



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS CRATEÚS
CURSO DE GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

JOSÉ FURTADO NETO

**ANÁLISE E APRIMORAMENTO DO MODELO MATEMÁTICO PARA O PROBLEMA
DE ALOCAÇÃO DE SALAS NO CONTEXTO DOS CURSOS DE TECNOLOGIA DA
UFC — CAMPUS CRATEÚS**

CRATEÚS

2026

JOSÉ FURTADO NETO

ANÁLISE E APRIMORAMENTO DO MODELO MATEMÁTICO PARA O PROBLEMA DE
ALOCÇÃO DE SALAS NO CONTEXTO DOS CURSOS DE TECNOLOGIA DA UFC —
CAMPUS CRATEÚS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Graduação em Ciência da Computação
do Campus Crateús da Universidade Federal
do Ceará, como requisito parcial à obtenção do
grau de bacharel em Ciência da Computação.

Orientadora: Prof. M.a. Lisieux Marie
Marinho dos Santos Andrade

Coorientador: M.e. Luiz Alberto do Carmo
Viana

CRATEÚS

2026

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F987a Furtado Neto, José.

Análise e aprimoramento do modelo matemático para o problema de alocação de salas no contexto dos cursos de tecnologia da UFC — campus Crateús / José Furtado Neto. – 2026.
49 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Campus de Crateús, Curso de Ciência da Computação, Crateús, 2026.

Orientação: Profa. Ma. Lisieux Marie Marinho dos Santos Andrade.

Coorientação: Prof. Me. Luiz Alberto do Carmo Viana.

1. Otimização combinatória. 2. Alocação de salas. 3. Modelagem matemática. 4. Elaboração de horários. I. Título.

CDD 004

Dedico este trabalho a todos que, de alguma forma, se alegraram comigo ao longo dessa jornada.

AGRADECIMENTOS

Toda honra e toda glória sejam dadas ao Senhor, pois d’Ele, por meio d’Ele e para Ele são todas as coisas (Romanos 11:36). A realização deste trabalho só foi possível porque Deus, em Sua infinita graça, concedeu-me sabedoria, capacidade e força ao longo de toda essa jornada. Reconheço que cada etapa foi sustentada por Seu cuidado, direção e fidelidade.

Agradeço imensamente à minha orientadora, Prof.^a M.a. Lisieux Marie Marinho dos Santos Andrade, por sua dedicação, gentileza e atenção constantes. Sua postura sempre alegre, otimista e acolhedora tornou o processo de orientação leve e motivador, mesmo diante dos desafios. Sua disponibilidade, sensibilidade e compromisso foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Estendo também meu sincero agradecimento ao meu coorientador, M.e. Luiz Alberto do Carmo Viana, por sua competência técnica, inteligência admirável e contribuições valiosas. Seu rigor acadêmico, aliado a um humor preciso e a reuniões sempre produtivas, enriqueceram significativamente este trabalho. Reconheço que, por meio do cuidado de Deus, ambos foram colocados em meu caminho no momento certo.

Sou profundamente grato à minha irmã Natália Santos, por sempre acreditar em mim, incentivar-me e apoiar-me incondicionalmente. Estendo esse agradecimento a toda a minha família, que esteve presente, de diferentes formas, oferecendo apoio, compreensão e encorajamento ao longo de toda essa caminhada.

Agradeço também a Bruno Sousa pelas contribuições técnicas, pelo compartilhamento de conhecimento e pelo suporte direto prestado durante o desenvolvimento deste trabalho, que foram de grande relevância para sua consolidação.

Registro minha gratidão aos amigos que estiveram presentes ao longo de toda essa jornada acadêmica, em especial Natã Moraes e João Marcos, bem como João Victor, Elnatan Gabriel e Ana Luiza, entre outros que, cada um à sua maneira, ofereceram apoio, companheirismo e incentivo ao longo do percurso. A presença de vocês tornou essa caminhada mais leve e significativa.

Aos amigos que conheci durante o curso na universidade — Yuri Kamagoe, William Sousa, Thalysson Silveira, Lucas Levi, Alfredo Henrique, Wellington Araújo, entre outros — deixo meu sincero agradecimento pelas trocas de conhecimento, pela convivência, pelo apoio mútuo e pelos momentos compartilhados, que contribuíram não apenas para a formação acadêmica, mas também para o crescimento pessoal.

Agradeço aos professores que contribuíram para minha formação ao longo do curso,

em especial Rennan Dantas, Ítalo Ribeiro, José Wellington e Bruno Castro, pela disponibilidade, apoio e ensinamentos transmitidos. Estendo esse agradecimento à coordenação do curso e à secretaria acadêmica, com destaque especial para Aline Pinho, que sempre prestou suporte e orientação fundamentais nas questões administrativas sempre que necessário.

Agradeço também aos meus irmãos e irmãs da igreja, que estiveram em constante oração por mim durante toda essa caminhada. Em especial, ao Pastor Egberto, às minhas “mães” Denise Paiva e Irmã Franciné, pelo cuidado, apoio espiritual, palavras de encorajamento e intercessão, que foram fundamentais para que eu permanecesse firme e confiante ao longo desse processo.

Por fim, a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho, deixo meu mais sincero agradecimento.

“Porque Deus amou o mundo de tal maneira que deu o seu Filho unigênito, para que todo aquele que nele crê não pereça, mas tenha a vida eterna.”

(João 3:16)

RESUMO

O Problema de Alocação de Salas (PAS) consiste na construção de uma grade horária que associe, de forma consistente, turmas, professores, horários e salas, respeitando um conjunto de restrições institucionais e operacionais. Devido à sua natureza combinatória, o PAS pode ser abordado por meio de modelos matemáticos de otimização. Neste contexto, o presente trabalho tem como objetivo analisar o modelo matemático proposto por Sousa (2019) para o PAS no âmbito da UFC — Campus Crateús, bem como propor aprimoramentos que assegurem maior consistência estrutural e viabilidade prática das soluções obtidas. A partir de uma análise detalhada do modelo original, foi identificada uma inconsistência que permite a alocação simultânea de uma mesma turma para o mesmo dia e horário em salas distintas, resultando em soluções inviáveis do ponto de vista prático. Para mitigar esse problema, foi proposta a inclusão de uma nova restrição ao modelo matemático, garantindo que, para cada par (dia, horário), uma turma esteja associada a, no máximo, uma sala. Experimentos computacionais foram realizados utilizando o *solver* SCIP, por meio do *framework* OR-Tools, considerando diferentes grupos de instâncias e configurações do modelo. Os resultados demonstram que a restrição proposta é eficaz na eliminação da inconsistência identificada, promovendo maior coerência estrutural do modelo. Contudo, observou-se que sua inclusão aumenta o rigor do problema, refletindo em maior esforço computacional. Adicionalmente, foi conduzida uma análise de sensibilidade em relação ao parâmetro de dias preferidos dos professores. Os resultados indicam que o relaxamento dessa restrição amplia significativamente a resolubilidade do modelo, permitindo que o *solver* conclua um maior número de instâncias, seja por meio da obtenção de soluções ótimas ou pela certificação de inviabilidade. De modo geral, o estudo evidencia a importância do equilíbrio entre consistência estrutural e desempenho computacional, além de apontar direções para trabalhos futuros voltados à escalabilidade e ao aprofundamento da análise de parâmetros do problema.

Palavras-chave: Otimização combinatória; Alocação de salas; Modelagem matemática; Elaboração de horários.

ABSTRACT

The Classroom Assignment Problem (CAP) consists of constructing a timetable that consistently assigns classes, professors, time slots, and rooms while satisfying a set of institutional and operational constraints. Due to its combinatorial nature, the CAP can be addressed through mathematical optimization models. In this context, this work aims to analyze the mathematical model proposed by Sousa (2019) for the CAP in the scope of the Federal University of Ceará — Crateús Campus, as well as to propose improvements that ensure greater structural consistency and practical feasibility of the obtained solutions. A detailed analysis of the original model revealed an inconsistency that allows a single class to be simultaneously assigned to the same day and time slot in different rooms, leading to impractical solutions. To address this issue, a new constraint is introduced into the mathematical model, ensuring that, for each (day, time slot) pair, a class is associated with at most one room. Computational experiments were conducted using the SCIP solver through the OR-Tools framework, considering different groups of instances and model configurations. The results demonstrate that the proposed constraint is effective in eliminating the identified inconsistency, thereby enhancing the structural coherence of the model. However, its inclusion increases the strictness of the problem, resulting in higher computational effort. Additionally, a sensitivity analysis was performed with respect to the professors' preferred teaching days parameter. The results indicate that relaxing this constraint significantly improves the model's resolvability, enabling the solver to conclude a larger number of instances either by finding optimal solutions or by certifying infeasibility. Overall, the study highlights the importance of balancing structural consistency and computational performance, and points to future research directions focused on scalability and deeper investigation of problem parameters.

Keywords: Combinatorial optimization; Classroom assignment; Mathematical modeling; Timetabling.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação gráfica para um problema de minimização.	20
Figura 2 – Representação de uma instância.	32

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Disponibilidade de salas por dia e horário (com inconsistência).	28
Tabela 2	– Disponibilidade de salas por dia e horário (sem inconsistência).	30
Tabela 3	– Estados de retorno do <i>solver</i> conforme a documentação oficial do OR-Tools.	41
Tabela 4	– Resultados experimentais completos — Caso 1: Instância original.	42
Tabela 5	– Resultados experimentais completos — Caso 2: Instância original com a inclusão da nova restrição.	44
Tabela 6	– Resultados experimentais completos — Caso 3: Instância com todos os dias definidos como preferidos.	46
Tabela 7	– Resultados experimentais completos — Caso 4: Instância com todos os dias definidos como preferidos, com a inclusão da nova restrição.	48
Tabela 8	– Resumo da resolubilidade do modelo por caso experimental.	50

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Objetivo Geral	13
1.2	Objetivos Específicos	14
1.3	Estrutura do Trabalho	14
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	15
2.1	Modelagem Matemática	15
2.2	Problema de Otimização Combinatória	16
2.3	Programação Matemática	17
2.3.1	<i>Programação Linear</i>	<i>17</i>
2.3.2	<i>Forma-padrão</i>	<i>17</i>
2.3.3	<i>Programação Inteira</i>	<i>19</i>
2.4	Ótimo Global	19
2.5	Ótimo Local	20
3	PROBLEMA DA ALOCAÇÃO DE SALAS	21
4	PAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ, CAMPUS CRATEÚS	24
5	MELHORIAS	27
5.1	Inconsistência	27
5.2	Ilustração da Inconsistência	27
5.3	Nova Restrição	29
6	EXPERIMENTOS	31
6.1	Ambiente de Testes	31
6.2	Instâncias	31
6.2.1	<i>Exemplo de Instância</i>	<i>31</i>
6.2.2	<i>Grupos de Instâncias</i>	<i>32</i>
6.3	Casos de Testes	33
7	RESULTADOS E DISCUSSÕES	34
7.1	Motivação da Análise de Sensibilidade	34
7.2	Análise de Sensibilidade	34
7.2.1	<i>Impacto da Nova Restrição (Caso 1 × Caso 2)</i>	<i>35</i>
7.2.2	<i>Impacto do Relaxamento dos Dias Preferidos (Caso 1 × Caso 3)</i>	<i>35</i>

7.2.3	<i>Restrição Nova sob Relaxamento (Caso 3 × Caso 4)</i>	35
7.2.4	<i>Análise da Resolubilidade do Modelo</i>	36
7.3	Síntese dos Resultados	37
8	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	38
	REFERÊNCIAS	40
	APÊNDICES	41
	APÊNDICE A – Estados de retorno do <i>Solver</i>	41
	APÊNDICE B – Resultados experimentais completos — Caso 1	42
	APÊNDICE C – Resultados experimentais completos — Caso 2	44
	APÊNDICE D – Resultados experimentais completos — Caso 3	46
	APÊNDICE E – Resultados experimentais completos — Caso 4	48
	APÊNDICE F – Resolubilidade	50

1 INTRODUÇÃO

A construção de grades horárias acadêmicas eficientes é uma tarefa fundamental para instituições de ensino superior. Nesse contexto, o Problema de Alocação de Salas (PAS) destaca-se como um desafio relevante, pois envolve a distribuição adequada de recursos como salas, professores e turmas, respeitando simultaneamente um conjunto de requisitos e restrições institucionais. Trata-se, portanto, de um problema de otimização combinatória, cuja complexidade cresce de acordo com o número de elementos envolvidos e com a interação entre eles.

Uma abordagem amplamente utilizada para tratar problemas dessa natureza é a modelagem matemática, capaz de representar formalmente as relações e restrições do sistema. No âmbito da Universidade Federal do Ceará – Campus Crateús, Sousa (2019) propôs um modelo matemático voltado à formalização do PAS, contemplando características específicas do campus, como cargas horárias, disponibilidade de salas, preferências de professores e demais parâmetros pertinentes ao processo de construção da grade.

Embora o modelo de Sousa (2019) represente adequadamente o problema em seu contexto geral, uma análise aprofundada revela aspectos que podem ser aprimorados para ampliar a consistência e a eficiência das soluções geradas. Em particular, certas configurações permitidas pelo modelo original podem levar a alocações inviáveis na prática, o que motiva a necessidade de ajustes, revisões estruturais e, eventualmente, a inclusão de novas restrições.

Dessa forma, o presente trabalho tem como objetivo analisar o modelo matemático proposto por Sousa (2019), identificar limitações que impactam a coerência das soluções e propor melhorias que contribuam para aumentar sua robustez. Além disso, busca-se avaliar o comportamento do modelo antes e após as modificações sugeridas, por meio de experimentos computacionais conduzidos com diferentes instâncias do PAS, incluindo uma análise de sensibilidade em relação ao parâmetro de dias preferidos pelos professores, a fim de investigar seu impacto na resolubilidade e no desempenho computacional do modelo. Assim, pretende-se oferecer uma contribuição para a evolução da modelagem do problema no contexto da UFC – Campus Crateús, bem como para o entendimento de seus desafios e potenciais extensões.

1.1 Objetivo Geral

Aprimorar o modelo matemático para o Problema de Alocação de Salas (PAS) no contexto da UFC — Campus Crateús, identificando limitações relacionadas à consistência

estrutural das soluções, de modo a garantir maior viabilidade prática.

1.2 Objetivos Específicos

- Analisar o modelo matemático proposto por Souza (2019) para o Problema de Alocação de Salas, identificando suas principais características, hipóteses e limitações estruturais;
- Identificar e formalizar uma inconsistência presente no modelo original, relacionada à possibilidade de alocação simultânea de uma mesma turma para o mesmo dia e horário em salas distintas;
- Formalizar uma nova restrição matemática capaz de eliminar a inconsistência identificada, garantindo maior coerência estrutural e viabilidade prática das soluções obtidas;
- Avaliar experimentalmente o impacto da restrição proposta sobre o desempenho computacional do modelo, considerando métricas como tempo de resolução, esforço computacional e resolubilidade;
- Realizar uma análise de sensibilidade em relação ao parâmetro de dias preferidos dos professores, investigando sua influência no comportamento do modelo e na capacidade do *solver* em concluir as instâncias.

1.3 Estrutura do Trabalho

O presente trabalho está organizado em oito capítulos. O Capítulo 1 apresenta a introdução, os objetivos e a estrutura do trabalho. O Capítulo 2 aborda a fundamentação teórica necessária ao desenvolvimento do estudo. O Capítulo 3 descreve o Problema de Alocação de Salas, enquanto o Capítulo 4 apresenta o modelo matemático adotado para o PAS no contexto da UFC — Campus Crateús.

No Capítulo 5 são discutidas melhorias propostas ao modelo. O Capítulo 6 descreve os experimentos computacionais realizados. O Capítulo 7 apresenta e discute os resultados obtidos. Por fim, o Capítulo 8 reúne as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo apresenta os conceitos teóricos fundamentais para a compreensão do Problema de Alocação de Salas e do modelo matemático analisado neste trabalho. Inicialmente, são abordados os princípios da modelagem matemática e da otimização combinatória, que fornecem a base para a formulação de problemas com variáveis discretas e múltiplas restrições.

Em seguida, são discutidos os conceitos de Programação Matemática, com ênfase em Programação Linear, Programação Inteira e na forma-padrão dos modelos. Por fim, apresentam-se as noções de ótimo global e ótimo local, essenciais para a interpretação das soluções obtidas e para a análise dos resultados apresentados nos capítulos posteriores.

2.1 Modelagem Matemática

O modelo matemático é uma representação idealizada e simplificada de um sistema real, utilizada com o objetivo de analisar, compreender e apoiar a tomada de decisão em problemas complexos. Modelos matemáticos são empregados em diversas áreas do conhecimento, permitindo estudar o comportamento de sistemas reais, bem como buscar soluções e prever resultados sob diferentes condições (HILLIER; LIEBERMAN, 2015; TAHA, 2017).

Além disso, os modelos auxiliam na identificação dos dados de entrada necessários, na explicitação dos objetivos do problema e na quantificação das decisões envolvidas, tornando explícitas as relações entre variáveis e restrições (ARENALES *et al.*, 2015).

O processo de construção de um modelo matemático é, de modo geral, constituído por três etapas principais (HILLIER; LIEBERMAN, 2015; ARENALES *et al.*, 2015):

1. Identificar as variáveis de decisão do modelo.
2. Listar as restrições do modelo.
3. Identificar a função objetivo que deve ser maximizada ou minimizada.

As variáveis de decisão são normalmente representadas por símbolos algébricos, como x e y , ou ainda x_1 , x_2 , entre outros. As restrições são expressas por meio de equações ou inequações, geralmente lineares, que delimitam o conjunto de soluções viáveis. A função objetivo, por sua vez, representa matematicamente o critério a ser otimizado pelo modelo Bazaraa *et al.* (2010).

Como exemplo, considere o seguinte modelo matemático:

$$\min \quad q(x) = 4x_1^3 - 2x_2^2 + x_3 - 10x_4 + 5x_5 \quad (2.1)$$

$$\text{s.a: } x_2 + 7x_3 \times x_4 - 3x_5 \geq 16 \quad (2.2)$$

$$2x_1 \times x_2 - 3x_4 + 2x_5 \leq 57 \quad (2.3)$$

$$5x_1 + x_2 - 9x_4 \geq 18 \quad (2.4)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \quad (2.5)$$

No modelo apresentado, a função objetivo está definida em (2.1) como uma função de minimização, cujo objetivo é encontrar os valores das variáveis que conduzam ao menor valor possível da função. O conjunto de valores admissíveis para as variáveis é determinado pelas restrições, representadas pelas inequações (2.2) a (2.5).

2.2 Problema de Otimização Combinatória

Um problema de otimização consiste em determinar os valores extremos — mínimo ou máximo — de uma função objetivo definida sobre um determinado domínio. Quando as variáveis envolvidas assumem valores discretos, o problema é classificado como um Problema de Otimização Combinatória (NEMHAUSER; WOLSEY, 1988; PAPADIMITRIOU; STEIGLITZ, 1998).

De forma geral, um modelo de otimização pode ser descrito como:

$$\min \quad f(x) \quad \quad \quad \max \quad f(x) \quad (2.6)$$

$$\text{sujeito a } x \in X \quad \quad \quad \text{sujeito a } x \in X \quad (2.7)$$

Na formulação acima, $f(x)$ representa a função objetivo a ser minimizada ou maximizada sobre o conjunto X , denominado conjunto factível, que contém todas as soluções que satisfazem as restrições do problema. Uma solução x é dita factível quando pertence ao conjunto X ; caso contrário, é considerada infactível (AHUJA *et al.*, 1993).

Assim, a otimização combinatória envolve o processo de busca por soluções factíveis dentro de um conjunto finito ou enumerável de alternativas, até que nenhuma solução melhor possa ser encontrada, considerando o critério definido pela função objetivo (GOLDBARG; LUNA, 2005).

2.3 Programação Matemática

O termo programação matemática, também conhecido como otimização matemática, refere-se ao conjunto de técnicas utilizadas para a minimização ou maximização de uma função objetivo envolvendo múltiplas variáveis, sujeita a um conjunto de restrições (BAZARAA *et al.*, 2010; BERTSIMAS; TSITSIKLIS, 1997).

Nos modelos de programação matemática, a estrutura do problema é caracterizada por uma função objetivo expressa de forma algébrica e por restrições formuladas como equações ou desigualdades, que delimitam o espaço de soluções viáveis. Dependendo da natureza das variáveis e das expressões envolvidas, esses modelos podem ser classificados como lineares, inteiros, não lineares ou mistos (ARENALES *et al.*, 2015).

2.3.1 Programação Linear

A representação de determinado sistema em modelos matemáticos, geralmente se dá por um conjunto de equações ou expressões matemáticas. Se o objetivo é uma função linear e as restrições são igualdades ou desigualdades lineares, tal problema é denominado problema linear, e o processo de formulação e resolução deste é chamado programação linear.

O algoritmo *simplex* consiste em um algoritmo geral extremamente eficiente para a solução de sistemas lineares. Visto que o modelo de programação linear reduz um sistema real a um conjunto de equações e inequações lineares em que se pretende otimizar uma função objetivo, este algoritmo pode ser usado para a resolução de problemas desta natureza (GOLDBARG; LUNA, 2005).

Um outro algoritmo, o método do elipsoide, foi originalmente desenvolvido para a resolução de problemas de otimização não linear. Em 1979, Khachiyan demonstrou que esse método poderia ser adaptado para resolver problemas de otimização linear em tempo polinomial. Entretanto, apesar de sua relevância teórica, o método apresenta desempenho computacional insatisfatório na prática, caracterizado por lenta convergência e elevado custo por iteração, o que limita sua utilização em aplicações práticas (KORTE; VYGEN, 2012).

2.3.2 Forma-padrão

Um modelo é dito está na forma-padrão se possui as seguintes características:

1. Função objetivo é do tipo minimização.

2. Todas as restrições são equações.
3. Todas as variáveis são não-negativas.
4. A constante no lado direito das restrições é não-negativa.

Uma representação de modelo na forma-padrão:

$$\min \quad f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \quad (2.8)$$

$$\text{s.a:} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (2.9)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \quad (2.10)$$

$$\vdots \quad (2.11)$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \quad (2.12)$$

$$x_1, \dots, x_n \geq 0 \quad (2.13)$$

Nem sempre os modelos são formulados em formato padrão, porém, existem formas de converter um modelo para a forma-padrão.

Pode-se usar as seguintes equivalências:

1. No caso da função objetivo ser de maximização.

$$\max f(x) = (-1) \times \min -f(x) \quad (2.14)$$

2. Geralmente as restrições tendem a aparecer no formato de inequações. Para converter uma inequação em equação pode-se usar dois tipos de variáveis: as variáveis de folga e as variáveis de excesso.

–Variáveis de folga: são utilizadas para converter inequações do tipo \leq em $=$.

$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \Rightarrow a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_1^a = b_1$, sendo $x_1^a \geq 0$ uma variável de folga;

Por exemplo, $7x_1 + 5x_2 \leq 6 \Rightarrow 7x_1 + 5x_2 + x_3 = 6$, $x_3 \geq 0$.

–Variáveis de excesso: são utilizadas para converter inequações do tipo \geq em $=$.

$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \Rightarrow a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n - x_2^a = b_2$, sendo $x_2^a \geq 0$ uma variável de excesso);

Por exemplo, $2x_1 + 5x_2 \geq 10 \Rightarrow 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 10$, $x_3 \geq 0$.

3. Ocorrência de $b_i < 0$.

Se algum $b_i < 0$, multiplicamos a restrição por -1 :

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \Rightarrow -a_{i1}x_1 - \dots - a_{in}x_n \geq -b_i;$$

Por exemplo, $2x_1 - 7x_2 = -4 \Rightarrow -2x_1 + 7x_2 = 4$.

4. Variável não positiva.

Neste caso basta substituir a variável por sua simétrica. Por exemplo, $x_j \leq 0$, basta fazer $x'_j = -x_j$, e substituir x_j por x'_j em todas as equações do problema.

2.3.3 Programação Inteira

Em um modelo de otimização onde qualquer variável não puder assumir valores contínuos, isto é, estando condicionadas a assumir valores discretos, é dito que este modelo constitui um problema de Programação Inteira (GOLDBARG; LUNA, 2005).

Segundo Maculan e Fampa (2006), quando nos problemas de programação linear obrigarmos algumas ou todas as variáveis de decisão a só admitirem valores inteiros, estaremos diante de um problema de programação linear inteira. Quando nem todas as variáveis são restritas a valores inteiros, é denominado um problema de programação linear mista.

A seguir, um modelo de Maculan e Fampa (2006):

$$\max \quad z = x_1 - 3x_2 + 4x_3 \quad (2.15)$$

$$\text{s.a:} \quad 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4 \quad (2.16)$$

$$4x_1 - 3x_2 \leq 2 \quad (2.17)$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3 \quad (2.18)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad (2.19)$$

$$x_2 \text{ e } x_3 \text{ inteiros.} \quad (2.20)$$

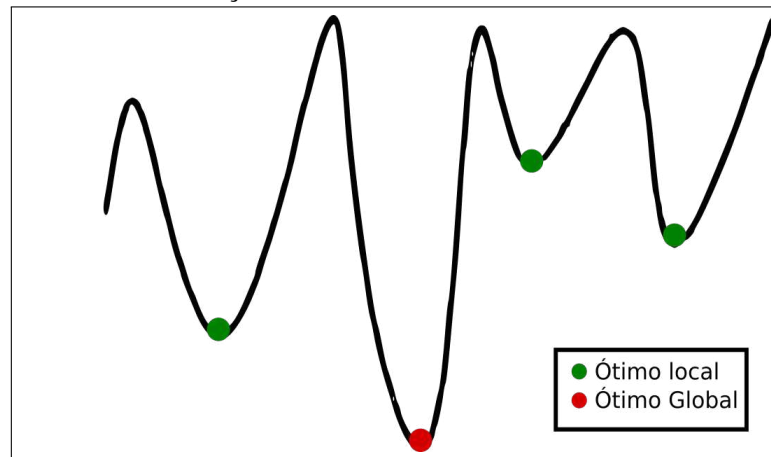
No modelo acima, as variáveis x_2 e x_3 estão restringidas a valores inteiros e não negativos, x_1 é um real qualquer não negativo. Assim, o modelo acima pode ser classificado como um Problema de Programação Linear Mista.

2.4 Ótimo Global

Como visto na seção 2.2, em um problema de otimização temos uma função objetivo, variáveis de decisão, e um conjunto de restrições que por sua vez delimitam os valores que as variáveis podem assumir, formando assim um conjunto discreto de soluções factíveis do problema. Dentre as soluções factíveis, a solução ótima, isto é, o ótimo global, é a que induz a função objetivo à assumir o menor (ou maior) valor possível.

Como pode ser visto na Figura 1 a seguir, o ponto em vermelho indica o ótimo global, uma vez que esse ponto leva a função objetivo ao menor valor possível.

Figura 1 – Representação gráfica para um problema de minimização.



Fonte: Sousa (2019).

2.5 Ótimo Local

Durante o processo de exploração do espaço de busca em problemas de otimização, é possível encontrar soluções que minimizam a função objetivo apenas em uma região específica desse espaço. Essas soluções, embora apresentem valores da função objetivo inferiores aos de suas vizinhas imediatas, não correspondem necessariamente à melhor solução global do problema, sendo caracterizadas como ótimos locais.

Na Figura 1, observa-se que os pontos em verde representam soluções que minimizam a função objetivo em determinados pontos do espaço de busca. No entanto, existem soluções associadas a valores ainda menores da função objetivo, evidenciando que tais pontos não correspondem a um ótimo global, mas sim a ótimos locais.

Diante dos conceitos apresentados neste capítulo, no próximo capítulo será apresentada a formalização do Problema de Alocação de Salas, abordando suas definições, características e fundamentos teóricos.

3 PROBLEMA DA ALOCAÇÃO DE SALAS

O processo de construção da grade de horários é realizado de tempos em tempos pelas instituições de ensino, podendo ser semestralmente, anualmente, ou em qualquer outro intervalo de tempo segundo as regras da instituição. O processo consiste em alocar de forma combinada diversos recursos, como salas de aula, professores, etc., tendo em vista restrições impostas, como por exemplo a disponibilidade de professores. Dada suas características, este processo consiste em um problema combinatório.

Naturalmente, se imagina que uma possível forma de achar a melhor solução de um problema combinatório seja enumerar todas as possíveis soluções para este problema. Entretanto, quanto maior o problema, maior o número de soluções possíveis, e em aplicações reais, como no caso do problema da alocação de salas, pode-se apresentar um número muito elevado de recursos e restrições, assim, não sendo possível enumerar todas as soluções possíveis em um tempo hábil. Como pôde ser visto durante o capítulo anterior, existem diferentes estratégias de modelagem, bem como diferentes métodos de resolução dadas as características do problema.

Na necessidade de explorar e encontrar uma boa configuração de horários para a Universidade Federal do Ceará - Campus Crateús, Sousa (2019) apresenta em seu trabalho um modelo matemático construído em termos de Otimização Combinatória, na qual foi denominado como Problema de Alocação de Salas (PAS), e aplicação de um procedimento heurístico para sua solução.

A concepção do modelo matemático não linear, que posteriormente foi linearizado, é dada por um conjunto de recursos — professores, turmas, dias e horários da semana — que devem ser alocados a um conjunto de salas. É considerada uma solução factível aquela em que todas as turmas são devidamente alocadas, cumprindo suas cargas horárias prática e teórica, respeitando a carga horária de trabalho dos professores.

O modelo também contempla como restrições fortes, isto é, restrições que devem ser obrigatoriamente satisfeitas, que toda turma esteja associada a exatamente um professor, que não ocorram conflitos na alocação de turmas e que, para turmas com cargas horárias teórica e prática, as atividades teóricas sejam alocadas em dias anteriores às atividades práticas.

Quanto às restrições fracas, ou seja, aquelas cujo atendimento é desejável, mas não obrigatório, considera-se que os professores devem ser alocados preferencialmente em seus dias de preferência e que as alocações professor–turma respeitem o perfil de formação de cada docente.

Como se trata de um problema real do Campus da UFC em Crateús, apenas sete configurações para alocação poderiam ser pontuadas, uma vez que dada a operacionalização do campus em questão, até o momento do desenvolvimento do estudo, só poderiam ser referenciados os períodos letivos de 2016.1 a 2019.1. Frente a isso, o autor se utilizou de um gerador de instâncias próprio desenvolvido exclusivamente para o contexto do problema, baseado nos parâmetros extraídos das instâncias reais, de forma a manter-se na realidade do cenário.

Os experimentos computacionais se deram por meio de duas estratégias: a primeira com o algoritmo *Branch and Bound*, e a segunda com o método heurístico Busca Tabu. Os testes foram aplicados em execução única com o algoritmo *Branch and Bound* para a validação do modelo e análise do comportamento das instâncias reais e parte das instâncias geradas. Dada análise dos resultados obtidos, foi validada a qualidade das instâncias geradas, e também o modelo computacional proposto.

Ainda analisando os resultados obtidos por meio da execução do *Branch and Bound*, notou-se um crescimento do tempo computacional gasto para a resolução de instâncias maiores, assim, justificando procedimentos heurísticos com o objetivo de reduzir o tempo computacional gasto na garantia de soluções com boas qualidades. Os testes realizados também foram aplicados em execução única com o procedimento heurístico Busca Tabu. A análise dos dados obtidos foi realizada de duas formas: a verificação da qualidade das soluções produzidas e a análise da composição da função objetivo, com ênfase nas restrições do tipo hard, que são prioritárias e devem ser obrigatoriamente atendidas pelo modelo.

A partir disso, é demonstrado pela taxa de qualidade, o encontro de soluções viáveis para o problema, com altas porcentagens de soluções factíveis encontradas para os quatro cenários de testes experimentados e com a análise da composição da função objetivo, é visto que o algoritmo se mostra promissor na geração de soluções com baixa porcentagem de erro.

Um outro estudo, Bucco *et al.* (2017) também aborda a problemática da construção de grades horárias em universidades. Neste artigo, é objetivado desenvolver um modelo de programação linear para o problema, a fim de apoiar os gestores de uma universidade na construção das grades horárias das aulas.

Na abordagem da problemática da construção das grades horárias, os autores se baseiam no conceito de *master timetabling*, por Carter e Laporte (1998), que consiste em alocar primeiramente disciplinas, professores, salas e demais recursos materiais e pedagógicos, para que então, os alunos escolham as disciplinas que lhe convenham de acordo com as grades já

prontas.

Devido a isso, o modelo não conta com o conjunto de estudantes. Assumindo que cada turma já tem um professor associado a ela, o conjunto de professores se faz presente para evitar conflitos de horários, uma vez que professores não podem ministrar mais de uma aula ao mesmo tempo. Em relação aos espaços físicos, apenas salas de aula são consideradas para a modelagem, após isso, são identificadas as restrições fracas e fortes.

Foram realizados testes a partir de um conjunto de dados coletados de uma instituição real, e devido a complexidade do problema, como resultado, se viu a impossibilidade de solucionar a instância completa de forma ótima. Para contornar isso, o problema principal foi dividido em dois subproblemas: O subproblema I, e o subproblema II. O subproblema I consiste na construção das grades horárias semanais, com o objetivo de distribuir uniformemente os encontros entre todos os horários. O subproblema II consiste na atribuição de salas de aula às turmas, tendo como objetivo a restrição fraca de minimizar o custo com a utilização de unidades.

Os modelos matemáticos foram resolvidos pelo pacote de otimização IBM ILOG CPLEX Optimization Studio v12.5.1 com as configurações *default*. Como resultado, demonstrou-se que é possível construir grades horárias factíveis, diminuindo a demanda por salas de aula, possibilitada por uma distribuição de aulas mais equilibrada ao longo da semana. Em relação as restrições horárias dos professores, este estudo pressupôs que cada professor estava disponível em todos os horários do turno indicado para suas turmas, entretanto, dado o ganho de 57% de eficiência de distribuição de salas, os autores indicam que há muita margem para que mesmo essas restrições fossem consideradas, os ganhos permaneçam elevados.

A partir da caracterização do Problema de Alocação de Salas apresentada neste capítulo, o próximo capítulo dedica-se à apresentação detalhada do modelo matemático adotado, originalmente proposto por Sousa (2019) no contexto da Universidade Federal do Ceará — Campus Crateús, no qual são descritas e explicadas suas variáveis, restrições e função objetivo.

4 PAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ, CAMPUS CRATEÚS

Como já visto no Capítulo 3, o modelo conta com três restrições fortes. A primeira consiste em que toda turma deve estar associada a exatamente um professor; a segunda, em que duas turmas não podem apresentar conflitos em sua alocação; e a terceira estabelece que, para turmas com carga horária teórica e prática, as atividades teóricas devem ser alocadas em dias anteriores às atividades práticas.

Quanto às restrições fracas, são duas: a primeira determina que os professores devem ser alocados preferencialmente em seus dias preferidos, informação esta tomada como dado de entrada do problema; e a segunda estabelece que as alocações professor–turma devem respeitar o perfil de formação de cada docente, sendo esses perfis também considerados como dados de entrada.

Os parâmetros de entradas do modelo são: P , o conjunto de professores; T , o conjunto de turmas; $T_p \subseteq T$, representando para cada $p \in P$, o subconjunto das turmas que compõem o perfil acadêmico do professor p ; D , o conjunto de dias da semana; $D_p \subseteq D$, representando para cada $p \in P$, o subconjunto dos dias em que o professor p prefere lecionar; $D' \subseteq D$, que contém os dias da semana com incidência de feriados do semestre; H , o conjunto de slots de horários; S , o conjunto de salas; $ch_t^T \in \mathbb{Z}^+$, representando a carga horária teórica da turma $t \in T$; $ch_t^P \in \mathbb{Z}^+$, representando a carga horária prática da turma $t \in T$; $ch_p \in \mathbb{Z}^+$, representando a carga horária do professor $p \in P$. Ressalta-se que o modelo considera um horizonte de planejamento semanal, no qual as alocações de turmas, professores, dias, horários e salas se repetem a cada semana do período letivo.

O modelo conta com as seguintes variáveis: z_{pi} representando a associação entre um professor e um dia da semana; x_{pt} representando a associação entre um professor e uma turma; y_{tijk}^P representando a associação de uma turma $t \in T$ com carga horária prática a um $i \in D$, $j \in H$ e $k \in S$; y_{tijk}^T representando a associação de uma turma $t \in T$ com carga horária teórica a um dia $i \in D$, um horário $j \in H$ e uma sala $k \in S$; y_{tijk} representando a carga horária total da turma sem distinção entre carga horária prática e teórica; a_p representando a penalidade a um professor quando é associado a uma turma fora do subconjunto T_p das turmas que compõem o perfil acadêmico do professor em questão; b_p representando a penalidade a um professor quando é associado a um dia fora do subconjunto D_p de dias em que o professor em questão prefere lecionar. As variáveis x_{pt} , y_{tijk}^P , y_{tijk}^T , y_{tijk} e z_{pi} são tomadas como binárias. a_p , e b_p são tomadas como inteiras e não-negativas.

A seguir a apresentação completa do modelo, bem como a descrição das restrições e função objetivo.

$$\min \quad z(\alpha, \beta) = \alpha \cdot \sum_{p \in P} a_p + \beta \cdot \sum_{p \in P} b_p \quad (4.1)$$

$$\sum_{p \in P} x_{pt} = 1, \forall t \in T \quad (4.2)$$

$$\sum_{t \in T_p} x_{pt} \leq a_p, \forall p \in P \quad (4.3)$$

$$\sum_{t \in T} (ch_t^T + ch_t^P) x_{pt} = ch_p, \forall p \in P \quad (4.4)$$

$$\sum_{i \in D} \sum_{j \in H} \sum_{k \in S} y_{tijk}^T = \frac{ch_t^T}{2}, \forall t \in T \quad (4.5)$$

$$\sum_{i \in D} \sum_{j \in H} \sum_{k \in S} y_{tijk}^P = \frac{ch_t^P}{2}, \forall t \in T \quad (4.6)$$

$$\sum_{t \in T} y_{tijk} \leq 1, \forall i \in D, \forall j \in H, \forall k \in S \quad (4.7)$$

$$y_{tijk} = y_{tijk}^T + y_{tijk}^P, \forall t \in T, \forall i \in D, \forall j \in H, \forall k \in S \quad (4.8)$$

$$x_{pt} \cdot y_{tijk} \leq z_{pi}, \forall p \in P, \forall t \in T, \forall i \in D, \forall j \in H, \forall k \in S \quad (4.9)$$

$$\sum_{i \in D \setminus D_p} z_{pi} \leq b_p, \forall p \in P \quad (4.10)$$

$$y_{tijk}^P \leq 1 - y_{ti'j'k'}^T, \forall t \in T, \forall i \in D, \forall i' \in D' : i < i', \forall j, j' \in H, \forall k, k' \in S. \quad (4.11)$$

$$x_{pt} \in \{0, 1\}, \forall p \in P, \forall t \in T \quad (4.12)$$

$$y_{tijk}^P \in \{0, 1\}, \forall t \in T, \forall i \in D, \forall j \in H, \forall k \in S \quad (4.13)$$

$$y_{tijk}^T \in \{0, 1\}, \forall t \in T, \forall i \in D, \forall j \in H, \forall k \in S. \quad (4.14)$$

$$y_{tijk} \in \{0, 1\}, \forall t \in T, \forall i \in D, \forall j \in H, \forall k \in S. \quad (4.15)$$

$$z_{pi} \in \{0, 1\}, \forall p \in P, \forall i \in D \quad (4.16)$$

$$a_p \in \mathbb{B}^{|P|} \quad (4.17)$$

$$b_p \in \mathbb{B}^{|P|} \quad (4.18)$$

$$\alpha \in \mathbb{Z}_+^* \quad (4.19)$$

$$\beta \in \mathbb{Z}_+^* \quad (4.20)$$

Em (4.1) está a função objetivo, que trata da penalização de dois parâmetros, α e

β . α representa a atribuição de um professor a uma turma fora de seu perfil. β , por sua vez, representa a associação entre um professor $p \in P$ e um dia fora de D_p . A restrição (4.2) garante que toda turma deve estar associada a exatamente um professor. A restrição (4.3) descreve quando um professor é associado a uma turma fora de seu perfil. A restrição (4.5) assegura que toda turma cumpra sua carga horária teórica, enquanto a restrição (4.6) assegura que toda turma cumpra sua carga horária prática, sendo adotada, no modelo, a convenção de que cada *slot* de horário corresponde a uma hora-aula com duração de 2 horas.

A restrição (4.7) assegura que para qualquer dia, o slot de horário e sala, estarão associados a apenas uma turma. A restrição (4.8) representa a associação entre y_{tijk}^T e y_{tijk}^P , para que seja atribuído o valor de y_{tijk} . A restrição (4.9) assegura que um professor esteja associado a uma turma com mesmo dia, slot de horário e sala. A restrição (4.10) descreve a associação de um professor a um dia fora do conjunto de seus dias preferenciais para lecionar. A restrição (4.11) mantém o controle sobre uma turma teórica anteceder uma turma prática.

5 MELHORIAS

O modelo matemático proposto por Sousa (2019) foi definido com o propósito de formalizar o Problema de Alocação de Salas (PAS). Contudo, sua resolução não foi conduzida por meio de métodos exatos, mas sim por abordagens heurísticas aplicadas ao problema formalizado. Uma análise mais detalhada, entretanto, permite identificar uma inconsistência no modelo original, a qual é discutida na Seção 5.1 por meio de um exemplo mínimo que a evidencia na Seção 5.2. Em seguida, na Seção 5.3, apresenta-se a solução proposta neste trabalho, que consiste na introdução de uma nova restrição ao modelo, visando mitigar o problema identificado.

5.1 Inconsistência

O modelo proposto por Sousa (2019) permite alocações em que uma mesma turma seja designada, simultaneamente, para o mesmo dia e horário em diferentes salas. Esse tipo de alocação é considerado, neste trabalho, uma inconsistência, uma vez que inviabiliza o aproveitamento integral da turma, dado que não é possível que ela esteja presente em duas salas ao mesmo tempo.

Em outras palavras, para cada par (*dia, horário*), uma turma deve estar associada a, no máximo, uma sala, de modo a garantir a consistência e a viabilidade prática da solução. A seguir, apresenta-se uma ilustração da ocorrência dessa inconsistência, construída a partir de um exemplo de instância simplificada do problema.

5.2 Ilustração da Inconsistência

Para ilustrar a inconsistência definida, considere a seguinte instância simplificada:

- **Conjuntos principais:**

- P (Professores): [1]
- T (Turmas): [1]
- D (Dias da semana): [1, 2, 3, 4, 5]
- D' (Dias com feriado): [5]
- H (Horários): [1315]
- S (Salas): [1, 2]

- **Parâmetros por turma:**

- ch_i^T (Carga horária teórica): Turma 1: 4 horas

– ch_t^P (Carga horária prática): Turma 1: 0 horas

• **Parâmetros por professor:**

– ch_p (Carga horária máxima): Professor 1: 4 horas

• **Preferências dos professores:**

– T_p (Turmas preferidas): Professor 1: [1]

– D_p (Dias preferidos): Professor 1: [1]

A partir dessa instância simplificada, obtém-se uma valoração das variáveis em que a associação entre professor e turma é ativada, bem como a seleção de um único dia para o professor. As variáveis correspondentes à carga horária prática permanecem desativadas, uma vez que a instância considera apenas carga horária teórica.

Observa-se que a alocação da carga horária teórica atribui a mesma turma ao mesmo par (*dia, horário*) em mais de uma sala simultaneamente, o que se reflete diretamente nas variáveis agregadas de alocação. As variáveis auxiliares associadas a penalizações assumem valor nulo nessa instância. A valoração completa das variáveis é apresentada nos anexos para fins de referência.

Por se tratar de uma instância simplificada com o objetivo de evidenciar a inconsistência apresentada, a turma não possui carga horária prática, apenas teórica. Conforme descrito no Capítulo 4, a variável y_{tijk}^T representa a associação de uma turma $t \in T$, com carga horária teórica, a um dia $i \in D$, horário $j \in H$ e sala $k \in S$. A seguir, apresenta-se a disposição da variável y_{tijk}^T para a Turma 1 em forma de tabela.

Tabela 1 – Disponibilidade de salas por dia e horário (com inconsistência).

Dia i	Horário j	Sala 1	Sala 2
1	13:15	1	1
2	13:15	0	0
3	13:15	0	0
4	13:15	0	0
5	13:15	0	0

Fonte: Próprio autor.

Observa-se, na primeira linha da Tabela 1— que representa o par (*dia, horário*) (1, 1315)— que as colunas correspondentes às Salas 1 e 2 recebem o valor 1. Isso indica que a turma está alocada simultaneamente em ambas as salas para essa combinação.

A solução completa é dada da seguinte forma:

• **Função objetivo (valor):** 0,0

- **Atribuições professor → turma:** Professor 1 atribuído à Turma 1
- **Dias de aula por professor:** Professor 1 trabalha no dia 1
- **Penalidades:** $a_p[1] = 0,0$ $b_p[1] = 0,0$
- **Cronograma de alocação (Dia → Horário → Sala → Turma):**
 - Dia 1 → Horário 1315 → Sala 1 → Turma 1 (teórica)
 - Dia 1 → Horário 1315 → Sala 2 → Turma 1 (teórica)

A solução apresenta valor ótimo igual a 0,0 na função objetivo e atribui corretamente o Professor 1 à Turma 1, alocando suas aulas no dia 1, com ausência de penalidades tanto na atribuição de turmas quanto em relação aos dias preferidos. Entretanto, ao analisar o cronograma resultante, verifica-se que a Turma 1 foi alocada simultaneamente, no mesmo dia e horário, em duas salas distintas.

Define-se, portanto, uma **inconsistência** como a alocação simultânea de uma mesma turma para o mesmo dia e horário, independentemente da sala atribuída. A fim de evitar esse tipo de ocorrência, este trabalho propõe a introdução de uma nova restrição ao modelo matemático, especificamente voltada ao tratamento dessa inconsistência.

5.3 Nova Restrição

A seguir, apresenta-se a restrição proposta:

$$\sum_{j \in H} \sum_{k \in S} y_{tijk} \leq 1, \quad \forall i \in D, \forall t \in T$$

Para cada dia i e para cada turma t , o número de combinações (j, k) — ou seja, pares horário/sala — atribuídas à turma nesse dia deve ser, no máximo, igual a 1. Em outras palavras: admite-se, no máximo, uma alocação por dia para cada turma. Essa restrição impede que uma mesma turma seja alocada em mais de um horário e/ou sala no mesmo dia, limitando os slots ocupados por uma turma t no dia i .

Com a incorporação da nova restrição ao modelo, a inconsistência anteriormente identificada é eliminada. A nova valoração das variáveis passa a garantir que, para cada par $(dia, horário)$, a turma seja associada a uma única sala, respeitando a viabilidade prática da alocação.

Observa-se que a associação entre professor e turma permanece válida, bem como a seleção dos dias atribuídos ao professor. As variáveis correspondentes à carga horária prática continuam desativadas, uma vez que a instância considera apenas carga horária teórica. Dife-

rentemente da solução anterior, a alocação da carga horária teórica não ocorre simultaneamente em mais de uma sala, refletindo o efeito direto da restrição adicionada ao modelo. As variáveis auxiliares associadas a penalizações assumem valores compatíveis com essa nova configuração, uma vez que o professor foi alocado em um dia fora do seu conjunto de dias preferidos.

Novamente, apresenta-se a disposição da variável y_{tijk}^T para a Turma 1 em forma de tabela.

Tabela 2 – Disponibilidade de salas por dia e horário (sem inconsistência).

Dia i	Horário j	Sala 1	Sala 2
1	13:15	1	0
2	13:15	0	0
3	13:15	0	0
4	13:15	1	0
5	13:15	0	0

Fonte: Próprio autor.

Observa-se que, para cada par (*dia, horário*), apenas uma sala recebe o valor 1. A solução completa apresenta-se da seguinte forma:

- **Função objetivo (valor):** 1,0
- **Atribuições professor \rightarrow turma:** Professor 1 atribuído à Turma 1
- **Dias de aula por professor:** Professor 1 trabalha no dia 1
- **Dias de aula por professor:** Professor 1 trabalha no dia 4
- **Penalidades:** $a_p[1] = 0,0$ $b_p[1] = 1,0$
- **Cronograma de alocação (Dia \rightarrow Horário \rightarrow Sala \rightarrow Turma):**
 - Dia 1 \rightarrow Horário 1315 \rightarrow Sala 1 \rightarrow Turma 1 (teórica)
 - Dia 4 \rightarrow Horário 1315 \rightarrow Sala 1 \rightarrow Turma 1 (teórica)

6 EXPERIMENTOS

Neste capítulo, apresenta-se o ambiente computacional utilizado para a realização dos experimentos com os modelos matemáticos desenvolvidos. Também são descritas as instâncias consideradas nos testes, bem como a definição dos diferentes casos experimentais adotados para a análise do desempenho do modelo e do *solver*.

6.1 Ambiente de Testes

A implementação do modelo matemático foi realizada utilizando a linguagem de programação Python, versão 3.13.2. Para a resolução do modelo, empregou-se o *solver* SCIP (Solving Constraint Integer Programs)¹, um *solver* de otimização gratuito e de código aberto, acessado por meio do framework OR-Tools², versão 9.12.4544, desenvolvido pelo Google.

Os experimentos foram executados em um ambiente computacional composto por um processador Intel Core i5-10400F, 16 GB de memória RAM (2 × 8 GB DDR4 a 2666 MHz) e sistema operacional Microsoft Windows 11, versão 10.0.26100.4351, com arquitetura de 64 bits. Para cada instância, foi estabelecido um limite máximo de tempo de execução de 2 horas (7,200 segundos) para o processo de resolução.

6.2 Instâncias

As instâncias contêm, entre outros elementos, conjuntos de professores, turmas, horários e salas disponíveis, além de relações específicas, como preferências de dias por professor, associações entre professores e turmas e exigências de carga horária para cada turma. A seguir, apresenta-se a estrutura geral de uma instância, bem como a forma como elas foram organizadas para os experimentos.

6.2.1 Exemplo de Instância

Na Figura 2, apresenta-se a estrutura de uma instância do problema. As oito primeiras linhas correspondem aos conjuntos principais: a primeira e a segunda linhas representam, respectivamente, o conjunto de professores e o conjunto de turmas; as duas linhas seguintes indicam as cargas horárias prática e teórica, associadas às turmas na mesma ordem definida na

¹ Disponível em: <<https://www.scipopt.org>>.

² Disponível em: <<https://developers.google.com/optimization>>.

segunda linha. Em seguida, são apresentados os conjuntos de dias, dias com feriados, horários e salas disponíveis.

As linhas 9 a 16 descrevem as preferências de turmas por professor, indicadas pelo símbolo “-”, seguido do código do professor e das turmas correspondentes. As linhas 17 a 24 representam as preferências de dias por professor, indicadas pelo símbolo “*”, seguido do código do professor e dos dias preferidos. Por fim, as linhas 25 a 32 especificam a carga horária total de cada professor, indicada pelo símbolo “>”, seguido do código do professor e da quantidade de horas atribuídas.

Figura 2 – Representação de uma instância.

1	10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80	
2	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13	
3	0, 2, 2, 0, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4	
4	2, 2, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 4, 4	
5	1, 2, 3, 4, 5	
6	4	
7	1315, 1517, 171930, 192130	
8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10	
9	-10, 1	
10	-20, 2	
11	-30, 3	
12	-40, 4, 5	
13	-50, 6, 7	
14	-60, 8, 9	
15	-70, 10, 11	
16	-80, 12, 13	
17	*10, 4, 3	
18	*20, 4, 3	
19	*30, 2, 4	
20	*40, 3, 2	
21	*50, 4, 3	
22	*60, 3, 4, 2	
23	*70, 2, 3	
24	*80, 2, 3	
25	>10, 2	
26	>20, 4	
27	>30, 4	
28	>40, 10	
29	>50, 12	
30	>60, 12	
31	>70, 12	
32	>80, 14	

Conjuntos Principais

Relação Professor x Turma

Relação Professor x Dia

Carga Horária do Professor

Fonte: Próprio autor.

6.2.2 Grupos de Instâncias

Inicialmente, os experimentos foram conduzidos utilizando as mesmas 50 instâncias apresentadas por Souza em seu trabalho, algumas das quais representam cenários reais de semestres da UFC — Campus Crateús. Ao longo desse conjunto, observam-se variações tanto no número de elementos envolvidos — como professores e turmas — quanto em parâmetros específicos, como preferências individuais e a definição de feriados. Essas variações resultam em instâncias com diferentes níveis de complexidade, possibilitando avaliar o desempenho do

modelo matemático e do *solver*.

No decorrer da análise, constatou-se uma diferença significativa no tempo de resolução de duas instâncias específicas, que diferem apenas quanto ao conjunto de dias preferidos pelos professores. Essa disparidade evidenciou a relevância desse parâmetro, tornando promissora a realização de uma análise de sensibilidade com o objetivo de investigar seu impacto no desempenho do modelo. Para tanto, as 50 instâncias originais foram replicadas, mantendo-se inalterados todos os demais parâmetros, com exceção dos dias preferidos pelos professores.

6.3 Casos de Testes

Considerando a divisão das instâncias em dois grupos — instâncias originais e instâncias com todos os dias definidos como preferidos — e a inclusão da nova restrição proposta no Capítulo 5, foram definidos quatro casos de teste:

- Caso 1: Instância original;
- Caso 2: Instância original com a inclusão da nova restrição;
- Caso 3: Instância com todos os dias definidos como preferidos;
- Caso 4: Instância com todos os dias definidos como preferidos, com a inclusão da nova restrição.

Os casos de teste definidos nesta seção servem de base para a análise comparativa apresentada no capítulo seguinte, no qual são discutidos os impactos da nova restrição proposta e do relaxamento do critério de dias preferidos sobre o desempenho do modelo e do *solver*.

7 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados obtidos a partir dos experimentos computacionais descritos no capítulo anterior. A análise concentra-se no desempenho do modelo matemático sob diferentes configurações, considerando tanto a inclusão da nova restrição proposta quanto variações em parâmetros relevantes do problema. São avaliados aspectos como tempo de resolução, resolubilidade das instâncias e impacto das modificações estruturais sobre o comportamento do *solver*, permitindo uma análise crítica dos efeitos das escolhas de modelagem adotadas.

Os resultados apresentados neste capítulo baseiam-se em dados consolidados obtidos a partir dos experimentos computacionais, cujas informações detalhadas — incluindo tabelas completas de desempenho e saídas do *solver* — encontram-se organizadas nos Apêndices 4, 5, 6 e 7.

7.1 Motivação da Análise de Sensibilidade

A partir dos casos de teste definidos no Capítulo 6, a análise dos resultados revelou uma diferença significativa no tempo de resolução de duas instâncias específicas cujos parâmetros diferem exclusivamente quanto ao conjunto de dias preferidos pelos professores. Essa observação motivou a investigação do impacto desse parâmetro sobre o desempenho do modelo matemático.

Diante desse comportamento, considerou-se promissora a realização de uma análise de sensibilidade. Para tanto, as 50 instâncias originais foram replicadas, mantendo-se todos os seus parâmetros inalterados, com exceção dos dias preferidos pelos professores. No conjunto de instâncias modificadas, todos os dias da semana foram considerados preferidos, eliminando penalidades associadas à relação professor–dia e, conseqüentemente, o impacto desse critério no processo de resolução.

7.2 Análise de Sensibilidade

A análise de sensibilidade concentrou-se na avaliação do efeito do parâmetro referente aos dias preferidos dos professores sobre o desempenho do modelo. Ao considerar todos os dias como preferidos, observou-se maior flexibilidade na alocação, o que se refletiu diretamente na capacidade do *solver* em encontrar soluções dentro do tempo limite estabelecido.

De modo geral, essa modificação reduziu o grau de restrição do modelo, facilitando

o processo de busca por soluções e resultando em tempos de execução inferiores quando comparados às instâncias originais. Além disso, permitiu que instâncias anteriormente não resolvidas fossem concluídas dentro do tempo estipulado, motivando a análise comparativa apresentada nas subseções seguintes.

7.2.1 Impacto da Nova Restrição (Caso 1 × Caso 2)

No que se refere ao tempo de resolução, observa-se que a inclusão da nova restrição, proposta no Capítulo 5, aumentou significativamente a dificuldade do problema. Enquanto no Caso 1 o *solver* foi capaz de resolver 12 instâncias dentro do limite de tempo estabelecido, no Caso 2 apenas 10 instâncias foram solucionadas, sendo que as demais atingiram o tempo máximo permitido.

Esse comportamento indica que, embora a restrição proposta elimine completamente as inconsistências do modelo, ela impõe maior rigor à busca por soluções, refletindo em um aumento do esforço computacional necessário para a resolução.

7.2.2 Impacto do Relaxamento dos Dias Preferidos (Caso 1 × Caso 3)

Ao relaxar a restrição referente aos dias preferidos dos professores (Caso 3), observou-se um aumento expressivo no número de instâncias resolvidas pelo *solver*. Enquanto no Caso 1 apenas 12 das 50 instâncias foram solucionadas — todas com soluções ótimas —, no Caso 3 esse número aumentou para 33 instâncias.

Dentre essas, 20 apresentaram soluções ótimas, enquanto 13 não admitiram soluções viáveis, indicando que, mesmo com o relaxamento do critério de dias preferidos, as restrições obrigatórias do modelo não puderam ser satisfeitas em determinados casos. Esse resultado evidencia que o relaxamento amplia significativamente o espaço de busca por soluções, facilitando a convergência do modelo, ainda que nem todas as instâncias admitam soluções viáveis.

7.2.3 Restrição Nova sob Relaxamento (Caso 3 × Caso 4)

Após o relaxamento da restrição referente aos dias preferidos dos professores (Caso 3), observou-se maior flexibilidade do modelo, resultando em um aumento no número de instâncias resolvidas. Entretanto, mesmo nesse cenário, ainda foram identificadas inconsistências nas soluções obtidas.

Com a inclusão da nova restrição no modelo relaxado (Caso 4), verificou-se novamente a eliminação dessas inconsistências nas instâncias resolvidas, indicando que a restrição proposta mantém sua efetividade mesmo em um ambiente de maior liberdade de alocação. Esse resultado evidencia a robustez da nova restrição proposta, uma vez que sua aplicação contribui para a consistência estrutural do modelo tanto na formulação original quanto sob relaxamento.

7.2.4 Análise da Resolubilidade do Modelo

A análise da resolubilidade do modelo evidencia de forma clara o impacto das diferentes configurações consideradas nos experimentos. A classificação das instâncias quanto à obtenção de soluções ótimas, viáveis ou inviáveis baseia-se nos status retornados pelo *solver* conforme descrito no Apêndice 3. Os dados completos referentes à resolubilidade das instâncias em cada caso experimental encontram-se apresentados no Apêndice 8.

No Caso 1, correspondente às instâncias originais, o *solver* foi capaz de resolver 12 das 50 instâncias analisadas, o que representa uma taxa de resolubilidade de 24%. Com a inclusão da nova restrição (Caso 2), observou-se uma redução na resolubilidade do modelo, com apenas 10 instâncias solucionadas, correspondendo a 20% do total. Dentre essas, 2 instâncias apresentaram soluções ótimas, enquanto as demais 8 resultaram em soluções viáveis, indicando o aumento do rigor imposto ao modelo e, conseqüentemente, maior dificuldade no processo de resolução.

Por outro lado, o relaxamento da restrição referente aos dias preferidos dos professores (Caso 3) resultou em um aumento expressivo da resolubilidade, com 33 instâncias resolvidas, o que corresponde a 66% do total. Nesse cenário, 20 instâncias apresentaram soluções ótimas, enquanto 13 foram resolvidas com certificação de inviabilidade, evidenciando que a flexibilização da restrição amplia significativamente a capacidade do *solver* em concluir as instâncias, seja por meio da obtenção de soluções viáveis, seja pela comprovação formal de inviabilidade.

Finalmente, ao combinar o relaxamento dos dias preferidos com a inclusão da restrição nova (Caso 4), a resolubilidade manteve-se elevada, com 32 instâncias resolvidas, correspondendo a 64% do total. Dentre essas, 19 instâncias apresentaram soluções ótimas, enquanto 13 foram resolvidas com certificação de inviabilidade, indicando que, embora a nova restrição imponha maior rigor ao modelo, seu impacto sobre a resolubilidade é significativamente atenuado quando aplicada em conjunto com o relaxamento da restrição de dias preferidos.

7.3 Síntese dos Resultados

De modo geral, os resultados obtidos evidenciam que a restrição proposta no Capítulo 5 é eficaz na eliminação das inconsistências identificadas no modelo, ainda que sua inclusão implique um aumento do esforço computacional necessário para a resolução das instâncias. A análise de sensibilidade e, em especial, a avaliação da resolubilidade do modelo — baseada nos status retornados pelo *solver*, conforme descrito no Apêndice 3 — demonstram que parâmetros relacionados às preferências dos professores exercem influência significativa sobre a complexidade do problema.

Observa-se que o relaxamento desse critério amplia substancialmente a capacidade do *solver* em concluir as instâncias, seja por meio da obtenção de soluções viáveis, seja pela certificação de inviabilidade, ao passo que a nova restrição mantém sua efetividade mesmo nesse cenário. Esses resultados reforçam a relevância das modificações propostas e fornecem subsídios consistentes para as conclusões apresentadas no capítulo seguinte.

8 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho teve como objetivo analisar o modelo matemático proposto por Souza (2019) para o Problema de Alocação de Salas (PAS), conforme delineado na Introdução, bem como propor aprimoramentos que garantissem maior consistência estrutural e viabilidade prática das soluções obtidas. Para isso, foi conduzido um estudo detalhado do modelo original, seguido da identificação de limitações e da avaliação experimental das modificações propostas.

A principal contribuição deste estudo consiste na identificação de uma inconsistência presente no modelo original, a qual permitia alocações inviáveis do ponto de vista prático, em que uma mesma turma poderia ser designada simultaneamente para o mesmo dia e horário em salas distintas. Essa situação compromete a interpretação e a aplicabilidade das soluções geradas, uma vez que viola restrições implícitas do problema real. Para mitigar essa inconsistência, foi proposta a inclusão de uma nova restrição ao modelo matemático, garantindo que, para cada dia, uma turma pode estar associada a, no máximo, uma sala e um horário.

Os experimentos computacionais realizados demonstraram que a restrição proposta é eficaz na eliminação da inconsistência identificada, preservando a coerência estrutural do modelo mesmo sob diferentes configurações de entrada. Entretanto, os resultados também evidenciaram que a inclusão dessa restrição torna o modelo mais restritivo, refletindo-se em aumento do esforço computacional necessário para a obtenção de soluções, em função do maior rigor imposto ao modelo pela restrição adicional.

Adicionalmente, foi conduzida uma análise de sensibilidade em relação ao parâmetro de dias preferidos dos professores. Os resultados mostraram que o relaxamento dessa restrição amplia significativamente o espaço de soluções viáveis, aumentando a resolubilidade do modelo e permitindo que o *solver* conclua um número maior de instâncias, seja por meio da obtenção de soluções ótimas, seja pela certificação de inviabilidade. Observou-se ainda que, quando combinada com esse relaxamento, a restrição proposta mantém sua efetividade na eliminação das inconsistências, sem comprometer de forma significativa a resolubilidade do modelo.

De modo geral, os resultados obtidos indicam que a restrição introduzida contribui para a robustez e a consistência do modelo matemático, tornando-o mais aderente às condições reais do problema de alocação de salas. Ao mesmo tempo, a análise experimental reforça a importância do tratamento adequado dos parâmetros do modelo, uma vez que estes exercem influência direta tanto sobre o desempenho computacional quanto sobre a capacidade de resolução das instâncias.

Como trabalhos futuros, sugere-se a investigação de estratégias que conciliem a consistência estrutural do modelo com melhorias em sua escalabilidade, como a adoção de técnicas de decomposição, métodos heurísticos ou abordagens híbridas. Além disso, os resultados experimentais indicam a necessidade de um estudo mais aprofundado sobre outras dimensões do problema que impactam o desempenho computacional.

Observou-se que instâncias com características aparentemente semelhantes — como número de professores, turmas e configuração de dias preferidos — podem apresentar comportamentos significativamente distintos em termos de tempo de resolução e número de iterações exigidas pelo *solver*. Tal evidência sugere a existência de fatores estruturais adicionais — possivelmente relacionados à interação entre restrições e parâmetros do modelo — que merecem ser explorados, contribuindo para uma compreensão mais abrangente da complexidade do problema e para o aprimoramento das estratégias de resolução.

Por fim, ressalta-se que, em trabalhos futuros, pode ser explorada a flexibilização da modelagem temporal adotada no modelo. Atualmente, considera-se que cada *slot* de horário possui duração fixa de duas horas, hipótese adequada para a maioria das disciplinas analisadas. Entretanto, observa-se que existem disciplinas cujas aulas são organizadas em blocos de duração distinta, como três horas. A incorporação dessa flexibilidade na definição dos horários pode tornar o modelo ainda mais aderente à realidade acadêmica, ainda que implique um aumento na complexidade da formulação matemática e no esforço computacional necessário para sua resolução.

REFERÊNCIAS

- AHUJA, R. K.; MAGNANTI, T. L.; ORLIN, J. B. **Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1993.
- ARENALES, M. N.; ARMENTANO, V. A.; MORABITO, R.; YANASSE, H. H. **Pesquisa Operacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2015.
- BAZARAA, M. S.; JARVIS, J. J.; SHERALI, H. D. **Linear Programming and Network Flows**. 4. ed. Hoboken: Wiley, 2010.
- BERTSIMAS, D.; TSITSIKLIS, J. N. **Introduction to Linear Optimization**. Belmont: Athena Scientific, 1997.
- BUCCO, G. B.; BORNIA-POULSEN, C. J.; BANDEIRA, D. L. Desenvolvimento de um modelo de programação linear para o problema da construção de grades horárias em universidades. **Gestão & Produção**, SciELO Brasil, v. 24, p. 40–49, 2017.
- CARTER, M. W.; LAPORTE, G. Recent developments in practical course timetabling. In: BURKE, E.; CARTER, M. (Ed.). **Practice and Theory of Automated Timetabling II**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1998. p. 3–19. ISBN 978-3-540-49803-2.
- GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. **Otimização Combinatória e Programação Linear: Modelos e Algoritmos**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.
- HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à Pesquisa Operacional**. 9. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2015.
- KORTE, B.; VYGEN, J. **Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms**. 5th. ed. [S.l.]: Springer Publishing Company, Incorporated, 2012. ISBN 3642244874.
- MACULAN, N.; FAMPA, M. H. C. Otimização linear. **Editora Universidade de Brasília: Brasília**, 2006.
- NEMHAUSER, G. L.; WOLSEY, L. A. **Integer and Combinatorial Optimization**. New York: Wiley, 1988.
- PAPADIMITRIOU, C. H.; STEIGLITZ, K. **Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity**. Mineola: Dover Publications, 1998.
- SOUSA, B. T. d. Solução heurística aplicada ao problema de alocação de salas da universidade federal do ceará–campus crateús. 2019.
- TAHA, H. A. **Operations Research: An Introduction**. 10. ed. Boston: Pearson, 2017.

APÊNDICE A – ESTADOS DE RETORNO DO *SOLVER*

Tabela 3 – Estados de retorno do *solver* conforme a documentação oficial do OR-Tools.

Constante	Valor / Status	Significado
<code>pywraplp.Solver.OPTIMAL</code>	0	Solução ótima encontrada
<code>pywraplp.Solver.FEASIBLE</code>	1	Solução viável (não necessariamente ótima)
<code>pywraplp.Solver.INFEASIBLE</code>	2	Nenhuma solução viável encontrada
<code>pywraplp.Solver.UNBOUNDED</code>	3	Modelo sem limites
<code>pywraplp.Solver.ABNORMAL</code>	4	Solver retornou estado anormal
<code>pywraplp.Solver.MODEL_INVALID</code>	5	Modelo inválido
<code>pywraplp.Solver.NOT_SOLVED</code>	6	Solver não foi resolvido

Fonte: Próprio autor.

APÊNDICE B – RESULTADOS EXPERIMENTAIS COMPLETOS — CASO 1

Tabela 4: Resultados experimentais completos — Caso 1: Instância original.

Instância	Professores	Turmas	Tempo (s)	Iterações	FO	Inconsistências	Status
1	8	13	14.82	6776	0	11	0
2	8	13	9.65	6163	0	10	0
3	11	18	21.90	8357	0	14	0
4	12	19	40.88	10980	0	15	0
5	13	21	35.51	11134	0	16	0
6	20	31	229.41	16765	0	25	0
7	20	31	193.10	14882	0	25	0
8	21	33	278.92	18619	0	29	0
9	22	34	307.65	22882	0	28	0
10	25	39	575.83	28591	0	31	0
11	28	44	1745.99	107896	0	35	0
12	28	44	781.01	35500	0	33	0
13	31	49	7194.79	665818	NaN	NaN	6
14	32	50	7194.58	809015	NaN	NaN	6
15	33	52	7201.01	711047	NaN	NaN	6
16	40	62	7201.49	294702	NaN	NaN	6
17	40	62	7137.08	349152	NaN	NaN	6
18	41	64	7206.55	312775	NaN	NaN	6
19	42	65	7250.15	265241	NaN	NaN	6
20	45	70	7203.16	95913	NaN	NaN	6
21	48	75	7333.28	73518	NaN	NaN	6
22	48	75	7315.88	58402	NaN	NaN	6
23	51	80	7203.91	0	NaN	NaN	6
24	52	81	7203.70	0	NaN	NaN	6
25	53	83	7203.82	0	NaN	NaN	6
26	60	93	7204.84	0	NaN	NaN	6

Continua na próxima página

Tabela 4: Resultados experimentais completos — Caso 1: Instância original.

Instância	Professores	Turmas	Tempo (s)	Iterações	FO	Inconsistências	Status
27	60	93	7205.32	0	NaN	NaN	6
28	61	95	7205.20	0	NaN	NaN	6
29	62	96	7205.55	0	NaN	NaN	6
30	65	101	7206.09	0	NaN	NaN	6
31	68	106	7206.65	0	NaN	NaN	6
32	68	106	7206.05	0	NaN	NaN	6
33	71	111	7207.44	0	NaN	NaN	6
34	72	112	7207.05	0	NaN	NaN	6
35	73	114	7208.10	0	NaN	NaN	6
36	80	124	7210.48	0	NaN	NaN	6
37	80	124	7210.01	0	NaN	NaN	6
38	81	126	7212.23	0	NaN	NaN	6
39	82	127	7228.63	0	NaN	NaN	6
40	85	132	7416.67	0	NaN	NaN	6
41	88	137	7710.36	0	NaN	NaN	6
42	88	137	7219.19	0	NaN	NaN	6
43	91	142	7468.19	0	NaN	NaN	6
44	92	143	7283.74	0	NaN	NaN	6
45	93	145	7511.49	0	NaN	NaN	6
46	100	155	7406.49	0	NaN	NaN	6
47	100	155	7421.48	0	NaN	NaN	6
48	101	157	7484.27	0	NaN	NaN	6
49	102	158	7358.77	0	NaN	NaN	6
50	105	163	7550.79	0	NaN	NaN	6

Fonte: Próprio autor.

APÊNDICE C – RESULTADOS EXPERIMENTAIS COMPLETOS — CASO 2

Tabela 5: Resultados experimentais completos — Caso 2: Instância original com a inclusão da nova restrição.

Instância	Professores	Turmas	Tempo (s)	Iterações	FO	Inconsistências	Status
1	8	13	829.49	654862	9	0	0
2	8	13	2208.39	2507114	11	0	0
3	11	18	7236.40	4580580	14	0	1
4	12	19	7200.11	3195487	15	0	1
5	13	21	7200.70	3785140	16	0	1
6	20	31	7204.13	955463	30	0	1
7	20	31	7204.45	1622191	32	0	1
8	21	33	7208.21	874564	28	0	1
9	22	34	7198.00	853000	36	0	1
10	25	39	7202.20	851455	53	0	1
11	28	44	7202.95	424401	NaN	NaN	6
12	28	44	7200.02	712939	NaN	NaN	6
13	31	49	7206.12	469229	NaN	NaN	6
14	32	50	7228.87	633383	NaN	NaN	6
15	33	52	7263.85	489161	NaN	NaN	6
16	40	62	7201.73	288282	NaN	NaN	6
17	40	62	7285.69	344427	NaN	NaN	6
18	41	64	7209.42	292876	NaN	NaN	6
19	42	65	7172.55	278459	NaN	NaN	6
20	45	70	7340.57	120149	NaN	NaN	6
21	48	75	7468.36	92011	NaN	NaN	6
22	48	75	7417.82	61434	NaN	NaN	6
23	51	80	7203.84	0	NaN	NaN	6
24	52	81	7204.04	0	NaN	NaN	6
25	53	83	7203.47	0	NaN	NaN	6

Continua na próxima página

Tabela 5: Resultados experimentais completos — Caso 2: Instância original com a inclusão da nova restrição.

Instância	Professores	Turmas	Tempo (s)	Iterações	FO	Inconsistências	Status
26	60	93	7204.76	0	NaN	NaN	6
27	60	93	7205.29	0	NaN	NaN	6
28	61	95	7205.45	0	NaN	NaN	6
29	62	96	7205.40	0	NaN	NaN	6
30	65	101	7206.35	0	NaN	NaN	6
31	68	106	7206.60	0	NaN	NaN	6
32	68	106	7206.44	0	NaN	NaN	6
33	71	111	7207.39	0	NaN	NaN	6
34	72	112	7207.11	0	NaN	NaN	6
35	73	114	7207.76	0	NaN	NaN	6
36	80	124	7211.10	0	NaN	NaN	6
37	80	124	7211.18	0	NaN	NaN	6
38	81	126	7211.67	0	NaN	NaN	6
39	82	127	7211.63	0	NaN	NaN	6
40	85	132	7252.06	0	NaN	NaN	6
41	88	137	7261.90	0	NaN	NaN	6
42	88	137	7228.32	0	NaN	NaN	6
43	91	142	7265.24	0	NaN	NaN	6
44	92	143	7280.96	0	NaN	NaN	6
45	93	145	7246.63	0	NaN	NaN	6
46	100	155	7304.16	0	NaN	NaN	6
47	100	155	7392.06	0	NaN	NaN	6
48	101	157	7298.20	0	NaN	NaN	6
49	102	158	7337.93	0	NaN	NaN	6
50	105	163	7432.36	0	NaN	NaN	6

Fonte: Próprio autor.

APÊNDICE D – RESULTADOS EXPERIMENTAIS COMPLETOS — CASO 3

Tabela 6: Resultados experimentais completos — Caso 3: Instância com todos os dias definidos como preferidos.

Instância	Professores	Turmas	Tempo (s)	Iterações	FO	Inconsistências	Status
1	8	13	14.62	5623	0	10	0
2	8	13	6.10	4191	0	8	0
3	11	18	10.95	6219	0	11	0
4	12	19	20.43	6283	0	13	0
5	13	21	16.40	6544	0	11	0
6	20	31	267.41	28608	0	22	0
7	20	31	52.04	10870	0	25	0
8	21	33	275.67	34730	0	17	0
9	22	34	291.94	40053	0	18	0
10	25	39	213.65	20819	0	20	0
11	28	44	609.62	44579	0	23	0
12	28	44	290.50	15679	0	26	0
13	31	49	670.13	46196	0	28	0
14	32	50	466.60	36120	0	31	0
15	33	52	355.68	39262	0	30	0
16	40	62	2189.79	100352	0	26	0
17	40	62	725.14	25583	0	34	0
18	41	64	847.55	32666	0	37	0
19	42	65	2420.44	125915	0	33	0
20	45	70	2786.76	92990	0	45	0
21	48	75	1760.02	38123	NaN	NaN	2
22	48	75	1669.75	37535	NaN	NaN	2
23	51	80	1574.56	24171	NaN	NaN	2
24	52	81	2695.99	28718	NaN	NaN	2
25	53	83	2809.37	26568	NaN	NaN	2

Continua na próxima página

Tabela 6: Resultados experimentais completos — Caso 3: Instância com todos os dias definidos como preferidos.

Instância	Professores	Turmas	Tempo (s)	Iterações	FO	Inconsistências	Status
26	60	93	4930.35	16894	NaN	NaN	2
27	60	93	4566.75	21571	NaN	NaN	2
28	61	95	4418.67	19661	NaN	NaN	2
29	62	96	4128.00	10339	NaN	NaN	2
30	65	101	4891.57	19213	NaN	NaN	2
31	68	106	6841.94	24656	NaN	NaN	2
32	68	106	6636.06	15951	NaN	NaN	2
33	71	111	7206.90	0	NaN	NaN	6
34	72	112	6723.06	14049	NaN	NaN	2
35	73	114	7207.27	0	NaN	NaN	6
36	80	124	7215.87	0	NaN	NaN	6
37	80	124	7209.41	0	NaN	NaN	6
38	81	126	7209.75	0	NaN	NaN	6
39	82	127	7209.83	0	NaN	NaN	6
40	85	132	7220.56	0	NaN	NaN	6
41	88	137	7378.65	0	NaN	NaN	6
42	88	137	7216.19	0	NaN	NaN	6
43	91	142	7226.64	0	NaN	NaN	6
44	92	143	7565.09	0	NaN	NaN	6
45	93	145	7402.40	0	NaN	NaN	6
46	100	155	7434.64	0	NaN	NaN	6
47	100	155	7368.02	0	NaN	NaN	6
48	101	157	7293.31	0	NaN	NaN	6
49	102	158	7351.16	0	NaN	NaN	6
50	105	163	7443.42	0	NaN	NaN	6

Fonte: Próprio autor.

APÊNDICE E – RESULTADOS EXPERIMENTAIS COMPLETOS — CASO 4

Tabela 7: Resultados experimentais completos — Caso 4: Instância com todos os dias definidos como preferidos, com a inclusão da nova restrição.

Instância	Professores	Turmas	Tempo (s)	Iterações	FO	Inconsistências	Status
1	8	13	11.48	4761	0	0	0
2	8	13	6.48	5126	0	0	0
3	11	18	11.49	6424	0	0	0
4	12	19	20.52	6134	0	0	0
5	13	21	16.66	6884	0	0	0
6	20	31	209.66	35720	0	0	0
7	20	31	66.00	12601	0	0	0
8	21	33	297.96	46849	0	0	0
9	22	34	308.02	59160	0	0	0
10	25	39	182.80	16536	0	0	0
11	28	44	702.63	52529	0	0	0
12	28	44	288.89	15510	0	0	0
13	31	49	745.16	65187	0	0	0
14	32	50	444.31	37886	0	0	0
15	33	52	495.22	47005	0	0	0
16	40	62	4196.57	215417	0	0	0
17	40	62	800.79	29152	0	0	0
18	41	64	828.12	30860	0	0	0
19	42	65	3469.05	194853	0	0	0
20	45	70	7216.78	347247	NaN	NaN	6
21	48	75	1930.01	56458	NaN	NaN	2
22	48	75	1871.79	50990	NaN	NaN	2
23	51	80	1682.49	29343	NaN	NaN	2
24	52	81	2568.67	29333	NaN	NaN	2
25	53	83	2826.73	27653	NaN	NaN	2

Continua na próxima página

Tabela 7: Resultados experimentais completos — Caso 4: Instância com todos os dias definidos como preferidos, com a inclusão da nova restrição.

Instância	Professores	Turmas	Tempo (s)	Iterações	FO	Inconsistências	Status
26	60	93	4736.32	13776	NaN	NaN	2
27	60	93	4568.48	15255	NaN	NaN	2
28	61	95	4194.81	14037	NaN	NaN	2
29	62	96	4196.96	17412	NaN	NaN	2
30	65	101	4893.97	17553	NaN	NaN	2
31	68	106	6698.31	13945	NaN	NaN	2
32	68	106	6651.62	7783	NaN	NaN	2
33	71	111	7207.77	0	NaN	NaN	6
34	72	112	6850.36	23900	NaN	NaN	2
35	73	114	7208.80	0	NaN	NaN	6
36	80	124	7209.53	0	NaN	NaN	6
37	80	124	7211.21	0	NaN	NaN	6
38	81	126	7210.60	0	NaN	NaN	6
39	82	127	7211.93	0	NaN	NaN	6
40	85	132	7223.11	0	NaN	NaN	6
41	88	137	7553.25	0	NaN	NaN	6
42	88	137	7221.79	0	NaN	NaN	6
43	91	142	7223.19	0	NaN	NaN	6
44	92	143	7229.55	0	NaN	NaN	6
45	93	145	7291.14	0	NaN	NaN	6
46	100	155	7428.08	0	NaN	NaN	6
47	100	155	7336.78	0	NaN	NaN	6
48	101	157	7323.81	0	NaN	NaN	6
49	102	158	7378.29	0	NaN	NaN	6
50	105	163	7379.35	0	NaN	NaN	6

Fonte: Próprio autor.

APÊNDICE F – RESOLUBILIDADE

Tabela 8: Resumo da resolubilidade do modelo por caso experimental.

Caso	Ótimas	Viáveis	Inviáveis	Total de instâncias	Resolubilidade (%)
1	12	0	0	12	24
2	2	8	0	10	20
3	20	0	13	33	66
4	19	0	13	32	64

Fonte: Próprio autor.