



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE FÍSICA**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**GUSTAVO LEITE CHAVES**

**TOPOLOGIA CÓSMICA**

**FORTALEZA**

**2026**

GUSTAVO LEITE CHAVES

TOPOLOGIA CÓSMICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Saulo Davi Soares e Reis

Coorientador: Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa

FORTALEZA

2026

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

C438t Chaves, Gustavo Leite.  
Topologia Cósmica / Gustavo Leite Chaves. – 2026.  
42 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Curso de Física, Fortaleza, 2026.

Orientação: Prof. Dr. Saulo Davi Soares e Reis.

Coorientação: Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa.

1. Variedades. 2. Topologia . 3. Geometria. 4. Modelos Cosmológicos. I. Título.

CDD 530

---

GUSTAVO LEITE CHAVES

TOPOLOGIA CÓSMICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de Bacharel em Física.

Aprovada em: 9 de janeiro de 2026

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Saulo Davi Soares e Reis (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa  
Bessa (Coorientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Aos meus pais e minha esposa.

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais, Raimundo Nonato Chaves Neto e Racquel Cristina Leite Chaves, que nunca mediram esforços para investir na minha educação e sempre reconheceram a minha dedicação aos estudos.

À minha esposa, Victoria Giulia Alexandre Chaves, cuja companhia está acima de qualquer outra.

Ao Professor Gregório Pacelli Feitosa Bessa, que durante dois anos e meio de Iniciação Científica me deu a liberdade e orientação necessárias para que eu explorasse meus interesses.

Ao Professor Saulo Davi Soares e Reis, cujas aulas e conversas incitaram meu amadurecimento como estudante.

Aos Professores do Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará, responsáveis diretos pela minha formação, em especial ao Professor Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante por também fazer parte da Banca Examinadora.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo financiamento através do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC).

”Não sei me expressar linearmente, por isso vou sacrificar a clareza em função da vivacidade.”

(Perelman)

## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo discutir as estruturas geométricas e topológicas de modelos cosmológicos. Começamos com uma revisão de variedades diferenciáveis partindo do conceito de variedades topológicas e chegando às ferramentas fundamentais da geometria Riemanniana. Após isso, apresentamos uma classificação de espaços homogêneos tridimensionais provida por Thurston, em 1982, dando enfoque aos espaços de curvatura constante e seus respectivos modelos de poliedro fundamental. Seguimos, então, para a discussão sobre as implicações do princípio cosmológico na estrutura geométrica do modelo FLRW, juntamente com suas divergências em termos dos níveis de anisotropia apresentados no CMB. E finalmente, abandonamos as hipóteses responsáveis pelo modelo FLRW para listar as possíveis topologias da secção espacial do espaço-tempo. A importância deste trabalho se dá tanto pela riqueza nas estruturas por trás de modelos cosmológicos, quanto pela relevância de um tratamento mais rigoroso na nossa análise da topologia do Universo.

**Palavras-chave:** variedades; topologia; geometria; modelos cosmológicos.

## ABSTRACT

In this work we intend to discuss the topological and geometric structures of cosmological models. We begin with a review of differentiable manifolds, from the concept of topological manifolds to fundamental tools in Riemannian geometry. After that we present a classification of three-dimensional homogeneous spaces provided by Thurston, in 1982, focusing on constant curvature spaces and their respective fundamental polyhedra models. We also discuss the implications of the cosmological principle on the geometric structure of the FLRW model along with its divergences in terms of the anisotropy levels given by the CMB. Finally, we abandon the hypotheses responsible for the FLRW model in order to list the possible topologies of the spacial section of the spacetime. The importance of this work lies both on the rich structure behind cosmological models as well as on the value of a more rigorous treatment regarding our analysis on the topology of the Universe.

**Keywords:** manifolds; topology; geometry; cosmological models.

## LISTA DE FIGURAS

<p>Figura 1 – Classes de homotopia. Esquerda: o plano Euclideano. Qualquer <i>loop</i> pode ser reduzido a um ponto. O grupo fundamental se reduz à identidade. Centro: o plano com um buraco. <math>\gamma</math> não é homotópica a <math>\gamma'</math>. Cada classe de homotopia <math>h_n</math> está associada a um inteiro <math>n</math>: <math>\gamma \in h_n</math> se a curva envolve o buraco <math>n</math> vezes em direção horária (<math>n &gt; 0</math>), <math>n &lt; 0</math> em direção anti-horária e <math>n = 0</math> se não envolve o buraco. Assim, o grupo fundamental é o grupo cíclico infinito de inteiros <math>\mathbb{Z}</math>. Direita: um <i>torus</i> <math>S^1 \times S^1</math>. <i>Loops</i> podem envolver <math>m</math> vezes o buraco central e <math>n</math> vezes o próprio <i>torus</i>. Logo, o grupo fundamental consiste de pares <math>(m, n)</math> de inteiros com adição <math>(m, n) + (p, q) = (m + p, n + q)</math>. Em outras palavras, é isomorfo a <math>\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}</math>. . . . .</p>	17
<p>Figura 2 – As 8 geometrias de Thurston. . . . .</p>	22
<p>Figura 3 – Os 6 espaços orientados, fechados e localmente Euclidianos. . . . .</p>	26
<p>Figura 4 – Grupo diedro <math>D_5</math>. O pentágono <math>J_1 \dots J_5</math> é invariante por rotações de ângulo <math>2\pi/5</math> em torno da linha <math>L</math>. . . . .</p>	27
<p>Figura 5 – Grupos poliedro. Esquerda: Grupo tetraedro. Centro: Grupo octaedro. Direita: Grupo icosaedro. . . . .</p>	27
<p>Figura 6 – O espaço esférico de Poincaré e o espaço hiperbólico fechado de Seifert-Weber são obtidos ao se identificar faces opostas de um dodecaedro regular após rotações de <math>\pi/5</math> e <math>3\pi/5</math>, respectivamente. . . . .</p>	28
<p>Figura 7 – O poliedro fundamental da topologia de Löbell é feito de 8 14-edros colados juntos. Todos os ângulos na figura são retos em <math>H^3</math>. . . . .</p>	28
<p>Figura 8 – O espaço hiperbólico fechado de Best. As identificações par-a-par são <math>ADI \leftrightarrow BGC, ICA \leftrightarrow ABC, EFL \leftrightarrow DIK, DEL \leftrightarrow KLD, GFB \leftrightarrow HJK, FGJ \leftrightarrow GJH, ABE \leftrightarrow LJF, FEB \leftrightarrow CGH, AED \leftrightarrow KIH, JKL \leftrightarrow CHI</math> (onde a ordem das vértice nas faces é mantida na identificação). . . . .</p>	29
<p>Figura 9 – O espaço hiperbólico fechado de Weeks. A identificação par-a-par das faces é: <math>ABTCD \leftrightarrow HLDAO, SEFBA \leftrightarrow FMPJE, RHIJE \leftrightarrow IKQLH, FMXTB \leftrightarrow UKZVN, WNUYC \leftrightarrow IJPZK, CYQLD \leftrightarrow MXWNV, CTXW \leftrightarrow HOGR, KQYU \leftrightarrow ERGS, MPZV \leftrightarrow ASGO</math>. . . . .</p>	29

Figura 10 – Observações das anisotropias do CMB pela Agência Espacial Europeia (*European Space Agency/European Space Agency* (ESA)) e pela missão Planck revelam flutuações na temperatura. Essas variações correspondem a regiões de diferentes densidades que servem como estruturas básica das restantes, como galáxias e estrelas. . . . . 32

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BAO	<i>Baryon Acoustic Oscillations</i>
CMB	<i>Cosmic Microwave Background</i>
ECE	Equações de Campo de Einstein
ESA	<i>European Space Agency</i>
FLRW	Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker
PC	Princípio Cosmológico
PF	Poliedro Fundamental

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	13
2	VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS . . . . .	15
2.1	Variedades topológicas . . . . .	15
2.2	Ação de grupos em variedades . . . . .	15
2.3	Geometrias Riemanniana e Lorentziana . . . . .	18
3	CLASSIFICAÇÃO DE ESPAÇOS . . . . .	21
3.1	Geometrização de 2-variedades . . . . .	21
3.2	Geometrização de 3-variedades . . . . .	21
3.3	Espaços de Curvatura Constante . . . . .	22
3.4	Modelos de formas espaciais . . . . .	25
3.4.1	<i>Formas espaciais Euclideanas</i> . . . . .	25
3.4.2	<i>Formas espaciais esféricas</i> . . . . .	26
3.4.3	<i>Formas espaciais hiperbólicas</i> . . . . .	28
4	MODELOS COSMOLÓGICOS . . . . .	30
4.1	Modelos de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker . . . . .	30
4.1.1	<i>Radiação Cósmica de Fundo</i> . . . . .	32
4.2	Topologia de modelos cosmológicos gerais . . . . .	33
4.2.1	<i>Critério de closure</i> . . . . .	35
4.2.2	<i>Condição de Bakry-Émery</i> . . . . .	37
4.2.3	<i>Topologia de um Universo fechado</i> . . . . .	39
4.2.4	<i>Consequências da geometrização</i> . . . . .	40
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	41
	REFERÊNCIAS . . . . .	42

## 1 INTRODUÇÃO

Em 1895, o matemático francês Henri Poincaré (1854-1912), o mais influente do começo do século XX e um dos responsáveis por continuar o trabalho de Riemann no estudo de variedades, publicou *Analysis situs* (), trabalho que estabeleceu os fundamentos da topologia ao propor o estudo de espaços sob deformações contínuas. Foi responsável, também, por conjecturar, em 1904, um dos problemas centrais em topologia conhecida como conjectura de Poincaré, que afirma que qualquer variedade  $n$ -dimensional fechada e com grupo fundamental trivial é homeomorfa a uma  $n$ -esfera. Os casos de dimensão um e dois foram considerados triviais, porém os casos de dimensão maior ou igual a 5, e de dimensão 4 só foram solucionados décadas depois por Stephen Smale e Michael Freedman, respectivamente, cujos trabalhos foram agraciados cada um com uma medalha Fields em 1966 e 1986. Em 3 dimensões, o problema mostrou-se muito mais desafiador, fazendo com que o Instituto Clay de Matemática o incluísse nos chamados Problemas do Milênio, em 2000. Em 2002, quase 100 anos após Poincaré estabelecer a conjectura, o matemático russo Grigori Perelman apresentou sua solução em uma série de artigos () juntamente com a solução da conjectura da geometrização de Thurston, essencial para a discussão da topologia do universo.

Entre as variedades Riemannianas, aquelas de curvatura seccional constante, i.e.,  $\mathbb{R}^3$ ,  $S^3$  e  $H^3$ , são as mais simples. Historicamente, as duas últimas são as primeiras estruturas geométricas diferentes da Euclideana. A propriedade importante dos espaços de curvatura constante, também chamados de formas espaciais, está relacionada ao fato de possuírem um grande número de isometrias locais, o que implica na capacidade do espaço de "deslocar" isometricamente dois triângulos pequenos colocados em posições diferentes e verificar se eles podem sobrepostos. Essa propriedade é de fundamental importância nas construções da geometria elementar e foi considerada como um postulado a ser satisfeito pelas geometrias não-Euclidianas. É possível verificarmos, também, que quando multiplicamos uma métrica Riemanniana por uma constante positiva  $c$ , então sua curvatura seccional é multiplicada por  $1/c$ . Portanto, podemos supor que sua curvatura seccional constante de uma variedade é 1, 0 ou -1, o que será admitido daqui em diante. Em cada um desses casos, diversos modelos para o poliedro fundamental da variedade foram desenvolvidos, o que nos fornece uma das principais formas de se classificar 3-variedades.

Em 1915, Albert Einstein publicou suas Equações de Campo de Einstein (ECE) onde momento, matéria e energia estão relacionadas com a curvatura local do espaço-tempo. Porém, dado que sua influência é local, não são feitas restrições topológicas sob a variedade. Isso nos

mostra a necessidade de analisarmos a interdependência entre determinados conceitos como homogeneidade, isotropia, conexidade e curvatura. O chamado modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, nomeado após Alexander Friedmann, Georges Lemaître, Howard Robertson e Arthur Walker, foi a primeira solução cosmológica das ECE, assumindo o chamado Princípio Cosmológico (PC), onde homogeneidade e isotropia são supostas em escalas grandes o suficiente. Pelo teorema de Schur da geometria Riemanniana, isso restringe as possibilidades a espaços modelados por geometrias de curvatura constante. Percebe-se, portanto, que uma solução das ECE que incorpora o PC não faz grandes restrições topológicas na estrutura do espaço-tempo. Com isso, surge a necessidade de se estudar modelos que não fazem tais suposições.

Em 2022, um artigo nomeado "*Topology of general cosmological models*" () foi publicado por Gregory Galloway, Marcus Khuri e Eric Woolgar onde eles abandonam inicialmente homogeneidade e isotropia, e nos fornecem uma lista das possíveis topologias do Universo juntamente com estimativas sobre o diâmetro da sua secção espacial. Embora sejam apresentados diversos pontos que entram em contraste, entre os dois modelos, é de nosso interesse estudar tanto suas divergências quanto suas concordâncias. Além disso, parte da necessidade de se rever o modelo FLRW vem do fato de a radiação cósmica de fundo (*Cosmic Microwave Background/CMB*) () apresentar níveis de anisotropia na temperatura, aproximadamente  $\frac{\delta T}{T} \sim 10^{-5}$ , mostrando-se imprescindível, portanto, revermos as relações dadas por teoremas na geometria, e sua influência na lista de possíveis estruturas topológicas admitidas no Universo.

## 2 VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

### 2.1 Variedades topológicas

Para compreendermos melhor determinadas propriedades de um espaço é necessário introduzir conceitos fundamentais em topologia, área da matemática que estuda propriedades de um espaço que permanecem invariantes sob homeomorfismos. Além disso, as noções matemáticas envolvidas no estudo e classificação de estruturas topológicas são as de conexidade, homotopia, grupo fundamental, espaço de recobrimento universal, holonomia e poliedro fundamental. Podemos, também, dar algumas definições de geometrias Riemanniana e Lorentziana, fundamentais em relatividade geral.

**Definição** Uma variedade topológica de dimensão  $n$  é um espaço topológico que é Hausdorff, "second countable" e localmente Euclideano de dimensão  $n$ .

**Definição** Um atlas  $C^\infty$  em um espaço localmente Euclideano  $M$  é uma coleção  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  de cartas  $C^\infty$ -compatíveis que cobrem  $M$ .

Um atlas  $\mathcal{A}$  em um espaço localmente Euclideano é dito maximal se ele não estiver contido em um atlas maior; em outras palavras; se  $\tilde{\mathcal{A}}$  é um atlas que contém  $\mathcal{A}$ , então  $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$ .

**Definição** Uma variedade suave é uma variedade topológica  $M$  juntamente com um atlas maximal.

O atlas maximal é chamado de estrutura diferenciável em  $M$ .

**Exemplo** Dado o espaço Euclideano  $\mathbb{R}^n$ , temos que  $\{(\mathbb{R}^n, \text{id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)\}$  é uma variedade suave.

**Proposição** Se  $(U_i, \varphi_i)$  e  $(V_j, \psi_j)$  são atlas em  $M^m$  e  $N^n$ , respectivamente, então

$$\{(U_i \times V_j, \varphi_i \times \psi_j : U_i \times V_j \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)\}$$

é um atlas em  $M \times N$ .

**Exemplo** Temos que tanto  $\mathbb{R} \times S^1$  quanto  $S^1 \times S^1$  são variedades diferenciáveis.

### 2.2 Ação de grupos em variedades

Dizemos que um grupo  $G$  opera em um conjunto  $M$  se existe uma aplicação

$$G \times M \ni (g, x) \rightarrow gx \in M$$

tal que

$$ex = x \text{ e } (g_1g_2)x = g_1(g_2x)$$

onde  $e =$  identidade de  $G$ ,  $x \in M$  e  $g_1, g_2 \in G$ . Além disso, diremos que  $G$  opera livremente em  $M$  se  $gx = x \Rightarrow g = e$ . A órbita de um ponto  $x \in M$  é o conjunto

$$Gx = \{gx ; g \in G\}$$

A ação de  $G$  é transitiva se  $Gx = M$ . O conjunto de todas as órbitas é indicado por  $M/G$ , e existe uma projeção natural  $\pi : M \rightarrow M/G$  dada por  $\pi(x) = Gx$ . Quando  $M$  tem alguma estrutura adicional, é conveniente considerar  $G$  como um grupo de isomorfismos da estrutura considerada. Se  $M$  é um espaço topológico, dizemos que um grupo  $G$  opera de modo propriamente descontínuo se todo  $x \in M$  possui uma vizinhança  $U$  tal que  $g(U) \cap U = \emptyset$ , para todo  $g \in G$ ,  $g \neq e$ . Neste caso, a projeção  $\pi : M \rightarrow M/G$  (onde  $M/G$  tem a topologia quociente) é uma aplicação de recobrimento regular e  $G$  é o grupo das transformações de recobrimento.

**Exemplo** (Espaço projetivo real) Defina uma relação de equivalência em  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  por

$$y \sim x \Leftrightarrow y = tx \text{ para algum } t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

O espaço projetivo real, denotado por  $\mathbb{R}P^n$ , é o espaço quociente  $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) / \sim$ .

**Definição** Sejam  $M$  e  $N$  espaços topológicos, e sejam  $f, g : M \rightarrow N$  aplicações contínuas. Uma homotopia de  $f$  a  $g$  é uma aplicação contínua  $H : M \times [0, 1] \rightarrow N$  tal que para todo  $p \in M$

$$H(p, 0) = f(p) \text{ e } H(p, 1) = g(p)$$

Uma homotopia define uma família de aplicações contínuas  $H_t : M \rightarrow N$ , em que  $H_t(p) = H(p, t)$  e temos como condições  $H_0 = f$  e  $H_1 = g$ . Costumamos pensar no parâmetro  $t$  como sendo o tempo, e em  $H$  como sendo uma maneira de deformar a função  $f$  na  $g$ . A continuidade de  $H$  garante que essa deformação procede sem "quebras".

**Exemplo** Defina mapas  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  em que

$$f(x) = (x, x^2); \quad g(x) = (x, x)$$

Então, a aplicação  $H(x, t) = (x, x^2 - tx^2 + tx)$  é uma homotopia de  $f$  a  $g$ .

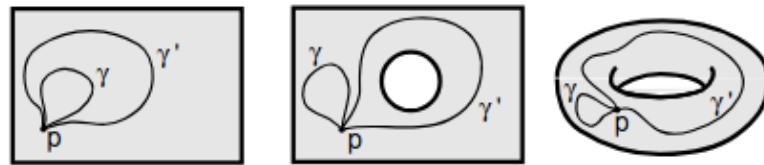
O espaço  $M$  é dito simplesmente conexo se para qualquer  $p \in M$ , quaisquer curvas fechadas que passam por  $p$  são homotópicas, caso contrário,  $M$  é dito multi-conexo.

**Exemplo** O espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$  e a esfera  $S^n$  são exemplos de espaços simplesmente conexos,

enquanto o cilindro  $\mathbb{R} \times S^2$  e o torus  $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$  são exemplos de espaços multi-conexos.

**Definição** Definimos o grupo fundamental de  $M$  com base em  $p$ , denotado por  $\pi_1(M, p)$ , como sendo o conjunto de classes de *loops* com base em  $p$ .

Figura 1 – Classes de homotopia. Esquerda: o plano Euclideano. Qualquer *loop* pode ser reduzido a um ponto. O grupo fundamental se reduz à identidade. Centro: o plano com um buraco.  $\gamma$  não é homotópica a  $\gamma'$ . Cada classe de homotopia  $h_n$  está associada a um inteiro  $n$ :  $\gamma \in h_n$  se a curva envolve o buraco  $n$  vezes em direção horária ( $n > 0$ ),  $n < 0$  em direção anti-horária e  $n = 0$  se não envolve o buraco. Assim, o grupo fundamental é o grupo cíclico infinito de inteiros  $\mathbb{Z}$ . Direita: um *torus*  $S^1 \times S^1$ . *Loops* podem envolver  $m$  vezes o buraco central e  $n$  vezes o próprio *torus*. Logo, o grupo fundamental consiste de pares  $(m, n)$  de inteiros com adição  $(m, n) + (p, q) = (m + p, n + q)$ . Em outras palavras, é isomorfo a  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .



Fonte: Rechièze-Rey e Luminet. *Cosmic Topology* (2003). Disponível em: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9605010>. Acesso em: 16 jan. 2026

**Definição** Sejam  $E$  e  $M$  espaços topológicos conexos. Uma aplicação  $\pi : E \rightarrow M$  é dita uma aplicação de recobrimento suave se  $\pi$  é sobrejetiva, suave, e cada ponto de  $M$  possui uma vizinhança  $U$  tal que cada componente conexa de  $\pi^{-1}(U)$  é mapeada difeomorficamente sobre  $U$  por  $\pi$ . Neste contexto, dizemos que  $U$  é uniformemente coberto por  $\pi$  e  $E$  é o espaço de recobrimento de  $M$ . Qualquer recobrimento de  $M$  por um espaço simplesmente conexo  $\tilde{M}$  é chamado de recobrimento universal, e  $\tilde{M}$  é chamado de espaço de recobrimento universal de  $M$ . Considere um ponto  $p$  e um *loop*  $\gamma$  passando por  $p$  em  $M$ . Se  $\gamma$  está inteiramente em um domínio simplesmente conexo de  $M$ ,  $(p, \gamma)$  gera um único ponto  $\tilde{p}$  em  $\tilde{M}$ . Caso contrário,  $(p, \gamma)$  gera pontos adicionais  $\tilde{p}', \tilde{p}'', \dots$  ditos homólogos a  $\tilde{p}$ . Os deslocamentos  $\tilde{p} \mapsto \tilde{p}', \tilde{p} \mapsto \tilde{p}''$  são isometrias e formam o chamado grupo de holonomia  $\Gamma$  em  $\tilde{M}$ .

As propriedades geométricas de  $M$  em um domínio simplesmente conexo são as mesmas do seu desenvolvimento no recobrimento universal  $\tilde{M}$ . Desse modo, é natural pensarmos qual o maior domínio simplesmente conexo que contém  $p \in M$ , i.e., o conjunto  $\{q \in M ; d(q, p) \leq d(q, \gamma(p))\}$ ,  $\gamma \in \Gamma$ . Seu desenvolvimento em  $\tilde{M}$  é chamado de poliedro fundamental (Poliedro Fundamental (PF)). Pelo fato de o grupo de holonomia ser discreto, PF é conexo e possui um número finito de faces. Note que em duas dimensões, PF é uma superfície cujo bordo é constituído por linhas, i.e., um polígono. Em três dimensões, tem faces como bordo, i.e., um

poliedro. A configuração formada pelo poliedro fundamental e suas imagens é chamada de uma tesselação de  $\tilde{M}$ , em que cada imagem é uma célula da tesselação. É importante ressaltar que o grupo fundamental de uma variedade topológica  $M$  é isomorfo ao grupo fundamental de PF, e que PF nos permite representar qualquer curva em  $M$ , dado que qualquer região de uma curva fora de PF pode ser levada para seu domínio por holonomias apropriadas. Para mais detalhes, veja (). Dessa forma, percebe-se que um método para classificar as topologias de uma variedade  $M$  são dadas por:

- determinar o espaço de recobrimento universal  $\tilde{M}$ ;
- encontrar o poliedro fundamental PF;
- calcular o grupo de holonomia agindo em PF.

### 2.3 Geometrias Riemanniana e Lorentziana

Partimos agora para alguns fundamentos tanto de geometria Riemanniana (), quanto Lorentziana ().

**Definição** Uma métrica Riemanniana em  $M$  é uma correspondência que associa a cada  $p \in M$  um produto interno  $g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$  (ou seja, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente  $T_p M$  de  $M$  que é suave no seguinte sentido: se  $(U, \varphi) = (U, x_1, \dots, x_n)$  é uma carta em  $M$ , então  $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$  é uma aplicação suave em  $U$ .

**Definição** Uma variedade Riemanniana é um par  $(M, g)$ , onde  $M$  é uma variedade suave e  $g$  é uma métrica Riemanniana em  $M$ .

**Exemplo** O par  $(\mathbb{R}^n, \delta)$  em que

$$\delta\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$$

é uma variedade Riemanniana.

Suponha que  $M$  é uma variedade e seja  $\Gamma$  um subgrupo do grupo das isometrias de  $M$  que opera de modo propriamente descontínuo. Sabemos que  $M/\Gamma$  tem uma estrutura diferenciável em que  $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$  é um difeomorfismo local. Podemos, também, dar a  $M/\Gamma$  uma métrica Riemanniana de tal forma que  $\pi$  seja isometria local. Dessa forma, dado  $p \in M/\Gamma$ , escolhemos  $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ ; para todo par  $u, v \in T_p(M/\Gamma)$ , definimos

$$h_p(u, v) = g_{\tilde{p}}(d\pi_p^{-1}u, d\pi_p^{-1}v)$$

Como o recobrimento  $\pi$  é regular,  $\Gamma$  é transitivo em  $\pi^{-1}(p)$ . Logo, dado qualquer  $\tilde{q} \in \pi^{-1}(p)$ , existe  $\gamma \in \Gamma$  com  $\gamma(\tilde{p}) = \tilde{q}$ , e a definição acima não depende da escolha do  $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ .

Similarmente, definimos uma variedade de Lorentz.

**Definição** Seja  $M$  uma variedade suave. Dizemos que  $g$  é uma métrica pseudo-riemanniana em  $M$  se associa a cada ponto  $p$  uma forma bilinear simétrica não-degenerada em  $T_pM$ . Dizemos que  $g$  é de Lorentz se sua assinatura tem exatamente um  $-1$ . Dessa forma, dizemos que uma variedade de Lorentz é um par  $(M, g)$  tal que  $M$  é uma variedade suave e  $g$  é uma métrica de Lorentz.

**Definição** Nos referimos a um espaço-tempo como sendo uma variedade de Lorentz, conexa e "time-oriented".

**Definição** A curvatura  $R$  de uma variedade Riemanniana é uma correspondência que associa a cada par  $X, Y \in \mathfrak{E}(M)$  uma aplicação  $R(X, Y) : \mathfrak{E}(M) \rightarrow \mathfrak{E}(M)$  por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z$$

onde  $\nabla$  é uma conexão Riemanniana.

Uma outra forma de olhar essa definição é considerar um sistema de coordenadas  $\{x_i\}$  em torno de  $p \in M$ . Como  $\left[ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0$ , obteremos

$$R \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

isto é, a curvatura mede a não-comutatividade da derivada covariante. Além disso,  $R$  é bilinear,  $R(X, Y)$  é linear, e satisfaz tanto a primeira quanto a segunda identidade de Bianchi. Desse modo, definimos o tensor curvatura de Riemann  $\text{Riem}^l_{ijk}$  como um objeto satisfazendo

$$R \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \text{Riem}^l_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_l}$$

tal que

$$\text{Riem}^l_{ijk} = \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma^l_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma^l_{jk} + \Gamma^s_{ik} \Gamma^l_{js} - \Gamma^s_{jk} \Gamma^l_{is}$$

A partir disso, podemos definir o tensor curvatura de Ricci  $\text{Ric}_{ij}$  e a curvatura escalar  $R$ :

$$\text{Ric}_{ij} = \text{Riem}^k_{ikj}; \quad R = g^{ij} \text{Ric}_{ij} = \text{tr}_g \text{Ric}$$

Podemos, também, definir a seguinte quantidade.

Seja  $\sigma \subset T_pM$  um subespaço bidimensional do espaço tangente, e sejam  $X, Y \in \sigma$  vetores

linearmente independentes, então a curvatura seccional  $K(p, \sigma)$  é definida como

$$K(p, \sigma) = \frac{\langle R(X, Y)X, Y \rangle}{|X \wedge Y|^2}$$

em que

$$|X \wedge Y| = \sqrt{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$$

Com a métrica induzida pelo recobrimento,  $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$  é uma isometria local. Além disso,  $M/\Gamma$  é completa se e só se  $M$  é completa, e  $M/\Gamma$  tem curvatura constante se e só se  $M$  tem curvatura constante.

### 3 CLASSIFICAÇÃO DE ESPAÇOS

#### 3.1 Geometrização de 2-variedades

Superfícies podem ser construídas a partir da identificação das arestas de polígonos. O procedimento é usado para classificar superfícies compactas e se resume a remover discos  $D_1$  e  $D_2$  de superfícies  $S_1$  e  $S_2$ , e obter a soma conexa  $S_1 \# S_2$  pela identificação dos bordos  $\partial D_1$  e  $\partial D_2$  a partir de um homeomorfismo. Além disso, consideramos o teorema de Gauss-Bonnet, que estabelece uma relação entre geometria e topologia a partir da seguinte expressão

$$\int_S K dS = 2\pi \chi(S) = 2\pi(2 - 2g)$$

onde  $K$  é a curvatura de Gauss,  $g$  é o genus da superfície e  $\chi(S)$  é a característica de Euler da superfície, definida pela soma alternada do número de células em uma decomposição poliédrica da superfície. Considerando, também, o teorema da geometrização para superfícies, qualquer superfície compacta admite uma estrutura geométrica modelada por  $\mathbb{R}^2$ ,  $S^2$  ou  $H^2$ . A geometria hiperbólica tem um papel importante dado que todas as superfícies com genus maior do que um tem sua geometria modelada por  $H^2$ .

#### 3.2 Geometrização de 3-variedades

Uma classificação similar, em três dimensões, só foi publicada em 1982 (), quando Thurston estendeu o procedimento usado em superfícies para 3-variedades. Nesse caso, há uma identificação entre as faces do poliedro. Com isso, podemos seguir para a discussão sobre as 8 geometrias de Thurston ().

**Proposição** Qualquer espaço homogêneo  $(M, g)$  tridimensional, simplesmente conexo que admite quociente compacto é equivalente a um dos modelos homogêneos  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  que admite um grupo de isometrias  $G$ , tal que

- $\tilde{M} = \mathbb{R}^3$  e  $G = ISO(3) = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$ , i.e., o produto cartesiano do grupo de translações em  $\mathbb{R}^3$  pelo grupo de matrizes ortogonais especiais  $3 \times 3$ ;
- $\tilde{M} = S^3$  e  $G = SO(4)$ ;
- $\tilde{M} = H^3$  e  $G = PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ ;
- $\tilde{M} = S^2 \times \mathbb{R}$  e  $G = SO(3) \times \mathbb{R}$ ;
- $\tilde{M} = H^2 \times \mathbb{R}$  e  $G = PSL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ ;
- $\tilde{M} = \widetilde{SL(2, \mathbb{R})}$  e  $G =$  produto das translações por  $PSL(2, \mathbb{R})$ ;

- $\tilde{M} = nil$ , i.e., o grupo de Lie tridimensional composto por matrizes de Heisenberg  $3 \times 3$ . Veja () dado que seu grupo de isometrias não é simples o suficiente para que seja descrito aqui;
- $\tilde{M} = sol$ , i.e., um grupo de Lie que pode ser representado por  $\mathbb{R}^3$  sob uma determinada operação de multiplicação. Similarmente ao caso anterior, veja ().

Figura 2 – As 8 geometrias de Thurston.



Fonte: Gabriel Kahn. *An Illustrated Introduction To The Ricci Flow* (2022). Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/2201.04923>. Acesso em: 16 jan. 2026

As geometrias de Thurston podem ser divididas em 3 classes. As geometrias isotrópicas  $\mathbb{R}^3$ ,  $S^3$  e  $H^3$ , as geometrias produto  $S^2 \times \mathbb{R}$  e  $H^2 \times \mathbb{R}$ , e as geometrias grupo de Lie *nil*, *sol* e  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ . Por motivações cosmológicas, que discutiremos mais adiante, iremos detalhar mais os espaços isotrópicos a seguir.

### 3.3 Espaços de Curvatura Constante

Uma importante característica das três primeiras geometrias citadas anteriormente, é o fato de admitirem curvatura (seccional) constante e apresentarem uma certa equivalência com um princípio físico que será abordado no próximo capítulo. Nesta secção, falaremos sobre a relação entre isotropia, homogeneidade e curvatura dos espaços clássicos citados acima. Começaremos, então, com algumas definições dadas em ().

**Definição** Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana tridimensional. A variedade é dita isotrópica

se para qualquer  $p \in M$ , a curvatura seccional  $K(p, \sigma)$  não depende de  $\sigma \subset T_pM$ , em que  $\sigma$  é um subespaço bidimensional.

**Definição** Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana tridimensional. A variedade é dita homogênea se para quaisquer  $p, q \in M$ , exista uma isometria de  $M$  que leva  $p$  em  $q$ , ou seja, que exista uma aplicação  $\varphi : M \rightarrow M$ ; em que  $\varphi(p) = q$  e para quaisquer  $u, v \in T_pM$ , temos

$$g_p(u, v) = g_{\varphi(p)}(d\varphi_p u, d\varphi_p v)$$

**Teorema (Schur)** Seja  $M$  uma variedade Riemanniana conexa e isotrópica, então  $M$  tem curvatura seccional constante.

**Demonstração:** Defina um tensor  $R'$  de ordem 4 por

$$R'(W, Z, X, Y) = \langle W, X \rangle \langle Z, Y \rangle - \langle Z, X \rangle \langle W, Y \rangle$$

Se  $K(p, \sigma) = K$  não depende de  $\sigma$ , então  $R = KR'$ . Portanto, para todo  $U \in \Xi(M)$ ,  $\nabla_U R = UKR'$ .

Usando a segunda identidade de Bianchi:

$$\nabla R(W, Z, X, Y, U) + \nabla R(W, Z, Y, U, X) + \nabla R(W, Z, U, X, Y) = 0$$

obteremos, para  $X, Y, Z, W, U \in \Xi(M)$

$$\begin{aligned} & UK(\langle W, X \rangle \langle Z, Y \rangle - \langle Z, X \rangle \langle W, Y \rangle) \\ & + XK(\langle W, Y \rangle \langle Z, U \rangle - \langle Z, Y \rangle \langle W, U \rangle) \\ & + YK(\langle W, U \rangle \langle Z, X \rangle - \langle Z, U \rangle \langle W, X \rangle) = 0 \end{aligned}$$

Fixe  $p \in M$ . Como  $n \geq 3$ , é possível, fixado  $X$  em  $p$ , escolher  $Y$  e  $Z$  em  $p$  tais que  $\langle X, Y \rangle = \langle Y, Z \rangle = 0$ ,  $\langle Z, Z \rangle = 1$ . Faça  $U = Z$  em  $p$ . A relação acima fornece, para todo  $W$

$$\langle (XK)Y - (YK)X, W \rangle = 0$$

Como  $X$  e  $Y$  são linearmente independentes de  $p$ , concluímos que  $XK = 0$  para todo  $X \in T_pM$ .

Logo,  $K = \text{constante}$ .  $\square$

**Teorema** Seja  $M^n$  uma variedade Riemanniana completa e de curvatura seccional constante  $K$ .

Então, o recobrimento universal  $\tilde{M}$  de  $M$ , com a métrica do recobrimento, é isométrico a:

- $H^n$ , se  $K = -1$ ;
- $\mathbb{R}^n$ , se  $K = 0$ ;
- $S^n$ , se  $K = 1$

**Demonstração:**  $\tilde{M}$  é uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa de curvatura seccional constante  $K$ . Consideremos em primeiro lugar os dois primeiros casos e indiquemos tanto  $\mathbb{R}^n$  quanto  $H^n$  por  $\Delta$ . Fixemos pontos  $p \in \Delta$ ,  $\tilde{p} \in \tilde{M}$  e uma isometria linear

$$i : T_p M \rightarrow T_{\tilde{p}} \tilde{M}$$

Consideremos a aplicação

$$f = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1} : \Delta \rightarrow \tilde{M}$$

Como  $\Delta$  e  $\tilde{M}$  são completas com curvaturas seccionais não positivas,  $f$  está bem definida. Pelo Teorema de Cartan,  $f$  é uma isometria local. Pelo Teorema de Hadamard,  $\exp_p$  e  $\exp_{\tilde{p}}$  são difeomorfismos, logo  $f$  é um difeomorfismo, o que prova os primeiros casos do teorema.

Para o último caso, fixemos novamente pontos  $p \in S^n$ ,  $\tilde{p} \in \tilde{M}$  e uma isometria linear

$$i : T_p S^n \rightarrow T_{\tilde{p}} \tilde{M}$$

Seja  $q \in S^n$  o ponto antípoda de  $p$  e definamos

$$f = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1} : S^n - \{q\} \rightarrow \tilde{M}$$

Pelo teorema de Cartan,  $f$  é uma isometria local. Escolhamos agora um ponto  $p' \in S^n$ ;  $p' \neq p$ ,  $p' \neq q$ . Façamos  $\tilde{p}' = f(p')$ ,  $i' = df_p$  e definamos

$$f' = \exp_{\tilde{p}'} \circ i' \circ \exp_{p'}^{-1} : S^n - \{q'\} \rightarrow \tilde{M}$$

onde  $q'$  é o ponto antípoda de  $p'$ .

Observe que  $S^n - (\{q\} \cup \{q'\}) = W$  é conexo,  $p' \in W$ , e

$$f(p') = \tilde{p}' = f'(p'); \quad df_{p'} = i' = df'_{p'}$$

Segue-se que  $f = f'$  em  $W$ . Por conseguinte, podemos definir uma aplicação  $g : S^n \rightarrow \tilde{M}$  por

$$g(r) = \begin{cases} f(r), & \text{se } r \in S^n - \{q\} \\ f'(r), & \text{se } r \in S^n - \{q'\} \end{cases}$$

Como  $g$  é uma isometria, é também um difeomorfismo local. Pela compacidade de  $S^n$ ,  $g$  é uma aplicação de recobrimento, e como  $\tilde{M}$  é simplesmente conexa,  $g$  é um difeomorfismo. Logo  $g$  é uma isometria.  $\square$

**Proposição** Seja  $M$  uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional constante

$K(1, 0, -1)$ . Então  $M$  é isométrica a  $\tilde{M}/\Gamma$ , onde  $\tilde{M}$  é  $S^n$  (se  $K = 1$ ),  $\mathbb{R}^n$  (se  $K = 0$ ) ou  $H^n$  (se  $K = -1$ ), em que  $\Gamma$  é um subgrupo do grupo das isometrias de  $M$  que opera de modo propriamente descontínuo em  $\tilde{M}$ , e a métrica de  $\tilde{M}/\Gamma$  é a induzida pelo recobrimento  $\pi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}/\Gamma$ .

**Demonstração:** Considere o recobrimento universal  $p : \tilde{M} \rightarrow M$ , e tome em  $\tilde{M}$  a métrica do recobrimento, isto é, a métrica tal que  $p$  seja uma isometria local. Seja  $\Gamma$  o grupo das transformações de recobrimento de  $p$ . Então  $\Gamma$  é um subgrupo do grupo de isometrias de  $\tilde{M}$  e opera de maneira propriamente descontínua em  $\tilde{M}$ . Logo, é possível introduzir em  $\tilde{M}/\Gamma$  a métrica Riemanniana induzida por  $\pi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}/\Gamma$ . Como o recobrimento  $p$  é regular, temos que se  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{M}$ , então  $p(\tilde{x}) = p(\tilde{y})$  se, e só se,  $\Gamma\tilde{x} = \Gamma\tilde{y}$  o que ocorre se, e só se,  $\pi(\tilde{x}) = \pi(\tilde{y})$ . As classe de equivalência dadas por  $p$  e  $\pi$  em  $\tilde{M}$  são as mesmas, o que induz uma bijeção  $\xi : M \rightarrow \tilde{M}/\Gamma$  tal que  $\pi = \xi \circ p$ . Como  $\pi$  e  $p$  são isometrias locais, também o é, e, sendo uma bijeção, é uma isometria de  $M$  sobre  $\tilde{M}/\Gamma$ .  $\square$

A proposição acima reduz o problema de achar todas as formas espaciais ao problema de determinar todos os subgrupos que operam de modo propriamente descontínuo do grupo das isometrias de cada um dos modelos simplesmente conexos ( $S^n, \mathbb{R}^n, H^n$ ).

### 3.4 Modelos de formas espaciais

#### 3.4.1 Formas espaciais Euclidianas

Seu grupo de isometrias é  $G = ISO(3) = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$  e os geradores do possível grupo de holonomias  $\Gamma$  incluem a identidade, as translações, reflexões e movimentos helicoidais. Esses grupos geram 18 formas distintas localmente Euclidianas, em que 8 são abertas (não compactas) e 10 são fechadas (compactas).

Entre os modelos abertos, quando  $\Gamma$  não inclui reflexões, as formas espaciais  $\mathbb{R}^3/\Gamma$  são orientáveis. Desse modo, temos que

- $\Gamma$  se reduz à identidade, i.e.,  $M^3 = \mathbb{R}^3$ ;
- $\Gamma$  é gerado por um movimento helicoidal por um ângulo  $\theta$ , i.e.,  $M^3$  é o produto topológico do cilindro por  $\mathbb{R}$ ;
- $\Gamma$  é gerado por duas translações independentes, i.e.,  $M^3$  é o produto do *torus* por  $\mathbb{R}$ ;
- $\Gamma$  inclui a translação e um movimento helicoidal por um ângulo  $\pi$  ao longo de uma direção ortogonal à translação.

Quando  $\Gamma$  inclui reflexões, as formas espaciais  $\mathbb{R}^3/\Gamma$  não são orientáveis, então não são de

interesse para a cosmologia.

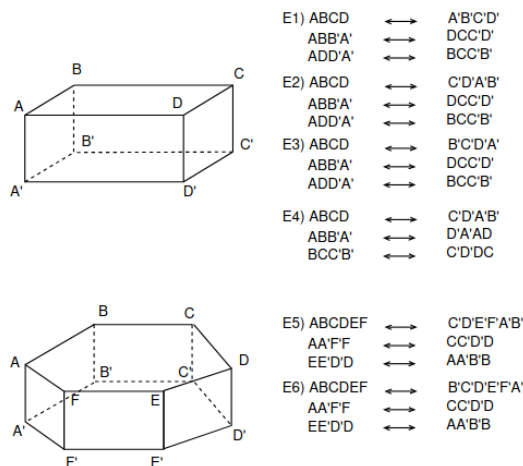
Entre os modelos fechados, 6 deles são orientáveis. O poliedro fundamental, nesse caso, pode ser um paralelepípedo e as identificações das faces são dadas por:

- $E_1$  - faces opostas por translações;
- $E_2$  - faces opostas, um par sendo rotacionado por um ângulo  $\pi$ ;
- $E_3$  - faces opostas, um par sendo rotacionado por um ângulo  $\pi/2$ ;
- $E_4$  - faces opostas, todos os três pares sendo rotacionados por um ângulo  $\pi$ .

Podemos, também, tomar o poliedro fundamental como sendo o interior de um prisma hexagonal:

- $E_5$  - faces opostas, com a face de cima sendo rotacionada por um ângulo  $2\pi/3$  em relação à face de baixo;
- $E_6$  - faces opostas, com a face de cima sendo rotacionada um ângulo  $\pi/3$  em relação à face de baixo.

Figura 3 – Os 6 espaços orientados, fechados e localmente Euclidianos.



Fonte: Rechièze-Rey e Luminet. *Cosmic Topology* (2003). Disponível em: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9605010>. Acesso em: 16 jan. 2026

O restante das formas não são orientáveis, e portanto, não são de interesse para a cosmologia.

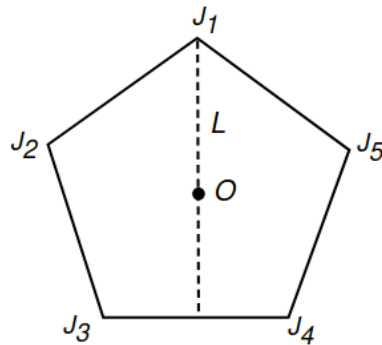
### 3.4.2 Formas espaciais esféricas

Nesse caso, o grupo de isometrias é  $G = SO(4)$  e seu grupo de holonomias pode ser dado por:

- grupo cíclico de ordem  $p$ ,  $\mathbb{Z}_p$  ( $p \geq 2$ ) (pode ser visto como sendo gerado por rotações de um ângulo  $2\pi/p$  em torno de um eixo de  $\mathbb{R}^3$ );

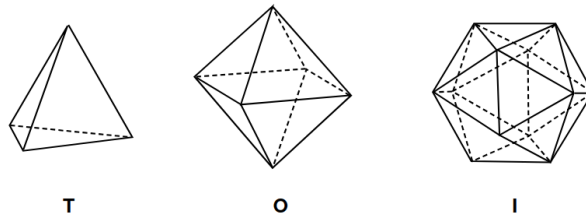
- grupo diedro de ordem  $2m$ ,  $D_m$  ( $m > 2$ ) (pode ser vista como sendo gerado por rotações no plano por um ângulo de  $2\pi/m$  e um giro em torno da linha através da origem);
- grupo poliedro (podem ser vistos como os grupos de simetria de poliedros regulares em  $\mathbb{R}^3$ ).

Figura 4 – Grupo diedro  $D_5$ . O pentágono  $J_1 \dots J_5$  é invariante por rotações de ângulo  $2\pi/5$  em torno da linha  $L$ .



Fonte: Rechièze-Rey e Luminet. *Cosmic Topology* (2003). Disponível em: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9605010>. Acesso em: 16 jan. 2026

Figura 5 – Grupos poliedro. Esquerda: Grupo tetraedro. Centro: Grupo octaedro. Direita: Grupo icosaedro.



Fonte: Rechièze-Rey e Luminet. *Cosmic Topology* (2003). Disponível em: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9605010>. Acesso em: 16 jan. 2026

**Exemplo** O espaço projetivo  $\mathbb{R}P^3 = S^3/\mathbb{Z}_2$  é obtido ao se identificar pontos diametricamente opostos.

**Exemplo** Os espaços  $L(p, q) = S^3/\mathbb{Z}_p$  são chamados de espaço *lens*. O espaço *lens* mais simples é dado por  $S^3/\mathbb{Z}_3$ , que divide  $S^3$  em 6 células fundamentais.

**Exemplo** O espaço diedro mais simples é dado por  $S^3/D_3$ , que divide a 3-esfera em 12 triedros.

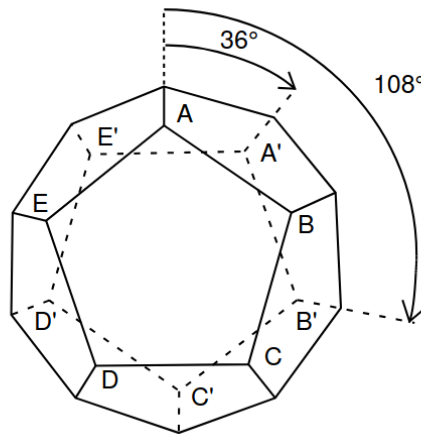
**Exemplo** O espaço dodecaedro de Poincaré é um exemplo de  $S^3/I$ . O poliedro fundamental é um dodecaedro regular cujas faces são pentágonos. O espaço compacto é obtido através da identificação de faces opostas após uma rotação de  $\pi/5$  na direção horária em torno do eixo ortogonal à face.

### 3.4.3 Formas espaciais hiperbólicas

Seu grupo de isometrias é  $G = PSL(2, \mathbb{C})$ , porém diferentemente das formas espaciais Euclidenas e esféricas, a classificação de variedades hiperbólicas está incompleta. No entanto, alguns exemplos de modelos compactos podem ser dados.

**Exemplo** O espaço de Seifert-Weber admite um dodecaedro como poliedro fundamental cujas pentagonais são coladas opostamente após torcer  $3\pi/5$ .

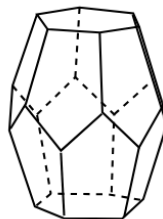
Figura 6 – O espaço esférico de Poincaré e o espaço hiperbólico fechado de Seifert-Weber são obtidos ao se identificar faces opostas de um dodecaedro regular após rotações de  $\pi/5$  e  $3\pi/5$ , respectivamente.



Fonte: Rechièze-Rey e Luminet. *Cosmic Topology* (2003). Disponível em: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9605010>. Acesso em: 16 jan. 2026

**Exemplo** O espaço de Löbell admite como PF um poliedro de 14 faces, em que 2 são hexágonos regulares e 12 são pentágonos regulares.

Figura 7 – O poliedro fundamental da topologia de Löbell é feito de 8 14-edros colados juntos. Todos os ângulos na figura são retos em  $H^3$ .

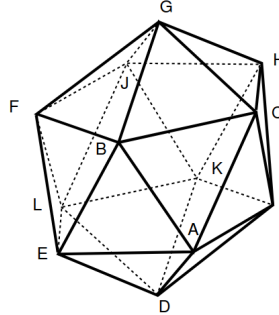


Fonte: Rechièze-Rey e Luminet. *Cosmic Topology* (2003). Disponível em: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9605010>. Acesso em: 16 jan. 2026

**Exemplo** Os espaços Best admitem icosaedros regulares como poliedro fundamental.

**Exemplo** O espaço Weeks é um poliedro com 26 vértices e 18 faces, entre as quais 12 são pentá-

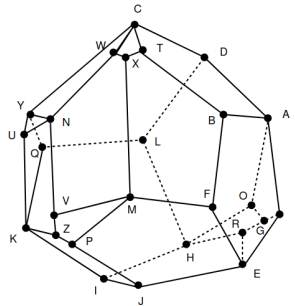
Figura 8 – O espaço hiperbólico fechado de Best. As identificações par-a-par são  $ADI \leftrightarrow BGC, ICA \leftrightarrow ABC, EFL \leftrightarrow DIK, DEL \leftrightarrow KLD, GFB \leftrightarrow HJK, FGJ \leftrightarrow GJH, ABE \leftrightarrow LJF, FEB \leftrightarrow CGH, AED \leftrightarrow KIH, JKL \leftrightarrow CHI$  (onde a ordem das vértice nas faces é mantida na identificação).



Fonte: Rechièze-Rey e Luminet. *Cosmic Topology* (2003). Disponível em: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9605010>. Acesso em: 16 jan. 2026

gonos e 6 são tetragons. Uma de suas características é a de ser a menor variedade hiperbólica compacta conhecida.

Figura 9 – O espaço hiperbólico fechado de Weeks. A identificação par-a-par das faces é:  $ABTC D \leftrightarrow HLDAO, SEFBA \leftrightarrow FMPJE, RHIJE \leftrightarrow IKQLH, FMXTB \leftrightarrow UKZVN, WNUYC \leftrightarrow IJPZK, CYQLD \leftrightarrow MXWNV, CTXW \leftrightarrow HOGR, KQYU \leftrightarrow ERGS, MPZV \leftrightarrow ASGO$ .



Fonte: Rechièze-Rey e Luminet. *Cosmic Topology* (2003). Disponível em: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9605010>. Acesso em: 16 jan. 2026

## 4 MODELOS COSMOLÓGICOS

Neste capítulo, discutiremos, primeiramente, as estruturas geométricas e topológicas dos modelos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Apresentaremos, também, contradições observacionais na suposta isotropia do Universo. Após isso, excluiríamos as hipóteses responsáveis por esses modelos, e consideraremos casos mais gerais.

### 4.1 Modelos de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker

Seja  $(\mathbb{R} \times M^3, g)$  uma variedade de Lorentz, então o funcional de Einstein-Hilbert nesta variedade é dado por:

$$S = -\frac{c^3}{16\pi G} \int R d\mu$$

em que  $d\mu = \sqrt{-\det g} d^4x$  é a forma de volume e  $R = \text{tr}_g \text{Ric}$  é a curvatura escalar com  $\text{Ric}_{ij} = \partial_l \Gamma^l_{ij} - \partial_j \Gamma^l_{il} + \Gamma^l_{ij} \Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il} \Gamma^l_{mj}$  sendo a expressão para a curvatura de Ricci. Logo, pelo princípio de Hamilton,  $\delta S = 0$  nos dá

$$\text{Ric}_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = 0$$

conhecidas como as equações de campo de Einstein no vácuo. Porém, quando introduzimos um termo de interação com a matéria, a ação  $S$  é decomposta como a soma de dois termos  $S_g + S_m$ , em que  $S_g$  é o termo gravitacional dado por

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int R \sqrt{-\det g} d^4x$$

e  $S_m$  é o termo de matéria dado por

$$S_m = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{ij} F^{ij} \sqrt{-\det g} d^4x$$

em que  $F_{ij}$  é o tensor eletromagnético. Desse modo, o princípio de Hamilton nos dá

$$\text{Ric}_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

em que  $T_{ij}$  é o tensor de energia-momento e a expressão é chamada de equações de campo de Einstein (ECE). Para mais detalhes, veja (). Ao escrevermos as ECE fazemos escolha de um sistema de coordenadas local  $(x^1, \dots, x^4)$  e, conseqüentemente, de uma base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$  no espaço tangente da variedade, de tal modo que podemos reescrevê-las como

$$\text{Ric} \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) - \frac{1}{2} R g \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{8\pi G}{c^4} T \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$$

Percebe-se, assim, que as ECE só dizem respeito à geometria local, não fazendo restrições à sua topologia. No entanto, entre os modelos, os mais estudados na literatura são aqueles com o espaço simplesmente conexo. Entre tais modelos, o de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)), uma solução das equações de Einstein que assume o princípio cosmológico, ou seja, que presume a homogeneidade e isotropia da secção espacial de  $\mathbb{R} \times M^3$ , é o que mais corrobora com a radiação cósmica de fundo (*Cosmic Microwave Background Radiation/Cosmic Microwave Background (CMB)*). É importante ressaltar que homogeneidade e isotropia tem diferentes interpretações em física e geometria. No primeiro caso, o princípio cosmológico é a noção de que a distribuição espacial de matéria no universo é uniforme quando vista de uma escala suficientemente grande. Assumiremos, no entanto, que existe uma certa equivalência entre as definições dadas no capítulo anterior e as noções discutidas nesse. Neste caso, para o espaço-tempo  $(\mathbb{R} \times M^3, g)$  e uma variedade Riemanniana  $(M^3, h)$ , a expressão para a métrica é dada por

$$g = c^2 dt \otimes dt - R^2 h$$

em que

$$h = d\chi \otimes d\chi + f^2(\chi) g_{S^2}$$

tal que  $R(t)$  é um fator cósmico de escala e  $g_{S^2} = d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi$  é a métrica da 2-esfera. Conforme discutido no capítulo anterior, como o espaço de recobrimento universal é dado por um dos espaços de curvatura constante, a função  $f(\chi)$  é dada por

$$f(\chi) = \begin{cases} \sinh \chi, & K = -1 \\ \chi, & K = 0 \\ \sinh \chi, & K = 1 \end{cases}$$

No contexto de cosmologia, também é comum fazermos a seguinte substituição  $r = f(\chi)$ , de tal forma que

$$d\chi = \begin{cases} \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}}, & K = -1 \\ dr, & K = 0 \\ \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}, & K = 1 \end{cases}$$

Assim, a métrica  $h$  assume a forma

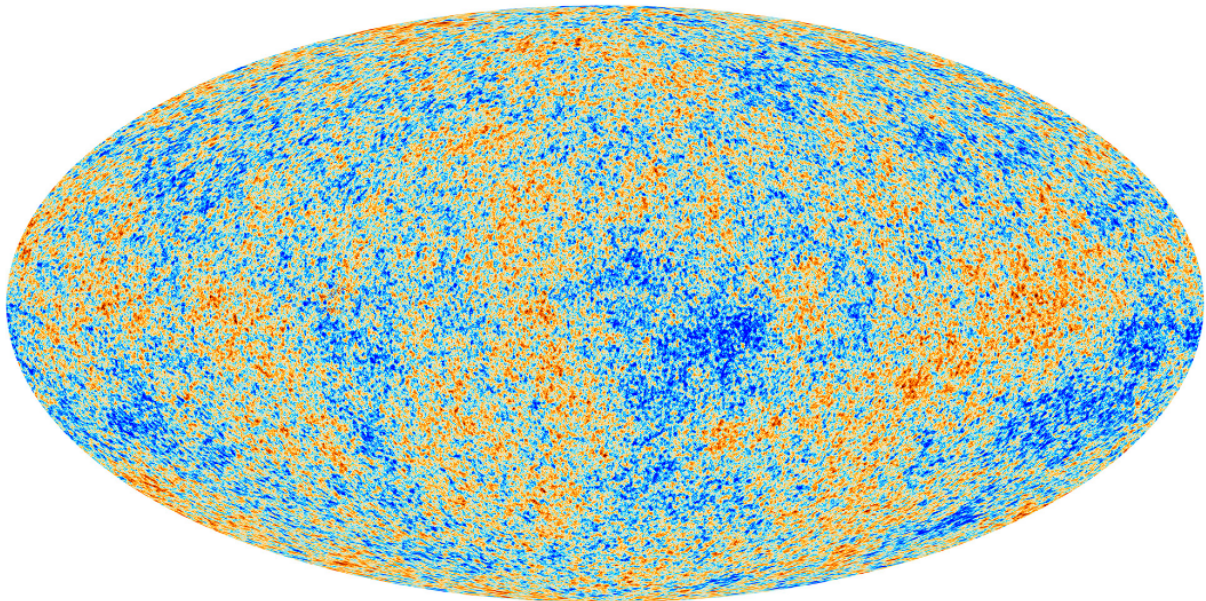
$$h = \frac{dr \otimes dr}{1 - Kr^2} + r g_{S^2}$$

Portanto, a secção espacial de uma variedade de Lorentz regida pelo modelo FLRW admite uma geometria homogênea e isotrópica, e é modelada por uma geometria simplesmente conexa e de curvatura constante.

#### 4.1.1 Radiação Cósmica de Fundo

Outra importante análise a ser feita está relacionada à suposta isotropia do CMB. A radiação cósmica de fundo (*Cosmic Microwave Background/CMB*), responsável por nos dar as informações mais antigas do universo primitivo, admite certos níveis de anisotropia na temperatura, o que causa problemas com os modelos de FLRW.

Figura 10 – Observações das anisotropias do CMB pela Agência Espacial Europeia (*European Space Agency/ESA*) e pela missão Planck revelam flutuações na temperatura. Essas variações correspondem a regiões de diferentes densidades que servem como estruturas básicas das restantes, como galáxias e estrelas.



Fonte: Utku Ercetin. *Computing CMB Anisotropies in Compact Hyperbolic Universes* (2024). Disponível em: <https://fse.studenttheses.ub.rug.nl/34499/1/bMATH2024UtkuE.pdf>. Acesso em 16 jan. 2026.

Um universo multi-conexo consiste de pontos que podem ser ligados por mais de uma geodésica. Logo, um importante efeito observável de tal universo é que a luz viajará ao longo do domínio fundamental mais de uma vez se seu tamanho for menor que o CMB. Para um universo pequeno o suficiente, deveríamos poder ver múltiplas imagens do mesmo objeto cósmico em diferentes regiões. Esse é um método direto para se procurar por evidências de uma topologia não-trivial. O CMB nos permite, então, analisar a natureza das perturbações da

temperatura como forma de assinatura topológica.

Dada a simetria apresentada, a temperatura pode ser expressa como uma função na esfera e as flutuações como uma expansão de harmônicos esféricos dada pela expressão

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) = \sum_l \sum_m a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \sim 10^{-5}$$

em que os  $a_{lm}$  são coeficientes multipolo e  $Y_{lm}$  são harmônicos esféricos. Podemos, então, expressar os coeficientes como

$$a_{lm} = \int Y_{lm}^*(\theta, \phi) \frac{\delta T}{T} d\Omega$$

A parte  $l = 1$  representa os dipolos devido ao movimento do sistema solar com respeito à última superfície de espalhamento intercalado com o verdadeiro dipolo cosmológico que surgem das perturbações de larga escala. Dado que não é possível separar os dois dipolos, a análise do CMB é dada a partir de  $l = 2$ . Os coeficientes multipolo representam um desvio da temperatura média. Devido a natureza isotrópica do CMB, observamos apenas dependência em  $l$ , que corresponde ao tamanho angular do modo, e não em  $m$ , que representa a orientação. Logo, obtemos

$$C_l = \frac{1}{2l+1} \sum_m \langle a_{lm}^* a_{lm} \rangle$$

onde  $C_l$  contém toda a informação estatística sobre o CMB. Para mais detalhes, veja (). Uma outra característica desse modelo é a predição de que se

$$\frac{8\pi G\rho}{c^2} - 3\left(\frac{H}{c}\right)^2 + \Lambda > 0$$

então a curvatura da secção espacial é positiva, e portanto, a variedade é compacta. Esse é um resultado de *closure* das cosmologias FLRW, que será discutido adiante.

## 4.2 Topologia de modelos cosmológicos gerais

Como mencionado anteriormente, as hipóteses de homogeneidade e isotropia são bem motivadas ao se considerar largas escalas. No entanto, dado que essas noções, e as de curvatura e conexidade, são interdependentes, é de nosso interesse estudar modelos que não fazem essas exigências. Um dos panoramas teóricos responsáveis por isso é o universo de Bianchi.

Os métodos utilizados para estudar a propriedade de *closure* são baseados em um resultado clássico da geometria diferencial, conhecido como teorema de Bonnet-Myers. O teorema dita

que uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci limitada inferiormente por uma constante positiva, deve ter um diâmetro finito. No contexto de modelos cosmológicos, a fórmula de Ehlers e Ellis implica que uma versão generalizada do tensor de Ricci, referida como curvatura de Ricci Bakry-Émery, está acoplada à matéria.

Combinando as medidas de polarização, e a temperatura de Planck com os dados de *lensing*, temos que se nosso universo admite o modelo de FLRW, então o critério de *closure* é satisfeito com um nível de confiança de 85%.

Dado que a análise dos dados hipotetiza uma cosmologia FLRW de fundo, é possível que a porcentagem obtida tenha dependência nessa análise. Porém, mesmo que o limite inferior da curvatura de Ricci Bakry-Émery da secção espacial não seja positiva (i.e., então o universo é possivelmente fechado, porém a densidade de energia não é suficiente para forçar o universo ser fechado), é razoável assumir que é quase positivo, o que sugere uma aplicação de outro resultado da geometria diferencial, chamado de teorema de quase-*splitting*, uma modificação do teorema de *splitting*. O último afirma que na presença de uma geodésica, uma variedade completa com curvatura de Ricci negativa *splits off* um fator Euclideano, tanto geometricamente quanto topologicamente. A modificação feita no teorema de quase-*splitting* é obtida ao se considerar que a curvatura de Ricci é quase não-negativa, e apesar de os resultados serem mais fracos, existem fortes restrições topológicas quando aplicadas a variedades compactas. Como mencionado acima, no contexto de cosmologia, a curvatura de Ricci é substituída pela curvatura de Ricci Bakry-Émery, o que faz com que o teorema de quase-*splitting* seja estendido à expressão envolvendo o termo de Bakry-Émery. Dessa forma, se a secção espacial for de fato compacta, a topologia é, portanto, restringida, i.e., o grupo fundamental deve ser quase-abeliano.

Ao considerarmos a geometrização de Thurston juntamente com o teorema de quase-*splitting*, obtemos uma lista das possíveis topologias da secção espacial do universo. A variedade pode admitir como espaço de recobrimento  $S^3$  ou  $T^3$ , ou ser coberta por  $S^1 \times S^2$ . No último caso, a secção pode ser  $S^1 \times S^2$ , ou  $S^1 \tilde{\times} S^2$ , ou  $S^1 \times \mathbb{R}P^2$ , ou  $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$ , porém não são modelos condizentes com o modelo de FLRW por não admitirem curvatura constante. Os dois primeiros casos, por outro lado, são quocientes da esfera e do torus, e são possíveis nos atuais modelos cosmológicos. Os quocientes da esfera são divididos em 5 classes relacionadas aos sólidos platônicos. Os quocientes do torus são divididos em 10 tipos, 6 orientáveis e 4 não orientáveis, e são conhecidos como variedades de Bieberbach. O objetivo desta secção é reduzir o problema da topologia de modelos cosmológicos, que assumem alguma simetria, à mesma questão de

modelos FLRW com curvatura positiva e nula. Isso eliminaria o caso de curvatura negativa com todas as suas topologias, assim como a possibilidade de somas conexas, exceto por uma. Uma soma conexa é um forma de se construir novas variedades a partir de outras da mesma dimensão. De um ponto de vista cosmológico, um Universo que é uma soma conexa não-trivial pode ser interpretado como tendo um ou mais buracos de minhoca entre regiões que admitem topologia de uma variedade prima. Dessa forma, mesmo sem assumirmos homogeneidade e isotropia, a presença de buracos de minhoca é fortemente desfavorável. Enquanto essas conclusões se aplicam a universos fechados que talvez não atinjam *closure density*, elas se aplicam a observações em escalas maiores que uma determinada quantidade definida pelo quanto *closure density* excede a atual densidade de massa-energia.

Investigações feitas usando o método "círculos no céu" observam que várias das variedades de Bieberbach são candidatas improváveis para a topologia do Universo, e diversas restrições sobre possíveis topologias esféricas que podem ser detectadas foram colocadas. Outra ferramenta muito utilizada ara investigar a topologia do cosmos é o chamado método das "imagens". Usando modelos de Bianchi e  $\Lambda$ CDM, a missão Planck () não encontrou evidências de uma topologia não-trivial. Porém, as topologias cobertas por  $S^1 \times S^2$  não foram consideradas nessa análise, dado que elas não surgem a partir desses modelos. Dados de () descartam a maior parte das variedades modeladas por  $S^3$ , exceto pela própria 3-esfera, e por outros dois quocientes dela. Portanto, se o Universo for de fato fechado, como sugerido em () , excluindo as topologias anel, as evidências apontam para variedades modeladas pela 3-esfera como topologia cósmica mais provável.

#### 4.2.1 Critério de closure

Seja  $(M^4, g)$  o espaço-tempo satisfazendo as ECE. Assuma que existe um campo vetorial unitário suave do tipo tempo  $U$  que representa o campo velocidade do fluxo médio de matéria do Universo. Observe que a derivada covariante pode ser decomposta ortogonalmente em partes irreduzíveis tal que

$$\nabla_i U_j = -U_i U_j' + \frac{1}{3} \theta h_{ij} + \sigma_{ij} + \omega_{ij}$$

onde  $U' = \nabla_U U$ , e  $h_{ij} = g_{ij} + U_i U_j$  é a projeção no complemento ortogonal de  $U$ . Além disso, se  $i, j$  representam direções perpendiculares à  $U$ , então  $\theta = \nabla_i U^i$  é o escalar de expansão volumétrica ou  $H = \theta/3$  é o escalar de Hubble,  $\sigma_{ij} = \nabla_{\langle i} U_{j \rangle}$  é o tensor *shear*, e  $\omega_{ij} = \nabla_{[i} U_{j]}$  é o

tensor vorticidade com  $\sigma_{ij}U^j = \omega_{ij}U^j = 0$ . Neste caso,  $\langle \rangle$  representa uma simetrização *trace-free*, e  $[\ ]$  representa anti-simetrização. Também assumimos que o fluxo médio de matéria é irrotacional, ou seja,  $\omega = 0$ . Dessa forma,  $U$  é uma hipersuperfície ortogonal tal que ao longo de qualquer ponto do espaço-tempo existe uma subvariedade  $M^3$  maximal conexa cujos espaços tangente são ortogonais a  $U$ , e que tem uma métrica induzida positiva definida  $h$ . Podemos interpretar  $M^3$  como uma secção espacial, ou um instante de tempo. Podemos, também, introduzir coordenadas locais  $(t, x^i)$  em uma vizinhança de um ponto qualquer de  $M^3$ , tal que métrica é expressa por

$$g = -\phi^2 dt \otimes dt + h_{ij}(t, x) dx^i dx^j$$

onde  $U = \phi^{-1} \frac{\partial}{\partial t}$  e  $t = 0$  corresponde a  $M^3$ , e  $x^i$  correspondem às coordenadas locais na secção temporal. É possível mostrar que definindo um campo vetorial  $X$  como

$$X \equiv \nabla_U U = \nabla \log \phi = h^{ij} \partial_i \log \phi \partial_j$$

em que  $X$  é tangente a  $M^3$ . Apesar de  $X$  estar definido globalmente, pode não ser o gradiente de uma função, dado que a expressão mostrada é local. Procuramos, agora, entender as propriedades da curvatura de Ricci da secção  $M^3$ . Para isso, usamos as ECE, juntamente com as relações de Gauss e Codazzi, para obter a seguinte expressão

$$\text{Ric}_{ij} = \nabla_{\langle i} X_{j \rangle} + X_{\langle j} X_{i \rangle} + \frac{1}{3} \left( 2\mu - \frac{2}{3} \theta^2 + |\sigma|^2 + 2\Lambda \right) h_{ij} - \sigma'_{\langle ij \rangle} - \theta \sigma_{ij} + \Pi_{ij}$$

onde  $\sigma' = \nabla_U \sigma$ . As quantidades restantes da expressão acima que não foram definidas são obtidas a partir da decomposição do tensor energia-momento em relação ao fluxo de matéria:

$$\frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} = \mu U_i U_j + q_i U_j + q_j U_i + p h_{ij} + \Pi_{ij}$$

onde  $q_i U^i = 0$ ,  $\Pi_{ij} U^j = 0$  e  $\Pi_{\langle ij \rangle} = \Pi_{ij}$ . Aqui,  $\mu$  é a densidade de energia, tal que quando expressa em unidades físicas é dada por  $8\pi G \rho / c^2$ . Similarmente,  $q$  representa a densidade de momento,  $p$  representa a pressão isotrópica e  $\Pi$  representa a pressão anisotrópica *trace-free*, todos multiplicados por  $8\pi G / c^4$ . Se  $q_i = 0$  e  $\Pi_{ij} = 0$ , então a matéria é um fluido perfeito. Tirando o traço da expressão para a curvatura de Ricci, obtemos

$$R = 2\mu - \frac{2}{3} \theta^2 + |\sigma|^2 + 2\Lambda$$

Apesar de o resultado de *closure* das cosmologias de *FLRW* implicar que  $R > 0$ , nesse contexto isso não é suficiente para afirmarmos que  $M^3$  é compacta, dado que não admite necessariamente uma curvatura constante. No entanto, a positividade da curvatura de Ricci Bakry-Émery é suficiente para concluirmos essa propriedade de *closure*.

### 4.2.2 Condição de Bakry-Émery

Considere uma variedade Riemanniana  $(M^n, g)$  e seja  $m > 0$ . Relembremos que o tensor de Ricci Bakry-Émery generalizado é dado por

$$\text{Ric}_V^m(g) = \text{Ric}(g) + \frac{1}{2}L_V g - \frac{1}{m}V \otimes V$$

em que  $L_V$  denota a derivada de Lie. O tensor de Ricci Bakry-Émery aparece em diversos contextos como a estrutura de produto *warped* da compactificação de Kaluza-Klein, e na fórmula de Ehlers-Ellis. Um versão do teorema de Bonnet-Myers constata que se a variedade é completa e

$$\text{Ric}_V^m(g) \geq (n + m - 1)\lambda g$$

para alguma constante  $\lambda > 0$ , então a variedade tem diâmetro limitado dado por

$$\text{diam}(M^n) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$$

Como a variedade é completa e tem diâmetro finito, concluímos que é compacta e possui grupo fundamental  $|\pi_1(M^n)| < \infty$ . Além disso, quando  $n = 3$  a eliptização de variedades tridimensionais implica que  $M^3$  é uma variedade esférica e, portanto, é dada pelo quociente de  $S^3$  por um subgrupo de isometrias que age de modo propriamente descontínuo  $\Gamma$ . Para que adequemos esses resultados ao contexto de modelos cosmológicos, fazemos  $V = -X$  e  $m = 1$ , de tal modo que

$$\text{Ric}_{-X}^1(g) = \frac{2}{3} \left( \mu + \Lambda + \frac{1}{2}|\sigma|^2 - \frac{1}{3}\theta^2 - \frac{1}{2}\text{div}X - \frac{1}{2}|X|^2 \right) g - \sigma' - \theta\sigma + \Pi$$

Além disso, definimos o escalar de Hubble  $H$ , a densidade de matéria total  $\Omega_0$ , e a densidade de energia escura  $\Omega_\Lambda$  como

$$H = \frac{1}{3}\theta, \quad \Omega_0 = \inf_{M^3} \frac{\mu}{3H^2}, \quad \Omega_\Lambda = \inf_{M^3} \frac{\Lambda}{3H^2}$$

Os termos remanescentes são negligenciáveis, então definimos a seguinte quantidade

$$\varepsilon = \inf_{x \in M^3} \min_{w \in T_x M^3; |w|=1} \left[ \left( \frac{|\sigma|^2}{6H^2} - \frac{\text{div}X + |X|^2}{6H^2} \right) g - \frac{\sigma'}{2H^2} - \frac{3\sigma}{2H} + \frac{\Pi}{2H^2} \right] (w, w)$$

Segue-se que

$$\text{Ric}_{-X}^1(g) \geq 2(\Omega_0 + \Omega_\Lambda - 1 + \varepsilon)H^2 g$$

Aplicando o teorema de Bonnet-Myers generalizado, obtemos o resultado de *closure* e um limite para o diâmetro do universo. A constante de Hubble será definida como  $H_0 = \inf_{M^3} H$

**Teorema** Considere um espaço-tempo satisfazendo as ECE, e assuma que existe um campo vetorial unitário suave do tipo tempo que representa o campo velocidade do fluxo médio de matéria do Universo. Seja  $M^3$  uma secção espacial completa ortogonal ao fluxo médio de matéria com constante de Hubble  $H_0 > 0$ . Se a soma das densidades da matéria e da energia escura for grande o suficiente tal que

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_\Lambda > 1 - \varepsilon$$

então as seguintes propriedades são satisfeitas:

- O Universo é fechado, i.e.,  $M^3$  é compacto;
- A secção espacial  $M^3$  é uma variedade modelada pela 3-esfera, i.e., é dada pelo quociente de  $S^3$  por um subgrupo de isometrias que age de modo propriamente descontínuo;
- O diâmetro do Universo satisfaz

$$\text{diam}(M^3) \leq \frac{\pi}{H_0} \sqrt{\frac{3}{2(\Omega - 1 + \varepsilon)}}$$

De acordo com (), se assumirmos que o Universo é dado por um modelo de FLRW, então dados da temperatura do CMB e da polarização das anisotropias nos fornecem

$$\Omega = 1.0106 \pm 0.0065$$

com 68% de confiança, implicando em um limite superior para o diâmetro

$$\text{diam} \leq 1.2 \times 10^{28} \text{ m}$$

com 85% de confiança. Esse valor é maior do que algumas estimativas obtidas usando modelos tradicionais, porém depende de suposições como: os dados analisados da missão Planck que assumem o modelo FLRW não nos fornecem diferenças consideráveis caso o Universo não seja FLRW, e a estimativa para  $\Omega$  se aplica para o Universo inteiro, e não apenas para a região observável.

É importante ressaltar que o problema de determinar se *closure density* é alcançada, permanece em aberto, e como indicado pelo teorema, as possíveis topologias, nesse caso, são bastante restritas mesmo desconsiderando o princípio cosmológico. Por outro lado, caso *closure density* não seja alcançado, então o teorema de quase-*splitting* se aplica e obtemos vínculos topológicos que serão discutidos a seguir.

### 4.2.3 Topologia de um Universo fechado

Vimos anteriormente que a curvatura de Ricci Bakry-Émery pode ser usada para obter um resultado de *closure* e um limite para o diâmetro, o que nos levou a uma lista de possíveis topologias modeladas por formas espaciais esféricas. No entanto, é possível que esse limite inferior seja levemente negativo. Nesse caso, o teorema de quase-*splitting* nos dá condições sob as quais a variedade quase *splits-off* um fator Euclideano. Nesta secção, estaremos interessados nas conclusões topológicas que seguem desse resultado, sob a suposição de que o Universo é espacialmente fechado.

**Teorema** Considere um espaço-tempo satisfazendo as ECE, e assuma que existe um campo vetorial unitário suave do tipo tempo que representa o campo velocidade do fluxo médio de matéria do Universo. Seja  $M^3$  compacta e ortogonal ao fluxo médio de matéria com constante de Hubble  $H_0$ . Existe  $\delta > 0$  pequeno o suficiente dependente no diâmetro, volume e tamanho de  $M^3$ , tal que se

$$(\Omega - 1 + \varepsilon)H_0^2 \geq -\delta$$

então o grupo fundamental  $\pi_1(M^3)$  é quase-abeliano. Em particular, a secção espacial admite uma cobertura finita cujo grupo fundamental é abeliano.

As restrições impostas por esse teorema, juntamente com as consequências do teorema de geometrização para variedades tridimensionais, proveem uma lista de topologias que serão detalhadas abaixo. É importante notar que uma curvatura negativa relativamente baixa, que não é inconsistente com as possibilidades, não permite que a secção espacial tenha a topologia de uma variedade hiperbólica. Em contraste, no modelo padrão da cosmologia, qualquer quantidade de curvatura negativa implica que a secção espacial tenha a topologia de uma variedade hiperbólica.

A ordem de grandeza a que  $\delta$  precisa satisfazer no teorema anterior para que as conclusões sejam válidas depende do diâmetro e do volume de  $M^3$ . No entanto, podemos obter uma estimativa do limite inferior de  $\delta$  garantindo a aplicabilidade ao Universo observável. Assumindo  $H_0 > 5 \times 10^{-27} \text{ m}^{-1}$ , o espectro CMB-Planck, juntamente com dados de *Baryon Acoustic Oscillations* (BAO) (()), implicam que para um Universo FLRW

$$(\Omega - 1 + \varepsilon)H_0^2 \geq -1.25 \times 10^{-55} \text{ m}^{-2}$$

com 95% de confiança, o que sugere uma possível aplicabilidade do teorema ao Universo físico. Embora não haja uma fórmula para a dependência de  $\delta$  no diâmetro, uma possível conjectura é

dada quando limitamos superiormente a quantidade  $\delta \cdot \text{diam}^2$  por uma constante universal para que as conclusões do teorema sejam válidas.

#### 4.2.4 Consequências da geometrização

Discutiremos, agora, as consequências de se assumir as conclusões do último teorema, em que  $M^3$  tem grupo fundamental quase-abeliano, e derivar as possíveis topologias advindas da classificação. Considerando (),  $M^3$  não pode ser expressa como uma soma conexa  $M_1 \# M_2$ , onde  $M_1$  e  $M_2$  são variedades compactas com grupos fundamentais não-triviais, exceto pelo caso em que  $\pi_1(M_1) = \pi_1(M_2) = \mathbb{Z}_2$ . Desse modo, ou  $M^3$  é primo, ou  $M^3 = \mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$ . Seja  $N^3$  uma cobertura finita de  $M^3$  com grupo fundamental abeliano. Como  $M^3$  é compacto,  $N^3$  também é. Além disso, assumindo que  $N^3$  é orientável, a geometrização pode ser usada para prover uma lista de possíveis grupos fundamentais abelianos associados a variedades compactas orientáveis. Como exemplo, temos que  $\pi_1(N^3)$  pode ser um dos seguintes grupos:  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}^3$  e  $\mathbb{Z}_p$ . Variedades obtidas a partir desses grupos são:  $S^1 \times S^2$ ,  $T^3$  e  $L(p, q)$ , respectivamente. Observe-mos que de acordo com (), como o grupo fundamental de  $N^3$  deve ser primo, se  $N_1$  e  $N_2$  são variedades tridimensionais, primas, orientáveis e fechadas, com grupos fundamentais isomorfos (que não são espaços *lens*), então eles devem ser homeomorfos. Segue-se que se  $\pi_1(N^3) = \mathbb{Z}$ , então  $N^3$  é homeomorfo a  $S^1 \times S^2$ , enquanto se  $\pi_1(N^3) = \mathbb{Z}^3$ , então  $N^3$  é homeomorfo a  $T^3$ , e finalmente, se  $\pi_1(N^3) = \mathbb{Z}_p$ , então  $N^3$  é homeomorfo a  $L(p, q)$ . A discussão mostrada acima argumenta que se o último teorema proposto for válido, então  $M^3$  deve ser coberta por  $S^3$ ,  $S^1 \times S^2$  ou  $T^3$ .

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

É imprescindível, portanto, explicitarmos não só as estruturas geométricas e topológicas por trás da discussão sobre modelos cosmológicos, mas também a divergência trazida quando se abandona determinadas suposições. No modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, fazemos uso do teorema de Schur para restringir a curvatura da variedade  $M^3$ , e do teorema de Killing-Hopf para estabelecer uma isometria entre a variedade  $M^3$  e seu espaço de recobrimento universal  $\tilde{M}^3$  sob a ação de um subgrupo que age de modo propriamente descontínuo  $\Gamma$ . Com isso, concluímos que o modelo de FLRW admite uma geometria modelada por um espaço homogêneo, isotrópico, conexo por caminhos (uma condição mais fraca que simples-conexidade) e de curvatura constante. No entanto, apesar do relativo sucesso do modelo, anisotropias na temperatura mostram contradições nas cosmologias FLRW.

Seguindo o trabalho de Galloway, Khuri e Woolgar, analisamos a topologia e outros aspectos de modelos cosmológicos gerais que abdicam completamente das típicas suposições de homogeneidade e isotropia. Condições que garantem um Universo fechado foram dadas juntamente com um limite para seu diâmetro, usando uma modificação do teorema de Bonnet-Myers. Outra análise da topologia sob hipóteses mais fracas envolvendo curvatura e diâmetro, derivada do teorema de quase-*splitting* combinada com o teorema de geometrização de 3-variedades, nos provém com uma lista de possíveis topologia de um Universo fechado. Especificamente, as secções espaciais permitidas, devem ser cobertas por  $S^3$  ou  $T^3$ , ou são dadas por  $S^1 \times S^2$ ,  $S^1 \tilde{\times} S^2$ ,  $S^1 \times \mathbb{R}P^2$  ou  $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$ . Em particular, isso elimina o restante das somas conexas (exceto por uma), assim como diversas topologias hiperbólicas.

Finalmente, consideramos a estimativa para  $\delta$ . O teorema de quase-*splitting* dita que o valor crítico de  $\delta$  é uma função de parâmetros como o diâmetro do Universo. No entanto, o teorema não constroi essa função, nem nos dá uma forma direta de analisar suas propriedades. Porém, como esse valor é não-nulo, temos que mesmo com curvatura de Ricci negativa da secção espacial, fortes restrições topológicas são impostas dependendo do valor de  $\delta$ , o que contradiz o modelo padrão da cosmologia, onde apenas valores não-negativos da curvatura escalar induzem rigidez topológica.

## REFERÊNCIAS

- ADE, P. A. R. Planck 2015 results. xiii. cosmological parameters. In *Astronomy & Astrophysics*, v. 594, oct. 2016. p. 1-63.
- AGHANIM, N. Planck 2018 results. vi. cosmological parameters. In *Astronomy & Astrophysics*, v. 641, sep 2020. p. 1-67.
- ASCHENBRENNER, M. **3-Manifolds Groups**. *European Mathematical Society (EMS Series of Lectures in Mathematics)* (2015).
- BENNET, C. L. Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Final maps and results. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1212.5225>. Acesso em: 25 jan. 2026.
- CARMO, M. D. *Geometria Riemanniana*. Rio de Janeiro: IMPA, 1977.
- EFASTATHIOU, G. The evidence for a spatially flat universe. *Monthly Notices of Royal Astronomical Society*, v. 496 (2020). p. L91 - L95.
- GALLOWAY, G. J. The topology of general cosmological models. *Classical and Quantum Gravity*, v. 39, (2022). p. 1 - 14.
- KHURI, M. New restrictions on the topology of extreme black holes. *Letters in Mathematical Physics*, v. 109, n. 3, mar. 2019. p. 661 - 673 (2019).
- LACHIÈZE-REY, M. Cosmic topology. *Physics Reports*, v. 254. p. 135 - 254, 2003.
- LEE, J. M. *Introduction to Topological Manifolds*. New York: Springer, 2010.
- LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*. New York: Springer, 2013.
- NOVIKOV, S. P. *Modern Geometric Structures and Fields*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2006.
- PERELMAN, G. **The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications**. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/math.DG/0211159>. Acesso em 25 jan. 2026.
- POINCARÉ, H. Analysis situs. *Jornal de l'École Polytechnique* v. 2, n. 1 (1895). p. 1 - 23.
- SANDHU, J. **Cosmic Topology**. Master's thesis, (Mestrado em Física Teórica) - Faculdade de Ciências, Universidade de Helsinque, Helsinque, 2013.
- SCOTT, P. The geometries of 3-manifolds. *London Mathematical Society* v. 15 (1983). p. 401 - 487.
- THURSTON, W. P. Three dimensional manifolds, kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bulletin of the American Mathematical Society* v. 6, n. 3 (1982). p. 357 - 381.