\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad (2.23)$$

$$A_2 = \left[\left(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \right) x_0 + v_0 \right] / 2\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad (2.24)$$

Nosso objetivo aqui é calcular o tempo t_r necessário para o deslocamento ser igual ao valor x_r , ou seja:

$$A_1 \exp(\xi_1 t_r) + A_2 \exp(\xi_2 t_r) = x_r. \quad (2.25)$$

O valor de t_r é obtido da seguinte forma:

$$A_1 \exp(\xi_1 t_r) \left[1 + \frac{A_2}{A_1} \exp((\xi_2 - \xi_1) t_r) \right] = x_r \quad (2.26.a)$$

$$\exp(\xi_1 t_r) e_0^{\frac{A_2}{A_1} \exp((\xi_2 - \xi_1) t_r)} = \frac{x_r}{A_1} \quad (2.26.b)$$

$$\exp((\xi_2 - \xi_1)t_r) e^{\frac{A_2(\xi_2 - \xi_1)}{A_1 \xi_1} \exp((\xi_2 - \xi_1)t_r)} = \left(\frac{x_r}{A_1} \right)^{\frac{(\xi_2 - \xi_1)}{\xi_1}} \quad (2.26.c)$$

$$\frac{A_2(\xi_2 - \xi_1)}{A_1 \xi_1} \exp((\xi_2 - \xi_1)t_r) e^{\frac{A_2(\xi_2 - \xi_1)}{A_1 \xi_1} \exp((\xi_2 - \xi_1)t_r)} = \frac{A_2(\xi_2 - \xi_1)}{A_1 \xi_1} \left(\frac{x_r}{A_1} \right)^{\frac{(\xi_2 - \xi_1)}{\xi_1}} \quad (2.26.d)$$

$$\frac{A_2(\xi_2 - \xi_1)}{A_1 \xi_1} \exp((\xi_2 - \xi_1)t_r) = W_{1 - \frac{\xi_1}{(\xi_2 - \xi_1)}} \left(\frac{A_2(\xi_2 - \xi_1)}{A_1 \xi_1} \left(\frac{x_r}{A_1} \right)^{\frac{(\xi_2 - \xi_1)}{\xi_1}} \right) \quad (2.26.e)$$

$$t_r = \frac{1}{(\xi_2 - \xi_1)} \ln \left(\frac{\xi_1}{(\xi_2 - \xi_1)} \frac{A_1}{A_2} W_{1 - \frac{\xi_1}{(\xi_2 - \xi_1)}} \left(\frac{A_2(\xi_2 - \xi_1)}{A_1 \xi_1} \left(\frac{x_r}{A_1} \right)^{\frac{(\xi_2 - \xi_1)}{\xi_1}} \right) \right) \quad (2.26.f)$$

Outro problema que pode ser considerado é a equação de van der Pol:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0 x = \mu(a^2 - x^2) \frac{dx}{dt}. \quad (2.27)$$

Tentando a solução $x(t) = b \cos(\omega_0 t) + u(t)$ em (2.27) e mantendo apenas os termos de primeira ordem de $u(t)$, obtém-se a seguinte equação diferencial para $u(t)$:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0 u = -\mu b \omega_0 \left[\left(a^2 - \frac{b^2}{4} \right) \sin(\omega_0 t) - \frac{b^2}{4} \sin(3\omega_0 t) \right]. \quad (2.28)$$

Fazendo $b = 2a$ em (2.28), chega-se, finalmente, à equação diferencial

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0 u = \mu 2a^3 \omega_0 \sin(3\omega_0 t), \quad (2.29)$$

cuja solução é

$$u(t) = -\frac{\mu a^3}{4\omega_0} \sin(3\omega_0 t), \quad (2.30)$$

E, portanto, a solução completa de (2.28) fica da forma:

$$x(t) = 2a \cos(\omega_0 t) - \frac{\mu a^3}{4\omega_0} \sin(3\omega_0 t). \quad (2.31)$$

Uma questão interessante é: qual o valor de a para que $x(t = t_a) = x_a$? Para responder essa questão, a equação (2.31) deve ser invertida usando a função de Lambert-Tsallis:

$$x_a = 2a \cos(\omega_0 t_a) - \frac{\mu a^3}{4\omega_0} \sin(3\omega_0 t_a) \quad (2.32.a)$$

$$a \left[1 - \frac{\mu \sin(3\omega_0 t_a)}{8\omega_0 \cos(\omega_0 t_a)} a^2 \right] = \frac{x_a}{2 \cos(\omega_0 t_a)} = a [1 - \lambda a^2] = z \quad (2.32.b)$$

$$a e_0^{-\lambda a^2} = z \Rightarrow a^2 e_{1/2}^{-2\lambda a^2} = z^2 \Rightarrow -2\lambda a^2 e_{1/2}^{-2\lambda a^2} = -2\lambda z^2 \quad (2.32.c)$$

$$-2\lambda a^2 = W_{1/2}(-2\lambda z^2) \Rightarrow a = \sqrt{-\frac{1}{2\lambda} W_{1/2}(-2\lambda z^2)} = \sqrt{-\frac{4\omega_0 \cos(\omega_0 t_a)}{\mu \sin(3\omega_0 t_a)} W_{1/2}\left(-\frac{\mu \sin(3\omega_0 t_a) x_a^2}{16\omega_0 \cos^3(\omega_0 t_a)}\right)} \quad (2.32.d)$$

Portanto, o valor de a pode ser obtido por (2.32.d), quando as condições $\omega_0 t_a \neq n\pi/3$ e $\omega_0 t_a \neq (2k+1)\pi/2$, sendo n e k números inteiros, forem satisfeitas.

2.4 Cálculo Numérico de W_q

Em geral $W_q(z)$ pode ser calculada numericamente, dentre outras formas, usando o método de Halley, que é um método numérico que usa a própria função e suas derivadas de primeira e segunda ordens. De acordo com o método de Halley, a equação $f(x) = 0$ pode ser numericamente resolvida pela seguinte equação de recorrência:

$$x(j+1) = x(j) - \frac{2f(x(j))f'(x(j))}{2[f'(x(j))]^2 - f(x(j))f''(x(j))}. \quad (2.33)$$

Agora, usando $f(W_q) = W_q \exp_q(W_q) - z$ na equação (2.33), o valor de $W_q(z)$ pode ser numericamente obtido pela interação do seguinte mapa:

$$w_q(j+1) = w_q(j) - \frac{A}{B - \frac{AC}{2B}} \quad (2.34)$$

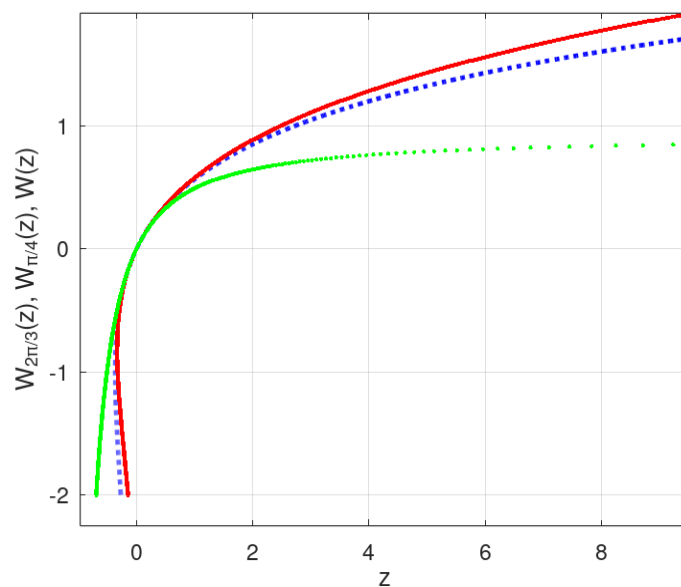
$$A = w_q(j) e_q^{w_q(j)} - z \quad (2.35)$$

$$B = e_q^{w_q(j)} + w_q(j) e_{2-\frac{1}{q}}^{q w_q(j)} \quad (2.36)$$

$$C = 2e_{2-\frac{1}{q}}^{q w_q(j)} + \frac{w_q(j)}{q} e_{\frac{3-2/q}{2-1/q}}^{(2q-1)w_q(j)}. \quad (2.37)$$

A Figura 3 mostra o gráfico de $W_q(z)$ versus z para $q = 2\pi/3$ (verde), 1 (azul) e $\pi/4$ (vermelho).

Figura 3 - $W_q(z)$ versus z para $q = \pi/4$ (vermelho), $q = 2\pi/3$ (verde) e $W(z)$ versus z (azul)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 3, a curva verde tem $q > 2$ e ela não tem uma reta tangente vertical para

qualquer valor finito de z . A curva azul é para $q = 1$, portanto, é a função padrão W de Lambert. É interessante notar que para $q = 1$ os ramos inferior e superior vão para o infinito. Para $q > 1$, o ramo superior tende assintoticamente ao valor $1/(q-1)$, enquanto o ramo inferior vai para infinito. Por fim, para $q < 1$, o ramo superior vai para infinito enquanto o ramo negativo toca o eixo vertical no ponto $(0, 1/(q-1))$.

Para mostrar que o ponto de branch de $W_q(z), \{z_b, W_q(z_b)\}$, é o ponto $\{(q-2)^{-1} \exp_q(q-2), (q-2)^{-1}\}$ faz-se:

$$\frac{dW_q(z)}{dz} = \frac{(q-1)W_q(z)-1}{[(q-2)W_q(z)-1]e_q^{W_q(z)}} = \infty. \quad (2.38)$$

É fácil notar que a equação (2.38) é satisfeita por $W_q(z_b) = 1/(q-2)$. O valor de z_b , por sua vez, é obtido usando $W_q(z_b)$ na equação (2.11):

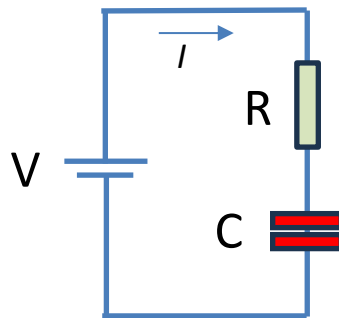
$$z_b = \frac{e_q^{1/(q-2)}}{(q-2)}. \quad (2.39)$$

3 APLICAÇÃO DA FUNÇÃO W_q DE LAMBERT-TSALLIS EM UM CIRCUITO RC DUPLO

3.1 Circuitos Simples com Resistores e Capacitores

O circuito RC mais básico é o circuito resistor-capacitor alimentado por uma fonte de tensão DC, como mostrado na Figura 4.

Figura 4 - Circuito elétrico com uma fonte de tensão contínua (V), um resistor (R) e um capacitor (C).



Fonte: Elaborada pelo autor.

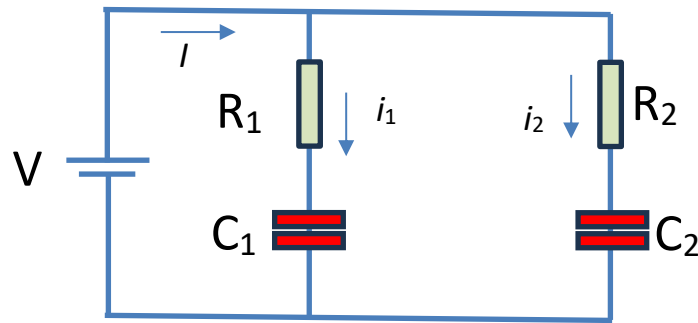
Usando a Lei de Kirchoff's, a equação diferencial que relaciona a corrente elétrica (I) e a voltagem (V) no circuito da Figura 4 é, simplesmente,

$$\frac{dI}{dt} + \frac{1}{RC} I = 0, \quad (3.1)$$

cuja solução é $I = (V/R)e^{-t/RC}$. Portanto, a corrente elétrica decai exponencialmente de seu valor inicial $I(t = 0) = V/R$ até o valor final $I(t = \infty) = 0$. Esse comportamento tem sido amplamente utilizado na construção de osciladores eletrônicos que são construídos com circuitos RC e portas digitais NOT ou amplificadores operacionais. Geralmente, o período desses osciladores depende do tempo requerido para a corrente I decair para metade de seu valor inicial ($I(t = t_{1/2}) = I(t = 0)/2 = (V/R)/2$): $t_{1/2} = \ln(2)RC$.

Um passo adiante no circuito da Figura 4 é o circuito mostrado na Figura 5, no qual ao invés de usar apenas um resistor e um capacitor, dois resistores e dois capacitores são utilizados.

Figura 5 - Circuito elétrico com fonte de tensão contínua (V), dois resistores (R_1 e R_2) e dois capacitores (C_1 e C_2)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma vez que ambos os ramos na Figura 5 são independentes, a equação para a corrente eléctrica total I no circuito na Figura 5 é dado por:

$$I = i_1 + i_2 = V \left[\frac{1}{R_1} e^{\frac{-t}{R_1 C_1}} + \frac{1}{R_2} e^{\frac{-t}{R_2 C_2}} \right]. \quad (3.2)$$

Como pode-se notar na equação (3.2), a corrente I não decai exponencialmente e, no melhor de nosso conhecimento, até o presente momento não há uma expressão analítica para o valor do tempo $t_{1/2}$, $I(t = t_{1/2}) = I(t = 0)/2$, para o circuito mostrado na Figura 5. Assim, o objetivo desta dissertação é apresentar uma expressão analítica para t na equação (3.2) como uma função de I , V , R_1 , C_1 , R_2 e C_2 .

3.2 Solução Analítica para o Decaimento não Exponencial no Circuito RC Duplo

Usando a função de Lambert-Tsallis para inverter a equação (3.2), tem-se:

$$I = i_1 + i_2 = V \left[\frac{1}{R_1} e^{\frac{-t}{R_1 C_1}} + \frac{1}{R_2} e^{\frac{-t}{R_2 C_2}} \right] \Rightarrow \frac{IR_1}{V} = e^{\frac{-t}{R_1 C_1}} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} e^{\frac{-(R_1 C_1 - R_2 C_2)t}{R_1 C_1 R_2 C_2}} \right) \Rightarrow \quad (3.3)$$

$$e^{\frac{-(R_1 C_1 - R_2 C_2)t}{R_1 C_1 R_2 C_2}} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} e^{\frac{-(R_1 C_1 - R_2 C_2)t}{R_1 C_1 R_2 C_2}} \right)^{\frac{R_1 C_1 - R_2 C_2}{R_1 C_1 R_2 C_2} R_1 C_1} = \left(\frac{R_1 I}{V} \right)^{\frac{R_1 C_1 - R_2 C_2}{R_2 C_2}}. \quad (3.4)$$

$$e^{\frac{-(R_1C_1 - R_2C_2)}{R_1C_1R_2C_2}t} \left(e_0^{\frac{R_1}{R_2} e^{\frac{-(R_1C_1 - R_2C_2)}{R_1C_1R_2C_2}t}} \right)^{\frac{R_1C_1 - R_2C_2}{R_1C_1R_2C_2} R_1C_2} = \left(\frac{R_1I}{V} \right)^{\frac{R_1C_1 - R_2C_2}{R_2C_2}}. \quad (3.5)$$

$$e^{\frac{-(R_1C_1 - R_2C_2)}{R_1C_1R_2C_2}t} \left(e^{\frac{\frac{R_1C_1 - R_2C_2}{R_2C_2} R_1}{1 - \frac{R_2C_2}{R_1C_1 - R_2C_2}} e^{\frac{-(R_1C_1 - R_2C_2)}{R_1C_1R_2C_2}t}} \right) = \left(\frac{R_1I}{V} \right)^{\frac{R_1C_1 - R_2C_2}{R_2C_2}} \Rightarrow \quad (3.6)$$

$$\frac{R_1C_1 - R_2C_2}{R_2C_2} \frac{R_1}{R_2} e^{\frac{-(R_1C_1 - R_2C_2)}{R_1C_1R_2C_2}t} \left(e^{\frac{\frac{R_1C_1 - R_2C_2}{R_2C_2} R_1}{1 - \frac{R_2C_2}{R_1C_1 - R_2C_2}} e^{\frac{-(R_1C_1 - R_2C_2)}{R_1C_1R_2C_2}t}} \right) = \frac{R_1C_1 - R_2C_2}{R_2C_2} \frac{R_1}{R_2} \left(\frac{R_1I}{V} \right)^{\frac{R_1C_1 - R_2C_2}{R_2C_2}}. \quad (3.7)$$

A equação (3.7) está na forma $Ae^q = B$ com $(q = 1 - R_2C_2/(R_1C_1 - R_2C_2))$, cuja solução é $A = W_q(B)$. Portanto:

$$\frac{R_1C_1 - R_2C_2}{R_2C_2} \frac{R_1}{R_2} e^{\frac{-(R_1C_1 - R_2C_2)}{R_1C_1R_2C_2}t} = W_{1 - \frac{R_2C_2}{R_1C_1 - R_2C_2}} \left[\frac{R_1C_1 - R_2C_2}{R_2C_2} \frac{R_1}{R_2} \left(\frac{R_1I}{V} \right)^{\frac{R_1C_1 - R_2C_2}{R_2C_2}} \right]. \quad (3.8)$$

Isolando a variável temporal t na equação (3.8), chega-se, finalmente, a:

$$t = -\frac{R_1C_1R_2C_2}{R_1C_1 - R_2C_2} \log \left[\frac{R_2}{R_1} \frac{R_2C_2}{R_1C_1 - R_2C_2} W_{1 - \frac{R_2C_2}{R_1C_1 - R_2C_2}} \left[\frac{R_1C_1 - R_2C_2}{R_2C_2} \frac{R_1}{R_2} \left(\frac{R_1I}{V} \right)^{\frac{R_1C_1 - R_2C_2}{R_2C_2}} \right] \right]. \quad (3.9)$$

Usando as constantes de tempo $\tau_1 = R_1C_1$ e $\tau_2 = R_2C_2$, a equação (3.9) pode ser reescrita na forma mais curta:

$$t = -\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \log \left[\frac{R_2}{R_1} \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} W_{1 - \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2}} \left[\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_2} \frac{R_1}{R_2} \left(\frac{R_1I}{V} \right)^{\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_2}} \right] \right]. \quad (3.10)$$

O tempo de meia vida da corrente total, $t_{1/2}$, é obtido quando $I = 0.5V(R_1 + R_2)/(R_1R_2)$, assim,

$$t_{1/2} = -\frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \log \left[\frac{R_2}{R_1} \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} W_{1 - \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2}} \left[\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_2} \frac{R_1}{R_2} \left(\frac{R_1 + R_2}{2R_2} \right)^{\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_2}} \right] \right]. \quad (3.11)$$

Embora a equação (23) esteja correta e completa, ela depende de quatro variáveis (R_1 , R_2 , C_1 , C_2), o que torna mais difícil uma análise de comportamento. Assim, na próxima seção será considerada uma situação particular $R_1 = R_2 = R$, o que facilitará a análise do tempo de meia vida.

3.3 Equação de Fermat no Circuito RC Duplo

Considerando o circuito mostrado na Figura 5 com $R_1 = R_2 = R$, a equação (3.3) fica da forma:

$$I = i_1 + i_2 = \frac{V}{R} \left[e^{\frac{-t}{RC_1}} + e^{\frac{-t}{RC_2}} \right]. \quad (3.12)$$

Quando $t = t_{1/2}$, tem-se $I(t = t_{1/2}) = I(t = 0)/2 = V/R$, portanto, a equação para obtenção da meia vida fica, simplesmente, como,

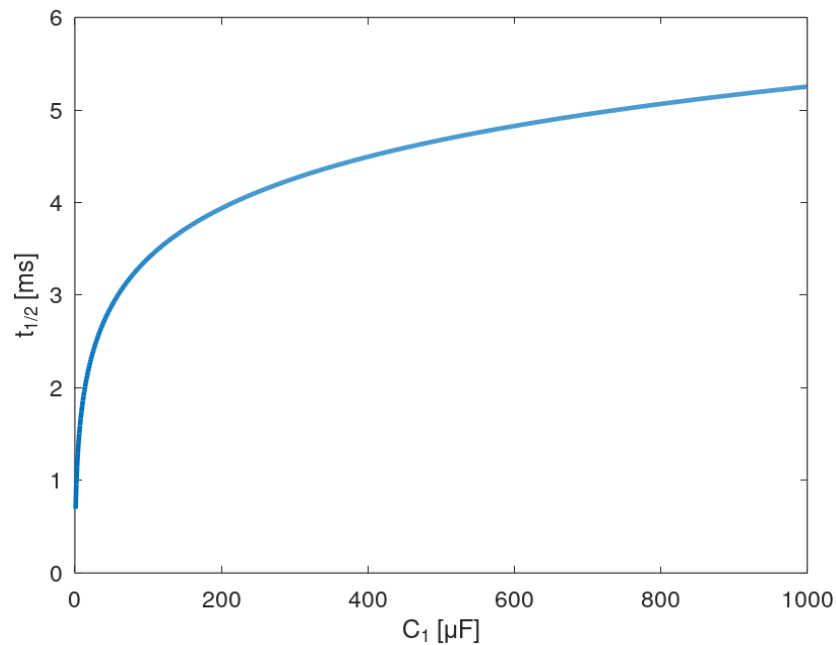
$$e^{\frac{-t_{1/2}}{RC_1}} + e^{\frac{-t_{1/2}}{RC_2}} = 1, \quad (3.13)$$

cuja solução pode ser obtida usando a função W_q de Lambert-Tsallis, como mostrado anteriormente:

$$t_{1/2} = \frac{RC_1 C_2}{C_2 - C_1} \ln \left[\frac{C_2}{C_1 - C_2} W_{1 - \frac{C_2}{C_1 - C_2}} \left(\frac{C_1 - C_2}{C_2} \right) \right]. \quad (3.14)$$

Considerando $C_1 > C_2$, tem-se $i_1 \geq i_2$. O gráfico de $t_{1/2}$ versus C_1 , com $R = 1\text{k}\Omega$ e $C_2 = 1\mu\text{F}$, pode ser visto na Figura 6.

Figura 6 - $t_{1/2}$ versus C_1 (equação. (26)). $R = 1\text{k}\Omega$, $C_2 = 1\mu\text{F}$



Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 6 mostra o crescimento altamente não linear $t_{1/2}$ quando C_1 aumenta de valor. Este comportamento é totalmente diferente da relação linear entre $t_{1/2}$ e C ($t_{1/2} = \ln(2)RC$) que ocorre no circuito da Figura 5.

Uma simples análise do circuito na Figura 6 mostra que:

$$\ln(2)R_2C_2 \leq t_{1/2} \leq \ln(2)R_1C_1. \quad (3.15)$$

Em outras palavras, considerando $R_1C_1 > R_2C_2$, o tempo requerido para a corrente total (I) decair para metade de seu valor inicial não pode ser menor que o tempo requerido para a corrente menor (i_2) decair para metade de seu valor inicial, nem maior que o tempo requerido para a corrente maior (i_1) decair para metade de seu valor inicial.

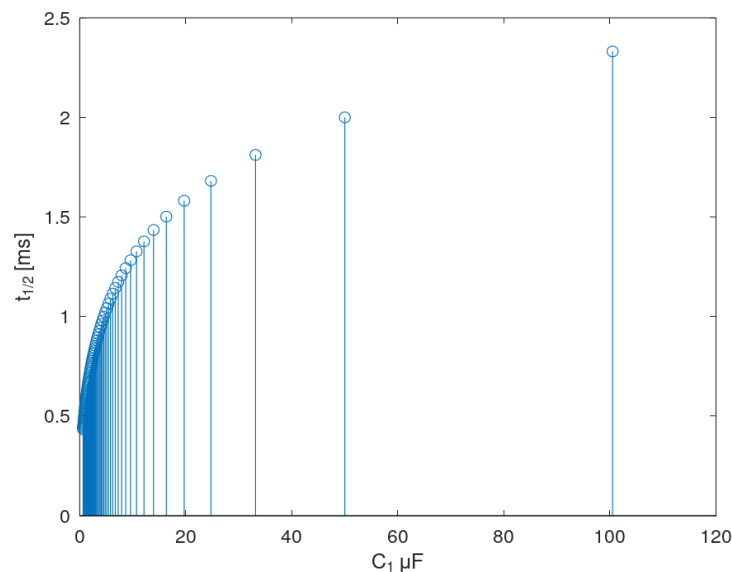
Agora, reescrevendo a equação (3.13) como uma equação de Fermat, $a^{t_{1/2}} + b^{t_{1/2}} = c^{t_{1/2}}$, tem-se:

$$e^{\frac{-t_{1/2}}{RC_1}} + e^{\frac{-t_{1/2}}{RC_2}} = \left(e^{\frac{-1}{RC_1}} \right)^{t_{1/2}} + \left(e^{\frac{-1}{RC_2}} \right)^{t_{1/2}} = \left(\frac{a}{c} \right)^{t_{1/2}} + \left(\frac{b}{c} \right)^{t_{1/2}} = 1. \quad (3.16)$$

Na equação (3.16), considera-se $a > b$. De acordo com o teorema de Fermat-Wiles, quando a , b e c são números inteiros (ou, equivalentemente, a/c e b/c são números racionais), $t_{1/2}$ não pode assumir qualquer valor inteiro que não seja 1 ou 2. Assim, se os valores de R , C_1 e C_2 são escolhidos de tal forma que $\exp(-1/RC_1)$ e $\exp(-1/RC_2)$ sejam números racionais, o tempo de meia vida $t_{1/2}$ não pode assumir qualquer valor inteiro maior que 2. Portanto, um teorema da teoria de números tem um impacto físico no circuito elétrico mostrado na Figura 6.

A Figura 7 mostra $t_{1/2}$ versus C_1 para $C_1 \in [1/\ln(101/21)\mu\text{F}, 1/\ln(101/22)\mu\text{F}, \dots, 1/\ln(101/100)\mu\text{F}]$, $R = 1\text{k}\Omega$ e $C_2 = 1/\ln(101/20)\mu\text{F}$. Como pode ser notado, C_1 e C_2 são números transcendentais, uma vez que $\ln(x)$ é transcendental quando x é algébrico (um número racional é também um número algébrico). O valor $t_{1/2} = 1$ é obtido para $C_1 = 1/\ln(101/81)\mu\text{F} \approx 4.531625627230088\mu\text{F}$, enquanto o valor $t_{1/2} = 2$ é obtido para $C_1 = 1/\ln(101/99)\mu\text{F} \approx 49.99833328888678\mu\text{F}$.

Figura 7 - $t_{1/2}$ versus C_1 . $R = 1\text{k}\Omega$, $C_2 = 1/\ln(101/20)\mu\text{F}$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma vez que $\exp(x)$ é um número transcendental quando x é um número algébrico, uma forma de garantir que $t_{1/2}$ possa assumir valores inteiros maiores que 2 é escolher valores racionais para R , C_1 e C_2 .

Embora o teorema de Fermat-Wiles proíba $t_{1/2}$ de assumir valores inteiros maiores que 2, pode-se fazê-lo tão próximo de qualquer valor inteiro N quanto se queira. Primeiramente, reescreve-se a desigualdade (3.15) como

$$\frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{c}{b}\right)} \leq t_{1/2} \leq \frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{c}{a}\right)} = \log_{c/b}(2) \leq t_{1/2} \leq \log_{c/a}(2). \quad (3.17)$$

A desigualdade em (3.17) dá uma boa dica sobre a solução de (3.16). Por exemplo, para $c > 2^{1/N}a$ tem-se $t_{1/2} < N$. Assim, por exemplo, não existem soluções maiores ou igual a 3 quando $c > 2^{1/3}a$. O comprimento do intervalo $[\log_{c/b}(2), \log_{c/a}(2)]$ em (3.17) é

$$\Delta = \frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{c}{b}\right)} - \frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{c}{a}\right)} = \ln(2) \frac{\ln(a/b)}{\ln(c/b) \ln(c/a)}. \quad (3.18)$$

A questão importante que surge é, quais valores inteiros de a , b e c comprimem o intervalo Δ dado por (3.18) que contenha o valor N ? Primeiramente, para conter o número N , como visto anteriormente, a condição $c < 2^{1/N}a$ deve ser obedecida. Observando (3.18) pode-se notar que $\ln(2)(\ln(a/b)/\ln(c/b)) < 1$, uma vez que $c > a > b$. Portanto, o valor mínimo de Δ requer o máximo valor de c que obedeça $c < 2^{1/N}a$ e b tão próximo de a quanto possível. Assim, $c = \lfloor 2^{1/N}a \rfloor$, isto é, o maior inteiro menor que $2^{1/N}a$, e $b = a-1$. De fato, neste caso:

$$\begin{aligned} \Delta &\approx \ln(2) \frac{\ln(a/(a-1))}{\ln(c/b)} \frac{1}{\ln(2^{1/N}a/a)} = N \frac{\ln(a/(a-1))}{\ln(c/b)} \approx N \frac{\ln(a/(a-1))}{\ln(2^{1/N}a/(a-1))} = \\ &N \frac{\ln(a/(a-1))}{\ln(2^{1/N}) + \ln(a/(a-1))} = N \frac{\ln(a/(a-1))}{\frac{1}{N} \ln(2) + \ln(a/(a-1))}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Então, para $a \gg 1$, $\Delta \rightarrow 0$ e $t_{1/2} \rightarrow N$. Alguns exemplos ($N = 3, 13$ e 153) estão mostrados na Tabela 1.

Tabela 1 - N é o valor desejado e $t_{1/2}$ é o valor real calculado usando a equação. (3.14). As constantes de tempo são $\tau_1 = \ln(2)RC_1 = \ln(c/a)$ [ms], $\tau_2 = \ln(2)RC_2 = \ln(c/b)$ [ms] (R [k Ω], C_1 [μ F] and C_2 [μ F])

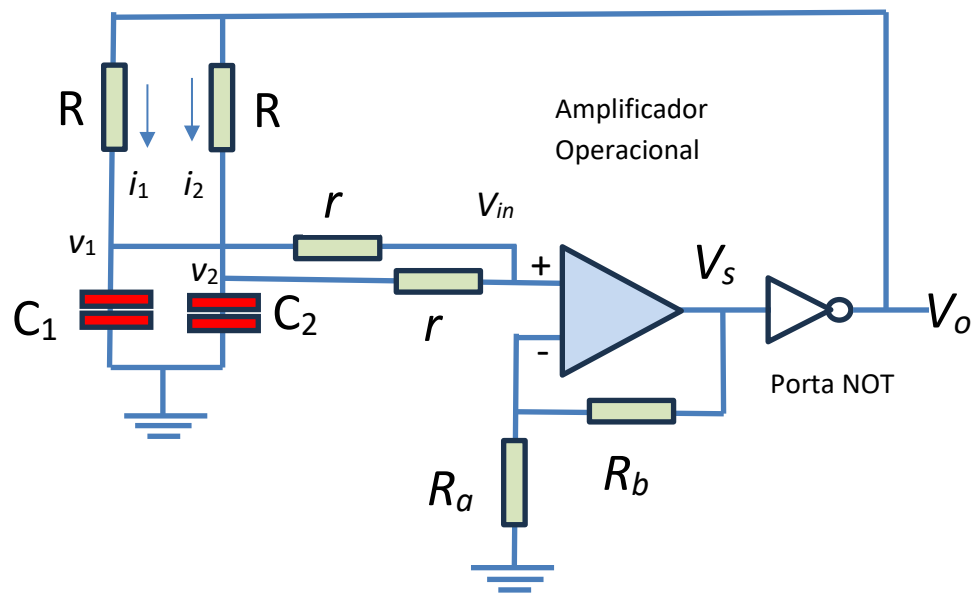
N	3	3	13	13	153	153
A	100	10000	100	10000	10000	555333
B	99	9999	99	9999	9999	555332
C	125	12599	105	10547	10045	557854
$t_{1/2}^{min}$ (ms)	2.97240	2.99891	11.78010	12.9908	151.01540	152.97391
$t_{1/2}^{max}$ (ms)	3.10628	3.00021	14.20669	13.01529	154.37902	153.03473
Δ (ms)	0.13387	0.00129	2.42659	0.024394	3.36361	0.0608175
$t_{1/2}$ (ms)	3.038382	2.99956	12.91923	13.00308	152.68511	153.00431

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como pode ser observado na Tabela 1, não estamos preocupados com valores comerciais dos resistores e capacitores, uma vez que estes valores pertencem a um conjunto bem pequeno.

Por último, a Figura 8 mostra o circuito eletrônico de um oscilador de Fermat. O ganho do amplificador operacional pode ser ajustado via R_a e R_b de tal forma que o período de oscilação dependerá de $t_{1/2}$ dado pela equação (3.14).

Figura 8 - Circuito eletrônico do oscilador de Fermat.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O ganho do amplificador operacional na configuração não inversor é dado por $G = (1 + R_b/R_a)$, assim $V_s = GV_{in}$. A tensão na entrada não inversora do amplificador operacional é $V_{in} = v_1/r + v_2/r$, sendo v_1 e v_2 dadas por:

$$v_1 = V_o - Ri_1 = V_o - R \frac{V_o}{R} e^{\frac{-t}{RC_1}} = V_o \left(1 - e^{\frac{-t}{RC_1}} \right) \quad (3.20)$$

$$v_2 = V_o - Ri_2 = V_o - R \frac{V_o}{R} e^{\frac{-t}{RC_2}} = V_o \left(1 - e^{\frac{-t}{RC_2}} \right). \quad (3.21)$$

Portanto, a tensão na saída do amplificador V_s é dada por:

$$V_s = GV_{in} = G \left(\frac{v_1}{r} + \frac{v_2}{r} \right) = \left(1 + \frac{R_b}{R_a} \right) \frac{V_o}{r} \left[2 - \left(e^{\frac{-t}{RC_1}} + e^{\frac{-t}{RC_2}} \right) \right]. \quad (3.22)$$

Escolhendo $r = 2(R_a + R_b)/R_a$, obtém-se, para a tensão de saída,

$$V_s = \frac{V_0}{2} \left[2 - \left(e^{\frac{-t}{RC_1}} + e^{\frac{-t}{RC_2}} \right) \right]. \quad (3.23)$$

Por fim, a condição $V_s = V_0/2$, a voltagem requerida para disparar a porta NOT, requer a que a equação de Fermat (3.14) seja satisfeita.

4 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi apresentada, pela primeira vez, uma expressão analítica para o tempo requerido para a corrente total em um circuito elétrico composto por dois circuitos RC série em paralelo, alimentado por uma fonte de tensão contínua, decair, de forma não exponencial, para um valor predeterminado. Isto mostra a utilidade da função W_q de Lambert-Tsallis na análise de circuitos elétricos e eletrônicos.

Adicionalmente, foi mostrado que o tempo de meia vida da corrente total é solução da equação Fermat, o que demonstra que o teorema de Fermat-Wiles tem implicações físicas, fazendo um elo entre teoria de números e circuitos elétricos. Por fim, foi apresentado um circuito oscilador baseado no circuito RC duplo estudado cujo período de oscilação depende da solução da equação de Fermat. Este oscilador foi nomeado oscilador de Fermat.

Embora o foco principal deste trabalho tenha sido um circuito elétrico com dois resistores e dois capacitores alimentado por uma fonte de tensão contínua, o método aqui descrito usando a função W_q de Lambert-Tsallis pode ser usado para obter a solução analítica de qualquer sistema físico modelado pela soma ou subtração de duas exponenciais reais como, por exemplo, o decaimento de uma substância radioativa com duas meias vidas ou a solução superamortecida de um oscilador harmônico com amortecimento.

Como trabalhos futuros pode-se destacar:

1. A montagem experimental do oscilador de Fermat;
2. Encontrar outros circuitos eletrônicos com componentes ativos e passivos, no qual a função de Lambert-Tsallis possa ser útil na análise.

REFERÊNCIAS

- [1] DA SILVA, G. B.; RAMOS, R. V. The Lambert-Tsallis W_q function. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**. n. 525. 2019. p. 164-170.
- [2] RAMOS, R. V. Ramos. Analytical solutions of cubic quintic polynomials in micro and nanoelectronic using the Lambert-Tsallis W_q function. **J. Comput Electron** **21**. 2022. p. 396-400.
- [3] SILVA, George Barbosa da. A Função W_q de Lambert-Tsallis e suas aplicações. **Tese (doutorado)** – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática. Fortaleza, 2021. 51f.
- [4] ANDRADE, J. S. de; NOBREGA, K. Z.; RAMOS, R. V. Analytical Solution of the Space Charge Limited Current Using Lambert-Tsallis W_q Function. **IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs**, 69, 3, 2022. p. 769-773.
- [5] CASTRO, G. S.; RAMOS, R. V. Enhancing eavesdropping detection in quantum key distribution using disentropy measure of randomness. **Quant. Inf. Process.**, v. 21. 2022. p. 79.
- [6] ALMEIDA, F. J. L.; RAMOS, R. V. Disentropy in astronomy. **The European Physical Journal Plus**, v. 138, n. 20. 2023.
- [7] SILVA, J. R. da; RAMOS, R. V. Applications of the Lambert-Tsallis W_q Function in X-Ray Free Electron Laser. **IEEE Transactions on Plasma Science**, v. 50, n. 10, 2022. p. 3578-3582.
- [8] SILVA, J. L. M. da; MENDES, F. V.; RAMOS, R. V. Radial basis function network using Lambert-Tsallis W_q Function. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**. v. 534. 2019.
- [9] RAMOS, R. V. J. Disentropy of the Wigner function. **Journal of the Optical Society of America B**. v. 36, n. 8. 2019. p. 2244-2249.
- [10] RAMOS, R. V. Estimation of the Randomness of continuous and discrete signals using the disentropy of the autocorrelation. **SN Computer Science**. v. 2, n. 254. 2021.
- [11] RAMOS, R. V. Solving the Fermat and Fibonacci Equations with the Lambert- Tsallis W_q Function. **Researchgate**, 2023.
- [12] CORLESS, R. M.; GONNET, G. H.; HARE, D. E. G. Hare; JEFFREY, D. J.; KNUTH, D. E. On the Lambert W function. **Advances in Computational Mathematics**. v. 5. 1996. p. 329 – 359.
- [13] VALLURI S. R.; JEFFREY, D. J.; CORLESS, R. M. **Canadian Journal of Physics**. v. 78, n. 9. 2000. p. 823-831.
- [14] KEN, Roberts; VALLURI, S. R. Tutorial: the quantum finite square well and the Lambert W function. **Canadian Journal of Physics**. v. 95, n. 2. 2017. p. 105-110.
- [15] DUBINOV, A. E.; KITAYEV, I. N. Nonlinear periodic backward dust acoustic waves. **Planetary and Space Science**. v. 195, jan. 2021. 105142.

ANEXO I


ARTIGOS DECORRENTES DA DISSERTAÇÃO

RAMOS, L. A. B.; RAMOS, R. V. Analytical solution of non-exponential decay in a simple resistor-capacitor circuit using the Lambert-Tsallis W_q function. **Rev. Bras. Ensino Fís.**, v. 47. 2025. <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2025-0002>.

Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 47, e20250002 (2025)
www.scielo.br/rbef
DOI: <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2025-0002>

Articles
Licença Creative Commons

Analytical solution of non-exponential decay in a simple resistor-capacitor circuit using the Lambert-Tsallis W_q function

L.A.B. Ramos¹, R.V. Ramos^{*1} 

¹Universidade Federal do Ceará, Departamento de Engenharia de Teleinformática, Laboratório de Tecnologia da Informação Quântica, 60455-970, Fortaleza, CE, Brasil.

Received on January 04, 2025. Revised on February 25, 2025. Accepted on March 27, 2025.

In this work, using the Lambert-Tsallis W_q function, we present the analytical solution for the non-exponential decay in a simple electrical circuit composed by two resistors, two capacitors and a DC power supply. Additionally, it is shown that, in a particular case, the circuit equation assumes the form of Fermat's equation, $a^x + b^x = c^x$, allowing to observe a physical behavioral difference depending on whether the capacitances values are algebraic or transcendental numbers.

Keywords: Lambert-Tsallis W_q function, Resistor-Capacitor circuit, Fermat equation.