



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

ANTÔNIO VALDERLANIO RIBEIRO DA SILVA

VARIAÇÃO L^p DE OPERADORES MAXIMAIS DO TIPO CONVOLUÇÃO

FORTALEZA

2020

ANTÔNIO VALDERLANIO RIBEIRO DA SILVA

VARIAÇÃO L^p DE OPERADORES MAXIMAIS DO TIPO CONVOLUÇÃO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. José Ederson Melo Braga.

FORTALEZA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- S578v Silva, Antônio Valderlanio Ribeiro da.
Variação Lp de operadores maximais do tipo convolução / Antônio Valderlanio Ribeiro da Silva. – 2020.
80 f.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2020.
Orientação: Prof. Dr. José Ederson Melo Braga.
1. Operadores maximais do tipo convolução. 2. Variação limitada. 3. Núcleo de Gauss. 4. Núcleo de Poisson. 5. Análise harmônica discreta. I. Título.

CDD 510

ANTÔNIO VALDERLANIO RIBEIRO DA SILVA

VARIAÇÃO L^p DE OPERADORES MAXIMAIS DO TIPO CONVOLUÇÃO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Análise.

Aprovada em: 10/11/2020

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Ederson Melo Braga (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Diego Eloi Misquita Gomes
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia
do Ceará (IFCE)

Dedico este trabalho aos meus pais, Raimundo e Maria; à minha irmã Valdirene e meu pequeno irmão Vinícius.

AGRADECIMENTOS

Acima de tudo, agradeço aos meus pais e à minha irmã pelo apoio incondicional e pelo incentivo constante a perseguir meus sonhos, por mais audaciosos que parecessem. Sou profundamente grato por estarem ao meu lado em cada etapa desta jornada e pela compreensão nos momentos em que precisei me dedicar mais aos estudos, afastando-me temporariamente da convivência familiar.

Aos professores que marcaram minha trajetória acadêmica, deixo meu reconhecimento por terem me mostrado a beleza da matemática e por despertarem em mim a vontade de conhecê-la cada vez mais. Um agradecimento especial ao meu orientador, Professor Dr. José Ederson Melo Braga, pela confiança no meu potencial, pelo estímulo incansável à busca pelo conhecimento e pela disponibilidade sempre que precisei de sua orientação.

Aos professores que compuseram a banca examinadora, minha gratidão pelo tempo dedicado à leitura, análise e contribuições valiosas para o aprimoramento deste trabalho.

Aos amigos que conquistei durante a graduação e o mestrado, Allen Roossin, Alan Pio, Dimas Macedo, Rodrigo Ribeiro, Caio Sales, Selene Carvalho, Camila Sena e Gabriel Santos, obrigado pela alegria, pelo companheirismo diário e, mesmo sem saberem, pelo apoio que me ajudou a superar momentos difíceis.

Em especial, agradeço a José Walisson e Isnard Lopes, pelas risadas com piadas ruins, pelas conversas enriquecedoras e pela parceria nas incontáveis horas de estudo. Agradeço também a Pedro Santos pela contribuição essencial na revisão do texto desta dissertação.

Por fim, agradeço ao CNPq pelo suporte financeiro por meio da bolsa de auxílio, à Secretaria de Pós-Graduação, em especial à Andrea Costa, pelo atendimento diligente, e a todas as pessoas que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

“Minha mente rebela-se contra a estagnação.
Dê-me problemas, dê-me trabalho, dê-me o
mais abstruso criptograma ou a mais intrincada
análise, e eu estarei em casa.” (Arthur Conan
Doyle)

RESUMO

Baseado no trabalho de (Carneiro; Svaiter, 2013), mostraremos nesta dissertação que os operadores de uma subclasse \mathfrak{M} dos Operadores Maximais do tipo Convolução (OMC), para a qual pertencem o Operador Maximal de Gauss e o Operador Maximal de Poisson, são limitados nos espaços de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e têm variação L^p limitada valendo:

$$\|\nabla M_\varphi f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

para $M_\varphi \in \mathfrak{M}$ quando $p \geq 1$ e $d = 1$, ou para quando $p = 2$ ou $p = \infty$ e $d > 1$. Apresentaremos ainda resultados similares quando f for uma função discreta e quando for uma função de variação pontual limitada.

Palavras-chave: operador maximal do tipo convolução; variação limitada; núcleo de Gauss; núcleo de Poisson; análise harmônica discreta.

ABSTRACT

Based on the work of (Carneiro; Svaiter, 2013), we will show in this dissertation that operators from a subclass \mathfrak{M} of Maximal Operator of Convolution Type, to which belong the Gauss Maximal Operator and the Poisson Maximal Operator, are bounded on the Sobolev spaces $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ and have bounded L^p variation holding:

$$\|\nabla M_\varphi f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

for $M_\varphi \in \mathfrak{M}$ when $p \geq 1$ and $d = 1$ or when $p = 2$ or $p = \infty$ and $d > 1$. We will also show similar results for when f is a discrete function and when it is a bounded pointwise variation function.

Keywords: maximal operator of the convolution type; bounded variation; Gauss kernel; Poisson kernel; discrete harmonic analysis.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

- EDP Equações Diferenciais Parciais
- OMC Operadores Maximais do tipo Convolução
- OMCD Operadores Maximais do tipo Convolução Discretos

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbb{R}^d	Espaço Euclidiano de dimensão d .
\mathbb{Z}^d	Espaço Discreto de dimensão d , mais especificamente, o subconjunto de \mathbb{R}^d onde os pontos possuem apenas coordenadas inteiras.
Ω	Denota um subconjunto aberto de \mathbb{R}^d .
Ω_T	Denota o cilindro hiperbólico definido por $\Omega_T := \Omega \times (0, T]$, onde $T > 0$.
$\partial_p \Omega_T$	Denota a fronteira hiperbólica definida por $\partial_p \Omega_T := \overline{\Omega_T} \setminus \Omega_T$.
$B_r(x_0)$	Bola aberta em \mathbb{R}^d de centro x_0 e raio r , isto é, $B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^d : x - x_0 < r\}$.
$\langle x, y \rangle$	Sendo $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^d$, representa o produto interno de x por y , ou seja, $\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n$.
χ_A	Função característica do conjunto A , ou seja, $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$ e 0, caso contrário.
$ A $	Volume do conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ com respeito à medida de Lebesgue μ , ou seja, $ A = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_A(x) d\mu$.
$L^p(\Omega)$	Representa o espaço de Lebesgue correspondente ao conjunto das funções cuja p -ésima potência é Lebesgue integrável.
$L^p_{\text{weak}}(\Omega)$	Espaço das funções cujas superfícies de nível tem volume controlado por uma potência negativa do nível, mais especificamente, se existe $A \geq 0$ tal que $ \{x \in \Omega : f(x) \geq \alpha\} \leq A \cdot \alpha^{-p}$.
$W^{k,p}(\Omega)$	Representa o espaço de Sobolev correspondente ao conjunto das funções que possuem derivadas fracas até ordem k , sendo todas com p -ésima potência Lebesgue integrável.
$\text{Var}(f, P)$	A variação pontual de uma função f com respeito a uma partição P dada.
$\text{Var}(f)$	O supremo de $\text{Var}(f, P)$ tomado sobre todas as partições P possíveis de um determinado domínio.
$\mathcal{V}(n)$	Sendo $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^d$, $\mathcal{V}(n) := \{n \pm e_i\}_{1 \leq i \leq d}$.
$\mathcal{V}(J)$	União de $V(j)$ para todo $j \in J \subset \mathbb{Z}^d$.
$\mathcal{B}(\Omega)$	Representa a σ -álgebra de Borel do conjunto Ω .

M_H	Operador Maximal de Hardy-Littlewood.
$M_K f$	Operador Maximal de Gauss com respeito à função f .
$M_P f$	Operador Maximal de Poisson com respeito à função f .
\mathfrak{M}	Uma subclasse dos OMC com certas propriedades chaves.
\nearrow	Representa convergência monótona crescente, ou seja, dizemos que $x_n \nearrow x$, se a sequência $\{x_n\}$ é crescente e converge para x .

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	RESULTADOS PRELIMINARES	14
2.1	Análise Real	14
2.2	Espaços de Sobolev	19
2.3	Funções harmônicas e calóricas	24
3	OPERADORES MAXIMAIS DO TIPO CONVOLUÇÃO	27
3.1	Operadores Maximais	27
4	VARIAÇÃO EM DOMÍNIOS CONTÍNUOS	34
4.1	Operador Maximal de Gauss	34
4.2	Operador Maximal de Poisson	39
4.3	Teorema Principal	44
5	VARIAÇÃO EM DOMÍNIOS DISCRETOS	61
5.1	Funções discretas	61
5.2	Operador Maximal de Gauss Discreto	63
5.3	Operador Maximal de Poisson Discreto	68
5.4	Teorema Principal	72
6	CONCLUSÃO	78
	REFERÊNCIAS	80

1 INTRODUÇÃO

Sabemos que o Operador Maximal de Hardy-Littlewood, aqui denotado por M_H , desempenha um papel fundamental na demonstração do clássico Teorema da Diferenciação de Lebesgue. Além disso, desde sua criação, esse operador tem despertado o interesse de diversos matemáticos, e nas últimas décadas tem havido um esforço significativo para compreender a regularidade e os efeitos desse operador e de suas variantes nos mais diversos espaços de funções. Como exemplo, podemos citar o Teorema de Hardy-Littlewood-Wiener, que estabelece a limitação do operador $M_H: L^p(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^d)$ nos espaços de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^d)$. Posteriormente, (Kinnunen, 1997) demonstrou que $M_H: W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ também é limitado nos espaços de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ para $p > 1$. Em (Luiro, 2006) é estabelecida ainda a continuidade de M_H também para $p > 1$. Para $p = 1$ o cenário torna-se mais complexo, e muitos problemas permanecem em aberto. No entanto, resultados como o de (Tanaka, 2002) mostram que se $f \in W^{1,1}(\mathbb{R})$ então o Operador Maximal de Hardy-Littlewood à direita, M_r (ou o à esquerda, M_l) possui derivada fraca satisfazendo a desigualdade

$$\|(M_r f)'\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f'\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Outros avanços incluem estudos sobre variação pontual, como em (Aldaz; Lázaro, 2007) onde se demonstra que, se f é de variação pontual limitada em \mathbb{R} , será também o Operador Maximal de Hardy-Littlewood não-centrado \widetilde{M}_H , com a estimativa

$$\text{Var}(\widetilde{M}_H f) \leq \text{Var}(f).$$

Neste trabalho, apresentaremos uma classe especial de operadores, os OMC, e investigaremos propriedades de regularidade e variação para alguns deles. Avançaremos na direção de resultados análogos aos obtidos por (Kinnunen, 1997) para M_H porém com maior generalidade, uma vez que M_H é um caso particular de OMC. Após estabelecer as propriedades de regularidade, focaremos em dois operadores específicos: o Operador Maximal de Gauss e o Operador Maximal de Poisson, os quais possuem estreita relação com equações diferenciais parciais clássicas.

Com as ferramentas desenvolvidas, estaremos aptos a demonstrar uma propriedade robusta para uma subclasse \mathfrak{M} dos OMC: além de possuírem variação limitada em L^p , tais operadores não ampliam a variação, ou seja,

$$\|\nabla M_\varphi f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \quad (1.1)$$

Contudo, essa desigualdade não vale em geral. De fato, obteremos resultados positivos para $p \geq 1$ em dimensão 1, enquanto em dimensões superiores teremos resultados para $p = 2$ e $p = \infty$. Adicionalmente, à semelhança do resultado de (Aldaz; Lázaro, 2007) para o operador não-centrado, provaremos que os operadores $M_\varphi \in \mathfrak{M}$ quando aplicados a funções de variação limitada, preservam essa propriedade, valendo

$$\text{Var}_{\mathbb{R}}(M_\varphi f) \leq \text{Var}_{\mathbb{R}}(f).$$

Por fim, estenderemos esses resultados para operadores atuando em funções de domínio discreto. Apresentaremos dois exemplos baseados em soluções discretizadas das equações de Gauss e Poisson, demonstrando que uma subclasse desses operadores também satisfaz uma versão discreta da Desigualdade 1.1.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo, enunciaremos os resultados fundamentais que serão utilizados ao longo do texto. Como esses teoremas não são o foco principal desta dissertação, omitiremos algumas demonstrações, remetendo o leitor às referências pertinentes para consulta.

2.1 Análise Real

Doravante, exceto quando dito em contrário, todas as integrais envolvidas são integrais de Lebesgue e Ω é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^d . Assim, podemos definir os conjuntos $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$ como

$$L^p(\Omega) := \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável} : \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

e para $p = \infty$,

$$L^\infty(\Omega) := \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável} : \text{ess sup}_{\Omega} |f| < \infty \right\}.$$

A norma deste espaço será então

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & (1 \leq p < \infty) \\ \text{ess sup}_{\Omega} |f| & (p = \infty). \end{cases}$$

Por comodidade, quando $\Omega = \mathbb{R}^d$ usaremos a notação L^p ao invés de $L^p(\mathbb{R}^d)$ e $\|f\|_p$ no lugar de $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$.

Teorema 2.1.1 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Então, $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|f \cdot g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}. \quad (2.1)$$

Demonstração. Veja (Folland, 1999, p. 182). □

Teorema 2.1.2 (Desigualdade de Minkowski). *Sejam f, g funções em $L^p(\Omega)$, então $f+g \in L^p(\Omega)$ e*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}. \quad (2.2)$$

Demonstração. Veja (Folland, 1999, p. 183). □

Teorema 2.1.3 (Desigualdade de Jensen). *Sejam $A \subset \mathbb{R}^d$ com $|A| = 1$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ integrável à Lebesgue e $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexa. Então,*

$$\alpha \left(\int_A f(x) dx \right) \leq \int_A \alpha(f(x)) dx. \quad (2.3)$$

Demonstração. Sendo α convexa e $t \in \mathbb{R}$ fixo, existe constante c_t tal que

$$\alpha(y) \geq \alpha(t) + c_t \cdot (y - t), \forall y \in \mathbb{R}.$$

Tomando assim, $t = \int_A f(x) dx$ na equação acima obtemos:

$$\begin{aligned} \int_A \alpha(f(x)) dx &\geq \int_A (\alpha(t) + c_t \cdot (f(x) - t)) dx \\ &= \alpha(t) \int_A dx + c_t \cdot \int_A f(x) dx - c_t \cdot t \int_A dx \\ &= \alpha(t) \\ &= \alpha \left(\int_A f(x) dx \right). \end{aligned}$$

□

Corolário 2.1.4. *Sejam $f, g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ integráveis à Lebesgue, com $\int_{\mathbb{R}^d} g = 1$ e $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexa. Então,*

$$\alpha \left(\int_{\mathbb{R}^d} f g(x) dx \right) \leq \int_{\mathbb{R}^d} \alpha(f(x)) g(x) dx. \quad (2.4)$$

Demonstração. Assim como no teorema anterior, tome $t = \int_{\mathbb{R}^d} f g(x) dx$ de modo a obter:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \alpha(f(x)) g(x) dx &\geq \int_{\mathbb{R}^d} (\alpha(t) + c_t \cdot (f(x) - t)) g(x) dx \\ &= \alpha(t) \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx + c_t \cdot \int_{\mathbb{R}^d} f g(x) dx - c_t \cdot t \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx \\ &= \alpha(t) \\ &= \alpha \left(\int_{\mathbb{R}^d} f g(x) dx \right). \end{aligned}$$

□

Definição 2.1.5. *Dadas funções $f, g \in L^1$, a convolução de f com g é o operador definido e denotado por:*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y) g(y) dy.$$

Teorema 2.1.6 (Teorema de Young). *Se $f \in L^1$ e $g \in L^p$, então $f * g \in L^p$ e vale a estimativa*

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p. \quad (2.5)$$

Demonstração. Veja (Brezis, 2011, p. 104). □

Teorema 2.1.7 (Lema de Fatou). *Seja $\{f_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis não-negativas convergindo pontualmente para f . Então,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n.$$

Demonstração. Veja (Stein, 2005, p. 61). □

Teorema 2.1.8 (Teorema da convergência monótona). *Seja $\{f_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência crescente de funções mensuráveis não-negativas convergindo pontualmente para f . Então,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n = \int_{\mathbb{R}^d} f.$$

Demonstração. Veja (Stein, 2005, p. 62). □

Proposição 2.1.9 (Lema de Riemann-Lebesgue). *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e*

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \langle x, t \rangle} dx.$$

Então, $F(t) \rightarrow 0$ quando $|t| \rightarrow \infty$.

Demonstração. Veja (Wheeden; Zygmund, 2015, p. 372). □

Proposição 2.1.10. *Seja $f \in C^0(\mathbb{R})$ e convexa no intervalo (a, b) , então para todo $[c, d] \subset (a, b)$, f é Lipschitz em $[c, d]$.*

Demonstração. Uma definição equivalente para f ser convexa é valer para cada $A < x < B$:

$$\frac{f(x) - f(A)}{x - A} \leq \frac{f(B) - f(A)}{B - A} \leq \frac{f(B) - f(x)}{B - x}. \quad (2.6)$$

Então, dados $A < c - \varepsilon < c < x < y < d < d + \varepsilon < B$ vale:

$$\frac{f(c) - f(c - \varepsilon)}{\varepsilon} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(d + \varepsilon) - f(d)}{\varepsilon}.$$

Tomando

$$C := \max \left\{ \left| \frac{f(c) - f(c - \varepsilon)}{\varepsilon} \right|, \left| \frac{f(d + \varepsilon) - f(d)}{\varepsilon} \right| \right\}$$

teremos $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$. □

Proposição 2.1.11 (Caracterização das funções contínuas e convexas). *Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e convexa. Então, f assume uma das seguintes formas:*

- (i) f é não-crescente,
- (ii) f é não-decrescente,
- (iii) Existe $x_0 \in \mathbb{R}$, ponto de mínimo global, tal que f é não-crescente em $(-\infty, x_0]$ e não-decrescente em $[x_0, \infty)$.

Demonstração. Suponha que f não satisfaz (i), então existem $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ tais que

$$f(a) < f(b).$$

Afirmamos que f é estritamente crescente em $[b, \infty)$. De fato, pela convexidade de f e (2.6) temos para todo $y > x > b$,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0.$$

Suponha ainda que f não satisfaz (ii), então existem pontos $c, d \in \mathbb{R}$ tais que $c < d$ e $f(c) > f(d)$. Note que pelo que já foi provado, podemos supor sem perda de generalidade que $d \leq b$. Então, de maneira análoga ao que já provamos, podemos ver que f é estritamente decrescente em $(-\infty, c]$.

Por fim, como f é contínua, existe $x_0 \in [c, b]$ ponto de mínimo e sendo f convexa, tal ponto de mínimo é também global. Por fim, mostraremos que f é não-decrescente em $[x_0, b]$, o caso $[c, x_0]$ é análogo. Novamente pela convexidade de f , para todos $x_0 \leq x < y \leq b$, temos pelo fato que x_0 é ponto de mínimo.

$$\frac{f(y) - f(x)}{x - y} \geq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \geq 0.$$

De onde segue que $f(x) \leq f(y)$. □

Também não é difícil notar que a proposição anterior permanece válida se f estiver definida apenas em intervalos da forma (a, b) , $(-\infty, a)$ ou (b, ∞) .

Proposição 2.1.12. *Seja $f \in L^p$ uniformemente contínua. Então, para cada $\varepsilon > 0$ existe uma bola B_r onde:*

- (i) $\int_{\mathbb{R}^d \setminus B_r} f(x) dx < \varepsilon$.
- (ii) $|f(x)| < \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus B_r$

Demonstração. A demonstração de (i) pode ser consultada em (Stein, 2005, p. 65). Para (ii), suponha que não exista $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |f(x)|$, então, para algum $\varepsilon > 0$ existe uma sequência $\{x_n\}_{n \geq 1}$ com $|x_n| \rightarrow \infty$ e $|f(x_n)| > \varepsilon$. Passando, se necessário a uma subsequência, podemos assumir

que $|x_{n+1}| > |x_n| + 1$ e pela continuidade uniforme de f existe um $\delta \in (0, 1)$ tal que $|f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $x \in B_\delta(x_n)$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_\delta(x_n)} |f(x)|^p dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^p}{2^p} |B_\delta| = \infty.$$

Mas isso contradiz o fato de $f \in L^p$. □

Definição 2.1.13. Uma função mensurável $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ é dita estar em $L^p_{weak}(E)$, $1 \leq p < \infty$, quando existe constante $A \geq 0$ tal que:

$$|\{x : f(x) \geq \alpha\}| \leq A\alpha^{-p}, \quad \forall \alpha > 0.$$

Proposição 2.1.14. Se $f \in L^1_{weak}(\mathbb{R})$ é contínua, convexa e $f \geq 0$ então

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Demonstração. Provaremos apenas o caso $x \rightarrow \infty$, o outro é análogo. Pela Proposição 2.1.11, existe

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L,$$

onde $L \in [0, \infty]$. Supondo $L \neq 0$, existem constantes $0 < L' < L$ e $A > 0$ tal que $f(x) > L'$ para todo $x > A$. Assim por $f \in L^1_{weak}(\mathbb{R})$ existe $c > 0$ tal que:

$$\infty = |(A, \infty)| \leq |\{x : f(x) \geq L'\}| \leq \frac{c}{L'}.$$

Contradição. □

Definição 2.1.15. Dados um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e uma função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, a variação pontual de f em I é o valor dado por:

$$\text{Var}_I(f) := \sup_P \text{Var}(f, P),$$

onde o supremo acima é tomado sobre todas as partições $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de I e

$$\text{Var}(f, P) := \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

Diremos assim, que f tem variação pontual limitada em I quando $\text{Var}_I(f) < \infty$.

Teorema 2.1.16. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável e de variação pontual limitada, então existe uma medida de Radon finita e com sinal, $\lambda: \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

$$\int_{\Omega} f \varphi' dx = - \int_{\Omega} \varphi d\lambda,$$

$\forall \varphi \in C_0^1(\Omega)$. Além disso, teremos

$$|Df|(\Omega) \leq \text{Var}_{\Omega}(f).$$

Demonstração. Veja demonstração e mais detalhes sobre medidas de Radon em (Leoni, 2009, p. 216). □

2.2 Espaços de Sobolev

Dadas $u \in C^1(\Omega)$ e $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$, pela fórmula de integração por partes sabemos que:

$$\int_{\Omega} u(x) \varphi_{x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} u_{x_i} \varphi(x) dx, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Podemos generalizar este resultado. Tomando k inteiro e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ um multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$, teremos:

$$\int_{\Omega} u(x) D^{\alpha} \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^{\alpha} u(x) \varphi(x) dx.$$

Motivados por este fato, definimos o conceito de derivada fraca como segue:

Definição 2.2.1. *Sejam $u, v \in L_{loc}^1(\Omega)$ e α um multi-índice. Dizemos que v é a α -ésima derivada fraca de u , escrevendo $D^{\alpha} u = v$, quando*

$$\int_{\Omega} u(x) D^{\alpha} \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^{\alpha} u(x) \varphi(x) dx$$

para toda função $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$.

Lema 2.2.2. *Se $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ possui α -ésima derivada fraca, tal derivada é única a menos de um conjunto de medida nula.*

Demonstração. Veja (Evans, 2010, p. 257). □

Pelo Lema anterior, segue naturalmente que se u possui derivada no sentido clássico, existirá derivada fraca e essa será igual à derivada clássica. Portanto, de agora em diante quando dissermos que uma função u possui derivada, será sempre no sentido fraco.

Definição 2.2.3. O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ consiste de todas as funções $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem:

- (i) $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$;
- (ii) existe $D^\alpha f$ para todo α multi-índice com $|\alpha| \leq k$ e
- (iii) $\{D^\alpha f\}_{|\alpha|=1}^k \in L^p(\Omega)$.

Além disso, a norma deste espaço será

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha f|^p dx, & (1 \leq p < \infty), \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \text{ess sup}_{\Omega} |D^\alpha f|, & (p = \infty). \end{cases}$$

Assim como foi feito nos espaços L^p , quando $\Omega = \mathbb{R}^d$ escreveremos $\|f\|_{k,p}$ ao invés de $\|f\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^d)}$. Usaremos também a notação $D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ e $Df = (D_1 f, D_2 f, \dots, D_d f)$.

Proposição 2.2.4 (Propriedades de funções em $W^{1,p}(\Omega)$).

- (i) Se $f, g \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, então $fg \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e para $i = 1, 2, \dots, d$, vale

$$D_i(f \cdot g) = D_i f \cdot g + f \cdot D_i g \quad \text{q.t.p.}$$

- (ii) Se $f \in W^{1,p}(\Omega)$ e $g \in C^1(\mathbb{R})$, $g' \in L^\infty(\mathbb{R})$, $g(0) = 0$, então $g \circ f \in W^{1,p}(\Omega)$ e para $i = 1, 2, \dots, d$, vale

$$D_i(g \circ f) = g'(f) \cdot D_i f, \quad \text{q.t.p.}$$

- (iii) Se $f \in W^{1,p}(\Omega)$, então $f^+, f^-, |f| \in W^{1,p}(\Omega)$ e

$$Df^+ = \begin{cases} Df & \text{q.t.p. em } \{f > 0\}, \\ 0 & \text{q.t.p. em } \{f \leq 0\}. \end{cases}$$

$$Df^- = \begin{cases} 0 & \text{q.t.p. em } \{f \geq 0\}, \\ -Df & \text{q.t.p. em } \{f < 0\}. \end{cases}$$

$$D|f| = \begin{cases} Df & \text{q.t.p. em } \{f > 0\}, \\ 0 & \text{q.t.p. em } \{f = 0\}, \\ -Df & \text{q.t.p. em } \{f < 0\}. \end{cases}$$

- (iv) $Df = 0$ q.t.p. em $\{f = 0\}$.

(v) Seja $\{f_k\}_{k=1}^n \in W^{1,p}(\Omega)$. Então $\max_k \{f_k\} \in W^{1,p}(\Omega)$ e

$$D \left(\max_{1 \leq k \leq n} \{f_k\} \right) \leq \max_{1 \leq k \leq n} \{Df_k\}.$$

(vi) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e $g \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então $f * g \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e para $1 \leq i \leq d$, vale

$$D_i(f * g) = (f * D_i g) \text{ q.t.p.}$$

Demonstração. Veja (Evans; Gariepy, 2015, p. 153) e (Brezis, 2011, p. 266). \square

Teorema 2.2.5 (Rademacher). *Seja f uma função localmente Lipschitz em Ω . Então f é diferenciável q.t.p.*

Demonstração. Veja (Evans, 2010, p. 296). \square

Teorema 2.2.6 (Mayer-Serrin). *Seja Ω um aberto limitado com $\partial\Omega \in C^1$ e $f \in W^{k,p}(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$. Então, existe uma sequência de funções, $\{f_m\}_{m \geq 1} \subset C^\infty(\bar{\Omega})$ tal que*

$$\|f_m - f\|_{W^{k,p}(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Demonstração. Veja (Evans, 2010, p. 266). \square

Teorema 2.2.7. *Seja Ω aberto e limitado com $\partial\Omega \in C^1$. A menos de um conjunto de medida nula, a função $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitz contínua se, e somente se, $f \in W^{1,\infty}(\Omega)$.*

Demonstração. Veja (Evans, 2010, p. 294). \square

Teorema 2.2.8. *Se $f \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$, então, a menos de redefini-la em um conjunto de medida nula, f é limitada e Lipschitz contínua.*

Demonstração. Fixados $x, y \in \mathbb{R}^d$, seja B uma bola aberta tal que $x, y \in B$. Sendo η_ε o standard mollifier, dado por:

$$\eta(x) = \begin{cases} C e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{se } |x| < 1; \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases} \quad e \quad \eta_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^d} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (2.7)$$

onde C é tomado para que $\|\eta\|_1 = 1$.

Já sabemos que como B é aberto limitado com ∂B de classe C^1 , pelo teorema anterior a função $F := f|_B$ é Lipschitz contínua e $F_\varepsilon(z) \rightarrow F(z) = f(z)$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, para todo $z \in B$

de modo uniforme. Além disso, $F_\varepsilon \in C^\infty(B_\varepsilon)$. Segue que:

$$\begin{aligned}
|F_\varepsilon(y) - F_\varepsilon(x)| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} F_\varepsilon(tx + (1-t)y) dt \right| \\
&\leq \int_0^1 \left| \frac{d}{dt} F_\varepsilon(tx + (1-t)y) \right| dt \\
&= \int_0^1 |\langle \nabla F_\varepsilon(tx + (1-t)y), y - x \rangle| dt \\
&\leq \int_0^1 \|\nabla F_\varepsilon\|_{L^\infty(B)} |y - x| dt \\
&= \|\nabla F_\varepsilon\|_{L^\infty(B)} |y - x| \\
&\leq \|\nabla F\|_{L^\infty(B)} \|\eta_\varepsilon\|_{L^1(B)} |y - x| \\
&\leq \|\nabla F\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} |y - x|.
\end{aligned}$$

Finalmente, tomando o limite $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos a estimativa desejada:

$$|f(x) - f(y)| = |F(x) - F(y)| \leq \|\nabla F\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} |y - x|.$$

□

Definição 2.2.9. Uma função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser absolutamente contínua se, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{k=1}^N |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad \sum_{k=1}^N (b_k - a_k) < \delta,$$

onde os intervalos $(a_k, b_k) \subset [a, b]$ são dois a dois disjuntos.

Proposição 2.2.10. Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é absolutamente contínua, então $f'(x)$ existe para quase todo $x \in [a, b]$, é integrável e vale:

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(y) dy, \quad (a \leq x \leq b).$$

Demonstração. Veja (Stein, 2005, p. 130).

□

Proposição 2.2.11. Se a derivada fraca de uma função $f \in W^{1,1}([a, b])$ é nula, então f é constante em quase todo ponto.

Demonstração. Veja (Brezis, 2011, p. 204).

□

Teorema 2.2.12. O conjunto $W^{1,1}([a, b])$ consiste de todas as funções absolutamente contínuas em $[a, b]$.

Demonstração. Se f é absolutamente contínua em $[a, b]$, será integrável, diferenciável em quase todo ponto e sua derivada é integrável pela Proposição 2.2.10. Deste modo, $f \in W^{1,1}([a, b])$. Reciprocamente, se $f \in W^{1,1}([a, b])$ e f' é sua derivada, defina $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$F(x) := \int_a^x f'(y) dy.$$

Sendo F absolutamente contínua em $[a, b]$, pelo que já foi provado $F \in W^{1,1}([a, b])$ e consequentemente, sendo $W^{1,1}[a, b]$ um espaço vetorial, $F - f \in W^{1,1}[a, b]$ e para toda $\varphi \in C_0^\infty[a, b]$ vale:

$$\begin{aligned} \int_a^b (F(x) - f(x))\varphi'(x) dx &= \int_a^b F(x)\varphi'(x) dx - \int_a^b f(x)\varphi'(x) dx \\ &= - \int_a^b f'(x)\varphi(x) dx + \int_a^b f'(x)\varphi(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Isso mostra que a derivada fraca de $F - f$ é nula, portanto, pela Proposição 2.2.11, $F - f = C$ onde C é constante. Concluimos então, que $f = F - C$ é absolutamente contínua em $[a, b]$. \square

Proposição 2.2.13. Se $f \in W^{1,1}(\mathbb{R})$ então

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Demonstração. Para cada $x, s \in \mathbb{R}$ temos pelo fato de f ser absolutamente contínua que

$$|f(x)| = \left| f(s) + \int_s^x f'(t) dt \right| \leq |f(s)| + \int_s^x |f'(t)| dt.$$

Integrando ambos os lados da desigualdade no intervalo $[x, x+1]$ obtemos:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \int_x^{x+1} |f(x)| ds \\ &\leq \int_x^{x+1} |f(s)| ds + \int_x^{x+1} \left(\int_s^x |f'(t)| dt \right) ds \\ &\leq \int_x^{x+1} |f(s)| ds + \int_x^{x+1} \left(\int_x^{x+1} |f'(t)| dt \right) ds \\ &= \int_x^{x+1} |f(s)| ds + \int_x^{x+1} |f'(t)| dt \\ &\leq \int_x^\infty |f(s)| ds + \int_x^\infty |f'(t)| dt. \end{aligned}$$

Como $f, f' \in L_1(\mathbb{R})$ sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^\infty |f(s)| ds + \int_x^\infty |f'(t)| dt = 0.$$

E isso conclui a demonstração. \square

2.3 Funções harmônicas e calóricas

Definição 2.3.1. Uma função $f \in C^2(\Omega)$ é dita harmônica (respectivamente, subharmônica / superharmônica) quando $\Delta f = 0$ (respectivamente, $\Delta f \geq 0 / \Delta f \leq 0$).

Proposição 2.3.2 (Fórmula do Valor Médio). Seja $u \in C^2(\Omega)$, Ω aberto limitado. Então, $\Delta u \geq 0$ em Ω se, e somente se, para toda bola $B_\delta(x_0) \subset\subset \Omega$ vale:

$$u(x_0) \leq \int_{\partial B_\delta(x_0)} u(\xi) d\sigma(\xi).$$

Demonstração. Para $0 < r < \text{dist}\{x_0, \partial\Omega\}$, defina

$$\phi(r) := \int_{\partial B_r(x_0)} u(\xi) d\sigma(\xi).$$

Pelo teorema da mudança de variáveis, temos também

$$\phi(r) = \int_{\partial B_1} u(x_0 + rw) d\sigma(w).$$

Derivando em r e usando a primeira identidade de Green,

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \int_{\partial B_1} \langle \nabla u(x_0 + rw), w \rangle d\sigma(w) \\ &= \int_{\partial B_r(x_0)} \left\langle \nabla u(z), \frac{z - x_0}{r} \right\rangle d\sigma(z) \\ &= \int_{\partial B_r(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(z) d\sigma(z) \\ &= \frac{1}{n|B_1|r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(z) d\sigma(z) \\ &= \frac{r}{n|B_1|r^n} \int_{B_r(x_0)} \Delta u(x) dx \\ &= \frac{r}{n|B_r|} \int_{B_r(x_0)} \Delta u(x) dx. \end{aligned}$$

Se tivermos u subarmônica, o integrando acima é não-negativo, portanto, ϕ é não-decrescente valendo:

$$u(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \phi(r) \leq \phi(\delta), \quad \forall \delta.$$

Reciprocamente, se tivéssemos por absurdo $\Delta u < 0$, o valor do integrando acima seria negativo e conseqüentemente, ϕ seria estritamente decrescente. Logo,

$$u(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \phi(r) > \phi(\delta).$$

O que contradiz a hipótese inicial. □

Definição 2.3.3. Diremos que Ω satisfaz a condição da esfera exterior se, para todo $x \in \partial\Omega$, existir uma bola $B_r(y) \subset \mathbb{R}^d \setminus \Omega$ tal que $\overline{B_r(y)} \cap \overline{\Omega} = \{x\}$.

Teorema 2.3.4 (Método de Perron). *Seja Ω limitado satisfazendo a condição da esfera exterior. Então, para toda função $g \in C^0(\partial\Omega)$, o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ em } \Omega, \\ u = g \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

possui única solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Veja (Han, 2011, p. 126). □

Proposição 2.3.5. *Seja $f \in C^0(\mathbb{R})$, f é subharmônica no intervalo (a, b) se, e somente se, f é convexa nesse intervalo.*

Demonstração. Se f é convexa, dado $x \in (a, b)$ com $[x - r, x + r] \subset (a, b)$, vale:

$$f(x) = f\left(\frac{x-r}{2} + \frac{x+r}{2}\right) \leq \frac{f(x+r) + f(x-r)}{2} = \int_{\partial(x-r, x+r)} f(z) dz.$$

Reciprocamente, suponha f subharmônica e $x < y \in (a, b)$, tome $h \in C^2((x, y)) \cap C^0([x, y])$ solução de

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{em } (x, y), \\ h = f & \text{em } \partial(x, y). \end{cases}$$

Como f é subharmônica, teremos $h \geq f$ em $[x, y]$ e sendo h claramente convexa, teremos para cada $t \in (0, 1)$:

$$f(tx + (1-t)y) \leq h(tx + (1-t)y) \leq th(x) + (1-t)h(y) = tf(x) + (1-t)f(y).$$

□

Definição 2.3.6. *Uma função $u \in C^2(\Omega)$ é dita calórica (respectivamente, subcalórica / supercalórica) quando $Hu = 0$ (respectivamente, $Hu \leq 0 / Hu \geq 0$), onde*

$$Hu(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta_x u(x, t).$$

Para o próximo Teorema, dados $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aberto e $T > 0$, iremos definir e denotar o cilindro parabólico $\Omega_T := \Omega \times (0, T]$ e a fronteira parabólica $\partial_p \Omega_T := \overline{\Omega_T} \setminus \Omega_T$.

Teorema 2.3.7 (Princípio do máximo). *Seja Ω limitado e $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega_T})$ uma função subcalórica. Então,*

$$\max_{\Omega_T} u = \max_{\partial_p \Omega_T} u.$$

Demonstração. Vamos supor inicialmente que $Hu < 0$ e que existe $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ tal que $u(x_0, t_0) = \max_{\Omega_T} u$.

Caso 1: Se $t_0 \neq T$, a função $v_{t_0}(x) = u(x, t_0)$ assume máximo local em $x = x_0$ e assim, $\Delta_x u(x_0, t_0) \leq 0$ e $u_t(x_0, t_0) = 0$, o que gera um absurdo pois teríamos $Hu \geq 0$.

Caso 2: Se $t_0 = T$, novamente $v_T(x)$ assume máximo local em x_0 . Então, $\Delta_x u(x_0, t_0) \leq 0$ e $u_t(x_0, t_0) \geq 0$. Isso gera outro absurdo pois teríamos $Hu \geq 0$.

Para o caso geral, $Hu \leq 0$ em Ω_T . Defina $u_\varepsilon(x, t) := u(x, t) - \varepsilon t$. Note que $Hu_\varepsilon = Hu - \varepsilon < 0$. Pelo que analisamos acima, vale

$$\max_{\Omega_T} u_\varepsilon = \max_{\partial_p \Omega_T} u_\varepsilon.$$

Como u_ε converge uniformemente para u , basta tomar o limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$ acima. □

3 OPERADORES MAXIMAIS DO TIPO CONVOLUÇÃO

Neste capítulo definiremos o que são os OMC e apresentaremos alguns resultados sobre eles. Estes resultados nos permitirão trabalhar adequadamente no desenvolver de todos os demais capítulos desta dissertação, dispensando verificações técnicas recorrentes sobre os operadores envolvidos. Por fim, provaremos que todo OMC transporta funções do espaço de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ nele próprio e de forma limitada.

3.1 Operadores Maximais

Seja $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável e não-negativa com $\|\varphi\|_1 = 1$. Para cada $\varepsilon > 0$, a função $\varphi_\varepsilon: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por:

$$\varphi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^d} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Um simples cálculo mostra que φ_ε é uma aproximação da identidade, ou seja, existe um A universal satisfazendo:

- (i) $\|\varphi_\varepsilon\|_1 = 1$;
- (ii) $|\varphi_\varepsilon(x)| \leq A\varepsilon^{-d}, \forall \varepsilon > 0$;
- (iii) $|\varphi_\varepsilon(x)| \leq A\varepsilon|x|^{-d-1}, \forall \varepsilon > 0$;
- (iv) Fixado $r > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varphi_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^d \setminus B_r)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x|>r} |\varphi_\varepsilon(x)| dx = 0.$$

Definição 3.1.1. Chamaremos de OMC, qualquer operador M_φ que tenha a forma:

$$M_\varphi f(x) = \sup_{t>0} (|f| * \varphi_t)(x),$$

onde φ_t é gerada por uma função $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ como foi visto acima.

Um exemplo de OMC já bem conhecido e que desempenha papel fundamental na demonstração do Teorema da Diferenciação de Lebesgue, é o operador maximal de Hardy-Littlewood, aqui denotado por M_H e dado por:

$$M_H f(x) := \sup_{t>0} \frac{1}{|B_1|t^d} \int_{B_t(x)} |f(y)| dy = \sup_{t>0} (|f| * \psi_t)(x),$$

onde $\psi(x) = \frac{1}{|B_1|} \chi_{B_1}(x)$.

Mostraremos agora que algumas das propriedades do operador maximal de Hardy-Littlewood podem ser resgatadas para OMC, desde que tais operadores tenham seu crescimento devidamente controlado.

Teorema 3.1.2. *Seja M_φ um OMC e suponha que exista $\xi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ radial, não crescente, integrável e tal que $\varphi(x) \leq \xi(x)$ para quase todo x . Então,*

$$M_\varphi f(x) \leq \|\xi\|_1 \cdot M_H f(x).$$

Para provarmos este Teorema precisaremos do seguinte resultado:

Lema 3.1.3. *Seja $\xi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ radial, não-crescente, não-negativa e mensurável. Então, existe uma sequência crescente $\{\xi^k\}_{k \geq 1}$ de funções simples e não negativas da forma*

$$\xi^k(x) := \sum_{i=0}^n a_i \cdot \chi_{B_{r_i}}(x)$$

tal que $\xi^k(x)$ converge monotonicamente para $\xi(x)$.

Demonstração. Para todo $k \in \mathbb{N}$, defina a função

$$F_k(x) := \begin{cases} \xi(x) & \text{se } x \in B_{2^k} \text{ e } \xi(x) \leq 2^k; \\ 2^k & \text{se } x \in B_{2^k} \text{ e } \xi(x) > 2^k; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como a imagem de cada função F_k é $[0, 2^k]$, defina também para cada $0 \leq l < 2^{2^k}$ os conjuntos

$$E_{l,k} := \left\{ x \in B_{2^k} : \frac{l}{2^k} < F_k(x) \leq \frac{l+1}{2^k} \right\}.$$

E as funções simples:

$$\xi^k(x) := \sum_{l=0}^{2^{2^k}} \frac{l}{2^k} \cdot \chi_{E_{l,k}}(x).$$

Note que $F_k(x)$ converge para $\xi(x)$ quando k tende ao infinito e $0 \leq F_k(x) - \xi^k(x) \leq \frac{1}{2^k}$, logo, ξ^k também converge pontualmente para ξ . Para provarmos que $\{\xi^k(x)\}_{k \geq 1}$ é uma sequência crescente, note que $F_{k+1}(x) \geq F_k(x)$ e para $x \in B_{2^{k+1}} \setminus B_{2^k}$, $\xi^{k+1}(x) \geq 0 = \xi^k(x)$. Se $x \in B_{2^k}$, existe l tal que $x \in E_{l,k}$ e assim,

$$F_{k+1}(x) \geq F_k(x) > \frac{l}{2^k} = \frac{2l}{2^{k+1}}.$$

Isso implica que $x \in E_{j,k+1}$ para algum $j \geq 2l$ e portanto,

$$\xi^k(x) = \frac{l}{2^k} = \frac{2l}{2^{k+1}} \leq \frac{j}{2^{k+1}} = \xi^{k+1}(x).$$

Por fim, como a função ξ é radial não crescente, não é difícil notar que F_k é também radial não crescente. Conseqüentemente os conjuntos $E_{l,k}$ são anéis da forma $B_{r_l}^k \setminus B_{r_{l+1}}^k$ onde $B_{r_l}^k$ são bolas de raio r_l com $r_l \geq r_{l+1}$. Podemos assim, reescrever ξ^k como:

$$\xi^k(x) = \sum_{l=0}^{2^k} b_l \cdot \chi_{B_{r_l}^k}(x), \quad \text{onde} \quad b_l := \frac{l}{2^k} - \sum_{j=0}^{l-1} \frac{j}{2^k}.$$

□

Prova do Teorema 3.1.2. Como $\varphi(x) \leq \xi(x)$ para quase todo x , vale $\varphi_t(x) \leq \xi_t(x)$ e conseqüentemente,

$$(|f| * \varphi_t)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \varphi_t(y) dy \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \xi_t(y) dy = (|f| * \xi_t)(x). \quad (3.1)$$

Suponha por um momento que $\xi(x)$ seja uma função simples expressa pela fórmula $\xi(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot \chi_{B_{r_i}}(x)$. Então,

$$\xi_t(x) = \frac{1}{t^d} \sum_{i=0}^n a_i \cdot \chi_{B_{r_i}}(x/t) = \frac{1}{t^d} \sum_{i=0}^n a_i \cdot \chi_{B_{tr_i}}(x)$$

e

$$\begin{aligned} (|f| * \xi_t)(x) &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{t^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| a_i \cdot \chi_{B_{tr_i}}(x-y) dy \\ &= \sum_{i=0}^n a_i |B_{r_i}| \frac{1}{(tr_i)^d |B_1|} \int_{B_{tr_i}(x)} |f(y)| dy \\ &\leq \sum_{i=0}^n a_i |B_{r_i}| M_H f(x) \\ &= \|\xi\|_1 M_H f(x). \end{aligned}$$

Ainda que não tenhamos $\xi(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot \chi_{B_{r_i}}(x)$, pelo Lema 3.1.3, sabemos que existe uma seqüência crescente $\{\xi^k\}_{k \geq 1}$ de funções simples expressas neste formato e que convergem monotonicamente para $\xi(x)$. Portanto, pelo Teorema da convergência monótona e o que acabamos de provar, vale:

$$(|f| * \xi_t)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \xi_t(x-y) dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \xi_t^k(x-y) dy \leq \|\xi\|_1 \cdot M_H f(x). \quad (3.2)$$

Para finalizar, tomamos o supremo sobre $t > 0$ em (3.1) e (3.2) para obtermos:

$$M_\varphi f(x) = \sup_{t>0} (|f| * \varphi_t)(x) \leq \sup_{t>0} (|f| * \xi_t)(x) \leq \|\xi\|_1 \cdot M_H f(x).$$

□

Corolário 3.1.4. *Seja M_φ um OMC e suponha que φ seja majorada pela função ξ radial, não-crescente, não-negativa e integrável. Então, para $1 < p \leq \infty$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $M_\varphi f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e existe constante C_p dependente apenas de p, d tal que*

$$\|M_\varphi f\|_p \leq C_p \cdot \|\xi\|_1 \cdot \|f\|_p.$$

Demonstração. Segue diretamente do fato que $M_\varphi f(x) \leq \|\xi\|_1 \cdot Mf(x)$ e do Teorema de Hardy-Littlewood-Wiener que garante para $1 < p \leq \infty$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ que $\|Mf\|_p \leq C_p \|f\|_p$, cuja demonstração pode ser vista em (Stein, 1970, p. 5). □

No artigo (Kinnunen, 1997), podemos ver que o operador maximal de Hardy-Littlewood transporta funções de $W^{1,p}$ para $W^{1,p}$ com $1 < p \leq \infty$ de forma limitada. Como sua demonstração se baseia fortemente no Teorema de Hardy-Littlewood-Wiener, poderíamos assim nos perguntar se o mesmo ocorre para os OMC, uma vez que provamos um Teorema correspondente para uma classe desses operadores. A resposta para essa pergunta encontra-se no Teorema abaixo.

Teorema 3.1.5. *Seja M_φ um OMC e suponha que φ seja contínua q.t.p. e majorada pela função ξ radial, não-crescente, não-negativa e integrável. Então, para $1 < p \leq \infty$ e $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, $M_\varphi f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e existe constante C_p dependente apenas de p, d tal que*

$$\|M_\varphi f\|_{1,p} \leq C_p \cdot \|\xi\|_1 \cdot \|f\|_{1,p}.$$

Demonstração. Dado $t > 0$, tome sequência $\{t_j\}_{j \geq 1} \subset \mathbb{Q}^+$ com $t_j \rightarrow t$. Sendo φ contínua q.t.p. vale $\varphi_{t_j}(x) \rightarrow \varphi_t(x)$ para quase todo x . Note então, pelo Lema de Fatou que

$$(|f| * \varphi_t)(x) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} (|f| * \varphi_{t_j})(x) \leq \sup_{\substack{r>0 \\ r \in \mathbb{Q}}} (|f| * \varphi_r)(x) \leq M_\varphi f.$$

Tomando o supremo em t na desigualdade acima obtemos:

$$\sup_{\substack{r>0 \\ r \in \mathbb{Q}}} (|f| * \varphi_r)(x) = M_\varphi f.$$

Ou seja, na definição de $M_\varphi f$ podemos nos restringir apenas aos $t > 0$ racionais. Supondo que $\{t_j\}_{j \geq 1}$ seja uma enumeração dos racionais positivos, defina as funções:

$$f_k(x) = \max_{1 \leq j \leq k} (|f| * \varphi_{t_j})(x).$$

Dividiremos agora a prova em dois casos:

Caso 1: Se $1 < p < \infty$, pela Proposição 2.2.4, como $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e $\varphi_{t_j} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, teremos $|f| * \varphi_{t_j} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, $\forall t_j$ e

$$D_i(|f| * \varphi_{t_j}) = \varphi_{t_j} * D_i|f|, \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

Conseqüentemente, $f_k \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ para todo k e $f_k(x) \nearrow M_\varphi f(x)$. Segue daí que para todo $i = \{1, 2, \dots, d\}$,

$$|D_i f_k| \leq \max_{1 \leq j \leq k} |D_i(|f| * \varphi_{t_j})| = \max_{1 \leq j \leq k} |D_i|f| * \varphi_{t_j}| \leq M_\varphi(D_i|f|) = M_\varphi(D_i f).$$

Valendo assim, a seguinte desigualdade:

$$\|D_i f_k\|_p \leq \sum_{i=1}^d \|D_i f_k\|_p \leq \sum_{i=1}^d \|M_\varphi(D_i f)\|_p,$$

que junto ao Corolário anterior, implica em

$$\begin{aligned} \|f_k\|_{1,p} &= \|f_k\|_p + \sum_{i=1}^d \|D_i f_k\|_p \\ &\leq \|M_\varphi f\|_p + \sum_{i=1}^d \|M_\varphi(D_i f)\|_p \\ &\leq C_p \|\xi\|_1 \left(\|f\|_p + \sum_{i=1}^d \|D_i f\|_p \right) \\ &= C_p \|\xi\|_1 \|f\|_{1,p} < \infty. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Sendo $\{f_k\}_{k \geq 1}$ uma seqüência limitada no espaço de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e convergindo pontualmente para $M_\varphi f$, vale pela reflexividade dos espaços de Sobolev que $M_\varphi f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, f_k converge fracamente para $M_\varphi f$ em $L^p(\mathbb{R}^d)$ e $D_i f_k$ converge fracamente para $D_i(M_\varphi f)$. Sendo assim, como $|D_i f_k| \leq M_\varphi(D_i f)$ em quase todo ponto, pela convergência fraca obtemos:

$$|D_i(M_\varphi f)| \leq \liminf_k |D_i f_k| \leq M_\varphi(D_i f), \quad i = 1, 2, \dots, d. \tag{3.4}$$

Por fim, juntando (3.4) e o Corolário anterior,

$$\begin{aligned}\|M_\varphi f\|_{1,p} &= \|M_\varphi f\|_p + \sum_{i=1}^d \|D_i(M_\varphi f)\|_p \\ &\leq \|M_\varphi f\|_p + \sum_{i=1}^d \|M_\varphi(D_i f)\|_p \\ &\leq C_p \|\xi\|_1 \|f\|_{1,p}.\end{aligned}$$

Caso 2: Se $p = \infty$, vejamos inicialmente que M_φ satisfaz a seguinte propriedade:

$$M_\varphi(f + g) \leq M_\varphi f + M_\varphi g.$$

De fato,

$$\begin{aligned}M_\varphi(f + g)(x) &= \sup_{t>0} ((f + g) * \varphi_t)(x) \\ &= \sup_{t>0} (f * \varphi_t)(x) + (g * \varphi_t)(x) \\ &\leq \sup_{t>0} (f * \varphi_t)(x) + \sup_{t>0} (g * \varphi_t)(x) \\ &= M_\varphi f(x) + M_\varphi g(x).\end{aligned}$$

Consequentemente, $|M_\varphi f - M_\varphi g| \leq M_\varphi(f - g)$. Podemos ainda assumir que f é Lipschitz contínua com constante de Lipschitz C . Definindo então $f_h(x) = f(x - h)$ temos:

$$\begin{aligned}|(M_\varphi f)_h(x) - M_\varphi f(x)| &= |M_\varphi(f_h)(x) - M_\varphi f(x)| \\ &\leq M_\varphi(f_h - f)(x) \\ &= \sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^d} |f_h(x - y) - f(x - y)| \varphi_t(y) dy \\ &\leq C|h|.\end{aligned}$$

Portanto, $M_\varphi f$ é também Lipschitz contínua com constante C .

Sendo $f, M_\varphi f$ Lipschitz, pelo Teorema de Rademacher, suas derivadas fracas coincidem com as derivadas clássicas q.t.p. e portanto $D(M_\varphi f) \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ pois vale $\|D(M_\varphi f)\|_\infty \leq C = \|Df\|_\infty$. Obtemos assim,

$$|(|f| * \varphi_t)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x - y)| \varphi_t(y) dy \leq \|f\|_\infty.$$

Tomando o sup em t, x acima, obtemos $\|M_\varphi f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Isso mostra que $M_\varphi f \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ e,

$$\|M_\varphi f\|_{1,\infty} = \|M_\varphi f\|_\infty + \|DM_\varphi f\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|Df\|_\infty = \|f\|_{1,\infty}.$$

□

Definição 3.1.6. Sendo $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Lipschitz, defina

$$\text{Lip}(f) := \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R}^d \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

Corolário 3.1.7. Se $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada e Lipschitz contínua, então $M_\varphi f$ é limitada e Lipschitz contínua. Além disso, $\text{Lip}(M_\varphi f) \leq \text{Lip}(f)$.

Demonstração. Segue diretamente da demonstração vista no Teorema 3.1.5. □

4 VARIAÇÃO EM DOMÍNIOS CONTÍNUOS

Agora que já estamos familiarizados com os OMC, apresentaremos dois destes operadores que têm uma forte ligação com duas Equações Diferenciais Parciais (EDP) famosas, a equação do calor e a equação de Laplace. Ademais, iremos averiguar o comportamento da variação destes operadores sob diferentes contextos.

Para obtermos os principais resultados, faremos uso do Lema de Zorn, o qual nos oferecerá um “candidato” dentre o espaço de funções no qual estivermos trabalhando, candidato esse que terá todas as propriedades que desejamos. Para concluirmos que tal candidato é o próprio operador maximal, faremos uso de diversos lemas e proposições que serão abordados já nas primeiras seções.

4.1 Operador Maximal de Gauss

Para cada $t > 0$, seja $K_t: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ o kernel de Gauss definido como:

$$K_t(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Temos por fatos conhecidos que $K_t \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\|K_t\|_1 = 1$ e dada $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, a função $F: \mathbb{R}^d \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$F(x, t) = (f * K_t)(x) \tag{4.1}$$

é tal que $F \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times (0, \infty))$ e resolve a equação do calor:

$$\begin{cases} \partial_t F - \Delta F = 0 & \text{em } \mathbb{R}^d \times (0, \infty) \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} F(x, t) = f(x) & \text{q.t.p. } x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Como o kernel de Gauss é também uma aproximação da identidade, podemos então definir o Operador Maximal de Gauss como segue:

Definição 4.1.1. Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, o Operador Maximal de Gauss, M_K , aplicado em f é definido e denotado por:

$$M_K f(x) := \sup_{t>0} (|f| * K_t)(x).$$

Para facilitar a demonstração dos resultados a seguir, ao longo desta seção iremos supor que $f \geq 0$, de modo que tenhamos

$$M_K f(x) = \sup_{t>0} F(x, t),$$

onde F é a função definida em (4.1).

Teorema 4.1.2. *Se $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ para $1 < p \leq \infty$, então $M_K f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$.*

Demonstração. Se $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4}}.$$

Então, φ é radial, não-crescente, integrável, contínua e satisfaz: $K_t(x) = \varphi_{\sqrt{t}}(x)$, $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, \infty)$. Consequentemente,

$$M_K f(x) = M_\varphi f(x).$$

Para finalizar, basta usarmos o Teorema 3.1.5. □

Lema 4.1.3. *Dados $t_0 > 0$ e $1 \leq p \leq \infty$, existe constante $C_p := C_p(d, t_0) > 0$ tal que:*

$$\left\| K_t \cdot \chi_{\{|x| \geq \sqrt{t_0}\}} \right\|_p \leq C_p, \quad \forall t \in (0, t_0].$$

Devido a regularidade de K_t para $t > 0$ e da norma p , veremos que provar este resultado equivale a mostrar a existência de limite em $t = 0$, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \sqrt{t_0}} |K_t(x)|^p dx < +\infty.$$

E isso, é de certo modo uma generalização do resultado já conhecido para $p = 1$ em aproximações da identidade.

Demonstração. Dividiremos a prova em casos.

Caso 1: Se $p = 1$, esse resultado acontece, uma vez que K_t é aproximação da identidade.

Caso 2: Se $1 < p < \infty$, sabendo que $K_t \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\forall t > 0$, a função $t \mapsto \left\| K_t \cdot \chi_{\{|x| \geq \sqrt{t_0}\}} \right\|_p^p$ será contínua em $(0, t_0]$ restando-nos apenas provar que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| K_t \cdot \chi_{\{|x| \geq \sqrt{t_0}\}} \right\|_p^p = 0,$$

de modo que a continuidade em $[0, t_0]$ nos dará a limitação.

Fazendo a mudança de variáveis $z = \frac{x}{2} \sqrt{\frac{p}{t}}$ e definindo $r_t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t_0 p}{t}}$ obtemos:

$$\begin{aligned} \left\| K_t \cdot \chi_{\{|x| \geq \sqrt{t_0}\}} \right\|_p^p &= \int_{|z| \geq r_t} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-|z|^2} 2^d \left(\frac{t}{p}\right)^{\frac{d}{2}} dz \\ &= \frac{2^d}{(p 4^p \pi^p)^{d/2}} t^{\frac{d}{2}(1-p)} \int_{|z| \geq r_t} e^{-|z|^2} dz \\ &= \frac{2^d}{(p 4^p \pi^p)^{d/2}} t^{\frac{d}{2}(1-p)} \int_{r_t}^{\infty} \int_{\partial B_s} e^{-|w|^2} dw ds \\ &= \frac{2^d d |B_1|}{(p 4^p \pi^p)^{d/2}} t^{\frac{d}{2}(1-p)} \int_{r_t}^{\infty} s^{d-1} e^{-s^2} ds. \end{aligned}$$

Essencialmente devemos provar que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_{r_t}^{\infty} s^{d-1} e^{-s^2} ds}{t^{\frac{d}{2}(p-1)}} = 0,$$

uma vez que $\frac{2^d d |B_1|}{(p 4^p \pi^p)^{d/2}}$ é constante. E de fato, por L'Hospital, vale:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_{r_t}^{\infty} s^{d-1} e^{-s^2} ds}{t^{\frac{d}{2}(p-1)}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dt} \int_{r_t}^{\infty} s^{d-1} e^{-s^2} ds}{\frac{d}{dt} t^{\frac{d}{2}(p-1)}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sqrt{t_0 p}}{4\sqrt{t^3}} \left(\frac{\sqrt{t_0 p}}{2\sqrt{t}}\right)^{d-1} e^{-\frac{t_0 p}{4t}}}{\frac{d}{2}(p-1)t^{\frac{d}{2}(p-1)-1}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{-(t_0 p)^{d/2}}{2^d d (p-1)} \right) \frac{e^{-\frac{t_0 p}{4t}}}{t^{\frac{d}{2}}} = 0. \end{aligned}$$

Caso 3: Se $p = \infty$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| K_t \cdot \chi_{\{|x| \geq \sqrt{t_0}\}} \right\|_{\infty} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{t_0}{4t}}}{(4\pi t)^{d/2}} = 0.$$

□

Proposição 4.1.4. *Seja $1 \leq p < \infty$ e $f \in C^0(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$, então $M_K f \in C^0(\mathbb{R}^d)$.*

Demonstração. Vimos durante a demonstração do Teorema 3.1.5 que definindo $f_h(x) = f(x-h)$, vale:

$$|M_K f(x-h) - M_K f(x)| \leq M_K(f_h - f)(x).$$

Portanto, é suficiente provarmos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $|h| \leq \delta$ vale:

$$(|f_h - f| * K_t)(x) < \varepsilon, \quad \forall t > 0.$$

Pela desigualdade de Jensen, como $|f_h - f|^p \in L_1(\mathbb{R}^d)$, $K_t \in L_1(\mathbb{R}^d)$ com $\|K_t\|_1 = 1$ e $z \mapsto -z^{1/p}$ é convexa vale:

$$-\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f_h - f|^p(x-z)K_t(z)dz\right)^{\frac{1}{p}} \leq -\int_{\mathbb{R}^d} |f_h - f|(x-z)K_t(z)dz.$$

Isso mostra que $(|f_h - f| * K_t)(x) \leq ((|f_h - f|^p * K_t)(x))^{1/p}$. Consequentemente, usando também a Desigualdade de Young para convolução,

$$\begin{aligned} (|f_h - f| * K_t)(x) &\leq \left((|f_h - f|^p * K_t)(x)\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\| |f_h - f|^p * K_t \|_{\infty}\right)^{1/p} \\ &\leq (\|f_h - f\|_p^p \cdot \|K_t\|_{\infty})^{1/p} \\ &= \frac{\|f_h - f\|_p}{(4\pi t)^{d/2p}} \leq \frac{2\|f\|_p}{(4\pi t)^{d/2p}}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Dado $t_0 > 0$, como a função f é contínua, $f_h - f \in L^{\infty}(|z| \leq \sqrt{t_0})$, de onde podemos usar a Desigualdade de Hölder para obter:

$$\begin{aligned} \int_{|z| \leq \sqrt{t_0}} |f_h - f|(x-z)K_t(z)dz &\leq \|f_h - f\|_{L^{\infty}(|x-z| \leq \sqrt{t_0})} \cdot \|K_t\|_{L^1(|z| \leq \sqrt{t_0})} \\ &\leq \|f_h - f\|_{L^{\infty}(|x-z| \leq \sqrt{t_0})}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

E também por Hölder:

$$\begin{aligned} \int_{|z| \geq \sqrt{t_0}} |f_h - f|(x-z)K_t(z)dz &\leq \|f_h - f\|_{L^p(\{|x-z| \geq \sqrt{t_0}\})} \cdot \|K_t\|_{L^{p'}(\{|z| \geq \sqrt{t_0}\})} \\ &\leq \|f_h - f\|_p \cdot \left\| K_t \cdot \chi_{\{|z| \geq \sqrt{t_0}\}} \right\|_{p'} \\ &\leq C_{p'} \|f_h - f\|_p, \quad \forall t \in (0, t_0], \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde $C_{p'}$ é a constante encontrada no Lema anterior e p' é o conjugado de p .

Concluimos assim que dado $\varepsilon > 0$, por (4.2), para qualquer h existe t_0 tal que

$$(|f_h - f| * K_t)(x) \leq \frac{2\|f\|_p}{(4\pi t)^{d/2p}} < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Por outro lado, para $0 < t < t_0$, por (4.3) e (4.4), $\exists \delta > 0$ tal que para $|h| \leq \delta$ vale:

$$(|f_h - f| * K_t)(x) \leq \|f_h - f\|_{L^{\infty}(|x-z| \leq \sqrt{t_0})} + 2C_{p'} \|f_h - f\|_p < \varepsilon, \quad \forall t \leq t_0.$$

□

Proposição 4.1.5. *Seja $f \in L^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ e Lipschitz, então $M_K f \in C^0(\mathbb{R}^d)$.*

Demonstração. Segue como decorrência do Corolário 3.1.7. \square

Proposição 4.1.6. *Se $f \in C^0(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$ para algum $1 \leq p < \infty$ ou f é Lipschitz e limitada, então $M_K f$ é subharmônica no conjunto aberto $A = \{x \in \mathbb{R}^d : M_K f(x) > f(x)\}$.*

Demonstração. Em decorrência das Proposições 4.1.4 e 4.1.5, f e $M_K f$ são contínuas de modo que A é de fato aberto. Para mostrarmos a subharmonicidade de $M_K f$ em A nos apoiaremos no método da comparação. Então, dado $x_0 \in A$ e $r > 0$ tal que $\overline{B_r(x_0)} \subset A$, pelo Método de Perron, tome $h \in C^2(B_r(x_0)) \cap C^0(\overline{B_r(x_0)})$ a única solução do sistema

$$\begin{cases} \Delta h = 0, & \text{em } B_r(x_0), \\ h = M_K f, & \text{em } \partial B_r(x_0). \end{cases}$$

Devemos provar que $M_K f(x) \leq h(x)$ para todo $x \in B_r(x_0)$, pois com isso teremos o seguinte resultado:

$$M_K f(x_0) \leq h(x_0) = \int_{\partial B_r(x_0)} h(z) dz = \int_{\partial B_r(x_0)} M_K f(z) dz,$$

o qual diz que $M_K f$ é subharmônica.

Para $T > 0$, defina $\Omega_T := B_r(x_0) \times (0, T)$ e a função $v: \overline{\Omega_T} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$v(x, t) := \begin{cases} F(x, t) - h(x), & \text{se } 0 < t \leq T, \\ f(x) - h(x), & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Note ainda que $v \in C^2(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega_T})$ e

$$\partial_t v(x, t) - \Delta_x v(x, t) = 0.$$

Pelo Princípio do Máximo para a equação do calor, o máximo de v é atingido em um dos seguintes conjuntos: $\partial B_r(x_0) \times [0, T]$ ou $\overline{B_r(x_0)} \times \{t = 0\}$, analisemos então o comportamento de v em cada um desses conjuntos.

Em $\partial B_r(x_0) \times [0, T]$ vale $h(x) = M_K f(x)$ e,

$$\max_{\partial B_r(x_0) \times [0, T]} v(x, t) = \max_{\partial B_r(x_0) \times [0, T]} F(x, t) - M_K f(x) \leq 0.$$

Em $\overline{B_r(x_0)} \times \{t = 0\}$, seja $y_0 \in \overline{B_r(x_0)}$ valor máximo de v , ou seja,

$$\max_{\overline{B_r(x_0)} \times \{t=0\}} v(x, t) = \max_{\overline{B_r(x_0)}} v(x, 0) = v(y_0, 0).$$

Suponha por um momento que $v(y_0, 0) > 0$. Então pelo que já foi visto em $\partial B_r(x_0) \times [0, T]$, deve valer, pelo princípio do máximo,

$$F(y_0, t) - h(y_0) = v(y_0, t) \leq v(y_0, 0) = f(y_0) - h(y_0), \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

Ou seja, $F(y_0, t) \leq f(y_0)$ para todo $t \in [0, T]$, como T é arbitrário vale: $M_K f(y_0) \leq f(y_0)$. Por outro lado temos também, $f(y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} F(y_0, t) \leq M_K f(y_0)$. Temos assim $f(y_0) = M_K f(y_0)$, contradizendo o fato que $y_0 \in A$.

Isso prova que $v \leq 0$ em Ω_T para todo T , conseqüentemente

$$F(x, t) \leq h(x), \quad \forall t.$$

Tomando o sup em t acima, obtemos a desigualdade desejada. □

4.2 Operador Maximal de Poisson

Para cada $t > 0$, seja $P_t: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, o kernel de Poisson definido como:

$$P_t(x) := c_d \frac{t}{(|x|^2 + t^2)^{(d+1)/2}},$$

onde $c_d = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\pi^{(d+1)/2}}$ é tomado de forma que $\|P_t\|_1 = 1$ para todo t .

Sabemos que $P_t \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ e para $h \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, a função $H: \mathbb{R}^d \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$H(x, t) = (h * P_t)(x)$$

é tal que $H \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times (0, \infty))$ e resolve a equação de Laplace:

$$\begin{cases} \Delta H = 0 & \text{em } \mathbb{R}^d \times (0, \infty) \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} H(x, t) = h(x) & \text{q.t.p. } x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Sendo o kernel de Poisson uma aproximação da identidade, definiremos o Operador Maximal de Poisson como segue:

Definição 4.2.1. Dada $h \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, o Operador Maximal de Poisson, M_P , aplicado em h é definido e denotado por:

$$M_P h(x) := \sup_{t>0} (|h| * P_t)(x).$$

Assim como vimos com o Operador maximal de Gauss, para facilitar a demonstração dos resultados assumiremos nesta seção que $h \geq 0$, de modo que tenhamos

$$M_P h(x) = \sup_{t>0} H(x, t).$$

Teorema 4.2.2. *Se $h \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ para $1 < p \leq \infty$, então $M_P h \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$.*

Demonstração. Se $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por:

$$\varphi(x) = c_d \frac{1}{(|x|^2 + 1)^{(d+1)/2}}.$$

Então, φ é radial, não-crescente, integrável, contínua e satisfaz: $P_t(x) = \varphi_t(x)$. Consequentemente, pelo Teorema 3.1.5, $M_P h \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. \square

Lema 4.2.3. *Dados $t_0 > 0$ e $1 \leq p \leq \infty$ existe constante $C_p := C_p(d, t_0) > 0$ tal que:*

$$\left\| P_t \cdot \chi_{\{|x| \geq \sqrt{t_0}\}} \right\|_p \leq C_p, \quad \forall t \in (0, t_0].$$

Demonstração. Assim como foi visto para o Kernel de Gauss no Lema 4.1.3 é suficiente analisarmos:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| P_t \cdot \chi_{\{|x| \geq \sqrt{t_0}\}} \right\|_p^p,$$

para $1 < p \leq \infty$.

Caso 1: Se $p = 1$, o resultado ocorre pelo fato de P_t ser aproximação da identidade.

Caso 2: Se $1 < p < \infty$, note que:

$$\begin{aligned} \left\| P_t \cdot \chi_{\{|x| \geq \sqrt{t_0}\}} \right\|_p^p &= \int_{|x| \geq \sqrt{t_0}} (c_d)^p \cdot \frac{t^p}{(|x|^2 + t^2)^{(d+1)p/2}} dx \\ &\leq (c_d)^p \cdot t^p \int_{|x| \geq \sqrt{t_0}} \frac{1}{(|x|^2)^{(d+1)p/2}} dx \\ &= (c_d)^p \cdot t^p \int_{|x| \geq \sqrt{t_0}} \frac{1}{|x|^{(d+1)p}} dx. \end{aligned}$$

Como $(d+1)p > d$, a integral acima converge e portanto,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left\| P_t \cdot \chi_{\{|y| \geq \sqrt{t_0}\}} \right\|_p^p = 0.$$

Caso 3: Se $p = \infty$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| P_t \cdot \chi_{\{|y| \geq \sqrt{t_0}\}} \right\|_\infty = \lim_{t \rightarrow 0} c_d \frac{t}{(\sqrt{t_0}^2 + t^2)^{(d+1)/2}} = 0.$$

\square

Proposição 4.2.4. *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $h \in C^0(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$, então $M_P h \in C^0(\mathbb{R}^d)$.*

Demonstração. Assim como vimos na demonstração para o Operador Maximal de Gauss, sendo

$$|M_P h(x - c) - M_P h(x)| \leq M_P(h_c - h)(x),$$

é suficiente provar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $|c| \leq \delta$ vale:

$$(|h_c - h| * P_t)(x) < \varepsilon, \quad \forall t > 0.$$

Pela desigualdade de Jensen, como $|h_c - h|^p \in L_1(\mathbb{R}^d)$, $P_t \in L_1(\mathbb{R}^d)$ com $\|P_t\|_1 = 1$ e $z \mapsto -z^{1/p}$ é convexa vale:

$$-\left(\int_{\mathbb{R}^d} |h_c - h|^p(x - z)P_t(z)dz\right)^{\frac{1}{p}} \leq -\int_{\mathbb{R}^d} |h_c - h|(x - z)P_t(z)dz,$$

de onde segue que $(|h_c - h| * P_t)(x) \leq ((|h_c - h|^p * P_t)(x))^{1/p}$. Consequentemente usando também a Desigualdade de Young para convolução,

$$\begin{aligned} (|h_c - h| * P_t)(x) &\leq \left((|h_c - h|^p * P_t)(x)\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\| |h_c - h|^p * P_t \|_{\infty}\right)^{1/p} \\ &\leq (\|h_c - h\|_p^p \cdot \|P_t\|_{\infty})^{1/p} \\ &= \frac{c_d^{\frac{1}{p}} \|h_c - h\|_p}{t^{\frac{d}{p}}} \leq \frac{2c_d^{\frac{1}{p}} \|h\|_p}{t^{\frac{d}{p}}}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Dado $t_0 > 0$, usando a Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_{|z| \leq \sqrt{t_0}} |h_c - h|(x - z)P_t(z)dz &\leq \|h_c - h\|_{L^{\infty}(|x-z| \leq \sqrt{t_0})} \cdot \|P_t\|_{L^1(|z| \leq \sqrt{t_0})} \\ &\leq \|h_c - h\|_{L^{\infty}(|x-z| \leq \sqrt{t_0})}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

E também pela desigualdade de Hölder vale:

$$\begin{aligned} \int_{|z| \geq \sqrt{t_0}} |h_c - h|(x - z)P_t(z)dz &\leq \|h_c - h\|_{L^p(\{|x-z| \geq \sqrt{t_0}\})} \cdot \|P_t\|_{L^{p'}(\{|z| \geq \sqrt{t_0}\})} \\ &\leq \|h_c - h\|_p \cdot \left\| P_t \cdot \chi_{\{|z| \geq \sqrt{t_0}\}} \right\|_{p'} \\ &\leq C_{p'} \|h_c - h\|_p, \quad \forall t \in (0, t_0], \end{aligned} \tag{4.7}$$

onde $C_{p'}$ é a constante encontrada no Lema anterior e p' o conjugado de p .

Concluimos assim que dado $\varepsilon > 0$, por (4.5), para qualquer $\delta > 0$ existe t_0 tal que

$$(|h_c - h| * P_t)(x) \leq \frac{2c_d^{\frac{1}{p}} \|h\|_p}{t^{\frac{d}{p}}} < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Por outro lado, para $0 < t < t_0$, por (4.6) e (4.7), existe $\delta > 0$ tal que para $|c| \leq \delta$ vale:

$$(|h_c - h| * P_t)(x) \leq \|h_c - h\|_{L^\infty(|x-z| \leq \sqrt{t_0})} + 2C_{p'} \|h_c - h\|_p < \varepsilon, \quad \forall t \leq t_0.$$

□

Proposição 4.2.5. *Seja $h \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ e Lipschitz, então $M_{ph} \in C^0(\mathbb{R}^d)$.*

Demonstração. Segue como decorrência do Corolário 3.1.7. □

Teorema 4.2.6. *Seja $u \in C^0(\Omega)$ com $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aberto conexo e limitado, suponha também que u satisfaz a seguinte desigualdade:*

Para todo $x_0 \in \Omega$, existe $r_0 > 0$ tal que $\forall r < r_0$ com $B_r(x_0) \subset \subset \Omega$, vale:

$$u(x_0) \leq \frac{1}{r^{d+1} w_{d+1}} \int_{B_r(x_0)} 2\sqrt{r^2 - |x - x_0|^2} u(x) dx,$$

onde w_{d+1} representa o volume da bola unitária em \mathbb{R}^{d+1} . Então u satisfaz o princípio do máximo, ou seja, não pode atingir um máximo local a menos que seja constante.

Demonstração. Vamos definir inicialmente

$$M = \max_{\overline{\Omega}} u \quad \text{e} \quad \Omega_M := \{x \in \Omega : u(x) = M\}.$$

Então, queremos provar que ou Ω_M é vazio, ou $\Omega_M = \Omega$. Suponha que não seja vazio, como claramente Ω_M é fechado em Ω e Ω é conexo, é suficiente mostrar que Ω_M é aberto. Para isso, seja $x_0 \in \Omega_M$, existe $r_0 = r_0(x_0)$ tal que

$$u(x_0) \leq \frac{1}{r^{d+1} w_{d+1}} \int_{B_r(x_0)} 2\sqrt{r^2 - |x - x_0|^2} u(x) dx, \quad \forall r < r_0.$$

Tome $r = \frac{r_0}{2}$ e perceba que sendo $B_r(x_0, 0)$ a bola centrada no ponto $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ de raio r vale:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^{d+1} w_{d+1}} \int_{B_r(x_0)} 2\sqrt{r^2 - |x - x_0|^2} M dx &= \frac{1}{r^{d+1} w_{d+1}} \int_{B_r(x_0, 0)} M dz \\ &= \int_{B_r(x_0, 0)} M dz \\ &= M \\ &= u(x_0) \\ &\leq \frac{1}{r^{d+1} w_{d+1}} \int_{B_r(x_0)} 2\sqrt{r^2 - |x - x_0|^2} u(x) dx \\ &\leq \frac{1}{r^{d+1} w_{d+1}} \int_{B_r(x_0)} 2\sqrt{r^2 - |x - x_0|^2} M dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{B_r(x_0)} 2\sqrt{r^2 - |x - x_0|^2} (M - u)(x) dx = 0$$

Como $M - u \geq 0$, isso mostra que $M = u$ em $B_r(x_0)$, o que conclui que $B_r(x_0) \subset \Omega_M$. \square

Proposição 4.2.7. *Se $h \in C^0(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$ para algum $1 \leq p < \infty$ ou h é Lipschitz e limitada, então $M_P h$ é subharmônica no conjunto aberto $A = \{x \in \mathbb{R}^d : M_P h(x) > h(x)\}$.*

Demonstração. Já sabemos que sobre qualquer uma das hipóteses, $h, M_P h$ são contínuas e portanto A é aberto. Iremos denotar $B_r(x)$ como a bola aberta de dimensão d centrada em x de raio r e $B_r(x, t)$ a bola aberta de dimensão $d + 1$ centrada em $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ de raio r .

Seja $x_0 \in A$. Sendo $0 < \varepsilon = M_P h(x_0) - h(x_0)$, como

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} H(x_0, t) = h(x_0),$$

existe $\delta = \delta(x_0) > 0$ tal que, se $t < \delta$ vale:

$$H(x_0, t) < h(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} = M_P h(x_0) - \frac{1}{2}(M_P h(x_0) - h(x_0)). \quad (4.8)$$

Tome agora $t_0 \geq \delta$ e escolha $0 < r_0 < \delta$ tal que $B_{r_0}(x_0) \subset\subset A$. Para todo $r < r_0$ vale $B_r(x_0, y_0) \subset\subset A \times (0, \infty)$. Como a função $H(x, t)$ é harmônica em $\mathbb{R}^d \times (0, \infty)$ temos:

$$\begin{aligned} H(x_0, t_0) &= \int_{B_r(x_0, t_0)} H(x, t) dx dt \\ &\leq \int_{B_r(x_0, t_0)} M_P h(x) dx dt \\ &= \frac{1}{r^{d+1} \omega_{d+1}} \int_{B_r(x_0)} 2\sqrt{r^2 - |x - x_0|^2} M_P h(x) dx, \end{aligned}$$

acima, ω_{d+1} representa o volume da bola unitária em \mathbb{R}^{d+1} . Pelo que foi visto em (4.8), $M_P h(x_0) = \sup_{t \geq \delta} H(x_0, t)$ e conseqüentemente vale:

$$M_P h(x_0) \leq \frac{1}{r^{d+1} \omega_{d+1}} \int_{B_r(x_0)} 2\sqrt{r^2 - |x - x_0|^2} M_P h(x) dx, \quad \forall r < r_0. \quad (4.9)$$

Para provarmos enfim a subharmonicidade de $M_P h$, tome $s > 0$ tal que $B_s(x_0) \subset\subset A$ e seja $f: \overline{B_s(x_0)} \rightarrow \mathbb{R}$ solução do sistema:

$$\begin{cases} \Delta f = 0 & \text{em } B_s(x_0), \\ f = M_P h & \text{em } \partial B_s(x_0). \end{cases}$$

Considere a função $g = M_P h - f$. Vamos provar agora que g satisfaz a desigualdade vista em (4.9) para a bola $B_s(x_0)$. Assim como analisamos no início desta demonstração, dado $x_1 \in B_s(x_0)$, existirá r_1 tal que $B_{r_1}(x_1) \subset\subset B_s(x_0)$ e

$$M_P h(x_1) \leq \frac{1}{r^{d+1} \omega_{d+1}} \int_{B_r(x_1)} 2\sqrt{r^2 - |x - x_1|^2} M_P h(x) dx, \quad \forall r < r_1. \quad (4.10)$$

Se definirmos também $\tilde{f}: \overline{B_s(x_0)} \times \mathbb{R}$ por $\tilde{f}(x, y) = f(x)$, \tilde{f} será também harmônica e vai satisfazer:

$$\begin{aligned} f(x_1) = \tilde{f}(x_1, 0) &= \int_{B_r(x_1, 0)} \tilde{f}(x, y) dx dy \\ &= \int_{B_r(x_1, 0)} f(x) dx dy \\ &= \frac{1}{r^{d+1} \omega_{d+1}} \int_{B_r(x_1)} 2\sqrt{r^2 - |x - x_1|^2} f(x) dx, \quad \forall r < r_1. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Juntando (4.10) e (4.11) obtemos:

$$\begin{aligned} g(x_1) &= M_P h(x_1) - f(x_1) \\ &\leq \frac{1}{r^{d+1} \omega_{d+1}} \int_{B_r(x_1)} 2\sqrt{r^2 - |x - x_1|^2} [M_P h(x) - f(x)] dx \\ &= \frac{1}{r^{d+1} \omega_{d+1}} \int_{B_r(x_1)} 2\sqrt{r^2 - |x - x_1|^2} g(x) dx. \end{aligned}$$

Pelo princípio do máximo, o qual vale para g pelo Teorema 4.2.6, o máximo de g ocorre em $\partial B_s(x_0)$ e sendo $g = 0$ em $\partial B_s(x_0)$ concluímos que

$$M_P h(x) \leq f(x) \text{ em } B_s(x_0),$$

de onde segue a subharmonicidade de $M_P h$. □

4.3 Teorema Principal

Proposição 4.3.1. *Sejam $f, g \in C^0(\mathbb{R}^d) \cap W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ com g Lipschitz. Suponha também que $g \geq 0$ e que f é subharmônica no conjunto aberto $J = \{x \in \mathbb{R}^d : g(x) > 0\}$. Então,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla f, \nabla g \rangle \leq 0.$$

Demonstração. Suponha que o resultado já tenha sido provado para o caso em que g tenha suporte compacto. Tome $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ não-negativa tal que

$$\begin{cases} \text{supp}(\psi) \subset B_2, \\ \psi(x) \equiv 1 \text{ em } B_1, \\ \psi(x) \leq 1 \text{ em } B_2 \setminus B_1. \end{cases}$$

Defina $\psi_N(x) = \psi(x/N)$ e $g_N(x) := g(x)\psi_N(x)$. Note que $g_N \in C^0(\mathbb{R}^d) \cap W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$, $g_N \geq 0$ e é Lipschitz, pois $g \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ uma vez que g_N é limitada e

$$|\nabla g_N(x)| = |\nabla(g(x)\psi_N(x) + g(x)\nabla\psi_N(x))| \leq \text{Lip}(g) + \sup_{B_{2N}} |g\nabla\psi_N| < \infty.$$

Além disso, $\{g_N > 0\} \subset \{g > 0\}$ de modo que f é subharmônica em $\{g_N > 0\}$. Sendo $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, existe constante C tal que $|\nabla\psi_N(x)| \leq C$, $\forall x, N$ e assim, pelo Teorema da convergência dominada, como $\psi_N(x) \rightarrow 1$ quando $N \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)\psi_N(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^2.$$

E como $\nabla\psi_N(x) \rightarrow 0$, quando $N \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla(g(x)\psi_N(x))|^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla g(x)\psi_N(x) + g(x)\nabla\psi_N(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla g(x)|^2.$$

Isso mostra que $g_N \rightarrow g$ em $W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ e consequentemente, como estamos assumindo que a proposição pode ser aplicada em funções Lipschitz,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla f, \nabla g \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla f, \nabla g_N \rangle \leq 0.$$

Com este resultado em mãos vemos que é suficiente provar a Proposição para o caso em que $\text{supp}(g) \subset B_r$ para algum $r > 0$. Defina $f_\varepsilon = f * \eta_\varepsilon$, onde η é o standard mollifier definido em (2.7). Vejamos agora que f_ε é subharmônica em $J_\varepsilon := \{x \in J : \text{dist}(x, \partial J) > \varepsilon\}$. De fato, sejam $x \in J_\varepsilon$ e $\overline{B_r(x)} \subset J_\varepsilon$, como f é subharmônica em J_ε vale:

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\eta_\varepsilon(y)dy \\ &= \int_{B_\varepsilon} f(x-y)\eta_\varepsilon(y)dy \\ &\leq \int_{B_\varepsilon} \left(\int_{\partial B_r(x-y)} f(z)dz \right) \eta_\varepsilon(y)dy \\ &= \int_{B_\varepsilon} \left(\int_{\partial B_r(x)} f(z-y)dz \right) \eta_\varepsilon(y)dy \\ &= \int_{\partial B_r(x)} \int_{B_\varepsilon} f(z-y)\eta_\varepsilon(y)dydz \\ &= \int_{\partial B_r(x)} f_\varepsilon(z)dz. \end{aligned}$$

Sendo $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $(-\Delta f_\varepsilon) \leq 0$ em J_ε . Se $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, podemos integrar por partes para obter:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla f_\varepsilon, \nabla \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} (-\Delta f_\varepsilon)\psi. \quad (4.12)$$

Pelo Teorema de Mayer-Serrin, tome $\psi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ com $\text{supp}(\psi_n) \subset B_r$ e tal que $\psi_n \rightarrow g$ em $W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$. Como $f_\varepsilon \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ vale então:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla f_\varepsilon, \nabla g \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla f_\varepsilon, \nabla \psi_n \rangle. \quad (4.13)$$

De modo análogo, sendo $\Delta f_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^d)$ vale:

$$\int_{\mathbb{R}^d} (-\Delta f_\varepsilon)g = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} (-\Delta f_\varepsilon)\psi_n. \quad (4.14)$$

Juntando (4.12), (4.13), (4.14) e o fato que $(-\Delta f_\varepsilon) \leq 0$ em J_ε , conseguimos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla f_\varepsilon, \nabla g \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} (-\Delta f_\varepsilon)g \\ &= \int_{J \setminus J_\varepsilon} (-\Delta f_\varepsilon)g + \int_{J_\varepsilon} (-\Delta f_\varepsilon)g \\ &\leq \int_{J \setminus J_\varepsilon} (-\Delta f_\varepsilon)g. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Dado $x \in J \setminus J_\varepsilon$, tome $y \in \partial J$ tal que $\text{dist}(x, \partial J) = |x - y| < \varepsilon$, pelo fato de g ser Lipschitz com $\text{Lip}(g) = C$ e $g(y) = 0$, vale:

$$|g(x)| = g(x) = g(x) - g(y) \leq |g(x) - g(y)| \leq C\varepsilon. \quad (4.16)$$

Note também que

$$\partial_{x_i} \eta_\varepsilon(x) = \partial_{x_i} \left(\frac{1}{\varepsilon^d} \eta \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) = \frac{1}{\varepsilon^d} \partial_{x_i} \eta \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \varepsilon^{-1} = \varepsilon^{-1} (\partial_{x_i} \eta)_\varepsilon(x).$$

Logo,

$$\partial_{x_i x_i} f_\varepsilon = (\partial_{x_i} f) * (\partial_{x_i} \eta_\varepsilon) = (\partial_{x_i} f) * (\varepsilon^{-1} (\partial_{x_i} \eta))_\varepsilon = \varepsilon^{-1} \cdot (\partial_{x_i} f) * (\partial_{x_i} \eta)_\varepsilon. \quad (4.17)$$

Juntando agora, (4.16), (4.17), Desigualdade de Hölder e Desigualdade de Young para convolução:

$$\begin{aligned} \int_{J \setminus J_\varepsilon} |(-\Delta f_\varepsilon)g| &\leq \int_{J \setminus J_\varepsilon} C\varepsilon \sum_{i=1}^d |\varepsilon^{-1} \cdot (\partial_{x_i} f) * (\partial_{x_i} \eta)_\varepsilon| \\ &\leq Cd \int_{J \setminus J_\varepsilon} |\nabla f| * (|\nabla \eta|)_\varepsilon \\ &\leq Cd \left(\int_{J \setminus J_\varepsilon} \left| |\nabla f| * (|\nabla \eta|)_\varepsilon \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} m(J \setminus J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq Cd \|\nabla f\|_2 \cdot \|\nabla \eta\|_1 \cdot m(J \setminus J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Assim, como $m(J \setminus J_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, juntando (4.15), (4.18) e o fato que $f_\varepsilon \rightarrow f$ em $W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla f, \nabla g \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla f_\varepsilon, \nabla g \rangle \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{J \setminus J_\varepsilon} (-\Delta f_\varepsilon) g = 0.$$

□

Vimos ao longo das duas seções anteriores que os Operadores Maximais de Gauss e Poisson compartilham de certas propriedades, podemos assim definir a classe de operadores que satisfazem tais propriedades como segue:

Definição 4.3.2. *Seja \mathfrak{M} o conjunto de todos os operadores maximais do tipo convolução M_φ que satisfazem as seguintes propriedades:*

- (i) $\varphi \in C^0(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$ e é dominada por uma função ξ radial, não-crescente, não negativa e integrável.
- (ii) $(\varphi_s * \varphi_t)(x) = \varphi_{s+t}(x)$.
- (iii) Se $f \in C^0(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$ para $1 \leq p < \infty$ ou f é Lipschitz e limitada, então $M_\varphi f \in C^0(\mathbb{R}^d)$ e é subharmônica no conjunto aberto $A = \{x \in \mathbb{R}^d : M_\varphi f(x) > f(x)\}$.

Em decorrência de tudo que já foi provado, segue naturalmente que os operadores $M_K, M_P \in \mathfrak{M}$.

Agora que já temos todas as principais ferramentas de que necessitamos podemos enunciar o principal teorema desta dissertação:

Teorema 4.3.3. *Dado $M_\varphi \in \mathfrak{M}$ valem então as seguintes afirmações:*

- (1) Se $d > 1$ e $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, para $p = 2$ ou $p = \infty$. Então $M_\varphi f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e

$$\|\nabla M_\varphi f\|_p \leq \|\nabla f\|_p.$$

- (2) Se $f \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ para $1 < p \leq \infty$. Então $M_\varphi f \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ e

$$\|(M_\varphi f)'\|_p \leq \|f'\|_p.$$

- (3) Se $f \in W^{1,1}(\mathbb{R})$. Então $M_\varphi f \in L^\infty(\mathbb{R})$, tem derivada fraca e

$$\|(M_\varphi f)'\|_1 \leq \|f'\|_1.$$

- (4) Se f é de variação pontual limitada em \mathbb{R} e $\varphi \in W^{1,1}(\mathbb{R})$. Então $M_\varphi f$ tem variação pontual limitada em \mathbb{R} e

$$\text{Var}_{\mathbb{R}}(M_\varphi f) \leq \text{Var}_{\mathbb{R}}(f).$$

Lema 4.3.4. *Podemos supor sem perda de generalidade que $f \geq 0$ no teorema acima e que é Lipschitz nas partes (1) e (2).*

Demonstração. O fato de podermos assumir $f \geq 0$ se deve por dois motivos:

- (i) $M_\varphi|f| = M_\varphi f$.
- (ii) Se $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, nós teremos $|f| \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e $|\nabla|f|| = |\nabla f|$ para q.t.p. x .

Quanto ao fato de ser Lipschitz, dividiremos em dois casos:

Caso 1: Se $p = \infty$, já sabemos que f pode ser tomada para ser Lipschitz.

Caso 2: Se $1 < p < \infty$, dado $\varepsilon > 0$, defina:

$$f_\varepsilon(x) := (f * \varphi_\varepsilon)(x).$$

Veja que pelo Teorema de Young,

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon\|_{1,\infty} &= \|f_\varepsilon\|_\infty + \|\nabla f_\varepsilon\|_\infty \\ &\leq \|f\|_{1,p} \cdot \|\varphi_\varepsilon\|_{p'} < \infty. \end{aligned}$$

Portanto, $f_\varepsilon \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ e consequentemente é Lipschitz contínuo.

Suponha agora que os resultados do Teorema 4.3.3 partes (1) e (2) estejam provados para funções Lipschitz e que $p \neq \infty$. Então,

$$\|\nabla M_\varphi f_\varepsilon\|_p \leq \|\nabla f_\varepsilon\|_p. \quad (4.19)$$

Vale também:

$$\begin{aligned} M_\varphi(f_\varepsilon)(x) &= \sup_{\tau>0} (f_\varepsilon * \varphi_\tau)(x) \\ &= \sup_{\tau>0} ((f * \varphi_\varepsilon) * \varphi_\tau)(x) \\ &= \sup_{\tau>0} (f * (\varphi_\varepsilon * \varphi_\tau))(x) \\ &= \sup_{\tau>0} (f * \varphi_{\tau+\varepsilon})(x) \\ &= \sup_{t>\varepsilon} (f * \varphi_t)(x), \end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} M_\varphi(f_\varepsilon)(x) = M_\varphi f(x).$$

Novamente utilizando a desigualdade de Young para convolução:

$$\|f_\varepsilon\|_{1,p} \leq \|f\|_{1,p} \|\varphi_\varepsilon\|_1 = \|f\|_{1,p}. \quad (4.20)$$

Pelo Teorema 3.1.5 e (4.20) vale:

$$\|M_\varphi(f_\varepsilon)\|_{1,p} \leq C_p \|\xi\|_1 \|f_\varepsilon\|_{1,p} \leq C_p \|\xi\|_1 \|f\|_{1,p},$$

ou seja, $M_\varphi(f_\varepsilon)$ é uniformemente limitado em $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e $M_\varphi(f_\varepsilon)(x) \rightarrow M_\varphi f(x)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, logo, sendo $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ reflexivo vale: $M_\varphi f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, $M_\varphi f_\varepsilon \rightarrow M_\varphi f$ em $L^p(\mathbb{R}^d)$ e por (4.19) vale:

$$\|\nabla M_\varphi f\|_p \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|\nabla M_\varphi(f_\varepsilon)\|_p \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|\nabla f_\varepsilon\|_p \leq \|\nabla f\|_p.$$

□

Prova do Teorema 4.3.3. Provaremos cada desigualdade de maneira isolada e dividindo em casos, quando necessário.

Para a **desigualdade (1)**, temos os seguintes casos:

Caso 1: Se $p = \infty$, segue pela demonstração do Teorema 3.1.5.

Caso 2: Se $p = 2$, pelo Lema 4.3.4 podemos assumir que f é Lipschitz contínua.

Logo, $M_\varphi f$ é também Lipschitz contínua e subharmônica em $A = \{x \in \mathbb{R}^d : M_\varphi f(x) > f(x)\}$. Como já sabemos que $M_\varphi f \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ pelo Teorema 3.1.5, tomando $M_\varphi f$ e $(M_\varphi f - f)$ na Proposição 4.3.1 obtemos:

$$\begin{aligned} \|\nabla f\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla M_\varphi f - \nabla(M_\varphi f - f)|^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla M_\varphi f|^2 + \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla(M_\varphi f - f)|^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla M_\varphi f, \nabla(M_\varphi f - f) \rangle \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla M_\varphi f|^2 = \|\nabla M_\varphi f\|_2^2. \end{aligned}$$

Para a **desigualdade (2)**, a demonstração é muito extensa, logo, para melhorar o entendimento, dividiremos ela em vários passos. Note inicialmente que se $p = \infty$, podemos aplicar o mesmo argumento usado na desigualdade (1), uma vez que em sua demonstração não foi utilizado o fato de $d > 1$. Portanto, considere agora $1 < p < \infty$.

Passo 1 - Considerações iniciais: Pelo Lema 4.3.4, podemos considerar que f é L -Lipschitz, de onde segue que $M_\varphi f$ é Lipschitz contínua e subharmônica no conjunto aberto $A := \{x \in \mathbb{R} : M_\varphi f(x) > f(x)\}$.

A fim de usarmos o Lema de Zorn, defina a família de funções:

$$S = \left\{ g \in W^{1,p}(\mathbb{R}), \text{ Lipschitz} \left\{ \begin{array}{l} f(x) \leq g(x) \leq M_\varphi f(x); \\ \text{Lip}(g) \leq L; \\ \|g'\|_p \leq \|f'\|_p. \end{array} \right. \right\}.$$

Note que a família S é não-vazia, pois $f \in S$. Vamos equipar a família S com a ordem parcial \preceq de modo que $g_1 \preceq g_2$ se, e somente se, $g_1(x) \leq g_2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Provaremos agora que (S, \preceq) é indutiva, ou seja, para todo conjunto $\Delta \subset S$ totalmente ordenado, Δ possui cota superior.

Seja $\Delta := \{g_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subset S$ um conjunto totalmente ordenado e defina

$$G(x) = \sup_{\alpha \in \Lambda} g_\alpha(x).$$

Por definição, G satisfaz as duas primeiras condições da família S , de fato, é claro que $f(x) \leq G(x) \leq M_\varphi f(x)$ e como cada g_α é L -Lipschitz, G será também L -Lipschitz. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere os $2n^2 + 1$ pontos da forma $\{j/n\}$ com $-n^2 \leq j \leq n^2$ e $j \in \mathbb{Z}$. Agora, para cada um destes j tome $g_{j,n} \in \Delta$ tal que

$$G(j/n) - g_{j,n}(j/n) < \frac{1}{n}.$$

Agora, sendo Δ totalmente ordenado defina a função L -Lipschitz abaixo:

$$g_n := \max_{-n^2 \leq j \leq n^2} g_{j,n}.$$

Dado $x \in [-n, n]$, existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que $\left|x - \frac{j}{n}\right| \leq \frac{1}{2n}$ e assim:

$$\begin{aligned} G(x) - g_n(x) &= G(x) - G(j/n) + G(j/n) - g_{j,n}(j/n) + g_{j,n}(j/n) - g_n(x) \\ &\leq |G(x) - G(j/n)| + |G(j/n) - g_{j,n}(j/n)| + |g_n(j/n) - g_n(x)| \\ &\leq L \left|x - \frac{j}{n}\right| + \frac{1}{n} + L \left|x - \frac{j}{n}\right| \\ &\leq \frac{1}{n} + \frac{L}{n}. \end{aligned}$$

Isso nos mostra que $g_n(x) \rightarrow G(x)$ quando $n \rightarrow \infty$ para todo x . Pelas condições impostas na família S sabemos também que $\|g_n\|_{1,p} \leq \|M_\varphi f\|_p + \|f'\|_p =: C < \infty$, logo, pela reflexibilidade de $W^{1,p}(\mathbb{R})$, $G \in W^{1,p}(\mathbb{R})$, $g_n \rightarrow G$ em $L^p(\mathbb{R})$ e $g'_n \rightarrow G'$ em $L^p(\mathbb{R})$ de onde segue que:

$$\|G'\|_p \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|g'_n\|_p \leq \|f'\|_p.$$

Portanto, $G \in \Delta$ e conseqüentemente, pelo Lema de Zorn, (S, \preceq) possui um elemento maximal que chamaremos de h . Se conseguirmos provar que $h = M_\varphi f$, teremos resolvido nosso problema, ou seja, que

$$\|(M_\varphi f)'\|_p \leq \|f'\|_p.$$

Passo 2 - Harmonicidade de h : Já sabemos que por $h \in S$, $h \leq M_\varphi f$, suponha então que o conjunto aberto $B := \{x \in \mathbb{R} : h(x) < M_\varphi f(x)\} \subset A$ seja não-vazio. Tome novamente intervalos abertos disjuntos $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{i=1}^\infty$ tais que

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i).$$

Veremos agora que h não pode ser superharmônica em B . De fato, suponha que um dos intervalos (α_i, β_i) seja limitado. Sabemos que vale:

$$\begin{cases} M_\varphi f - h \geq 0 \text{ em } (\alpha_i, \beta_i), \\ M_\varphi f - h \equiv 0 \text{ em } \partial(\alpha_i, \beta_i). \end{cases}$$

Logo, se h for superharmônica em (α_i, β_i) , $M_\varphi f - h$ será subharmônica em (α_i, β_i) e pelo princípio do máximo teríamos $h \equiv M_\varphi f$ em (α_i, β_i) , absurdo.

Se algum dos intervalos for da forma (α_i, ∞) , então por $M_\varphi f - h$ ser subharmônica, pela proposição 2.3.5 ela será convexa em (α_i, ∞) , estritamente positiva e $(M_\varphi f - h)(\alpha_i) = 0$. Além disso, sendo Lipschitz e L^p devemos ter pela proposição 2.1.12 que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (M_\varphi f - h)(x) = 0,$$

mas isso é uma contradição pois se $x > \alpha_i$:

$$\begin{aligned} 0 < (M_\varphi f - h)(x) &= (M_\varphi f - h) \left(\frac{2x - \alpha_i}{2} + \frac{\alpha_i}{2} \right) \\ &\leq \frac{1}{2} (M_\varphi f - h)(2x - \alpha_i) + \frac{1}{2} (M_\varphi f - h)(\alpha_i) \\ &= \frac{1}{2} (M_\varphi f - h)(2x - \alpha_i) \\ &\leq \frac{1}{4} (M_\varphi f - h)(4x - 3\alpha_i) \\ &\quad \vdots \\ &\leq \frac{1}{2^n} (M_\varphi f - h)(2^n x - (2^n - 1)\alpha_i). \end{aligned}$$

Tomando o limite $n \rightarrow \infty$ acima obteríamos $(M_\varphi f - h)(x) = 0$, absurdo.

Se algum intervalo for da forma $(-\infty, \beta_i)$ podemos aplicar o mesmo raciocínio visto acima.

Por fim, $B \neq \mathbb{R}$ pois temos $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ devido à Proposição 2.1.12. Então, f possui máximo global que chamaremos de x_0 , veja então que:

$$(f * \varphi_t)(x_0) = \int_{\mathbb{R}} f(y - x_0) \varphi_t(y) dy \leq \int_{\mathbb{R}} f(x_0) \varphi_t(y) dy = f(x_0).$$

Logo,

$$f(x_0) \leq h(x_0) \leq M_\varphi f(x_0) \leq f(x_0),$$

ou seja, $x_0 \notin B$.

Passo 3 - Como h não é superharmônica em B , existe intervalo $[a, b] \subset B$ tal que

$$h\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{h(a) + h(b)}{2}. \quad (4.21)$$

Defina também a função linear $l: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$l(x) = \frac{h(b) - h(a)}{b - a}(x - a) + h(a).$$

E as funções auxiliares:

$$\bar{M}(x) := M_\varphi f(x) - l(x), \quad \bar{h}(x) := h(x) - l(x).$$

Como \bar{h} é contínua em $[a, b]$, seja $y_0 \in [a, b]$ ponto de mínimo de \bar{h} . Por (4.21) vale:

$$\bar{h}(y_0) \leq \bar{h}\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{h(a) + h(b)}{2} - \frac{h(a) + h(b)}{b - a} \frac{b - a}{2} - h(a) \leq 0.$$

Veremos agora que existe uma constante L tal que $\bar{M}(x) \geq L \geq \bar{h}(x)$ para x em uma vizinhança de y_0 . Para isso, note inicialmente que $\bar{M}(y_0) - \bar{h}(y_0) =: C > 0$. Para cada $\varepsilon \in (0, -\bar{h}(y_0))$ sejam:

$$a_\varepsilon := \max\{x \in [a, y_0] : \bar{h}(x) \geq \bar{h}(y_0) + \varepsilon\}$$

e,

$$b_\varepsilon := \min\{x \in [y_0, b] : \bar{h}(x) \geq \bar{h}(y_0) + \varepsilon\}.$$

Segue que $\bar{h}(x) \leq \bar{h}(y_0) + \varepsilon$ para todo $x \in [a_\varepsilon, b_\varepsilon]$, com igualdade nos extremos do intervalo. Suponha que para todo ε , exista um ponto $z_\varepsilon \in [a_\varepsilon, b_\varepsilon]$ tal que $\bar{M}(z_\varepsilon) < \bar{h}(y_0) + \varepsilon$. Sendo

$\{z_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ uma sequência limitada, a menos de passarmos a uma subsequência, podemos assumir que $z_\varepsilon \rightarrow z_0 \in [a, b]$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, e assim,

$$\overline{M}(z_0) \leq \overline{h}(y_0) \leq \overline{h}(z_0) < \overline{M}(z_0),$$

uma contradição. Portanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\overline{M}(x) \geq \overline{h}(y_0) + \varepsilon \geq \overline{h}(x), \quad \forall x \in [a_\varepsilon, b_\varepsilon].$$

Faça $L = \overline{h}(y_0) + \varepsilon = \overline{h}(a_\varepsilon) = \overline{h}(b_\varepsilon)$. Note que obtemos também:

$$M_\varphi f(x) \geq l(x) + L \geq h(x), \quad \forall x \in [a_\varepsilon, b_\varepsilon]. \quad (4.22)$$

Como $l(x) + L$ é uma função linear e vale $l(a_\varepsilon) + L = h(a_\varepsilon)$ e $l(b_\varepsilon) + L = h(b_\varepsilon)$, vemos que

$$l(x) + L = \frac{h(b_\varepsilon) - h(a_\varepsilon)}{b_\varepsilon - a_\varepsilon}(x - a_\varepsilon) + h(a_\varepsilon).$$

Passo 4 - B é vazio: Para finalizar a demonstração, construiremos uma função $H \in S$ utilizando o resultado encontrado no passo anterior e tal que $h \preceq H$ contradizendo o Lema de Zorn e consequentemente mostrando que o conjunto B deve ser vazio. Defina então,

$$H(x) := \begin{cases} h(x), & \text{se } x \notin [a_\varepsilon, b_\varepsilon], \\ \frac{h(b_\varepsilon) - h(a_\varepsilon)}{b_\varepsilon - a_\varepsilon}(x - a_\varepsilon) + h(a_\varepsilon), & \text{se } x \in [a_\varepsilon, b_\varepsilon]. \end{cases}$$

Por (4.22), vale

$$h(x) \leq H(x) \leq M_\varphi f(x), \quad \forall x \in [a_\varepsilon, b_\varepsilon].$$

Claramente H é Lipschitz e $\text{Lip}(H) \leq \text{Lip}(h) \leq \text{Lip}(f)$. Finalmente, pela Desigualdade de Jensen utilizando-se das funções $|h'| \chi_{[a_\varepsilon, b_\varepsilon]}$, $\frac{1}{b_\varepsilon - a_\varepsilon} \chi_{[a_\varepsilon, b_\varepsilon]}$ e da função convexa x^p obtemos:

$$\left(\int_{[a_\varepsilon, b_\varepsilon]} |h'| \frac{1}{b_\varepsilon - a_\varepsilon} \right)^p \leq \int_{[a_\varepsilon, b_\varepsilon]} |h'|^p \frac{1}{b_\varepsilon - a_\varepsilon},$$

e consequentemente

$$\begin{aligned} \|h'\|_p^p &= \int_{[a_\varepsilon, b_\varepsilon]^c} |h'|^p + \int_{[a_\varepsilon, b_\varepsilon]} |h'|^p \\ &\geq \int_{[a_\varepsilon, b_\varepsilon]^c} |h'|^p + (b_\varepsilon - a_\varepsilon) \left(\int_{[a_\varepsilon, b_\varepsilon]} |h'| \frac{1}{b_\varepsilon - a_\varepsilon} \right)^p \\ &\geq \int_{[a_\varepsilon, b_\varepsilon]^c} |h'|^p + (b_\varepsilon - a_\varepsilon) \left| \int_{[a_\varepsilon, b_\varepsilon]} h' \frac{1}{b_\varepsilon - a_\varepsilon} \right|^p \\ &= \int_{[a_\varepsilon, b_\varepsilon]^c} |h'|^p + (b_\varepsilon - a_\varepsilon) \left| \frac{h(b_\varepsilon) - h(a_\varepsilon)}{b_\varepsilon - a_\varepsilon} \right|^p \\ &= \int_{\mathbb{R}} |H'|^p = \|H'\|_p^p. \end{aligned}$$

Isso mostra que $H \in S$ com $h \preceq H$ e a prova está encerrada.

Para a **desigualdade (3)**, inicialmente, lembre-se que toda função $f \in W^{1,1}(\mathbb{R})$ pode ser tomada como uma função absolutamente contínua. Logo, teremos também $M_\varphi f$ contínua e subharmônica no conjunto aberto $A := \{x \in \mathbb{R} : M_\varphi f(x) > f(x)\}$. Pela estrutura dos abertos de \mathbb{R} podemos escrever A como união enumerável e disjunta de intervalos abertos,

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j).$$

Sendo $M_\varphi f$ subharmônica em cada intervalo (a_j, b_j) , será convexa e localmente Lipschitz em cada um destes intervalos devido às Proposições 2.1.10 e 2.3.5. Assim, $M_\varphi f$ será absolutamente contínua em cada subintervalo compacto de (a_j, b_j) , conseqüentemente será diferenciável q.t.p. em cada (a_j, b_j) e denotaremos $M' = (M_\varphi f)'$.

Se tivermos algum intervalo (a_j, b_j) limitado, como $M_\varphi f$ é convexa em (a_j, b_j) e contínua, sendo $c_j \in [a_j, b_j]$ o mínimo de $M_\varphi f$ vale que $M_\varphi f$ é não-crescente em $[a_j, c_j]$ e não-decrescente em $[c_j, b_j]$, valendo assim que $M' \leq 0$ em (a_j, c_j) , $M' \geq 0$ em (c_j, b_j) e conseqüentemente, como $f, M_\varphi f$ satisfazem o Teorema Fundamental do Calculo em todo $[a, b] \subset (a_j, b_j)$ obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{a_j}^{b_j} |M'(x)| dx &= \lim_{\substack{a \rightarrow a_j \\ b \rightarrow b_j}} \left(\int_a^{c_j} |M'(x)| dx + \int_{c_j}^b |M'(x)| dx \right) \\ &= \lim_{\substack{a \rightarrow a_j \\ b \rightarrow b_j}} \left([M_\varphi f(a) - M_\varphi f(c_j)] + [M_\varphi f(b) - M_\varphi f(c_j)] \right) \\ &= [M_\varphi f(a_j) - M_\varphi f(c_j)] + [M_\varphi f(b_j) - M_\varphi f(c_j)] \\ &\leq [f(a_j) - f(c_j)] + [f(b_j) - f(c_j)] \\ &\leq \lim_{\substack{a \rightarrow a_j \\ b \rightarrow b_j}} \left(|f(a) - f(c_j)| + |f(b) - f(c_j)| \right) \\ &\leq \lim_{\substack{a \rightarrow a_j \\ b \rightarrow b_j}} \left(\int_a^{c_j} |f'(x)| dx + \int_{c_j}^b |f'(x)| dx \right) \\ &= \int_{a_j}^{b_j} |f'(x)| dx. \end{aligned}$$

No caso em que $a_j = -\infty$ nós teremos $f(a_j) = 0 = M_\varphi f(a_j)$ devido às proposições 2.2.13 e 2.1.14 sabendo que $f \in W^{1,1}(\mathbb{R})$ e $M_\varphi f \in L_{weak}^1(\mathbb{R})$ e é convexa em (a_j, b_j) . Novamente, tomando $c_j \in (-\infty, b_j)$ como mínimo de $M_\varphi f$ teremos:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{b_j} |M'(x)| dx &= \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow b_j}} \left(\int_a^{c_j} |M'(x)| dx + \int_{c_j}^b |M'(x)| dx \right) \\
&= \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow b_j}} \left([M_\varphi f(a) - M_\varphi f(c_j)] + [M_\varphi f(b) - M_\varphi f(c_j)] \right) \\
&= [0 - M_\varphi f(c_j)] + [M_\varphi f(b_j) - M_\varphi f(c_j)] \\
&\leq [0 - f(c_j)] + [f(b_j) - f(c_j)] \\
&\leq \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow b_j}} \left(|f(a) - f(c_j)| + |f(b) - f(c_j)| \right) \\
&\leq \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow b_j}} \left(\int_a^{c_j} |f'(x)| dx + \int_{c_j}^b |f'(x)| dx \right) \\
&= \int_{-\infty}^{b_j} |f'(x)| dx.
\end{aligned}$$

O caso em que $b_j = \infty$ é inteiramente análogo. Além disso, não podemos ter $A = \mathbb{R}$, pois f coincide com $M_\varphi f$ em pontos de máximo, o qual existiriam por $f(x), M_\varphi f(x) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$ e ambas serem contínuas.

Como $f \in W^{1,1}(\mathbb{R})$, isso nos mostra que $M' \in L^1(A)$.

Nós iremos agora provar que $M_\varphi f$ é fracamente diferenciável em \mathbb{R} com

$$(M_\varphi f)' = \chi_{A^c} f' + \chi_A M'.$$

De fato, seja $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, vemos que:

$$\begin{aligned}
\int_{a_j}^{b_j} M_\varphi f(x) \psi'(x) dx &= \lim_{\substack{a \rightarrow a_j \\ b \rightarrow b_j}} \int_a^b M_\varphi f(x) \psi'(x) dx \\
&= \lim_{\substack{a \rightarrow a_j \\ b \rightarrow b_j}} [(M_\varphi f)(b) \psi(b) - (M_\varphi f)(a) \psi(a)] - \int_a^b M'(x) \psi(x) dx \\
&= [(M_\varphi f)(b_j) \psi(b_j) - (M_\varphi f)(a_j) \psi(a_j)] - \int_{a_j}^{b_j} M'(x) \psi(x) dx \\
&= [f(b_j) \psi(b_j) - f(a_j) \psi(a_j)] - \int_{a_j}^{b_j} M'(x) \psi(x) dx.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Teremos assim:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} M_{\varphi} f(x) \psi'(x) dx \\
&= \int_{A^c} M_{\varphi} f(x) \psi'(x) dx + \int_A M_{\varphi} f(x) \psi'(x) dx \\
&= \int_{A^c} f(x) \psi'(x) dx + \sum_{j=1}^{\infty} [f(b_j) \psi(b_j) - f(a_j) \psi(a_j)] - \int_A M'(x) \psi(x) dx \\
&= \int_{A^c} f(x) \psi'(x) dx + \left[\int_A f(x) \psi'(x) dx + \int_A f'(x) \psi(x) dx \right] - \int_A M'(x) \psi(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi'(x) dx + \int_A f'(x) \psi(x) dx - \int_A M'(x) \psi(x) dx \\
&= - \int_{\mathbb{R}} f'(x) \psi(x) dx + \int_A f'(x) \psi(x) dx - \int_A M'(x) \psi(x) dx \\
&= - \int_{\mathbb{R}} (\chi_{A^c} f' + \chi_A M')(x) \psi(x) dx.
\end{aligned}$$

Isso encerra a demonstração da desigualdade (3).

Finalmente, para a **desigualdade (4)**, vamos considerar inicialmente que f é uma função Lipschitz limitada, de onde segue que $M_{\varphi} f$ também é Lipschitz limitada e subharmônica no conjunto aberto $A := \{x \in \mathbb{R} : M_{\varphi}(f_{\varepsilon})(x) > f_{\varepsilon}(x)\}$. Sendo esse um aberto de \mathbb{R} existem intervalos abertos e disjuntos $I_j = (a_j, b_j)$ tais que

$$A = \bigcup_j I_j.$$

Para averiguarmos a variação pontual de $M_{\varphi} f$ em cada I_j , dividiremos a prova em diversos casos. Lembrando que pela Proposição 2.1.11 para cada intervalo I_j , $M_{\varphi} f$ pode assumir umas das três seguintes formas:

- 1) $M_{\varphi} f$ é não-crescente em I_j .
- 2) $M_{\varphi} f$ é não-decrescente em I_j .
- 3) Existe $c_j \in I_j$ tal que $M_{\varphi} f|_{(a_j, c_j)}$ é não-crescente e $M_{\varphi} f|_{(c_j, b_j)}$ é não-decrescente.

Vejam antes que sendo f de variação pontual limitada e contínua, devem existir os limites:

$$f(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \text{ e } f(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

De fato, dada uma sequência $\{x_n\}$ com $x_n \rightarrow \infty$, como $f(x_n)$ é limitada, existe subsequência convergente, convergindo para $L := f(\infty)$. Agora, suponha que exista outra sequência y_n para a qual $f(y_n) \rightarrow M \neq f(\infty)$. Definindo $\varepsilon = |M - f(\infty)|/4$ note que por definição de limite,

podemos encontrar pontos $x_{n_1} < y_{n_1} < x_{n_2} < y_{n_2} < \dots$ tal que $|f(x_{n_i}) - f(y_{n_i})| > 2\varepsilon$ para todos i, j , assim para todo k vale:

$$\text{Var}(f) \geq \sum_{i=1}^k |f(x_{n_i}) - f(y_{n_i})| > 2\varepsilon k.$$

Tomando $k \rightarrow \infty$ obtemos uma contradição. De maneira análoga, concluímos a existência do limite em $x \rightarrow -\infty$. Vale ainda a existência dos limites:

$$M_\varphi f(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} M_\varphi f(x) \text{ e } M_\varphi f(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} M_\varphi f(x).$$

Isso decorre do fato que, se para algum a , $(a, \infty) \subset A$ então $M_\varphi f$ seria convexa limitada e portanto haveria limite em $x = \infty$, caso contrário, $(a, \infty) \subset A^C$ e $f(\infty) = M_\varphi f(\infty)$. Para $x \rightarrow -\infty$ o raciocínio é análogo.

Vejamos agora o que ocorre com a variação pontual de $M_\varphi f$ em cada I_j :

Caso I_j seja limitado e não exista c_j , como $f = M_\varphi f$ em $\{a_j, b_j\}$ vale:

$$\text{Var}_{I_j}(M_\varphi f) = |M_\varphi f(b_j) - M_\varphi f(a_j)| = |f(b_j) - f(a_j)| \leq \text{Var}_{I_j}(f).$$

Caso I_j seja limitado e exista c_j , então

$$\begin{aligned} \text{Var}_{I_j}(M_\varphi f) &= M_\varphi f(a_j) - M_\varphi f(c_j) + M_\varphi f(b_j) - M_\varphi f(c_j) \\ &< f(a_j) - f(c_j) + f(b_j) - f(c_j) \\ &\leq \text{Var}_{(a_j, c_j)}(f) + \text{Var}_{(c_j, b_j)}(f) \\ &= \text{Var}_{I_j}(f). \end{aligned}$$

Caso $I_j = (a_j, \infty)$ e $M_\varphi f$ seja não-crescente, $f(a) = M_\varphi f(a)$ e

$$\text{Var}_{I_j}(M_\varphi f) = M_\varphi f(a_j) - M_\varphi f(\infty) \leq f(a_j) - f(\infty) \leq \text{Var}_{I_j}(f).$$

Caso $I_j = (a_j, \infty)$ e $M_\varphi f$ seja não-decrescente, $M_\varphi f$ será constante. De fato, se não o fosse, existiria $b > a$ com $f(b) > f(a)$ e por convexidade para todo $c > b$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

Logo,

$$f(c) \geq f(a) + (c - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Tomando $c \rightarrow \infty$ obteríamos $f(\infty) = \infty$, absurdo. Portanto, $M_\varphi f$ é constante e

$$\text{Var}_{I_j}(M_\varphi f) = 0 \leq \text{Var}_{I_j}(f).$$

Caso $I_j = (a_j, \infty)$ e exista c_j , pelo que foi visto no caso anterior, teremos $M_\varphi f|_{[c_j, \infty)}$ constante, logo:

$$\text{Var}_{I_j}(M_\varphi f) = M_\varphi f(a_j) - M_\varphi f(c_j) < f(a_j) - f(c_j) \leq \text{Var}_{I_j}(f).$$

Caso $I_j = (-\infty, b_j)$ e $M_\varphi f$ seja não-crescente, $M_\varphi f$ será constante. Assim como foi visto anteriormente, se não fosse, teríamos $b > a$ com $f(b) < f(a)$ e para $c < a$ valeria:

$$f(c) \geq f(a) + (a - c) \frac{f(a) - f(b)}{b - a}$$

Tomando $c \rightarrow \infty$ obteríamos $f(\infty) = \infty$, absurdo. Logo,

$$\text{Var}_{I_j}(M_\varphi f) = 0 \leq \text{Var}_{I_j}(f).$$

Caso $I_j = (-\infty, b_j)$ e $M_\varphi f$ seja não-decrescente, $M_\varphi f(b_j) = f(b_j)$ e

$$\text{Var}_{I_j}(M_\varphi f) = M_\varphi f(b_j) - M_\varphi f(-\infty) \leq f(b_j) - f(-\infty) \leq \text{Var}_{I_j}(f).$$

Caso $I_j = (-\infty, b_j)$ e exista c_j , pelo que foi visto nos casos anteriores, teremos $M_\varphi f|_{(-\infty, c_j]}$ constante, logo:

$$\text{Var}_{I_j}(M_\varphi f) = M_\varphi f(b_j) - M_\varphi f(c_j) < f(b_j) - f(c_j) \leq \text{Var}_{I_j}(f).$$

Caso $I_j = \mathbb{R}$ e não exista c_j a convexidade e limitação de $M_\varphi f$ garantirá uma vez mais que $M_\varphi f$ é constante. Quando existir c_j , podemos aplicar os resultados anteriores para $(-\infty, c_j)$ e (c_j, ∞) e assim,

$$\text{Var}_{\mathbb{R}}(M_\varphi f) \leq \text{Var}_{\mathbb{R}}(f).$$

Por fim, para cada intervalo $I \subset A^C$ é óbvio que

$$\text{Var}_I(M_\varphi f) = \text{Var}_I(f).$$

Mostraremos agora que $M_\varphi f$ terá variação pontual limitada desde que f o tenha. Tomando uma partição $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Iremos refinar P da seguinte maneira: Se $x_k \in (a_j, b_j)$ para algum j , adicionaremos os pontos a_j, b_j, c_j , onde c_j é o ponto de mínimo de

$M_\varphi(f_\varepsilon)$ em (a_j, b_j) , caso tal ponto exista. Isso nos dá uma nova partição $P' := \{y_0, y_1, \dots, y_m\}$. Por tudo que foi visto anteriormente vê-se claramente que

$$\text{Var}(M_\varphi f, P') \leq \text{Var}(f, P').$$

Logo

$$\text{Var}_{\mathbb{R}}(M_\varphi f) \leq \text{Var}_{\mathbb{R}}(f).$$

Concluimos assim a validade do teorema quando f é Lipschitz. Caso não seja, para todo $\varepsilon > 0$ defina novamente

$$f_\varepsilon(x) = (f * \varphi_\varepsilon)(x).$$

Já sabemos que f_ε é limitada, Lipschitz e vale:

$$M_\varphi(f_\varepsilon) = \sup_{t>\varepsilon} (f * \varphi_t)(x).$$

Portanto, para cada partição $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$,

$$\text{Var}(M_\varphi f_\varepsilon, P) \leq \text{Var}(f_\varepsilon, P).$$

Note agora que

$$f'_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) K'_\varepsilon(x-y) dy = - \int_{\mathbb{R}} K_\varepsilon(x-y) d(Df)(y).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{Var}_{(a,b)}(f_\varepsilon) &= \int_a^b |f'_\varepsilon(x)| dx \\ &\leq \int_a^b \int_{\mathbb{R}} |K_\varepsilon(x-y)| d(Df)(y) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_a^b |K_\varepsilon(x-y)| dx d(Df)(y) \\ &\leq \|K_\varepsilon\|_{L^1((a,b))} \int_{\mathbb{R}} d(Df)(y) \\ &= \|K_\varepsilon\|_{L^1((a,b))} Df(\mathbb{R}) \\ &\leq \|K_\varepsilon\|_{L^1((a,b))} |Df|(\mathbb{R}) \leq \|K_\varepsilon\|_{L^1((a,b))} \text{Var}_{\mathbb{R}}(f), \end{aligned}$$

onde $|Df| \leq \text{Var}_{\mathbb{R}}(f)$ decorre do Teorema 2.1.16. Como a desigualdade acima vale para todo (a, b) ,

$$\text{Var}_{\mathbb{R}}(f_\varepsilon) \leq \|K_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R})} \text{Var}_{\mathbb{R}}(f) = \text{Var}_{\mathbb{R}}(f).$$

Tomando o limite $\varepsilon \rightarrow 0$, sabemos que $M_\varphi(f_\varepsilon) \rightarrow M_\varphi f$ pontualmente, logo:

$$\begin{aligned} \text{Var}(M_\varphi f, P) &= \sum_{i=1}^n |M_\varphi f(x_i) - M_\varphi f(x_{i-1})| \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |M_\varphi(f_\varepsilon)(x_i) - M_\varphi(f_\varepsilon)(x_{i-1})| \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Var}(M_\varphi f_\varepsilon, P) \\ &\leq \text{Var}(f). \end{aligned}$$

Tomando por fim, o supremo sobre as partições,

$$\text{Var}_{\mathbb{R}}(M_\varphi f) \leq \text{Var}_{\mathbb{R}}(f).$$

□

5 VARIAÇÃO EM DOMÍNIOS DISCRETOS

Neste capítulo estudaremos características semelhantes às que vimos no capítulo anterior com relação a variação de certos operadores, porém, desta vez voltaremos nossa atenção para o caso das funções discretas, bem como mostraremos versões alternativas de definições de EDP para funções discretas, como o operador Laplaciano. As definições e resultados aqui apresentados se concentram em domínios enumeráveis e mais precisamente, no domínio \mathbb{Z}^d , todavia eles permanecem válidos de maneira semelhantes quando trabalhado em grafos, fazendo as devidas adaptações.

5.1 Funções discretas

Definição 5.1.1. *Seja $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, diremos que f é uma função discreta sempre que D for um conjunto enumerável. Para o caso em que $D = \mathbb{Z}^d$, sendo $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^d$ o i -ésimo vetor da base canônica de \mathbb{R}^d , definimos também, para cada $n \in \mathbb{Z}^d$*

$$\mathcal{V}(n) := \{n \pm e_i : 1 \leq i \leq d\}$$

e para todo conjunto $J \subset \mathbb{Z}^d$,

$$\mathcal{V}(J) := \bigcup_{n \in J} \mathcal{V}(n).$$

Definição 5.1.2. *Seja $f: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ uma função discreta, definimos a i -ésima derivada de f em $n \in \mathbb{Z}^d$ como sendo:*

$$\partial_{x_i} f(n) := f(n + e_i) - f(n).$$

O gradiente discreto de f é definido como:

$$\nabla f(n) := (\partial_{x_1} f(n), \partial_{x_2} f(n), \dots, \partial_{x_d} f(n)).$$

E o laplaciano discreto é dado por:

$$\Delta f(n) = \frac{1}{2d} \sum_{m \in \mathcal{V}(n)} [f(m) - f(n)] = \left(\frac{1}{2d} \sum_{m \in \mathcal{V}(n)} f(m) \right) - f(n).$$

Definição 5.1.3. *Podemos também definir a norma l^p de uma função discreta $f: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo:*

$$\|f\|_p := \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |f(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ se } 1 \leq p < \infty$$

e,

$$\|f\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{Z}^d} |f(n)|.$$

Definição 5.1.4. Dadas funções $f, g: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$, a convolução de f em g é denotada e definida por:

$$(f * g)(n) := \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} f(n - m)g(m).$$

Proposição 5.1.5 (Princípio do máximo discreto). Sejam $f: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ uma função discreta, $J \subset \mathbb{Z}^d$ um conjunto finito e $\bar{J} := \mathcal{V}(J)$. Definindo $\partial J := \bar{J} \setminus J$, se $\Delta f \geq 0$ em J então

$$\max_{n \in \bar{J}} f(n) = \max_{n \in \partial J} f(n).$$

Vamos provar antes a seguinte afirmação:

Lema 5.1.6. Sejam $f: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ uma função discreta e $J \subset \mathbb{Z}^d$ um conjunto finito, se tivermos $\Delta f > 0$ em J , então não existe $n_0 \in J$ tal que

$$f(n_0) = \max_{n \in \bar{J}} f(n).$$

Ou seja,

$$\max_{n \in \bar{J}} f(n) = \max_{n \in \partial J} f(n).$$

Demonstração. Suponha que exista um tal $n_0 \in J$, então $f(m) \leq f(n_0), \forall m \in \bar{J}$, consequentemente:

$$0 < \Delta f(n_0) = \frac{1}{2d} \sum_{m \in \mathcal{V}(n_0)} (f(m) - f(n_0)) \leq 0.$$

Com esta contradição vemos que não existe $n_0 \in J$ satisfazendo a propriedade. \square

Demonstração da Proposição 5.1.5. Defina para cada $0 < t \in \mathbb{R}$ a função

$$f_t(n) = f(n) - t(R^2 - |n|^2)$$

onde R é tomado de forma que $|n| < R$ para todo $n \in \bar{J}$, o qual é possível pela finitude de J . É fácil ver que

$$\Delta f_t(n) = \Delta f(n) + t > 0.$$

Pelo lema anterior,

$$\max_{n \in \bar{J}} f_t(n) = \max_{n \in \partial J} f_t(n).$$

Além disso,

$$f(n) = f_t(n) + t(R^2 - |n|^2) \leq f_t(n) + tR^2,$$

$$f_t(n) < f(n).$$

Logo,

$$\max_{n \in \bar{J}} f(n) \leq \max_{n \in \bar{J}} f_t(n) + tR^2 = \max_{n \in \partial J} f_t(n) + tR^2 < \max_{n \in \partial J} f(n) + tR^2.$$

Bastando tomar $t \rightarrow 0$ para concluirmos a demonstração. \square

5.2 Operador Maximal de Gauss Discreto

Assim como na equação do calor em \mathbb{R}^d , podemos nos perguntar se dada uma função discreta $f: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$, existe $F: \mathbb{Z}^d \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo:

$$\begin{cases} \partial_t F(n, t) = \Delta F(n, t), & \forall (n, t) \in \mathbb{Z}^d \times (0, \infty) \\ F(n, 0) = f(n), & \forall n \in \mathbb{Z}^d, \end{cases} \quad (5.1)$$

onde o laplaciano tomado na equação acima é com respeito às d primeiras variáveis, ou seja, se trata do laplaciano discreto.

Veremos no Lema abaixo que a solução do sistema (5.1), assim como no caso contínuo de \mathbb{R}^d , é dado através de uma convolução, a saber, a função F é de classe C^1 na variável temporal e vale:

$$F(n, t) = (f * \mathcal{K}_t)(n),$$

onde, sendo $m = (m_1, m_2, \dots, m_d) \in \mathbb{Z}^d$ temos:

$$\mathcal{K}_t(m) = e^{-t} \prod_{i=1}^d I_{m_i} \left(\frac{t}{d} \right)$$

e para $k \geq 0$ e $z \in \mathbb{C}$, I_k é a função de Bessel dada por:

$$I_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2j+k}}{j!(j+k)!} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos(\theta)} \cos(k\theta) d\theta.$$

Para k negativo, definimos $I_k := I_{-k}$.

Lema 5.2.1. A função $F: \mathbb{Z}^d \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(n, t) = (f * \mathcal{K}_t)(n)$ satisfaz:

$$\begin{cases} \partial_t F(n, t) = \Delta F(n, t), & \forall (n, t) \in \mathbb{Z}^d \times (0, \infty) \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} F(n, t) = f(n), & \forall n \in \mathbb{Z}^d. \end{cases}$$

Demonstração. Note inicialmente que I satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$I_{k+1}(z) + I_{k-1}(z) = 2I'_k(z). \quad (5.2)$$

De fato,

$$\begin{aligned} 2I'_k(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos(\theta)} 2 \cos(k\theta) \cos(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos(\theta)} [\cos((k+1)\theta) + \cos((k-1)\theta)] d\theta \\ &= I_{k+1}(z) + I_{k-1}(z). \end{aligned}$$

Por (5.2) vale:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{K}_t(m) &= -e^{-t} \prod_{i=1}^d I_{m_i} \left(\frac{t}{d} \right) + \sum_{i=1}^d \left(e^{-t} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d I_{m_j} \left(\frac{t}{d} \right) I'_{m_i} \left(\frac{t}{d} \right) \frac{1}{d} \right) \\ &= \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^d \left(e^{-t} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d I_{m_j} \left(\frac{t}{d} \right) 2I'_{m_i} \left(\frac{t}{d} \right) \right) - e^{-t} \prod_{i=1}^d I_{m_i} \left(\frac{t}{d} \right) \\ &= \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^d \left(e^{-t} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d I_{m_j} \left(\frac{t}{d} \right) \left(I_{m_i+1} \left(\frac{t}{d} \right) + I_{m_i-1} \left(\frac{t}{d} \right) \right) \right) - \mathcal{K}_t(m) \\ &= \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^d [\mathcal{K}_t(m+1) + \mathcal{K}_t(m-1)] - \mathcal{K}_t(m) = \Delta \mathcal{K}_t(m). \end{aligned}$$

Além disso, é fácil ver que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{K}_t(m) = \delta_0(m) := \begin{cases} 1, & \text{se } m = 0, \\ 0, & \text{se } m \neq 0. \end{cases}$$

Isso mostra que

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{K}_t(n) = \Delta \mathcal{K}_t(n), & \forall (n, t) \in \mathbb{Z}^d \times (0, \infty) \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{K}_t(n) = \delta_0(n), & \forall n \in \mathbb{Z}^d. \end{cases}$$

Consequentemente,

$$\partial_t F(n, t) = (f * \partial_t \mathcal{K}_t)(n) = (f * \Delta \mathcal{K}_t)(n) = \Delta F(n, t), \quad \forall (n, t) \in \mathbb{Z}^d \times (0, \infty),$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0^+} F(n, t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} (f * \mathcal{K}_t)(n) \\
&= (f * \delta_0)(n) \\
&= f(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}^d.
\end{aligned}$$

□

Lema 5.2.2. A norma $\|\mathcal{K}_t\|_1$ é 1.

Demonstração. Tome $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = e^{z(\cos(t)-1)}$, onde $z \in \mathbb{R}$. Sendo f uma função 2π -periódica e $C^\infty(\mathbb{R})$, pelo Teorema de Fourier, sua série de Fourier converge pontualmente e temos assim:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Veja que

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{2\pi} e^{z(\cos(t)-1)} e^{-int} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{z(\cos(t)-1)} \cos(nt) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{z(\cos(t)-1)} \cos(nt) dt = e^{-z} I_n(z).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$f(t) = e^{z(\cos(t)-1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [e^{-z} I_n(z)] e^{-int}.$$

Tomando $t = 0$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [e^{-z} I_n(z)] = 1.$$

Para finalizar, veja que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{K}_t\|_1 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{K}_t(m) \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \left(\prod_{i=1}^d e^{-t} I_{m_i}(t/d) \right) \\
&= \prod_{i=1}^d \left(\sum_{m_i \in \mathbb{Z}^d} e^{-t/d} I_{m_i}(t/d) \right) = 1.
\end{aligned}$$

□

De maneira análoga ao que fizemos no caso contínuo, podemos então definir um operador à essa EDP discreta como segue.

Definição 5.2.3. Dada uma função $f: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ discreta, o Operador Maximal de Gauss discreto é dado por:

$$M_K f(n) = \sup_{t>0} (|f| * \mathcal{K}_t)(n).$$

Vamos assumir ao longo desta seção que $f \geq 0$ de modo que tenhamos

$$M_K f(n) = \sup_{t>0} F(n, t) := \sup_{t>0} (f * \mathcal{K}_t)(n).$$

Proposição 5.2.4. Sejam $f, g: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ funções discretas e limitadas tais que $g \geq f$. Seja $I := \{n \in \mathbb{Z}^d : g(n) \geq M_K f(n)\}$ e suponha que $\Delta g \leq 0$ em I^c . Então, $I = \mathbb{Z}^d$.

Demonstração. Se $f \equiv 0$, não há o que ser feito. Suponha então que f não seja identicamente nula. Se provarmos que

$$\sup_{t \geq 0} F(n, t) \leq g(n), \quad \forall n \in I^c,$$

teremos provado que $I = \mathbb{Z}^d$.

Note inicialmente que para todo $(n, t) \in \mathbb{Z}^d \times [0, \infty)$,

$$|F(n, t)| \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} |f(n-m)| |\mathcal{K}_t(m)| \leq \|f\|_\infty \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} |\mathcal{K}_t(m)| = \|f\|_\infty \quad (5.3)$$

e assim,

$$\begin{aligned} |\partial_t F(n, t)| &= |\Delta F(n, t)| \\ &\leq \frac{1}{2d} \sum_{m \in \mathcal{V}(n)} |F(m, t)| + |F(n, t)| \\ &\leq 2\|f\|_\infty. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Dado $\varepsilon > 0$, defina

$$T_\varepsilon = \sup\{t \geq 0, F(n, t) \leq g(n) + \varepsilon, \forall n \in I^c\}.$$

Por (5.3) e (5.4), vemos que a função $F(n, t)$ é Lipschitz com respeito à variável t e portanto, sendo $t = \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^d$ temos:

$$\begin{aligned} F(n, t) &= F(n, 0) + F(n, t) - F(n, 0) \\ &\leq F(n, 0) + |F(n, t) - F(n, 0)| \\ &\leq F(n, 0) + 2\|f\|_\infty |t| \\ &= f(n) + \varepsilon \leq g(n) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Isso mostra que:

$$T_\varepsilon \geq \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty} > 0.$$

Suponha agora que $T_\varepsilon < \infty$ e tome $(n, t) \in I^c \times [0, T_\varepsilon]$, como $\Delta g \leq 0$ em I^c , vale:

$$\begin{aligned} \partial_t F(n, t) &= \Delta F(n, t) \\ &= -F(n, t) + \frac{1}{2d} \sum_{m \in \mathcal{V}(n)} [F(m, t)] \\ &\leq -F(n, t) + \frac{1}{2d} \sum_{m \in \mathcal{V}(n)} [g(m) + \varepsilon] \\ &\leq -F(n, t) + \varepsilon + g(n) + \frac{1}{2d} \sum_{m \in \mathcal{V}(n)} [g(m) - g(n)] \\ &= -F(n, t) + \varepsilon + g(n) + \Delta g(n) \\ &\leq -F(n, t) + g(n) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Definindo agora a função $y: [0, T_\varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $y(t) = F(n, t) - g(n) - \varepsilon$. Pelo que foi visto acima, $y'(t) \leq -y(t)$, logo,

$$0 \geq \int_0^t e^s [y'(s) + y(s)] ds = \int_0^t [e^s y(s)]' ds = e^t y(t) - y(0).$$

E para todo $t \in [0, T_\varepsilon]$ vale:

$$y(t) \leq e^{-t} y(0) \leq -\varepsilon e^{-t} \leq -\varepsilon e^{-T_\varepsilon},$$

e assim,

$$F(n, T_\varepsilon) \leq g(n) + \varepsilon - \varepsilon e^{-T_\varepsilon}, \quad \forall n \in I^c. \quad (5.5)$$

Novamente usando o fato que F é Lipschitz, para $n \in I^c$ e

$$t = T_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty e^{T_\varepsilon}}$$

vale que:

$$\begin{aligned}
F(n, t) &= F(n, T_\varepsilon) + F(n, t) - F(n, T_\varepsilon) \\
&\leq F(n, T_\varepsilon) + |F(n, t) - F(n, T_\varepsilon)| \\
&\leq F(n, T_\varepsilon) + 2\|f\|_\infty |T_\varepsilon - t| \\
&\leq g(n) + \varepsilon - \varepsilon e^{-T_\varepsilon} + 2\|f\|_\infty |T_\varepsilon - t| \\
&= g(n) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Isso nos gera uma contradição, pois assim deveríamos ter $T_\varepsilon \geq t > T_\varepsilon$. Portanto, $T_\varepsilon = \infty$ e conseqüentemente

$$F(n, t) \leq g(n) + \varepsilon, \quad \forall (n, t) \in I^c \times [0, \infty).$$

Tomando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ obtemos o resultado. □

5.3 Operador Maximal de Poisson Discreto

Dados $(n, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^+$ e $t = (t_1, t_2, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$ defina as seguintes funções:

$$\begin{aligned}
Q_1(t) &:= \left((d+1) - \sum_{k=1}^d \cos(2\pi t_k) \right) - \left(\left((d+1) - \sum_{k=1}^d \cos(2\pi t_k) \right)^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}}, \\
Q_y(t) &:= (Q_1(t))^y
\end{aligned}$$

e,

$$\mathcal{P}_y(n) = \int_{\mathbb{T}^d} Q_y(t) e^{2\pi i \langle n, t \rangle} dt,$$

onde $\mathbb{T}^d := \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d$.

Teorema 5.3.1. *Dada uma função discreta $h: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$, definindo $H: \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ como $H(n, y) = (h * \mathcal{P}_y)(n)$, então H satisfaz:*

$$\begin{cases} \Delta H(n, y) = 0, & \forall (n, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N} \\ H(n, 0) = h(n), & \forall n \in \mathbb{Z}^d. \end{cases}$$

Demonstração. Assim como foi visto na seção anterior para o Operador Maximal de Gauss discreto, é suficiente provarmos que $\mathcal{P}_y(n)$ satisfaz:

$$\begin{cases} \Delta \mathcal{P}_y(n) = 0, & \forall (n, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N} \\ \mathcal{P}_0(n) = \delta_0(n), & \forall n \in \mathbb{Z}^d. \end{cases}$$

Note inicialmente que por definição, $Q_1(t)$ satisfaz a seguinte equação de segundo grau:

$$Q_1^2(t) - Q_1(t) \left(2(d+1) - 2 \sum_{k=1}^d \cos(2\pi t_k) \right) + 1 = 0, \quad \forall t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{T}^d.$$

Consequentemente, calculando o laplaciano discreto de $\mathcal{P}_y(n)$ para $y \geq 1$ obtemos:

$$\begin{aligned} & 2(d+1)\Delta \mathcal{P}_y(n) \\ &= -2(d+1)\mathcal{P}_y(n) + (\mathcal{P}_{y-1}(n) + \mathcal{P}_{y+1}(n)) + \sum_{m \in \mathcal{V}(n)} \mathcal{P}_y(m) \\ &= \int_{\mathbb{T}^d} -2(d+1)Q_1^y(t) e^{2\pi i \langle n, t \rangle} dt + \int_{\mathbb{T}^d} (Q_1^{y-1}(t) + Q_1^{y+1}(t)) e^{2\pi i \langle n, t \rangle} dt \\ &\quad + \sum_{m \in \mathcal{V}(n)} \int_{\mathbb{T}^d} Q_1^y(t) e^{2\pi i \langle m, t \rangle} dt \\ &= \int_{\mathbb{T}^d} -2(d+1)Q_1^y(t) e^{2\pi i \langle n, t \rangle} dt + \int_{\mathbb{T}^d} (Q_1^{y-1}(t) + Q_1^{y+1}(t)) e^{2\pi i \langle n, t \rangle} dt \\ &\quad + \int_{\mathbb{T}^d} Q_1^y(t) e^{2\pi i \langle n, t \rangle} \sum_{k=1}^d (e^{2\pi i t_k} + e^{-2\pi i t_k}) dt \\ &= \int_{\mathbb{T}^d} -2(d+1)Q_1^y(t) e^{2\pi i \langle n, t \rangle} dt + \int_{\mathbb{T}^d} (Q_1^{y-1}(t) + Q_1^{y+1}(t)) e^{2\pi i \langle n, t \rangle} dt \\ &\quad + \int_{\mathbb{T}^d} Q_1^y(t) e^{2\pi i \langle n, t \rangle} \sum_{k=1}^d 2 \cos(2\pi t_k) dt \\ &= \int_{\mathbb{T}^d} Q_1^{y-1}(t) e^{2\pi i \langle n, t \rangle} \left(Q_1^2(t) - Q_1(t) \left(2(d+1) - 2 \sum_{k=1}^d \cos(2\pi t_k) \right) + 1 \right) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para finalizar, um simples cálculo mostra que

$$\mathcal{P}_0(n) = \int_{\mathbb{T}^d} e^{2\pi i \langle n, t \rangle} dt = \delta_0(n).$$

□

Lema 5.3.2. A norma $\|\mathcal{P}_y\|_1$ é 1.

Demonstração. Inicialmente vejamos que $\mathcal{P}_y(m) \geq 0, \forall m \in \mathbb{Z}^d$.

De fato, veja que $Q_y(t) = (Q_1(t))^y$ e $0 \leq Q_1(t) \leq 1, \forall t \in \mathbb{T}^d$ e $Q_1(t) = 1$ se, e somente se, $t = 0$. Assim, para $t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$, a função $f_t: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_t(y) = Q_y(t)$ é decrescente e tende a 0 quando $y \rightarrow \infty$. Da definição de \mathcal{P}_y vemos que $|\mathcal{P}_y(n)| \leq 1, \forall (n, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^+$. Dado $\varepsilon > 0$, pelo Teorema da convergência limitada, existe $y_0 > 0$ tal que

$$|\mathcal{P}_y(n)| \leq \int_{\mathbb{T}^d} Q_y(t) dt < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^d, y \geq y_0.$$

Por outro lado, pelo Lema de Riemann-Lebesgue, existe $r_0 > 0$ tal que para $0 \leq y \leq y_0$ e $|n| \geq r_0$ vale:

$$|\mathcal{P}_y(n)| < \varepsilon.$$

Considerando $J := [-r_0, r_0]^d \times [0, y_0]$, como $\Delta \mathcal{P}_y(n) = 0$ em J , pelo princípio do máximo visto em 5.1.5, o maior valor de $\mathcal{P}_y(n)$ é atingido em $\bar{J} \setminus J$, logo, pelo que foi visto acima:

$$\mathcal{P}_y(n) > -\varepsilon, \quad \forall (n, y) \in J.$$

Como podemos expandir o conjunto J tanto quanto quisermos,

$$\mathcal{P}_y(n) > -\varepsilon, \quad \forall (n, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^+.$$

Novamente, como o ε tomado foi arbitrário, $\mathcal{P}_y(n) \geq 0$ como queríamos demonstrar. Isso nos mostra que

$$\|\mathcal{P}_y\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |\mathcal{P}_y(n)| = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{P}_y(n).$$

Para finalizar, note que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_y\|_1 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{P}_y(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{T}^d} Q_y(t) e^{2\pi i \langle n, t \rangle} dt \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{T}^d} e^{2\pi i \langle n, t \rangle} dt \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \left(\prod_{i=1}^d \frac{\sin(\pi n_i)}{\pi n_i} \right) = 1, \end{aligned}$$

tem-se também

$$\int_{\mathbb{T}^d} Q_y(t) dt \leq 1.$$

Segue pela fórmula de inversão da Série de Fourier, que

$$\|\mathcal{P}_y\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{P}_y(n) = \mathcal{Q}_y(0) = 1.$$

□

Definição 5.3.3. Dada uma função $h: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ discreta, o Operador maximal de Poisson discreto é dado por:

$$M_P h(n) = \sup_{y>0} (|h| * \mathcal{P}_y)(n).$$

Uma vez mais iremos considerar que $h \geq 0$ de modo que tenhamos

$$M_P h(n) = \sup_{y>0} H(n, y).$$

Proposição 5.3.4. Sejam $h, g: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ funções discretas e limitadas tais que $g \geq h$. Seja $I := \{n \in \mathbb{Z}^d : g(n) \geq M_P h(n)\}$ e suponha que $\Delta g \leq 0$ em I^c . Então, $I = \mathbb{Z}^d$.

Demonstração. Defina a função $b: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$b(y) = \sup_{n \in \mathbb{Z}^d} (H(n, y) - g(n))_+,$$

onde $t_+ = \max\{0, t\}$. Note que como $H(n, 0) - g(n) = h(n) - g(n) \leq 0$, $b(0) = 0$. Além disso,

$$0 \leq b(y) \leq \|M_P h\|_\infty + \|g\|_\infty < \infty$$

e,

$$H(n, y) \leq g(n) + b(y). \quad (5.6)$$

Note que usamos $\|M_P h\|_\infty < \infty$ acima, isso decorre do fato que:

$$|H(n, y)| = |(h * \mathcal{P}_y)(n)| \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} |h(n - m)| \mathcal{P}_y(m) \leq \|h\|_\infty \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{P}_y(m) = \|h\|_\infty.$$

Se tivermos $I^c \neq \emptyset$, como $b(y) = 0$, $\forall y \in I$, devemos obter:

$$b(y) = \sup_{n \in I^c} (H(n, y) - g(y))_+$$

Usando agora o fato que $\Delta H = 0$,

$$0 = \Delta H(n, y) = -H(n, y) + \frac{H(n, y-1)}{2(d+1)} + \frac{H(n, y+1)}{2(d+1)} + \frac{1}{2(d+1)} \sum_{m \in \mathcal{V}(n)} H(m, y).$$

Aplicando (5.6) e o fato que $\Delta g(n) \leq 0$ em I^c obtemos para $(n, y) \in I^c \times \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 2(d+1)H(n, y) &= H(n, y-1) + H(n, y+1) + \sum_{m \in \mathcal{V}(n)} H(m, y) \\ &\leq 2g(n) + b(y-1) + b(y+1) + \sum_{m \in \mathcal{V}(n)} (g(m) + b(y)) \\ &= 2g(n) + b(y-1) + b(y+1) + 2db(y) + 2d(\Delta g(n) + g(n)) \\ &\leq 2(d+1)g(n) + b(y-1) + b(y+1) + 2db(y). \end{aligned}$$

Portanto,

$$2(d+1)(H(n, y) - g(n)) \leq b(y-1) + b(y+1) + 2db(y).$$

Tomando o supremo em $n \in I^c$ na desigualdade acima, obtemos:

$$b(y) \leq \frac{b(y-1) + b(y+1)}{2}.$$

Como a sequência $\{b(y)\}_{y \in \mathbb{N}}$ é limitada e $b(0) = 0$, é fácil provar por indução que

$$b(y) \leq \frac{y}{y+j} b(y+j), \quad \forall j > 0.$$

E assim, $b(y) = 0, \forall y$, mas isso implicaria $H(n, y) \leq g(y), \forall n, y$, contradizendo o fato que $I^c \neq \emptyset$. Portanto, $I = \mathbb{Z}^d$. \square

5.4 Teorema Principal

No Teorema a seguir, chamaremos de Operadores Maximais do tipo Convolução Discretos (OMCD) um operador definido da seguinte forma:

Dadas uma classe de funções $\{\varphi_t: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}\}_{t \geq 0}$ e $f: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ uma função discreta satisfazendo:

1. $\|\varphi_t\|_1 = 1, \forall t > 0$,
2. $\varphi_0(n) = \delta_0(n)$,

o operador $M_\varphi f: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ será dado por:

$$M_\varphi f(n) = \sup_{t > 0} (|f| * \varphi_t)(n).$$

Teorema 5.4.1. *Seja $M_\varphi f$ um OMCD que satisfaz a seguinte propriedade: sempre que $f, g: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ forem funções discretas e limitadas tais que $g \geq f$ e $\Delta g \leq 0$ em I^c , onde $I := \{n \in \mathbb{Z}^d : g(n) \geq M_\varphi f(n)\}$, teremos $I = \mathbb{Z}^d$. Então, $M_\varphi f$ satisfaz:*

(1) Seja $1 \leq p \leq \infty$ e $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função discreta tal que $\|f'\|_p < \infty$. Então,

$$\|(M_\varphi f)'\|_p \leq \|f'\|_p.$$

(2) Seja $f: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ uma função discreta tal que $\|\nabla f\|_2 < \infty$. Então,

$$\|\nabla M_\varphi f\|_2 \leq \|\nabla f\|_2.$$

Demonstração. Podemos assumir sem perda de generalidade que $f \geq 0$ e novamente iremos nos apoiar no Lema de Zorn. Considere então a seguinte família de funções:

$$S := \begin{cases} g: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}; \\ f(n) \leq g(n) \leq M_\varphi f(n); \quad \forall n \in \mathbb{Z}^d; \\ \|\nabla g\|_p \leq \|\nabla f\|_p. \end{cases}$$

Como $f(n) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (f * \varphi_t)(n) \leq M_\varphi f(n)$, é fácil ver que S é não vazia pois $f \in S$. Nosso objetivo seria então provar que $M_\varphi f \in S$ para obtermos o resultado do teorema. Sendo assim, equiparemos a família S com a ordem parcial \preceq de modo que $g \preceq h$ se, e somente se, $g(n) \leq h(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}^d$.

Seja agora $\{g_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ um conjunto totalmente ordenado de (S, \preceq) . Defina a função $G: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$G(n) = \sup_{\alpha \in \Lambda} g_\alpha(n).$$

É óbvio que G satisfaz as duas primeiras propriedades de S , resta-nos então provar que $\|\nabla G\|_p \leq \|\nabla f\|_p$. Tome $J \subset \mathbb{Z}^d$ um conjunto finito e note que fixados $k \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathcal{V}(J)$, existe $g_{k,n} \in \{g_\alpha\}$ tal que

$$G(n) - g_{k,n}(n) \leq \frac{1}{k}.$$

Defina pois, $g_k = \max_n g_{k,n}$ de modo que temos:

$$G(n) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(n), \quad \forall n \in \mathcal{V}(J).$$

Veja também que

$$\partial_{x_i} G(n) = G(n + e_i) - G(n) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(n + e_i) - g_k(n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \partial_{x_i} g_k(n), \quad \forall n \in J.$$

Portanto,

$$\sum_{n \in J} |\nabla G(n)|^p = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n \in J} |\nabla g_k(n)|^p \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|\nabla g_k\|_p^p \leq \|\nabla f\|_p^p.$$

Como o resultado acima vale para todo conjunto J , devemos ter

$$\|\nabla G\|_p \leq \|\nabla f\|_p.$$

O que mostra que $G \in S$. Pelo Lema de Zorn, a família S possui elemento maximal, que chamaremos de g . Mostraremos agora que $g = M_\varphi f$.

Suponha por absurdo que $I := \{n \in \mathbb{Z}^d : g(n) = M_\varphi f(n)\}$ seja diferente de \mathbb{Z}^d . Por hipótese sabemos que não podemos ter $\Delta g \leq 0$ em I^c , logo, existe $n \in I^c$ tal que $\Delta g(n) > 0$.

Dividiremos agora a prova em três casos.

Caso 1. Se $d > 1$ e $p = 2$. Considere a função $q_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$q_n(x) = \sum_{m \in \mathcal{V}(n)} (g(m) - x)^2.$$

Note que

$$q'_n(x) = \sum_{m \in \mathcal{V}(n)} -2(g(m) - x) = 4dx - 2 \sum_{m \in \mathcal{V}(n)} g(m),$$

e

$$q''_n(x) = 4d > 0.$$

Logo, q_n é uma função estritamente convexa e possui mínimo global em

$$x_n = \frac{1}{2d} \sum_{m \in \mathcal{V}(n)} g(m) = g(n) + \Delta g(n).$$

Considere agora a função $h : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$h(m) = \begin{cases} g(m), & \text{se } m \neq n; \\ \min\{M_\varphi(n), g(n) + \Delta g(n)\}, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Como $\Delta g(n) > 0$, $f \leq g \leq h \leq M_\varphi f$. Vale também $g(n) < h(n) \leq x_n$ e pela convexidade estrita de q_n teremos:

$$q_n(g(n)) > q_n(h(n)) \geq q_n(x_n).$$

Por fim, seja $V := \mathbb{Z}^d \setminus (\{n\} \cup \{n - e_i\}_{i=1}^d)$.

$$\|\nabla h\|_2^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} |\nabla h(m)|^2 = \sum_{m \in V} |\nabla h(m)|^2 + |\nabla h(n)|^2 + \sum_{i=1}^d |\nabla h(n - e_i)|^2.$$

Calculando agora cada um destes somatórios encontramos:

Sendo $m \in V$, $m \neq n$ e $m + e_i \neq n$ e assim, $\partial_{x_i} h(m) = h(m + e_i) - h(m) = g(m + e_i) - g(m) = \partial_{x_i} g(m)$, logo:

$$\sum_{m \in V} |\nabla h(m)|^2 = \sum_{m \in V} |\nabla g(m)|^2.$$

Se $m = n$,

$$|\nabla h(n)|^2 = \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}^2 h(n) = \sum_{i=1}^d (h(n + e_i) - h(n))^2 = \sum_{i=1}^d (g(n + e_i) - h(n))^2$$

E se $m = n - e_i$ para algum e_i ,

$$\begin{aligned} |\nabla h(n - e_i)|^2 &= \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2 h(n - e_i) \\ &= \sum_{j=1}^d (h(n - e_i + e_j) - h(n - e_i))^2 \\ &= \left(\sum_{j=1}^d (g(n - e_i + e_j) - g(n - e_i))^2 \right) - (g(n) - g(n - e_i))^2 \\ &\quad + (h(n) - h(n - e_i))^2 \\ &= |\nabla g(n - e_i)|^2 - (g(n) - g(n - e_i))^2 + (h(n) - g(n - e_i))^2. \end{aligned}$$

Calculemos também:

$$|\nabla g(n)|^2 = \sum_{i=1}^d (g(n + e_i) - g(n))^2.$$

Juntando todos os termos:

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} |\nabla h(m)|^2 &= \sum_{m \in V} |\nabla g(m)|^2 + \sum_{i=1}^d (g(n + e_i) - h(n))^2 + \sum_{i=1}^d (g(n - e_i) - h(n))^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^d |\nabla g(n - e_i)|^2 - \sum_{i=1}^d (g(n) - g(n - e_i))^2 \\ &= \sum_{m \in V} |\nabla g(m)|^2 + q_n(h(n)) + \sum_{i=1}^d |\nabla g(n - e_i)|^2 - \sum_{i=1}^d (g(n) - g(n - e_i))^2 \\ &\quad + |\nabla g(n)|^2 - |\nabla g(n)|^2 \\ &= \sum_{m \in V} |\nabla g(m)|^2 + q_n(h(n)) + \sum_{i=1}^d |\nabla g(n - e_i)|^2 + |\nabla g(n)|^2 - q_n(g(n)) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} |\nabla g(m)|^2 + q_n(h(n)) - q_n(g(n)). \end{aligned}$$

Isso mostra que

$$\|\nabla M_\varphi f\|_2^2 \geq \|\nabla g\|_2^2 = \|\nabla h\|_2^2 + q_n(g(n)) - q_n(h(n)) > \|\nabla h\|_2^2.$$

Consequentemente, $g \leq h$ com $h \in S$, contradizendo o Lema de Zorn. Portanto, $g = M_\varphi f$ e o teorema está provado.

Caso 2. Se $d = 1$ e $1 \leq p < \infty$. Considere a função $q_n: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$q_n(x) = |g(n+1) - x|^p + |g(n-1) - x|^p.$$

Temos novamente que q_n é convexa e sendo

$$q'_n(x) = -p|g(n+1) - x|^{p-2}(g(n+1) - x) - p|g(n-1) - x|^{p-2}(g(n-1) - x)$$

seu minimizante ocorre em $x_n = \frac{g(n+1)+g(n-1)}{2} = g(n) + \Delta g(n)$. Tome novamente a função $h: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$h(m) = \begin{cases} g(m), & \text{se } m \neq n; \\ \min\{M_\varphi f(n), g(n) + \Delta g(n)\}, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Temos $f \leq g \leq h \leq M_\varphi f$ e pela convexidade de q_n ,

$$q_n(g(n)) \geq q_n(h(n)) \geq q_n(x_n).$$

E,

$$\begin{aligned} \|g'\|_p^p &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} |g'(m)|^p \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} |g(m+1) - g(m)|^p \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} |h(m+1) - h(m)|^p + |g(n) - g(n-1)|^p + |g(n+1) - g(n)|^p \\ &\quad - |h(n) - h(n-1)|^p - |h(n+1) - h(n)|^p \\ &= \|h'\|_p^p + q_n(g(n)) - q_n(h(n)) \geq \|h'\|_p^p. \end{aligned}$$

Novamente contradizemos o Lema de Zorn.

Caso 3. Se $d = 1$ e $p = \infty$. Tome desta vez a função

$$q_n(x) = \max\{|g(n+1) - x|, |g(n-1) - x|\}$$

a qual também é convexa e possui minimizante em $x_n = g(n) + \Delta g(n)$. Definindo h como nos casos anteriores, teremos novamente:

$$q_n(g(n)) \geq q_n(h(n))$$

e, sendo $V = \mathbb{Z} \setminus \{n-1, n\}$

$$\begin{aligned} \|h'\|_\infty &= \sup_{m \in \mathbb{Z}} |h(m+1) - h(m)| \\ &= \max \left\{ \sup_{m \in V} |g(m+1) - g(m)|, |g(n+1) - h(n)|, |h(n) - g(n-1)| \right\} \\ &= \max \left\{ \sup_{m \in V} |g'(m)|, q_n(h(n)) \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|g'\|_\infty &= \sup_{m \in \mathbb{Z}} |g(m+1) - g(m)| \\ &= \max \left\{ \sup_{m \in V} |g(m+1) - g(m)|, |g(n+1) - g(n)|, |g(n) - g(n-1)| \right\} \\ &= \max \left\{ \sup_{m \in V} |g'(m)|, q_n(g(n)) \right\}. \end{aligned}$$

Portanto, $\|g'\|_\infty \geq \|h'\|_\infty$, contradizendo também o Lema de Zorn e finalizando a demonstração.

□

6 CONCLUSÃO

Vimos no capítulo 3 que perante uma estimativa entre OMC e o Operador Maximal de Hardy Littlewood, poderíamos mostrar uma versão do Teorema de Hardy-Littlewood-Wiener para os OMC e assim reformular a demonstração de (Kinnunen, 1997), mostrando que os OMC levam funções do espaço de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ sobre ele próprio de forma limitada.

Prosseguimos no capítulo 4 apresentando dois OMC relacionados às equações de Gauss e Poisson, mostrando que estes operadores eram contínuos quando atuavam sobre funções contínuas e $L^p(\mathbb{R}^d)$ para $p \neq \infty$ ou Lipschitz limitadas. Vimos ainda que os núcleos que geravam estes operadores satisfaziam a propriedade de semigrupo: $\varphi_t * \varphi_\varepsilon = \varphi_{t+\varepsilon}$. Além disso, mostramos que sendo contínuos, tais operadores eram subharmônicos em $A = \{M_\varphi f > f\}$, onde $M_\varphi f$ é o Operador Maximal de Gauss (ou de Poisson). Finalizamos mostrando que se um OMC satisfazia as propriedades vistas para os Operadores Maximais de Gauss e Poisson, então sua variação $L^p(\mathbb{R}^d)$ era limitada e não crescia, ou seja,

$$\|\nabla M_\varphi f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

para $M_\varphi \in \mathfrak{M}$ quando $p \geq 1$ e $d = 1$, ou para quando $p = 2$ ou $p = \infty$ e $d > 1$. Mostramos ainda que quando uma função f tinha variação pontual limitada, também teria o operador maximal valendo ainda

$$\text{Var}_{\mathbb{R}}(M_\varphi f) \leq \text{Var}_{\mathbb{R}}(f),$$

utilizando para isso o comportamento convexo que o operador assumia no conjunto aberto onde era subharmônico.

No último capítulo, abordamos as funções discretas, apresentando versões discretas das equações de Gauss e Poisson e criando operadores maximais a partir da solução dessas equações. Ademais, vimos através de uma propriedade comum aos dois operadores que, se um OMCD satisfizesse tal propriedade, então teríamos que a variação $L^p(\mathbb{Z}^d)$ destes operadores seria também limitada valendo:

$$\|\nabla M_\varphi f\|_{L^p(\mathbb{Z}^d)} \leq \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{Z}^d)}$$

quando $d = 1$ e $p \geq 1$ e para $d > 1$ com $p = 2$.

Por fim, algumas perguntas naturais surgiram ao longo do estudo e desenvolvimento desta dissertação, algumas das quais fazemos a seguir. Além dos Operadores Maximais de

Gauss e Poisson, que outros operadores estariam em \mathfrak{M} ? Sabendo que através de uma função $L^1(\mathbb{R}^d)$ podemos gerar aproximações da identidade, haveria alguma maneira de gerar operadores em \mathfrak{M} ? Em \mathbb{R}^d ou \mathbb{Z}^d , $d > 1$, haveriam outros valores de p diferentes de $2, \infty$ para os quais a desigualdade encontrada valeria? Todas estas perguntas se encontram ainda sem resposta, servindo de estímulo para estudos futuros.

REFERÊNCIAS

- ALDAZ, J.; LÁZARO, J. P. Functions of bounded variation, the derivative of the one dimensional maximal function, and applications to inequalities. **Transactions of the American Mathematical Society**, Providence, v. 359, n. 5, p. 2443–2461, 2007.
- BREZIS, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. New York: Springer, 2011. v. 2. ISBN 9780387709130.
- CARNEIRO, E.; SVAITER, B. F. On the variation of maximal operators of convolution type. **Journal of Functional Analysis**, Amsterdam, v. 265, n. 5, p. 837–865, 2013.
- EVANS, L. C. **Partial differential equations**. Providence: American Mathematical Society, 2010. v. 19. ISBN 9780821849743.
- EVANS, L. C.; GARIEPY, R. F. **Measure theory and fine properties of functions**. Boca Raton: CRC Press, 2015. ISBN 9781482242386.
- FOLLAND, G. B. **Real analysis: modern techniques and their applications**. New York: Wiley, 1999. ISBN 9780471317166.
- HAN, Q. **A basic course in partial differential equations**. Providence: American Mathematical Society, 2011. v. 120. ISBN 9780821852552.
- KINNUNEN, J. The Hardy-Littlewood maximal function of a sobolev function. **Israel Journal of Mathematics**, Jerusalem, v. 100, n. 1, p. 117–124, 1997.
- LEONI, G. **A First Course in Sobolev Spaces**. Providence: American Mathematical Society, 2009. (Graduate Studies in Mathematics). ISBN 9780821884157.
- LUIRO, H. Continuity of the maximal operator in Sobolev spaces. **Proceedings of The American Mathematical Society**, Providence, v. 135, p. 243–251, 2006.
- STEIN, E. M. **Singular integrals and differentiability properties of functions**. Princeton: Princeton University Press, 1970. ISBN 9780691080796.
- STEIN, E. M. **Real analysis: measure theory, integration, and hilbert spaces**. Princeton: Princeton University Press, 2005. ISBN 9780691113869.
- TANAKA, H. A remark on the derivative of the one-dimensional Hardy-Littlewood maximal function. **Bulletin of the Australian Mathematical Society**, Cambridge, v. 65, n. 2, p. 253–258, 2002.
- WHEEDEN, R. L.; ZYGMUND, A. **Measure and integral: an introduction to real analysis**. 2. ed. Boca Raton: CRC Press, 2015. ISBN 9781498702904.