



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

ANTONIO GABRIEL RODRIGUES DOS SANTOS

COSMOLOGIA EM MUNDOS BRANA ATRAVÉS DA GRAVIDADE DE RASTALL

**FORTALEZA
2026**

ANTONIO GABRIEL RODRIGUES DOS SANTOS

COSMOLOGIA EM MUNDOS BRANA ATRAVÉS DA GRAVIDADE DE RASTALL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física.
Área de Concentração: Física.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho.

FORTALEZA
2026

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S233c Santos, Antonio Gabriel Rodrigues dos.

Cosmologia em mundos brana através da gravidade de Rastall / Antonio Gabriel Rodrigues dos Santos.
– 2026.
61 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2026.

Orientação: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho.

1. Mundos brana. 2. Dimensões extras. 3. Métrica deformada. 4. Cosmologia. 5. Gravidade de Rastall.
I. Título.

CDD 530

ANTONIO GABRIEL RODRIGUES DOS SANTOS

COSMOLOGIA EM MUNDOS BRANA ATRAVÉS DA GRAVIDADE DE RASTALL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física.
Área de Concentração: Física.

Aprovada em 27/01/2026.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcony Silva Cunha
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Prof. Dr. Pedro Henrique Ferreira de Oliveira
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia
Afro-Brasileira (UNILAB)

Aos meus pais,
Maria das Graças da Silva Rodrigues e
Claudio Reis dos Santos.

AGRADECIMENTOS

À minha família, por todo o apoio e amor incondicional.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho, pela sua disponibilidade, sempre prestativa, pelos seus ensinamentos e pela ajuda acadêmica de modo geral.

Aos professores que compuseram a banca examinadora: Dr. Geová Maciel de Alencar Filho, Dr. Marcony Silva Cunha e Dr. Pedro Henrique Ferreira de Oliveira, pelas contribuições e pelas avaliações do conteúdo deste trabalho.

Aos colegas do *LabGmc²*, pelas discussões que integraram significativamente esta etapa da minha formação acadêmica.

Aos meus colegas de curso e amigos, pelos ensinamentos e gestos que contribuíram direta ou indiretamente para a elaboração deste trabalho.

A todos aqui citados, enfatizo o meu muito obrigado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

O presente trabalho estuda soluções cosmológicas em modelos de branas do tipo Randall-Sundrum. Investigam-se, também, alguns modelos de branas espessas nos espaços-tempos de Minkowski e de Sitter, elucidando as implicações físicas e matemáticas que surgem ao se considerar a gravidade de Rastall. Neste ponto, abordam-se os aspectos da expansão de Hubble na presença de uma dimensão extra, dado um modelo cosmológico do tipo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) pentadimensional. Desta maneira, torna-se necessário, em uma primeira abordagem, analisar os modelos supracitados sem levar em conta o fator de escala para, posteriormente, adicioná-lo à métrica ansatz. Neste contexto, destaca-se que uma natureza exponencial da expansão do fator de escala emerge como uma característica independente do número de dimensões extras e, além disso, os resultados indicam que a gravidade de Rastall pode fornecer mecanismos alternativos para a aceleração cósmica, mesmo na ausência de energia escura convencional.

Palavras-chave: mundos brana; dimensões extras; métrica deformada; cosmologia; gravidade de Rastall.

ABSTRACT

The present work studies cosmological solutions in Randall-Sundrum type brane models. It also investigates some thick brane models in Minkowski and de Sitter spacetimes, elucidating the physical and mathematical implications that arise when considering Rastall gravity. At this point, aspects of Hubble expansion in the presence of an extra dimension are addressed, given a five-dimensional Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) type cosmological model. In this way, it becomes necessary, in a first approach, to analyze the aforementioned models without taking into account the scale factor, to later add it to the metric ansatz. In this context, it is highlighted that an exponential nature of the scale factor expansion emerges as a characteristic independent of the number of extra dimensions, and furthermore, the results indicate that Rastall gravity can provide alternative mechanisms for cosmic acceleration, even in the absence of conventional dark energy.

Keywords: brane worlds; extra dimensions; warped metric; cosmology; Rastall gravity.

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Curvaturas das hipersuperfícies tridimensionais	34
Figura 4.1 – Orbifold S^1/\mathbb{Z}_2	43
Figura 4.2 – Setup do modelo RS.	43
Figura 4.3 – Comportamento da função $\sigma(y)$ e suas derivadas.	46
Figura 4.4 – Parâmetro de Hubble em função da dimensão extra.	48
Figura 4.5 – Comportamento da função $\sigma(y)$ e suas derivadas para $\lambda = 0, 2$, $k = 1$ e $c_0 = 0$	50
Figura 4.6 – Comportamento da função $f(y)$ para $\lambda = 0, 2$, $k = 1$ e $c_0 = 0$	51
Figura 4.7 – Fator de deformação $f(y)$ e o campo escalar $\phi(y)$ no modelo de brana plana.	54
Figura 4.8 – Potencial V em função do campo escalar ϕ no modelo de brana plana.	54
Figura 4.9 – Forma do fator $f(y)$ e do campo escalar $\phi(y)$ para o modelo do tipo de Sitter, com parâmetros $\alpha = 0, 5, 0, 7$ e $0, 9$, respectivamente.	56
Figura 4.10 – Forma do potencial V em função do campo escalar ϕ para o modelo do tipo de Sitter, com parâmetros $\alpha = 0, 3, 0, 5$ e $0, 7$, respectivamente.	56

LISTA DE SIGLAS

TRG	Teoria da Relatividade Geral
RS	Randall-Sundrum
TeV	Teraelétron-Volts
GeV	Gigaelétron-Volts
MCP	Modelo Cosmológico Padrão
FLRW	Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker
RCF	Radiação Cósmica de Fundo

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathcal{F}	Conjunto de funções escalares
$Met(M_D)$	Conjunto de todas as métricas admissíveis sobre M_D
$\mathcal{T}(k, l)$	Conjunto de todos os tensores do tipo (k, l)
ξ	Constante de curvatura do Universo
h	Constante de Hubble reduzida
$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$	Delta de Dirac
δ_{ij}	Delta de Kronecker
\mathcal{L}	Densidade lagrangiana
g	Determinante de g_{MN}
$d_h(\eta)$	Distância comóvel
$v(t)$	Fator de escala
v_{eq}	Fator de escala para quantidades avaliadas na igualdade matéria-radiação
$\mathcal{H}_p(t_0)$	Horizonte de partícula de um observador em um ponto p no tempo presente
g_{MN}	Métrica do espaço-tempo curvo em D dimensões
$g_{\mu\nu}$	Métrica do espaço-tempo curvo quadridimensional
$\eta_{\mu\nu}$	Métrica do espaço-tempo de Minkowski
Ω	Parâmetro de densidade
$H(t)$	Parâmetro de Hubble
$\exists!$	Quantificador de existência e unicidade
\exists	Quantificador existencial
\forall	Quantificador universal
η	Tempo conforme
M_D	Variedade arbitrária em D dimensões

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	FUNDAMENTOS DA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL	14
2.1	Variedade Diferenciável	14
2.1.1	<i>Vetores Tangentes como Derivadas Direcionais</i>	15
2.1.2	<i>Campos Tensoriais e o Tensor Métrico</i>	17
2.2	Curvatura do Espaço-Tempo	20
2.2.1	<i>Derivada Covariante</i>	20
2.2.2	<i>Tensor de Riemann</i>	24
2.2.3	<i>Geodésicas</i>	26
2.3	Equações de Campo Via Ação de Einstein-Hilbert	27
3	COSMOLOGIA RELATIVÍSTICA	31
3.1	Geometria do Modelo FLRW	31
3.2	Dinâmica de um Universo Homogêneo e Isotrópico	35
3.3	Inflação Cósmica	37
4	MUNDOS BRANA E A GRAVIDADE DE RASTALL	41
4.1	Descrição do Modelo	42
4.2	Branas Finas com Fator de Deformação	43
4.2.1	<i>Aplicação na Gravidade de Rastall: Caso Estático</i>	48
4.2.2	<i>Aplicação na Gravidade de Rastall: Caso Cosmológico</i>	50
4.3	Branas Espessas com Fator de Deformação	52
4.3.1	<i>Caso Estático</i>	52
4.3.2	<i>Caso Cosmológico</i>	55
5	CONCLUSÃO	58
	REFERÊNCIAS	60

1 INTRODUÇÃO

Albert Einstein publicou a Teoria da Relatividade Geral (TRG) em 1915. Nela, a gravidade é descrita como a curvatura do espaço-tempo causada pela presença de matéria e energia. Um de seus fundamentos é o Princípio de Equivalência, o qual estabelece que, numa região suficientemente pequena, os efeitos de um campo gravitacional são indistinguíveis dos efeitos de uma aceleração uniforme para um observador em queda livre. Assim, um observador em queda livre localmente não percebe a presença da gravidade [1]. Além disso, a TRG possibilitou o desenvolvimento da Cosmologia Moderna por meio das equações de campo, compreendendo o Universo como um sistema dinâmico.

Até o início do século XX, prevalecia a ideia de um Universo estático, regido pela mecânica newtoniana. No entanto, esse tipo de suposição não conseguia explicar com precisão os fenômenos observados em larga escala, como a expansão cósmica. Em 1922, Friedmann encontrou essa expansão a partir de soluções simplificadas das equações de Einstein, considerando um Universo homogêneo e isotrópico [2]. Em 1929, E. Hubble confirmou essa previsão ao detectar o desvio para o vermelho das galáxias [3].

A introdução de dimensões extras na Cosmologia surgiu como uma extensão da Teoria das Cordas e da TRG, especialmente nos modelos de mundos brana. Nessas propostas, nosso Universo quadridimensional estaria imerso em um espaço-tempo de dimensões superiores, onde a gravidade se propaga no volume total do chamado *bulk*, enquanto as demais interações fundamentais permanecem confinadas à brana. Essas dimensões extras podem ser compactas e microscópicas, como na teoria de Kaluza-Klein, ou macroscópicas e não compactas, como em um dos modelos de Randall-Sundrum (RS). No primeiro caso, a compactificação preserva a estrutura do espaço-tempo, enquanto, no segundo, a dimensão extra pode ser finita (RSI) ou infinita (RSII), estruturada de modo a localizar modos massivos de Kaluza-Klein próximos à brana. Essas abordagens afetam diretamente a evolução cósmica, modificando a gravidade em grandes escalas e fornecendo possíveis explicações para a matéria e energia escuras [4–6].

Um dos problemas fundamentais que os modelos com dimensões extras buscam solucionar é a hierarquia entre a escala gravitacional (energia de Planck) e a escala das interações eletrofracas. Os modelos de Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali propõem que dimensões ex-

tras grandes permitem que a gravidade se espalhe em um volume maior, reduzindo sua escala fundamental e explicando sua aparente fraqueza na brana observável [7]. Já os modelos RS utilizam uma métrica curva no *bulk* para suprimir exponencialmente a escala de Planck na brana visível, dispensando a necessidade de dimensões extras grandes. Essas ideias impactam diretamente a Cosmologia, modificando as equações de Friedmann, a expansão do Universo primordial e a inflação.

No contexto cosmológico, tanto para branas finas quanto espessas, a Gravidade de Rastall propõe uma alternativa à TRG ao postular que o tensor energia-momento não é estreitamente conservado, permitindo interação direta entre matéria e geometria [8]. Em cenários de Cosmologia de branas, essa modificação pode influenciar significativamente a evolução do Cosmos, alterando a dinâmica da expansão, equação de estado efetiva e fornecendo um mecanismo para a aceleração cósmica sem necessidade de um campo escalar adicional. Ademais, pode impactar a evolução da radiação e da matéria no Universo primordial, afetando previsões sobre nucleossíntese e formação de estruturas.

Sendo assim, neste trabalho revisamos os fundamentos da TRG no Capítulo 2. No Capítulo 3, exploramos sua aplicação à Cosmologia em um *background* FLRW, considerando o Modelo Cosmológico Padrão (MCP). No Capítulo 4, introduzimos o formalismo de Rastall e o aplicamos em branas finas (tipo delta de Dirac) e em branas espessas, desconsiderando o fator de escala em um primeiro momento para, porteriormente, investigarmos as mudanças diâmicas ao introduzirmos o fator de escala nos respectivos elementos de linha.

A notação utilizada ao longo do texto é a seguinte: as primeiras letras latinas minúsculas ($a, b, c...$) representam tensores na notação de índices; letras maiúsculas nos índices ($M, N, Q...$) representam coordenadas em variedades com dimensões superiores a quatro; letras gregas minúsculas nos índices ($\mu, \nu, \rho...$) representam coordenadas em variedades quadradiimensionais, em que as letras latinas minúsculas ($i, j, k...$) se referem as coordenadas do espaço tridimensional e sempre que aparecer índices repetidos contraindo-se e não for explicitado o somatório, está implícita uma soma sobre eles (os que não se repetem não representam somatórios, mas o número de equações), ou seja, adotamos aqui a convenção de soma de Einstein. Quando não explicitado no texto, estamos trabalhando com unidades naturais ($G = c = 1$).

2 FUNDAMENTOS DA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

Apresentamos neste capítulo o arcabouço matemático necessário para a construção da TRG e, consequentemente, dos modelos de mundos brana sob uma Cosmologia FLRW. Inicialmente, abordamos o conceito de Variedade Diferenciável. Em seguida, definimos os campos e os operadores com os quais iremos trabalhar nas Seções subsequentes, culminando, assim, nas equações de campo de Einstein para um espaço-tempo quadridimensional.

2.1 Variedade Diferenciável

Variedades, de modo geral, formam espaços que se assemelham localmente ao espaço euclidiano, podendo ter sua estrutura global mais complexa. Em outras palavras, cada ponto de uma variedade de dimensão D ($D \in \mathbb{N}$)¹ tem uma vizinhança que é homeomorfa ao espaço euclidiano também de dimensão D , ou seja, há uma função bijetiva, contínua e com inversa contínua entre a vizinhança do ponto e o \mathbb{R}^D . Formalmente, de acordo com Wald[11]:

Definição 2.1. *Uma variedade real M_D , D – dimensional, de classe C^∞ (suave), é um conjunto com uma coleção de subconjuntos $\{O_\alpha\}$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

- (i) *Cada ponto $p \in M_D$ está em pelo menos um O_α , isto é, $\{O_\alpha\}$ cobre M_D ;*
- (ii) *$\forall \alpha, \exists \phi_\alpha : O_\alpha \longrightarrow U_\alpha \subset \mathbb{R}^D$, onde ϕ_α é chamado de mapa;*
- (iii) *Se quaisquer dois conjuntos O_α e O_β se sobreponem, $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$, podemos considerar o mapa $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ que leva pontos em $\phi_\alpha [O_\alpha \cap O_\beta] \subset U_\alpha \subset \mathbb{R}^D$ para pontos em $\phi_\beta [O_\alpha \cap O_\beta] \subset U_\beta \subset \mathbb{R}^D$.*

O par (U, ϕ) é chamado de carta e o conjunto formado por todas as cartas é chamado de atlas de M_D . As variedades, onde construiremos a TRG mais à frente, são espaços topológicos dotados de métrica. Eis, portanto, duas definições adaptadas da Ref.[12], com a observação de que, no caso de uma variedade D – dimensional, ainda precisamos reformular a definição de métrica através do que se conhece na literatura como **métrica de Riemann**.

¹Existem estudos que exploram a possibilidade de dimensões fracionárias, especialmente em contextos envolvendo geometria fractal, gravidade quântica ou teoria de campos em espaços com estrutura não trivial. Veja, por exemplo, as Refs. [9, 10].

Definição 2.2. Um espaço topológico (X, τ) consiste de um conjunto X com uma coleção τ de subconjuntos de X (chamada de topologia sobre X) satisfazendo três propriedades específicas:

$$(i) \ O_\alpha \in \tau \ (\forall \alpha) \Rightarrow \bigcup_\alpha O_\alpha \in \tau;$$

$$(ii) \ O_1, \dots, O_n \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n O_i \in \tau;$$

(iii) Todo o conjunto X e o conjunto vazio \emptyset estão em τ .

Definição 2.3. Uma métrica d em um conjunto não vazio X é um mapa $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que, $\forall x, y, z \in X$, associa um número real $d(x, y)$ (chamado de distância entre x e y) da seguinte forma:

$$(i) \ d(x, y) \geq 0 \text{ (Positividade, com } d = 0 \text{ para } x = y\text{);}$$

$$(ii) \ d(x, y) = d(y, x) \text{ (Simetria);}$$

$$(iii) \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ (Desigualdade triangular).}$$

É interessante destacar que o subconjunto U , descrito na Def.(2.1), também corresponde a um conjunto aberto em \mathbb{R}^D . Assim, U pode ser expresso como uma união de bolas abertas de modo que, em um espaço métrico (p, d) , uma bola aberta de centro $p \in U$ e raio $r > 0$ é definida como $B(p, r) := \{q \in U \mid d(p, q) < r\}$ [13]. Além disso, ressaltamos, em conformidade com Henriques[14], que os U_α 's constituem uma imagem passível de representação por coordenadas, digamos $x^N(p)$ com $N = 1, \dots, D$. Ademais, pela condição (iii) da mesma definição, se p tiver coordenadas $x^N(p) \in U_\alpha$ e $y^M(p) \in U_\beta$, com $M = 1, \dots, D$, existirão mapas $x^N[y^M(p)]$ que representarão transformações de coordenadas entre dois conjuntos abertos.

Variedades são essenciais para generalizar noções de curvas e superfícies para o caso de dimensões arbitrárias, permitindo formalizar o Cálculo Diferencial em espaços curvos parametrizados, por exemplo. Mais detalhes conceituais e/ou definições a respeito das variedades diferenciais podem ser encontrados na Ref.[15].

2.1.1 Vetores Tangentes como Derivadas Direcionais

Em \mathbb{R}^D existe uma bijeção entre vetores e derivadas direcionais. Desta maneira, um vetor $\mathbf{v} = (v^1, \dots, v^D)$ define o operador derivada direcional $v^N \frac{\partial}{\partial x^N}$ e vice-versa. Derivadas direcionais são descritas por sua **linearidade** e pela **regra de Leibniz** para derivadas com relação ao produto de funções. Logo, com base na Ref.[11]:

Definição 2.4. Seja \mathcal{F} uma coleção de funções de classe C^∞ de uma variedade M_D nos reais. Definimos o vetor tangente \mathbf{v} a um ponto $p \in M_D$ como o mapa $\mathbf{v} : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$, de modo que:

- (i) $\mathbf{v}(af + bg) = a\mathbf{v}(f) + b\mathbf{v}(g), \forall f, g \in \mathcal{F}, \forall a, b \in \mathbb{R}$ (Linearidade);
- (ii) $\mathbf{v}(fg) = f(p)\mathbf{v}(g) + g(p)\mathbf{v}(f)$ (Regra de Leibniz).

Denotamos por \mathbb{V}_p (espaço tangente em um ponto p) o conjunto formado por todos os vetores tangentes a $p \in M_D$. Sendo assim, afirmamos que \mathbb{V}_p tem a estrutura de um espaço vetorial [16]. Uma segunda propriedade importante de \mathbb{V}_p é que, para uma dada variedade diferenciável D -dimensional M_D , a dimensão de \mathbb{V}_p é a mesma que a de M_D , ou seja, $\dim \mathbb{V}_p = D$, como demonstrado na Ref.[11].

Sendo \mathbb{V}_p um espaço vetorial, introduzimos uma base coordenada $\{X_N\}$, em que $X_N = \frac{\partial}{\partial x^N} = \partial_N$. Assim, expressamos um vetor tangente arbitrário \mathbf{v} como uma soma dos X_N 's de modo que

$$\mathbf{v} = v^N X_N = v^N \frac{\partial}{\partial x^N}. \quad (2.1)$$

Considerando uma base coordenada diferente para \mathbb{V}_p , digamos $\{X'_M\}$, e fazendo uso da regra da cadeia, podemos obter a transformação

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v'^M X'_M = v'^M \frac{\partial}{\partial x'^M} \\ &\Rightarrow v'^M \frac{\partial}{\partial x'^M} = v^N \frac{\partial}{\partial x^N} \\ &\Rightarrow v'^M = \frac{\partial x'^M}{\partial x^N} v^N. \end{aligned} \quad (2.2)$$

A Eq.(2.2) é conhecida como lei de transformação vetorial. Note que realizamos esta transformação escrevendo o mesmo \mathbf{v} em dois sistemas de coordenadas diferentes. A ideia de invariância, portanto, começa a tomar forma. Ela é de suma importância, pois esperamos que as propriedades de um sistema físico ou de uma lei da física permaneçam inalteradas sob certas transformações, como as grandezas escalares $v'^M v'_M = v^M v_M$, por exemplo - algo que permeará por todo nosso estudo sobre a relatividade geral.

Diante do que foi exposto acima, ponderamos que é possível associar um vetor para cada ponto de uma variedade arbitrária e denominamos essa coleção de vetores como campo vetorial. No contexto do espaço-tempo, um campo vetorial pode representar a velocidade de uma partícula em cada ponto, ou um vetor de força em um campo gravitacional. Ademais, ao

derivarmos uma curva com relação aos seus parâmetros, também obtemos um vetor tangente. Logo, um campo vetorial é definido como sendo um mapa, de modo que $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}_p \exists! p \in M_D; (\mathbf{v}, p) \in \mathbb{V}_p \times M_D$. Por fim, destacamos que os elementos de \mathbb{V}_p agem como operadores diferenciais em funções escalares $f \in \mathcal{F}$.

2.1.2 Campos Tensoriais e o Tensor Métrico

Com o intuito de descrever as leis físicas de forma independente do sistema de coordenadas, de acordo com o **princípio da covariância geral**, devemos construir nosso ferramental matemático com base nos tensores, mantendo assim uma determinada lei invariante para qualquer transformação de coordenadas. Com esse objetivo, precisamos introduzir uma noção de espaço vetorial dual ao espaço tangente para então definirmos os tensores propriamente ditos.

Seja \mathbb{V} um espaço vetorial de dimensão D sobre \mathbb{R} (no contexto deste trabalho, o objeto de estudo principal é o próprio espaço tangente, $\mathbb{V} = \mathbb{V}_p$). Considere a coleção \mathbb{V}^* de mapas lineares $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$. Se impusermos a adição e a multiplicação por escalar, do mesmo modo como definimos espaços vetoriais [16], obtemos uma estrutura de espaço vetorial para \mathbb{V}^* de forma natural. Denominamos \mathbb{V}^* como espaço vetorial dual a \mathbb{V} (ou espaço cotangente, quando tomado no ponto p) e os elementos de \mathbb{V}^* são chamados de vetores duais (ou covetores).

Se v_1, \dots, v_D é uma base de \mathbb{V} , então podemos definir os elementos $v^{1*}, \dots, v^{D*} \in \mathbb{V}^*$ por $v^{M*}(v_N) = \delta_N^M$. Desta maneira, segue-se diretamente que $\{v^{M*}\}$ é uma base de \mathbb{V}^* , chamada de base dual a $\{v_N\}$ de \mathbb{V} . Em particular, isso mostra que $\dim \mathbb{V}^* = \dim \mathbb{V}$. A correspondência bijetiva $v_M \longleftrightarrow v^{M*}$ dá origem ao que denominamos de isomorfismo entre os conjuntos formados pelos espaços \mathbb{V} e \mathbb{V}^* . Vejamos algumas definições adaptadas da Ref.[11].

Definição 2.5. *Sejam \mathbb{V} um espaço vetorial D – dimensional e \mathbb{V}^* seu espaço vetorial dual.*

Um tensor \mathbf{T} do tipo (k, l) é um mapa multilinear $\mathbf{T} : \underbrace{\mathbb{V}^ \times \dots \times \mathbb{V}^*}_{k \text{ termos}} \times \underbrace{\mathbb{V} \times \dots \times \mathbb{V}}_{l \text{ termos}} \rightarrow \mathbb{R}$.*

Em outras palavras, dados k vetores duais e l vetores ordinários, \mathbf{T} produz um número real e o faz de tal maneira que, se fixarmos todos os vetores ou vetores duais, exceto um, então haverá uma aplicação linear na variável restante. Destacamos que vetores e escalares são casos particulares de tensores e, além disso, a soma e/ou subtração de dois tensores do mesmo tipo resulta em outro tensor do mesmo tipo.

Definição 2.6. *Sejam $\mathcal{T}(k, l)$ e $\mathcal{T}(k - 1, l - 1)$ os conjuntos de todos os tensores do tipo (k, l) e $(k - 1, l - 1)$, respectivamente. A contração com relação ao i -ésimo vetor dual e j -ésimo vetor*

ordinário é um mapa $C : \mathcal{T}(k, l) \mapsto \mathcal{T}(k-1, l-1)$ em que, se \mathbf{T} é um tensor de tipo (k, l) , então $C\mathbf{T} = \sum_{\sigma=1}^D \mathbf{T}(\dots, v^{\sigma^*}, \dots; \dots, v_{\sigma}, \dots)$, onde $\{v_{\sigma}\}$ é uma base de \mathbb{V} e $\{v^{\sigma^*}\}$ é sua base dual e esses vetores são inseridos nos i -ésimo e j -ésimo termos de \mathbf{T} .

Definição 2.7. Dados dois tensores \mathbf{T} e \mathbf{T}' de tipos (k, l) e (k', l') , respectivamente, podemos construir um novo tensor de tipo $(k+k', l+l')$ a partir do produto tensorial de \mathbf{T} e \mathbf{T}' , denotado por $\mathbf{T} \otimes \mathbf{T}'$, pela seguinte regra: tomando $k+k'$ vetores duais $v^{1^*}, \dots, v^{k+k'^*}$ e $l+l'$ vetores $\omega_1, \dots, \omega_{l+l'}$, definimos $\mathbf{T} \otimes \mathbf{T}'$ agindo sobre esses vetores como sendo o produto de $\mathbf{T}(v^{1^*}, \dots, v^{k^*}; \omega_1, \dots, \omega_l)$ e $\mathbf{T}'(v^{k+1^*}, \dots, v^{k+k'^*}; \omega_{l+1}, \dots, \omega_{l+l'})$.

Assim, de acordo com a Def.(2.7), uma maneira de construir tensores é tomar produtos tensoriais de vetores e vetores duais, ou seja, se $\{v_M\}$ é uma base de \mathbb{V} e $\{v^{N^*}\}$ é sua base dual, um tensor \mathbf{T} de tipo (k, l) pode ser expresso como uma soma de tensores simples:

$$\mathbf{T} = T_{N_1 \dots N_l}^{M_1 \dots M_k} v_{M_1} \otimes \dots \otimes v_{M_k} v^{N_1^*} \otimes \dots \otimes v^{N_l^*}. \quad (2.3)$$

Contraindo o tensor descrito na Eq.(2.3) em termos de componentes e utilizando a Def.(2.6), obtemos:

$$(CT)_{N_1 \dots N_{l-1}}^{M_1 \dots M_{k-1}} = T_{N_1 \dots N_{l-1}}^{M_1 \dots \sigma \dots M_{k-1}}. \quad (2.4)$$

Aqui, σ está sendo somado em todas as coordenadas de 1 a D . Para $\mathbf{S} = \mathbf{T} \otimes \mathbf{T}'$, escrevemos:

$$\mathbf{S} = S_{N_1 \dots N_{l+l'}}^{M_1 \dots M_{k+k'}} = T_{N_1 \dots N_l}^{M_1 \dots M_k} T_{N_{l+1} \dots N_{l+l'}}'^{M_{k+1} \dots M_{k+k'}}. \quad (2.5)$$

Voltemos nossa atenção para o caso em que $\mathbb{V} = \mathbb{V}_p$, isto é, vamos considerar o espaço tangente em um ponto p situado em uma dada variedade M_D , com \mathbb{V}_p^* sendo o espaço cotangente em p . Também nos referimos aos elementos de \mathbb{V}_p como vetores contravariantes e aos elementos de \mathbb{V}_p^* como vetores covariantes. A base dual associada a \mathbb{V}_p^* é usualmente denotada por $\{dx^N\}$, de modo que $dx^N(\partial_M) = \delta_M^N$. Assim sendo, suponha que um dado ω_N representa um covetor ω em termos de componentes, com base dual $\{dx^N\}$. Como fizemos nas Eqs. (2.1) e (2.2), podemos escrever uma transformação de coordenadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_N dx^N = \omega'_M dx'^M \\ \Rightarrow \omega'_M &= \frac{\partial x^N}{\partial x'^M} \omega_N. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Além disso, a Eq.(2.3) torna-se:

$$\mathbf{T} = T_{N_1 \dots N_l}^{M_1 \dots M_k} \partial_{M_1} \otimes \dots \otimes \partial_{M_k} \otimes dx^{N_1} \otimes \dots \otimes dx^{N_l}. \quad (2.7)$$

Das relações (2.2) e (2.6), em conformidade com a Eq.(2.7), omitindo-se o símbolo de produto tensorial, podemos escrever a seguinte generalização para a transformação de coordenadas de um tensor arbitrário \mathbf{T} de tipo (k, l) :

$$T'_{N_1 \dots N_l}^{M_1 \dots M_k} = \frac{\partial x'^{M_1}}{\partial x^{P_1}} \dots \frac{\partial x'^{M_k}}{\partial x^{P_k}} \frac{\partial x^{Q_1}}{\partial x'^{N_1}} \dots \frac{\partial x^{Q_l}}{\partial x'^{N_l}} T_{Q_1 \dots Q_l}^{P_1 \dots P_k}. \quad (2.8)$$

A atribuição de um tensor sobre \mathbb{V}_p , $\forall p \in M_D$, é chamada de campo tensorial.

A noção de métrica advém da hipótese de que distâncias infinitesimais quadradas podem ser associadas a deslocamentos infinitesimais. Desta maneira, uma métrica g deve ser um mapa linear de $\mathbb{V}_p \times \mathbb{V}_p \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja, um tensor do tipo $(0, 2)$. Além disso, a métrica deve ser simétrica e não degenerada - matematicamente $g(v_1, v_2) = g(v_2, v_1), \forall v_1, v_2 \in \mathbb{V}_p$ e $g(v, v_1) = 0, \forall v \in \mathbb{V}_p \Rightarrow v_1 = 0$. Fisicamente falando, a construção de uma métrica em um espaço arbitrário serve para medir distâncias, ângulos e comprimentos de vetores, o que fornece ao espaço uma estrutura geométrica bem definida.

Definição 2.8. *Seja M_D uma variedade diferenciável D – dimensional. Uma métrica de Riemann em M_D é um campo tensorial simétrico (positivo-definido) de tipo $(0, 2)$, ou seja, um mapa que associa para cada ponto $p \in M_D$ um produto interno no espaço tangente \mathbb{V}_p – $g : \mathbb{V}_p \times \mathbb{V}_p \rightarrow \mathbb{R}$, onde $g_p(v_1, v_2) = g_p(v_2, v_1)$ e $g_p(v_1, v_2) \geq 0, \forall v_1, v_2 \in \mathbb{V}_p$.*

Quanto g não é positiva-definida, passa a ser denominada como **métrica pseudo-riemanniana**. Assim, em linhas gerais, uma métrica é um produto interno (não necessariamente positivo-definido) no espaço tangente em cada ponto. Em uma base coordenada, podemos expandir uma métrica g em termos de suas componentes g_{MN} como

$$g = g_{MN} dx^M \otimes dx^N. \quad (2.9)$$

Vamos representar g pelo elemento de linha dS^2 , caso em que escrevemos

$$dS^2 = g_{MN} dx^M dx^N, \quad (2.10)$$

de modo que g_{MN} satisfaz as seguintes propriedades: 1) $g^{MN} g_{NL} = g_{NL} g^{MN} = \delta_L^M$; 2) $v^M = g^{MN} v_N$ e 3) $v_M = g_{MN} v^N$, com g^{MN} sendo o tensor métrico contravariante.

2.2 Curvatura do Espaço-Tempo

Precisamos encontrar os tensores que nos auxiliarão na descrição da curvatura do espaço-tempo. Intuitivamente, a curvatura descreve como um espaço ou superfície se desvia de ser plano (ou euclidiano). Na TRG, por exemplo, a curvatura do espaço-tempo está intimamente relacionada à presença de matéria/energia e à maneira como ela influencia diversos sistemas físicos. Nas linhas que se seguem, definimos precisamente os operadores diferenciais que iremos aplicar durante todo o restante do texto (as derivadas covariantes); então passamos à dedução dos tensores com os quais calcularemos a curvatura propriamente dita, referente a uma variedade diferenciável arbitrária (tensores de Riemann e Ricci, com seu respectivo escalar).

2.2.1 Derivada Covariante

Vamos definir a derivada covariante de acordo com Wald[11]. Para tanto, passamos agora a escrever os tensores em notação de índices, ou seja, $\mathbf{T} = T_{b_1 \dots b_l}^{a_1 \dots a_k} \in \mathcal{T}(k, l)$ (não confundir com as coordenadas, que estamos denotando por letras latinas maiúsculas, e cujos tensores têm sido expressos em suas respectivas bases coordenadas).

Definição 2.9. A derivada covariante, denotada pelo símbolo ∇ , em uma variedade diferenciável M_D , é um mapa que leva a cada campo tensorial diferenciável do tipo (k, l) para um campo tensorial diferenciável do tipo $(k, l + 1)$ e satisfaz as cinco propriedades a seguir:

- (i) $\forall A, B \in \mathcal{T}(k, l)$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\nabla_c \left(\alpha A_{b_1 \dots b_l}^{a_1 \dots a_k} + \beta B_{b_1 \dots b_l}^{a_1 \dots a_k} \right) = \alpha \nabla_c A_{b_1 \dots b_l}^{a_1 \dots a_k} + \beta \nabla_c B_{b_1 \dots b_l}^{a_1 \dots a_k}$ (Linearidade);
- (ii) $\forall A \in \mathcal{T}(k, l)$ e $\forall B \in \mathcal{T}(k', l')$, $\nabla_e \left(A_{b_1 \dots b_l}^{a_1 \dots a_k} B_{d_1 \dots d_{l'}}^{c_1 \dots c_{k'}} \right) = \left(\nabla_e A_{b_1 \dots b_l}^{a_1 \dots a_k} \right) B_{d_1 \dots d_{l'}}^{c_1 \dots c_{k'}} + A_{b_1 \dots b_l}^{a_1 \dots a_k} \left(\nabla_e B_{d_1 \dots d_{l'}}^{c_1 \dots c_{k'}} \right)$ (Regra de Leibniz);
- (iii) $\forall A \in \mathcal{T}(k, l)$, $\nabla_d \left(A_{b_1 \dots c \dots b_l}^{a_1 \dots c \dots a_k} \right) = \nabla_d A_{b_1 \dots c \dots b_l}^{a_1 \dots c \dots a_k}$ (Comutatividade com relação a contração);
- (iv) $\forall f \in \mathcal{F}$ e $\forall u^a \in \mathbb{V}_p$, $\mathbf{u}(f) = u^a \nabla_a f$ (Consistência com a noção de vetores tangentes como derivadas direcionais em campos escalares);
- (v) $\forall f \in \mathcal{F}$, $[\nabla_a, \nabla_b](f) = (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)(f) = 0$ (Livre de torção).

Utilizando as propriedades acima, podemos deduzir uma expressão para a derivada covariante de forma explícita. A princípio, pela condição (iv), quaisquer dois operadores diferenciais ∇_a e $\tilde{\nabla}_a$ devem concordar nas suas ações em campos escalares. Desta maneira, seja

ω_b um covetor e considere a diferença $\tilde{\nabla}_a(f\omega_b) - \nabla_a(f\omega_b)$ para um campo escalar arbitário f . Pelas propriedades (ii) e (iv), temos:

$$\tilde{\nabla}_a(f\omega_b) - \nabla_a(f\omega_b) = f(\tilde{\nabla}_a\omega_b - \nabla_a\omega_b), \quad (2.11)$$

de modo que a subtração entre estes dois operadores depende somente do valor de ω_b no ponto $p \in M_D$. Sendo assim, suponha $\omega'_b = \omega_b$ em p . Afirmamos, sem demonstrar, que podemos encontrar funções suaves $f_{(\alpha)}$ (que desaparecem em p) e componentes de covetores suaves $\mu_b^{(\alpha)}$ tais que

$$\omega'_b - \omega_b = f_{(\alpha)}\mu_b^{(\alpha)}. \quad (2.12)$$

Substituindo a Eq.(2.12) no resultado encontrado na Eq.(2.11), encontramos:

$$\tilde{\nabla}_a(\omega'_b - \omega_b) - \nabla_a(\omega'_b - \omega_b) = f_{(\alpha)}(\tilde{\nabla}_a\mu_b^{(\alpha)} - \nabla_a\mu_b^{(\alpha)}). \quad (2.13)$$

Desde que $f_{(\alpha)} = 0, \forall \alpha$ em p (o que advém da independência linear), a Eq.(2.13) torna-se:

$$\tilde{\nabla}_a\omega'_b - \nabla_a\omega'_b = \tilde{\nabla}_a\omega_b - \nabla_a\omega_b. \quad (2.14)$$

Assim, mostramos que $\tilde{\nabla}_a - \nabla_a$ define um mapa linear de covetores (em oposição a campos de vetores duais definidos em uma vizinhança do ponto p) para um tensor de tipo $(0,2)$ em p . Em consequência, esta subtração define uma conexão C_{ab}^c de modo que

$$\nabla_a\omega_b = \tilde{\nabla}_a\omega_b - C_{ab}^c\omega_c. \quad (2.15)$$

Proposição 2.1. A conexão C_{ab}^c é simétrica.

Prova. Seja $\omega_b = \nabla_b f = \tilde{\nabla}_b f$, com $\omega_b \in \mathbb{V}_p^*$ e $f \in \mathcal{F}$. Assim, de acordo com a Eq.(2.15),

$$\nabla_a(\nabla_b f) = \tilde{\nabla}_a(\tilde{\nabla}_b f) - C_{ab}^c \nabla_c f. \quad (2.16)$$

Desde que ambos $\nabla_a \nabla_b f$ e $\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b f$ sejam simétricos em a e b , de acordo com a propriedade (v), segue-se que C_{ab}^c deve ter também essa propriedade, isto é,

$$C_{ab}^c = C_{ba}^c. \quad (2.17)$$

Em outras palavras, a simetria de C_{ab}^c é uma consequência direta do espaço ser livre de torsão.

□

Utilizando a propriedade (ii) e a Eq.(2.15) podemos deduzir o seguinte resultado, $\forall v^b \in \mathbb{V}_p$ e $\forall \omega_b \in \mathbb{V}_p^*$:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a) \underbrace{(\omega_b v^b)}_{=0}}_{=f \in \mathcal{F}} &= (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(\omega_b)v^b + \omega_b(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(v^b) \\
 &= v^b C_{ab}^c \omega_c + \omega_b(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(v^b) \\
 \Rightarrow \nabla_a v^b &= \tilde{\nabla}_a v^b + C_{ac}^b v^c. \tag{2.18}
 \end{aligned}$$

Continuando de uma maneira similar, apenas construindo produtos tensoriais entre vetores, podemos derivar uma fórmula geral para a ação de ∇_a num campo tensorial arbitrário, em termos de $\tilde{\nabla}_a$ e C_{ab}^c . Para $\mathbf{T} \in \mathcal{T}(k, l)$, encontramos:

$$\nabla_a T_{c_1 \dots c_l}^{b_1 \dots b_k} = \tilde{\nabla}_a T_{c_1 \dots c_l}^{b_1 \dots b_k} + \sum_i C_{ad}^{b_i} T_{c_1 \dots c_l}^{b_1 \dots d \dots b_k} - \sum_j C_{ac_j}^d T_{c_1 \dots d \dots c_l}^{b_1 \dots b_k}. \tag{2.19}$$

Assim, a diferença entre dois operadores ∇_a e $\tilde{\nabla}_a$ é completamente caracterizada por C_{ab}^c . Todavia, a aplicação mais importante da equação acima surge no caso onde $\tilde{\nabla}$ é um operador diferencial ordinário ∂_a . Neste caso, denotamos C_{ab}^c por Γ_{ab}^c (**símbolo de Christoffel**). Logo, como exemplo, podemos escrever:

$$\nabla_a v^b = \partial_a v^b + \Gamma_{ac}^b v^c. \tag{2.20}$$

Definição 2.10. *O transporte paralelo de um dado tensor $T_{c_1 \dots c_l}^{b_1 \dots b_k}$, ao longo de uma curva \mathcal{C} , conectando dois espaços tangentes \mathbb{V}_p e \mathbb{V}_q nos pontos p e q , respectivamente, é definido como sendo a relação que satisfaz a seguinte derivada covariante (a partir do vetor u^a tangente a \mathcal{C}):*

$$u^a \nabla_a T_{c_1 \dots c_l}^{b_1 \dots b_k} = 0. \tag{2.21}$$

Diretamente da definição acima, concluímos que um vetor v^b em cada ponto da curva é dito ser transportado paralelamente se

$$\begin{aligned}
 u^a \nabla_a v^b &= 0 \\
 \Rightarrow u^a \partial_a v^b + u^a \Gamma_{ab}^c v^c &= 0 \\
 \Rightarrow \frac{dv^a}{dt} + u^b \Gamma_{bc}^a v^c &= 0. \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

Gostaríamos que o produto interno fosse invariante quando o transportamos paralelamente ao

longo de uma curva \mathcal{C} . Dessa forma, suponha v^a e ω^b , de modo que o produto interno seja expresso por $g_{ab}v^a\omega^b$. Utilizando a definição de transporte paralelo, temos:

$$\begin{aligned}
 u^c \nabla_c (g_{ab}v^a\omega^b) &= 0 \\
 &\stackrel{=0 \text{ pela Def.(2.10)}}{=} \stackrel{=0 \text{ pela Def.(2.10)}}{=} 0 \\
 \Rightarrow u^c v^a \omega^b \nabla_c g_{ab} + \overbrace{(u^c \nabla_c \omega^b)v^a g_{ab}}^{\omega^b g_{ab}(u^c \nabla_c v^a)} &= 0 \\
 \Rightarrow u^c v^a \omega^b \nabla_c g_{ab} = 0 &\iff \nabla_c g_{ab} = 0. \tag{2.23}
 \end{aligned}$$

Em outras palavras, para que o produto interno se conserve ao longo de \mathcal{C} , a derivada covariante da métrica deve ser nula. Vamos mostrar que ∇_c é único.

Proposição 2.2. *Se g_{ab} é um tensor métrico, então existe um único operador ∇_c satisfazendo $\nabla_c g_{ab} = 0$.*

Prova. Seja ∂_c um operador diferencial ordinário associado a um sistema de coordenadas (cujo estamos representando por $\tilde{\nabla}_c$). Pela Eq.(2.19) (já substituindo C por Γ), temos que

$$\begin{aligned}
 \nabla_c g_{ab} &= \partial_c g_{ab} - \Gamma_{ca}^d g_{db} - \Gamma_{cb}^d g_{ad} = 0 \\
 \Rightarrow \partial_c g_{ab} &= \Gamma_{ca}^d g_{db} + \Gamma_{cb}^d g_{ad} = \Gamma_{bca} + \Gamma_{acb}. \tag{2.24}
 \end{aligned}$$

Por substituição de índices, podemos escrever

$$\partial_a g_{cb} = \Gamma_{bac} + \Gamma_{cab}, \tag{2.25}$$

$$\partial_b g_{ac} = \Gamma_{cba} + \Gamma_{abc}. \tag{2.26}$$

Finalmente, somando a Eq.(2.24) com a Eq.(2.25), subtraindo a Eq.(2.26) e usando as propriedades de simetria de Γ_{ca}^b encontramos:

$$\Gamma_{ca}^d = \frac{1}{2} g^{db} (\partial_c g_{ab} + \partial_a g_{cb} - \partial_b g_{ca}). \tag{2.27}$$

Esta escolha da conexão resolve a expressão (2.23) e ainda é única.

□

Em termos das bases coordenadas, podemos reescrever a Eq.(2.27) como

$$\Gamma_{QM}^L = \frac{1}{2} \sum_N g^{LN} (\partial_Q g_{MN} + \partial_M g_{QN} - \partial_N g_{QM}). \tag{2.28}$$

A conexão obtida das propriedades de simetria apresentadas acima é denominada **conexão de**

Levi-Civita (ou conexão afim). Observe que, mesmo quando estávamos determinando C_{ab}^c e, consequentemente, Γ_{ab}^c , não falamos nada a respeito de seu caráter tensorial. Isso se justifica porque Γ_{ab}^c não se transforma como indicado na Eq.(2.8) (omitimos aqui a demonstração). Assim, de acordo com o que foi desenvolvido nesta Seção, concluímos que podemos calcular a derivada covariante utilizando a conexão de Levi-Civita e tomando as derivadas parciais das componentes das bases coordenadas da métrica.

2.2.2 Tensor de Riemann

Passemos a construir os tensores que determinam a geometria do espaço-tempo. A curvatura, dada uma variedade diferenciável, pode ser calculada através do tensor de Riemann, onde este nos fornece uma medida de como vetores se transportam paralelamente ao longo de curvas e como o próprio espaço é curvado devido à presença de matéria e energia. Para tanto, apresentamos agora algumas propriedades que o tensor de Riemann deve satisfazer e deduzimos, por conseguinte, sua forma explícita por meio da conexão de Levi-Civita. Ademais, por contração de índices, definimos o tensor e o escalar de Ricci.

Sejam ∇_a e ∇_b operadores diferenciais, $\omega_c \in \mathbb{V}_p^*$ e $f \in \mathcal{F}$. Calculando o comutador desses operadores atuando no produto $f\omega_c$, encontramos, pela regra de Leibniz [11]:

$$\begin{aligned} [\nabla_a, \nabla_b](f\omega_c) &= \nabla_a(\omega_c \nabla_b f + f \nabla_b \omega_c) - \nabla_b(\omega_c \nabla_a f + f \nabla_a \omega_c) \\ &= f(\nabla_a \nabla_b \omega_c - \nabla_b \nabla_a \omega_c) = f[\nabla_a, \nabla_b](\omega_c). \end{aligned} \quad (2.29)$$

O tensor $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\omega_c$ no ponto p depende apenas do valor de ω_c em p . Consequentemente, $[\nabla_a, \nabla_b]$ define um mapa linear de um covetor em um tensor de tipo $(0, 3)$. Deste modo, existe um campo tensorial, que denotamos por R_{abc}^d (**tensor de curvatura de Riemann**):

$$[\nabla_a, \nabla_b](\omega_c) = R_{abc}^d \omega_d. \quad (2.30)$$

Podemos obter, assim, a expressão do comutador de operadores diferenciais num campo tensorial arbitrário em termos do tensor de Riemann. Inicialmente, para um campo vetorial $v^c \in \mathbb{V}_p$, a propriedade (v) da Def.(2.9) sugere que

$$\begin{aligned} \underbrace{[\nabla_a, \nabla_b](v^c \omega_c)}_{=0} &= \underbrace{\nabla_a(\omega_c \nabla_b v^c + v^c \nabla_b \omega_c) - \nabla_b(\omega_c \nabla_a v^c + v^c \nabla_a \omega_c)}_{=0} \\ &= v^c(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\omega_c + \omega_c(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)v^c \\ &= \omega_c[\nabla_a, \nabla_b](v^c) + v^c R_{abc}^d \omega_d = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [\nabla_a, \nabla_b](v^c) = -R_{abd}^c v^d. \quad (2.31)$$

De modo geral, para um tensor $T_{d_1 \dots d_l}^{c_1 \dots c_k}$, encontramos

$$[\nabla_a, \nabla_b]T_{d_1 \dots d_l}^{c_1 \dots c_k} = -\sum_{i=1}^k R_{ab\sigma}^{ci} T_{d_1 \dots d_l}^{c_1 \dots \sigma \dots c_k} + \sum_{j=1}^l R_{and_j}^{\sigma} T_{d_1 \dots \sigma \dots d_l}^{c_1 \dots c_k}. \quad (2.32)$$

Diretamente da construção do tensor de Riemann Eqs.(2.30) - (2.32), podemos observar que as seguintes propriedades são satisfeitas:

- (i) $R_{abc}^d = -R_{bac}^d$;
- (ii) $R_{[abc]}^d = 0$ (Antissimetria nos índices a, b e c);
- (iii) $R_{abcd} = -R_{abdc}$ (Considerando $\nabla_a g_{bc} = 0$);
- (iv) $R_{abcd} = R_{cdab}$;
- (v) $\nabla_{[a} R_{bc]}^e = 0$ (Identidade de Bianchi).

A partir das propriedades antissimétricas (i) e (iii), o traço do tensor de Riemann sobre os dois primeiros ou dois últimos índices desaparece. Entretanto, o traço sobre o segundo e o quarto índices (ou, de forma equivalente, o primeiro e o terceiro) define o que denominamos tensor de Ricci, ou seja, $R_{acb}^c = R_{ab}$. Além disso, usando a propriedade (iv), temos $R_{ab} = R_{ba}$, com o escalar de curvatura sendo definido pelo traço do tensor de Ricci, $R = R_a^a$. Ao calcularmos explicitamente o tensor de Riemann a partir da Eq.(2.30), encontramos:

$$\begin{aligned} R_{abc}^d \omega_d &= [\nabla_a, \nabla_b](\omega_c) \\ &= \partial_b \Gamma_{ac}^d - \partial_c \Gamma_{ab}^d + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{be}^d - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ce}^d. \end{aligned} \quad (2.33)$$

O tensor de Ricci pode ser obtido contraindo-se a equação acima, ou seja,

$$R_{ac} = R_{abc}^b = \partial_b \Gamma_{ac}^b - \partial_c \Gamma_{ab}^b + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{eb}^b - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ce}^b. \quad (2.34)$$

Também destacamos que a contração da identidade de Bianchi [propriedade (v) desta Seção] leva a uma equação importante para o tensor de Ricci:

$$\begin{aligned} \nabla_{[a} R_{bc]}^e &= 0 \\ \Rightarrow \nabla_a R_{bdc}^e + \nabla_b R_{dac}^e + \nabla_d R_{abc}^e &= 0 \\ \Rightarrow \nabla^a \left(R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}$ é denominado tensor de Einstein (note que a divergência nula deste tensor é naturalmente satisfeita devido à estrutura matemática do tensor de Riemann, independentemente das equações de movimento ou da matéria presente). Mais à frente retornaremos ao tensor de Einstein através da variação na **ação de Einstein-Hilbert**.

2.2.3 Geodésicas

Geodésicas são generalizações de retas, como definidas no espaço euclidiano, para o espaço-tempo curvo. Desse modo, dada uma superfície inserida numa variedade arbitrária, a menor distância entre dois pontos nesta superfície está relacionada a uma curva de valor estacionário, que é a própria geodésica [17]. Utilizando a Def.(2.10), de acordo com Wald[11]:

Definição 2.11. *Sejam ∇_a e T^a um operador (que representa a derivada covariante) e um vetor tangente a uma curva arbitrária \mathcal{C} , respectivamente. Uma geodésica é uma curva cujo vetor tangente é transportado paralelamente ao longo de si mesma. Matematicamente, T^a satisfaz a equação*

$$T^a \nabla_a T^b = 0. \quad (2.36)$$

Na verdade, poderíamos considerar a condição mais fraca em que o vetor tangente esteja na mesma direção que ele mesmo quando transportado paralelamente ao longo de \mathcal{C} , porém, sem manter o mesmo comprimento

$$T^a \nabla_a T^b = \alpha T^b, \quad (2.37)$$

onde α é uma função arbitrária na curva. Contudo, vamos mostrar que, considerando uma curva satisfazendo a Eq.(2.37), podemos sempre reparametrizá-la para satisfazer a Def.(2.11).

Proposição 2.3. *Sempre é possível reparametrizar a Eq.(2.37) de modo a satisfazer a Def.(2.11).*

Prova. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ um parâmetro de α . Logo, por (2.37), temos que

$$\begin{aligned} T^a \nabla_a T^b &= \alpha(\lambda) T^b \\ \Rightarrow T^a (\partial_a T^b + \Gamma_{ac}^b T^c) &= \alpha(\lambda) T^b \\ \Rightarrow \frac{dT^b}{d\lambda} + \Gamma_{ac}^b T^a T^c &= \alpha(\lambda) T^b. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Como T^a é um vetor tangente à curva, podemos reescrevê-lo em termos de base coordenada:

$$\begin{aligned} \frac{dT^N}{d\lambda} + \Gamma_{MQ}^N \frac{dx^M}{d\lambda} \frac{dx^Q}{d\lambda} &= \alpha(\lambda) T^N \\ \Rightarrow \frac{d}{d\lambda} \left(e^{-\int \alpha(\lambda) d\lambda} T^N \right) + e^{-\int \alpha(\lambda) d\lambda} \Gamma_{MQ}^N \frac{dx^M}{d\lambda} T^Q &= 0 \\ \Rightarrow e^{-\int \alpha(\lambda) d\lambda} \frac{d}{d\lambda} \left(e^{-\int \alpha(\lambda) d\lambda} \frac{dx^N}{d\lambda} \right) + \Gamma_{MQ}^N \left(e^{-\int \alpha(\lambda) d\lambda} \frac{dx^M}{d\lambda} \right) \left(e^{-\int \alpha(\lambda) d\lambda} \frac{dx^Q}{d\lambda} \right) &= 0, \end{aligned}$$

onde, definindo $dt = e^{\int \alpha(\lambda) d\lambda} d\lambda$, o quadrivetor $u^M = \frac{dx^M}{dt}$ satisfaz $u^N \nabla_N u^M = 0$. O parâmetro t é chamado de parâmetro afim. \square

Portanto, ao considerarmos um sistema de coordenadas, a geodésica será mapeada em uma curva $x^M(t) \in \mathbb{R}^D$. Podemos escrever, então, as componentes do vetor tangente na base coordenada de modo que

$$\frac{dT^M}{dt} + \Gamma_{NQ}^M T^N T^Q = 0, \quad (2.39)$$

onde $T^M = \frac{dx^M}{dt}$. Logo, a equação da geodésica torna-se:

$$\frac{d^2 x^M}{dt^2} + \Gamma_{NQ}^M \frac{dx^N}{dt} \frac{dx^Q}{dt} = 0. \quad (2.40)$$

Observe que a equação acima é um sistema acoplado de D equações diferenciais ordinárias de segunda ordem para D funções $x^M(t)$, de modo que, da teoria das equações diferenciais, sabemos que sempre existe uma solução única para a Eq.(2.40) dado o valor inicial de x^M e $\frac{dx^M}{dt}$. Isso significa que $\forall p \in M_D$ e $\forall T^M \in \mathbb{V}_p$ existe uma única geodésica através do ponto p com tangente T^M .

2.3 Equações de Campo Via Ação de Einstein-Hilbert

Antes de deduzirmos as equações de campo, façamos duas observações sobre o tensor energia-momento, o qual já está bem estabelecido na literatura. Primeiramente, as equações de Einstein requerem um objeto matemático que contenha informações sobre o conteúdo de matéria e energia contidas em um determinado espaço-tempo, pois, na sua essência, a relatividade geral é uma teoria geométrica da gravitação, isto é, a presença de matéria e energia distorce o espaço-tempo e essa curvatura determina como os corpos se movem². Em conformidade com Silva[18], esse objeto pode ser identificado como o tensor energia-momento, considerando o

²Isso substitui a interpretação newtoniana da gravidade como uma força agindo à distância.

fluxo de quadrimomento P^μ através de uma superfície x^ν constante. A título de exemplo, para o fluido perfeito, expressamos o tensor energia-momento em sua forma contravariante ($T^{\mu\nu}$) como:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (2.41)$$

onde, ρ representa a densidade de matéria/energia, p a pressão e u^μ o quadrvetor velocidade, sendo que T^{00} é a densidade de energia, T^{0i} representa a quantidade de momento e T^{ij} são as componentes do fluxo de momento. Afirmamos que $T^{\mu\nu}$ é simétrico e obedece a lei de conservação $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ [19]. Mais à frente no texto, relaxamos esta condição ao tratarmos da gravidade de Rastall.

Em segundo lugar, é possível definir $T_{\mu\nu}$ por meio de uma derivada funcional da ação em relação à métrica acoplada à matéria, de modo a obtermos a seguinte expressão [20]:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{matéria}}}{\delta g^{\mu\nu}} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{matéria}}}{\partial g^{\mu\nu}} - \mathcal{L}_{\text{matéria}} g_{\mu\nu}, \quad (2.42)$$

em que \mathcal{L} representa a densidade lagrangiana. Agora, passemos à dedução das equações de campo propriamente ditas.

Definição 2.12. *Seja (M_4, g) uma variedade suave de dimensão 4, munida de uma métrica pseudo-riemanniana $g_{\mu\nu}$ de assinatura $(1, 3)$, cujo determinante denotamos por:*

$$g := \det(g_{\mu\nu}). \quad (2.43)$$

Seja R o escalar de Ricci associado à conexão de Levi-Civita de g . A ação de Einstein-Hilbert é o funcional³ $S_{EH} : Met(M_4) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$S_{EH} = S_{EH} [g_{\mu\nu}] = S_G + S_M, \quad (2.44)$$

onde, considerando $a \in \mathbb{R}^$ e uma região do espaço-tempo quadridimensional limitada por Σ , escrevemos:*

$$S_G = a \int_{\Sigma} d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_G \quad e \quad S_M = \int_{\Sigma} d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M, \quad (2.45)$$

em que $\mathcal{L}_G = R$ e $d^4x \sqrt{-g}$ é uma quantidade invariante para a transformação geral de coordenadas.

³O símbolo $Met(M_4)$ representa o conjunto de todas as métricas admissíveis definidas sobre a variedade M_4 .

Utilizando o princípio da mínima ação para obtermos um extremo de S_{EH} , sabemos que $\delta S_{EH} = \delta(S_G + S_M) = 0$. Assim, variando S_G , obtemos:

$$\begin{aligned}\delta S_G &= a \int_{\Sigma} d^4x \delta (\sqrt{-g}R) \\ &= a \int_{\Sigma} d^4x \left[-\frac{1}{2\sqrt{-g}} R \delta g + \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) \right].\end{aligned}\quad (2.46)$$

É possível mostrar, pela **fórmula de Jacobi** para matrizes ($\det e^B = e^{Tr(B)}$) que $\delta g = gg_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$. Ademais, a variação do tensor de Ricci pode ser deduzida explicitamente por:

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_{\alpha} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu} \delta \Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} + \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \delta \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} - \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} \delta \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta}, \quad (2.47)$$

de modo que podemos reescrever esta expressão em termos de derivadas covariantes, pois a $\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ é a diferença de duas conexões de Levi-Civita. Em outras palavras,

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\alpha} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \nabla_{\nu} \delta \Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha}. \quad (2.48)$$

Substituindo os últimos dois resultados na Eq.(2.46), temos, então:

$$\delta S_G = a \int_{\Sigma} d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) + a \int_{\Sigma} d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left(\nabla_{\alpha} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \nabla_{\nu} \delta \Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} \right). \quad (2.49)$$

Rearranjando o segundo termo da equação acima (considerando a proposição 2.2) e realizando uma troca de índice $\alpha \rightarrow \nu$ no segundo termo da segunda integral, encontramos:

$$\begin{aligned}\delta S_G &= a \int_{\Sigma} d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) + a \int_{\Sigma} d^4x \sqrt{-g} \nabla_{\alpha} \left(g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - g^{\mu\alpha} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\nu} \right) \\ &= a \int_{\Sigma} d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) + a \oint_{\partial\Sigma} d^3x_{\alpha} \sqrt{-g} \left(g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - g^{\mu\alpha} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\nu} \right),\end{aligned}\quad (2.50)$$

onde utilizamos o **teorema de Gauss covariante** na segunda integral, sendo $\partial\Sigma$ a fronteira de Σ . As condições de contorno nos dizem que a integral de superfície acima deve se anular na fronteira. Logo, a Eq.(2.50) se reduz a

$$\delta S_G = a \int_{\Sigma} d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right). \quad (2.51)$$

Agora, variando S_M , obtemos:

$$\begin{aligned}
 \delta S_M &= \int_{\Sigma} d^4x \delta (\sqrt{-g} \mathcal{L}_M) \\
 &= \int_{\Sigma} d^4x \left(\sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \mathcal{L}_M \delta \sqrt{-g} \right) \\
 &= \int_{\Sigma} d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} \mathcal{L}_M g_{\mu\nu} \right). \tag{2.52}
 \end{aligned}$$

Substituindo as variações calculadas e o tensor energia-momento expresso pela Eq.(2.42), o extremo das variações torna-se:

$$\begin{aligned}
 \delta S_{EH} &= \delta S_G + \delta S_M = 0 \\
 &= \int_{\Sigma} d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(aR_{\mu\nu} - \frac{a}{2}Rg_{\mu\nu} + \frac{1}{2}T_{\mu\nu} \right) = 0 \\
 \Rightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2a}T_{\mu\nu}. \tag{2.53}
 \end{aligned}$$

Tomando $-\frac{1}{2a} = \kappa$ e substituindo o lado esquerdo a equação acima pelo tensor de Einstein encontrado na Eq.(2.35), obtemos o seguinte resultado:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \tag{2.54}$$

Estas são as equações de campo de Einstein para um espaço-tempo quadridimensional. A constante κ pode ser encontrada ao considerarmos o regime de campo fraco (a partir de uma perturbação em primeira ordem na métrica de Minkowski, ou seja, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$), de modo que encontramos $\kappa = 8\pi G/c^4$, com $G = 6,6743 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ sendo a constante da gravitação de Newton e $c = 299.792.458 \text{ ms}^{-1}$ a velocidade da luz no vácuo.

3 COSMOLOGIA RELATIVÍSTICA

A Cosmologia é a ciência que investiga a estrutura, evolução e composição do Universo. Neste contexto, o Modelo Cosmológico Padrão (MCP) surge como uma solução simplificada das equações de campo de Einstein, fundamentado no Princípio Cosmológico, segundo o qual, em escalas suficientemente grandes (superiores a 100 Mpc)¹, o Universo é homogêneo e isotrópico - isto é, apresenta as mesmas propriedades para todos os observadores, em conformidade com Silva[18]. Inserida nesse arcabouço teórico, a teoria do Big Bang foi desenvolvida para descrever a origem e a evolução inicial do Universo, partindo de um estado de elevadíssimas temperaturas e densidades, associado a uma singularidade primordial, seguida por um processo de expansão acelerada.

O MCP propõe que o Universo seja composto principalmente por energia escura (cerca de 70%), que acelera sua expansão, e matéria escura fria (25%), que influencia a formação das galáxias. Apenas 5% do Universo é formado por matéria bariônica. A radiação cósmica de fundo, vestígio do Big Bang, fornece informações sobre o início do Cosmos. O modelo também inclui uma fase de inflação cósmica nos primeiros instantes do Universo e uma aceleração na expansão atual, ainda impulsionada pela energia escura, o que pode ser incorporado nas equações de campo de Einstein como um termo constante Λ .

Portanto, nas próximas Seções, discutimos as implicações de se considerar o alto grau de simetria de um Universo homogêneo e isotrópico, deduzimos a dinâmica que rege a expansão acelerada de tal Universo a partir das equações de Friedmann, obtidas como soluções das equações de campo em um espaço-tempo quadridimensional e, por fim, apresentamos o conceito de Inflação Cósmica e como ele ajuda na resolução de alguns problemas encontrados na teoria do Big Bang. Com essa perspectiva, seguimos aqui a construção abordada por Baumann[21].

3.1 Geometria do Modelo FLRW

A métrica de Robertson–Walker descreve um espaço-tempo homogêneo e isotrópico, cujas seções espaciais possuem curvatura constante, dado seu alto grau de simetria. Para dedu-

¹ Mpc , ou megaparsec, é uma unidade de medida utilizada na astronomia para descrever as vastas distâncias entre galáxias e equivale a um milhão de parsecs, ou seja, aproximadamente 3,26 milhões de anos-luz (isso se traduz em cerca de $3,08 \times 10^{22} \text{ m}$).

zirmos sua forma geral, atentemo-nos à seguinte definição:

Definição 3.1. *Seja $E^3 \subset \mathbb{R}^3$ o espaço euclidiano tridimensional, munido de métrica canônica δ_{ij} . As distâncias físicas infinitesimais entre dois pontos arbitrários $P, Q \in E^3$, cujas coordenadas diferem de dx^i , são dadas pelo elemento de linha:*

$$dl^2 = \sum_{i,j=1}^3 \delta_{ij} dx^i dx^j = \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.1)$$

onde δ_{ij} denota o **símbolo de Kronecker**, definido por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}. \quad (3.2)$$

Em particular, na base cartesiana usual (x, y, z) , temos: $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Considerando coordenadas polares esféricas para descrevermos o elemento de linha, podemos escrever:

$$\begin{aligned} dl^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \\ &\equiv \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} dx^i dx^j = g_{ij} dx^i dx^j, \end{aligned} \quad (3.3)$$

com $(x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, \phi)$. Observe que a métrica toma a forma $g_{ij} = \text{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$. Além do mais, no caso do espaço-tempo quadridimensional, com coordenada $x^\mu = (ct, x^i)$, o elemento de linha toma a forma:

$$dl^2 \rightarrow dS^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.4)$$

como já mencionamos anteriormente. Assim, na relatividade especial, para o espaço-tempo de Minkowski² ($\mathbb{R}^{1,3}$) o elemento de linha torna-se:

$$dS^2 = -c^2 dt^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (3.5)$$

A homogeneidade espacial e a isotropia do Universo significam que este pode ser representado por uma sequência ordenada no tempo de hipersuperfícies tridimensionais, que denotamos por Σ_t , cada uma das quais é homogênea e isotrópica. O elemento de linha quadri-

²Para mais detalhes sobre relatividade especial, veja, por exemplo, a Ref.[22].

dimensional pode então ser escrito como:

$$dS^2 = -c^2 dt^2 + v^2(t) dl^2, \quad (3.6)$$

onde $dl^2 \equiv g_{ij}(x^k) dx^i dx^j$ é o elemento de linha em Σ_t e $v(t)$ é o fator de escala, que descreve a expansão do Universo. Comecemos, pois, determinando as formas permitidas da métrica espacial g_{ij} para daí discutirmos como a evolução do fator de escala está relacionada com o conteúdo de matéria do Universo. Em suma, espaços homogêneos e isotrópicos têm uma curvatura intrínseca constante e máxima simetria, o que acarreta em três possibilidades distintas: curvatura nula (espaço-tempo de Minkowski); curvatura positiva (espaço-tempo de de-Sitter) ou curvatura negativa (espaço-tempo anti-de Sitter), veja Fig.(3.1). Dessa forma, passemos a determinar a métrica para cada caso.

- Curvatura nula: A possibilidade mais simples é o espaço-tempo euclidiano tridimensional \mathbb{E}^3 . Este é o espaço em que as retas paralelas não se interceptam e

$$dl^2 = d\mathbf{x}^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (3.7)$$

é invariante sob translações espaciais ($x^i \rightarrow x^i + \varepsilon^i$) e rotações ($x_i \rightarrow R_k^i x^k$), de modo que $\delta_{ij} R_k^i R_l^j = \delta_{kl}$.

- Curvatura positiva: Aqui, as retas paralelas acabam por se encontrar. Esta geometria pode ser representada como uma esfera tridimensional S^3 inserida num espaço euclidiano quadridimensional ($\mathbb{E}^4 \subset \mathbb{R}^4$), onde

$$dl^2 = d\mathbf{x}^2 + du^2, \quad \mathbf{x}^2 + u^2 = R_0^2, \quad (3.8)$$

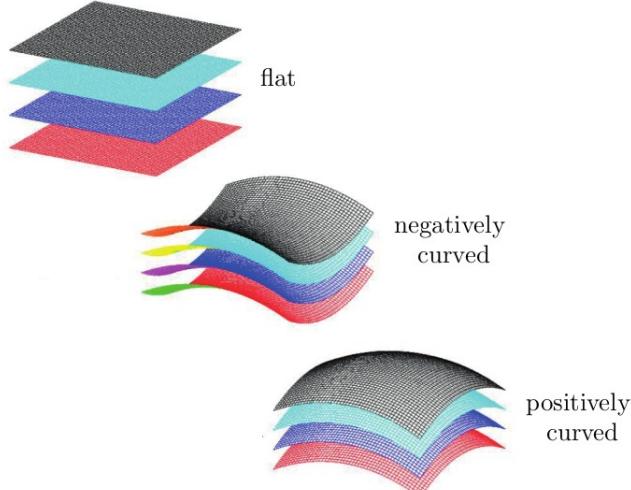
sendo R_0 é o raio da esfera. Note que a homeogeneidade e a isotropia da superfície da esfera tridimensional são herdadas da simetria do elemento de linha sob rotações em quatro dimensões.

- Curvatura negativa: Nesta geometria, as retas paralelas divergem. Pode ser representada como um hiperboloide H^3 inserido num espaço lorentziano quadridimensional $\mathbb{R}^{1,3}$, onde

$$dl^2 = d\mathbf{x}^2 - du^2, \quad \mathbf{x}^2 - u^2 = -R_0^2, \quad (3.9)$$

sendo $R_0^2 > 0$ uma constante que determina a curvatura do hiperboloide.

Figura 3.1 – Curvaturas das hipersuperfícies tridimensionais



Fonte: Adaptado de Baumann [21].

Combinando os casos esférico e hiperbólico, obtemos:

$$\begin{aligned}
 dl^2 &= d\mathbf{x}^2 \pm du^2, \mathbf{x}^2 \pm u^2 = \pm R_0^2 \\
 \Rightarrow u du &= \mp \mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \iff du^2 = \mp \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{R_0^2 \mp \mathbf{x}^2} \\
 \therefore dl^2 &= d\mathbf{x}^2 \pm \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{R_0^2 \mp \mathbf{x}^2}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Finalmente, podemos unificar os três casos, isto é,

$$dl^2 = d\mathbf{x}^2 + \varepsilon \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{R_0^2 - \varepsilon \mathbf{x}^2}, \tag{3.11}$$

com $\varepsilon = 0$ para curvatura nula, $\varepsilon = 1$ para curvatura positiva e $\varepsilon = -1$, para curvatura negativa.

Para tornar a simetria do espaço mais aparente é conveniente escrever a métrica em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , como a seguir:

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{x}^2 &= dr^2 + r^2 \overbrace{(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)}^{= d\Omega^2} \\
 \Rightarrow dl^2 &= dr^2 + r^2 d\Omega^2 + \varepsilon \frac{r^2 dr^2}{R_0^2 - \varepsilon r^2} \\
 &= \frac{dr^2}{1 - \frac{\varepsilon r^2}{R_0^2}} + r^2 d\Omega^2.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Ao substituirmos o dl^2 na Eq.(3.6) encontramos a métrica de Robertson-Walker, expressa no

seguinte elemento de linha:

$$dS^2 = -c^2 dt^2 + v^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - \frac{\xi r^2}{R_0^2}} + r^2 d\Omega^2 \right). \quad (3.13)$$

Vamos agora à dedução das equações que descrevem a dinâmica, através da Eq.(2.54).

3.2 Dinâmica de um Universo Homogêneo e Isotrópico

A dinâmica em larga escala é constituída pelas chamadas equações de Friedmann. Elas determinam como o Universo se expande ou contrai ao longo do tempo com base no conteúdo de matéria e na curvatura do espaço-tempo, sendo este qualificado como uma variedade quadridimensional. Dito isso, precisamos utilizar a métrica $g_{\mu\nu}$ - descrita acima - nas conexões de Levi-Civita, para então substituirmos nas equações de campo de Einstein. Assim, considere $\xi = \frac{\varepsilon}{R_0^2}$ e $c = 1$ na Eq.(3.13). Logo, temos que:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left(-1, \frac{v^2}{1 - \xi r^2}, v^2 r^2, v^2 r^2 \sin^2 \theta \right), \quad (3.14)$$

$$g^{\mu\nu} = \text{diag} \left(-1, \frac{1 - \xi r^2}{v^2}, \frac{1}{v^2 r^2}, \frac{1}{v^2 r^2 \sin^2 \theta} \right), \quad (3.15)$$

com as seguintes componentes não-nulas das conexões dadas pela Eq.(2.27):

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^t &= v\dot{v}/1 - \xi r^2, & \Gamma_{\phi\phi}^t &= v\dot{v}r^2 \sin^2 \theta, & \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \cot \theta, \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{r\phi}^\phi = 1/r, & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r(1 - \xi r^2), \\ \Gamma_{rt}^r &= \Gamma_{t\theta}^\theta = \Gamma_{t\phi}^\phi = \dot{v}/v, & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r(1 - \xi r^2) \sin^2 \theta, & \Gamma_{\theta\theta}^t &= v\dot{v}r^2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

As componentes do tensor de Ricci, calculadas a partir da Eq.(2.34), são:

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -3\frac{\ddot{v}}{v}, \\ R_{rr} &= \frac{2v\ddot{v}\dot{v} + 2\xi}{1 - \xi r^2}, \\ R_{\theta\theta} &= r^2(v\ddot{v} + 2\dot{v} + 2\xi), \\ R_{\phi\phi} &= r^2(v\ddot{v} + 2\dot{v} + 2\xi) \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (3.17)$$

com o respectivo escalar de Ricci expresso por:

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{v}}{v} + \frac{\dot{v}^2}{v^2} + \frac{\xi}{v^2} \right). \quad (3.18)$$

Ao longo do restante do texto, usamos ponto (.) para representar derivadas temporais e linha (') para derivadas com relação as coordenadas espaciais, incluindo-se a radial. Como termo de fonte, considere o tensor energia-momento da Eq.(2.41), de modo que:

$$T^{\mu\nu} = \text{diag}(-\rho, p, p, p), \quad (3.19)$$

tendo o traço T denotado por:

$$T = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = T^\mu_\mu = -\rho + 3p \quad (3.20)$$

e, após algumas manipulações algébricas na Eq.(2.54), encontramos:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right). \quad (3.21)$$

A escolha $\mu = \nu = t$ nos fornece a seguinte equação:

$$\frac{\ddot{v}}{v} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (3.22)$$

Já a escolha $\mu, \nu = i, j$ nos leva à:

$$\frac{\ddot{v}}{v} + 2\frac{\dot{v}^2}{v^2} + 2\frac{\xi}{v^2} = 4\pi G(\rho - p). \quad (3.23)$$

Note que podemos substituir a Eq.(3.22) na Eq.(3.23) com o intuito de eliminar o termo de derivada segunda nesta última, o que nos retorna a expressão

$$H^2 \equiv \frac{\dot{v}^2}{v^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\xi}{v^2}, \quad (3.24)$$

onde $H(t) = \dot{v}(t)/v(t)$ é denominado **parâmetro de Hubble** e as expressões (3.22) e (3.24) representam as equações de Friedmann. Tomamos $t = t_0$ para avaliar as quantidades no tempo presente. A densidade crítica $\rho_{c,0}$ diz respeito às condições necessárias para que o Universo seja espacialmente plano. No MCP, observações do satélite Planck da Radiação Cósmica de Fundo (RCF) indicam que $\rho \approx \rho_{c,0}$ com alta precisão, o que significa que o Universo é praticamente plano [23]. Em outras palavras, $\xi = 0$ corresponde a seguinte densidade crítica hoje:

$$\rho_{c,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1,1 \times 10^{-5} h^2 \text{protons/cm}^3, \quad (3.25)$$

em que, de acordo com a Ref.[24]:

$$H_0 = H(t_0) = 2,1332 \times 10^{-42} h \text{ GeV} \text{ e } h = 0,72 \pm 0,08. \quad (3.26)$$

É útil escrevermos as demais formas de densidade relacionando-as com a densidade crítica através do parâmetro de densidade Ω , de modo que:

$$\Omega_{j,0} \equiv \frac{\rho_{j,0}}{\rho_{c,0}}, j = r, m, \Lambda, \dots \quad (3.27)$$

Aqui, ρ_r representa a densidade de radiação, ρ_m a densidade de matéria e ρ_Λ a densidade de energia escura. Em geral, para um Universo homogêneo e isotrópico, são válidas as seguintes relações [21]:

$$\Omega_j > 1 \text{ ou } \rho_j > \rho_c \Rightarrow \epsilon = 1, \quad (3.28)$$

$$\Omega_j = 1 \text{ ou } \rho_j = \rho_c \Rightarrow \epsilon = 0, \quad (3.29)$$

$$\Omega_j < 1 \text{ ou } \rho_j < \rho_c \Rightarrow \epsilon = -1. \quad (3.30)$$

Em larga escala, o Universo se aproxima de uma variedade plana, ou seja, de um espaço-tempo com curvatura nula, de acordo com a Def.(2.1). Neste ponto, também podemos contornar considerar um termo de constante cosmológica $\Lambda g_{\mu\nu}$ nas equações de campo de Einstein com a divergência nula da equação permanecendo satisfeita. Logo, seguindo os mesmos cálculos anteriores, a Eq.(3.24) torna-se

$$\frac{\dot{v}^2}{v^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\xi}{v^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (3.31)$$

onde ρ representa a densidade total de energia do Universo. A presença da constante cosmológica Λ implica que o Universo experimenta uma expansão acelerada, impulsionada por uma forma de energia escura com pressão negativa constante, o que faz com que, em escalas de tempo suficientemente longas, a dinâmica cosmológica tenda a um estado de de Sitter. Nesse cenário, o destino do Universo deixa de depender exclusivamente da curvatura espacial, enquanto estruturas gravitacionais são progressivamente suprimidas pela aceleração. Além disso, o próprio vácuo passa a desempenhar um papel dinâmico nas equações gravitacionais, influenciando a evolução global do espaço-tempo.

3.3 Inflação Cósmica

A Inflação Cósmica, proposta por Alan Guth em 1981 [25], postula que o Universo, no seu momento inicial, passou por uma fase de crescimento exponencial. Ela foi introduzida com o intuito de solucionar alguns problemas existentes na teoria do Big Bang tais como o pro-

blema do horizonte e planicidade³. O tamanho de uma área de espaço causalmente conectada é determinado pela distância máxima a partir da qual a luz pode ser recebida. Isso é melhor estudado em coordenadas comóveis (que se expandem junto com o Universo), onde geodésicas nulas são linhas retas e a distância entre dois pontos é igual a diferença correspondente no tempo conforme $\Delta\eta$. Assim, se o Big Bang surgiu como uma singularidade em $t_i = 0$, então a maior distância comóvel a partir da qual um observador no tempo t será capaz de receber sinais viajando à velocidade da luz é o chamado horizonte de partícula.

Definição 3.2. *O horizonte de partícula de um observador em um ponto p no tempo cosmológico t_0 é o conjunto*

$$\mathcal{H}_p(t_0) \equiv \partial[J^-(p) \cap \Sigma_{t>0}], \quad (3.32)$$

onde $J^-(p)$ é o domínio causal de p (todos os eventos que podem enviar sinais luminosos a p), $\Sigma_{t>0}$ é a hipersuperfície de tempo cosmológico constante e ∂ denota a fronteira topológica.

Definição 3.3. *A distância comóvel máxima da qual a luz emitida desde o início do Universo pode ter alcançado um observador até o tempo t_0 é*

$$d_h(\eta) = \eta - \eta_i = \int_{t_i}^{t_0} \frac{dt}{v(t)}, \quad (3.33)$$

com η sendo o próprio tempo conforme.

Na Cosmologia convencional do Big Bang, tomamos $\eta_i = 0$ e o horizonte de partícula sendo simplesmente igual ao tempo conforme. O tamanho do horizonte no termo η pode ser visualizado pela intersecção do cone de luz passando por um observador O com a superfície tipo-espacó em η_i . As influências causais têm que vir de dentro dessa região. Os sinais vindos de fora dela teriam que viajar mais rápido que a velocidade da luz para chegar a O . Desta maneira, a Eq.(3.33) pode ser reescrita como:

$$d_h(\eta) = \eta = \int_{v_i}^{v_0} \frac{dv}{v\dot{v}} = \int_{\ln v_i}^{\ln v_0} (vH)^{-1} d\ln v, \quad (3.34)$$

onde $(vH)^{-1}$ é chamado de raio comóvel de Hubble e $v_i = 0$ corresponde a singularidade do Big Bang. Acontece que a quantidade de tempo conforme entre a singularidade inicial e a formação

³Problema do horizonte: pela homogeneidade observada, regiões do Universo distantes entre si apresentam temperaturas quase uniformes da RCF, embora, no modelo padrão do Big Bang, elas nunca tenham estado conectadas. Planicidade: refere-se ao fato de que observações indicam $\Omega \approx 1$ hoje - ou seja, um Universo praticamente plano - porém, pelas equações de Friedmann sem inflação, qualquer pequeno desvio de $\Omega = 1$ no início cresceria rapidamente ao longo do tempo.

de micro-ondas cósmicas de fundo foi muito menor do que a idade conforme do Universo hoje. A uniformidade dessas micro-ondas se estende por escalas muito maiores do que o horizonte de partículas da época em que foram emitidas. No MCP, a radiação cósmica de fundo é composta por muitas regiões do espaço que, teoricamente, não tiveram interação causal entre si. Como essas regiões não tiveram tempo suficiente para trocar informações, a semelhança entre elas representa o que é conhecido como o problema do horizonte, supracitado [21].

Consideremos um Universo plano preenchido apenas por matéria e radiação. Neste sentido, as Eqs.(3.24), (3.25) e (3.27) nos fornecem a seguinte expressão para o fator de Hubble:

$$H^2 = H_0^2 (\Omega_{m,0} v^{-3} + \Omega_{r,0} v^{-4}), \quad (3.35)$$

sendo $\Omega_{r,0} = v_{eq} \Omega_{m,0}$, em que o subscrito *eq* denota quantidades avaliadas na igualdade matéria-radiação. O raio comóvel de Hubble pode então ser escrito como:

$$(vH)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{m,0}}} H_0^{-1} \frac{v}{\sqrt{v+v_{eq}}}. \quad (3.36)$$

Substituindo o resultado acima na integral (3.34) e resolvendo-a, obtemos:

$$\eta = \frac{2}{\sqrt{\Omega_{m,0}}} H_0^{-1} (\sqrt{v+v_{eq}} - \sqrt{v_{eq}}). \quad (3.37)$$

Note que este resultado tem os limites corretos: em tempos iniciais ($v \ll v_{eq}$), obtemos $\eta \propto v$, enquanto em tempos tardios ($v_{eq} \ll v$), temos $\eta \propto v^{\frac{1}{2}}$. Os tempos conformes hoje ($v_0 = 1$) e na recombinação⁴ ($v_{rec} = 1100^{-1}$) são, respectivamente:

$$\eta_0 \approx \frac{2}{\sqrt{\Omega_{m,0}}} H_0^{-1} \quad (3.38)$$

$$\eta_{rec} = \frac{2}{\sqrt{\Omega_{m,0}}} H_0^{-1} \left[\sqrt{1100^{-1} + 3400^{-1}} - \sqrt{3400^{-1}} \right] \approx 0,0175 \eta_0. \quad (3.39)$$

O problema da planicidade está diretamente relacionado com o problema do horizonte, de modo que qualquer solução para este será também, aparentemente, solução para aquele. Definimos a densidade crítica dependente do tempo (do Universo) como $\rho_c(t) = 3M_{Pl}^2 H^2$, de acordo com Baumann[21]. O parâmetro de curvatura dependente do tempo será dado por:

$$\Omega_\epsilon(t) = \frac{\rho_c - \rho}{\rho_c} = \frac{(v_0 H_0)^2}{(vH)^2} \Omega_{\epsilon,0}, \quad (3.40)$$

⁴Recombinação: trata-se do período em que o Universo, então quente e totalmente ionizado, resfria o suficiente para que elétrons livres se combinem com prótons, formando os primeiros átomos neutros de hidrogênio. Isso ocorre cerca de 380 mil anos após o Big Bang.

onde usamos $\rho_c \propto H^2$ e $\rho_c - \rho \propto v^{-2}$. Como o raio comóvel de Hubble $(vH)^{-1}$ está crescendo durante o Big Bang, de acordo com a Eq.(3.36), esperamos que $|\Omega_\epsilon(t)|$ seja ainda menor no passado. Ignorando o período de curta duração de dominação de energia escura, o raio comóvel de Hubble pode ser substituído na expressão acima, de modo que:

$$\Omega_\epsilon(t) = \frac{\Omega_{\epsilon,0}}{\Omega_{m,0}} \frac{v^2}{v + v_{eq}}. \quad (3.41)$$

Todavia, na igualdade matéria-radiação isso implica em

$$|\Omega_\epsilon(t_{eq})| = \frac{|\Omega_{\epsilon,0}| v_{eq}}{2\Omega_{m,0}} < 10^{-6}. \quad (3.42)$$

Quando o Universo estava em sua fase a qual era dominado pela radiação, tínhamos, segundo as equações de Friedmann,

$$H^2 = H_{eq}^2 \Omega_{r,eq} \left(\frac{v_{eq}}{v} \right)^4, \quad (3.43)$$

com $\Omega_{r,eq} = 0,5$. O parâmetro de curvatura então torna-se:

$$\Omega_\epsilon(t) = \frac{(v_{eq}H_{eq})^2}{(vH)^2} \Omega_\epsilon(t_{eq}) = 2\Omega_\epsilon(t_{eq}) \left(\frac{v}{v_{eq}} \right)^2. \quad (3.44)$$

Uma maneira útil de reescrever o problema é em termos do escalar de curvatura $R(t)$ que está relacionado com $\Omega_\epsilon(t)$ da seguinte forma [21]:

$$R(t) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega_\epsilon(t)|}} H^{-1}(t). \quad (3.45)$$

Assim, vemos que o escalar de curvatura hoje (de acordo com as observações) é $R(t_0) > 14H_0^{-1}$. As restrições sobre $\Omega_\epsilon(t)$ implicam que o escalar de curvatura no início do Universo era muitas ordens de magnitude maior que a taxa de Hubble naquela época. Como, na cosmologia padrão do Big Bang, a escala de Hubble é da mesma ordem que o horizonte de partículas, isso sugere um ajuste fino em muitos aspectos aparentemente desconectados. O problema da planicidade pode, portanto, também ser interpretado como a necessidade de ajustar as velocidades iniciais de todas as partículas a grandes distâncias, que, intuitivamente, nunca estiveram em contato causal.

4 MUNDOS BRANA E A GRAVIDADE DE RASTALL

Branas, no contexto deste trabalho, podem ser interpretadas como variedades inseridas em um espaço-tempo com dimensão superior, que denominamos *bulk*, onde as forças eletromagnéticas e nucleares ficam confinadas, enquanto a gravidade é a única que pode se propagar através dele¹. A Cosmologia estudada em mundos brana surge a partir de teorias e modelos que consideram dimensões extras, como a teoria das cordas e o modelo de Randall-Sundrum, por exemplo [27].

Consideramos um *bulk* pentadimensional em vez do MCP, descrito anteriormente, pelos seguintes motivos: (i) a capacidade de resolver o problema da hierarquia, explicando a discrepância entre a intensidade do campo gravitacional na escala TeV e o valor esperado na escala de Planck, da ordem de $10^{18} GeV$; (ii) a modificação das equações de Friedmann, permitindo cenários alternativos para a expansão cósmica e a energia escura; (iii) a introdução de correções gravitacionais em altas energias, capazes de alterar a dinâmica inflacionária; e (iv) a modificação do comportamento da gravidade, resultando em efeitos gravitacionais distintos em escalas cosmológicas.

A gravidade de Rastall, proposta em 1972 [8], constitui uma modificação da TRG. Diferentemente da teoria de Einstein, que assume a conservação covariante do tensor energia-momento, conforme discutido na Seção (2.3), o formalismo utilizado por Rastall permite um acoplamento não trivial entre a matéria e a geometria do espaço-tempo. Nesse contexto, a divergência do tensor energia-momento é proporcional a curvatura escalar, levando à equações de campo gravitacional modificadas. Ademais, essa teoria admite soluções cosmológicas capazes de descrever a aceleração do Universo sem a necessidade de uma componente explícita de energia escura.

Portanto, neste Capítulo, investigamos a aplicação da gravidade de Rastall em cenários de mundos brana, analisando branas finas e espessas, tanto em regimes estáticos quanto em regimes com o fator de escala atuando nas dimensões espaciais (caso cosmológico).

¹Existe um estudo interessante sobre formação espontânea de branas, que toma como hipótese um *bulk* hexadimensional, encontrado na Ref.[26].

4.1 Descrição do Modelo

Motivado pela possibilidade de que, em espaços-tempos curvos, a conservação local do tensor energia-momento possa não valer na forma usual ($\nabla^M T_{MN} = 0$), Rastall postulou um tensor energia-momento dependente da curvatura escalar, de modo que:

$$\nabla^M T_{MN} = \lambda \nabla_N R, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

com $M, N = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, (D-1)$. Aqui, λ é um parâmetro fenomenológico que mede o grau de violação da conservação padrão. Como consequência, as Eqs.(2.54) são modificadas [8]. Desta forma, considerando o resultado obtido por meio da identidade de Bianchi - isto é, combinando as Eqs.(2.35) e (4.1) -, podemos reescrever as equações de campo generalizadas da seguinte forma:

$$G_{MN} = R_{MN} - \frac{1}{2}g_{MN}R + \kappa g_{MN}R = \kappa T_{MN}, \quad (4.2)$$

onde, tomado novamente $\kappa = 1$, obtemos:

$$R_{MN} + \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) g_{MN}R = T_{MN}. \quad (4.3)$$

Assim, por contração de índices realizada na equação acima, encontramos:

$$\begin{aligned} g^{MN}R_{MN} + \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) g^{MN}g_{MN}R &= g^{MN}T_{MN} \\ \Rightarrow R &= \frac{2T}{D(2\lambda - 1) + 2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Observe que $\lambda \neq \frac{D-2}{2D}$, onde, para o *bulk* pentadimensional, a ser proposto na Seção subsequente, temos $\lambda \neq \frac{3}{10}$. Ainda considerando a Eq.(4.3), podemos escrever:

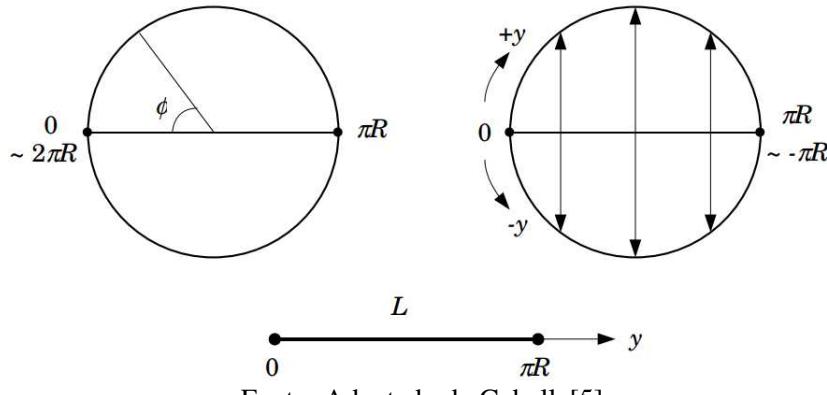
$$\begin{aligned} R_{MN} &= T_{MN} - \lambda g_{MN}R + \frac{1}{2}g_{MN}R \\ &= T_{MN} - \lambda g_{MN} \left(\frac{2T}{D(2\lambda - 1) + 2} \right) + \frac{1}{2}g_{MN} \left(\frac{2T}{D(2\lambda - 1) + 2} \right) \\ &= T_{MN} + \frac{1-2\lambda}{D(2\lambda - 1) + 2} g_{MN}T = T_{MN} + \alpha g_{MN}T, \end{aligned} \quad (4.5)$$

com $\alpha = \frac{1-2\lambda}{D(2\lambda - 1) + 2}$.

4.2 Branas Finas com Fator de Deformação

Iniciemos, pois, com uma breve descrição do modelo de Randall-Sundrum. De acordo com as Refs.[5] e [27], este modelo considera um espaço-tempo anti-de Sitter, no qual a coordenada extra (que denotamos por y) é compactificada em uma variedade S^1/\mathbb{Z}_2 , de acordo com a Fig.(4.1). Consideraremos duas 3-branas² localizadas em $y = 0$ e $y = \pi$. Podemos pensar

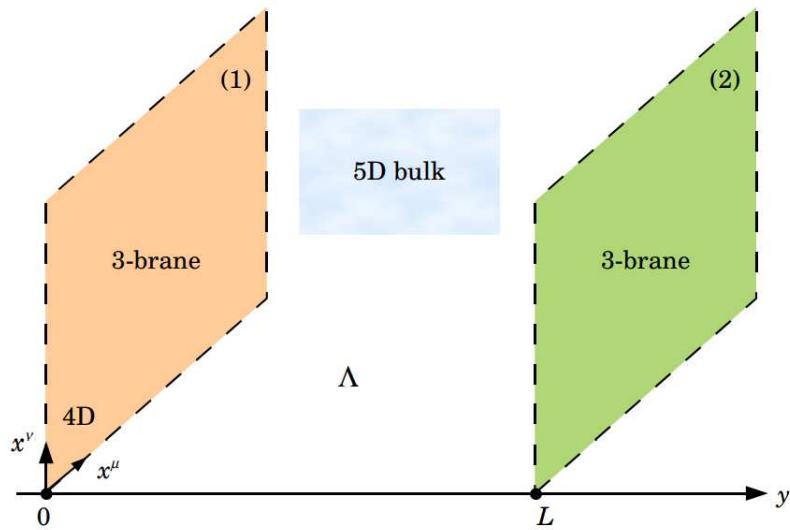
Figura 4.1 – Orbifold S^1/\mathbb{Z}_2 .



Fonte: Adaptado de Gabella[5].

nas branas como sendo as fronteiras do *bulk*, estando nosso Universo situado em $y = \pi$ e a outra brana em $y = 0$, com escalas de energia diferentes (o primeiro na escala *TeV* e o segundo na escala *GeV*), como mostrado na Fig.(4.2).

Figura 4.2 – Setup do modelo RS.



Fonte: Adaptado de Gabella[5].

²Uma p-brana representa uma brana com p dimensões espaciais e uma temporal.

Definição 4.1. Seja (M_5, g_5) uma variedade suave de dimensão 5, munida de uma métrica pseudo-riemanniana g_{MN} de assinatura $(1,4)$, cujo determinante denotamos por:

$$g_5 := \det(g_{MN}). \quad (4.6)$$

Seja R_5 o escalar de Ricci associado à conexão de Levi-Civita de g_5 . Definimos a ação S : $Met(M_5) \mapsto \mathbb{R}$ como sendo

$$S = S[g_{MN}] = S_G + S_{Pl} + S_{vis}, \quad (4.7)$$

em que S_{Pl} representa a ação referente a brana de Planck e S_{vis} refere-se a brana visível, onde:

$$\begin{aligned} S_G &= \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} dy \sqrt{-g_5} \left(\frac{M_*^3}{2} R_5 - \Lambda_5 \right), \\ S_{Pl} &= \int d^4x \sqrt{-g_{Pl}} (\mathcal{L}_{Pl} - V_{Pl}), \\ S_{vis} &= \int d^4x \sqrt{-g_{vis}} (\mathcal{L}_{vis} - V_{vis}). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Aqui, \mathcal{L}_{Pl} e \mathcal{L}_{vis} são as densidades lagrangianas nas branas de Planck e visível, respectivamente, enquanto V_{Pl} e V_{vis} são as tensões nas branas correspondentes. O bulk contém apenas a constante cosmológica Λ_5 , com M_* sendo a escala de massa de Planck pentadimensional.

A geometria do bulk é $[M^{1,3} \times S^1/\mathbb{Z}_2]$ com o seguinte ansatz para a métrica:

$$\begin{aligned} dS^2 &= g_{MN} dx^M dx^N \\ &= e^{-2\sigma(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + b_0^2 dy^2, \end{aligned} \quad (4.9)$$

sendo $M, N = 0, 1, 2, 3, 4$, b_0 o raio de S^1 e y a coordenada angular que vai de 0 a π . O comprimento próprio da dimensão extra é $L_y = b_0\pi$. Neste ponto, precisamos encontrar as equações de campo de Einstein em 5 dimensões e calcular as soluções para $\sigma(y)$ via ansatz (4.9). Como o modelo RS foi inicialmente construído para a gravidade pura, não consideramos, a priori, que as branas possuem matéria. Logo, $\mathcal{L}_{Pl} = \mathcal{L}_{vis} = 0$. Assim, ao realizarmos o mesmo procedimento que fizemos na Seção (2.3) para deduzir as equações de campo de Einstein, encontramos aqui as seguintes variações nas ações (4.8):

$$\begin{aligned} \delta S_G &= \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} dy \delta \left[\sqrt{-g_5} \left(\frac{M_*^3}{2} R_5 - \Lambda_5 \right) \right] \\ &= \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} dy \delta g^{MN} \left[\frac{\Lambda_5}{2} \sqrt{-g_5} g_{MN} + \frac{M_*^3}{2} \sqrt{-g_5} \left(R_{MN} - \frac{R_5}{2} g_{MN} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned}
\delta S_{Pl} &= - \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} dy V_{Pl} \delta \sqrt{-g_{Pl}} \delta(y) \\
&= \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} dy \delta g^{MN} \left(\frac{\sqrt{-g_{Pl}}}{2} g_{\mu\nu}^{Pl} \delta_M^\mu \delta_N^\nu V_{Pl} \right) \delta(y)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

e

$$\begin{aligned}
\delta S_{vis} &= - \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} dy V_{vis} \delta \sqrt{-g_{vis}} \delta(y - \pi) \\
&= \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} dy \delta g^{MN} \left(\frac{\sqrt{-g_{vis}}}{2} g_{\mu\nu}^{vis} \delta_M^\mu \delta_N^\nu V_{vis} \right) \delta(y - \pi)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Por fim, tomado $\delta S = 0$, obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g_5} \left(R_{MN} - \frac{1}{2} R_5 g_{MN} \right) &= - \frac{1}{M_*^3} \left[\Lambda_5 \sqrt{-g_5} g_{MN} + V_{Pl} \sqrt{-g_{Pl}} g_{\mu\nu}^{Pl} \delta_M^\mu \delta_N^\nu \delta(y) \right. \\
&\quad \left. + V_{vis} \sqrt{-g_{vis}} g_{\mu\nu}^{vis} \delta_M^\mu \delta_N^\nu \delta(y - \pi) \right]. \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Esta é a equação de campo de Einstein pentadimensional para o modelo de brana fina, o tensor energia-momento será dado pelo lado direito desta equação dividido por $\sqrt{-g_5}$.

O nosso objetivo agora é resolver essa equação usando o ansatz para a métrica. A solução desta equação fornece $\sigma(y)$ que foi proposta na métrica. Ao fazermos a substituição citada, obtemos duas equações de movimento, uma referente à dimensão extra e outra relacionada com o espaço quadridimensional, a saber:

$$\begin{aligned}
\frac{6[\sigma'(y)]^2}{b_0^2} &= - \frac{\Lambda_5}{M_*^3}, \\
\frac{3\sigma''(y)}{b_0^2} &= \frac{V_{Pl}}{M_*^3 b_0} \delta(y) + \frac{V_{vis}}{M_*^3 b_0} \delta(y - \pi).
\end{aligned} \tag{4.14}$$

A solução para a primeira Eq.(4.14) consistente com a simetria orbifold³ $y \rightarrow -y$ (\mathbb{Z}_2) será:

$$\sigma(y) = b_0 |y| k, \quad k = \sqrt{-\frac{\Lambda_5}{6M_*^3}}. \tag{4.15}$$

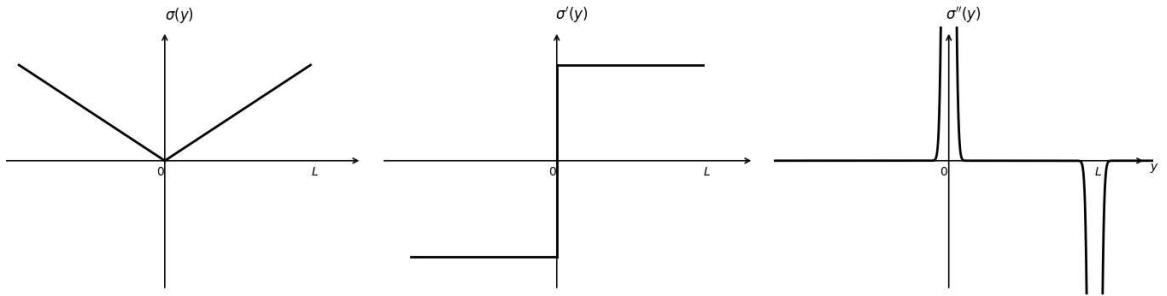
³A simetria orbifold é uma identificação discreta que transforma uma dimensão extra em um intervalo com branas nas extremidades.

Note que:

$$\begin{aligned}\sigma'(y) &= b_0 \sqrt{-\frac{\Lambda_5}{6M_*^3}} \frac{d}{dy} |y| = b_0 \sqrt{-\frac{\Lambda_5}{6M_*^3}} \operatorname{sgn}(y) \\ \Rightarrow \sigma''(y) &= 2b_0 \sqrt{-\frac{\Lambda_5}{6M_*^3}} [\delta(y) - \delta(y - \pi)],\end{aligned}\quad (4.16)$$

onde o aparecimento do termo $-\delta(y - \pi)$ se justifica pela periodicidade da função, ou seja, em torno de 0 é $|y|$ e em torno de π é $|y - 2\pi|$, o que gera a diferença entre duas funções sinal na derivada. A Fig.(4.3) mostra o comportamento de $\sigma(y)$, $\sigma'(y)$ e $\sigma''(y)$.

Figura 4.3 – Comportamento da função $\sigma(y)$ e suas derivadas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, substituindo $\sigma''(y)$ na segunda Eq.(4.14), obtemos:

$$\frac{3}{b_0} \left\{ 2b_0 \sqrt{-\frac{\Lambda_5}{6M_*^3}} [\delta(y) - \delta(y - \pi)] \right\} = \frac{V_{Pl}}{6M_*^3} \delta(y) + \frac{V_{vis}}{6M_*^3} \delta(y - \pi). \quad (4.17)$$

Se tomarmos $\Lambda_5 = -6M_*^3 k^2$ e $V_{Pl} = -V_{vis} = 6M_*^3 k$ a relação acima é válida, de modo que:

$$k = k_1 = -k_2, \quad k_i = \frac{V_i}{6M_*^3}, \quad (4.18)$$

com $i = 1$ representando a brana de Planck e $i = 2$ representando a brana visível. A constante cosmológica efetiva da brana visível quadridimensional é dada por [28]:

$$\Lambda_4^{efe} = \frac{k_5^2}{2} \left(\Lambda_5 + \frac{k_5^2 V_{vis}^2}{6} \right), \quad (4.19)$$

onde k_5 está relacionado à constante gravitacional pentadimensional. Todavia, devido a geometria deformada, a massa na brana visível sofre uma deformação exponencial:

$$m = e^{-kb_0\pi} m_0. \quad (4.20)$$

Assim, a massa do escalar de Higgs é sempre deformada exponencialmente na brana do modelo

padrão:

$$M_{Pl}^2 = \frac{M_*^3}{k} \left(1 - e^{-2kb_0\pi} \right). \quad (4.21)$$

Passemos agora a considerar um Universo homogêneo, isotrópico e plano em larga escala (brana visível). Neste modelo pentadimensional, sua evolução temporal é governada por um fator de escala $R(y, t) = f(y)v(t)$ que converge suavemente para o modelo RS no limite estático apropriado [29]. A ação para esta configuração é dada pela Eq.(4.8) e o elemento de linha para tal modelo cosmológico com deformação é dado por:

$$ds^2 = f^2(y) [-dt^2 + v^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j] + b_0^2 dy^2. \quad (4.22)$$

Ao substituirmos a métrica implícita no elemento de linha acima na Eq.(4.13) e introduzirmos adicionalmente densidades de energia, isto é, ρ nas 3-branas, encontramos como resultado da soma das componentes (tt) e (ii) das equações de Einstein:

$$v(t) = e^{H_0 t}. \quad (4.23)$$

Da componente (yy) , por outro lado, podemos obter a solução para $f(y)$ em termos de k e H_0 consistente com a simetria Z_2 como:

$$f(y) = \frac{H_0}{k} \operatorname{senh}(-kb_0|y| + d_0), \quad (4.24)$$

onde d_0 é uma constante de integração. Portanto, a métrica com deformação, substituindo as expressões para $v(t)$ e $f(y)$ na Eq.(4.22), torna-se:

$$ds^2 = \left(\frac{H_0}{k} \right)^2 \operatorname{senh}^2(-kb_0|y| + d_0) (-dt^2 + e^{2H_0 t} \delta_{ij} dx^i dx^j) + b_0^2 dy^2. \quad (4.25)$$

Esta métrica descreve a inflação das três dimensões espaciais. As condições de contorno das tensões nas duas 3-branas implicam em:

$$\begin{aligned} k_1 &= k \coth(d_0) \\ -k_2 &= k \coth(-kb_0\pi + d_0) \end{aligned} \quad (4.26)$$

que também reproduzem a Eq.(4.18) no limite estático, pois, observe que:

$$\begin{aligned} \lim_{d_0 \rightarrow \infty} k \coth(d_0) &= k \lim_{d_0 \rightarrow \infty} \frac{1+e^{-2d_0}}{1-e^{-2d_0}} = k \Leftrightarrow k_1 = k \\ \text{e } \lim_{d_0 \rightarrow \infty} k \coth(-kb_0\pi + d_0) &= k \lim_{d_0 \rightarrow \infty} \frac{1+e^{-2kb_0\pi-2d_0}}{1-e^{-2kb_0\pi-2d_0}} = k \Leftrightarrow k = -k_2. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Assim, usando as Eqs.(4.26), o comprimento da dimensão extra L_5 pode ser escrito em termos de k_1 , k_2 e k , tendo como expressão resultante:

$$L_5 = b_0 \pi = \frac{1}{2k} \ln \left(\frac{-k_2 - k}{k_1 - k} \frac{k_1 - k}{-k_2 + k} \right). \quad (4.28)$$

Por fim, podemos obter a métrica efetiva quadridimensional da métrica pentadimensional a partir de uma transformação de coordenadas apropriada, tal que:

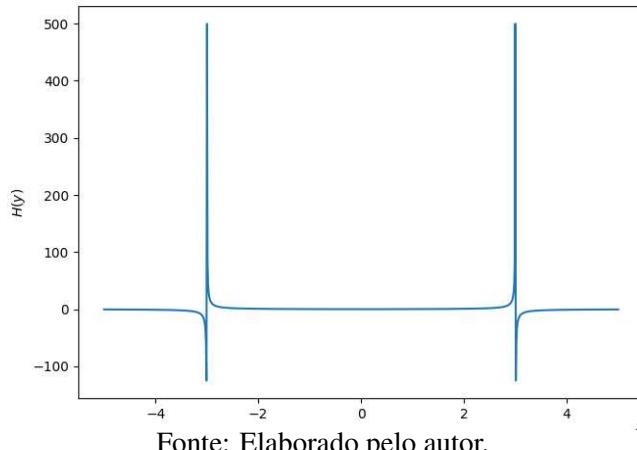
$$dS_4^2 = -dt^2 + e^{2H(y)t} \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (4.29)$$

onde o parâmetro de Hubble é dado agora por:

$$H(y) = k \operatorname{cosech}(-kb_0|y| + d_0). \quad (4.30)$$

Logo, nos limites ($y = 0$ e $y = \pi$) dos pontos fixos, os valores do parâmetro de Hubble são $H(0) = \sqrt{k_1^2 - k^2}$ e $H(\pi) = \sqrt{k_2^2 - k^2}$. Veja o comportamento de $H(y)$ na Fig.(4.4). Em outras palavras, na brana do modelo padrão, quando nosso Universo está evoluindo com o tempo, seu parâmetro de Hubble diferente de zero é expresso como um ajuste fino entre a constante cosmológica global e a tensão da brana visível.

Figura 4.4 – Parâmetro de Hubble em função da dimensão extra.



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.2.1 Aplicação na Gravidade de Rastall: Caso Estático

Com o formalismo do modelo de Randall-Sundrum bem estabelecido, passamos agora a investigar um modelo formulado diretamente a partir das equações de campo modificadas. Em particular, consideramos um cenário de brana fina imersa em um *bulk* pentadimensional, no qual a geometria deformada é determinada pela dinâmica gravitacional de Rastall, e não

mais pelas equações de Einstein usuais, como trabalhadas no início desta Seção.

Utilizando-nos do tensor energia-momento representado na Eq.(4.13), relembrando que as condições de contorno são $g_{\mu\nu}^{Pl}(x^\mu) \equiv g_{MN}(x^\mu, y=0)$ e $g_{\mu\nu}^{vis}(x^\mu) \equiv g_{MN}(x^\mu, y=\pi)$, podemos resolver a Eq.(4.3). Ao realizarmos as devidas substituições, a partir da métrica (4.9), encontramos as seguintes expressões:

$$(yy) : (6 - 20\lambda)\sigma'^2(y) + 8\lambda\sigma''(y) = -\frac{\Lambda_5 b_0^2}{M_*^3} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} (\mu\nu) : & (6 - 20\lambda)\sigma'^2(y) + 8\lambda\sigma''(y) - 3\sigma''(y) \\ & = -\frac{1}{M_*^3} (\Lambda_5 b_0^2 + V_{Pl} b_0 \delta(y) + V_{vis} b_0 \delta(y - \pi)). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Agora vamos calcular as possíveis soluções para a Eq.(4.31). Inicialmente, façamos $k^2 = -\frac{\Lambda_5}{6M_*^3}$, de modo que esta equação tome a forma:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{10}{3}\lambda\right)\sigma'^2(y) + \frac{4}{3}\lambda\sigma''(y) = k^2 b_0^2 \\ & \Rightarrow \int \frac{du}{3k^2 b_0^2 - (3 - 10\lambda)u^2} = \int \frac{dy}{4\lambda}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

em que $\sigma'(y) = u$. Seja $A = 3 - 10\lambda$. Note que $A > 0 \Rightarrow \lambda < \frac{3}{10}$ e $A < 0 \Rightarrow \lambda > \frac{3}{10}$ (lembre-se que $\lambda \neq \frac{3}{10}$ em decorrência da Eq.(4.4)). Assim, ao resolvemos a integral acima usando método de decomposição em frações parciais para os dois casos distintos, encontramos a mesma solução explícita, a saber:

$$\sigma(y) = \frac{4\lambda}{(3 - 10\lambda)} \ln \left\{ \cosh \left[\frac{\sqrt{3(3 - 10\lambda)}}{4\lambda} kb_0 y + c_0 \right] \right\}, \quad (4.34)$$

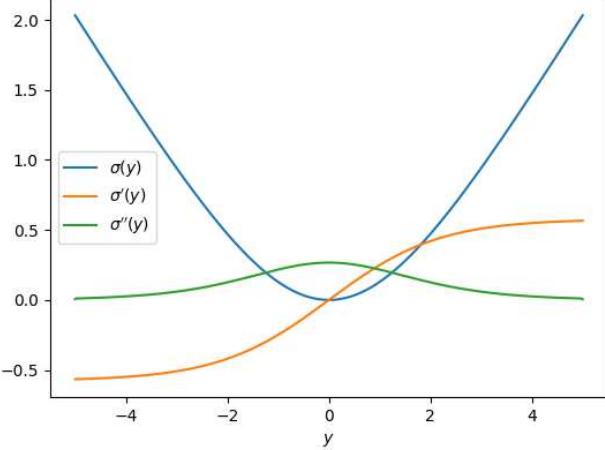
com c_0 sendo uma constante de integração. A Fig.(4.5) mostra o comportamento desta função e suas respectivas primeira e segunda derivadas. Contudo, observe que $3 - 10\lambda > 0 \Rightarrow \lambda < 0,3$ para manter a raiz real.

O elemento de linha (4.9) agora toma a seguinte forma:

$$dS^2 = \cosh^2 \left[\frac{\sqrt{3(3 - 10\lambda)}}{4\lambda} kb_0 y + c_0 \right] \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + b_0^2 dy^2, \quad (4.35)$$

com $\gamma = \frac{8\lambda}{10\lambda - 3}$. Ao analisarmos o limite $\lambda \rightarrow 0$ na Eq.(4.34), encontramos a mesma solução apresentada na Eq.(4.15), isto é, voltamos ao modelo de Randall-Sundrum, sem o termo de Rastall e com isso todos os resultados já estabelecidos.

Figura 4.5 – Comportamento da função $\sigma(y)$ e suas derivadas para $\lambda = 0, 2$, $k = 1$ e $c_0 = 0$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.2.2 Aplicação na Gravidade de Rastall: Caso Cosmológico

Novamente, considere um Universo homogêneo e isotrópico na brana visível. Considere também o elemento de linha expresso na Eq.(4.22). A evolução temporal é governada pelo fator de escala $R(y, t) = f(y)v(t)$ e esperamos que o mesmo converja suavemente para o modelo RS com o termo de Rastall no limite estático apropriado. Tome $f(y) = e^{-A(y)}$. Substituindo a métrica, implícita no elemento de linha citado, na Eq.(4.3), obtemos as expressões:

$$(tt) : e^{-2A(y)} \frac{(20\lambda - 6)A'^2(y) + (3 - 8\lambda)A''(y)}{b_0^2} + \frac{(3 - 6\lambda)\dot{v}^2(t) - 6\lambda v(t)\ddot{v}(t)}{v^2(t)} \\ = -\frac{1}{M_*^3} \left[\Lambda_5 e^{-2A(y)} + \frac{V_{Pl} e^{-6A(0)} e^{4A(y)}}{b_0} \delta(y) + \frac{V_{vis} e^{-6A(\pi)} e^{4A(y)}}{b_0} \delta(y - \pi) \right]; \quad (4.36)$$

$$(ii) : (6\lambda - 1)\dot{v}^2(t) + \frac{e^{-2A(y)}v^2(t)[(6 - 20\lambda)A'^2(y) + (8\lambda - 3)A''(y)]}{b_0^2} + 2(3\lambda - 1)v(t)\ddot{v}(t) \\ = -\frac{v^2(t)}{M_*^3} \left[\Lambda_5 e^{-2A(y)} + \frac{V_{Pl} e^{-6A(0)} e^{4A(y)}}{b_0} \delta(y) + \frac{V_{vis} e^{-6A(\pi)} e^{4A(y)}}{b_0} \delta(y - \pi) \right]; \quad (4.37)$$

$$(yy) : \frac{2 \left[(3 - 6\lambda)f'^2(y) - 4\lambda f(y)f''(y) + \frac{3(2\lambda - 1)b_0^2(\dot{v}^2(2) + v(t)\ddot{v}(t))}{2v^2(t)} \right]}{f^2(y)} = -\frac{\Lambda_5 b_0^2}{M_*^3}. \quad (4.38)$$

Como resultado da soma das componentes (tt) e (ii), temos que:

$$v(t) = e^{H_0 t}, \quad (4.39)$$

onde $H_0 = \dot{v}(t_0)/v(t_0)$ é a constante de Hubble (a mesma expressão apresentada na Seção (3.2) e na Eq.(4.23)). Sempre teremos esta forma para $v(t)$, independentemente da quantidade de dimensões consideradas no modelo [29]. Portanto, substituindo $v(t)$ e suas respectivas derivadas (primeira e segunda) na Eq.(4.38) e rearanjando os termos, encontramos:

$$(1 - 2\lambda)f'^2 - \frac{4}{3}\lambda ff'' - k^2 b_0^2 f^2 = (1 - 2\lambda)b_0^2 H_0^2. \quad (4.40)$$

Esta equação diferencial tem como uma possível solução, consistente com a simetria \mathbb{Z}_2 , a expressão:

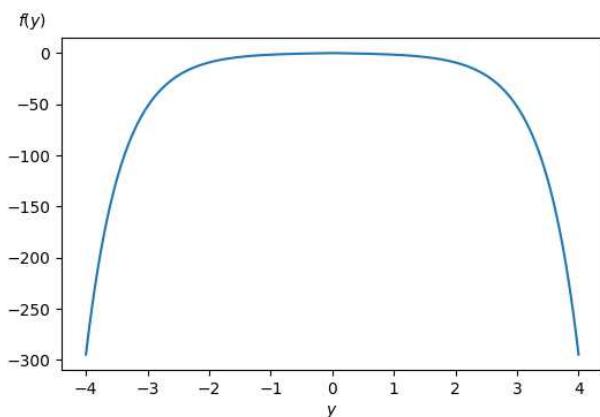
$$f(y) = \sqrt{\frac{3 - 10\lambda}{3}} \frac{H_0}{k} \operatorname{senh} \left(-\sqrt{\frac{3}{3 - 10\lambda}} kb_0 |y| + d_0 \right), \quad (4.41)$$

onde d_0 é uma constante de integração e, para $3 - 10\lambda < 0$, $f(y)$ passa a ser uma função periódica desde que c_0 seja ajustado de modo a não cancelar a oscilação. A Fig.(4.6) nos fornece o comportamento de $f(y)$. Observe que no limite $\lambda \rightarrow 0$ reobtemos os mesmos resultados encontrados sem levar em conta o termo de Rastall, ou seja, voltamos à Eq.(4.24). Também podemos calcular os mesmos parâmetros cosmológicos de forma semelhante ao que fizemos na Seção anterior. Portanto, o elemento de linha com deformação, substituindo as novas funções para $v(t)$ e $f(y)$ na Eq.(4.22), torna-se:

$$dS^2 = \frac{(3 - 10\lambda)H_0^2}{3k^2} \operatorname{senh}^2 \left(-\sqrt{\frac{3}{3 - 10\lambda}} kb_0 |y| + c_0 \right) [-dt^2 + e^{2H_0 t} \delta_{ij} dx^i dx^j] + b_0^2 dy^2. \quad (4.42)$$

A métrica implícita neste elemento de linha descreve a inflação das três dimensões espaciais.

Figura 4.6 – Comportamento da função $f(y)$ para $\lambda = 0, 2$, $k = 1$ e $c_0 = 0$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.3 Branas Espessas com Fator de Deformação

Branas espessas surgem como uma generalização natural dos modelos de branas finas. Embora a aproximação do tipo delta de Dirac seja útil do ponto de vista fenomenológico, ela conduz a singularidades geométricas e impõe condições de contorno que podem limitar a consistência dinâmica do modelo. Em contraste, nas abordagens com branas espessas, a brana é descrita como uma região estendida do espaço-tempo, geralmente gerada por campos escalares no *bulk*, o que permite uma descrição regular da geometria e um controle mais refinado da dinâmica gravitacional.

Do ponto de vista físico, branas espessas oferecem um cenário mais realista para a localização de campos e para a análise da estabilidade gravitacional, uma vez que a espessura da brana pode influenciar diretamente a forma do fator de deformação e o espectro de modos gravitacionais [6]. Além disso, esses modelos possibilitam o estudo de mecanismos de confinamento suaves, evitando descontinuidades abruptas e permitindo a formulação de equações de movimento bem definidas em todo o *bulk*.

No contexto cosmológico, branas espessas ampliam o espaço de soluções possíveis ao permitir dependências temporais tanto no fator de escala quanto nos campos que compõem a brana, levando a cenários cosmológicos ricos e menos restritivos do que aqueles obtidos em modelos de branas finas.

4.3.1 Caso Estático

Agora, assumimos o elemento de linha como sendo:

$$dS^2 = f^2(y) (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2), \quad (4.43)$$

em que $f(y) = e^{A(y)}$ é o fator de deformação que está diretamente relacionado com a dimensão extra. Seguindo os passos da Ref.[30], considere o campo escalar ϕ , com o tensor energia-momento dado por:

$$T_{MN} = \partial_M \phi \partial_N \phi - g_{MN} \left[\frac{1}{2} \partial^P \phi \partial_P \phi + V(\phi) \right], \quad (4.44)$$

como a brana é maximamente simétrica, ϕ pode ser assumido como $\phi = \phi(y)$. Dessa maneira, substituindo a métrica (4.43) na Eq.(4.3), obtemos as componentes da equação de campo:

$$\begin{aligned} (tt) : \quad & 3(-1 + 4\lambda)A'^2(y) + (-3 + 8\lambda)A''(y) = \frac{1}{2}\phi'^2(y) + e^{2A(y)}V(\phi), \\ (ii) : \quad & (3 - 12\lambda)A'^2(y) + (3 - 8\lambda)A''(y) = -\frac{1}{2}\phi'^2(y) - e^{2A(y)}V(\phi), \\ (yy) : \quad & (6 - 12\lambda)A'^2(y) - 8\lambda A''(y) = \frac{1}{2}\phi'^2(y) - e^{2A(y)}V(\phi), \end{aligned} \quad (4.45)$$

onde, somando a componente (tt) com a (yy) , encontramos:

$$3A'^2(y) - 3A''(y) - \phi'^2(y) = 0. \quad (4.46)$$

Por outro lado, realizando a subtração da componente (tt) com a componente (yy) , obtemos:

$$V(\phi(y)) = -\frac{e^{-2A(y)}}{2} [3(3 - 8\lambda)A'^2(y) + (3 - 16\lambda)A''(y)]. \quad (4.47)$$

Por fim, calculando explicitamente a hipótese (4.1), ficamos com a seguinte relação:

$$-24\lambda A'^3 + 8\lambda A''' + 4A'2\lambda A'' + \phi'\phi'' - A'\phi'^2 - e^{2A}\phi'V' = 0. \quad (4.48)$$

Como solução da equação diferencial (4.46), encontramos ($\forall \beta \in \mathbb{R}$):

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 y^2 + 1}} \quad (4.49)$$

e

$$\phi(y) = \sqrt{3} \arctan(\beta y). \quad (4.50)$$

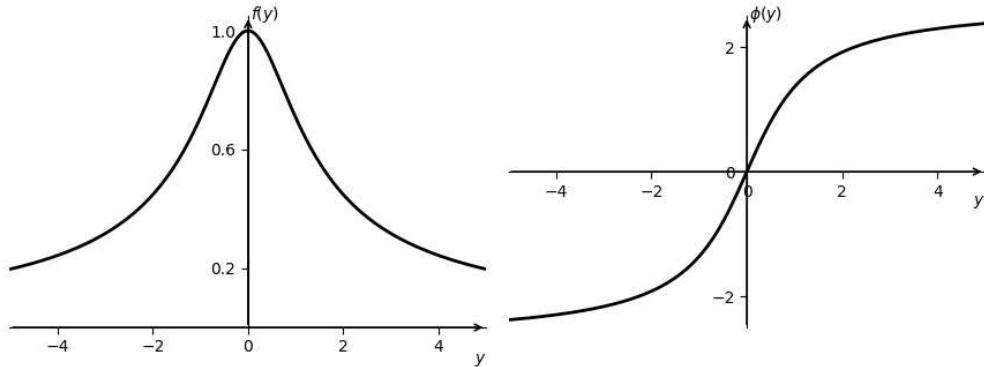
A Fig.(4.7) nos fornece o comportamento do fator de deformação f e do campo escalar ϕ como funções da dimensão extra y .

O elemento de linha (4.43) torna-se:

$$dS^2 = \frac{1}{(\beta^2 y^2 + 1)} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2). \quad (4.51)$$

Observe que, como a Eq.(4.46) é a mesma que do modelo de brana na TRG [6], a não conservação do campo escalar tem efeito apenas no potencial. Assim sendo, ao realizarmos as devidas substituições no potencial (4.47) obtemos o seguinte resultado:

Figura 4.7 – Fator de deformação $f(y)$ e o campo escalar $\phi(y)$ no modelo de brana plana.

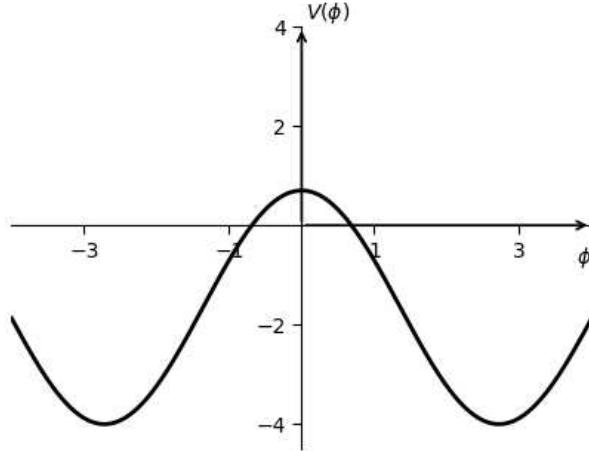


Fonte: Elaborado pelo autor.

$$V(\phi) = \frac{\beta^2}{4} \left[(15 - 56\lambda) \cos\left(\frac{2\phi}{\sqrt{3}}\right) - 3(3 - 8\lambda) \right], \quad (4.52)$$

cujo comportamento está denotado na Fig.(4.8).

Figura 4.8 – Potencial V em função do campo escalar ϕ no modelo de brana plana.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Afirmamos, sem demonstração, que tomar o limite $\lambda \rightarrow 0$ nas soluções aqui encontradas, nos leva aos mesmos resultados já bem estabelecidos pela TRG. Ademais, para o modelo FRLW, é possível verificar que este modelo de gravidade é equivalente ao que obtemos no MCP [31], pois, acreditamos que ele seja capaz de descrever um cenário cosmológico completo desde a fase inflacionária inicial até a fase atual de expansão acelerada, passando pela era dominada por matéria, o que deve ser alcançado mediante escolhas apropriadas do parâmetro de Rastall.

4.3.2 Caso Cosmológico

Continuando nossa investigação sobre modelos de branas planas espessas, falta-nos implementar o fator de escala no elemento de linha (4.43). Vejamos, portanto, como as equações se modificam ao permanescermos com $f(y) = e^{A(y)}$ e $v(t) = e^{H_0 t}$, porém, assumindo o seguinte elemento de linha:

$$dS^2 = f^2(y) [-dt^2 + v^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j + dy^2]. \quad (4.53)$$

Novamente, considere o campo escalar com o tensor energia momento dado pela Eq.(4.44). Substituindo a métrica implícita no elemento de linha acima na Eq.(4.3), obtemos as componentes da equação de campo modificadas da forma:

$$\begin{aligned} (tt) : \quad & 3H_0^2(1-4\lambda) + 3(-1+4\lambda)A'^2(y) + (-3+8\lambda)A''(y) = \frac{1}{2}\phi'^2(y) + e^{2A(y)}V(\phi), \\ (ii) : \quad & e^{2H_0 t} [3H_0^2(-1+4\lambda) + (3-12\lambda)A'^2(y) + (3-8\lambda)A''(y)] = -\frac{1}{2}\phi'^2(y) - e^{2A(y)}V(\phi), \\ (yy) : \quad & 6H_0^2(-1+2\lambda) + (6-12\lambda)A'^2(y) - 8\lambda A''(y) = \frac{1}{2}\phi'^2(y) - e^{2A(y)}V(\phi), \end{aligned} \quad (4.54)$$

onde a soma $(tt) + (yy)$ gera a seguinte expressão:

$$3A'^2(y) - 3A''(y) - \phi'^2(y) - 3H_0^2 = 0. \quad (4.55)$$

Por outro lado, realizando a subtração da componente (tt) com a componente (yy) , encontramos

$$V(\phi(y)) = -\frac{e^{-2A(y)}}{2} [3(3-8\lambda)A'^2(y) + (3-16\lambda)A''(y) - 3H_0^2(3-8\lambda)]. \quad (4.56)$$

Como solução da equação diferencial (4.55), encontramos:

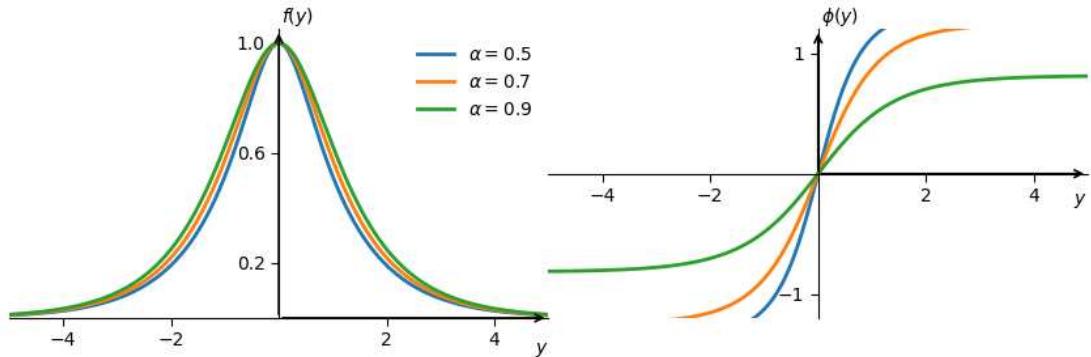
$$f(y) = \operatorname{sech}^\alpha(\beta y) \quad (4.57)$$

e

$$\phi(y) = \phi_0 \operatorname{arcsen}[\tanh(\beta y)], \quad (4.58)$$

onde $\phi_0 = \sqrt{3\alpha(\alpha-1)}$, $\beta = H_0/\alpha$ e $0 < \alpha < 1$. Estas relações são as mesmas encontradas sem levar em conta o fator de Rastall quando consideramos branas do tipo de Sitter, como revisado na Ref.[6]. Veja a Fig.(4.9) para uma melhor compreensão a respeito do comportamento do fator de deformação f e do campo escalar ϕ enquanto funções da dimensão extra y .

Figura 4.9 – Forma do fator $f(y)$ e do campo escalar $\phi(y)$ para o modelo do tipo de Sitter, com parâmetros $\alpha = 0,5, 0,7$ e $0,9$, respectivamente.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O elemento de linha (4.53) torna-se, por conseguinte:

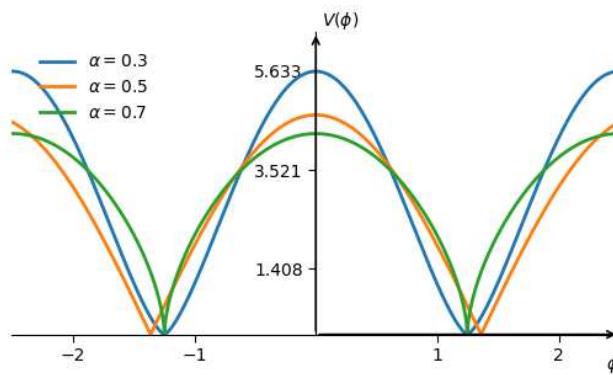
$$dS^2 = \operatorname{sech}^{2\alpha}(\beta y) [-dt^2 + e^{2H_0 t} \delta_{ij} dx^i dx^j + dy^2]. \quad (4.59)$$

O efeito da não conservação do campo escalar no potencial sugere que:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \beta^2 \alpha [3 + 3(3 - 8\lambda)\alpha - 16\lambda] \cos^{2(1-\alpha)} \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right), \quad (4.60)$$

cujo comportamento está denotado na Fig.(4.10) para $\alpha = 0,3, 0,5$ e $0,7$.

Figura 4.10 – Forma do potencial V em função do campo escalar ϕ para o modelo do tipo de Sitter, com parâmetros $\alpha = 0,3, 0,5$ e $0,7$, respectivamente.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A inflação cosmológica estudada na Seção anterior pode ser (e usualmente é) modelada por meio de um campo escalar efetivo, denominado ínflaton, cuja dinâmica domina o conteúdo energético do Universo primordial e conduz a uma fase de expansão acelerada exponencialmente. Optamos trabalhar com o campo escalar para justificativa de que o mesmo pode

gerar, de maneira homogênea e isotrópica, uma espécie de pressão efetiva negativa suficientemente grande para sustentar a inflação, preservando, assim, a simetria espacial do espaço-tempo tipo FLRW.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, investigamos cenários cosmológicos em modelos de mundos brana através da gravidade de Rastall, explorando tanto branas finas quanto branas espessas imersas em um *bulk* pentadimensional. A motivação central consistiu em analisar como a modificação introduzida pela hipótese de Rastall (caracterizada pela não conservação covariante do tensor energia-momento) pode impactar a dinâmica gravitacional e cosmológica em espaços-tempos com dimensões extras, bem como oferecer mecanismos alternativos para a aceleração do Universo. Os resultados expostos aqui mostram que a gravidade de Rastall fornece um arcabouço consistente para o estudo cosmológico em mundos brana.

Inicialmente, foram apresentados os fundamentos matemáticos e físicos da TRG, seguidos por uma revisão da Cosmologia Relativística Padrão, com ênfase no modelo de FLRW e nos problemas clássicos da Cosmologia, como os problemas do horizonte e da planicidade. Essa estrutura permitiu contextualizar a necessidade de extensões teóricas capazes de descrever regimes de altas energias e o comportamento do Universo primordial, abrindo espaço para a consideração de teorias gravitacionais modificadas e modelos com dimensões extras.

No contexto dos mundos brana, estudamos primeiramente modelos do tipo RS, destacando o papel do fator de deformação da métrica na resolução do problema da hierarquia e na modificação das equações cosmológicas efetivas na brana. Em seguida, incorporamos a gravidade de Rastall a esses cenários, obtendo equações de campo modificadas e investigando suas consequências físicas tanto no regime estático, quanto no regime cosmológico. Observamos que o parâmetro λ introduz correções relevantes na geometria do *bulk* e na dinâmica efetiva da brana, afetando diretamente o comportamento do parâmetro de Hubble e a evolução do fator de escala.

Estendemos a análise para modelos de branas espessas, nos quais a espessura da brana é gerada dinamicamente por campos escalares acoplados à gravidade. Nesse contexto, estudamos soluções em espaços-tempos de Minkowski e de Sitter, evidenciando como a não conservação do tensor energia-momento influencia a forma do potencial escalar e o perfil do fator de deformação. Em particular, no caso cosmológico, verificamos que a presença da gravidade de Rastall permite-nos emergir naturalmente a uma expansão exponencial do fator de escala, característica típica de cenários inflacionários.

Os resultados obtidos indicam que a gravidade de Rastall pode atuar como um mecanismo efetivo para a aceleração cósmica em modelos de mundos brana, mesmo na ausência de uma componente explícita de energia escura. Além disso, a modificação da conservação padrão da matéria conduz a novos ajustes entre os parâmetros do modelo, como a constante cosmológica do *bulk*, a tensão da brana e o parâmetro fenomenológico de Rastall λ , ampliando o espaço de soluções cosmologicamente viáveis.

Por fim, este trabalho reforça a relevância de teorias gravitacionais modificadas em cenários com dimensões extras como alternativas consistentes para a cosmologia moderna. Como perspectivas futuras, destacamos o estudo da estabilidade das soluções obtidas, a análise de perturbações cosmológicas nesses modelos e possíveis vínculos observacionais, bem como a investigação de extensões da gravidade de Rastall em contextos mais gerais, como teorias efetivas do tipo $f(R, T)$ ou cenários com múltiplas branas. Esses desenvolvimentos podem contribuir para uma compreensão mais profunda da dinâmica gravitacional em regimes de altas energias e do papel das dimensões extras na evolução do Universo.

REFERÊNCIAS

- [1] ACEVEDO, O.; MORAIS, E. D.; PIMENTEL, B. O princípio de equivalência. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 41, n. 3, p. e20180329, 2019.
- [2] FRIEDMAN, A. Über die krümmung des raumes. *Zeitschrift für Physik*, Springer-Verlag Berlin/Heidelberg, v. 10, n. 1, p. 377–386, 1922.
- [3] HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the national academy of sciences*, National Acad Sciences, v. 15, n. 3, p. 168–173, 1929.
- [4] KOBAYASHI, S.; KOYAMA, K.; SODA, J. Thick brane worlds and their stability. *Physical Review D*, APS, v. 65, n. 6, p. 064014, 2002.
- [5] GABELLA, M. The randall-sundrum model. www-thphys.physics.ox.ac.uk/people/MaximeGabella/rs.pdf, v. 6, n. 9, 2006.
- [6] LIU, Y.-X. Introduction to extra dimensions and thick braneworlds. *Memorial volume for Yi-shi Duan*, World Scientific, p. 211–275, 2018.
- [7] OLIVEIRA JUNIOR, R. I. *Modelos de Randall Sundrum e estabilização do raio da dimensão extra*. 2017. 54 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017.
- [8] RASTALL, P. Generalization of the einstein theory. *Physical Review D*, APS, v. 6, n. 12, p. 3357, 1972.
- [9] CALCAGNI, G. Fractal universe and quantum gravity. *Physical Review Letters*, APS, v. 104, n. 25, p. 251301, 2010.
- [10] CARLIP, S. Spontaneous dimensional reduction in quantum gravity. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 25, n. 12, p. 1643003, 2016.
- [11] WALD, R. M. *General relativity*. [S. I.]: University of Chicago Press, 1984.
- [12] SANTOS, J. C. *Introdução à topologia*. Portugal: Universidade do Porto, 2017.
- [13] FREIRE, N.; VEIGA, M. F. Espaços métricos e espaços topológicos. 2010.
- [14] HENRIQUES, A. B. Teoria da relatividade geral: uma introdução. *Instituto Superior Técnico*, v. 11, 2009.
- [15] NAKAHARA, M. *Geometry, topology and physics*. [S.I.]: CRC Press, 2018.
- [16] COELHO, F. U. *Um curso de álgebra linear*. [S.I.]: Edusp, 2020.

- [17] SÁNCHEZ, E. *Cálculo tensorial*. Rio de Janeiro: Interciênciac, 2011.
- [18] SILVA, P. M. L. T. d. *Cosmologia de branas e teorias modificadas da gravitação em dimensões arbitrárias*. Tese (Doutorado em Física) - Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2017.
- [19] SCHUTZ, BA *first course in general relativity*. [S.I.]: Cambridge university Press, 2022.
- [20] SANTOS, R. F.; FARIA JUNIOR, A. C.A.; ULHOA, S CHidrodinâmica relativística: a representação de diversos fluidos em relatividade geral. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 42, p. e20190003, 2019.
- [21] BAUMANN, D. *Cosmology*. [S.I.]: Cambridge University Press, 2022.
- [22] RINDLER, W. *Relativity: special, general, and cosmological*. [S.I.]: Oxford University Press, 2006.
- [23] AGHANIM, N. et al. Planck 2018 results-vi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, EDP sciences, v. 641, p. A6, 2020.
- [24] KOMATSU, E. et al. Seven-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap1) observations: Cosmological interpretation. arxiv/1001.4538 v3. *Physics Instrumentation and Detectors*, 2010.
- [25] GUTH, A.; INFLACIONÁRIO, O. U. um relato irresistível de uma das maiores ideias cosmológicas do século. *Translation by Ricardo Inojosa*. Rio de Janeiro: Campus, 1997.
- [26] POPOV, A.; RUBIN, S. Spontaneous Brane Formation. *Symmetry*, v. 17, n. 252. 2025.
- [27] RANDALL, L.; SUNDRE, R. Large mass hierarchy from a small extra dimension. *Physical review letters*, APS, v. 83, n. 17, p. 3370, 1999.
- [28] SHIROMIZU, T.; MAEDA, K.-i.; SASAKI, M. The Einstein equations on the 3-brane world. *Physical Review D*, APS, v. 62, n. 2, p. 024012, 2000.
- [29] BANERJEE, N.; LAHIRI, S.; SENGUPTA, S. Cosmology and mass hierarchy in multiply warped braneworld scenario. *arXiv:1106.1735v1*, 2011.
- [30] ZHONG, Y.; YANG, K.; LIU, Y.-X. Thick brane in rastall gravity. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2022, n. 9, p. 1–18, 2022.
- [31] FABRIS, J. C. et al. Rastall cosmology. *International Journal of Modern Physics: Conference Series*. [S.I.], 2012. v. 18, p. 67–76.