



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

CLEO VIEIRA DA SILVA

**CARACTERIZAÇÃO NÃO-EXTENSIVA DE ONDAS GRAVITACIONAIS: O
FORMALISMO DO q-TRIPLETO DE TSALLIS**

FORTALEZA

2026

CLEO VIEIRA DA SILVA

CARACTERIZAÇÃO NÃO-EXTENSIVA DE ONDAS GRAVITACIONAIS: O
FORMALISMO DO q -TRIPLETO DE TSALLIS

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Brito de Freitas.

Coorientador: Prof. Dr. Mackson Matheus França Nepomuceno.

FORTALEZA
2026

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

- S185r Silva, Cleo Vieira da.
Caracterização Não-Extensiva de Ondas Gravitacionais: o Formalismo do q-Tripleto de Tsallis / Cleo Vieira da Silva. - 2026.
258 f.
- Tese (doutorado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2026.
Orientação: Prof. Dr. Daniel Brito de Freitas.
Coorientação: Prof. Dr. Mackson Matheus França Nepomuceno.
1. ondas gravitacionais; 2. mecânica estatística não-extensiva de Tsallis; 3. q-tripletto; 4. análise de séries temporais. I. Título.

CDD 530

CLEO VIEIRA DA SILVA

CARACTERIZAÇÃO NÃO-EXTENSIVA DE ONDAS GRAVITACIONAIS: O
FORMALISMO DO q -TRIPLETO DE TSALLIS

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 12/12/2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Daniel Brito de Freitas (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Mackson Matheus França Nepomuceno
(Coorientador)
Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA)

Prof. Dr. José Euclides Gomes da Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Luidhy Santana da Silva
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF)

Prof. Dr. Thiago de Melo Santiago
Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal
do Cariri (CCT-UFCA)

À minha família, por acreditar incondicionalmente em mim e por oferecer o suporte, o amor e a base necessários para que eu pudesse chegar até aqui. Cada conquista é também de vocês.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, fonte de toda sabedoria e força, por ter me sustentado até aqui e por me conceder a graça de vivenciar este momento tão especial.

Aos meus amados pais, João da Silva e Esmeraldina Vieira da Silva, meu mais profundo reconhecimento e amor. Obrigado por cada gesto de carinho, por cada palavra de incentivo e, sobretudo, por acreditarem em mim mesmo nos dias mais difíceis.

À Vitória Maria Rodrigues Vasconcelos, meu amor, minha companheira incansável de jornada, meu porto seguro. Obrigado por estar ao meu lado em todos os momentos, cuidando de mim com tanto zelo, amor e dedicação. Sua presença foi luz nos dias nublados e impulso nas horas de dúvida.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Daniel Brito de Freitas, minha sincera gratidão pela orientação generosa, pela confiança depositada e pela paciência dedicada a cada etapa deste trabalho. Estendo meu agradecimento também aos membros da banca, que contribuíram com olhares atentos e críticas construtivas para o aprimoramento deste estudo.

Aos inúmeros amigos que cruzaram meu caminho acadêmico e pessoal: obrigado por cada conversa, por cada gesto de apoio, por dividirem suas experiências e tornarem essa caminhada mais leve e significativa.

À Universidade Federal do Ceará, instituição que me acolheu e me proporcionou uma formação sólida e transformadora, agradeço pela estrutura, pelo ensino de excelência e pelas portas que me ajudou a abrir. Ao corpo docente, à direção e à equipe administrativa, minha reverência pelo compromisso com a educação pública e de qualidade.

Por fim, agradeço a todos os professores que passaram pela minha vida, não apenas pelo conhecimento transmitido, mas por ensinarem com o coração, com ética e humanidade. Vocês foram fundamentais para a construção do meu caráter e da minha identidade profissional.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste sonho: o meu muito obrigado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Uma vez que não podemos ser universais e saber tudo quanto se pode saber acerca de tudo, é preciso saber-se um pouco de tudo, pois é muito melhor saber-se alguma coisa de tudo do que saber-se tudo apenas de uma coisa (Blaise Pascal, 2001,p. 195).

RESUMO

A existência das ondas gravitacionais foi prevista por Einstein em 1916 como perturbações na curvatura do espaço-tempo causadas por massas aceleradas. Um século depois, sua detecção direta pelo LIGO inaugurou uma nova era na astrofísica observacional. Entretanto, a complexidade e a natureza fora do equilíbrio desses sinais desafiam os modelos estatísticos baseados na entropia de Boltzmann-Gibbs. Neste contexto, esta tese propõe a aplicação do formalismo da estatística não-extensiva de Tsallis como ferramenta para descrever e interpretar, em múltiplas escalas, os sinais das ondas gravitacionais. Investigar, via estatística não-extensiva de Tsallis, a estrutura multiescala dos sinais de ondas gravitacionais oriundos de sistemas binários em coalescência, relacionando os expoentes do q -tripleto (q_{stat} , q_{sen} , q_{rel}) com os parâmetros físicos das OGs. A metodologia baseou-se na análise de séries temporais públicas dos detectores Hanford e Livingston, submetidos a filtragem, segmentação e normalização. Os expoentes do q -tripleto foram obtidos por: (i) ajuste de distribuições q -gaussianas (q_{stat}); (ii) análise multifractal (MF-DFA) para (q_{sen}); e (iii) cálculo da informação mútua média (AMI) para (q_{rel}). Realizaram-se análises de correlação (Pearson e Spearman) e regressões lineares entre os índices q e as variáveis físicas do sistema binário. Para o evento GW150914, os valores obtidos para o q -tripleto indicaram forte não extensividade: $\{1,46; 0,02; 2,28\}_{\text{H}}$ e $\{1,43; 0,25; 2,26\}_{\text{L}}$. Na análise de múltiplos eventos, (q_{sen}) apresentou forte correlação com a frequência de pico ($R^2 = 0,78$) no ajuste linear, enquanto (q_{rel}) exibiu correlação moderada com a *chirp mass* ($R^2 = 0,26$). Por outro lado, (q_{stat}) não apresentou correlação significativa, indicando possível influência de fatores estocásticos. A aplicação da estatística não extensiva de Tsallis revelou-se eficaz na caracterização da complexidade em múltiplas escalas e do comportamento fora do equilíbrio dos sinais de ondas gravitacionais. A utilização do q -tripleto demonstrou-se uma abordagem promissora para identificar regimes dinâmicos distintos durante o processo de coalescência de buracos negros, contribuindo com novas perspectivas metodológicas para a astrofísica de sistemas extremos.

Palavras-chave: ondas gravitacionais; mecânica estatística não-extensiva de Tsallis; q -tripleto; análise de séries temporais.

ABSTRACT

The existence of gravitational waves was predicted by Einstein in 1916 as perturbations in the curvature of spacetime caused by accelerated masses. A century later, their direct detection by the LIGO observatory inaugurated a new era in observational astrophysics. However, the complexity and nonequilibrium nature of these signals challenge statistical models based on Boltzmann–Gibbs entropy. In this context, this thesis proposes the application of Tsallis’ nonextensive statistical formalism as a tool to describe and interpret gravitational-wave signals across multiple scales. This thesis aims to investigate, through Tsallis’ nonextensive statistics, the multiscale structure of gravitational-wave signals originating from coalescing binary systems, establishing relationships between the q -triplet exponents (q_{stat} , q_{sen} , q_{rel}) and the physical parameters of gravitational waves. The methodology is based on the analysis of publicly available time series from the Hanford and Livingston detectors, which were subjected to filtering, segmentation, and normalization procedures. The q -triplet exponents were obtained through: (i) fitting of q -Gaussian distributions to estimate q_{stat} ; (ii) multifractal detrended fluctuation analysis (MF-DFA) to determine q_{sen} ; and (iii) computation of the average mutual information (AMI) to evaluate q_{rel} . Pearson and Spearman correlation analyses, as well as linear regressions, were performed between the q indices and the physical parameters of the binary systems. For the GW150914 event, the estimated q -triplet values indicated strong nonextensive behavior, with $\{1.46; 0.02; 2.28\}_{\text{H}}$ and $\{1.43; 0.25; 2.26\}_{\text{L}}$ for the Hanford and Livingston detectors, respectively. In the analysis of multiple events, the index q_{sen} exhibited a strong correlation with the peak frequency ($R^2 = 0.78$) in the linear fit, while q_{rel} showed a moderate correlation with the chirp mass ($R^2 = 0.26$). Conversely, q_{stat} did not present a significant correlation, indicating a possible influence of stochastic factors. Overall, the application of Tsallis’ nonextensive statistics proved effective in characterizing the multiscale complexity and nonequilibrium behavior of gravitational-wave signals. The use of the q -triplet emerges as a promising approach for identifying distinct dynamical regimes during the coalescence process of black holes, contributing new methodological perspectives to the astrophysics of extreme systems.

Keywords: gravitational waves; Tsallis nonextensive statistical mechanics; q -triplet; time series analysis.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – A liberdade de calibre da gravitação linearizada é análoga à da eletromagnetismo ordinário no espaço-tempo plano.	31
Tabela 2 – Lista de eventos de ondas gravitacionais do tipo BBH detectados.	94
Tabela 3 – Comparação de parâmetros físicos dos eventos BBH selecionados.	117
Tabela 4 – Interpretação da força da correlação baseada no valor de r	121
Tabela 5 – Classificação da força da correlação pelo coeficiente ρ	125
Tabela 6 – Comparação entre os coeficientes de correlação de Pearson e Spearman . . .	152
Tabela 7 – Lista de eventos de ondas gravitacionais do tipo BBH detectados.	182
Tabela 8 – Parâmetros de massa e frequência de pico de eventos BBH detectados.	186
Tabela 9 – Tabela do q triplete dos eventos de onda gravitacional.	254
Tabela 10 – Matriz de correlação de Pearson entre os parâmetros analisados.	257
Tabela 11 – Correlações de Pearson entre as variáveis analisadas.	258
Tabela 12 – Resultados das regressões lineares entre variáveis selecionadas.	258
Tabela 13 – Coeficientes de correlação de Spearman (ρ) entre variáveis selecionadas. . . .	259

LISTA DE FIGURAS

<p>Figura 1 – Imagem ilustrativa mostrando a curvatura do espaço-tempo causada por dois buracos negros em um sistema binário, girando um em torno do outro. A deformação da malha representa a distorção do espaço-tempo, evocando o vasto efeito gravitacional dos buracos negros.</p>	27
<p>Figura 2 – Uma onda gravitacional monocromática de pulsação $\omega = \frac{2\pi}{T}$ propaga-se ao longo da direção \hat{z}. O painel inferior mostra os efeitos das polarizações $+$ e \times sobre um anel de partículas em queda livre, em um referencial inercial local. .</p>	39
<p>Figura 3 – Representação do cone de luz passado associado ao ponto de observação (ct, \vec{x}). Na Relatividade Geral, as ondas gravitacionais se propagam a uma velocidade finita c, de modo que a perturbação gravitacional em (ct, \vec{x}) depende exclusivamente da configuração da fonte em pontos dentro do seu cone de luz passado, no tempo retardado $t_r = t - \frac{ \vec{x}-\vec{y} }{c}$. Este conceito reflete a causalidade na propagação das perturbações do campo gravitacional.</p>	41
<p>Figura 4 – Visão esquemática de um sistema binário com massas componentes m_1 e m_2, separação R e frequência orbital ω. A direção do observador define o eixo z. O ângulo entre a normal ao plano orbital e a direção do observador é a inclinação i.</p>	45
<p>Figura 5 – Observatórios do LIGO em Hanford, Washington e Livingston, Louisiana. Os lasers e os elementos ópticos estão contidos nos grandes edifícios de esquina. De cada edifício de esquina, tubos de feixe evacuados se estendem em ângulos retos por 4 km em cada direção os tubos são cobertos pelos recintos de concreto. .</p>	51
<p>Figura 6 – Esquema óptico avançado do LIGO. A luz viaja do laser através do limpador de modo de entrada para a cavidade de reciclagem de energia. A luz é dividida no divisor de feixe e, em seguida, entra nos dois braço longas de 4 km formadas pelas massas de entrada e teste final. Qualquer sinal sai pelo espelho de reciclagem de sinal e pelo limpador do modo de saída.</p>	52

Figura 7 – O evento de onda gravitacional GW150914 foi observado simultaneamente pelos detectores do LIGO em Hanford (canto superior esquerdo) e em Livingston (canto superior direito). Esses sinais são comparados com as previsões teóricas (linha inferior) para a fusão de dois buracos negros com massas estimadas em 29 e 36 massas solares, localizados a cerca de 1,3 bilhão de anos-luz da Terra. Na terceira linha, é apresentada a forma residual, obtida pela subtração da forma de onda teórica, gerada por simulações de relatividade numérica, dos dados observacionais filtrados. Essa etapa é fundamental para verificar a compatibilidade entre a observação e os modelos baseados na relatividade geral. Na quarta linha, duas representações espectrotemporais mostram como a tensão da onda gravitacional variou ao longo do tempo em cada detector. Os gráficos apresentam a evolução da frequência da onda gravitacional (em hertz) em função do tempo (em segundos). Ambas as representações exibem uma nítida varredura ascendente de frequência, o chamado <i>chirp</i> , partindo de cerca de 35 Hz e atingindo aproximadamente 150 Hz ao longo de 0,2 segundo.	55
Figura 8 – No topo: Amplitude de deformação relativa da onda gravitacional estimada de GW150914 projetado em H1. Abaixo: A separação efetiva de buracos negros em unidades de raios de Schwarzschild e a velocidade relativa efetiva dada pelo parâmetro pós-newtoniano.	56
Figura 9 – Representação esquemática da fase de <i>inspiral</i> em um sistema binário compacto de buracos negros (BBH).	57
Figura 10 – Representação artística de uma estrela de nêutrons com rotação rápida e altamente magnetizada é um resultado possível da fusão de duas estrelas de nêutrons menores.	59
Figura 11 – Representação esquemática do fundo estocástico de ondas gravitacionais gerado por múltiplas fontes astrofísicas distribuídas no Universo.	60
Figura 12 – Representação esquemática de ondas gravitacionais explosivas (<i>burst</i>) associadas a eventos astrofísicos transientes e imprevisíveis.	61
Figura 13 – Distribuições q -Gaussianas para diferentes valores de q : para $q = 1$ (região azul), obtém-se a Gaussiana clássica; para $q > 1$ (região escura), observa-se o surgimento de caudas largas; para $q < 1$ (região verde), a distribuição possui suporte finito, com corte abrupto nos extremos.	77

Figura 14	–O triângulo dos valores fundamentais de q , nomeadamente aqueles associados à sensibilidade às condições iniciais, relaxação e estado estacionário. Nas situações mais relevantes, espera-se que $(q_{\text{sen}} \leq 1)$, $(q_{\text{rel}} \geq 1)$ e $(q_{\text{stat}} \geq 1)$. Presume-se que esses índices estejam inter-relacionados, uma vez que todos derivam da exploração dinâmica particular que o sistema realiza em seu espaço de fases completo.	78
Figura 15	–Sinal bruto do evento GW150914 registrado pelo detector Hanford (H1).	97
Figura 16	–Ampliação temporal do sinal bruto de <i>strain</i> do evento GW150914 registrado pelo detector LIGO Hanford (H1), evidenciando a região da onda gravitacional antes de qualquer tratamento em frequência.	98
Figura 17	–Densidade espectral de amplitude (ASD) do evento GW150914 obtido após a aplicação da FFT.	99
Figura 18	–Densidade espectral de amplitude (ASD) do evento GW150914 com os filtros.	100
Figura 19	–Recorte temporal do sinal de strain do evento GW150914 registrado pelos detectores Hanford (H1) e Livingston (L1).	101
Figura 20	–Um sinal típico de onda gravitacional produzido por um par de buracos negros em coalescência. A fase espiral pode ser descrita pela expansão em série pós-newtoniana, enquanto a parte final da fase de anel descendente pode ser descrita pela teoria de perturbação linear (partes azuis do sinal). A fusão e o anel descendente inicial, no entanto, exibem dinâmica espaço-temporal não linear (parte laranja do sinal).	115
Figura 21	–Fluxograma geral da metodologia de análise das ondas gravitacionais, destacando as etapas de pré-processamento, extração dos índices q e análise de correlação estatística.	128
Figura 22	–Sinais de <i>strain</i> observados nos detectores Hanford (cinza) e Livingston (preto), ambos filtrados por técnicas bandpass e notch. O sinal de Hanford foi deslocado em 6,9 ms e invertido em fase ($-h$). A duração visível do sinal é de aproximadamente 0,2 segundos.	130
Figura 23	–Distribuições das flutuações multiescalares da onda GW150914 para $\tau = 64$ nos detectores LIGO de Hanford e Livingston.	132

Figura 24 –	<i>Painel superior:</i> Evolução do índice entrópico (q_{stat}) em função da frequência relativa para os detectores LIGO de Hanford e Livingston. As bandas sombreadas representam os intervalos de confiança de 95% associados à estimativa de (q_{stat}) em cada escala, enquanto as curvas tracejadas indicam tendências suavizadas obtidas por ajuste polinomial. A linha horizontal $q = 1$ corresponde ao caso extensivo da estatística de Boltzmann–Gibbs. <i>Painel inferior:</i> Espectro de amplitude da deformação $h(t)$ para o evento GW150914.	133
Figura 25 –	<i>Painel superior:</i> Espectro multifractal $f(\alpha)$ em função do expoente de Hölder α , obtido a partir da série temporal do evento GW150914 registrado pelo detector LIGO-Hanford (H1). A curvatura acentuada e assimétrica do espectro revela a forte multifractalidade do sinal. <i>Painel inferior:</i> Expoente de escala $\tau(q)$ em função do momento estatístico q , no intervalo $q \in [-5, 5]$ com passo de 0,2. A não linearidade de $\tau(q)$ indica a presença de múltiplas escalas de flutuação.	136
Figura 26 –	<i>Painel superior:</i> Espectro multifractal $f(\alpha)$ em função do expoente de Hölder α , obtido a partir da série temporal do evento GW150914 registrada pelo detector LIGO-Livingston (L1). <i>Painel inferior:</i> Expoente de escala $\tau(q)$ em função do momento estatístico q . Ambos os gráficos revelam a presença de estrutura multifractal robusta.	137
Figura 27 –	Valores do índice de sensibilidade às condições iniciais (q_{sens}) em função da frequência, derivados do espectro multifractal $f(\alpha)$ do evento GW150914, para os detectores LIGO de Hanford (H1) e Livingston (L1). As curvas sólidas representam os valores estimados de (q_{sens}), enquanto as bandas sombreadas correspondem aos intervalos de confiança estatística (95%) associados à estimativa em cada escala. A linha tracejada horizontal indica o valor extensivo $q = 1$	139
Figura 28 –	<i>Painel superior:</i> Gráfico log-log da Informação Mútua Média $I(\tau)$ em função da defasagem temporal τ , para o detector Hanford. <i>Painel inferior:</i> Mesma análise aplicada aos dados do detector Livingston.	143
Figura 29 –	Triângulo do q -tripleto para o evento GW150914: Sensibilidade, Relaxação e Estado Estacionário.	146

Figura 30 –Correlações entre o índice de sensibilidade às condições iniciais (q_{sen}) e os parâmetros físicos do sistema binário: (<i>painel esquerdo</i>) massa final e (<i>painel direito</i>) massa chirp. Os pontos azuis representam os valores observados de (q_{sen}) estimados individualmente para cada evento do catálogo analisado. A linha vermelha indica o ajuste linear obtido por regressão de mínimos quadrados, evidenciando a tendência média de diminuição de (q_{sen}) com o aumento das massas. A região sombreada em vermelho corresponde ao intervalo de confiança de 95% do ajuste, refletindo a incerteza estatística associada à estimativa da tendência linear. A dispersão dos pontos em torno da curva ajustada reflete a variabilidade intrínseca entre os eventos e possíveis efeitos de ruído e não estacionaridade residual.	149
Figura 31 –Correlações lineares entre o índice (q_{sen}) e o parâmetros físicos: frequência de pico.	150
Figura 32 –Relação linear entre o índice (q_{rel}) e a massa chirp dos sistemas coalescentes.	150
Figura 33 –Relação linear entre o índice (q_{stat}) e a massa final dos sistemas coalescentes.	151
Figura 34 –Distribuição bimodal da frequência de pico normalizada dos eventos de ondas gravitacionais: evidência estatística de regimes astrofísicos distintos.	154
Figura 35 –Distribuição normalizada da frequência de pico com sobreposição dos valores de q_{stat} para os detectores Hanford (H1) e Livingston (L1).	155
Figura 36 –Distribuição normalizada da frequência de pico com sobreposição dos valores de q_{sen} para os detectores Hanford (H1) e Livingston (L1).	155
Figura 37 –Distribuição normalizada da frequência de pico com sobreposição dos valores de q_{rel} para os detectores Hanford (H1) e Livingston (L1).	156

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	Estado da Arte	19
1.2	Objetivos	22
1.3	Estrutura Organizacional	23
2	UMA BREVE REVISÃO SOBRE AS ONDAS GRAVITACIONAIS	25
2.1	Introdução sobre Relatividade Geral	25
2.2	Equações de campo de Einstein Linearizadas	28
2.3	Condição de calibre de Lorentz	30
2.4	Propagação de ondas gravitacionais no vácuo	31
2.4.1	<i>Calibre transversal e sem traço (Transverse-Traceless, TT)</i>	33
2.4.2	<i>Estados de polarização</i>	34
2.4.3	<i>Descrição no calibre TT - interação com massas de teste</i>	35
2.4.4	<i>Anel de massa de teste</i>	37
2.5	Geração de ondas gravitacionais	38
2.5.1	<i>Expansão multipolar</i>	42
2.5.2	<i>Momento de Massa Quadrupolar</i>	43
2.5.3	<i>Radiação quadrupolar de sistemas binários</i>	44
3	DETECCÕES DE ONDAS GRAVITACIONAIS	48
3.1	O LIGO	50
3.2	O Evento GW150914	53
3.3	Fontes e tipos de ondas gravitacionais	55
3.3.1	<i>Ondas gravitacionais de binárias compactas em espiralamento</i>	57
3.3.2	<i>Ondas gravitacionais contínuas</i>	58
3.3.3	<i>Ondas gravitacionais estocásticas</i>	59
3.3.4	<i>Ondas gravitacionais explosivas</i>	60
4	MECÂNICA ESTATÍSTICA NÃO-EXTENSIVA DE TSALLIS	62
4.1	Mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs	62
4.2	Introdução à estatística não-extensiva: fundamentos e motivação	63
4.2.1	<i>Extensividade versus aditividade</i>	64
4.3	Mecânica estatística não-extensiva de Tsallis	65
4.3.1	<i>Regra de composição (pseudo-aditividade) e termo efetivo de interação</i>	68

4.4	Generalização não-extensiva das distribuições de equilíbrio: do caso discreto ao contínuo	69
4.5	Escolha do formalismo para análise de ondas gravitacionais	69
4.5.1	<i>Versão contínua da entropia de Tsallis</i>	70
4.5.2	<i>Maximização da Entropia e a Distribuição q-Gaussiana</i>	73
4.6	Centragem e fixação de μ_q	74
4.6.1	<i>Propriedades das distribuições q-Gaussianas</i>	76
4.7	O q-tripletto de Tsallis	77
4.8	Comportamentos exponenciais na mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs e a generalização via o q-tripletto	79
4.8.1	<i>Índice q de estacionariedade de Tsallis (q_{stat})</i>	81
4.8.2	<i>Índice q de sensibilidade de Tsallis (q_{sen})</i>	82
4.8.3	<i>Índice q de relaxação de Tsallis (q_{rel})</i>	85
4.9	Análise da relação entre os índices do q-tripletto	88
5	METODOLOGIA	90
5.1	Fundamentos de análise de séries temporais	90
5.1.1	<i>Formalismo não extensivo de Tsallis aplicado às séries temporais</i>	91
5.2	Seleção das amostras de ondas gravitacionais	92
5.3	Tratamento das séries temporais das ondas gravitacionais	95
5.3.1	<i>Pré-processamento e filtragem espectral dos sinais gravitacionais</i>	96
5.4	Determinação dos parâmetros do q-tripletto	101
5.4.1	<i>Estimativa computacional do índice (q_{stat})</i>	102
5.4.2	<i>Método de estimativa de (q_{stat})</i>	102
5.4.3	<i>Determinação do parâmetro de sensibilidade (q_{sen})</i>	104
5.4.4	<i>Método MF-DFA</i>	106
5.4.4.1	<i>Passo 1: Construção do perfil acumulado da série temporal</i>	106
5.4.4.2	<i>Passo 2: Segmentação da série em janelas</i>	106
5.4.4.3	<i>Passo 3: Cálculo da variância local e da função de flutuação</i>	106
5.4.4.4	<i>Passo 4: Generalização para momentos de ordem q</i>	107
5.4.4.5	<i>Passo 5: Análise da escala e extração dos expoentes multifractais</i>	108
5.4.5	<i>Conexões conceituais entre os formalismos multifractais e a estatística não extensiva de Tsallis</i>	110
5.4.6	<i>Métricas de confiabilidade aplicadas ao cálculo do índice (q_{rel})</i>	112
5.5	Estimativa da frequência de pico de amplitude em eventos de ondas gravitacionais para análise do q-tripletto	115
5.6	Dinâmica dos parâmetros utilizados nas análises de correlação	118

5.7	Correlação de Pearson	120
5.7.1	<i>Definição e interpretação</i>	120
5.7.2	<i>Aplicação no presente estudo</i>	121
5.7.3	<i>Cálculo do coeficiente</i>	121
5.7.4	<i>Teste de significância</i>	122
5.7.5	<i>Complemento com regressão linear</i>	122
5.7.5.1	<i>Modelo matemático</i>	123
5.7.5.2	<i>Coeficiente de determinação R^2</i>	123
5.7.5.3	<i>Aplicação ao presente estudo</i>	124
5.7.5.4	<i>Significância estatística</i>	124
5.8	Correlação de Spearman	124
5.8.1	<i>Fundamentos teóricos e interpretação</i>	125
5.8.2	<i>Testando a significância dos coeficientes de correlação</i>	126
5.8.3	<i>Aplicação no presente estudo</i>	126
5.8.4	<i>Justificativa para o uso da correlação de Spearman no presente contexto</i>	127
6	RESULTADOS E DISCUSSÕES	129
6.1	Análise temporal preliminar do evento GW150914	129
6.2	Estado estacionário representado pelo índice entrópico (q_{stat})	131
6.2.1	<i>Análise do índice estacionário (q_{stat}) nos sinais gravitacionais</i>	134
6.3	Estado de sensibilidade para o índice entrópico (q_{sen})	135
6.3.1	<i>Análise do índice de sensibilidade (q_{sen}) nos sinais gravitacionais</i>	141
6.4	Estado de Relaxação para o índice entrópico (q_{rel})	142
6.4.1	<i>Análise do índice de relaxação (q_{rel}) nos sinais gravitacionais</i>	144
6.5	Caracterização integrada da dinâmica das ondas gravitacionais via q-tripletto	145
6.6	Discussão das relações estatísticas entre os índices q e parâmetros físicos dos sinais de OGs	147
6.6.1	<i>O (q_{sen}) e parâmetros físicos</i>	148
6.6.2	<i>O (q_{rel}) e parâmetros físicos</i>	149
6.6.3	<i>O (q_{stat}) e parâmetros físicos</i>	151
6.6.4	<i>Comparação entre os coeficientes de correlação de Pearson e Spearman</i>	152
6.7	Distribuições bimodais: evidência estatística de múltiplos regimes astrofísicos	153
7	CONCLUSÃO	157
8	PERSPECTIVAS DE TRABALHOS	160
	REFERÊNCIAS	164
	APÊNDICE A – DISTRIBUIÇÃO DE EQUILÍBRIO DA MECÂNICA ESTADÍSTICA NÃO-EXTENSIVA	178

APÊNDICE B – LISTA DE EVENTOS DE ONDAS GRAVITACIONAIS DO TIPO BBH DETECTADOS	182
APÊNDICE C – TABELA DAS FREQUÊNCIAS DE PICO DE EVENTOS BBH DETECTADOS	186
APÊNDICE D – Q ESTACIONÁRIO	190
APÊNDICE E – Q SENSIBILIDADE	211
APÊNDICE F – Q RELAXAÇÃO	226
APÊNDICE G – RESULTADOS DO Q-TRIPLETO PARA EVENTOS BBH	253
APÊNDICE H – RESULTADOS ESTATÍSTICOS DETALHADOS DAS CORRELAÇÕES E REGRESSÕES	257

1 INTRODUÇÃO

1.1 Estado da Arte

Em 1915, Albert Einstein apresentou ao mundo a Teoria da Relatividade Geral, uma das mais revolucionárias construções da física moderna, ao reinterpretar a gravitação não mais como uma força à distância, mas como a manifestação da curvatura do espaço-tempo induzida pela presença de massa e energia. Essa teoria substituiu com sucesso a mecânica newtoniana em regimes de campos gravitacionais intensos e velocidades relativísticas, fornecendo um novo formalismo para descrever fenômenos como o movimento de corpos celestes em campos gravitacionais e a deflexão da luz por objetos massivos [1].

No ano seguinte, em 1916, o próprio Einstein demonstrou que as equações de campo da relatividade geral admitiam soluções ondulatórias em determinadas condições: as chamadas ondas gravitacionais (OGs) [2]. Essas ondas seriam geradas por variações aceleradas no momento de quadrupolo de sistemas massivos e se propagariam à velocidade da luz, deformando periodicamente o espaço-tempo por onde passassem. Durante décadas, no entanto, a existência física dessas ondas permaneceu controversa, restrita ao domínio das soluções teóricas.

Somente em 1974 é que evidências indiretas das OGs começaram a emergir com mais força [3]. Em 1993, o Prêmio Nobel de Física foi concedido a Russell Hulse e Joseph Taylor pela descoberta do pulsar binário PSR B1913+16, cujas órbitas apresentavam uma diminuição no período orbital precisamente compatível com a emissão de energia na forma de ondas gravitacionais, conforme previsto pela relatividade geral [4]. Esse achado representou uma confirmação indireta da existência das OGs, embora ainda não constituísse uma detecção direta [5].

Um século após a previsão teórica de Einstein, um marco histórico foi finalmente atingido. No dia 14 de setembro de 2015, o Observatório de Ondas Gravitacionais por Interferometria a Laser (LIGO), nos Estados Unidos, registrou um sinal característico de uma onda gravitacional, oriunda da fusão de dois buracos negros de massas estelares, respectivamente de $29_{-4}^{+4}M_{\odot}$ e $36_{-4}^{+5}M_{\odot}$, e a massa final do buraco negro é de $62_{-4}^{+4}M_{\odot}$, com $3,0_{-5}^{+5}M_{\odot}c^2$ radiadas em ondas gravitacionais [6]. O evento, nomeado GW150914, apresentou uma significância estatística notável de $5,1 \sigma$ [7], sendo a primeira detecção direta de uma onda gravitacional. Os dados foram disponibilizados à comunidade científica no dia 11 de fevereiro de 2016, marcando o nascimento efetivo da astronomia gravitacional como um novo campo observacional da física [8, 9].

O impacto científico da descoberta foi imediato e global. Em 2017, o Prêmio Nobel de Física foi concedido a Rainer Weiss, Barry C. Barish e Kip S. Thorne pela contribuição decisiva no desenvolvimento do detector LIGO e pela primeira observação direta de OGs [10]. O reconhecimento consolidou décadas de esforços teóricos e experimentais, selando o início de uma nova era na investigação de fenômenos astrofísicos extremos, como fusões de buracos negros e estrelas de nêutrons. Este potencial concretizou-se de forma paradigmática com a detecção, no mesmo ano, da colisão de duas estrelas de nêutrons GW170817, o primeiro evento astronômico observado simultaneamente através de ondas gravitacionais e de radiação eletromagnética (astronomia multimessageira) [11]. Tais descobertas fornecem ferramentas inédita para sondar as propriedades fundamentais do espaço-tempo por meio da abertura de uma nova janela observacional para o universo. Além disso, ondas gravitacionais oriundas de processos de fusão no universo primordial têm sido propostas como potenciais evidências indiretas da existência de matéria escura, assim como de fontes contínuas e estocásticas de OGs, ampliando ainda mais seu papel na cosmologia moderna [7, 11, 12].

Embora os sinais gravitacionais contenham informações valiosas sobre as propriedades físicas dos sistemas em coalescência, tais como massas, *spins* e distância [9], a caracterização estatística completa da deformação relativa (*strain*) do tecido do espaço-tempo, expressa pela série temporal $h(t)$, permanece um desafio em termos de extração de padrões complexos e análise multiescala. Métodos tradicionais, como transformadas de Fourier e técnicas de correlação cruzada, são eficazes na identificação espectral, mas podem apresentar limitações significativas quando aplicados a fenômenos altamente não lineares, multifractais e com dependência explícita de escala, características esperadas durante as diferentes fases da coalescência binária [12].

Nesse contexto, formula-se a hipótese central deste estudo: as amplitudes e frequências das ondas gravitacionais emitidas durante a fusão de buracos negros não evoluem de modo aleatório ou gaussiano, mas exibem uma estrutura estatística multiescala, com assinaturas de não linearidade, memória de longo alcance e dinâmica fora do equilíbrio. Tais propriedades são compatíveis com o formalismo da mecânica estatística não-extensiva de Tsallis [13]. Essa hipótese é explorada quantitativamente ao longo desta tese, com base na extração e análise dos expoentes do q -tripleto de Tsallis (q_{stat} , q_{sen} , q_{rel}) [14–16].

O formalismo de Tsallis tem sido amplamente empregado na descrição de sistemas astrofísicos complexos, como turbulência solar, flares, dinâmica estelar e ventos interplanetários, apresentando resultados consistentes na identificação de regimes multifractais, não gaussianos e de memória de longo alcance [17–19]. Burlaga e Viñas [20], por exemplo, determinaram empiricamente o q -tripleto a partir de medições do campo magnético interplanetário pela sonda Voyager 1, enquanto de Freitas e De Medeiros [19] aplicaram o formalismo à ativi-

dade solar.

Contudo, sua aplicação ao domínio das ondas gravitacionais, cujos sinais são intrinsecamente não lineares, coerentes temporalmente e sujeitos a processos de relaxação lenta, ainda está em estágio inicial. Um trabalho pioneiro de Silva *et al.* [21] aplicou a estrutura do q -tripleto ao sinal do evento GW150914, revelando sua multifractalidade e não extensividade. No entanto, não há até o presente estudos sistemáticos que explorem este formalismo de maneira abrangente para uma população de eventos, para sinais contínuos ou estocásticos, ou que o integrem diretamente aos pipelines de detecção e análise de fontes de ondas gravitacionais. Esta lacuna fundamental na literatura constitui a motivação central para a investigação proposta nesta tese.

A fim de testar essa hipótese, este trabalho propõe a aplicação da mecânica estatística não-extensiva de Tsallis [22] como arcabouço teórico para investigar a estrutura da série temporal $h(t)$ associada aos eventos de ondas gravitacionais. O sinal $h(t)$, conhecido como *strain* gravitacional, representa a deformação relativa do espaço-tempo induzida pela passagem de uma onda gravitacional, sendo definido como a variação fracionária do comprimento dos braços interferométricos do detector, $h(t) = \Delta L(t)/L$. Essa grandeza constitui o principal observável físico fornecido pelos detectores do LIGO e encapsula, de forma direta, a dinâmica temporal do processo de coalescência dos sistemas binários compactos.

A análise da série temporal $h(t)$ permite acessar não apenas informações espectrais associadas às frequências dominantes do sinal, mas também flutuações temporais sutis relacionadas a efeitos não lineares, correlações de longo alcance e variações multiescalares que emergem durante as diferentes fases do evento gravitacional. Nesse sentido, a abordagem estatística adotada possibilita explorar propriedades dinâmicas e estatísticas que não são adequadamente descritas por distribuições gaussianas clássicas nem por métodos lineares convencionais, sendo especialmente apropriada para sistemas complexos que operam fora do equilíbrio termodinâmico [23].

A metodologia desenvolvida fundamenta-se na análise multiescala da série temporal $h(t)$, com estimativas computacionais dos expoentes (q_{stat}), (q_{sen}) e (q_{rel}) obtidas por meio de distribuições q -Gaussianas, *Multifractal Detrended Fluctuation Analysis* (MF-DFA) e medidas de correlação baseadas em informação mútua média (AMI) [24, 25]. Essa combinação permite investigar tanto o comportamento estacionário e estatístico das OGs quanto sua sensibilidade a condições iniciais e a dinâmica de relaxação, oferecendo uma visão mais abrangente e fisicamente consistente da complexidade gravitacional.

A adoção do formalismo estatístico de Tsallis justifica-se pelo acúmulo de evidências de que sistemas gravitacionais, como as fusões de buracos negros, exibem comportamentos característicos de sistemas complexos, como memória de longo alcance, distribuição de caudas pe-

sadas e multifractalidade, que não são descritos adequadamente pela hipótese de extensividade da estatística de Boltzmann-Gibbs [17, 26–28]. As OGs, em particular, constituem séries temporais únicas, curtas, mas altamente informativas, cuja natureza multiescala desafia os métodos lineares convencionais. Assim, o uso desse formalismo de Tsallis fornece uma estrutura conceitual e matemática capaz de capturar tais aspectos não lineares, restabelecendo a conexão entre entropia generalizada e complexidade física do espaço-tempo.

Além disso, a entropia de Tsallis mostra-se particularmente adequada para descrever sistemas fortemente interagentes e gravitacionalmente vinculados, nos quais a hipótese de extensividade da entropia deixa de ser válida. Para valores apropriados do parâmetro q , a formalização não-extensiva fornece uma descrição mais fiel da dinâmica de subsistemas que não são estatisticamente independentes. Dessa forma, a aplicação do arcabouço teórico de Tsallis estabelece uma ponte conceitual entre a estatística não extensiva e a física de ondas gravitacionais, cujas descrições teóricas e observacionais frequentemente envolvem não linearidades e condições de não equilíbrio.

Dessa forma, ao aplicar a estatística não-extensiva para extrair os parâmetros do q -tripleto, este estudo busca não apenas validar a hipótese de estrutura multiescala na evolução de $h(t)$, mas também contribuir com uma abordagem alternativa, sólida e sensível para a interpretação da física envolvida nas OGs ampliando o entendimento sobre a dinâmica de fusões de buracos negros, bem como os processos fundamentais que regem o espaço-tempo.

1.2 Objetivos

Esta tese busca investigar o comportamento da estrutura multiescala das deformações registradas nas séries temporais das ondas gravitacionais, demonstrando que sua dinâmica é regida por estatísticas não extensivas, caracterizadas pelo q -tripleto $(q_{stat}, q_{sen}, q_{rel})$ de Tsallis, e que esses índices podem identificar a frequência dominante durante a coalescência dos buracos negros. Além disso, concomitante a proposta geral desta tese, destacam-se alguns objetivos específicos:

- a) Aplicar técnicas de filtragem espectral e pré-processamento em séries temporais de eventos de ondas gravitacionais extraídas dos detectores LIGO (Hanford e Livingston) para remoção de ruídos e isolamento do sinal físico de interesse;
- b) Estimar computacionalmente os expoentes do q -tripleto $(q_{stat}, q_{sen}, q_{rel})$ a partir das séries temporais $h(t)$ tratadas, empregando distribuições q -Gaussianas, análise multifractal (MF-DFA) e medidas de correlação baseadas em informação mútua média (AMI), com fundamento na mecânica estatística não-extensiva de Tsallis;

- c) Verificar, no estudo de caso do evento GW150914, se a série temporal $h(t)$ é adequadamente descrita por uma distribuição q -Gaussiana de Tsallis, se apresenta estrutura multifractal associada à sensibilidade às condições iniciais e se exibe uma dinâmica de relaxação compatível com regimes não-extensivos; em seguida, estender essa análise aos demais eventos BBH (*Binary Black Hole systems*) selecionados, avaliando a robustez estatística desses comportamentos;
- d) Caracterizar quantitativamente a dinâmica dos sistemas binários coalescentes por meio dos três índices do q -triplete (q_{stat} , q_{sen} , q_{rel}), analisando de que forma esses parâmetros descrevem regimes distintos de estacionariedade, sensibilidade dinâmica e relaxação temporal, evidenciando desvios em relação ao comportamento extensivo clássico;
- e) Investigar a viabilidade do uso dos índices entrópicos do q -triplete como parâmetros estatísticos associados à determinação da frequência dominante durante o processo de fusão dos buracos negros, analisando sua correlação com grandezas espectrais extraídas dos sinais gravitacionais;
- f) Identificar a presença de assinaturas estatísticas compatíveis com transições dinâmicas de regime no domínio temporal e/ou espectral durante a coalescência de sistemas binários de buracos negros, com ênfase na relação entre o aumento da frequência gravitacional e variações sistemáticas nos parâmetros do q -triplete;
- g) Correlacionar os parâmetros obtidos com propriedades físicas da radiação gravitacional detectada, oferecendo uma nova perspectiva sobre a dinâmica interna desses sinais e com o intuito de analisar o comportamento do sistema que se encontra fora equilíbrio no momento da colisão dos buracos negros.

1.3 Estrutura Organizacional

A presente tese está organizada de forma sistemática em oito capítulos principais, estruturados de modo a conduzir o leitor progressivamente desde os fundamentos teóricos até as análises e interpretações finais. O Capítulo 1 apresenta a introdução geral do trabalho, contextualizando a pesquisa dentro do panorama atual da física gravitacional e justificando a aplicação da mecânica estatística não extensiva de Tsallis no estudo das ondas gravitacionais. Nesse capítulo, são delineados os objetivos gerais e específicos da investigação, bem como a motivação científica que impulsiona o desenvolvimento da proposta.

O Capítulo 2 realiza uma revisão teórica introdutória sobre as ondas gravitacionais, abordando seus fundamentos na Relatividade Geral, a linearização das equações de campo de Einstein, os estados de polarização das ondas e os mecanismos de geração e detecção desses

sinais astrofísicos. Em seguida, o Capítulo 3 foca nas principais detecções de ondas gravitacionais, com destaque para o evento GW150914, analisando suas características físicas e o papel dos detectores LIGO de Hanford e Livingston na observação direta dos sinais.

No Capítulo 4, discorre-se sobre a mecânica estatística não extensiva de Tsallis, enfatizando a formulação do q -tripleto (q_{stat} , q_{sen} , q_{rel}) e suas interpretações no contexto de sistemas complexos fora do equilíbrio termodinâmico. Esse capítulo estabelece as bases conceituais necessárias para a análise estatística dos sinais gravitacionais.

O Capítulo 5 descreve detalhadamente a metodologia empregada no estudo, incluindo os critérios de seleção das amostras, os procedimentos de pré-processamento das séries temporais e os métodos computacionais utilizados na extração dos expoentes q . São abordadas, também, as ferramentas estatísticas aplicadas às análises de correlação e regressão entre os parâmetros extraídos e as variáveis físicas associadas aos sistemas binários em coalescência.

No Capítulo 6, são apresentados e discutidos os resultados obtidos. As análises envolvem o comportamento temporal dos sinais, a caracterização dos índices q e suas variações em função da frequência, além da identificação de possíveis assinaturas de regimes distintos durante o processo de coalescência de buracos negros. A Capítulo ainda contempla comparações entre os detectores e uma discussão aprofundada das correlações estatísticas observadas.

O Capítulo 7 reúne as principais conclusões da pesquisa, destacando as contribuições teóricas e metodológicas do estudo para a caracterização não extensiva das ondas gravitacionais e sugerindo implicações para a física de sistemas gravitacionalmente vinculados.

Por fim, o Capítulo 8 propõe direções futuras de pesquisa, apontando potenciais extensões da abordagem aqui desenvolvida para a análise de novos eventos, outros tipos de fontes astrofísicas e possibilidades de aprofundamento no estudo da complexidade informacional em sinais gravitacionais.

2 UMA BREVE REVISÃO SOBRE AS ONDAS GRAVITACIONAIS

As ondas gravitacionais representam uma das mais notáveis previsões da Teoria da Relatividade Geral, sendo mensageiras diretas de eventos astrofísicos extremos e inacessíveis por outros meios observacionais. Sua detecção inaugura uma nova janela para a compreensão do universo, permitindo investigar fenômenos associados às regiões mais energéticas e dinâmicas do cosmos, como fusões de buracos negros, estrelas de nêutrons e processos relacionados à origem do próprio universo (Abbott *et al.*, 2016) [29]. Segundo Kip Thorne, laureado com o Prêmio Nobel de Física em 2017, “*as ondas gravitacionais são ondulações no próprio tecido do espaço-tempo, que carregam consigo informações sobre suas fontes e sobre a natureza da gravidade em si*” (Thorne, 1994) [30]. A formulação teórica das ondas gravitacionais, bem como sua propagação, detecção e interpretação, fundamenta-se nos pilares da Relatividade Geral desenvolvida por Einstein em 1915, cuja concepção revolucionou o entendimento da gravitação como manifestação da geometria do espaço-tempo (Thorne, 1987) [31]. Para compreender adequadamente as bases teóricas da geração e da propagação de ondas gravitacionais, é imprescindível uma análise dos fundamentos da Relatividade Geral, da linearização de suas equações de campo e da estrutura dos tensores de perturbação que descrevem essas ondulações, os quais serão apresentados nas seções subsequentes.

2.1 Introdução sobre Relatividade Geral

Albert Einstein publicou, em 1915, a Teoria da Relatividade Geral, com o objetivo de generalizar a teoria clássica da gravitação formulada por Isaac Newton [1]. Diferentemente da gravitação newtoniana, cuja formulação não incorporava a geometria do espaço-tempo, a Relatividade Geral estabelece que a gravidade emerge da curvatura do espaço-tempo induzida pela distribuição de massa, energia e momento. No limite de campos gravitacionais fracos, suas aproximações permitem soluções do tipo onda [2]. A conexão matemática entre a geometria do espaço-tempo e o conteúdo de energia-momento é formalmente expressa nas Equações de Campo de Einstein (EFE, do inglês *Einstein Field Equation*), cuja formulação relaciona diretamente o tensor de curvatura com o tensor energia-momento por meio da equação fundamental

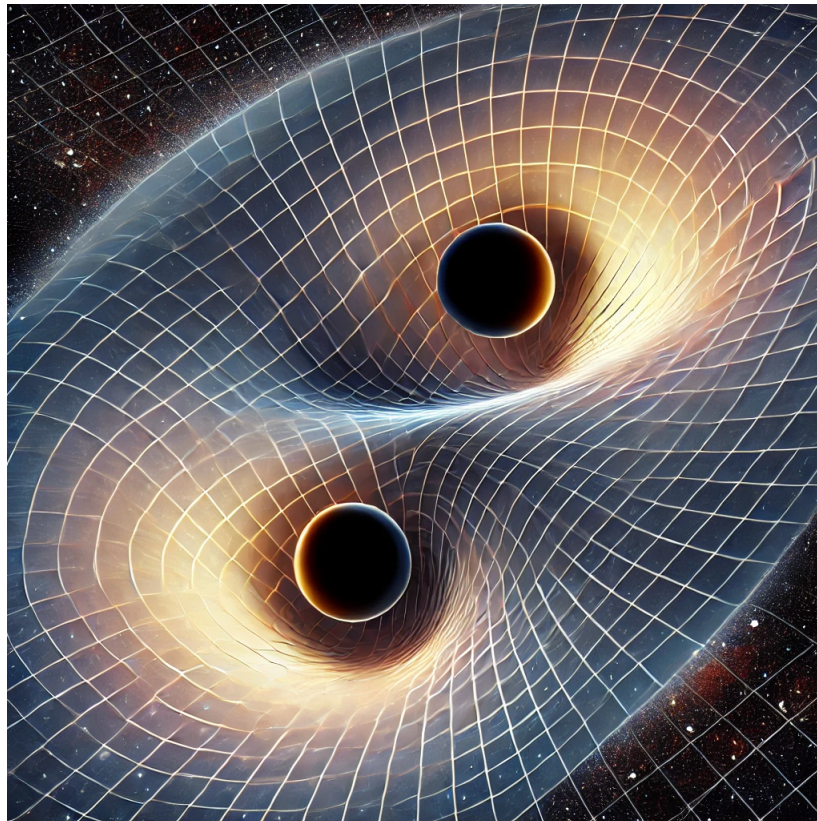
$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R - \Lambda g_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ab}, \quad (2.1)$$

A Equação de Campo de Einstein estabelece a relação fundamental entre a curvatura do espaço-tempo e a distribuição de matéria e energia no universo. A seguir, descrevem-se, do ponto de vista físico, os significados de cada termo presente nessa equação:

- i) O Tensor de Einstein G_{ab} encapsula toda a informação sobre a curvatura do espaço-tempo e suas propriedades geométricas. Ele é uma combinação do tensor de Ricci e do escalar de curvatura e pode ser visto como a “resposta” do espaço-tempo à presença de matéria e energia;
- ii) O Tensor de Ricci R_{ab} é uma contração do tensor de Riemann, que descreve como o espaço-tempo se curva em resposta à presença de matéria e energia. Ele é uma medida da curvatura relacionada a como os volumes de matéria se deformam ao longo do espaço-tempo. Quando $R_{ab} = 0$, o espaço-tempo está vazio, sem matéria ou energia presente, embora ainda possa existir curvatura devido à propagação de ondas gravitacionais;
- iii) A métrica do espaço-tempo g_{ab} descreve como as distâncias e os intervalos de tempo são medidos no espaço-tempo curvo, definindo sua geometria em presença de matéria e energia. O termo $\frac{1}{2}g_{ab}R$ surge da exigência matemática de que o tensor de Einstein possua divergência nula, condição garantida pelas identidades de Bianchi, assegurando, assim, a conservação local da energia e do momento no espaço-tempo;
- iv) O escalar de curvatura R é uma quantidade escalar derivada da métrica, representando uma “média” da curvatura do espaço-tempo em um ponto. Ele é obtido pela contração do tensor de Ricci com a métrica e dá uma medida geral da curvatura total do espaço-tempo em torno de uma distribuição de massa e energia. Se $R = 0$, isso implica um espaço-tempo plano (ou em certos casos, sem curvatura global, mas com curvatura local);
- v) A Constante Cosmológica Λ foi introduzida por Einstein para permitir um universo estacionário. Fisicamente, a constante cosmológica é interpretada como uma força que age em todo o espaço-tempo, como a “energia do vácuo”, que pode causar uma expansão acelerada do universo, como observada atualmente. O termo Λg_{ab} contribui para a curvatura do espaço-tempo mesmo na ausência de matéria ou radiação;
- vi) O tensor energia-momento T_{ab} descreve a densidade e o fluxo de energia e momento em cada ponto do espaço-tempo. Ele representa a distribuição de matéria, energia, pressão e tensões no universo. Esse tensor aparece no lado direito da equação, simbolizando que a matéria e a energia determinam a curvatura do espaço-tempo;
- vii) A Constante de Acoplamento Gravitacional $\frac{8\pi G}{c^4} = 2,073 \times 10^{-48} \left(\frac{s^2}{kg.m} \right)$ define a intensidade da interação gravitacional. O termo contém a constante gravitacional G , que define a força da gravidade, e c , a velocidade da luz no vácuo, que aparece para garantir a consistência das dimensões físicas entre os dois lados da equação. Esse fator ajusta a equação de campo para que a quantidade de curvatura gerada seja proporcional à densidade de

energia-momento presente. Isso indica que o campo gravitacional está diretamente relacionado à curvatura do espaço-tempo, como ilustrado na Figura 1, sendo diretamente determinado pela distribuição de matéria, energia e radiação no universo.

Figura 1 – Imagem ilustrativa mostrando a curvatura do espaço-tempo causada por dois buracos negros em um sistema binário, girando um em torno do outro. A deformação da malha representa a distorção do espaço-tempo, evocando o vasto efeito gravitacional dos buracos negros.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como consequência, no espaço vazio longe de qualquer distribuição o tensor de Ricci desaparecerá enquanto o tensor de Riemann pode ser diferente de zero, isto significa que os efeitos de uma onda gravitacional propagativa em um espaço-tempo vazio serão descritos através do tensor de Riemann [32].

Entre os resultados mais notáveis da Relatividade Geral estão: a dilatação temporal gravitacional, pela qual relógios situados em potenciais gravitacionais mais profundos transcorrem mais lentamente do que os afastados da fonte; o *redshift* gravitacional, que expressa a perda de energia (isto é, o aumento do comprimento de onda, com desvio para o vermelho) da radiação ao “subir” um poço gravitacional; a precessão do periélio de Mercúrio, cuja anomalia não explicada pela mecânica newtoniana é corretamente prevista pela curvatura do espaço-tempo solar [33]; e as ondas gravitacionais, ondulações da métrica produzidas por massas aceleradas que se propagam à velocidade da luz [34]. Conjuntamente, esses fenômenos, testados em escalas

de laboratório, no Sistema Solar e em contextos astrofísicos, constituem pilares observacionais da teoria e evidenciam que a gravidade se manifesta geometricamente, e não como uma força newtoniana.

2.2 Equações de campo de Einstein Linearizadas

Admite-se que, em regiões suficientemente distantes de objetos compactos, como buracos negros e estrelas de nêutrons, o campo gravitacional seja fraco, no sentido de que a geometria do espaço-tempo se aproxima da plana. Nessa condição, válida para a maioria das situações astrofísicas, a métrica física g_{ab} é aproximadamente igual à métrica de Minkowski η_{ab} da relatividade especial [35], de modo que:

$$g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}, \quad (2.2)$$

onde h_{ab} representa uma perturbação métrica de pequena magnitude. Como não existe uma métrica positivamente definida natural no espaço-tempo, não há uma norma intrínseca para quantificar rigorosamente essa “pequenez”. No entanto, pode-se impor que, em relação a um sistema de coordenadas inerciais associado a η_{ab} , cuja forma canônica é $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ [36], os componentes da perturbação satisfaçam:

$$|h_{ab}| \ll 1. \quad (2.3)$$

A partir da substituição da Equação (2.2) na identidade métrica $g^{ab}g_{bc} = \delta^a_c$, e utilizando-se que $\eta^{ab}\eta_{bc} = \delta^a_c$, obtém-se que a métrica inversa g^{ab} também se aproxima da métrica inversa de Minkowski η^{ab} , segundo:

$$g^{ab} = \eta^{ab} - h^{ab}, \quad (2.4)$$

onde se introduz a notação $h^{ab} \equiv \eta^{ac}\eta^{bd}h_{cd}$, tendo sido desprezados todos os termos de ordem superior $O(h^2)$. A partir deste ponto, assume-se que a análise se restringe ao regime linear na perturbação h_{ab} , negligenciando-se termos de ordem superior $O(h)$ [37]. Consequentemente, todos os índices serão elevados e rebaixados exclusivamente pela métrica plana η^{ab} e sua inversa η_{ab} .

Procede-se, então, à linearização da Equação de Einstein:

$$G_{ab} = \frac{8\pi}{G} c^4 T_{ab} \quad (2.5)$$

em relação à perturbação métrica η_{ab} .

Utilizando as expressões obtidas para g_{ab} e g^{ab} , aplicadas na definição do tensor de

Riemann:

$$R^a_{bcd} = \partial_c \Gamma^a_{bd} - \partial_d \Gamma^a_{bc} + \Gamma^a_{ec} \Gamma^e_{bd} - \Gamma^a_{ed} \Gamma^e_{bc}, \quad (2.6)$$

com os símbolos de Christoffel dados, na aproximação linear [38], por:

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_c g_{bd} + \partial_b g_{cd} - \partial_d g_{bc}). \quad (2.7)$$

Obtém-se, portanto, para o tensor de Riemann linearizado:

$$R_{abcd} = -\partial_c \partial_{[a} h_{b]d} + \partial_d \partial_{[a} h_{b]c}, \quad (2.8)$$

onde ∂_a representa a derivada ordinária associada às coordenadas inerciais globais de η_{ab} , e colchetes denotam a antissimetria sobre um par de índices, por exemplo, $T_{[ab]} \equiv \frac{1}{2} (T_{ab} - T_{ba})$. Utilizando as definições do tensor de curvatura de Riemann, que é possível definir outros tensores de ordem inferior, como o tensor de Ricci, definido por

$$R_{ab} \equiv g^{cd} R_{cabd} = R^c_{acb}, \quad (2.9)$$

que é simétrico. O tensor de Ricci é o único tensor não trivial de segunda ordem que pode ser obtido pela contração de um par de índices do tensor de Riemann [39]. De fato, devido às propriedades de simetria, outras contrações resultam em $\pm R_{ab}$ ou se anulam identicamente [39]. O traço do tensor de Ricci,

$$R \equiv g^{ab} R_{ab} = R^a_{ab}, \quad (2.10)$$

do tensor de Ricci e da curvatura escalar, o tensor de Einstein G_{ab} também pode ser linearizado. A equação de Einstein (2.1) então se reduz a

$$\square \bar{h}_{ab} - 2\partial_{(a} V_{b)} + \eta_{ab} \partial_c V^c = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{ab}. \quad (2.11)$$

onde $\square \equiv \eta^{cd} \partial_c \partial_d = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$, é o operador de onda no espaço plano, ou d'Alembertiano, e os parênteses indicam uma simetria sobre um par de índices, por exemplo, $T_{(ab)} \equiv \frac{1}{2} (T_{ab} + T_{ba})$ [35]. Além disso, introduzimos a notação $V_a \equiv \partial^c \bar{h}_{ac}$ para a divergência da perturbação métrica com traço revertido

$$\bar{h}_{ab} = h_{ab} - \frac{1}{2} h \eta_{ab}, \quad (2.12)$$

com $h \equiv \eta^{ab} h_{ab}$. Calculando o traço de h_{ab} , obtemos $\bar{h} = -h$, de modo que a Equação (2.12) pode ser facilmente invertida para fornecer

$$h_{ab} = \bar{h}_{ab} - \frac{1}{2} \bar{h} \eta_{ab}. \quad (2.13)$$

A Equação (2.11) assume uma forma ligeiramente mais complexa quando expressa em termos da perturbação métrica h_{ab} .

2.3 Condição de calibre de Lorentz

Observa-se que a forma da métrica dada pelas Equações (2.2)–(2.3) não especifica de maneira única a perturbação h_{ab} . A liberdade para realizar transformações de coordenadas “infinitesimais” $x^\alpha \rightarrow x^\alpha - \xi^\alpha(x)$, que preservam a forma da métrica em (2.2)–(2.3), dá origem, na teoria linearizada, a uma invariância sob transformações de calibre [40] da forma

$$h_{ab} \rightarrow h_{ab} + 2\partial_{(a}\xi_{b)}. \quad (2.14)$$

O campo vetorial arbitrário ξ^α é denominado gerador da transformação de calibre (2.14). Verifica-se que o tensor de Riemann linearizado (2.8) permanece invariante sob essa transformação. Essa liberdade de calibre é análoga àquela existente no eletromagnetismo no espaço-tempo plano, cuja formulação covariante é representada pelo tensor de Faraday [41], também conhecido como tensor eletromagnético [42]. Este tensor encapsula de maneira compacta os campos elétrico e magnético no formalismo relativístico, sendo definido por $F_{ab} = \partial_{[a}A_{b]}$ e apresenta invariância sob transformações de calibre do potencial vetorial, do tipo $A_a \rightarrow A_a + \partial_a\chi$ onde χ é uma função escalar arbitrária [42].

A liberdade de calibre na gravitação linearizada pode ser utilizada para simplificar a equação de Einstein linearizada (2.11) [38]. Em particular, sempre é possível encontrar um calibre no qual a divergência V_α se anula, isto é

$$\partial^c \bar{h}_{ac} = 0. \quad (2.15)$$

Note que V_a se transforma como $V_a \rightarrow V_a + \square \xi_a$ sob a transformação de calibre (2.14). Portanto, partindo de um calibre em que $V_a \neq 0$, pode-se adotar um calibre que obedece à condição (2.15) aplicando uma transformação de calibre cujo gerador satisfaz

$$\square \xi_a = -V_a. \quad (2.16)$$

Por analogia com a condição de calibre $\partial^a A_a = 0$ do eletromagnetismo, a Equação (2.15) é conhecida como condição de calibre de Lorentz, ou condição de calibre harmônico.

No calibre de Lorentz, a equação de Einstein linearizada (2.11) se reduz a

$$\square \bar{h}_{ab} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{ab}. \quad (2.17)$$

Isso significa que \bar{h}_{ab} representa uma quantidade que se propaga como uma onda à velocidade da luz no vácuo, sobre um fundo de Minkowski plano, e que é gerada pelo, e que é gerado pelo tensor energia-momento T_{ab} . [38]. Em outras palavras, \bar{h}_{ab} descreve uma onda gravitacional.

Dada uma fonte material, a solução da equação de onda (2.17) para cada componente $\bar{h}_{\mu\nu}$ de \bar{h}_{ab} corresponde a um problema padrão em física, semelhante, por exemplo, à teoria das ondas eletromagnéticas [42], como ilustrado na Tabela 1.

Tabela 1 – A liberdade de calibre da gravitação linearizada é análoga à da eletromagnetismo ordinário no espaço-tempo plano.

	Eletromagnetismo	Gravitação Linearizada
Gerador	χ	ξ_a
Potencial	A_a	h_{ab}
Transformação de calibre	$A_a \rightarrow A_a + \partial_a \chi$	$h_{ab} \rightarrow h_{ab} + 2\partial_{(a} \xi_{b)}$
Invariante de calibre	$F_{ab} = \partial_{[a} A_{b]}$	$R_{abcd} = -\partial_c \partial_{[a} h_{b]d} + \partial_d \partial_{[a} h_{b]c}$
Condição de Lorentz	$\partial^a A_a = 0$	$\partial^a \bar{h}_{ab} = 0$
Lei de conservação	$\partial^a j_a = 0$	$\partial^a T_{ab} = 0$
Equação de onda	$\square A_a = -\mu_0 j_a$	$\square \bar{h}_{ab} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{ab}$

Fonte: Le Tiec [43].

A equação de Einstein linearizada (2.17) lembra a equação de Maxwell no calibre de Lorentz

$$\square A^a = -\mu_0 j^a, \quad (2.18)$$

onde μ_0 é a permeabilidade do vácuo e j^a é a densidade de corrente. Assim como a condição de calibre $\partial^a A_a = 0$ implica a conservação local da carga elétrica, $\partial^a j_a = 0$, a condição de calibre harmônico (2.15) implica a conservação local da energia e do momento na gravitação linearizada [37]

$$\partial_a T^{ab} = 0. \quad (2.19)$$

2.4 Propagação de ondas gravitacionais no vácuo

Consideremos ondas gravitacionais que se propagam no vácuo, isto é, tomamos $T_{ab} = 0$ na Equação (2.17). Sob a condição de calibre harmônico (2.15), a equação de Einstein linearizada reduz-se à equação de onda livre para a perturbação com traço revertido

$$\square \bar{h}_{ab} = 0. \quad (2.20)$$

A solução geral de (2.20) pode ser escrita como superposição de ondas planas [38] (decomposição de Fourier em quatro dimensões). Na teoria linearizada, qualquer solução da equação de onda para \bar{h}_{ab} pode ser escrita como superposição contínua de ondas planas (modos de Fourier). Usaremos o ansatz ¹ de onda plana

$$\bar{h}_{ab}(x) = \Re \int d^4k A_{ab}(k) e^{ik_\alpha x^\alpha} \quad (2.21)$$

Note que: $\square \bar{h}_{ab}(x) = 0$ como $\square \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ e como \square é linear e a operação $\Re\{\cdot\}$ também, podemos trabalhar sem o \Re durante a álgebra (e recolocá-lo ao final, se desejado). Escreveremos, então,

$$\bar{h}_{ab}(x) = \int d^4k A_{ab}(k) e^{ik \cdot x} \quad (\text{algebricamente, sem o } \Re).$$

Como $A_{ab}(k)$ não depende de x , as derivadas atuam apenas no fator exponencial e podem entrar na integral:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \bar{h}_{ab}(x) &= \int d^4k A_{ab}(k) \partial_\mu e^{ik \cdot x} = \int d^4k A_{ab}(k) (ik_\mu) e^{ik \cdot x}, \\ \partial_\nu \partial_\mu \bar{h}_{ab}(x) &= \int d^4k A_{ab}(k) \partial_\nu [(ik_\mu) e^{ik \cdot x}] = \int d^4k A_{ab}(k) (-k_\mu k_\nu) e^{ik \cdot x}. \end{aligned}$$

Aplicar o d'Alembertiano.

$$\square \bar{h}_{ab}(x) = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \bar{h}_{ab}(x) = \int d^4k A_{ab}(k) [-\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu] e^{ik \cdot x}.$$

Usar a equação de onda $\square \bar{h}_{ab} = 0$.

$$0 = \square \bar{h}_{ab}(x) = \int d^4k \underbrace{[-\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu]}_{\text{fator em } k} A_{ab}(k) e^{ik \cdot x}.$$

Como as exponenciais $e^{ik \cdot x}$ formam uma base independente (no sentido de Fourier), para que a integral seja nula para todo x sem forçar $A_{ab}(k) \equiv 0$, é necessário que o fator multiplicando cada exponencial se anule para todo k tal que $A_{ab}(k) \neq 0$:

$$\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0.$$

¹Em física, o termo *ansatz* refere-se a uma suposição inicial ou um palpite que é usado como ponto de partida para resolver um problema físico ou matemático. Ele é frequentemente utilizado para estimar soluções para equações que descrevem sistemas físicos. Após estabelecer um *ansatz*, as equações são resolvidas considerando as condições de contorno relevantes. Se o *ansatz* for coerente e racional, ele será validado pelos resultados obtidos. Muitas vezes, o *ansatz* inclui parâmetros que podem ser ajustados iterativamente até alcançar um nível desejado de precisão [44].

Em notação compacta,

$$k^a k_a = \eta^{ab} k_a k_b = 0, \quad (2.22)$$

que é exatamente a condição de nulidade. A Relação de dispersão com assinatura $(-, +, +, +)$: se $k^a = (\omega, \mathbf{k})$, então

$$k^a k_a = -\omega^2 + |\mathbf{k}|^2 = 0 \Rightarrow \omega = |\mathbf{k}|,$$

o que caracteriza a propagação à velocidade da luz: as superfícies de fase $k_\alpha x^\alpha = \text{const.}$ são hipersuperfícies nulas, pois seu covetor² normal $k_a \equiv \partial_a(k_\alpha x^\alpha)$ satisfaz $k^a k_a = 0$.

A condição de calibre de Lorenz (2.15), $\partial^a \bar{h}_{ab} = 0$, torna-se, no espaço de Fourier,

$$k^a A_{ab}(k) = 0, \quad (2.23)$$

isto é, transversalidade da perturbação (com traço revertido) em relação à direção de propagação. Ainda existe liberdade de calibre residual para impor o calibre transverso–sem traço (TT) no referencial em que a onda se propaga ao longo de $+z$ (ver [36]), com $k^a = (\omega, 0, 0, \omega)$, ficando

$$A_{0\mu} = 0, \quad k_i A^{ij} = 0, \quad A^i_i = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (2.24)$$

de modo que restam apenas duas polarizações físicas, tipicamente decompostas como

$$A_{ij}(k) = A_+(k) e_{ij}^+ + A_\times(k) e_{ij}^\times, \quad (2.25)$$

com e_{ij}^+ e e_{ij}^\times formando a base padrão (+ e \times). Assim, uma onda plana monocromática [38] pode ser escrita (no calibre TT) como

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, z) = A_+ e_{ij}^+ \cos[\omega(t - z)] + A_\times e_{ij}^\times \cos[\omega(t - z) + \phi_\times], \quad (2.26)$$

o que explica as deformações diferenciais sobre um anel de massas–teste mostradas na figura de polarizações.

2.4.1 Calibre transversal e sem traço (*Transverse-Traceless, TT*)

Note que a condição de calibre harmônico da Equação (2.15) não especifica de forma única a perturbação métrica h_{ab} .

De fato, qualquer transformação de calibre da Equação (2.14) cujo gerador ξ^a satisfaça

²**Covetor (ou 1-forma):** elemento do espaço cotangente T_p^*M , isto é, um funcional linear que mapeia vetores $v^a \in T_pM$ em escalares via $\omega_a v^a$. Seus componentes carregam índice inferior. A métrica g_{ab} fornece a identificação natural entre vetores e covetores: $v_a = g_{ab} v^b$ e $\omega^a = g^{ab} \omega_b$. No texto, o “covetor de onda” k_a é o gradiente da fase $\phi(x)$ (normal às superfícies $\phi = \text{const.}$); em Minkowski, $k^a = \eta^{ab} k_b$ e, para ondas no vácuo, $k^a k_a = 0$.

$$\square \xi^a = 0, \quad (2.27)$$

preserva a condição de calibre da Equação (2.15). Isso é análogo ao fato de que, no eletromagnetismo, a condição de calibre de Lorentz $\partial^a A_a = 0$ não fixa de forma única o potencial vetorial A_a , ainda existe uma liberdade de calibre restrita $A_a \rightarrow A_a + \partial_a \chi$ com $\square \chi = 0$.

Para especificar unicamente a perturbação métrica, devem ser impostas quatro restrições adicionais. Introduzimos, então, um vetor unitário tipo-tempo u^a , associado, por exemplo, a um observador detectando a radiação gravitacional. A partir disso, podemos definir um calibre transversal e sem traço (TT — *Transverse–Traceless*) [38], no qual o tensor de amplitude satisfaz

$$u^a A_{ab} = 0, \quad (2.28)$$

$$\eta^{ab} A_{ab} = 0. \quad (2.29)$$

A condição $u^a A_{ab} = 0$ remove as componentes temporais no referencial do observador (isto é, $A_{0\mu} = 0$ quando $u^a = (1, 0, 0, 0)$). Já a condição sem traço $\eta^{ab} A_{ab} = 0$ implica $h = 0$, de modo que $\bar{h}_{ab} = h_{ab}$ no calibre TT. Além disso, da condição de Lorentz no espaço de Fourier, $k^a \bar{A}_{ab}(k) = 0$. Como no calibre TT vale $\bar{A}_{ab} = A_{ab}$ (porque $A^a_a = 0$), escrevemos simplesmente $k^a A_{ab}(k) = 0$. No referencial em que a onda se propaga ao longo de $+z$ (com $k^\alpha = \omega(1, 0, 0, 1)$), equivale a $k_i A^{ij} = 0$. Em conjunto, essas condições fixam a liberdade de calibre remanescente na Equação (2.27) e deixam apenas os dois graus de liberdade radiativos.

2.4.2 Estados de polarização

Como $A_{\alpha\beta}$ é simétrico (10 componentes) e as condições de calibre (Lorentz + TT) eliminam 8 combinações independentes, restam apenas duas componentes físicas. No referencial do observador, tomamos $u^a = (1, 0, 0, 0)$ e, para ondas gravitacionais propagando-se na direção z , o vetor de onda é $k^\alpha = \omega(1, 0, 0, 1)$, onde ω é a frequência medida pelo observador. As condições acima implicam que os componentes da perturbação métrica no calibre TT podem ser escritos como

$$h_{\alpha\beta}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

onde h_+ e h_\times são duas funções livres do tempo retardado $t - z$. Esses são os estados de polarização das ondas gravitacionais, os dois graus de liberdade radiativos da métrica. Assim, as ondas gravitacionais possuem dois estados de polarização linearmente independentes, assim como as ondas eletromagnéticas [38]. A razão para as denominações $+$ e \times será esclarecida na

próxima seção, onde discutiremos o efeito de uma onda gravitacional incidente sobre a matéria. No calibre TT, as ondas gravitacionais são descritas por uma matriz 2×2 no plano ortogonal à direção de propagação. Sob uma rotação de ângulo θ em torno dessa direção, os estados de polarização transformam-se como

$$h_+ \pm ih_\times \rightarrow e^{\mp 2i\theta} (h_+ \pm ih_\times). \quad (2.31)$$

Na linguagem da física de partículas, a helicidade H de uma partícula é a projeção de seu *spin* ao longo da direção de propagação. Sob uma rotação de ângulo θ , os estados de helicidade transformam-se como $h \rightarrow e^{\pm iH\theta} h$ [39]. Portanto, a Equação (2.31) mostra que a gravitação linearizada pode ser interpretada como a teoria de uma partícula de spin-2 com estados de helicidade $h_+ \pm ih_\times$, o gráviton, da mesma forma que o fóton (sem massa) é uma partícula de spin-1 responsável pela mediação da interação eletromagnética.

2.4.3 Descrição no calibre TT - interação com massas de teste

Considerando-se a geodésica que corresponde como uma generalização da primeira lei de Newton, ou seja, que objetos se movem em linha reta na ausência de forças externas, a Relatividade Geral afirma que os objetos se movem ao longo de geodésicas quando não estão sujeitos a forças externas.

As geodésicas são os equivalentes curvos das linhas retas no espaço-tempo curvo, e podem ser encontradas por meio do transporte paralelo do vetor tangente de uma curva [45].

Portanto, as equações do movimento na Relatividade Geral são dadas pela equação geodésica

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0, \quad \text{para } m \neq 0, \quad (2.32)$$

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0, \quad \text{para } m = 0. \quad (2.33)$$

onde m é a massa do objeto, τ representa o tempo próprio, definido por $d\tau^2 = -ds^2$ e λ é um parâmetro afim sobre a geodésica (geralmente usado para partículas sem massa).

Essas equações determinam a trajetória de uma partícula em um espaço-tempo curvo:

- i) Partículas com massa seguem geodésicas temporais, parametrizadas por τ ;
- ii) Partículas sem massa (como fótons) seguem geodésicas nulas, parametrizadas por λ .

Em um espaço-tempo plano, duas linhas retas que são inicialmente paralelas permanecerão paralelas.

Em um espaço-tempo curvo, no entanto, geodésicas não satisfazem essa propriedade. Em vez disso, duas geodésicas próximas, separadas por um vetor η^μ [39], seguem a equação da variação geodésica

$$\frac{D^2 \eta^\mu}{D\tau^2} = -R^\mu_{\nu\rho\sigma} \eta^\nu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau}, \quad (2.34)$$

em que $D/D\tau$ é a derivada covariante [39] ao longo da curva, definida por

$$\frac{DV^\mu}{D\tau} = \frac{dV^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} V^\nu \frac{dx^\sigma}{d\tau}. \quad (2.35)$$

Esse operador representa a derivada covariante de um vetor V^ν ao longo de uma curva parametrizada por τ .

A equação da variação geodésica descreve como a separação η^μ entre duas geodésicas próximas muda ao longo do tempo devido à curvatura do espaço-tempo. Como o tensor de Riemann descreve as forças de maré geradas por um campo gravitacional, a Equação (2.34) mostra que essas forças de maré podem ser interpretadas como desvios entre geodésicas vizinhas [40].

Considere uma massa de teste inicialmente em repouso na posição τ .

A partir da Equação (2.33), tem-se

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = - \left[\Gamma^i_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \right]_{\tau=0} = - \left[\Gamma^i_{00} \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 \right]_{\tau=0}. \quad (2.36)$$

Ao avaliarmos a Equação (2.7) no calibre TT, tem-se

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2} (2\partial_0 h_{0i} - \partial_i h_{00}) = 0. \quad (2.37)$$

Portanto, uma massa de teste inicialmente em repouso permanecerá em repouso quando observada no referencial TT.

De forma semelhante, considere a separação coordenada η^i entre duas massas de teste que estão inicialmente em repouso uma em relação à outra em $\tau = 0$. A equação da variação geodésica, Equação (2.34), fornece

$$\left. \frac{d^2 \eta^i}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} = - \left[2\Gamma^i_{0j} \frac{d\eta^j}{d\tau} \right]_{\tau=0} = 0. \quad (2.38)$$

Isso mostra que, se duas massas de teste estão inicialmente separadas por η^i e estão em repouso entre si, elas permanecerão separadas por essa mesma distância coordenada.

À primeira vista, parece que uma onda gravitacional não tem efeito nem sobre geodésicas individuais nem sobre a variação de geodésicas. No entanto, isso é apenas uma característica do sistema de coordenadas TT, pois foi escolhida explicitamente a condição $u^0 = 1$, $u^j = 0$, em todo o espaço-tempo [35].

Agora, considere dois eventos no referencial TT em $(t, x_1, 0, 0)$ e $(t, x_2, 0, 0)$. Esses dois eventos estão separados por uma distância coordenada constante $x_2 - x_1 = L$, em relação ao tempo coordenado t .

No entanto, os efeitos físicos estão codificados na distância própria, dada por

$$s = \int ds = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + h_+ \cos(\omega t)} \approx L \left(1 + \frac{1}{2} h_+ \cos(\omega t) \right). \quad (2.39)$$

Em direções gerais, a distância própria é dada por:

$$s = \sqrt{L^2 + h_{ij}(t)L_i L_j}, \quad (2.40)$$

onde L_i representa a separação espacial entre duas massas de teste, e L é a distância coordenada correspondente.

Isso mostra que a distância própria oscila periodicamente, ela se expande e se contrai conforme a onda gravitacional passa. Como o tempo que a luz leva para percorrer o caminho entre duas massas de teste está relacionado à distância própria, as ondas gravitacionais deixam uma assinatura mensurável nesse tempo [35].

Consequentemente, interferômetros podem detectar essas assinaturas medindo as diferenças de comprimento entre os braços do instrumento, permitindo assim a detecção direta de ondas gravitacionais [45].

2.4.4 Anel de massa de teste

Considere um anel de massas de teste localizado no plano (x, y) , centrado na origem ($z = 0$), submetido à passagem de uma onda gravitacional que se propaga na direção \hat{z} . Como o tensor h_{ij}^{TT} é transversal à direção de propagação, os efeitos da onda gravitacional manifestam-se exclusivamente no plano perpendicular à direção \hat{z} , isto é, no plano (x, y) . Portanto, a análise pode ser restrita a esse plano [38].

Adicionalmente, como as duas polarizações descritas pela Equação (2.30), denominadas h_+ e h_\times são linearmente independentes, é possível analisá-las separadamente, sem perda de generalidade. Por exemplo, para a polarização do tipo + (plus), a matriz do tensor de perturbação no calibre TT assume a forma:

$$h_{ab}^{\text{TT}} = h_+ \cos(\omega t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

onde h_+ representa a amplitude da onda gravitacional, e ω é sua frequência angular. Essa polarização provoca uma deformação no anel de massas de teste que se alterna entre alonga-

mento na direção x e compressão na direção y , e vice-versa, oscilando com a frequência da onda.

Considere agora um referencial do detector em que a posição de uma massa de teste é denotada por

$$\eta^a(t) = (x_0 + \delta x(t), y_0 + \delta y(t)), \quad (2.42)$$

onde (x_0, y_0) é a posição não perturbada da massa de teste e $(\delta x, \delta y)$ são as perturbações causadas pela onda gravitacional.

A evolução de $\eta^\alpha(t)$ causada pela polarização $+$ é então dada pela equação de desvio geodésico no referencial do detector $\ddot{\xi}^i = \frac{1}{2}\ddot{h}_{ij}^{\text{TT}}\xi^j$

$$\begin{pmatrix} \ddot{\delta x} \\ \ddot{\delta y} \end{pmatrix}_+ = -\frac{h_+}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 + \delta x \\ y_0 + \delta y \end{pmatrix} \omega^2 \cos(\omega t) \approx -\frac{h_+}{2} \begin{pmatrix} x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix} \omega^2 \cos(\omega t), \quad (2.43)$$

onde se assume que as perturbações são da ordem de $O(h)$, ou seja, pequenas em comparação com as posições originais.

Resolvendo a Equação (2.43), obtém-se as deformações causadas pela polarização $+$

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}_+ = \frac{2}{h_+} \begin{pmatrix} x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix} \cos(\omega t). \quad (2.44)$$

De forma semelhante, a influência da polarização \times sobre um anel de massas de teste é dada por

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}_\times = \frac{h_\times}{2} \begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \end{pmatrix} \cos(\omega t). \quad (2.45)$$

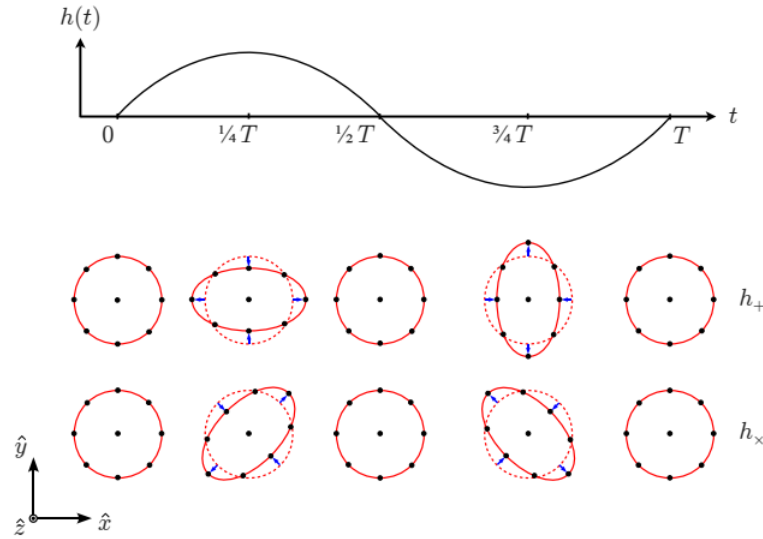
Essas deformações podem ser visualizadas considerando um anel de massas de teste conforme mostrado na Figura 2.

As denominações “mais” (*plus*) e “cruz” (*cross*) para as polarizações originam-se justamente das direções do movimento induzido por essas ondas sobre o anel de massas de teste.

2.5 Geração de ondas gravitacionais

Nesta seção, descrevemos a geração de ondas gravitacionais por sistemas isolados, partindo da versão linearizada da equação de Einstein no calibre harmônico,

Figura 2 – Uma onda gravitacional monocromática de pulsação $\omega = \frac{2\pi}{T}$ propaga-se ao longo da direção \hat{z} . O painel inferior mostra os efeitos das polarizações $+$ e \times sobre um anel de partículas em queda livre, em um referencial inercial local.



Fonte: Le Tiec [43].

$$\square \bar{h}_{ab} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{ab}. \quad (2.46)$$

Este formalismo é válido na aproximação de campos fracos, onde a curvatura do espaço-tempo é pequena o suficiente para que a métrica possa ser tratada como uma perturbação sobre o espaço-tempo plano de Minkowski. Além disso, restringe-se a fontes fracamente relativísticas, isto é, cujas velocidades internas satisfazem $v \ll c$, de forma que a aproximação linearizada seja aplicável.

A solução dessa equação pode ser obtida utilizando função de Green³ $G(x - x')$ satisfaz a equação diferencial [42]

$$\square_x G(x - x_f) = \delta^{(4)}(x - x'), \quad (2.47)$$

então, a solução correspondente da Equação 2.46 é

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) = -\frac{16\pi G}{c^4} \int d^4x' G(x - x') T_{\mu\nu}(x'). \quad (2.48)$$

A solução da equação 2.47 depende, é claro, das condições de contorno que impomos. Assim como no eletromagnetismo, para problemas de radiação, adotamos a função de Green retardada, que respeita a causalidade, dada por

³A função de Green é um conceito matemático fundamental na teoria das equações diferenciais parciais e na física matemática. Ela é utilizada para resolver equações diferenciais não-homogêneas sujeitas a condições de contorno ou iniciais específicas. A função de Green é nomeada em homenagem ao matemático britânico George Green, que desenvolveu o conceito na década de 1830 [46].

$$G(x - x') = -\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta(x_{\text{ret}}^0 - x'^0), \quad (2.49)$$

onde:

- $x'^0 = ct$,
- $x_{\text{ret}}^0 = ct_{\text{ret}}$,

$$t_r = t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c}, \quad (2.50)$$

denominado tempo retardado. Então, a solução da equação 2.46 é

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}(t_r, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3y, \quad (2.51)$$

onde o tempo retardado, refletindo o fato de que a gravidade, assim como o campo eletromagnético, propaga-se a uma velocidade finita c . Portanto, a influência gravitacional em um ponto do espaço-tempo só depende da configuração da fonte no cone de luz passado daquele ponto.

Esta é uma integral sobre o cone de luz passado do ponto de campo (ct, \vec{x}) . Diferentemente da gravidade Newtoniana, que assume interações instantâneas à distância, na Relatividade Geral o campo gravitacional em (ct, \vec{x}) é influenciado exclusivamente pela configuração da fonte no tempo retardado t_r , ou seja, pelo estado da matéria no instante em que um sinal, propagando-se à velocidade finita da luz c , pode ter viajado de um ponto \vec{y} da fonte até o ponto de observação \vec{x} . Este intervalo de tempo corresponde precisamente ao atraso dado por t_r refletindo a causalidade da teoria e o fato de que nenhuma influência gravitacional pode se propagar mais rapidamente que a luz [38]. Este conceito fundamental está ilustrado na Figura 3.

Essa solução pode ser convenientemente projetada no referencial transversal e sem traço (TT), que isola os graus de liberdade puramente radiativos da onda gravitacional. Para isso, introduz-se o operador projetor

$$\Lambda_{ijkl} \equiv P_{ik}P_{jl} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{kl}, \quad (2.52)$$

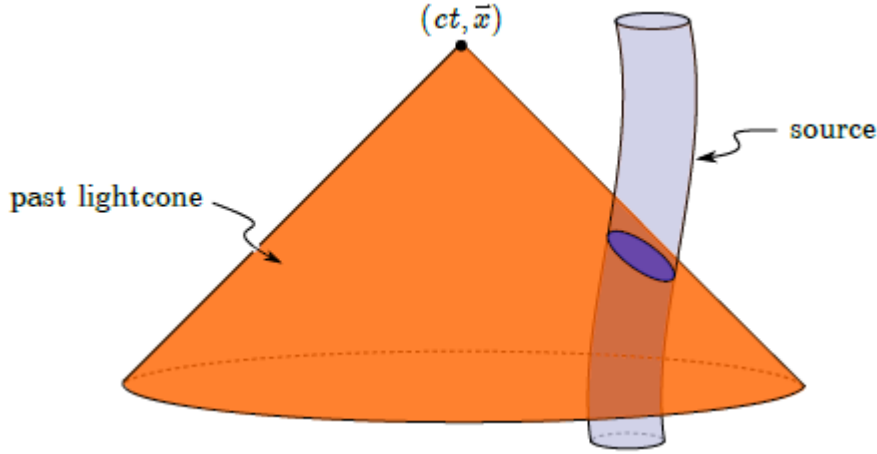
onde o tensor de projeção P_{jl} é definido por

$$P_{ij} \equiv \delta_{ij} - n_i n_j, \quad (2.53)$$

sendo n_i o vetor unitário na direção de propagação da onda gravitacional.

O tensor P_{jl} realiza a projeção ortogonal em relação à direção de propagação, assegurando que as componentes projetadas sejam puramente transversais (perpendiculares a n_i).

Figura 3 – Representação do cone de luz passado associado ao ponto de observação (ct, \vec{x}) . Na Relatividade Geral, as ondas gravitacionais se propagam a uma velocidade finita c , de modo que a perturbação gravitacional em (ct, \vec{x}) depende exclusivamente da configuração da fonte em pontos dentro do seu cone de luz passado, no tempo retardado $t_r = t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}$. Este conceito reflete a causalidade na propagação das perturbações do campo gravitacional.



Fonte: Le Tiec [43].

Por sua vez, o operador $\Lambda_{ij,kl}$ garante simultaneamente a condição de traço nulo e a transversalidade do tensor perturbativo h_{jl} , isolando os graus de liberdade físicos associados às ondas gravitacionais [38].

Portanto, fora da fonte, onde o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ se anula, e assumindo que a perturbação está expressa no calibre harmônico, os componentes espaciais da métrica no calibre TT podem ser obtidos aplicando o operador projetor sobre a solução da equação de onda linearizada [38]

$$h_{ij}^{TT}(t, \vec{x}) = \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) h_{kl}(t, \vec{x}) = \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \bar{h}_{kl}(t, \vec{x}). \quad (2.54)$$

De modo explícito, substituindo a solução integral para \bar{h}_{kl} , a expressão no calibre TT resulta em

$$h_{ij}^{TT}(t, \vec{x}) = \frac{4G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \int \frac{d^3y}{|\vec{x}-\vec{y}|} T_{kl} \left(t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}, \vec{y} \right). \quad (2.55)$$

Essa expressão torna explícito que apenas os componentes do tensor de T_{kl} que contribuem para quadrupolos (ou ordens superiores) estão associados à geração de radiação gravitacional.

No chamado campo distante, ou zona de radiação, definido pela condição $r = |\vec{x}| \gg d$, onde d representa o tamanho característico da fonte, a expressão para o campo gravitacional se simplifica significativamente. Neste regime, desprezam-se termos de ordem $O(1/r^2)$ ou superiores, pois sua contribuição torna-se negligenciável a grandes distâncias [39].

Consequentemente, a dependência espacial no denominador da Equação 2.55 pode ser aproximada por $|\vec{x} - \vec{y}| \approx r$, onde r é o módulo do vetor posição do ponto de observação, refletindo o fato de que as variações angulares associadas à posição \vec{y} da fonte são desprezíveis em comparação com a distância r até o observador.

Estamos particularmente interessados na forma assintótica de h_{ij} quando $r \rightarrow \infty$, mantendo o tempo t fixo, isto é, na fronteira causal definida pelo cone de luz passado do observador. Neste limite, conserva-se apenas o termo dominante da equação 2.55, que decai como $1/r$, responsável pela radiação gravitacional detectável [35]

$$h_{ij}^{TT}(t, \vec{x}) = \frac{4G}{c^4 r} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \int T_{kl}(t_r, \vec{y}) d^3y. \quad (2.56)$$

É importante ressaltar que, na teoria da gravitação, os graus de liberdade radiativos estão contidos apenas nos componentes espaciais do tensor métrico h_{ij}^{TT} .

2.5.1 Expansão multipolar

Pode-se simplificar ainda mais o tensor energia-momento impondo que a velocidade típica v da fonte seja não relativística, ou seja

$$\lambda \sim \frac{v}{c} d \gg d. \quad (2.57)$$

onde $\lambda = \frac{\lambda}{2\pi}$ representa o comprimento de onda reduzido da onda gravitacional e d é o tamanho característico da fonte.

No regime de baixa velocidade, pode-se expandir a fonte da seguinte forma

$$T^{kl}(t - r + y \cdot n, y) \approx T_{kl}(t - r, y) + y^i n^i T_{kl,0}(t - r, y) + \frac{1}{2} y^i y^j n^i n^j T_{kl,00}(t - r, y) + \dots \quad (2.58)$$

e introduzir os momentos do tensor de estresse

$$S^{ij}(t) = \int d^3y T^{ij}(t, y), \quad (2.59)$$

$$S^{ijk}(t) = \int d^3y T^{ij}(t, y) y^k, \quad (2.60)$$

$$S^{ijkl}(t) = \int d^3y T^{ij}(t, y) y^k y^l. \quad (2.61)$$

Inserindo essas expressões na Equação (2.55), obtém-se

$$h_{ij}^{TT}(t, x) = 4\Lambda_{ijkl} \frac{1}{r} \left[S^{kl} + n^m \dot{S}^{klm} + \frac{1}{2} n_m n_p \ddot{S}^{klmp} + \dots \right]_{\text{ret}}, \quad (2.62)$$

onde a expressão dentro dos colchetes $[\dots]_{\text{ret}}$ é avaliada no tempo retardado $u = t - r$. Como $y^k \sim O(d)$ e a derivada temporal é da ordem de $O(\omega)$, onde ω é a frequência característica da fonte, cada ordem sucessiva na Equação (2.62) adiciona um fator de v/c em relação à ordem anterior. Em outras palavras, foi realizada uma expansão em potências de v/c .

Lembre-se de que, na teoria linearizada, a conservação da energia e do momento é dada por

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.63)$$

Portanto, podemos utilizar os momentos da densidade de energia (M) e do momento linear (P)

$$M = \int d^3y T^{00}(t, y), \quad P^i = \int d^3y T^{0i}(t, y), \quad (2.64)$$

$$M^i = \int d^3y T^{00}(t, y) y^i, \quad P^{ij} = \int d^3y T^{0i}(t, y) y^j, \quad (2.65)$$

$$M^{ij} = \int d^3y T^{00}(t, y) y^i y^j, \quad P^{ijk} = \int d^3y T^{0i}(t, y) y^j y^k. \quad (2.66)$$

para reescrever os momentos do tensor de estresse.

Para as duas ordens mais baixas, podemos escrever

$$S^{ij} = \frac{1}{2} \dot{M}^{ij}, \quad (2.67)$$

$$\dot{S}^{ijk} = \frac{1}{6} \ddot{M}^{ijk} + \frac{1}{3} \left(\ddot{P}^{ijk} + \ddot{P}^{jik} - 2\ddot{P}^{kij} \right). \quad (2.68)$$

2.5.2 Momento de Massa Quadrupolar

Analisando com mais detalhes a ordem dominante da expansão multipolar. A partir das Equações (2.62) e (2.67), podemos escrever a perturbação da métrica como

$$[h_{ij}^{TT}(t, x)]_{\text{quad}} = \frac{2}{r} \Lambda_{ijkl} \ddot{M}^{kl}(u). \quad (2.69)$$

onde Λ_{ijkl} é o operador de projeção definido na Equação (2.52), e $u = t - r$ representa o tempo retardado. Essa ordem líder é comumente referida como radiação quadrupolar de massa.

Podemos reescrever a Equação (2.69) em termos do momento quadrupolar reduzido

$$Q_{ij} \equiv M_{ij} - \frac{1}{3} \delta^{ij} M_{kk} \quad (2.70)$$

de modo que a perturbação métrica pode ser expressa como

$$[h_{ij}^{TT}(t, x)]_{quad} = \frac{2}{r} \Lambda_{ijkl} \ddot{Q}^{kl}(u) \equiv \frac{2}{r} \ddot{Q}_{ij}^{TT}(u) \quad (2.71)$$

Aqui, utilizamos o fato de que $\Lambda_{ijkl} \ddot{M}_{kl} = \Lambda_{ijkl} \ddot{Q}_{kl}$, pois o segundo termo na Equação (2.70) se anula sob a operação de Λ_{ijkl} .

Agora, podemos determinar as expressões para as polarizações h_+ e h_\times . Primeiramente, definimos um sistema de coordenadas cartesianas tal que n_i coincida com o eixo z . Avaliando a Equação (2.71) e comparando-a com a Equação (2.30), concluímos que:

$$h_+ = \frac{1}{r} (\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22}), \quad (2.72)$$

$$h_\times = \frac{2}{r} \ddot{M}_{12}. \quad (2.73)$$

2.5.3 Radiação quadrupolar de sistemas binários

Considere duas massas, m_1 e m_2 , em órbita circular em torno do centro de massa, com frequência angular Ω (usaremos $\omega \equiv \Omega$ adiante). A distância entre as massas é R (raio orbital relativo; para órbita circular, R é constante) e a distância ao observador é r . Adotaremos, ao longo desta subseção, unidades geométricas $G = c = 1$; quando necessário, restauraremos os fatores de G e c .

Definimos um sistema de coordenadas cartesianas de forma que

- i) O observador está na direção do eixo z ;
- ii) O plano orbital intersecta o eixo x ;
- iii) A origem coincide com o centro de massa (CM) do sistema binário.

O ângulo ι representa a inclinação entre o normal ao plano orbital e a linha de visão do observador. Uma visão esquemática é mostrada na Figura 4.

Nesse sistema de coordenadas, as posições das massas são dadas por

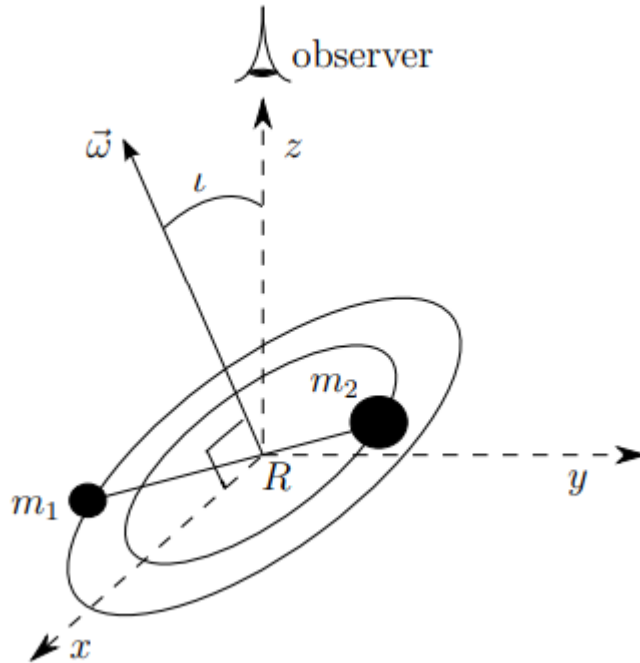
$$y_1(t) = \frac{\mu}{m_1} R \hat{e}(t), \quad (2.74)$$

$$y_2(t) = -\frac{\mu}{m_2} R \hat{e}(t). \quad (2.75)$$

onde $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ é a massa reduzida e o vetor unitário $\hat{e}(t)$ é dado por

$$\hat{e}(t) = (\cos(\omega t), \cos(\iota) \sin(\omega t), \sin(\iota) \sin(\omega t)). \quad (2.76)$$

Figura 4 – Visão esquemática de um sistema binário com massas componentes m_1 e m_2 , separação R e frequência orbital ω . A direção do observador define o eixo z . O ângulo entre a normal ao plano orbital e a direção do observador é a inclinação ι .



Fonte: Li [47].

Para simplicidade, consideramos apenas a radiação proveniente do momento quadrupolar de massa, que é dado por

$$M^{ij}(t) = \int d^3y T^{00}(t, y) y^i y^j. \quad (2.77)$$

Aproximamos esse termo como

$$M^{ij}(t) \approx \int d^3y [m_1 \delta(y - y_1) + m_2 \delta(y - y_2)] y^i y^j. \quad (2.78)$$

Isso nos dá a seguinte matriz para o momento quadrupolar

$$M_{ij} = \mu R^2 \begin{pmatrix} \cos^2 \omega t & \cos \iota \cos \omega t \sin \omega t \\ \cos \iota \cos \omega t \sin \omega t & \cos^2 \iota \sin^2 \omega t \end{pmatrix}. \quad (2.79)$$

Essa matriz descreve a evolução temporal do momento quadrupolar da massa em um sistema binário, essencial para calcular a radiação gravitacional emitida.

Inserindo essas expressões nas Equações. (2.72) e (2.73), obtemos:

$$h_+ = \frac{4\mu R^2 \omega^2}{r} \left(\frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \right) \cos(2\omega t_{\text{ret}}), \quad (2.80)$$

$$h_{\times} = \frac{4\mu R^2 \omega^2}{r} \cos \iota \sin(2\omega t_{\text{ret}}). \quad (2.81)$$

Finalmente, assumimos que as duas massas estão suficientemente afastadas e usamos a força centrípeta newtoniana para expressar R em termos de ω , m_1 e m_2 . Para m_1 , temos

$$\frac{m_1 (R\mu/m_1)^2 \omega^2}{R\mu/m_1} = \frac{m_1 m_2}{R^2} \quad (2.82)$$

e existe uma expressão análoga para m_2 .

Resolvendo para R e definindo a massa de *chirp*.

$$M_c = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}} \quad (2.83)$$

podemos reescrever as equações para as polarizações como

$$h_{+} = \frac{4M_c^{5/3} \omega^{2/3}}{r} \left(\frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \right) \cos(2\omega t), \quad (2.84)$$

$$h_{\times} = \frac{4M_c^{5/3} \omega^{2/3}}{r} \cos \iota \sin(2\omega t). \quad (2.85)$$

Podemos notar que a radiação gravitacional emitida é monocromática e possui amplitude constante. Além disso, a fonte irradia em duas vezes a frequência orbital. Isso pode ser explicado observando que o momento quadrupolar na Equação (2.79) é invariante sob a transformação $y^i \rightarrow -y^i$.

No entanto, esse resultado é válido apenas para a radiação quadrupolar dominante, associada ao modo $(\ell, m) = (2, 2)$, cuja frequência é $\omega_{\text{gw}} \simeq 2\Omega$ (sendo Ω a frequência orbital). Quando correções de ordem superior⁴ são incluídas na Equação (2.83), o sinal deixa de ser puramente quadrupolar e passa a conter uma *série de harmônicos* em múltiplos inteiros da frequência orbital, $\omega_n = n\Omega$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Esses harmônicos correspondem, no formalismo

⁴O que significam harmônicos de “maior” e “menor” ordem:

- *No sentido do índice harmônico n* : maior ordem significa n maior (componentes em frequências mais altas: $3\Omega, 4\Omega, \dots$); menor ordem significa n mais próximo do dominante (tipicamente 2Ω ; com excentricidade/precessão, pode surgir também 1Ω).
- *No sentido pós-newtoniano (PN)*: maior ordem PN refere-se a correções em potências mais altas de v/c na amplitude/fase, que suprimem os modos subdominantes longe da fusão e os tornam relevantes à medida que v/c cresce (isto é, perto do *merger*). Menor ordem PN corresponde ao termo newtoniano dominante (quadrupolar).

Operacionalmente, os harmônicos de ordem superior enriquecem a morfologia do *chirp*, melhorando a estimação de parâmetros (inclinação, razão de massas e distância) e a localização no céu, além de estender a sensibilidade para sistemas não face-on e com massas muito desiguais. Em contraparte, em binárias quase circulares, não precessantes e de massas quase iguais, os harmônicos ímpares tendem a ser fortemente suprimidos e o modo $(2, 2)$ domina a emissão.

de decomposição em harmônicos esféricos de *spin* -2 , aos diversos modos $h_{\ell m}(t)$ que compõem o sinal observado:

$$h(t; \iota, \phi_0) = \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell m}(t) e^{-im\Phi(t)} {}_{-2}Y_{\ell m}(\iota, \phi_0) / D_L, \quad (2.86)$$

onde $\Phi(t)$ é a fase orbital, D_L é a distância luminosa, e ${}_{-2}Y_{\ell m}$ codifica a dependência angular (inclinação ι e fase ϕ_0).

Para órbitas quase circulares e sem precessão, o índice harmônico coincide com $n = |m|$, de modo que o modo dominante $(2, 2)$ produz o termo de frequência 2Ω , ao passo que modos subdominantes como $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(2, 1)$, $(3, 2)$ etc. introduzem harmônicos em 3Ω , 4Ω , 1Ω , 2Ω , respectivamente. Na prática, a visibilidade desses termos depende (i) da razão de massas q , (ii) da inclinação ι (modos subdominantes são mais salientes em sistemas quase rasantes, *edge-on*), e (iii) de excentricidade e/ou precessão, que podem ativar harmônicos ímpares e quebrar cancelamentos de simetria.

Na realidade, as massas não permanecem em órbitas circulares fixas. À medida que a energia orbital é irradiada através da emissão de ondas gravitacionais (GWs), a separação entre as massas diminui, fazendo com que a velocidade angular ω aumente. Isso resulta na emissão de ondas gravitacionais com frequência e amplitude crescentes, um efeito conhecido como *chirp*, que dá nome à massa de *chirp* definida na Equação (2.83).

Até este ponto, analisamos as propriedades das ondas gravitacionais no contexto da teoria linearizada da Relatividade Geral, que é suficiente para descrever a radiação emitida por fontes lentas e fracas no regime de campo distante [48]. No entanto, à medida que o sistema binário se aproxima da fusão, as velocidades tornam-se relativísticas e os campos gravitacionais tornam-se fortes, exigindo um tratamento completo das equações de Einstein [29]. Para descrever corretamente a fase final de coalescência, são necessários métodos numéricos e analíticos avançados, como aproximações pós-newtonianas de alta ordem e simulações de relatividade numérica [49, 50].

3 DETECÇÕES DE ONDAS GRAVITACIONAIS

No contexto histórico das detecções das ondas gravitacionais, destaca-se que, em 1917, o matemático alemão David Hilbert aprofundou-se nos estudos sobre ondas gravitacionais decorrentes das soluções da teoria de Einstein [51]. Entretanto, embora a existência das ondas gravitacionais fosse uma consequência teórica bem estabelecida da Relatividade Geral, sua detecção experimental direta e a observação da perda de energia por radiação gravitacional permaneceram por décadas além do alcance tecnológico disponível

Dessa forma, somente em 1918, Einstein apresentou a conhecida equação do quadrupolo, usada como artifício matemático para elucidar a perda de energia na Teoria da Relatividade Geral [2, 52]. Não obstante, alguns anos depois, em 1935, o renomado físico Paul Dirac, estudou uma forma de quantizar as ondas gravitacionais, admitindo uma partícula teórica denominada por gráviton [53].

As lentes gravitacionais foram previstas na Teoria da Relatividade de Albert Einstein antes de serem observadas pelos modernos telescópios. Este efeito foi observado pela primeira vez em 1919, durante um eclipse total do Sol [54]. Com a possibilidade do desvio da luz devido à ação do campo gravitacional de uma estrela, o conceito de lente gravitacional foi formalizado como consequência da distorção no espaço-tempo causada pela presença de um corpo de grande quantidade de massa entre um objeto e um observador [55]. Este foi um testes bem sucedidos da Relatividade.

As soluções de ondas planas exatas das ondas gravitacionais foram encontradas, em 1959, por Bondi Felix, A. E. Pirani e I. Robinson [56]. Até que, na década de 1960, os astrofísicos descobriram e começaram a estudar um novo tipo de objeto cósmico, o pulsar. Os cientistas também iniciaram o trabalho em instrumentos para a detecção das ondas gravitacionais [57]. Entretanto, apesar de todo o trabalho e desenvolvimento teórico, os físicos do século XX não tiveram sucesso na detecção das ondas gravitacionais previstas por Einstein.

Anos depois, os cientistas Russel Hulse e Joseph Taylor Jr, demonstraram pela primeira vez a evidência indireta da existência das ondas gravitacionais [3] que lhes renderam o prêmio Nobel de física em 1993. Eles observaram, em 1974, duas estrelas de nêutrons orbitando cada vez mais rápido, exatamente o que seria esperado se as estrelas binárias de nêutrons estivessem perdendo energia na forma de ondas gravitacionais. Essa emissão de radiação de acordo com a Relatividade Geral foi verificada com estudos observacionais de alta precisão [5].

Um século após a previsão de Einstein, houve a primeira observação direta das ondas gravitacionais, realizada em 14 de setembro de 2015, e só então anunciada, através das colaborações do Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO) e VIRGO [58],

em 11 de fevereiro de 2016 [7, 9, 29]. A distorção do espaço-tempo associada a uma onda gravitacional foi detectada simultaneamente pelos dois observatórios do LIGO, localizados em Hanford, no estado de Washington, e em Livingston, no estado da Louisiana (Estados Unidos da América). O sinal observado coincidiu com as previsões da Relatividade Geral para uma onda gravitacional gerada pela fusão de um sistema binário de buracos negros.

A primeira onda gravitacional detectada diretamente pelo LIGO foi denominada GW150914, onde a sigla GW refere-se a *Gravitational Wave* (onda gravitacional) e os números 150914 indicam a data do evento (14 de setembro de 2015). Esse sinal foi gerado pela coalescência de um sistema binário de buracos negros com massas estimadas em $29_{-4}^{+4}M_{\odot}$ e $36_{-4}^{+5}M_{\odot}$. Após a coalescência dos buracos negros, a massa total culminou em $63,1 M_{\odot}$, portanto, havendo energia de radiação de $3,1 M_{\odot}$ em forma de onda gravitacional [8], no qual ocorreu a uma distância de aproximadamente 430 Mpc ¹, demonstrando a existência de sistemas binários de buracos negros [29]. Observado pelos dois detectores do LIGO Avançado ou aLIGO [9], com uma significância estatística surpreendente de $5,1\sigma$ [7].

A principal dificuldade associada à detecção das ondas gravitacionais decorre do fato de que essas ondas produzem perturbações extremamente pequenas na geometria do espaço-tempo. Do ponto de vista teórico, tais perturbações são descritas pelo tensor $h_{\mu\nu}$, que caracteriza a amplitude da onda gravitacional e sua polarização. No entanto, essa quantidade não é acessada diretamente pelos detectores interferométricos.

Experimentalmente, o observável físico medido é a deformação relativa (*strain*) induzida pela passagem da onda gravitacional, definida como $h(t) = \Delta L(t)/L$, onde $\Delta L(t)$ representa a variação diferencial dos comprimentos dos braços do interferômetro de comprimento L . Essa grandeza é adimensional e, para eventos astrofísicos típicos observáveis na Terra, assume valores característicos da ordem de $h_{\mu\nu} \sim 10^{-21}$. Dessa forma, embora a amplitude da onda gravitacional esteja relacionada à intensidade da perturbação do espaço-tempo gerada na fonte, o *strain* corresponde à resposta efetiva do detector a essa perturbação, estabelecendo a conexão entre a descrição teórica das ondas gravitacionais e sua observação experimental.

A interação gravitacional é intrinsecamente muito fraca e, conseqüentemente, para que os efeitos das ondas gravitacionais sejam observáveis, é necessária a ocorrência de eventos envolvendo grandes quantidades de massa e energia. Entre esses eventos destacam-se as explosões estelares de supernovas, bem como os sistemas binários compactos formados por pares de estrelas de nêutrons ou pela fusão de buracos negros, que constituem algumas das fontes mais intensas de radiação gravitacional. Nesse contexto, a detecção direta das ondas gravitacionais fornece evidência observacional robusta da existência de sistemas binários de buracos negros e valida, de forma independente, as previsões fundamentais das teorias relativísticas

¹Um parsec (pc) é aproximadamente igual a 31 trilhões de quilômetros e equivale a cerca de 3,3 anos-luz.

da gravitação. Ademais, todas as teorias de gravitação relativísticas consistentes preveem a existência de ondas gravitacionais como consequência dinâmica da geometria do espaço-tempo [59, 60].

3.1 O LIGO

O *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory* (LIGO) é um projeto oficialmente fundado em 1992 por Kip Thorne e Ronald Drever, do Instituto de Tecnologia da Califórnia (Caltech), e Rainer Weiss, do Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT). Com financiamento da *National Science Foundation* (NSF), os locais e os detectores do LIGO foram projetados por cientistas e engenheiros dessas duas instituições. Entre novembro de 2005 e setembro de 2007, o LIGO operou em sua sensibilidade de projeto em modo contínuo de coleta de dados, durante a chamada fase *Science Run 5* [61].

Como ilustrado na Figura 2, o padrão de tensão quadrupolar oscilante de uma onda gravitacional é bem compatível com um interferômetro de Michelson, que realiza uma comparação extremamente sensível dos comprimentos dos seus dois braços ortogonais.

O LIGO opera com dois observatórios geograficamente distintos (ver Figura 5). O observatório de Hanford, localizado no estado de Washington, abriga o interferômetro H1, com braços de 4 km de comprimento, enquanto o observatório de Livingston, situado na Louisiana, abriga o interferômetro L1, também com braços de 4 km. Esses detectores possuem o mesmo princípio de funcionamento interferométrico, porém apresentam orientações diferentes, o que resulta em padrões distintos de resposta às polarizações das ondas gravitacionais.

O uso de múltiplos detectores em locais geograficamente separados é fundamental para a identificação confiável de sinais astrofísicos, pois permite a rejeição de artefatos instrumentais e ruídos ambientais por meio da coincidência temporal entre os instrumentos. Com apenas dois observatórios operando simultaneamente, a localização das fontes de ondas gravitacionais no céu não é única, sendo inicialmente restrita a regiões compatíveis com a diferença de tempo de chegada do sinal entre os detectores de Hanford e Livingston. Essa degenerescência pode ser parcialmente reduzida pela combinação das informações de tempo, amplitude e padrões de resposta dos interferômetros. A determinação mais precisa da posição da fonte no céu requer a operação conjunta de três ou mais detectores geograficamente separados.

É importante notar que a sensibilidade dos detectores LIGO variou e melhorou significativamente ao longo do tempo. O LIGO Avançado, por exemplo, opera numa faixa de frequência mais ampla e com maior sensibilidade geral, que geralmente se estende de cerca de 10 Hz a 10000 Hz, com capacidade para detectar amplitudes de deformação do espaço-tempo tão pequenas quanto 10^{-21} [63].

Figura 5 – Observatórios do LIGO em Hanford, Washington e Livingston, Louisiana. Os lasers e os elementos ópticos estão contidos nos grandes edifícios de esquina. De cada edifício de esquina, tubos de feixe evacuados se estendem em ângulos retos por 4 km em cada direção os tubos são cobertos pelos recintos de concreto.



LIGO Hanford H1.

LIGO Livingston L1.

Fonte: LIGO [62].

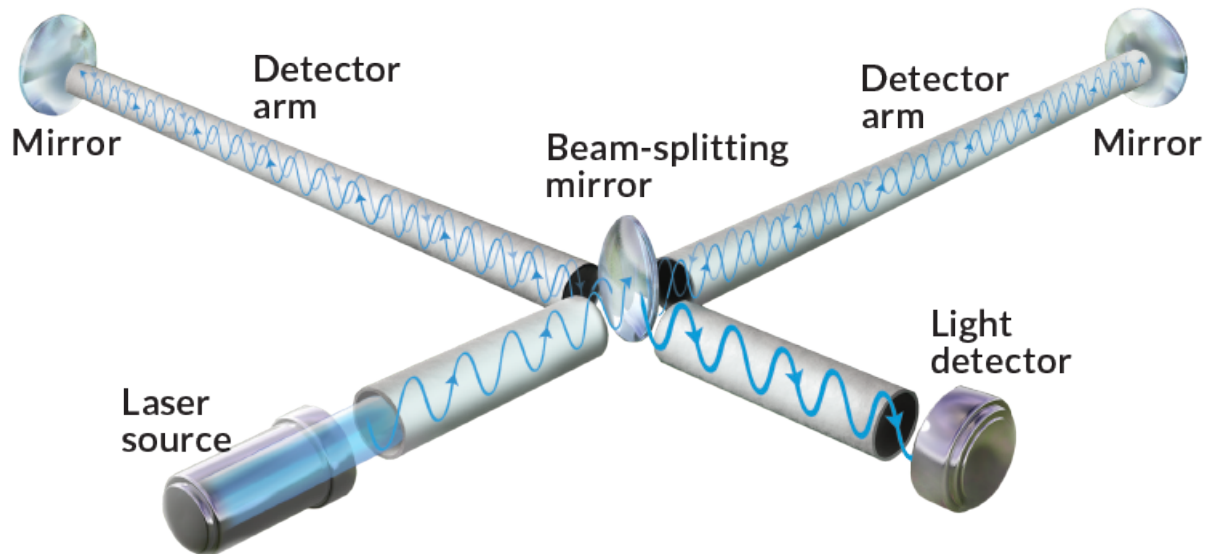
Em 11 de fevereiro de 2016, o LIGO anunciou a primeira detecção direta de ondas gravitacionais, um evento histórico na física moderna [29]. Subsequentemente, novas detecções foram publicadas: em 15 de junho de 2016 [64], e ainda outra em 1° de junho de 2017 [58].

A Figura 6 apresenta o esquema óptico avançado do interferômetro LIGO, detalhando o percurso da luz laser desde sua emissão até a saída do sinal detectado. O feixe de luz é inicialmente filtrado pelo limpador de modo de entrada para garantir a pureza do modo espacial, antes de ser amplificado na cavidade de reciclagem de energia, aumentando a potência efetiva no interferômetro. A seguir, o feixe é dividido em dois caminhos perpendiculares por um divisor de feixe, propagando-se por braços de 4 km, refletido múltiplas vezes entre as massas de entrada e as massas de teste final, que atuam como espelhos suspensos e isolados de vibrações externas. As variações relativas no comprimento desses braços, causadas pela passagem de uma onda gravitacional, geram um padrão de interferência que pode ser extraído na saída por meio do espelho de reciclagem de sinal e do limpador de modo de saída.

Esse arranjo óptico confere ao Advanced LIGO (aLIGO) a extraordinária sensibilidade necessária para detectar deformações relativas extremamente pequenas no espaço-tempo, da ordem de 10^{-21} , induzidas pela passagem de ondas gravitacionais. O observável físico medido corresponde à deformação relativa dos braços do interferômetro, permitindo converter perturbações geométricas microscópicas em variações detectáveis no padrão de interferência do feixe laser.

Os detectores do aLIGO apresentam sensibilidade efetiva em uma ampla faixa de frequências, que se estende aproximadamente a partir de 10 Hz a 10 kHz, sendo essa a faixa instrumental característica dessa geração de detectores. Essa banda é particularmente adequada para a detecção de sinais provenientes de sistemas binários compactos, como fusões de buracos

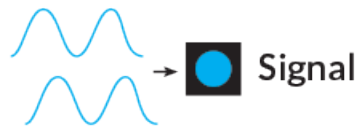
Figura 6 – Esquema óptico avançado do LIGO. A luz viaja do laser através do limpador de modo de entrada para a cavidade de reciclagem de energia. A luz é dividida no divisor de feixe e, em seguida, entra nos dois braços longos de 4 km formadas pelas massas de entrada e teste final. Qualquer sinal sai pelo espelho de reciclagem de sinal e pelo limpador do modo de saída.



Normal situation



Gravitational wave detection



Fonte: Science News [65].

negros e estrelas de nêutrons, cujas assinaturas gravitacionais dominam esse intervalo espectral.

Em operação conjunta com outros interferômetros terrestres, como o Virgo, localizado na Europa, cuja sensibilidade efetiva inicia-se tipicamente a partir de algumas dezenas de hertz ($\sim 20\text{--}30$ Hz) e se estende até alguns quilohertz, alcançando da ordem de 6 kHz, essas instalações compõem uma rede global de detecção de ondas gravitacionais. A contribuição conjunta desses detectores torna-se particularmente relevante acima de algumas dezenas de hertz, onde a relação sinal-ruído melhora significativamente e permite uma caracterização mais adequada dos eventos observados [66].

Além do aLIGO e do Virgo, a rede atual e futura de detectores inclui o KAGRA, no Japão, já em operação [67], e o LIGO-India, previsto para entrar em funcionamento nos próximos anos [68]. A expansão dessa rede global é fundamental para melhorar a sensibilidade conjunta, reduzir regiões degeneradas de localização no céu e permitir uma reconstrução mais precisa das propriedades físicas das fontes de ondas gravitacionais, por meio da combinação de informações temporais, amplitudes relativas e padrões de resposta dos diferentes interferômetros.

3.2 O Evento GW150914

O evento GW150914 constitui o primeiro sinal de onda gravitacional detectado diretamente por interferômetros terrestres e representa um marco experimental fundamental para a astrofísica relativística. O sinal foi registrado pelos detectores do LIGO em 14 de setembro de 2015, às 09:50:45 UTC, e anunciado oficialmente pela LIGO Scientific Collaboration em 11 de fevereiro de 2016.

A análise do sinal indica que ele foi gerado pela coalescência de um sistema binário de buracos negros, com massas estimadas em aproximadamente $35,6M_{\odot}$ e $30,5M_{\odot}$, resultando na formação de um único buraco negro com massa final da ordem de $63,1M_{\odot}$. A diferença de cerca de $3,1M_{\odot}$ foi convertida em energia gravitacional radiada sob a forma de ondas gravitacionais durante o processo de fusão [69].

O sinal observado apresentou duração de aproximadamente 0,2 segundos e exibiu uma evolução característica em frequência e amplitude, compatível com as previsões da Relatividade Geral para as fases de inspiral, fusão e *ringdown* de sistemas binários de buracos negros. Nesse breve intervalo, uma fração significativa da massa total do sistema foi convertida em energia gravitacional, resultando na liberação de uma quantidade de energia comparável, em ordem de grandeza, à luminosidade combinada de todas as estrelas do universo observável durante o mesmo intervalo de tempo.²

O sinal propagou-se predominantemente em uma faixa de frequências compreendida entre aproximadamente 35 Hz e 250 Hz, produzindo um deslocamento físico efetivo dos espelhos interferométricos da ordem de 10^{-18} m.³

A análise da forma de onda observada, em comparação com os modelos previstos pela Relatividade Geral, indicou que a fonte estava localizada a uma distância de aproximadamente 410 Mpc, correspondente a cerca de 1,34 bilhão de anos-luz [69]. Como análise complementar aos procedimentos padrão, estudos recentes mostraram que a série temporal do evento GW150914 apresenta estrutura multiescala e comportamento não-extensivo, sendo bem descrita por uma distribuição q-Gaussiana de Tsallis. Além disso, sua dinâmica pode ser caracterizada pelo *q*-triplete $(q_{\text{stat}}, q_{\text{sen}}, q_{\text{rel}})$, cujos índices servem como parâmetros estatísticos para identificar a frequência dominante durante o processo de coalescência [21].

A forma de onda do evento GW150914 foi registrada simultaneamente pelos detectores de Hanford e Livingston, como ilustrado na Figura 7. Os dados brutos passam inicialmente

²Embora as ondas gravitacionais não sejam visíveis nem audíveis, sua frequência situar-se-ia na faixa audível caso fossem ondas sonoras.

³Para o evento GW150914, o valor típico da deformação relativa do espaço-tempo foi da ordem de $h \sim 10^{-21}$, onde *h* é uma grandeza adimensional conhecida como *strain*. Considerando que os braços do interferômetro do LIGO possuem comprimento $L = 4\text{Km} = 4 \times 10^3$ m, a variação absoluta correspondente pode ser estimada por $\Delta L \approx hL$, $\Delta L \approx h \cdot L = 10^{-21} \times 4 \times 10^3 = 4 \times 10^{-18}$ m.

por um processo de branqueamento, no qual o espectro do sinal é dividido pela curva de sensibilidade do detector e transformado de volta para o domínio do tempo, permitindo a visualização tanto do ruído quanto do sinal. Em seguida, técnicas consolidadas, como o filtro casado, são aplicadas para comparar os sinais com um banco de formas de onda modeladas pela relatividade geral, verificando assim o grau de correspondência.

Como extensão a esses métodos tradicionais, abordagens não lineares e não extensivas têm sido aplicadas ao GW150914, evidenciando multifractalidade e q -estatística no sinal. Nesse enquadramento, o q -tripleto de Tsallis resume a sensibilidade às condições iniciais e a dinâmica de relaxamento do traço [21].

Conforme mostra a Figura 7, que exibe o dado tratado, a curva vermelha representa a previsão teórica da relatividade geral, enquanto a curva cinza corresponde ao sinal efetivamente detectado, havendo excelente concordância entre ambos.

Os ruídos nos detectores são pequenas perturbações causadas por efeitos ambientais ou flutuações internas do próprio instrumento, que podem mimetizar padrões semelhantes aos das ondas gravitacionais. A chave para distinguir ruído de sinais reais está no uso de múltiplos detectores: apenas um verdadeiro sinal gravitacional aparece em ambos os detectores com o intervalo de tempo exato correspondente à velocidade da luz entre os locais [69].

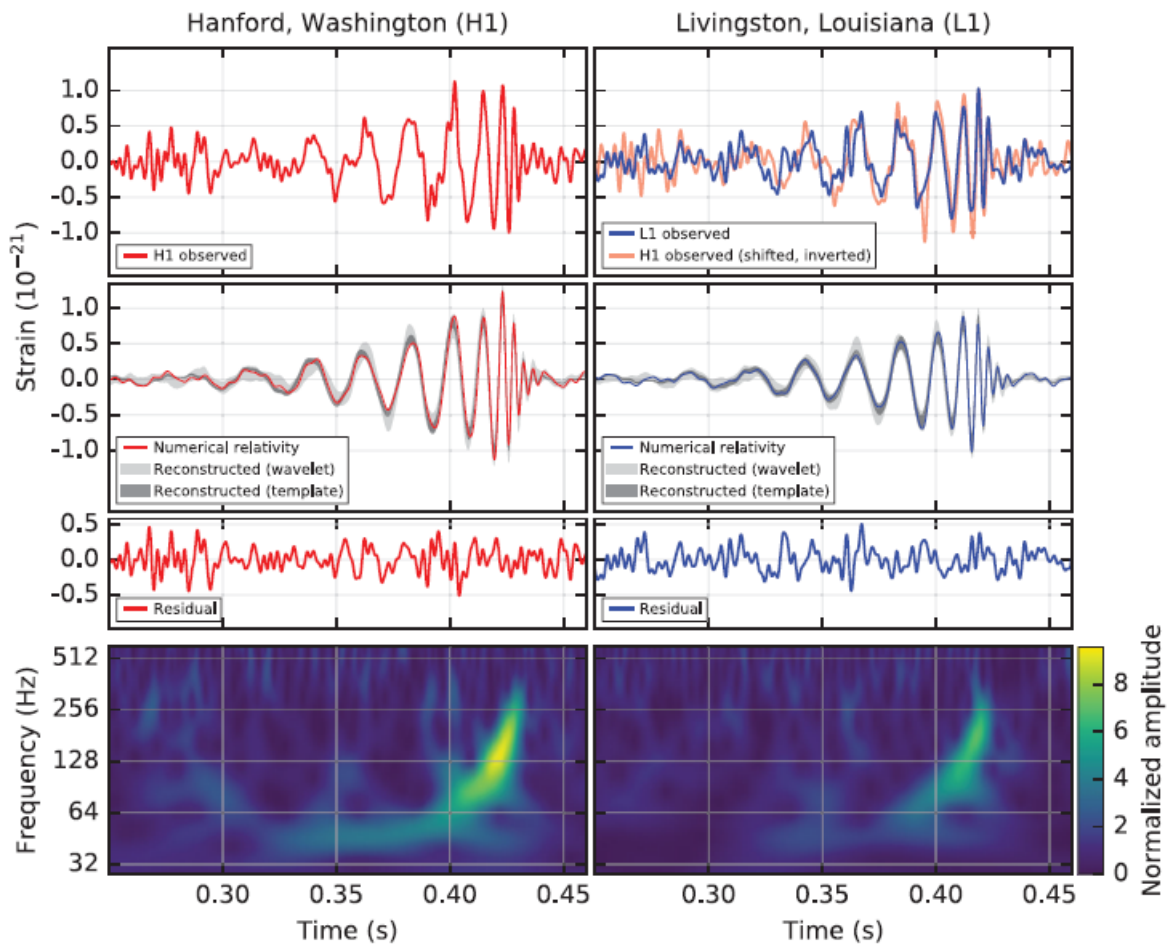
O evento GW150914, detectado pelo LIGO, corresponde com maior precisão a um sistema binário composto por dois buracos negros. O sinal mais compatível com os dados foi identificado utilizando o banco de templates gerados por simulações de relatividade numérica. A relação sinal-ruído (SNR) para esse evento foi significativamente alta, e a curva de sensibilidade do aLIGO só começa a responder a partir de aproximadamente 30 Hz.

A deformação relativa do espaço-tempo, representada por h strain, é uma combinação linear dos dois modos de polarização da onda gravitacional, h_+ e h_x , conforme definido nas Equações (2.84) e (2.85).

Essa deformação corresponde a uma variação no comprimento dos braços de 4 km dos interferômetros LIGO da ordem de 10^{-18} m, ou seja, cerca de mil vezes menor que o raio de um próton, uma precisão metrológica sem precedentes na Física experimental [29]. A frequência de pico do sinal atingiu cerca de 150 Hz, e a velocidade orbital final dos buracos negros antes da fusão foi estimada em 60% da velocidade da luz. Além disso, a separação entre os objetos compactos nesse instante pode ser expressa em termos do raio de Schwarzschild, que representa o horizonte de eventos de um buraco negro (ver a Figura 8). Para referência, o raio de Schwarzschild de um buraco negro com massa igual à do Sol é de aproximadamente 3 km. Assim, os buracos negros envolvidos, com massas de cerca de 29 e 36 massas solares, possuem raios de Schwarzschild aproximados de 90 km e 110 km, respectivamente⁴.

⁴Para comparação, o raio do Sol é de aproximadamente 700.000 km.

Figura 7 – O evento de onda gravitacional GW150914 foi observado simultaneamente pelos detectores do LIGO em Hanford (canto superior esquerdo) e em Livingston (canto superior direito). Esses sinais são comparados com as previsões teóricas (linha inferior) para a fusão de dois buracos negros com massas estimadas em 29 e 36 massas solares, localizados a cerca de 1,3 bilhão de anos-luz da Terra. Na terceira linha, é apresentada a forma residual, obtida pela subtração da forma de onda teórica, gerada por simulações de relatividade numérica, dos dados observacionais filtrados. Essa etapa é fundamental para verificar a compatibilidade entre a observação e os modelos baseados na relatividade geral. Na quarta linha, duas representações espectrotemporais mostram como a tensão da onda gravitacional variou ao longo do tempo em cada detector. Os gráficos apresentam a evolução da frequência da onda gravitacional (em hertz) em função do tempo (em segundos). Ambas as representações exibem uma nítida varredura ascendente de frequência, o chamado *chirp*, partindo de cerca de 35 Hz e atingindo aproximadamente 150 Hz ao longo de 0,2 segundo.

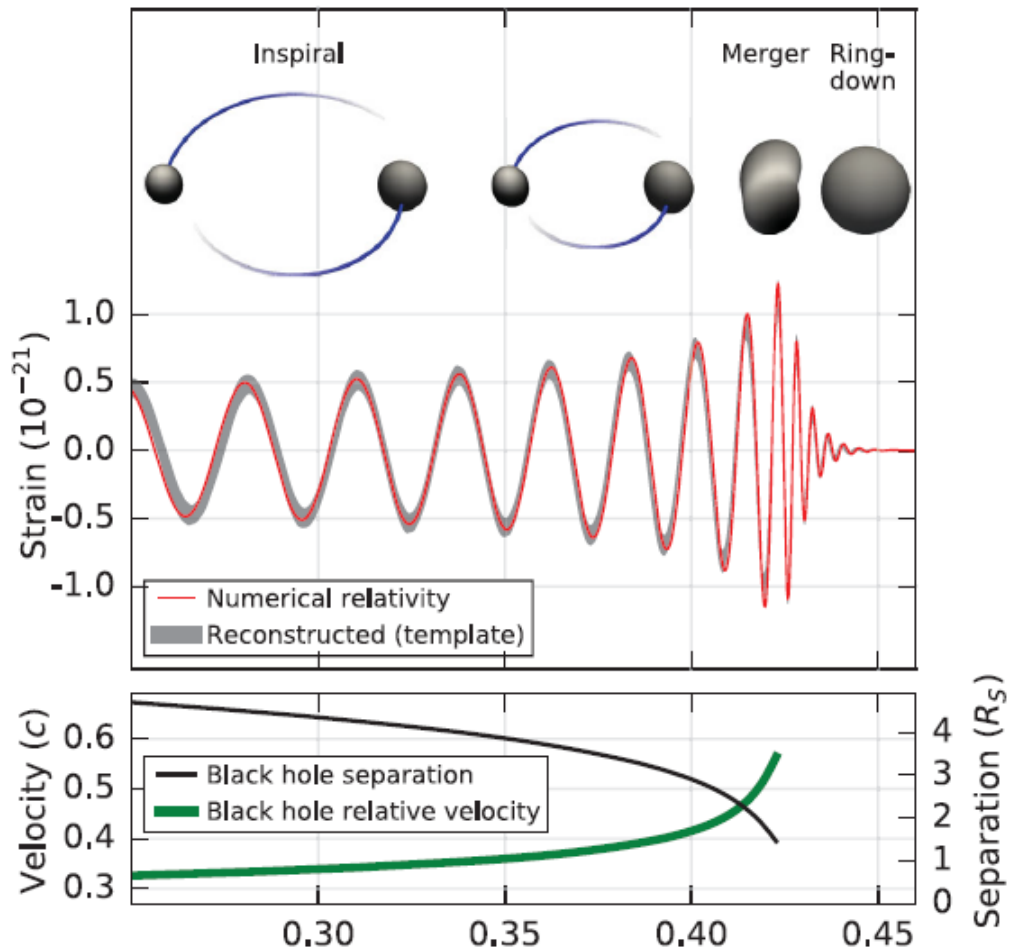


Fonte: Abbott et al. [29].

3.3 Fontes e tipos de ondas gravitacionais

Tecnicamente falando, ondas gravitacionais são de fato produzidas por qualquer massa em aceleração, incluindo objetos do cotidiano. No entanto, as ondas gravitacionais geradas por massas tão pequenas na Terra são fracas demais para serem detectadas com a tecnologia atual. Para observar ondas gravitacionais significativas, os pesquisadores precisam observar eventos cósmicos muito além do nosso sistema solar, onde corpos massivos sofrem acelerações

Figura 8 – No topo: Amplitude de deformação relativa da onda gravitacional estimada de GW150914 projetado em H1. Abaixo: A separação efetiva de buracos negros em unidades de raios de Schwarzschild e a velocidade relativa efetiva dada pelo parâmetro pós-newtoniano.



Fonte: Abbott et al. [29].

extremas [70].

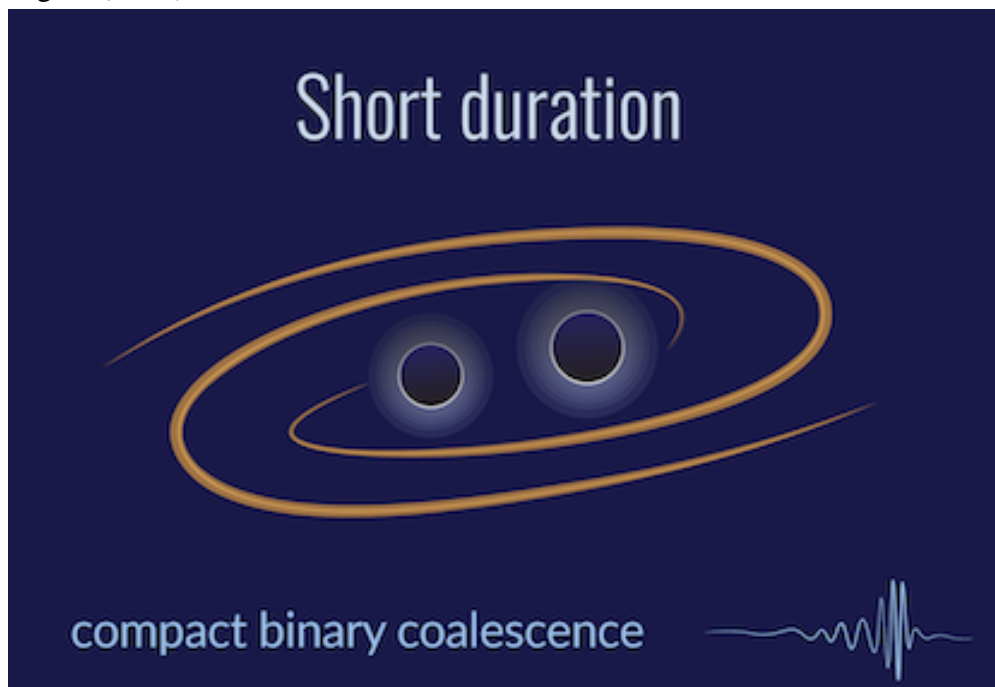
O Universo está repleto de objetos incrivelmente massivos que sofrem acelerações rápidas e geram ondas gravitacionais que agora podemos detectar. Tais objetos conhecidos são pares de buracos negros ou estrelas de nêutrons orbitando um ao outro, ou uma estrela de nêutrons e um buraco negro orbitando um ao outro, ou estrelas gigantes explodindo no fim de suas vidas. Os astrônomos definiram quatro categorias de ondas gravitacionais com base no objeto ou sistema que as gera: Contínua, Binária Compacta Inspiral, Estocástica e Explosiva [69, 71, 72]. Cada categoria de objetos gera um conjunto característico de sinais de ondas gravitacionais que os pesquisadores podem procurar nos dados do Observatório de Ondas Gravitacionais por Interferômetro a Laser da Fundação Nacional de Ciências dos EUA (NSF LIGO).

3.3.1 Ondas gravitacionais de binárias compactas em espiralamento

A primeira classe de eventos buscada pelo LIGO são as ondas gravitacionais de binárias compactas em espiralamento (*inspiral*). Até o momento, todas as detecções confirmadas pelo LIGO [73]/Virgo [74]/KAGRA [75] pertencem a essa categoria. Ondas gravitacionais binárias compactas inspirais são produzidas por pares de objetos massivos e densos (“compactos”) em órbita, como buracos negros e estrelas de nêutrons. Existem três subclasses de sistemas “binários compactos” nessa categoria:

- i) Estrela de nêutrons binária (BNS) - duas estrelas de nêutrons orbitando uma à outra;
- ii) Buraco Negro Binário (BBH) - Como ilustrado na Figura 9, durante a fase de *inspiral* a separação orbital do sistema binário diminui progressivamente em decorrência da emissão de ondas gravitacionais;
- iii) Binário Estrela de Nêutrons-Buraco Negro (NSBH) - uma estrela de nêutrons e um buraco negro orbitando um ao outro.

Figura 9 – Representação esquemática da fase de *inspiral* em um sistema binário compacto de buracos negros (BBH).



Fonte: Shanika Galaudage [76].

Cada binário cria um padrão característico de ondas gravitacionais que depende, entre outros fatores, das massas dos objetos componentes, da orientação orbital em relação à Terra e da distância à fonte. No entanto, o mecanismo físico responsável pela emissão de ondas nessas subclasses é comum a todos os casos e corresponde à fase denominada *inspiral*,

caracterizada por um movimento orbital acelerado em espiral, no qual a perda contínua de energia por radiação gravitacional conduz à aproximação progressiva dos componentes e ao aumento de suas frequências orbitais e de rotação (*spin*) [77].

Durante a fase de inspiral, a emissão contínua de ondas gravitacionais promove uma redistribuição do momento angular do sistema binário, resultando não apenas na redução da separação orbital, mas também na intensificação progressiva de sua dinâmica rotacional. Esse processo manifesta-se no aumento das frequências orbitais e no crescimento do spin efetivo dos objetos compactos à medida que o espiralamento se acelera.

Esse processo de aceleração do *spin* é análogo ao de um patinador artístico girando. Imagine que os punhos estendidos do patinador representam estrelas de nêutrons ou buracos negros, enquanto o corpo do patinador simboliza a força gravitacional que os mantém ligados. À medida que o patinador em rotação aproxima os punhos do corpo, isto é, à medida que os objetos orbitam cada vez mais próximos, o sistema passa a girar mais rapidamente, em decorrência da conservação do momento angular. Diferentemente do patinador, entretanto, pares de estrelas de nêutrons ou buracos negros não conseguem interromper sua rotação. O processo contínuo de emissão de ondas gravitacionais e a conseqüente redução do raio orbital desencadeiam uma seqüência irreversível de eventos que culmina, inevitavelmente, na coalescência dos dois objetos.

3.3.2 Ondas gravitacionais contínuas

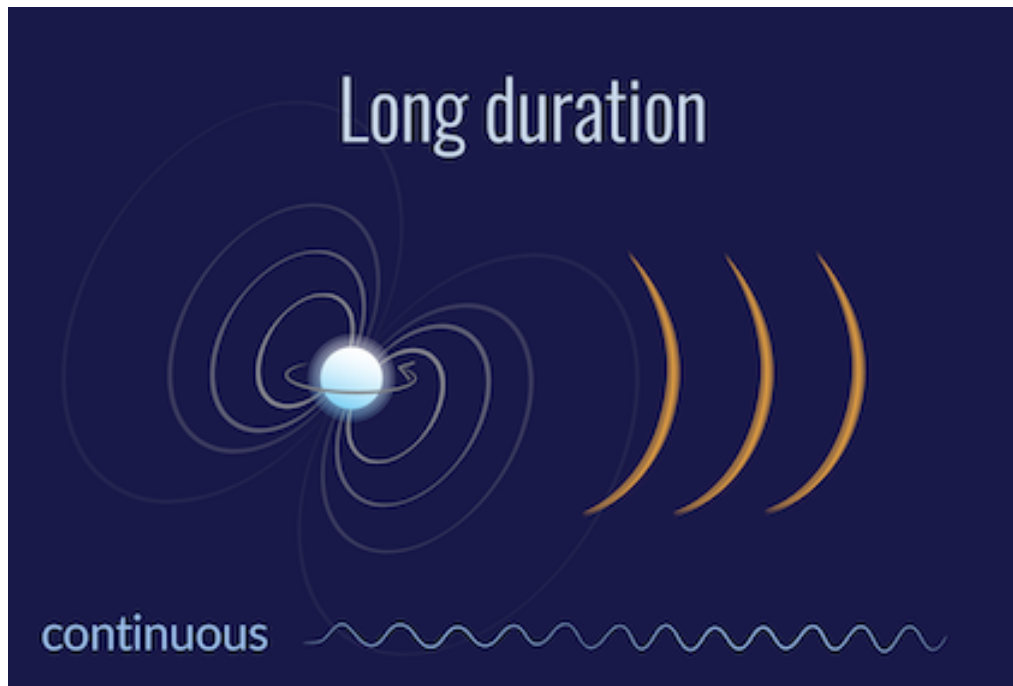
Espera-se que ondas gravitacionais contínuas sejam emitidas por objetos compactos isolados em rotação, em particular estrelas de nêutrons, conforme ilustrado na Figura 10. Esses objetos podem apresentar pequenas deformações estruturais ou irregularidades na distribuição de massa, frequentemente denominadas *mountains*, que os tornam ligeiramente assimétricos em relação ao seu eixo de rotação. Tal assimetria quebra a simetria axial do sistema e resulta em perturbações periódicas na curvatura do espaço-tempo, as quais se propagam na forma de ondas gravitacionais.

A emissão dessas ondas ocorre de maneira persistente enquanto a rotação do objeto se mantém estável. Nessa condição, a frequência das ondas gravitacionais está diretamente relacionada à frequência de rotação da estrela de nêutrons, enquanto a amplitude depende da magnitude da assimetria e da distância da fonte ao observador. Caso a taxa de rotação permaneça aproximadamente constante ao longo do tempo, o sinal gravitacional gerado apresenta frequência e amplitude quase invariáveis, caracterizando uma emissão contínua e estacionária do ponto de vista observacional.

Devido a essa estabilidade espectral e temporal, os sinais associados a esse tipo de fonte podem ser descritos como aproximadamente monocromáticos, em contraste com os

sinais transitórios observados em eventos de coalescência binária ou explosões astrofísicas. Essa característica distingue as ondas gravitacionais contínuas das demais classes de sinais e fundamenta sua denominação, além de motivar o desenvolvimento de estratégias específicas de busca baseadas na integração coerente de dados ao longo de longos intervalos de observação [78].

Figura 10 – Representação artística de uma estrela de nêutrons com rotação rápida e altamente magnetizada é um resultado possível da fusão de duas estrelas de nêutrons menores.



Fonte: Shanika Galaudage [76].

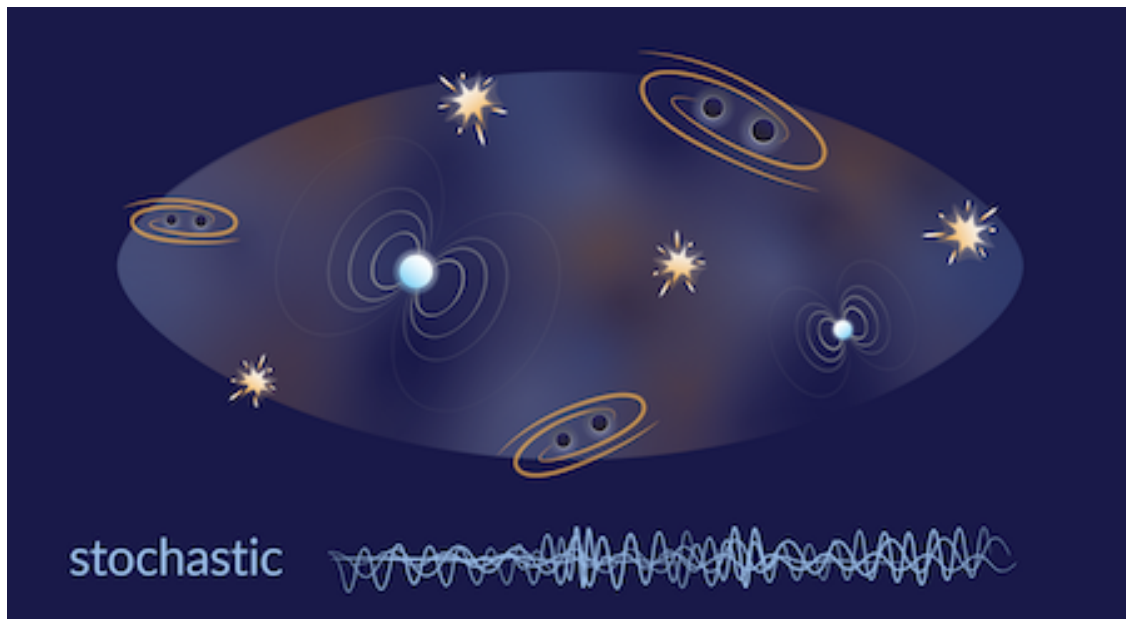
3.3.3 Ondas gravitacionais estocásticas

Os astrônomos preveem que existem fontes de ondas gravitacionais contínuas ou provenientes de sistemas binários em espiral no universo [79]. No entanto, os sinais individuais associados a essas fontes são, em sua maioria, extremamente fracos e difíceis de detectar isoladamente pelos interferômetros terrestres atuais. Como consequência, a probabilidade de que múltiplos sinais intensos e individualmente resolvíveis se sobreponham simultaneamente nos detectores do LIGO é baixa, reduzindo a possibilidade de confusão na identificação de eventos transitórios.

Entretanto, presume-se que inúmeras ondas gravitacionais de baixa intensidade estejam constantemente cruzando o espaço, provenientes de todas as direções do universo. Essas pequenas perturbações, geradas por várias fontes astrofísicas independentes, compõem o que é conhecido como fundo estocástico de ondas gravitacionais, como ilustrado na Figura 11. O termo “estocástico” refere-se a um padrão aleatório, que pode ser analisado estatisticamente,

mas não pode ser previsto com precisão.

Figura 11 – Representação esquemática do fundo estocástico de ondas gravitacionais gerado por múltiplas fontes astrofísicas distribuídas no Universo.



Fonte: Shanika Galaudage [76].

Esse fundo estocástico representa um dos tipos mais sutis e difíceis de detectar entre todos os sinais gravitacionais. No entanto, é possível que parte desse sinal tenha origem nos primeiros momentos após o Big Bang, oferecendo uma janela única para sondar a física do Universo primordial. Detectar ondas gravitacionais remanescentes dessa época nos permitiria acessar um período da história cósmica anterior ao que qualquer radiação eletromagnética pode revelar, indo além da radiação cósmica de fundo em micro-ondas [80].

3.3.4 Ondas gravitacionais explosivas

Ondas gravitacionais explosivas são associadas a fontes desconhecidas ou imprevisíveis, a exemplo das super-novas, como ilustra a Figura 12, onde são gerados sinais de curta duração. A busca por esse tipo de sinal exige uma abordagem metodológica altamente aberta, pois não se espera que essas ondas apresentem formas previamente modeladas ou previstas por teorias estabelecidas. Nesse contexto, as ferramentas de análise de dados do LIGO precisam ser capazes de reconhecer padrões mesmo sem um modelo teórico explícito. Como é difícil identificar algo que não se sabe exatamente o que procurar, essa é uma das tarefas mais desafiadoras da astronomia de ondas gravitacionais [81].

De fato, a busca por ondas gravitacionais explosivas é, essencialmente, uma busca pelo inesperado. O LIGO ainda não detectou com certeza esse tipo de sinal, e a grande quantidade de incógnitas associadas a possíveis fontes, como colapsos estelares assimétricos, fusões exóticas ou eventos ainda não concebidos, amplia ainda mais o desafio. Muitas vezes, não

Figura 12 – Representação esquemática de ondas gravitacionais explosivas (*burst*) associadas a eventos astrofísicos transientes e imprevisíveis.



Fonte: Shanika Galaudage [76].

compreendemos completamente a física dos sistemas candidatos para prever como suas ondas gravitacionais se manifestariam [82].

Além disso, é possível que tais sinais venham de sistemas astrofísicos ainda desconhecidos. Por isso, as análises não podem ser restritas a buscas por sinais com propriedades específicas, como os templates empregados na detecção de fusões de buracos negros ou estrelas de nêutrons. Detectar ondas gravitacionais explosivas exigirá ferramentas e abordagens que não dependam de modelos precisos, mas sim de estratégias robustas para identificar padrões anômalos e transientes nos dados [81].

4 MECÂNICA ESTATÍSTICA NÃO-EXTENSIVA DE TSALLIS

4.1 Mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs

A mecânica estatística de Boltzmann–Gibbs constitui o arcabouço teórico clássico para a descrição estatística de sistemas físicos em equilíbrio termodinâmico e tem sido amplamente bem-sucedida na explicação de uma vasta classe de fenômenos físicos. O conceito de entropia foi inicialmente introduzido no contexto da termodinâmica no século XIX por Clausius, como uma grandeza associada à irreversibilidade dos processos físicos.

Posteriormente, Boltzmann e Gibbs estabeleceram a formulação estatística da entropia, conectando-a ao número de microestados acessíveis a um sistema macroscópico e atribuindo-lhe um papel central na compreensão do comportamento coletivo de sistemas físicos complexos. Nessa abordagem, a entropia emerge como uma medida da incerteza estatística associada à distribuição de probabilidades dos microestados do sistema.

Na formulação de Boltzmann–Gibbs, a entropia estatística, formalmente equivalente à entropia de Shannon, é definida por

$$S_{BG} = -k_B \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i. \quad (4.1)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann, p_i representa a probabilidade associada ao i -ésimo microestado, e W é o número total de microestados acessíveis ao sistema.

A entropia de Boltzmann-Gibbs S_{BG} desempenha um papel fundamental ao conectar as propriedades microscópicas do sistema às suas propriedades macroscópicas, sendo amplamente utilizada na física, química, e outras áreas do conhecimento. Sua definição estabelece as bases da mecânica estatística clássica e fornece uma ponte entre o comportamento estatístico dos microestados e a termodinâmica macroscópica.

Quando os microestados de um sistema possuem probabilidades iguais, ou seja, $p_i = \frac{1}{W}$ (hipótese de equiprobabilidade), a entropia de Boltzmann-Gibbs (S_{BG}) pode ser expressa pela relação:

$$S_{GB} = k \ln W. \quad (4.2)$$

Esta expressão, amplamente conhecida como o princípio de Boltzmann, constitui uma das relações fundamentais da mecânica estatística, sendo uma ponte entre a descrição probabilística dos microestados e as propriedades macroscópicas do sistema.

A equação original de Boltzmann-Gibbs, apresentada na Equação (4.1), possui diversas propriedades matemáticas fundamentais. Primeiramente, a entropia S_{BG} é sempre não-

negativa, refletindo sua natureza física como uma grandeza mensurável que aumenta com o grau de desordem do sistema. Além disso, ela é côncava, o que implica que combinações de estados tendem a maximizar a entropia, consistindo com o comportamento estatístico de sistemas isolados. A entropia também é extensiva, ou seja, para sistemas compostos por subsistemas independentes, a entropia total é a soma das entropias dos subsistemas. Por fim, S_{BG} é estável ou experimentalmente robusta, garantindo que pequenas flutuações nas probabilidades dos microestados não resultem em alterações significativas na entropia.

Desde a formulação original do princípio de Boltzmann, há um interesse contínuo em determinar se tal princípio pode ser derivado diretamente a partir das leis dinâmicas microscópicas dos sistemas físicos. Essa questão, intimamente relacionada à conexão entre a mecânica clássica e a estatística, permanece sem uma solução definitiva [83]. Embora o princípio de Boltzmann trate de estados microscópicos, a implementação rigorosa de tal derivação ainda não foi alcançada.

Atualmente, a mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs continua fundamentada em hipóteses importantes, como a de caos molecular [84] e ergodicidade [85]. Essas suposições permitem que a abordagem estatística funcione para descrever sistemas com interações de curto alcance, tanto espaciais quanto temporais. Em tais casos, as condições de ergodicidade e (quase) independência são favorecidas, validando a abordagem de Khinchin para a entropia S_{BG} [85]. Mesmo na ausência de uma derivação fundamental, o formalismo estatístico de Boltzmann-Gibbs demonstrou um sucesso inquestionável na descrição de sistemas físicos regidos por interações locais e de curto alcance, onde os princípios de extensividade, ergodicidade e independência estatística são válidos. Esse arcabouço teórico constitui um dos pilares centrais da mecânica estatística clássica, oferecendo uma fundamentação sólida para a termodinâmica e para a descrição do equilíbrio de uma vasta gama de sistemas físicos, desde gases ideais até sólidos e líquidos convencionais [22, 86–89].

4.2 Introdução à estatística não-extensiva: fundamentos e motivação

A mecânica estatística desenvolvida por Boltzmann e Gibbs, e posteriormente formalizada por Shannon no âmbito informacional, conhecida como mecânica estatística de Boltzmann–Gibbs–Shannon (BGS), constitui o paradigma tradicional para a descrição de sistemas em equilíbrio térmico, fundamentando-se em hipóteses como ergodicidade, interações de curto alcance e mistura caótica no espaço de fases [86, 90].

Nessa base teórica, a entropia desempenha papel central ao estabelecer uma ponte entre as descrições microscópicas e os observáveis macroscópicos. Entretanto, ao considerar sistemas complexos que exibem interações de longo alcance, memória de longo tempo, heterogeneidade estrutural e/ou ocupação multifractal do espaço de fases, torna-se evidente que

a mecânica estatística convencional apresenta limitações descritivas. Tais cenários são recorrentes, por exemplo, em sistemas autogravitantes, plasmas não colisionais, turbulência hidrodinâmica, redes complexas e em sistemas fora do equilíbrio [13, 26]. Diante dessas limitações, emergem generalizações entrópicas que buscam expandir a aplicabilidade da mecânica estatística clássica.

Ao longo das últimas décadas, foram propostas diversas generalizações capazes de lidar com contextos informacionais, dinâmicos e físicos em que as hipóteses de BGS são inapropriadas; todas recuperam BGS em limites apropriados dos axiomas de Khinchin–Shannon [91]. Resumimos quatro linhas influentes:

- **Kolmogorov–Sinai (KS)**: medida de complexidade dinâmica (produção média de informação por unidade de tempo) para sistemas caóticos; não é uma entropia termodinâmica, mas uma invariante dinâmica para quantificar caos e mistura [92];
- **Rényi**: família aditiva no sentido informacional, parametrizada por α , amplamente usada em multifractais e teoria da informação; recupera Shannon quando $\alpha \rightarrow 1$ [93];
- **Kaniadakis**: deformação κ inspirada em cinética relativística, com log/exponencial κ -deformados e aplicações em plasmas e fenômenos com restrições relativísticas [94];
- **Tsallis**: proposta para sistemas com correlações de longo alcance, memória e não-ergodicidade, conduzindo a uma entropia não-aditiva parametrizada por q ; recupera BG no limite $q \rightarrow 1$ [95].

4.2.1 Extensividade versus aditividade

É importante distinguir *aditividade* de *extensividade*. A aditividade refere-se à propriedade pela qual a entropia total de um sistema composto por dois subsistemas estatisticamente independentes A e B ,

$$S(A+B) = S(A) + S(B), \quad (4.3)$$

desde que as variáveis associadas a A e B sejam estatisticamente independentes. Essa igualdade traduz que, na ausência de correlações, a informação total é a soma das informações parciais, propriedade herdada da entropia de Shannon [96].

Por outro lado, a extensividade diz respeito ao comportamento assintótico da entropia quando o número de graus de liberdade N tende ao infinito: espera-se que, no limite termodinâmico, $S(N) \propto N$, desde que as correlações decaiam suficientemente rápido com a distância (aglutinação espacial), o que costuma ocorrer em interações de curto alcance [86, 90].

No contexto desta tese, identificamos A e B com os dois componentes de uma *binária autogravitante de buracos negros*. A gravitação, regida por uma interação gravitacio-

nal de longo alcance, cuja força decai como ($\propto 1/r^2$), induz correlações relevantes entre A e B mesmo a grandes distâncias, violando a hipótese de independência estatística. Consequentemente:

- a aditividade simples de S_{BG} deixa de ser garantida, pois as variáveis microscópicas não fatorizam;
- a extensividade de S_{BG} pode falhar (ou exibir anomalias de escalonamento) devido a correlações persistentes e metaestados de longa duração.

Essas dificuldades não são meramente sutilezas formais, mas manifestam-se empiricamente nas distribuições de probabilidade (ou de frequência) associadas às séries temporais gravitacionais. Em particular, observa-se a presença de caudas pesadas, desvios sistemáticos da gaussianidade, intermitência e processos de relaxação não exponenciais. Tais características indicam que a estatística clássica de Boltzmann–Gibbs pode não capturar adequadamente a estrutura multiescala e as dependências de longo alcance presentes nesses sistemas.

Binárias compactas (BBH, BNS, NSBH) são sistemas autogravitantes com forte acoplamento dinâmico e múltiplas escalas. As séries temporais associadas (sinal de *chirp*, resíduos e coeficientes em bases tempo–frequência) podem exibir assimetrias, caudas pesadas e estruturas de dependência fora do regime Gaussiano de BGS. Resultados prévios em astrofísica sugerem índices efetivos compatíveis com leis de potência e descrições não-extensivas em dados reais [24]. Neste trabalho, essa motivação é testada diretamente no domínio de ondas gravitacionais: investigamos se as estatísticas estacionárias, a sensibilidade e a relaxação inferidas de séries temporais (com pré-processamento adequado) alinham-se melhor a um formalismo não-extensivo do que ao paradigma clássico.

Retomando à interpretação física de A e B como os dois corpos de uma binária de buracos negros: sob BGS, a aditividade em (4.3) pressupõe independência estatística entre as partes. Para sistemas autogravitantes, essa hipótese é violada pelo longo alcance da interação e pela *retroação radiativa* (emissão de ondas gravitacionais), o que demanda uma regra de composição entrópica que incorpore explicitamente um *termo efetivo de interação estatística*. Por fim, notamos que as propostas de KS, Rényi (exemplo de entropia aditiva no sentido informacional) e Kaniadakis (relacionada à cinética relativística) mostram-se menos adequadas para o escopo específico de sistemas gravitacionais fortemente correlacionados aqui considerado.

4.3 Mecânica estatística não-extensiva de Tsallis

Como discutido na seção anterior, é plenamente justificável considerar que formulações alternativas à entropia de Boltzmann–Gibbs (BG) podem ser desenvolvidas para descrever

sistemas complexos ou anômalos. Esses sistemas frequentemente violam premissas fundamentais da mecânica estatística convencional, como a hipótese de ergodicidade e a independência estatística, no sentido da ausência de correlações de longo alcance entre os constituintes do sistema.

No presente estudo, a adoção do formalismo de Tsallis se justifica porque os sistemas analisados, pares binários de buracos negros, são fortemente acoplados e autogravitantes, exibindo memória de longo prazo, não-ergodicidade e possíveis assinaturas de multifractalidade. A dinâmica orbital e a retroação radiativa geram séries temporais de ondas gravitacionais cujas propriedades estatísticas (caudas pesadas, relaxação não-exponencial) são compatíveis com um regime não-extensivo. Assim, o formalismo de Tsallis constitui uma ferramenta apropriada para a descrição desses sistemas extremos, preservando a recuperação de Boltzmann–Gibbs–Shannon no limite $q \rightarrow 1$. A discussão das propriedades formais, em particular, a regra de composição, é apresentada na subseção seguinte.

Em 1988, Constantino Tsallis propôs uma generalização formal da entropia [97], motivada inicialmente pela análise de sistemas multifractais e posteriormente consolidada no âmbito da física estatística não extensiva. A chamada entropia de Tsallis é definida por:

$$S_q = k_B \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q-1}, \quad \text{com} \quad \sum_{i=1}^W p_i = 1 \quad \text{e} \quad q \in \mathbb{R} \quad (4.4)$$

onde p_i representa a probabilidade associada ao i -ésimo microestado do sistema, W é o número total de microestados acessíveis, $q \in \mathbb{R}$ é o índice entrópico que caracteriza o grau de não extensividade do sistema e k é a constante de Boltzmann.

A entropia de Tsallis recupera a forma clássica de Boltzmann-Gibbs-Shannon no limite extensivo $\lim_{q \rightarrow 1} S_q = S_{BG}$, isto é,

$$\begin{aligned}
S_q &= k \frac{1 - \sum_i p_i^q}{q - 1} \\
&= k \frac{1 - \sum_i p_i p_i^{q-1}}{q - 1} \\
&= k \frac{1 - \sum_i p_i e^{(q-1) \ln p_i}}{q - 1} \\
&\approx k \frac{1 - [\sum_i p_i + (q-1) \sum_i p_i \ln p_i]}{q - 1} \quad (\text{expansão em torno de } q = 1) \\
&= k \frac{1 - 1 - (q-1) \sum_i p_i \ln p_i}{q - 1} \\
&= k \frac{-(q-1) \sum_i p_i \ln p_i}{q - 1} \\
S_{BG} &= -k \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i. \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Essa propriedade assegura que a generalização proposta mantém consistência formal com a mecânica estatística convencional, funcionando como um formalismo mais abrangente, aplicável tanto a sistemas extensivos quanto a não extensivos.

A entropia S_q estabelece, portanto, uma base teórica fundamentada para a extensão da mecânica estatística, possibilitando sua aplicação a sistemas que exibem características como:

- correlações de longo alcance (espaciais, temporais ou causais);
- não ergodicidade;
- multifractalidade;
- dinâmica não markoviana;
- memória de longo prazo.

Essa generalização tem sido amplamente empregada em diversos contextos científicos, incluindo física estatística, astrofísica, sistemas gravitacionais, turbulência, dinâmica de plasmas, redes complexas e até economia, consolidando sua relevância na descrição de fenômenos fora do regime clássico de Boltzmann-Gibbs [98, 99].

O parâmetro q , denominado índice entrópico ou parâmetro de não extensividade, desempenha um papel central no formalismo. Seu valor reflete propriedades fundamentais do sistema, estando diretamente associado ao grau de complexidade, ao nível de correlação e à classe de universalidade a que o sistema pertence [100].

Conceitualmente, acredita-se que o valor do parâmetro q de um sistema específico deva ser, em princípio, derivável a partir de sua dinâmica microscópica subjacente. Essa questão conecta-se diretamente a um problema fundamental e ainda não completamente resolvido na física estatística: a rigorosa derivação da mecânica estatística, seja no formalismo de Boltzmann-Gibbs, seja na generalização proposta por Tsallis, a partir das leis determinísticas da mecânica clássica ou da mecânica quântica. Esse desafio epistemológico reflete a busca por uma ponte formal entre a dinâmica microscópica, muitas vezes não ergódica ou fracamente caótica, e a descrição estatística de estados de equilíbrio ou metaestáveis [22, 27, 101–103].

4.3.1 Regra de composição (pseudo-aditividade) e termo efetivo de interação

A partir da definição da entropia de Tsallis Equação 4.4 e da propriedade de pseudo-aditividade do q -logaritmo¹, é possível demonstrar a seguinte relação para dois subsistemas *estatisticamente independentes* A e B , a entropia de Tsallis satisfaz a regra de composição

$$S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + (1-q)S_q(A)S_q(B), \quad (4.6)$$

desde que as probabilidades conjuntas satisfaçam a condição de independência estatística: $p_{A+B}^{ij} = p_A^i p_B^j$. Isso é válida para subsistemas estatisticamente independentes, conhecida como *pseudo-aditividade* [13, 104, 105]. No limite $q \rightarrow 1$, o termo adicional desaparece e recupera-se a aditividade de Boltzmann–Gibbs–Shannon, da Equação 4.3.

A Equação (4.6) pode ser interpretada como a introdução de um *termo efetivo de interação estatística*: mesmo quando A e B são independentes (no sentido probabilístico), a composição entrópica em $q \neq 1$ não é aditiva. Essa propriedade é crucial para sistemas reais em que a independência *não* vale, por exemplo, binárias autogravitantes de buracos negros, pois a interação de longo alcance e a retroação radiativa (emissão de GWs) geram correlações que violam a fatorização de microestados. Nesses casos, escolhas apropriadas de q podem restaurar *extensividade* (escalonamento linear com o tamanho) mesmo quando a aditividade simples falha, alinhando o formalismo à consistência termodinâmica em presença de correlações de longo alcance.

No contexto desta tese, ao identificar A e B com os dois componentes do sistema binário, a pseudo-aditividade explicita a diferença conceitual em relação ao caso BG: a composição de entropias incorpora um termo que capta, de forma efetiva, o papel das correlações e da estrutura multiescala que emergem da dinâmica gravitacional.

¹ $\ln_q(x_A x_B) = \ln_q(x_A) + \ln_q(x_B) + (1-q)\ln_q(x_A)\ln_q(x_B)$

4.4 Generalização não-extensiva das distribuições de equilíbrio: do caso discreto ao contínuo

A entropia de Tsallis admite duas formulações operacionais distintas, conforme a natureza do sistema em estudo:

- i) **Versão discreta** (espaços de estados finitos ou contáveis): Para um conjunto discreto de microestados $i = 1, \dots, W$ caracterizados por probabilidades p_i satisfazendo $\sum_{i=1}^W p_i = 1$, define-se

$$S_q = k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1},$$

Esta formulação é particularmente adequada quando o espaço de estados é intrinsecamente discreto, como em modelos de redes, autômatos celulares, cadeias de Markov, ou em representações via *coarse-graining*² (histogramas, dinâmica simbólica).

- ii) **Versão contínua** (variáveis contínuas em domínios reais): Para variáveis contínuas descritas por uma função densidade de probabilidade $p(x)$ normalizada ($\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$), tem-se

$$S_q = k \frac{1 - \int_{-\infty}^{\infty} [p(x)]^q dx}{q - 1}. \quad (4.7)$$

Esta forma constitui o formalismo operativo preferencial quando as observáveis são quantidades contínuas (amplitudes de sinal, incrementos, coeficientes tempo-frequência, energias) e objetiva-se a maximização de S_q sob vínculos integrais (normalização e momentos). Ressalta-se que, análoga à entropia diferencial de Shannon, S_q na forma contínua apresenta dependência dimensional, requerendo cuidado na interpretação física.

4.5 Escolha do formalismo para análise de ondas gravitacionais

No presente trabalho, adotaremos sistematicamente a versão contínua da entropia de Tsallis, por sua pertinência ao estudo de observáveis reais extraídos de séries temporais de ondas gravitacionais. Embora a formulação discreta seja natural para microestados finitos ou representações discretizadas via histogramas, o objeto central de investigação aqui compreende

²*coarse-graining*: refere-se a uma classe de métodos e técnicas utilizadas para simplificar a descrição de um sistema físico complexo. O objetivo é reduzir o número de graus de liberdade do sistema agrupando componentes microscópicos (ex.: átomos, moléculas) em unidades efetivas maiores. Dessa forma, consegue-se modelar o comportamento do sistema em escalas de tempo e comprimento maiores, capturando suas propriedades médias ou emergentes, enquanto se ignoram detalhes de alta resolução. É uma abordagem comum em mecânica estatística, física de materiais e simulações computacionais.

densidades de probabilidade $p(x)$ associadas a variáveis contínuas (amplitudes, incrementos, parâmetros de sinais).

Para contornar a dependência espúria de unidades inerente à entropia diferencial, empregaremos variáveis adimensionalizadas mediante procedimentos de reescala apropriados, conjuntamente com vínculos formulados no esquema *escort*. Sob essa estrutura de vínculos, o processo de maximização da entropia S_q conduz naturalmente à distribuição q -Gaussiana, cuja adequação empírica será rigorosamente testada em regimes de quase-estacionariedade e através de múltiplas escalas temporais τ .

4.5.1 Versão contínua da entropia de Tsallis

Nesta seção adotaremos a versão contínua da entropia de Tsallis, apropriada a observáveis reais extraídas das séries temporais de ondas gravitacionais. Embora a forma discreta de S_q seja natural para microestados finitos, o objeto de interesse aqui são densidades $p(x)$ de variáveis contínuas (amplitudes/incrementos).

A maximização da q -entropia, na formulação contínua, requer a imposição de vínculos que garantam a consistência física e estatística do sistema. A função entropia de Tsallis é expressa pela Equação 4.7 em que $p(x)$ representa a função densidade de probabilidade, q é o índice de não extensividade característico do sistema, e k_B é a constante de Boltzmann.

A determinação da distribuição de probabilidade que maximiza S_q exige a aplicação de restrições variacionais apropriadas, conforme descrito a seguir:

i) Condição de Normalização da Densidade de Probabilidade:

No contexto da mecânica estatística, a condição fundamental que qualquer função densidade de probabilidade $p(x)$ deve satisfazer é a condição de normalização:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1. \quad (4.8)$$

Essa condição assegura que $p(x)$ seja uma função densidade de probabilidade legítima, consistente com as leis da teoria de probabilidade clássica. Trata-se de um requisito indispensável, independentemente do formalismo estatístico adotado, seja ele extensivo (Boltzmann-Gibbs) ou não extensivo (Tsallis).

Essa condição garante que $p(x)$ seja uma função de densidade válida, em conformidade com os princípios da teoria clássica das probabilidades. Trata-se de um requisito essencial, independentemente do formalismo estatístico adotado, seja ele o tradicional de Boltzmann-Gibbs ou a abordagem não extensiva de Tsallis.

A normalização assegura que a soma (ou integral, no caso contínuo) das probabilidades

associadas a todos os eventos possíveis no espaço de estados seja unitária, fundamento indispensável para a interpretação estatística correta das observáveis do sistema.

ii) Definição e Interpretação Física da Medida Escort:

No formalismo de Tsallis, introduz-se a medida escort, uma construção matemática auxiliar que desempenha papel central na caracterização de médias generalizadas e outras grandezas estatísticas. A medida escort associada ao índice q é definida como:

$$P_q(x) = \frac{[p(x)]^q}{\int_{-\infty}^{+\infty} [p(x)]^q dx}, \quad (4.9)$$

onde $P_q(x)$ é a densidade de probabilidade na medida escort associada ao índice entrópico q .

A medida escort pode ser interpretada como uma reponderação da densidade de probabilidade original, na qual diferentes regiões do espaço de estados são amplificadas ou atenuadas em função do valor de q . Suas principais propriedades são:

- Para $q > 1$, dá maior peso às regiões onde $p(x)$ é grande (regiões de alta probabilidade);
- Para $q < 1$, confere maior peso às regiões onde $p(x)$ é pequena (as caudas da distribuição);
- No limite $q \rightarrow 1$, recupera-se a distribuição padrão: $P_q(x) \rightarrow p(x)$.

iii) Sobre a Normalização na Medida Escort:

Em alguns contextos específicos, particularmente em tratamentos variacionais simplificados ou em determinadas aplicações na física estatística, econofísica e teoria da informação, adota-se uma condição de normalização alternativa, baseada diretamente na medida escort:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [p(x)]^q dx = 1. \quad (4.10)$$

Embora matematicamente legítima, essa imposição não equivale à normalização padrão da densidade de probabilidade $p(x)$, mas sim à normalização da medida auxiliar $P_q(x)$. Tal abordagem pode ser útil para simplificar certos cálculos, mas não substitui a necessidade de que $p(x)$ satisfaça a condição canônica de normalização (Equação anterior).

Na formulação rigorosa da estatística não extensiva, conforme estabelecido na literatura seminal, como em Tsallis (1998) [99], a condição fundamental e universalmente adotada continua sendo a Equação 4.8.

Ignorar essa distinção pode levar a equívocos conceituais e interpretações incorretas dos resultados estatísticos e físicos. Portanto, é essencial manter a clareza entre essas duas formas de normalização, reconhecendo o papel distinto que cada uma desempenha no arcabouço teórico da estatística não extensiva.

iv) Definição da média q -generalizada (ou valor esperado q -escort):

No formalismo não extensivo, a média estatística é modificada para incorporar os efeitos da medida escort. Define-se a média q -generalizada como:

$$\langle x \rangle_q \equiv \bar{\mu}_q = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x [p(x)]^q dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} [p(x)]^q dx}. \quad (4.11)$$

Essa expressão representa o valor esperado da variável x ponderado pela densidade de probabilidade deformada $[p(x)]^q$, refletindo o papel da não extensividade na estatística do sistema. A média $\bar{\mu}_q$ tende ao valor clássico \bar{x} quando $q \rightarrow 1$, recuperando a definição usual da estatística de Boltzmann-Gibbs.

v) Definição da variância q -generalizada:

De modo análogo, a dispersão das flutuações ao redor da média também é modificada pela presença da medida escort. Define-se a variância q -generalizada como:

$$\sigma_q^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{\mu}_q)^2 [p(x)]^q dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} [p(x)]^q dx}. \quad (4.12)$$

Essa expressão representa a extensão da variância clássica à estrutura não extensiva, sendo consistente com a redefinição da média e com os princípios da mecânica estatística generalizada. A variância σ_q^2 incorpora a influência de correlações de longo alcance e de flutuações não gaussianas, comuns em sistemas complexos.

Esses vínculos variacionais, normalização, medida escort, média e variância q -generalizadas, garantem uma descrição estatística coerente no formalismo de Tsallis. Eles estendem de forma natural os conceitos clássicos da estatística para lidar com sistemas que apresentam: não extensividade (entropia não aditiva), correlações de longo alcance, heterogeneidade estrutural, ou dinâmica multifractal.

As quantidades $\bar{\mu}_q$ e σ_q^2 dependem explicitamente do parâmetro q , funcionando como indicadores sensíveis das propriedades estatísticas e dinâmicas do sistema sob análise [99].

Adicionalmente, vale destacar que ao longo do desenvolvimento histórico da estatística não extensiva, diferentes formas de médias e normalizações foram propostas e estudadas. Embora nem sempre equivalentes, essas abordagens se relacionam entre si por meio de transformações matemáticas consistentes, conforme discutido por Najafi et al. [106]. Essa diversidade de formulações confere flexibilidade ao formalismo e amplia sua aplicabilidade em diferentes contextos científicos.

4.5.2 Maximização da Entropia e a Distribuição q -Gaussiana

O processo de maximização da entropia de Tsallis (Eq. 4.7) sob os vínculos variacionais apropriados, nomeadamente a normalização da distribuição de probabilidade e a imposição de um valor finito para a variância generalizada, conduz a uma generalização não-extensiva da distribuição gaussiana padrão. Como detalhado no Apêndice A, este problema variacional, resolvido via multiplicadores de Lagrange no formalismo das medidas escort, resulta uma família de distribuições que preservam a estrutura máxima-entrópica característica da termodinâmica estatística, agora estendida para sistemas com correlações de longo alcance ou memória.

A densidade de probabilidade que maximiza S_q para uma variável contínua x é dada pela expressão:

$$P_q(x) = A_q [1 + (1 - q)B_q(x - \bar{\mu}_q)^2]^{-\frac{1}{1-q}}, \quad (q < 3), \quad (4.13)$$

onde A_q é o fator de normalização e B_q está relacionado à variância q -generalizada do sistema. Essa expressão define a chamada distribuição q -gaussiana, que reduz-se à distribuição normal padrão no limite $q \rightarrow 1$.

Os coeficientes A_q e B_q são dados explicitamente por:

- Para $q < 1$:

$$A_q = \frac{\Gamma\left(\frac{5-3q}{2-2q}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right)} \sqrt{\frac{1-q}{\pi} B_q}, \quad (4.14)$$

- Para $q > 1$:

$$A_q = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-q}{2q-2}\right)} \sqrt{\frac{q-1}{\pi} B_q}. \quad (4.15)$$

O parâmetro B_q depende da variância generalizada σ_q^2 e é dado por:

$$B_q = [(3 - q)\sigma_q^2]^{-1}. \quad (4.16)$$

Além disso, a relação entre a variância usual σ^2 (definida com base na média clássica) e a variância q -generalizada $\bar{\sigma}_q^2$ é:

$$\bar{\sigma}_q^2 = \sigma^2 \cdot \frac{5 - 3q}{3 - q}. \quad (4.17)$$

Essas expressões evidenciam como os parâmetros estatísticos da distribuição dependem diretamente do índice de não extensividade q , refletindo a presença de efeitos não clássicos, como correlações de longo alcance, flutuações amplificadas ou estruturas multifractais.

A distribuição q -gaussiana pode ser reexpressa em termos da função q -exponencial, definida por:

$$e_q^x \equiv [1 + (1 - q)x]^{1/(1-q)}, \quad \text{com } e_1^x = e^x. \quad (4.18)$$

A função q -exponencial reduz-se à exponencial usual no limite $q \rightarrow 1$, mas apresenta um domínio limitado: $e_q^x = 0$ para $1 + (1 - q)x \leq 0$, o que assegura a positividade e a normalizabilidade da densidade $p(x)$.

Utilizando essa definição, a Eq. 4.13 pode ser escrita de forma compacta como:

$$P_q(x) = A_q e_q^{-B_q(x - \bar{\mu}_q)^2}. \quad (4.19)$$

O parâmetro q é o responsável por modular como a cauda da distribuição se comporta em comparação com a Gaussiana tradicional:

Quando ($q > 1$) (Subextensivo): As caudas da distribuição se tornam mais pesadas e decaem mais lentamente do que as da Gaussiana. Isso implica em uma probabilidade maior de ocorrência de eventos extremos (valores muito distantes da média). Sistemas que exibem esse comportamento são frequentemente associados a fenômenos com efeitos de longo alcance, memória ou correlações fortes.

Quando ($q < 1$) (Superextensivo): As caudas da distribuição se tornam mais leves e decaem mais abruptamente do que as da Gaussiana. Neste caso, a probabilidade de eventos extremos é ainda menor do que em uma distribuição normal. Este comportamento é observado em sistemas com restrições físicas que limitam a variabilidade.

4.6 Centragem e fixação de μ_q .

Nesta tese, adotamos distribuições q -Gaussianas centradas em zero. Especificamente, impomos que a média generalizada (q -média) seja nula,

$$\mu_q \equiv \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x p(x)^q dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)^q dx} = 0,$$

de modo que a distribuição de probabilidade assume a forma

$$P_q(x) = A_q \left[1 - (1 - q) B_q x^2 \right]^{\frac{1}{1-q}}, \quad (q < 3).$$

Operacionalmente, essa escolha equivale a impor o vínculo $\int x p(x)^q dx = 0$, o que é consistente com o pré-processamento aplicado às séries interferométricas (remoção de tendência, branqueamento e filtragem passa-alta), procedimentos que suprimem componentes de muito baixa frequência e deslocamentos residuais, tornando o sinal aproximadamente estacionário e compatível com média clássica e q -generalizada nulas.

Essa convenção não implica a inexistência física de possíveis efeitos de memória gravitacional. A memória corresponde a uma contribuição não oscilatória e hereditária do sinal, que pode produzir um deslocamento residual idealizado após a passagem da onda; contudo, interferômetros terrestres como o LIGO têm baixa sensibilidade a essa componente e não “retêm” permanentemente um deslocamento do tipo memória devido às forças de restauração associadas à suspensão e ao controle das massas de teste (Favata, 2009)[107]. Assim, a análise estatística é conduzida sobre as flutuações em torno do estado médio, que são o foco do formalismo não extensivo adotado.

Fixar μ_q não o torna um parâmetro livre do ajuste, pelo contrário, reduz o número de graus de liberdade. Na prática, a tripla $\{A_q, B_q, \mu_q\}$ é redundante: A_q é determinado pela normalização, B_q é fixado pela variância q -escort via

$$B_q = \frac{1}{(3 - q) \sigma_q^2} \quad (q < 3),$$

e, com $\mu_q = 0$, evita-se a conhecida *degenerescência* entre o parâmetro de posição e a largura/forma (especialmente para $q > 1$, quando as caudas pesadas correlacionam fortemente as estimativas de μ_q e B_q). Dessa forma, a fixação de μ_q melhora a identificabilidade de $\{q, \sigma_q\}$ e estabiliza o ajuste.

Observação prática. Se um conjunto específico de dados apresentar assimetria residual ou desvio sistemático de zero, recentramos a variável por $x \mapsto x - \hat{\mu}_q$ (ou removemos a média clássica se $q \approx 1$) antes do ajuste. Nos casos analisados aqui, testes de consistência indicaram $\mu_q \simeq 0$ dentro das incertezas, justificando a convenção adotada.

4.6.1 Propriedades das distribuições q -Gaussianas

As distribuições q -Gaussianas apresentam propriedades estatísticas que diferem significativamente da distribuição Gaussiana clássica, refletindo os efeitos introduzidos pela não extensividade do parâmetro q . A Figura 13 ilustra graficamente essas diferenças fundamentais.

(i) Recuperação da distribuição Gaussiana padrão ($q \rightarrow 1$):

No limite $q \rightarrow 1$, a função q -exponencial recupera a exponencial usual, e a q -Gaussiana converge suavemente para a distribuição normal clássica:

$$\lim_{q \rightarrow 1} p(x) = A_1 \exp \left[-B_1 (x - \bar{\mu})^2 \right], \quad (4.20)$$

onde A_1 e B_1 são os parâmetros usuais de normalização e inverso da variância, respectivamente.

(ii) Caudas pesadas com comportamento de lei de potência ($q > 1$):

Para $q > 1$, a distribuição q -Gaussiana exibe caudas largas, que decaem segundo leis de potência. Isso implica uma maior probabilidade de ocorrência de eventos extremos, em comparação com a distribuição normal. Tais propriedades tornam essa função útil na modelagem de sistemas complexos com flutuações amplificadas e correlações de longo alcance.

(iii) Suporte finito e presença de corte abrupto (*cut-off*) ($q < 1$):

Para $q < 1$, o argumento da função q -exponencial é restrito a valores que mantêm sua positividade:

$$1 + (1 - q)B_q(x - \bar{\mu}_q)^2 > 0. \quad (4.21)$$

Isso resulta em um suporte finito, ou seja, a distribuição é truncada fora de um intervalo simétrico em torno da média. Tal comportamento indica que valores extremos têm probabilidade nula, um traço típico de sistemas com barreiras físicas ou recursos limitados.

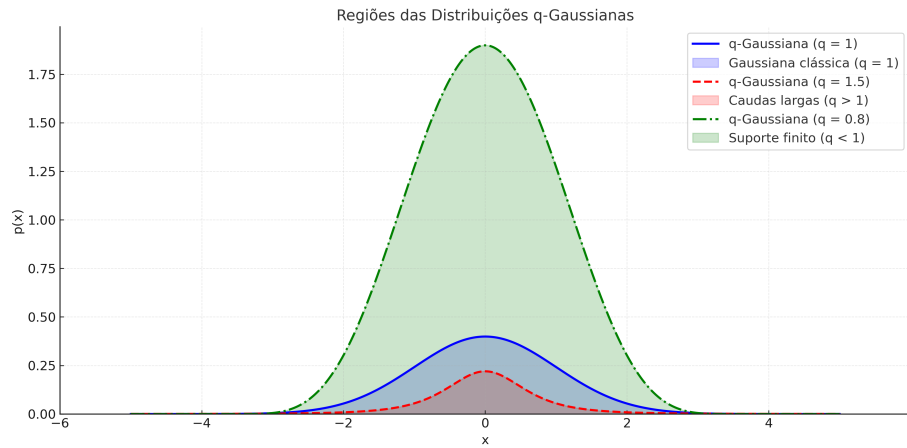
(iv) Condição de normalização das distribuições q -Gaussianas

A função q -Gaussiana é normalizável somente no intervalo de índices:

$$-\infty < q < 3. \quad (4.22)$$

Fora desse intervalo, a integral de normalização diverge, impedindo a interpretação de $p(x)$ como uma densidade de probabilidade válida. Essa condição é derivada do comportamento assintótico das caudas da distribuição e é crucial para a construção de qualquer modelo probabilístico baseado em q -Gaussiana.

Figura 13 – Distribuições q -Gaussianas para diferentes valores de q : para $q = 1$ (região azul), obtém-se a Gaussiana clássica; para $q > 1$ (região escura), observa-se o surgimento de caudas largas; para $q < 1$ (região verde), a distribuição possui suporte finito, com corte abrupto nos extremos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.7 O q -tripleto de Tsallis

No contexto da estatística não-extensiva de Tsallis, o chamado q -tripleto emerge como uma ferramenta conceitual central para a caracterização da dinâmica de sistemas complexos, nos quais a extensividade e a independência estatística não são satisfeitas. Essa estrutura fornece uma descrição integrada de diferentes aspectos da dinâmica estatística, permitindo relacionar propriedades estacionárias, sensibilidade dinâmica e processos de relaxação em um único arcabouço teórico [22, 108–111].

Dentro deste formalismo generalizado, o chamado q -tripleto emerge como uma ferramenta conceitual central para a caracterização da dinâmica de sistemas complexos [13, 112]. Essa estrutura é composta por três expoentes:

- i) (q_{stat}): associado à distribuição estatística do estado estacionário;
- ii) (q_{sen}): ligado à sensibilidade às condições iniciais;
- iii) (q_{rel}): relacionado à dinâmica de relaxação rumo ao equilíbrio.

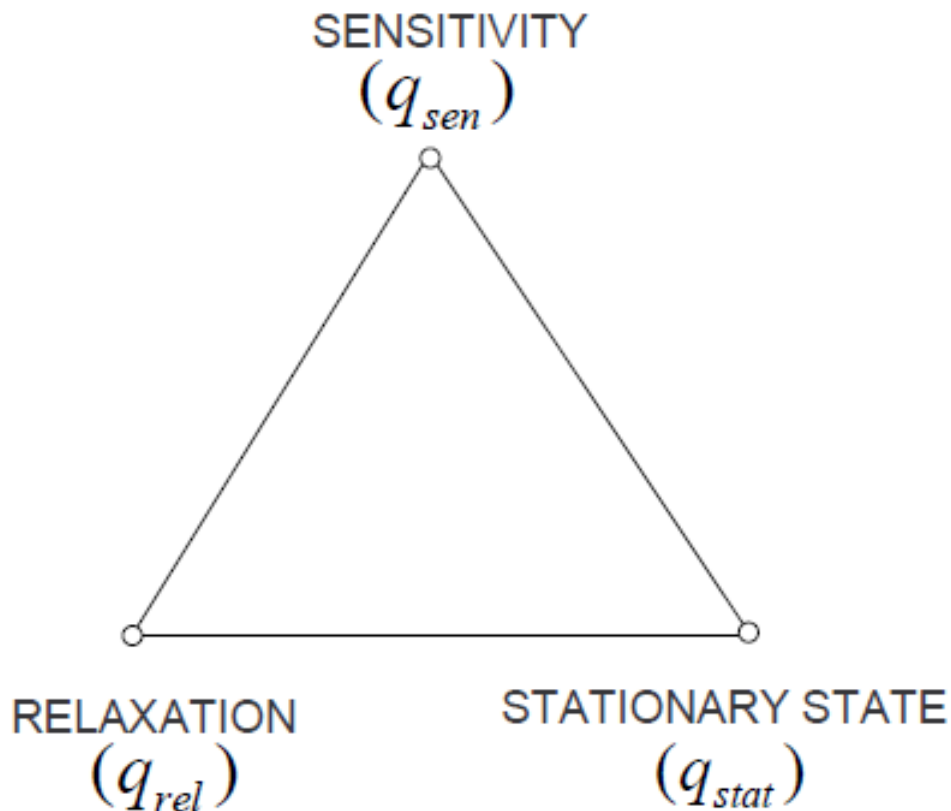
Esses três índices, embora distintos em definição, descrevem aspectos interligados do comportamento dinâmico e estatístico de sistemas que violam as hipóteses convencionais da estatística de Boltzmann-Gibbs [113].

No limite em que tais hipóteses são rigorosamente satisfeitas, ergodicidade, mistura caótica e equiprobabilidade dos microestados acessíveis, recupera-se a equivalência entre os três expoentes: ($q_{\text{stat}} = q_{\text{sen}} = q_{\text{rel}} = 1$), refletindo a natureza extensiva e aditiva da termodinâmica clássica [14].

A motivação para a introdução do q -tripleto está na observação de que muitos sistemas complexos não exploram uniformemente seu espaço de fases disponível. Em vez disso, as trajetórias frequentemente se restringem a subconjuntos hierárquicos, multifractais ou topologicamente não triviais, como redes livres de escala, o que viola a hipótese de equiprobabilidade microcanônica [20, 114].

Essa ocupação não uniforme do espaço de fases está esquematicamente representada na Figura 14, onde se destaca que os três índices q expressam diferentes manifestações de uma mesma estrutura dinâmica subjacente: o modo pelo qual o sistema, condicionado por suas propriedades iniciais, ocupa total ou parcialmente seu espaço de fases Γ .

Figura 14 – O triângulo dos valores fundamentais de q , nomeadamente aqueles associados à sensibilidade às condições iniciais, relaxação e estado estacionário. Nas situações mais relevantes, espera-se que ($q_{sen} \leq 1$), ($q_{rel} \geq 1$) e ($q_{stat} \geq 1$). Presume-se que esses índices estejam inter-relacionados, uma vez que todos derivam da exploração dinâmica particular que o sistema realiza em seu espaço de fases completo.



Fonte: Tsallis [15].

Em sistemas fortemente caóticos, caracterizados por expoentes de Lyapunov³ sig-

³Os expoentes de Lyapunov quantificam a taxa média de divergência (ou convergência) entre trajetórias inicialmente infinitesimalmente próximas no espaço de fases. Um expoente de Lyapunov positivo indica sensibilidade exponencial às condições iniciais, característica de sistemas caóticos. Quando os expoentes são nulos ou muito próximos de zero, a divergência ocorre de forma subexponencial, associando-se a regimes fracamente caóticos, não ergódicos ou metaestáveis, nos quais a estatística extensiva pode falhar.

nificativamente positivos e por mistura rápida⁴ no espaço de fases, no sentido de perda exponencial de correlações temporais entre trajetórias inicialmente próximas, a estatística de Boltzmann–Gibbs permanece válida, com todos os índices do q -tripleto tendendo ao valor unitário.

Por outro lado, em sistemas fracamente caóticos, nos quais os expoentes de Lyapunov são nulos ou muito próximos de zero, a divergência entre trajetórias ocorre de forma subexponencial, e o sistema pode permanecer por longos intervalos de tempo confinado em regiões específicas do espaço de fases, frequentemente associadas a estruturas multifractais. Esse confinamento dinâmico implica quebra da ergodicidade e a persistência de correlações de longo alcance, conduzindo a regimes metaestáveis [115].

Nesses regimes metaestáveis, as distribuições estatísticas observadas são mais bem descritas por entropias não-extensivas com $q \neq 1$, e os três expoentes assumem valores distintos: $(q_{\text{stat}}, q_{\text{sen}}, q_{\text{rel}}) \neq (1, 1, 1)$.

Com o tempo, e frequentemente apenas em escalas assintoticamente longas, o sistema pode evoluir para um estado em que $q_{\text{stat}} \rightarrow 1$, $q_{\text{sen}} \rightarrow 1$ e $q_{\text{rel}} \rightarrow 1$, sinalizando a recuperação da extensividade e da ergodicidade típicas da estatística convencional [116].

É relevante observar que, no formalismo de Boltzmann-Gibbs, os três aspectos físicos representados por $(q_{\text{stat}}, q_{\text{sen}}, q_{\text{rel}})$ colapsam em um único valor, ocultando a riqueza estrutural que emerge em sistemas longe do equilíbrio. A dissociação entre esses índices constitui uma das maiores contribuições do formalismo q não-extensivo, permitindo uma descrição mais completa da complexidade intrínseca presente em sistemas com múltiplas escalas temporais, acoplamento de longo alcance e não ergodicidade.

4.8 Comportamentos exponenciais na mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs e a generalização via o q -tripleto

Sistemas descritos pela mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs (BG) apresentam características dinâmicas e estatísticas bem estabelecidas, que refletem sua natureza extensiva e sua tendência ao equilíbrio térmico. As principais manifestações dessas propriedades são descritas a seguir:

(i) Distribuição de probabilidades com forma exponencial:

Na mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs, a probabilidade de um sistema estar em um estado com energia E é dada pela distribuição de Boltzmann:

⁴Mistura rápida refere-se à propriedade dinâmica pela qual correlações temporais entre observáveis do sistema decaem exponencialmente no tempo, indicando que trajetórias inicialmente próximas tornam-se estatisticamente independentes em escalas temporais curtas. Em termos do espaço de fases, essa propriedade implica que o sistema explora de forma homogênea e eficiente as regiões acessíveis, caracterizando um regime ergódico e fortemente caótico. Essa condição é fundamental para a validade da estatística de Boltzmann–Gibbs.

$$P(E) \propto e^{-\frac{E}{k_B T}}, \quad (4.23)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann e T representa a temperatura absoluta. Essa característica de sistemas extensivos, ergódicos e em contato com um reservatório térmico. Essa forma exponencial constitui a assinatura estatística fundamental do regime descrito pelo formalismo clássico.

(ii) Sensibilidade exponencial às condições iniciais (caos forte):

Sistemas dinâmicos caóticos, compatíveis com a estatística de BG, apresentam sensibilidade exponencial às condições iniciais. Tal comportamento é quantificado pelos expoentes de Lyapunov, que indicam a taxa de separação exponencial entre trajetórias inicialmente próximas no espaço de fases.

Se os expoentes de Lyapunov forem positivos, pequenos desvios iniciais crescem exponencialmente com o tempo, caracterizando o regime de caos forte. Esse crescimento exponencial é matematicamente expresso por

$$\Delta(t) \sim \Delta(0)e^{\lambda t}, \quad (4.24)$$

onde $\Delta(t)$ é a separação entre trajetórias no tempo t , e λ é o maior expoente de Lyapunov. Essa propriedade é típica de sistemas ergódicos de alta dimensionalidade, cuja dinâmica leva à ocupação uniforme do espaço de fases.

(iii) Decaimento exponencial das variáveis físicas (relaxação):

Grandezas físicas macroscópicas, como energia, magnetização ou momento, tendem ao equilíbrio por meio de um decaimento exponencial caracterizado por um tempo de relaxação τ . O decaimento exponencial da grandeza física pode ser escrito como

$$X(t) \sim X_0 e^{-t/\tau}, \quad (4.25)$$

onde $X(t)$ é a grandeza física no tempo t , e X_0 é o valor inicial da variável e τ é o tempo característico de relaxação. Tal comportamento reflete a rápida dissipação de flutuações em sistemas dominados por interações locais e sem correlações de longo alcance.

Esses três comportamentos, distribuição de energia, sensibilidade às condições iniciais e relaxação, compartilham a mesma estrutura funcional exponencial e são naturalmente associados ao regime $q = 1$, no qual a entropia de Tsallis recupera a forma clássica de Boltzmann-

Gibbs. Neste limite, o sistema é extensivo, aditivo e obedece à equiprobabilidade dos microestados acessíveis, sendo bem descrito pela mecânica estatística tradicional.

Contudo, há evidências crescentes de que diversos sistemas complexos, incluindo plasmas astrofísicos, redes complexas, turbulência e sistemas fora do equilíbrio, não se ajustam adequadamente ao paradigma de BG. Para tais sistemas, as propriedades estatísticas e dinâmicas descritas acima apresentam comportamentos não exponenciais, os quais são mais adequadamente modelados por uma generalização baseada em três índices distintos: (q_{stat}), (q_{sen}) e (q_{rel}), coletivamente denominados q -tripleto [14, 112].

No regime de Boltzmann-Gibbs, os três expoentes colapsam em ($q = 1$), mas em sistemas fora do equilíbrio eles geralmente assumem valores diferentes, refletindo correlações de longo alcance, memória e estrutura multifractal no espaço de fases [113].

Estudos recentes têm investigado o comportamento desses três índices em uma variedade de contextos físicos e computacionais, revelando que o q -tripleto constitui uma estrutura eficaz para descrever dinâmicas complexas e não ergódicas [20, 117]. Essa abordagem generalizada permite uma compreensão mais refinada da transição entre regimes extensivos e não extensivos, além de capturar a diversidade de escalas temporais e estruturas topológicas envolvidas na evolução de sistemas complexos.

4.8.1 Índice q de estacionariedade de Tsallis (q_{stat})

O parâmetro (q_{stat}) está associado ao comportamento de equilíbrio ou de metaestabilidade de sistemas dinâmicos no contexto da estatística não extensiva de Tsallis. Em particular, ele descreve como a distribuição de probabilidade dos estados do sistema se ajusta a uma q -Gaussiana, a qual representa uma generalização da distribuição Gaussiana tradicional [15].

Nessa formulação, o índice q desempenha papel central na caracterização do grau de não extensividade. Quando associado à distribuição estacionária do sistema, é denotado por (q_{stat}), pois governa diretamente a forma funcional da densidade de probabilidade no estado de equilíbrio ou quasiestacionário. Valores de ($q_{\text{stat}} > 1$) são frequentemente observados em sistemas não extensivos, indicando distribuições com caudas pesadas (ou de lei de potência), nas quais eventos extremos ocorrem com probabilidade significativamente maior do que previsto por uma Gaussiana [22].

A forma funcional da q -Gaussiana associada ao estado estacionário é dada por

$$p(x) \propto [1 + (1 - q_{\text{stat}})\beta x^2]^{1/(1 - q_{\text{stat}})}, \quad (4.26)$$

onde β é um parâmetro relacionado à largura da distribuição, e (q_{stat}) controla o decaimento assintótico. No limite ($q_{\text{stat}} \rightarrow 1$), recupera-se a distribuição Gaussiana usual, compatível com o regime extensivo da mecânica estatística tradicional.

Distribuições q -Gaussianas com $q_{\text{stat}} > 1$ têm sido amplamente verificadas em diversos contextos físicos e interdisciplinares [118], tais como:

- Distribuições de velocidades em plasmas espaciais e não térmicos;
- Dinâmica de preços e flutuações financeiras com eventos extremos;
- Transporte anômalo em meios turbulentos ou desordenados;
- Sistemas gravitacionais de longo alcance com estrutura hierárquica ou multifractal;
- Processos em redes complexas, econofísica e biologia teórica.

Esses exemplos evidenciam a solidez e aplicabilidade do índice (q_{stat}) na descrição quantitativa de sistemas fora do equilíbrio termodinâmico convencional. Sua presença indica a necessidade de uma abordagem generalizada, na qual a entropia de Tsallis fornece a base estatística para interpretar fenômenos coletivos com forte complexidade intrínseca.

4.8.2 Índice q de sensibilidade de Tsallis (q_{sen})

Esse índice mede a sensibilidade às condições iniciais em sistemas dinâmicos complexos dentro do formalismo da estatística não-extensiva de Tsallis. Ele generaliza o conceito clássico de sensibilidade exponencial (ligada ao expoente de Lyapunov) e está diretamente relacionado à dispersão de trajetórias no espaço de fases.

Uma característica fundamental dos sistemas caóticos é a descrição de trajetórias irregulares no espaço de fases. Esse comportamento está intrinsecamente relacionado à instabilidade do sistema e ao crescimento da entropia [22].

A sensibilidade $\xi(t)$, mede a separação entre duas trajetórias inicialmente próximas no espaço de fases ao longo do tempo. Para trajetórias $x(t)$ e $x'(t)$ com condições iniciais $x(0)$ e $x'(0)$, definimos um pequeno desvio inicial como

$$\delta x(0) = x'(0) - x(0). \quad (4.27)$$

No instante t , a separação será

$$\delta x(t) = x'(t) - x(t), \quad (4.28)$$

$|\delta x(0)|$ é o módulo desse desvio.

A sensibilidade $\xi(x(0), \delta x(0), t)$ é então definida como

$$\xi(x(0), \delta x(0), t) \equiv \lim_{|\delta x(t)| \rightarrow 0} \frac{|\delta x(t)|}{|\delta x(0)|}. \quad (4.29)$$

onde $x(0)$ é a condição inicial no espaço de fases, $\delta x(0)$ representa um pequeno vetor de separação inicial no espaço de fases, $\delta x(t)$ é o desvio entre as trajetórias no instante t , $|\delta x(t)|$ é o módulo desse desvio no espaço de fases e t é o tempo. O limite é tomado para garantir que o desvio inicial seja infinitesimal.

Nos regimes caóticos, a separação entre as trajetórias $|\delta x(t)|$ cresce exponencialmente com o tempo, sendo descrita pela expressão

$$|\delta x(t)| = |\delta x(0)| e^{\lambda t}. \quad (4.30)$$

Substituindo essa expressão na definição de $\xi(t)$, tem-se

$$\xi(t) = \frac{|\delta x(t)|}{|\delta x(0)|} = \frac{|\delta x(0)| e^{\lambda t}}{|\delta x(0)|} = e^{\lambda t}, \quad (4.31)$$

em que λ é o coeficiente de Lyapunov e é formalmente definido como

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{|\delta x(0)| \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{|\delta x(t)|}{|\delta x(0)|} \right) \quad (4.32)$$

Esse coeficiente mede a taxa média de crescimento exponencial das separações entre trajetórias próximas. As possíveis situações são:

- i) $\lambda > 0$: Crescimento exponencial ($e^{\lambda t}$) indicando caos;
- ii) $\lambda = 0$: Crescimento algébrico (t^n) indicando caos fraco;
- iii) $\lambda < 0$: Decaimento exponencial ($e^{-\lambda t}$) indicando estabilidade local.

Importante notar que, em geral, o valor de λ é independente das condições iniciais $x(0)$ e $\delta x(0)$, refletindo uma propriedade global do sistema.

Sistemas com Dimensão $d > 1$: Espectro de Lyapunov

Para sistemas cujo espaço de fases possui dimensão $d > 1$, a dinâmica caótica é caracterizada por um espectro de coeficientes de Lyapunov, denotado por $[\lambda^k]$, onde $k = 1, 2, \dots, d$. Esse espectro fornece informações detalhadas sobre as direções de expansão e contração no espaço de fases, sendo essencial para a compreensão completa do comportamento caótico em sistemas de maior dimensionalidade [15].

Nos sistemas conservativos, o Teorema de Liouville garante a conservação do volume no espaço de fases, implicando que

$$\sum_{k=1}^d \lambda^k = 0. \quad (4.33)$$

Além disso, se o sistema também for simplético (isto é, obedecer à estrutura das

equações de Hamilton), os coeficientes de Lyapunov ocorrem em pares, cada um com o mesmo valor absoluto, mas com sinais opostos [15].

Classificação de Trajetórias com Base em λ

- (i) $\lambda < 0$: As trajetórias próximas convergem, resultando em órbitas regulares;
- (ii) $\lambda > 0$: As trajetórias próximas se afastam exponencialmente, indicando uma dinâmica caótica;
- (iii) $\lambda = 0$: Corresponde ao caos fraco, onde a separação entre trajetórias ocorre de forma algébrica, em vez de exponencial.

O caos fraco é observado em diversos sistemas físicos, biológicos e econômicos, nos quais a sensibilidade às condições iniciais tem uma dependência não-exponencial, muitas vezes associada a estruturas fractais no espaço de fases [15].

Formalismo Não-Extensivo e Sensibilidade q-Exponencial

Em sistemas cuja dinâmica se desenvolve sobre conjuntos invariantes não suaves (por exemplo, atratores com geometria complexa), a separação entre trajetórias inicialmente próximas pode apresentar crescimento não exponencial, típico de regimes de caos fraco (nos quais o expoente de Lyapunov ordinário satisfaz $\lambda = 0$). Nesses casos, propõe-se que a sensibilidade às condições iniciais seja descrita pela função q -exponencial,

$$\xi(t) = e_q^{\lambda_q t} \equiv [1 + (1 - q)\lambda_q t]^{1/(1-q)}, \quad q, \lambda_q \in \mathbb{R}, \quad (4.34)$$

onde q é o parâmetro não-extensivo e λ_q é o coeficiente de Lyapunov generalizado.

A relação entre λ e λ_q pode ser estabelecida de forma direta por meio do q -logaritmo,

$$\ln_q(x) \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \quad (4.35)$$

de modo que $\xi(t) = e_q^{\lambda_q t}$ é equivalente a

$$\ln_q(\xi(t)) = \lambda_q t \quad \Rightarrow \quad \lambda_q = \frac{1}{t} \ln_q(\xi(t)) = \frac{d}{dt} \ln_q(\xi(t)). \quad (4.36)$$

No limite $q \rightarrow 1$, recupera-se o caso extensivo: $\ln_q(x) \rightarrow \ln(x)$, $e_q^x \rightarrow e^x$ e, consequentemente,

$$\xi(t) \rightarrow e^{\lambda t}, \quad \lambda_q \rightarrow \lambda, \quad (4.37)$$

isto é, λ surge como o caso particular do formalismo generalizado quando o crescimento volta a ser exponencial. Assim, enquanto λ quantifica a divergência exponencial típica de caos forte,

λ_q parametriza a divergência q -exponencial (frequentemente associada a crescimento tipo lei de potência), apropriada para regimes não-hiperbólicos e de caos fraco. No limite $q \rightarrow 1$, a q -exponencial recupera a forma clássica, conduzindo a $\lambda_q \rightarrow \lambda$.

Essa conjectura foi validada analiticamente para bifurcações de forquilha e tangente, bem como no limiar do caos em mapas logísticos unimodais unidimensionais. Por meio de técnicas de renormalização, foi possível determinar os valores de q e λ_q analiticamente [119, 120].

Relação com Equações Diferenciais

A sensibilidade exponencial clássica é solução da equação diferencial

$$\dot{\xi} = \lambda \xi, \quad \xi(0) = 1. \quad (4.38)$$

A solução dessa equação é

$$\xi(t) = e^{\lambda t}. \quad (4.39)$$

De forma análoga, a sensibilidade q -exponencial é solução da equação diferencial generalizada

$$\dot{\xi} = \lambda_q \xi^q, \quad \xi(0) = 1. \quad (4.40)$$

A solução dessa equação é a q -exponencial

$$\xi(t) = e_q^{(\lambda_q t)} = [1 + (1 - q)\lambda_q t]^{1/(1-q)}. \quad (4.41)$$

Essa generalização reforça a aplicabilidade do formalismo não-extensivo para descrever sistemas complexos que fogem ao paradigma clássico da mecânica estatística.

4.8.3 Índice q de relaxação de Tsallis (q_{rel})

Esse (q_{rel}) índice está relacionado ao comportamento de relaxação (ou dissipação) de sistemas complexos descritos pela estatística não-extensiva de Tsallis. Ele quantifica como um sistema retorna ao equilíbrio após uma perturbação, sendo uma generalização do decaimento exponencial clássico.

Considere um observável arbitrário $\Omega(t)$, devidamente normalizado, que relaxa em direção ao seu valor de estado estável, como ocorre em sistemas que tendem ao equilíbrio termodinâmico [15]. Em muitos casos, a evolução temporal desse observável pode ser descrita por uma equação diferencial linear do tipo

$$\frac{d\Omega(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\Omega(t), \quad (4.42)$$

em que $\tau > 0$ representa o tempo característico de relaxação. A solução da Equação (4.42), obtida por separação de variáveis, resulta na expressão

$$\frac{d\Omega(t)}{\Omega(t)} = -\frac{1}{\tau}dt. \quad (4.43)$$

Integrando ambos os lados

$$\int \frac{d\Omega(t)}{\Omega(t)} = -\int \frac{1}{\tau}dt, \quad (4.44)$$

resultando em

$$\ln \Omega(t) = -\frac{t}{\tau} + C, \quad (4.45)$$

sendo C uma constante de integração. Reescrevendo a solução em função da condição inicial $\Omega(0) = e^C$, obtém-se:

$$\Omega(t) = \Omega(0)e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (4.46)$$

que representa um decaimento exponencial. Essa forma de relaxação é amplamente observada em sistemas lineares e regulares, cuja dinâmica se ajusta aos princípios da mecânica estatística clássica de Boltzmann-Gibbs.

Um exemplo paradigmático ocorre no limiar do caos em mapas logísticos, nos quais o expoente de Lyapunov tende a zero e o tempo de relaxação τ diverge. Nessa condição crítica, a dinâmica do sistema não pode mais ser descrita por uma equação linear, sendo necessário adotar uma generalização não linear da forma [15]:

$$\frac{d\Omega(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau_{q_{rel}}}\Omega(t)^{q_{rel}}, \quad (4.47)$$

em que

- i) q_{rel} é o índice de relaxação, que caracteriza o grau de não-linearidade do processo;
- ii) $\tau_{q_{rel}}$ é o tempo de relaxação para o sistema não-exponencial;
- iii) $\Omega(t)^{q_{rel}}$ descreve a dependência não linear da variável dinâmica.

Aplicando a separação de variáveis na Equação (4.47), obtém-se

$$\frac{d\Omega(t)}{\Omega(t)^{q_{rel}}} = -\frac{1}{\tau_{q_{rel}}}dt. \quad (4.48)$$

Integrando ambos os lados e assumindo ($q \neq 1$) obtém-se

$$\int \Omega(t)^{-q_{rel}} d\Omega(t) = \frac{\Omega(t)^{1-q_{rel}}}{1-q_{rel}} = -\frac{t}{\tau_{q_{rel}}} + C. \quad (4.49)$$

Ajustando a constante de integração à condição inicial $\Omega(0)$, obtém-se a solução geral

$$\Omega(t) = \left[\Omega(0)^{1-q_{rel}} - \frac{1-q_{rel}}{\tau_{q_{rel}}} t \right]^{1/(1-q_{rel})}. \quad (4.50)$$

Essa expressão é equivalente à função q -exponencial de Tsallis, definida por

$$\Omega(t) \sim e_q^{(-t/\tau_q)} = \left[1 - (1-q) \frac{t}{\tau_{q_{rel}}} \right]^{1/(1-q)}, \quad (4.51)$$

onde:

- i) $\tau_{q_{rel}} > 0$ é o tempo característico generalizado de relaxação;
- ii) $q_{rel} > 0$ descreve a não-linearidade do processo generalizado de relaxação.

válida para $(1-q) \frac{t}{\tau_{q_{rel}}} > 0$, condição que garante a positividade do argumento da função.

Esse tipo de relaxação não exponencial está frequentemente associado a fenômenos de *aging* (envelhecimento dinâmico), nos quais as propriedades de relaxação do sistema dependem explicitamente do tempo de observação e da história prévia da dinâmica, caracterizando a quebra da invariância por translação temporal. Adicionalmente, tais comportamentos emergem em sistemas com memória de longo alcance, nos quais as correlações temporais decaem lentamente, de modo não integrável, impedindo a descrição por leis de relaxação exponenciais usuais. Esses efeitos têm sido amplamente evidenciados em estudos experimentais e computacionais [121, 122].

No contexto de mapas logísticos unimodais, o índice (q_{rel}) está intimamente relacionado à estrutura multifractal do atrator no limiar do caos, estabelecendo uma conexão direta entre a geometria do espaço de fases e a dinâmica temporal do sistema. Esse comportamento, no entanto, não se restringe a sistemas de baixa dimensionalidade, sendo também identificado em modelos Hamiltonianos, sistemas artificiais e outras classes de dinâmicas complexas [14, 123, 124].

Atualmente, diversas investigações buscam compreender os mecanismos que conduzem à relaxação não exponencial. Dentre os principais aspectos discutidos, destacam-se a correlação entre esse tipo de relaxação e a anulação do expoente de Lyapunov, característica de regimes de caos fraco [125–127], e a inter-relação entre (q_{rel}) e os demais elementos do q -tripleto da estatística não extensiva: o índice (q_{sen}), que mede a sensibilidade às condições iniciais, e o índice (q_{stat}), associado ao comportamento estatístico estacionário [100].

Essas evidências reforçam a relevância do formalismo não extensivo de Tsallis na descrição de dinâmicas complexas, especialmente em cenários nos quais os pressupostos da mecânica estatística clássica deixam de ser válidos. Sua capacidade de capturar efeitos não lineares, correlações de longo alcance e estruturas multiescalares o torna uma poderosa ferramenta para o estudo da relaxação em sistemas fora do equilíbrio.

4.9 Análise da relação entre os índices do q -tripleto

O interesse na determinação experimental dos índices que compõem o q -tripleto tem crescido significativamente nas últimas décadas, especialmente em contextos astrofísicos e sistemas complexos não-equilibrados. Em um estudo pioneiro, Burlaga e Viñas, do NASA/GSFC, determinaram pela primeira vez os três índices do q -tripleto a partir de dados experimentais obtidos pela sonda Voyager 1 [20]. Desde seu lançamento em 1977, a Voyager 1 vem registrando medições da intensidade do campo magnético interplanetário B ao longo de sua trajetória. A partir de 2004, a sonda passou a operar na heliosfera distante, região além da influência direta do Sol, onde realiza observações diárias do campo magnético local.

A análise dessas séries temporais de B permitiu obter a função de densidade de probabilidade das flutuações do campo magnético, a partir da qual foi possível determinar o índice estatístico estacionário (q_{stat}). Por meio de uma análise multifractal, utilizando o espectro de singularidades $f(\alpha)$, estimou-se o índice de sensibilidade às condições iniciais (q_{sen}). Finalmente, o índice de relaxação (q_{rel}) foi calculado com base na função de autocorrelação temporal dos dados.

Cada um desses índices é extraído por técnicas específicas, análise multifractal, correlação temporal e ajuste q -Gaussiano, que serão apresentadas em maior detalhe no Capítulo seguinte, onde se descreve a aplicação prática dessas abordagens às séries temporais das ondas gravitacionais.

Com isso, foi possível determinar empiricamente o q -tripleto para esse ambiente astrofísico

$$(q_{sen}, q_{rel}, q_{stat}) = (-0,6 \pm 0,2, 3,8 \pm 0,3, 1,75 \pm 0,06). \quad (4.52)$$

Posteriormente, de Freitas e De Medeiros [19] estenderam a aplicação do formalismo não extensivo ao estudo da atividade magnética solar, com foco na fase ascendente do ciclo solar 23 (1996–2001). Utilizando séries temporais da intensidade da radiação solar e de indicadores da atividade magnética, os autores calcularam os três índices do q -tripleto de Tsallis (q_{sen}), (q_{rel}) e (q_{stat}), com o objetivo de caracterizar a dinâmica subjacente aos processos físicos que ocorrem na heliosfera durante esse período.

Nesse estudo, os seguintes procedimentos metodológicos foram adotados:

- i) O índice (q_{sen}) foi estimado por meio de análise multifractal do espectro de singularidades, refletindo a sensibilidade do sistema às condições iniciais;
- ii) O índice (q_{rel}) foi determinado a partir da análise do decaimento de correlação temporal e da informação mútua média, representando a dinâmica de relaxação do sistema;
- iii) O índice (q_{stat}) foi obtido via ajuste de funções q -Gaussianas à distribuição de probabilidade das flutuações da atividade solar, capturando o comportamento estatístico estacionário.

Os valores obtidos apresentaram as seguintes características:

- ($q_{sen} < 1$): indicando comportamento de caos fraco, com separação subexponencial entre trajetórias próximas;
- ($q_{rel} > 1$): refletindo um decaimento lento das correlações temporais, característico de sistemas com memória de longo alcance;
- ($q_{stat} > 1$): evidenciando distribuições com caudas pesadas, associadas a intermitência e ocorrência de eventos extremos.

Esses resultados, significativamente distintos da unidade, indicam que a dinâmica da atividade magnética solar no período analisado não é adequadamente descrita pelos pressupostos da mecânica estatística de Boltzmann–Gibbs, sendo mais bem representada pelo formalismo não extensivo de Tsallis. Nesse contexto, o estudo de Freitas e De Medeiros constitui um marco relevante na validação empírica do q -tripleto como ferramenta descritiva da complexidade em sistemas astrofísicos, ao evidenciar a presença simultânea de não extensividade estatística, sensibilidade anômala às condições iniciais e relaxação não exponencial [24].

A partir desses avanços, a aplicação do q -tripleto passou a emergir como uma abordagem promissora para a caracterização de fenômenos astrofísicos complexos fora do equilíbrio. Resultados mais recentes, incluindo a aplicação desse formalismo à série temporal da onda gravitacional associada ao evento GW150914, revelaram assinaturas claras de complexidade multiescalar, relaxação não exponencial e estatística não Gaussiana, reforçando a adequação do formalismo de Tsallis para a descrição de dinâmicas gravitacionais extremas [21].

O presente estudo dá continuidade e aprofunda essa abordagem, adotando metodologia análoga para o cálculo sistemático dos índices do q -tripleto não apenas para o evento GW150914, mas também para outras ondas gravitacionais disponíveis, com o objetivo de verificar se tais eventos cosmológicos compartilham propriedades universais associadas à dinâmica complexa fora do equilíbrio.

5 METODOLOGIA

Este trabalho fundamenta-se na análise estatística de sinais de ondas gravitacionais registrados pelos interferômetros avançados LIGO e VIRGO. Tradicionalmente, esses sinais têm sido analisados por meio de técnicas como wavelets e inferência bayesiana [128]. No entanto, este projeto propõe uma abordagem alternativa baseada em modelos estatísticos não convencionais, com ênfase na estatística não-extensiva de Tsallis. Essa estrutura teórica se mostra particularmente adequada para a descrição de flutuações multiescalares em séries temporais ruidosas e complexas, permitindo a incorporação de efeitos de vizinhança ao longo de escalas temporais variadas por meio da análise dos incrementos $\Delta h(t, \tau)$. A metodologia adotada visa, assim, investigar a fenomenologia associada ao comportamento dinâmico desses sinais sob uma perspectiva complementar, ou mesmo alternativa, à formulação tradicional da Relatividade Geral.

Os dados analisados nesta pesquisa foram obtidos do repositório público *Gravitational Wave Open Science Center* (GWOSC) [129], mantido pelas colaborações LIGO e VIRGO. Este acervo disponibiliza séries temporais associadas a eventos de ondas gravitacionais registrados pelos interferômetros Hanford (H) e Livingston (L), abrangendo tanto eventos confirmados, que passaram por processos sistemáticos de calibração, limpeza e validação estatística, quanto eventos em fase preliminar, cuja análise ainda está em andamento e pode sofrer revisões.

O acesso aos dados foi realizado por meio da *Application Programming Interface* API oficial do GWOSC, disponível em: <https://gwosc.org/eventapi/html/GWTC/>. Os sinais extraídos referem-se ao canal de deformação espaço-temporal $h(t)$, utilizados para as análises estatísticas não extensivas propostas nesta tese.

5.1 Fundamentos de análise de séries temporais

A análise de séries temporais constitui uma ferramenta fundamental para a investigação de sistemas dinâmicos complexos, particularmente quando os dados observados resultam de processos físicos estocásticos e fora do equilíbrio [130]. De modo geral, uma série temporal pode ser definida como uma sequência ordenada de observações $\{x(t_i)\}$ registradas ao longo do tempo, representando a evolução de uma variável associada a um determinado sistema físico [131]. No contexto desta tese, os sinais de ondas gravitacionais detectados pelos interferômetros do LIGO são tratados como realizações de processos estocásticos não triviais, nos quais coexistem ruído instrumental e assinaturas físicas de origem astrofísica.

Um processo estocástico pode ser caracterizado pela natureza estatística de suas

flutuações, sendo comum a distinção entre ruído branco, caracterizado por correlações temporais nulas e espectro de potência plano, e ruídos coloridos, nos quais existem dependências temporais e espectros de potência do tipo lei de potência [132]. Sistemas físicos reais, especialmente aqueles associados a interações de longo alcance e dinâmica fora do equilíbrio, raramente exibem comportamento puramente branco, apresentando estruturas correlacionadas em múltiplas escalas temporais [133].

Um conceito central na análise estatística de séries temporais é o de estacionariedade [132]. Um processo é dito estritamente estacionário quando todas as suas distribuições estatísticas são invariantes sob translações temporais. Na prática, entretanto, costuma-se trabalhar com a noção de estacionariedade fraca, na qual apenas os primeiros momentos estatísticos, média e função de autocorrelação, são invariantes no tempo [134]. A distinção entre estacionariedade fraca e forte torna-se particularmente relevante em sistemas complexos, nos quais a presença de não linearidades, memória de longo tempo e flutuações intermitentes pode violar as hipóteses clássicas da mecânica estatística de Boltzmann–Gibbs [27].

A presença de correlações de longo alcance em uma série temporal manifesta-se quando a função de autocorrelação decai lentamente, tipicamente segundo uma lei de potência, indicando que flutuações separadas por longos intervalos de tempo não são estatisticamente independentes. Tal comportamento é frequentemente quantificado por meio do expoente de Hurst [?], que permite distinguir entre processos persistentes, antipersistentes e não correlacionados. Em muitos sistemas naturais, incluindo sinais astrofísicos, essas correlações estão associadas a uma organização multiescala da dinâmica [135].

Em situações ainda mais complexas, a série temporal pode exibir multifractalidade, caracterizada pela coexistência de múltiplos expoentes de escala, refletindo uma hierarquia de flutuações com diferentes intensidades e correlações. A multifractalidade fornece uma descrição mais rica da dinâmica do sistema do que abordagens monofractais e tem sido amplamente empregada na análise de fenômenos fora do equilíbrio [136]. Nesse contexto, a estatística não extensiva de Tsallis emerge como um arcabouço teórico natural para a descrição dessas séries temporais, uma vez que incorpora explicitamente efeitos de correlação de longo alcance, não ergodicidade e heterogeneidade dinâmica, estabelecendo uma ponte conceitual direta entre a teoria estatística e os métodos empregados na análise dos sinais de ondas gravitacionais.

5.1.1 Formalismo não extensivo de Tsallis aplicado às séries temporais

A análise estatística de séries temporais associadas a sistemas físicos complexos frequentemente revela limitações dos formalismos clássicos baseados na entropia de Boltzmann–Gibbs, especialmente quando tais séries exibem correlações de longo alcance, não estacionarie-

dade, memória temporal e organização multifractal [27]. Nessas situações, as hipóteses fundamentais de extensividade e ergodicidade, implícitas na mecânica estatística tradicional, podem não ser plenamente satisfeitas, motivando a adoção de generalizações entrópicas mais abrangentes.

Nesse contexto, a estatística não extensiva proposta por Tsallis introduz uma generalização da entropia clássica por meio de um índice real q , o qual quantifica desvios em relação ao comportamento extensivo. Para $q = 1$, recupera-se a entropia de Boltzmann-Gibbs, enquanto valores $q \neq 1$ estão associados a sistemas com interações de longo alcance, correlações persistentes e dinâmica fora do equilíbrio. Essa generalização tem se mostrado particularmente adequada para a descrição estatística de séries temporais complexas, nas quais flutuações em múltiplas escalas desempenham papel fundamental.

No caso de séries temporais multifractais, o formalismo não extensivo fornece uma interpretação natural para a coexistência de diferentes regimes de escala e intensidades de flutuação. Em particular, o chamado q -tripleto, composto pelos índices (q_{stat}), (q_{sen}) e (q_{rel}), permite caracterizar, respectivamente, as propriedades estatísticas estacionárias, a sensibilidade a condições iniciais e os mecanismos de relaxação do sistema. Essa estrutura conceitual estabelece uma ponte direta entre a teoria estatística e os métodos empregados na análise de séries temporais de ondas gravitacionais, justificando a aplicação do formalismo de Tsallis no tratamento dos dados observacionais considerados nesta tese.

5.2 Seleção das amostras de ondas gravitacionais

Os detectores LIGO e VIRGO disponibilizam sinais de ondas gravitacionais em diferentes configurações de taxa de amostragem, associadas a múltiplas resoluções temporais. As combinações mais comuns envolvem janelas de 32 e 4096 segundos com frequências de amostragem de 4 kHz ou 16 kHz, resultando em quatro formatos principais: 32 s/4 kHz, 32 s/16 kHz, 4096 s/4 kHz e 4096 s/16 kHz. Esses dados são fornecidos nos formatos GWF (formato nativo), HDF5 e TXT, amplamente utilizados pela comunidade científica [137].

Neste trabalho, optou-se pela amostragem de 32 segundos a 16 kHz, no formato TXT. Essa escolha foi motivada pela elevada resolução temporal oferecida, que favorece análises espectrais refinadas e a detecção de estruturas de alta frequência, possivelmente comprometidas em configurações com menor taxa de amostragem.

Para fins comparativos, a versão reduzida a 4 kHz corresponde a 4096 amostras por segundo. Embora essa redução mantenha a faixa de frequência útil das ondas gravitacionais (~ 10 Hz a ~ 1 kHz), a resolução espectral é substancialmente inferior, tornando-a menos adequada para estudos que envolvem estruturas de alta frequência ou modelagens complexas do ruído instrumental [138].

A classificação dos eventos foi baseada na natureza dos sistemas astrofísicos emissores das ondas gravitacionais, conforme descrito nos catálogos GWTC (*Gravitational-Wave Transient Catalog*). São consideradas três classes principais: binárias de buracos negros (BBH — *Binary Black Hole*), binárias de estrelas de nêutrons (BNS — *Binary Neutron Stars*), e sistemas mistos de buraco negro com estrela de nêutrons (BH-NS — *Black Hole–Neutron Star*). Para fins desta investigação, priorizou-se exclusivamente a análise dos eventos classificados como BBH. Essa escolha deve-se à predominância estatística desses eventos, à maior amplitude dos sinais envolvidos, à frequência mais favorável à detecção por interferometria a laser e à maior profundidade cosmológica alcançada, o que os torna os mais robustos para caracterização estatística e espectral [139].

Todos os dados utilizados referem-se às versões mais atualizadas e refinadas dos eventos, conforme disponibilizadas nas revisões sucessivas dos catálogos GWTC-1, GWTC-2.1 e GWTC-3. Isso se justifica pela política de reprocessamento contínuo das colaborações LIGO/VIRGO, que frequentemente atualizam os dados após avanços nos modelos de ruído, calibração e inferência bayesiana dos parâmetros físicos dos sistemas [140].

A seleção dos eventos foi conduzida por meio de scripts em linguagem Python, implementados na IDE PyCharm, utilizando a biblioteca gwosc, desenvolvida por Macleod *et al.* [137]. Essa biblioteca permite o acesso programático aos arquivos do *Gravitational Wave Open Science Center* (GWOSC), viabilizando o download automatizado, filtragem e extração das informações relevantes.

Cabe ressaltar que, embora a maioria dos eventos contenha registros simultâneos provenientes dos dois detectores principais, LIGO Hanford (H) e LIGO Livingston (L), em alguns casos apenas um dos detectores estava em operação ou o sinal em um deles não foi considerado confiável. Nesses casos, a análise foi realizada com base nas informações provenientes de um único interferômetro, preservando o critério de qualidade do sinal.

Ao término do processo de seleção e filtragem automatizada, foram identificados 103 eventos de ondas gravitacionais registrados nos catálogos GWTC-1, GWTC-2.1 e GWTC-3. Dentre esses, 87 eventos atenderam aos critérios de elegibilidade para classificação como sistemas binários de buracos negros (BBH), sendo, portanto, incluídos na amostra final analisada neste estudo. A Tabela 2 apresenta uma amostra reduzida desses eventos, contendo o identificador do evento, a versão dos dados utilizada, o catálogo de origem e a disponibilidade dos sinais de strain registrados pelos detectores LIGO Hanford (H) e LIGO Livingston (L).

Os critérios de elegibilidade foram definidos com base em requisitos observacionais, computacionais e metodológicos. Foram selecionados exclusivamente os eventos:

- i) Classificados com alta confiança como sistemas BBH nos catálogos oficiais GWTC;

- ii) Que apresentassem disponibilidade do sinal de deformação $h(t)$ para ambos os detectores (H1 e L1), no formato .txt, com resolução temporal de 16 kHz e janela de 32 segundos;
- iii) Com arquivos completos, calibrados e validados pela colaboração LIGO-VIRGO, excluindo eventos com inconsistências temporais, ruído instrumental excessivo ou status de candidato marginal;
- iv) Isolados temporalmente, de modo a evitar interferências causadas por sobreposição com outros eventos em janelas próximas.

Nesta Tabela 2, adota-se a seguinte convenção de notação: o símbolo (✓) indica que os dados do respectivo detector foram considerados válidos, ou seja, estão disponíveis, íntegros e aptos para as análises subsequentes; já o símbolo (✗) sinaliza que os dados foram descartados por estarem ausentes, incompletos, corrompidos ou por não atenderem aos critérios mínimos de qualidade estabelecidos para este trabalho.

Tabela 2 – Lista de eventos de ondas gravitacionais do tipo BBH detectados.

Nº	Evento	Version	Release	Data de Detecção (L) (H)		
1	GW150914	v3	GWTC-1-confident	2015 (O2)	✓	✓
2	GW151012	v3	GWTC-1-confident	2015 (O2)	✓	✓
3	GW151226	v2	GWTC-1-confident	2015 (O2)	✓	✓
4	GW170104	v2	GWTC-1-confident	2017 (O2)	✓	✓
5	GW170608	v3	GWTC-1-confident	2017 (O2)	✓	✓
6	GW170729	v1	GWTC-1-confident	2017 (O2)	✓	✓
7	GW170809	v1	GWTC-1-confident	2017 (O2)	✓	✓
8	GW170814	v3	GWTC-1-confident	2017 (O2)	✓	✓
9	GW170818	v1	GWTC-1-confident	2017 (O2)	✓	✓
10	GW170823	v1	GWTC-1-confident	2017 (O2)	✓	✓
11	GW190403.051519	v1	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
12	GW190408.181802	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓

Fonte: Elaborada pelo autor com base nos catálogos GWTC-1, GWTC-2.1 e GWTC-3.

A avaliação da integridade e da disponibilidade dos dados resultou no seguinte panorama estatístico da amostra BBH:

- i) **Total de eventos BBH selecionados:** Do total de 87 eventos BBH inicialmente selecionados;
- ii) **Eventos com dados completos** (sinais disponíveis em ambos os detectores): 79 apresentaram dados completos em ambos os detectores;
- iii) **Eventos com dados incompletos** (Eventos com dados incompletos (ausência ou indisponibilidade da série temporal calibrada de $h(t)$ em ao menos um dos detectores LIGO

Hanford ou LIGO Livingston): 8. Em tais casos, os dados correspondentes não estavam integralmente disponíveis no repositório público do *Gravitational Wave Open Science Center* (GWOSC), seja por ausência de liberação da série temporal completa, seja por limitações associadas ao processo de calibração e validação dos dados, inviabilizando sua inclusão na amostra principal.

A aplicação desses critérios visa assegurar a consistência metodológica das análises subsequentes, priorizando eventos com registros completos e simultâneos nos dois interferômetros (H1 e L1), sempre que disponíveis. Nessa perspectiva, a amostra principal é composta majoritariamente por eventos com dados completos em ambos os detectores.

Dos eventos inicialmente identificados, 14 foram classificados como não-BBH (isto é, sistemas compostos por estrelas de nêutrons (BNS), ou mistos (BH-NS)), sendo, portanto, excluídos da análise principal. Outros dois eventos apresentaram inconsistências críticas nos arquivos disponibilizados pelo GWOSC, o que inviabilizou sua inclusão. A listagem completa dos 79 eventos selecionados, juntamente com os critérios individuais de aceitação e descarte, encontra-se disponível no Apêndice B.

5.3 Tratamento das séries temporais das ondas gravitacionais

Os dados das ondas gravitacionais selecionados, embora válidos em termos de integridade estrutural, não se encontram imediatamente prontos para a aplicação direta das análises estatísticas propostas neste estudo. Isso se deve à presença dominante de componentes de baixa frequência com alta amplitude, que acabam por mascarar o sinal físico da onda gravitacional propriamente dito.

Na prática, o sinal gravitacional está imerso em um ambiente altamente ruidoso, no qual o ruído instrumental e ambiental apresenta maior intensidade justamente nas faixas de baixa frequência. Tal característica dificulta a identificação precisa da deformação do espaço-tempo ($h(t)$), exigindo o uso de técnicas específicas de tratamento espectral e filtragem para isolar o conteúdo informativo relevante à dinâmica física do fenômeno analisado.

Todas as etapas de pré-processamento e filtragem espectral foram conduzidas utilizando o pacote GWpy, uma biblioteca desenvolvida em Python dedicada à manipulação e análise dos dados provenientes dos detectores LIGO e VIRGO [137].

Segundo Abbott *et al.* (2016), os detectores do LIGO apresentam maior sensibilidade na faixa de frequências entre 50 Hz e 300 Hz, intervalo que corresponde à região de maior relação sinal-ruído para detecção de OGs astrofísicas [29]. Com base nesse intervalo, adotou-se neste trabalho uma margem estendida de 40 Hz a 350 Hz, de modo a garantir um equilíbrio entre a exclusão do ruído e a preservação de possíveis componentes relevantes do sinal.

É importante destacar que o intervalo entre 30 Hz e 38 Hz foi propositalmente evitado, uma vez que compreende as chamadas linhas de calibração dos detectores, responsáveis por introduzirem artefatos espectrais recorrentes e sistemáticos nos dados observacionais [141].

O primeiro passo do tratamento envolveu a aplicação de uma Transformada Rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform* FFT) sobre o sinal bruto de *strain*, possibilitando a construção da Densidade Espectral de Amplitude (ASD – *Amplitude Spectral Density*), com a qual se tornou possível visualizar o conteúdo espectral e identificar regiões contaminadas por ruído.

Na sequência, foi aplicado um filtro passa-banda (*band-pass filter*) com frequência mínima de 40 Hz e máxima de 350 Hz, por meio da função `bandpass()` da biblioteca `GWpy`. Tal filtro atenua os componentes de frequência fora da região de interesse, suprimindo significativamente o ruído de baixa frequência (inferior a 40 Hz) e eliminando componentes superiores a 350 Hz, os quais são predominantemente associados a ruídos técnicos e limitações instrumentais dos interferômetros.

Mesmo após essa filtragem, verificou-se a presença persistente de picos espectrais de alta amplitude que não são compatíveis com a natureza física esperada para os sinais gravitacionais, notadamente por sua baixa amplitude característica. Esses picos ocorrem em frequências específicas e recorrentes, em especial em 60 Hz, que corresponde à frequência da rede elétrica, e em seus harmônicos mais comuns (como 120 Hz e 180 Hz). Tais componentes são fontes bem conhecidas de interferência eletromagnética nos detectores LIGO/VIRGO [66].

Para suprimir essas interferências espectralmente localizadas, aplicou-se um filtro rejeita-faixa (*notch filter*), cuja função é eliminar seletivamente as bandas contaminadas, preservando as regiões vizinhas do espectro nas quais o sinal gravitacional real pode estar presente. Essa etapa também foi conduzida utilizando as funções especializadas da biblioteca `GWpy`.

A janela temporal utilizada na análise não é arbitrária nem fixa, sendo definida a partir de uma relação funcional com a massa final estimada da fonte binária. Dessa forma, a largura da janela reflete a escala temporal física associada à dinâmica do sinal de onda gravitacional, em particular ao regime de inspiral e coalescência. Embora variável entre eventos, a janela mantém caráter físico, pois se adapta às propriedades intrínsecas do sistema, garantindo consistência entre sinais de diferentes massas.

5.3.1 Pré-processamento e filtragem espectral dos sinais gravitacionais

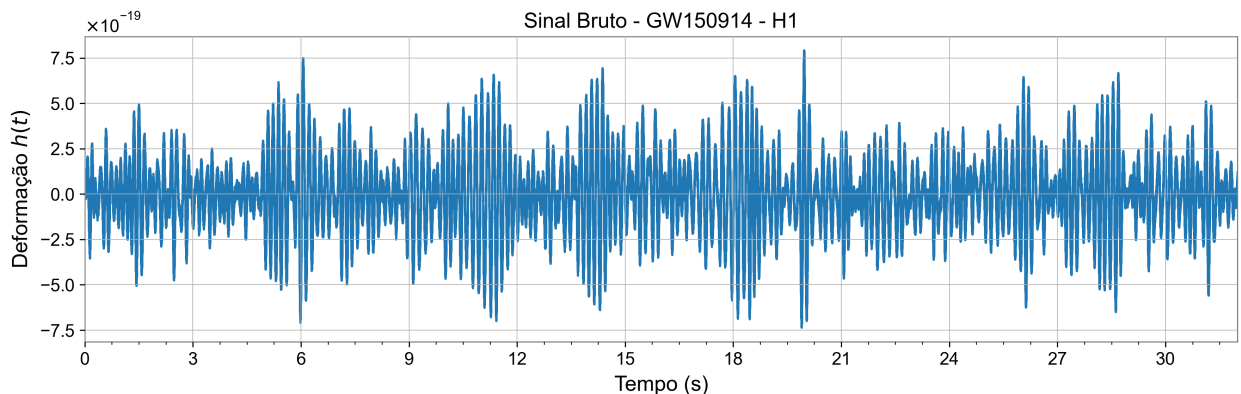
Para fins metodológicos e ilustrativos, o evento GW150914 foi selecionado como estudo de caso nesta tese, com o objetivo de demonstrar, de forma clara e replicável, as etapas de aquisição, recorte temporal, pré-processamento e análise espectral aplicadas aos sinais de ondas gravitacionais. Os dados analisados referem-se à versão 3, correspondente ao terceiro catálogo de eventos transitórios de ondas gravitacionais (GWTC-3 — *Gravitational-Wave Transient Ca-*

talog 3), disponibilizado pela colaboração LIGO/Virgo/KAGRA. Esse catálogo fornece séries temporais com taxa de amostragem de 16.384 Hz e duração de 32 segundos por segmento, contendo os sinais dos eventos e os respectivos ruídos instrumentais associados.

A coalescência de buracos negros constitui um fenômeno astrofísico extremamente rápido, sobretudo quando comparado à fusão de estrelas de nêutrons. A maior parte da informação gravitacional relevante está concentrada em janelas temporais de poucos décimos de segundo (Abbott et al., 2016; Buonanno & Damour, 2000) [29, 142], ao passo que a fusão de estrelas de nêutrons pode produzir sinais de duração muito mais longa (Abbott et al., 2017) [143]. Nessa escala, os sinais observados incluem tanto a passagem da onda gravitacional quanto diversos ruídos instrumentais e ambientais, os quais dificultam a identificação precisa da estrutura do transiente.

A Figura 15 apresenta o sinal bruto de *strain* registrado pelo detector LIGO Hanford (H1) associado ao evento GW150914. Os dados foram obtidos diretamente do *Gravitational Wave Open Science Center* (GWOSC) por meio da função `fetch_open_data` da biblioteca `GWpy`, considerando segmentos temporais de 32 s amostrados a uma frequência de 16384 Hz. Nesta etapa, não foi aplicado qualquer procedimento de filtragem ou remoção de ruído, de modo a preservar integralmente as características instrumentais originais do sinal.

Figura 15 – Sinal bruto do evento GW150914 registrado pelo detector Hanford (H1).

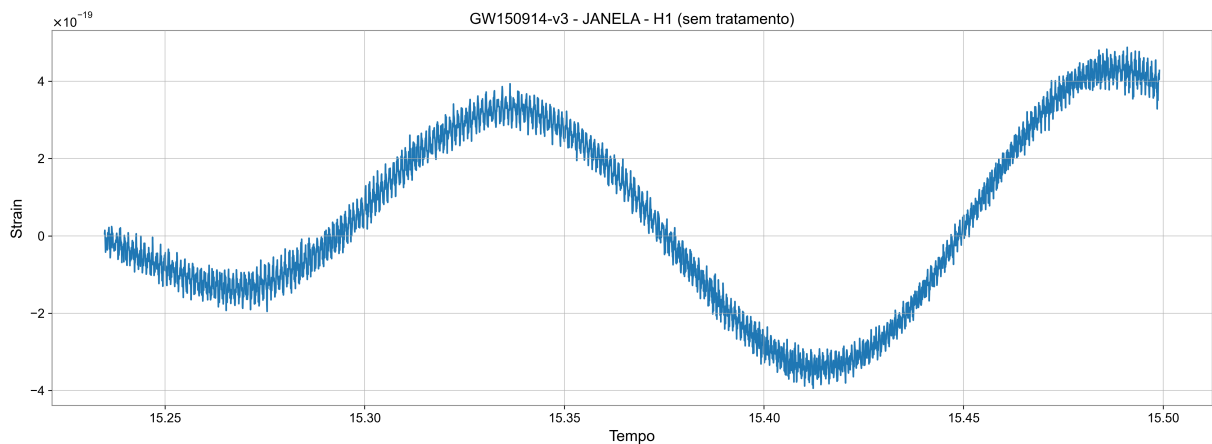


Fonte: Elaborada pelo autor com base em dados públicos do LIGO Open Science Center.

A Figura 16 apresenta uma ampliação temporal da região do sinal na qual ocorre o evento GW150914, com o objetivo de evidenciar a estrutura da onda gravitacional. Nessa representação, observa-se a predominância de componentes de baixa frequência associadas a amplitudes elevadas, características do estágio inicial do sinal e da dinâmica inspiral do sistema binário.

Conforme ilustrado anteriormente na Figura 15, os dados registrados pelo detector Hanford (H1) são apresentados originalmente no domínio do tempo. Essa representação, embora útil para descrever a evolução temporal do sinal de *strain*, é limitada no que se refere à identificação das componentes espectrais, as quais são essenciais tanto para o diagnóstico de

Figura 16 – Ampliação temporal do sinal bruto de *strain* do evento GW150914 registrado pelo detector LIGO Hanford (H1), evidenciando a região da onda gravitacional antes de qualquer tratamento em frequência.



Fonte: Elaborada pelo autor com base em dados públicos do LIGO Open Science Center.

ruídos quanto para a detecção de transientes gravitacionais.

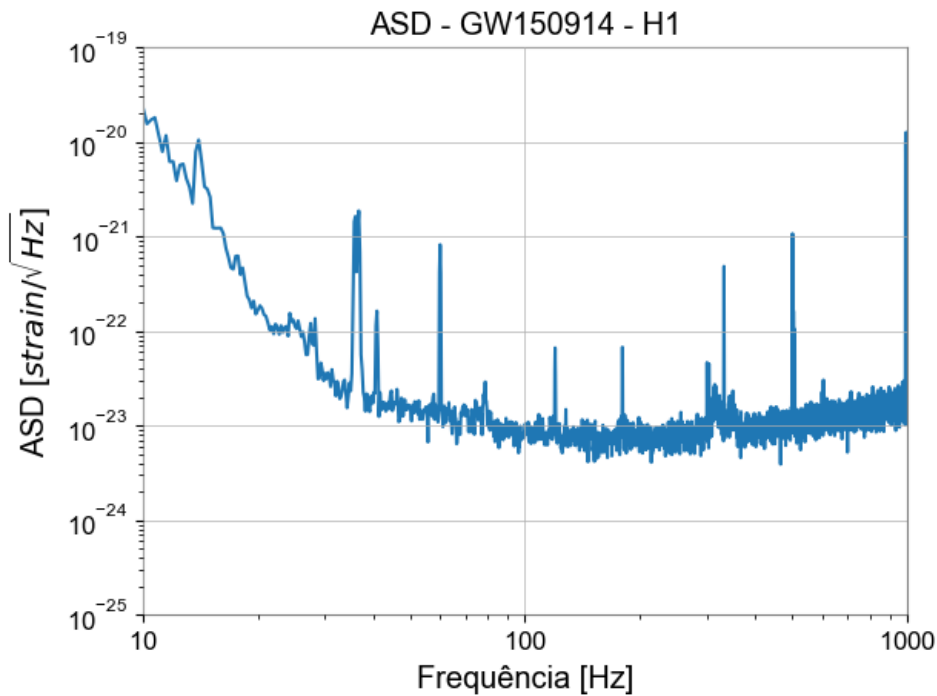
Para superar essa limitação, aplicou-se a Transformada Rápida de Fourier, FFT, uma técnica matemática amplamente utilizada na análise de séries temporais. A FFT permite converter o sinal do domínio temporal para o domínio da frequência, decompondo-o em suas componentes harmônicas fundamentais. Essa transformação possibilita a identificação precisa das frequências com maior densidade espectral de energia, bem como a detecção de interferências sistemáticas e ruídos não astrofísicos [29].

A Figura 17 apresenta o espectro de amplitude resultante após a aplicação da FFT aos dados do evento GW150914. Nela, observam-se picos espectrais bem definidos, que indicam a presença de frequências dominantes, muitas das quais associadas a ruídos instrumentais, como harmônicos da rede elétrica ou vibrações mecânicas internas aos interferômetros. Essa visualização é fundamental para orientar as etapas subsequentes de filtragem e remoção seletiva de ruídos, contribuindo para o aprimoramento da razão sinal-ruído (SNR) e a recuperação das assinaturas gravitacionais genuínas.

Como etapa complementar, foi utilizado um filtro rejeita-faixa (*notch filter*) para remover frequências espúrias associadas à rede elétrica e seus harmônicos, que afetam criticamente experimentos de alta sensibilidade, como os conduzidos pelo LIGO. As frequências eliminadas foram as de 41 Hz, 60 Hz, 120 Hz, 180 Hz, 299 Hz, 303 Hz e 332 Hz, por estarem associadas a ruídos técnicos, harmônicos da rede elétrica e ressonâncias mecânicas dos detectores [7].

A justificativa para a exclusão de cada uma dessas componentes espectrais, com base em documentação técnica dos detectores LIGO (Covas et al., 2018; Aasi et al., 2015) [9, 141]:

Figura 17 – Densidade espectral de amplitude (ASD) do evento GW150914 obtido após a aplicação da FFT.

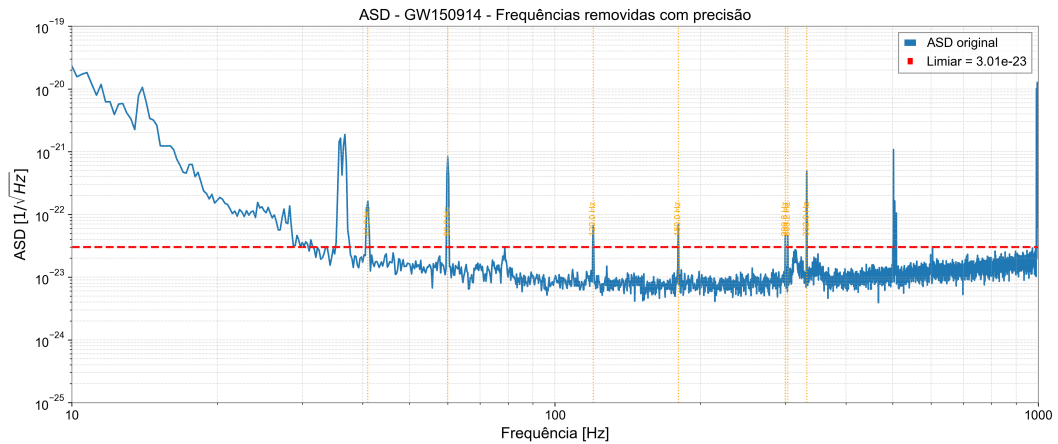


Fonte: Elaborado pelo autor.

- **60 Hz:** Corresponde à frequência da rede elétrica nos EUA, uma das fontes de ruído técnico mais comuns, conhecida como *power-line noise*. É amplamente reconhecida em todas as análises espectrais de LIGO;
- **120 Hz e 180 Hz:** São o segundo e terceiro harmônicos da linha de 60 Hz, geralmente presentes devido à não linearidade de sistemas eletrônicos e acoplamentos eletromagnéticos internos;
- **299 Hz, 303 Hz e 332 Hz:** Estas frequências têm sido observadas como modos de ressonância mecânica ou estrutural dos componentes ópticos e eletrônicos do interferômetro, como suportes de espelhos ou atuadores;
- **41 Hz:** Frequência próxima ao limite inferior da banda de análise (tipicamente 40 Hz). Sinais anômalos nesta região são frequentemente associados a ruídos instrumentais de fundo, como microfonia ou acoplamentos sísmicos residuais.

Na Figura 18, observa-se a densidade espectral de amplitude (ASD) do evento GW150914 após a aplicação dos filtros. O limiar espectral adotado foi definido como $\sqrt{f} = 3,0131 \times 10^{-23} \text{ Hz}^{-1/2}$, correspondente a 2,4 vezes a média da ASD na faixa [40–350] Hz [144]. Esse critério permitiu identificar e remover contribuições não astrofísicas, resultando em um sinal mais limpo e apropriado para análise.

Figura 18 – Densidade espectral de amplitude (ASD) do evento GW150914 com os filtros.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Após a etapa de filtragem no domínio da frequência, que compreende a aplicação de filtros passa-banda e a remoção de linhas espectrais por meio de filtros *notch*, o sinal filtrado é reconvertido ao domínio temporal por meio da transformada inversa de Fourier (IFFT). Essa etapa possibilita a análise direta da evolução temporal do sinal de strain associado ao evento GW150914.

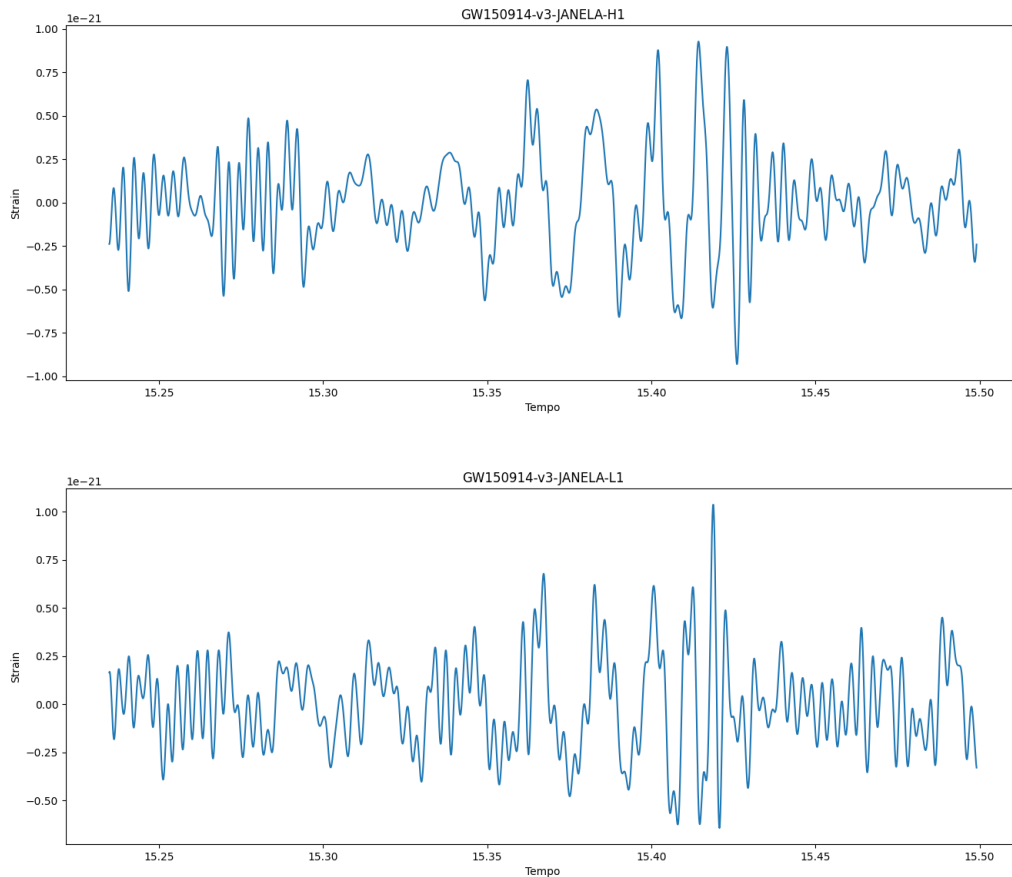
Em seguida, define-se uma janela temporal física adaptativa, delimitada em torno do instante do evento reportado pelo *Gravitational Wave Open Science Center* (GWOSC), com base no tempo *Global Positioning System* (GPS)¹ do pico do sinal. Os limites dessa janela são dados por $[\text{gps} - \Delta t_{\text{inf}}(M_f), \text{gps} + \Delta t_{\text{sup}}(M_f)]$ onde Δt_{inf} e Δt_{sup} dependem da massa final estimada M_f da fonte. Tal procedimento torna o recorte temporal fisicamente motivado e adaptativo entre diferentes eventos, refletindo a escala temporal característica do regime de coalescência da onda gravitacional.

A Figura 19 apresenta o recorte temporal do sinal de strain extraído dos dados processados para os detectores LIGO Hanford (H1) e Livingston (L1). Observa-se claramente o crescimento progressivo da amplitude e da frequência, característico da fase final de inspiral e merger, seguido por um decaimento abrupto, compatível com a coalescência de dois buracos negros de massas estelares. A emissão gravitacional correspondente foi detectada simultaneamente pelos interferômetros LIGO Hanford e Livingston em 14 de setembro de 2015.

Esse protocolo de pré-processamento, que inclui filtragem espectral, recorte temporal e normalização, é essencial para assegurar a qualidade e a confiabilidade das análises subsequentes, tais como a extração dos expoentes do q -tripleto e os ajustes realizados com

¹O tempo GPS é uma escala temporal contínua utilizada para sincronizar os dados dos detectores LIGO e Virgo, definida como o número de segundos decorridos desde 00h00m00s de 6 de janeiro de 1980 (UTC), desconsiderando os segundos intercalares. As séries temporais dos sinais gravitacionais são frequentemente referenciadas em uma escala relativa ao tempo GPS do pico do evento, que é redefinido como $t = 0$, facilitando a análise centrada na coalescência.

Figura 19 – Recorte temporal do sinal de strain do evento GW150914 registrado pelos detectores Hanford (H1) e Livingston (L1).



Fonte: Elaborado pelo autor com base nos sinais filtrados do LOSC.

modelos estatísticos fundamentados no formalismo não extensivo de Tsallis.

5.4 Determinação dos parâmetros do q -tripletto

Nas seções a seguir, serão abordadas as estratégias computacionais adotadas para a estimativa dos três expoentes fundamentais da estatística não-extensiva de Tsallis, conhecidos como a q -tripletto: o índice de sensibilidade às condições iniciais (q_{sen}), o índice de relaxação (q_{rel}) e o índice de estacionariedade (q_{stat}).

A determinação desses parâmetros é essencial para a compreensão da dinâmica não-linear e da complexidade associada aos sinais de ondas gravitacionais. Cada um desses expoentes será calculado com base em séries temporais obtidas a partir de eventos reais registrados pelos detectores LIGO/VIRGO, utilizando ferramentas e métodos da física estatística computacional.

O objetivo é, portanto, caracterizar o comportamento não-extensivo do sistema gravitacional observado, fornecendo uma nova perspectiva sobre a dinâmica interna desses sinais,

para além das abordagens convencionais da relatividade geral.

5.4.1 Estimativa computacional do índice (q_{stat})

A estimativa do índice entrópico q de Tsallis, denominado índice estacionário (q_{stat}), está associada à caracterização do regime metaestável de equilíbrio de sistemas complexos. Esse parâmetro está diretamente relacionado à estrutura das caudas da função de distribuição de probabilidade, refletindo o grau de não extensividade presente no sistema.

No contexto da mecânica estatística não extensiva, a modelagem de distribuições com caudas pesadas é frequentemente realizada por meio da distribuição q -Gaussiana de Tsallis, uma generalização da distribuição normal que descreve adequadamente comportamentos de tipo lei de potência [145, 146]. Essa distribuição é expressa pela Equação 4.19.

5.4.2 Método de estimativa de (q_{stat})

A estimativa do índice entrópico q de Tsallis, comumente referido como estacionariedade ($q = q_{stat}$), está intrinsecamente relacionada ao comportamento das caudas das distribuições de probabilidade, sendo, portanto, um indicador direto do grau de não-normalidade estatística do sistema [20]. No âmbito da estatística não-extensiva, esse parâmetro caracteriza desvios em relação à distribuição de Boltzmann-Gibbs, descrevendo fenômenos em que há correlações de longo alcance, flutuações de larga escala ou a presença de estados metaestáveis [22].

A obtenção de (q_{stat}) baseia-se na modelagem da densidade de probabilidade empírica por meio de distribuições q -Gaussianas, as quais representam as generalizações da distribuição normal e são capazes de capturar caudas longas com comportamento de lei de potência. Essas distribuições emergem naturalmente em sistemas complexos, como ilustrado por Umarov *et al.* (2008) [145] e Picoli *et al.* (2009) [146], sendo especialmente adequadas para descrever regimes estacionários não canônicos. Nesse contexto, a forma funcional da distribuição q -Gaussiana fornece não apenas uma ferramenta de ajuste, mas também uma base conceitual para a quantificação da não-extensividade estatística associada à dinâmica subjacente do sistema estudado.

Após o pré-processamento espectral dos sinais de ondas gravitacionais (GWs), os dados na forma de série temporal $h(t)$ foram utilizados para análise da estacionariedade estatística. A análise foi realizada com o auxílio do software MATLAB [147], onde foi implementado um algoritmo capaz de estimar a distribuição estacionária generalizada associada às flutuações do sinal.

Para reduzir o impacto de tendências de longo prazo e destacar as flutuações internas do sistema, foi utilizada a série diferenciada, dada por

$$\Delta h(t, \tau) = h(t + \tau) - h(t), \quad (5.1)$$

onde τ representa o parâmetro de defasagem temporal. A análise baseou-se na varredura sistemática de múltiplos valores de τ , definidos segundo a relação

$$\tau = 2^n, \quad n \in \mathbb{R}, \quad (5.2)$$

o que permite uma abordagem multiescala eficiente, favorecendo a identificação de leis de potência entre variáveis estatísticas e a escala de defasagem. Para sistemas genuinamente q -estacionários, o parâmetro (q_{stat}) tende a permanecer aproximadamente constante em um intervalo robusto de valores de τ , como demonstrado em sistemas físicos e complexos [20].

A metodologia adotada baseia-se no arcabouço teórico desenvolvido por Frisch *et al.* [148], inicialmente aplicado ao estudo da turbulência e flutuações no vento solar. Estudos posteriores, como os de Burlaga e colaboradores [16, 149–151], reforçaram a aplicabilidade do método em diferentes contextos físicos, inclusive na análise de campos magnéticos solares.

Com a série de incrementos $\Delta h(t, \tau)$ obtida, a função densidade de probabilidade (PDF) foi estimada por meio da função `ksdensity`², disponível no MATLAB, aplicada à série normalizada. Os valores obtidos foram ajustados a uma função q -Gaussiana da forma

$$p_q(\Delta h) = A_q e_q^{-B_q(\Delta h)^2} = A_q [1 + (1 - q)B_q(\Delta h)^2]^{-\frac{1}{1-q}}. \quad (5.3)$$

O ajuste dos dados à equação q -Gaussiana foi realizado utilizando o método de Levenberg-Marquardt [152, 153], amplamente empregado para minimização de funções não-lineares. Este ajuste é central para a quantificação do desvio da distribuição em relação à forma gaussiana clássica, sendo interpretado como um indicador do grau de não-normalidade do sistema.

A presença de caudas longas nas distribuições empíricas ajustadas indica uma maior probabilidade de ocorrência de flutuações extremas do que o previsto pela estatística de Boltzmann-Gibbs. Tais características são comuns em sistemas com dinâmicas complexas, regimes fora do equilíbrio termodinâmico e/ou interações de longo alcance [154].

Para a determinação do valor do índice estacionário (q_{stat}), foram consideradas diferentes escalas temporais $\{\tau_i\}$ associadas às flutuações do sinal gravitacional analisado. Em particular, foi adotada como escala temporal de referência aquela correspondente à frequência de pico do evento, por representar o regime dinâmico dominante no instante de máxima emissão energética.

²Em MATLAB, `ksdensity` é uma função que calcula uma estimativa da função de densidade de probabilidade (PDF) de um conjunto de dados usando suavização de kernel.

Essa escolha assegura que o valor estimado do (q_{stat}) esteja diretamente relacionado à dinâmica mais relevante do sistema durante a fase de coalescência, sem prejuízo da análise realizada em outras escalas temporais. Com isso, obtém-se o primeiro elemento do q -tripleto ($q_{stat}, q_{sen}, q_{rel}$) no contexto do formalismo da estatística não extensiva de Tsallis.

5.4.3 Determinação do parâmetro de sensibilidade (q_{sen})

Em sistemas dinâmicos dissipativos, não periódicos e não lineares, pequenas diferenças entre estados vizinhos no atrator³ do sistema podem divergir rapidamente. Essa divergência, denotada por ξ , é chamada de sensibilidade às condições iniciais. Especificamente, ξ é definida como $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \equiv \xi(t)$ onde $\Delta x(t) \equiv x(t) - x'(t)$ representa a diferença entre duas trajetórias inicialmente próximas.

No caso de sistemas descritos eficientemente pela mecânica estatística não extensiva de Tsallis, espera-se que a sensibilidade às condições iniciais ξ seja q -exponencial, em contraste com a estatística de Boltzmann-Gibbs (BG), que se baseia na hipótese de sensibilidade exponencial. Nesta última $\xi(t) = e^{\lambda_{max}t}$, onde λ_{max} é o expoente de Lyapunov máximo. Quando $\lambda_{max} > 0$, o sistema é considerado fortemente sensível às condições iniciais (caos forte).

No entanto, no cenário da estatística não extensiva, $\lambda_{max} = 0$ (caos fraco ou borda do caos), $\xi(t)$ é dado por

$$\xi(t) = [1 + (1 - q_{sen})\lambda_{q_{sen}}t]^{\frac{1}{1-q_{sen}}}. \quad (5.4)$$

assim, na borda do caos, existe uma sensibilidade de lei de potência às condições iniciais: para ($q_{sen} < 1$), o sistema é fracamente sensível, enquanto para ($q_{sen} > 1$), é fracamente insensível de acordo com [Tsallis, (2004) [14]. O comportamento exponencial é recuperado no limite ($q_{sen} = 1$).

De acordo com Lyra e Tsallis (1998) [119], no limiar do caos a sensibilidade às condições iniciais apresenta crescimento em lei de potência, estabelecendo uma ligação natural entre o índice entrópico q e a geometria do conjunto invariante que governa a dinâmica do sistema. Nesse regime, a dinâmica evolui sobre um atrator multifractal⁴, cuja estrutura é carac-

³Atrator é um conceito fundamental na teoria dos sistemas dinâmicos. Em termos simples, um atrator é um conjunto de estados para os quais um sistema evolui ao longo do tempo, independentemente das condições iniciais (desde que estas estejam em uma região específica do espaço de fases chamada bacia de atração) [155].

⁴Um atrator multifractal é um conjunto invariante no espaço de fases associado à dinâmica assintótica de um sistema não linear, cuja geometria é caracterizada por uma distribuição contínua de expoentes de singularidade. Diferentemente de atratores simples, descritos por uma única dimensão fractal, um atrator multifractal apresenta regiões com diferentes intensidades de concentração de trajetórias, cada uma associada a um expoente de singularidade α . O espectro multifractal $f(\alpha)$ descreve a dimensão fractal das regiões do atrator que compartilham o mesmo valor de α , fornecendo uma caracterização geométrica detalhada da dinâmica. Em sistemas no limiar do caos, essa estrutura multifractal está diretamente relacionada à sensibilidade às condições iniciais e ao surgimento de leis de potência na divergência entre trajetórias próximas.

terizada pelo espectro de singularidades $f(\alpha)$, o qual descreve a distribuição dos expoentes de singularidade associados às diferentes regiões do atrator no espaço de fases.

Os valores extremo α_{max} e α_{min} correspondem, respectivamente, às regiões mais concentradas e mais rarefeitas desse atrator multifractal, sendo definidos pelos pontos em que $f(\alpha) = 0$. Lyra e Tsallis demonstraram que a assimetria entre esses extremos controla a sensibilidade do sistema às condições iniciais, permitindo determinar o índice entrópico associado à sensibilidade, (q_{sen}), a partir do espectro multifractal do atrator, segundo

$$q_{sen} = 1 - \frac{\alpha_{min} \cdot \alpha_{max}}{\alpha_{max} - \alpha_{min}}. \quad (5.5)$$

Este método é utilizado neste trabalho (outros métodos equivalentes podem ser encontrados em Latora *et al.*, (2000) [156]).

A metodologia empregada para a determinação do espectro multifractal $f(\alpha)$, extraído a partir da série temporal $h(t)$ associada ao sinal gravitacional, fundamenta-se na proposta original de Lyra e Tsallis [119], posteriormente aplicada e aprimorada por de Freitas *et al.* [157], no âmbito da estatística não-extensiva de Tsallis. Neste trabalho, adotou-se o método conhecido como *Multifractal Detrended Fluctuation Analysis* (MF-DFA), originalmente introduzido por Kantelhardt *et al.* [158], em virtude de apresentar uma melhor performance de acordo com Gu e Zhou (2010) [159] na presença de tendências não estacionárias e de ruído instrumental, características inerentes aos sinais de ondas gravitacionais.

O MF-DFA permite a investigação sistemática da multifractalidade diretamente no domínio temporal, sem a necessidade de reconstrução do espaço de fases ou de hipóteses adicionais sobre a dinâmica subjacente. Além disso, esse método possibilita a extração consistente do espectro multifractal a partir de séries temporais finitas, sendo particularmente adequado para a análise de sinais astrofísicos reais. Dessa forma, o MF-DFA constitui uma ferramenta apropriada para investigar a sensibilidade às condições iniciais e a estrutura multiescalar das flutuações presentes nas séries temporais associadas às ondas gravitacionais.

Uma característica recorrente em sistemas complexos é a ocorrência de leis de potência, que emergem como reflexo da invariância de escala, também referida como autoafinidade no domínio de séries temporais. No caso de sinais monofractais, essa autoafinidade é descrita por um único expoente de Hurst H , que quantifica a persistência ou antipersistência da série. No entanto, muitos sistemas naturais exibem estrutura multifractal, na qual diferentes regiões da série são caracterizadas por diferentes escalas locais de singularidade, conduzindo à necessidade de uma família contínua de expoentes de Hurst generalizados $h(q)$, que descrevem de forma mais completa a complexidade do comportamento dinâmico [160].

5.4.4 Método MF-DFA

O método MF-DFA (*Multifractal Detrended Fluctuation Analysis*) é uma técnica estatística amplamente empregada para investigar a multifractalidade de sistemas complexos, permitindo analisar a variabilidade de sinais em múltiplas escalas temporais. Essa abordagem estende o método DFA (*Detrended Fluctuation Analysis*), originalmente proposto para caracterizar a monofractalidade de séries temporais, generalizando-o para detectar propriedades multifractais [158]. Intuitivamente, o MF-DFA pode ser compreendido como uma “lupa matemática” que revela a complexidade estrutural de um sistema em diferentes escalas.

O procedimento do MF-DFA envolve os seguintes passos metodológicos:

5.4.4.1 Passo 1: Construção do perfil acumulado da série temporal

Dada uma série temporal unidimensional $x_k = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, em que N representa seu comprimento, ou seja, a quantidade de observações presente na série, calcula-se o perfil acumulado da série, definido por $Y(i)$

$$Y(i) = \sum_{k=1}^i [x_k - \langle x \rangle], \quad (5.6)$$

onde $\langle x \rangle$ representa a média da série. Essa transformação tem como objetivo converter a série original em uma trajetória aleatória para posterior análise de tendências.

Esta é a etapa de “perfil”, típica da DFA, onde o sinal é integrado para detectar tendências locais.

5.4.4.2 Passo 2: Segmentação da série em janelas

No segundo passo deve-se dividir a série $Y(i)$ em $N_s \equiv \text{inteiro} \left(\frac{N}{s} \right)$ segmentos de tamanho fixo s . Como o comprimento N da série frequentemente não é um múltiplo da escala temporal s , sobrarão o resto da divisão. A fim de levar em conta esta parte, repete-se o mesmo procedimento partindo do final para o começo da série. Assim, teremos $2N_s$ segmentos no total, com o comprimento N da série sendo sua quantidade de pontos e a escala temporal s sendo determinada conforme a série a ser estudada e os objetivos buscados.

5.4.4.3 Passo 3: Cálculo da variância local e da função de flutuação

O terceiro passo consiste em calcular a tendência local para cada um dos $2N_s$ segmentos por uma regressão de mínimos quadrado na série e, então, determinar a variância

$$F^2(s, v) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s [Y((v-1)s + i) - y_v^m(i)]^2, \quad (5.7)$$

onde $y_v^m(i)$ representa o ajuste polinomial de ordem m (tendência local) em cada segmento v e para cada segmento v , com $(v = 1, \dots, N_s)$. Para $v = N_s + 1, \dots, 2N_s$

$$F^2(s, v) \equiv \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s [Y[N - (v - N_s)s + i] - y_v^m(i)]^2, \quad (5.8)$$

então, calcula-se a função de flutuação média para a janela v de tamanho s .

$$F_2(s) = \left(\frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} [F^2(s, v)] \right)^{1/2}. \quad (5.9)$$

O próximo passo é determinar a função escalar da função de flutuação média, ao analisar o gráfico log-log de $F_2(s)$ versus s . Esta relação é obtida ao repetir os passos de calcular a série integrada Y_i , calcular a função de variância e a flutuação média para a janela v de tamanho s , para diferentes tamanhos de janelas s . Se a série temporal x_t possui correlações de longo alcance, o valor de $F_2(s)$ aumenta à medida que o tamanho da janela s aumenta, de acordo com a lei de potência

$$F_2(s) \sim s^\alpha, \quad (5.10)$$

onde o parâmetro α é chamado de correlação, representa as propriedades de correlação da série temporal, da seguinte maneira:

- i) Se $\alpha = 0,5$ não existem correlações de longo alcance presentes na série;
- ii) Se $0 < \alpha < 0,5$ a série é antipersistente e possui correlação negativa;
- iii) Se $0,5 < \alpha < 1$ a série é persistente e possui correlação positiva.

A obtenção do parâmetro utilizando as Equações 5.9 e 5.10 representa o método de cálculo-padrão do DFA.

5.4.4.4 Passo 4: Generalização para momentos de ordem q

A técnica do MF-DFA pode ser descrita através da generalização da Equação 5.9, chamada de função flutuação média generalizada, para momentos de ordem q .

No quarto passo pode-se notar que o componente $[F^2(s, v)]^{q/2}$ é a função de variância de cada segmento v de dados e dos diferentes segmentos s escolhidos. Calcula-se a média para todos os $2N_s$ segmentos, a fim de obter a função de flutuação de q -ésima ordem

$$F_q(s) = \left(\frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} [F^2(s, v)]^{q/2} \right)^{1/q}, \quad (5.11)$$

onde a variável q (com sentido equivalente aos momentos de ordem q da estatística) pode assumir qualquer valor real, exceto zero. O valor de $F_q(s)$ não pode ser determinado diretamente quando $q = 0$, por causa do expoente divergente da Equação 5.11. Este problema é resolvido ao utilizar a equação abaixo

$$F_0(s) = \exp \left(\frac{1}{4N_n} \sum_{v=1}^{2N_s} \ln[F^2(s, v)] \right). \quad (5.12)$$

5.4.4.5 Passo 5: Análise da escala e extração dos expoentes multifractais

É importante observar que o interesse está em determinar o quanto a função de flutuação média generalizada $F_q(s)$ depende da escala temporal s , para diferentes valores de q . Assim como observado na Equação 5.10, $F_q(s)$ deve seguir uma lei de potência.

Determina-se, no quinto passo, o comportamento de escala da função de flutuação, analisando os gráficos log-log de $F_q(s)$ versus s para cada valor de q

$$F_q(s) \sim s^{H(q)}. \quad (5.13)$$

Para séries temporais estacionárias, o expoente de Hurst generalizado $H(q)$ coincide com o expoente clássico de Hurst quando $q = 2$, ou seja, $H(2) = H$.

Admitindo que a função de flutuação obedeça a uma relação de escala com constante multiplicativa A , tem-se

$$F_q(s) = A \cdot s^{H(q)}. \quad (5.14)$$

Aplicando o logaritmo natural em ambos os lados da equação, obtém-se:

$$\log F_q(s) = H(q) \cdot \log s + \log A, \quad (5.15)$$

onde $\log A$ é uma constante aditiva. Essa relação linear permite estimar o expoente $H(q)$ como a inclinação do gráfico log-log de $\log F_q(s)$ em função de $\log s$.

O expoente de Hurst generalizado $H(q)$, relaciona-se com o expoente de escala $\tau(q)$, definido pela função de partição, no formalismo multifractal [158]. Essa relação é dada por

$$\tau(q) = qH(q) - 1. \quad (5.16)$$

É possível, ainda, relacionar $H(q)$ com a dimensão multifractal generalizada $D(q)$ [161]

$$D(q) = \frac{\tau(q)}{q-1} = \frac{qH(q) - 1}{q-1}. \quad (5.17)$$

Finalmente, pode-se definir o expoente de singularidade de ordem q , $h(q)$, como a taxa de variação de $\tau(q)$ em relação a q

$$h(q) = \frac{d\tau(q)}{dq}. \quad (5.18)$$

Ressalta-se que, embora a notação $h(q)$ utilize o mesmo símbolo empregado para o sinal de *strain* $h(t)$, ambas as quantidades possuem naturezas físicas completamente distintas. Enquanto $h(t)$, uma função do tempo que quantifica a deformação relativa do espaço-tempo. Ela é medida diretamente pela mudança no comprimento óptico dos braços dos interferômetros LIGO e Virgo, seguindo a relação $\Delta L(t)/L = h(t)$, onde L é o comprimento nominal do braço, $h(q)$ corresponde ao expoente de singularidade associado às flutuações multiescalares da série temporal no contexto da análise multifractal, não possuindo qualquer relação direta com a variável de deformação do detector.

Cabe ressaltar que os expoentes $H(q)$ e $h(q)$ são as principais medidas de multifractalidade obtidas por meio da técnica de (MF-DFA), e constituem parâmetros de escala amplamente utilizados em diversas investigações.

O expoente $H(q)$ denominado expoente de Hurst generalizado, está diretamente relacionado ao grau de correlação temporal da série analisada. Valores de $H(q) > 0,5$ indicam correlações de longo alcance (persistência), enquanto $H(q) < 0,5$ apontam para comportamento antipersistente. A variação de $H(q)$ com o parâmetro q revela a presença de estruturas em múltiplas escalas e contribui diretamente para a caracterização do comportamento multifractal da série temporal.

Por outro lado, o expoente $h(q)$, denominado expoente de singularidade local, está associado à intensidade das flutuações e à natureza estatística das caudas da distribuição de probabilidade. Valores elevados de $h(q)$ estão relacionados à presença de caudas pesadas (*heavy tails*), indicando forte contribuição de eventos raros e intensos, o que acentua a largura do espectro multifractal. Em particular, a dispersão de $h(q)$ para diferentes ordens q caracteriza a heterogeneidade local do sinal e está diretamente relacionada à dimensão de singularidade $f(\alpha)$

Assim, $H(q)$ e $h(q)$ oferecem visões complementares sobre a estrutura interna da série temporal: o primeiro enfatiza as correlações de longo alcance, enquanto o segundo evidencia a distribuição de intensidades locais. A análise conjunta desses parâmetros permite uma compreensão mais profunda da complexidade subjacente a sistemas dinâmicos não lineares e fora do equilíbrio, como é o caso dos sinais de ondas gravitacionais.

5.4.5 Conexões conceituais entre os formalismos multifractais e a estatística não extensiva de Tsallis

Para a presente pesquisa, a relação entre o método (MF-DFA) e o formalismo multifractal clássico, introduzido por Halsey *et al.* (1986) [162], estabelece-se por meio da função de partição generalizada $\tau(q)$. Essa função permite conectar os expoentes obtidos a partir da análise de flutuações multiescalares no domínio temporal à caracterização geométrica do atrator multifractal no espaço de fases.

Cabe ressaltar que, na implementação adotada neste trabalho, o procedimento de *detrending* não utiliza ajustes polinomiais de ordem superior do tipo DFA-m. Em vez disso, emprega-se a remoção da média local do perfil integrado da série temporal, caracterizando um *detrending* de ordem zero, correspondente a um polinômio de grau zero. Tal escolha é equivalente a uma abordagem do tipo *Multifractal Detrended Moving Average* (MF-DMA), preservando a consistência com o formalismo multifractal baseado na função de partição $\tau(q)$.

Nessas condições, a função de partição generalizada é definida como

$$\tau(q) = qh(q) - 1. \quad (5.19)$$

onde $h(q)$ representa o expoente de Hurst generalizado obtido a partir da análise MF-DFA/MF-DMA.

A partir da função $\tau(q)$, é possível derivar o espectro multifractal $f(\alpha)$ utilizando a transformada de Legendre. Neste contexto, o expoente de Hurst (também chamado de expoente de singularidade) é obtido pela derivada da função $\tau(q)$ em relação a q , o que permite as seguintes relações

$$\alpha(q) = \frac{d\tau(q)}{dq} = h(q) + q \frac{dh(q)}{dq}, \quad (5.20)$$

$$f(\alpha) = q\alpha - \tau(q) = q[\alpha - h(q)] + 1. \quad (5.21)$$

Essas equações descrevem, respectivamente, a intensidade local das flutuações (por meio de α) e a dimensão fractal dos subconjuntos associados a cada valor de α (por meio de $f(\alpha)$).

A forma do espectro multifractal $f(\alpha)$ fornece uma descrição quantitativa da complexidade local de uma série temporal, sendo particularmente útil para identificar regimes de variabilidade associados a diferentes intensidades de flutuação. No contexto da análise multifractal, a largura do suporte do espectro $f(\alpha)$, dada pela diferença entre os valores extremos da exponência de singularidade, α_{\max} e α_{\min} , constitui uma métrica direta da heterogeneidade do sinal.

Esse parâmetro, definido como

$$\Delta\alpha = \alpha_{\max} - \alpha_{\min}, \quad (5.22)$$

representa a largura do espectro multifractal, sendo amplamente reconhecido como um indicador do grau de multifractalidade da série temporal analisada. Em termos práticos, quanto maior o valor de $\Delta\alpha$, maior a dispersão dos expoentes de Hurst locais, o que implica uma estrutura de flutuações mais complexa, com diferentes regimes dinâmicos coexistindo em distintas escalas temporais. Portanto, $\Delta\alpha$ é um parâmetro fundamental para distinguir entre sinais monofractais (com $\Delta\alpha \approx 0$), ou seja, dependência linear de $\tau(q)$ com q , e sinais fortemente multifractais, nos quais a distribuição de singularidades é mais ampla e irregular.

Diversos estudos teóricos e numéricos em sistemas dinâmicos dissipativos unidimensionais têm apontado uma conexão entre a geometria multifractal do atrator e o índice de sensibilidade (q_{sen}) da estatística não-extensiva de Tsallis [119]. Em particular, foi conjecturada e posteriormente demonstrada para uma variedade de sistemas dissipativos uma relação analítica que vincula os extremos do espectro de Hurst generalizado $h(q)$ ao valor de q_{sen} , expressa pela equação

$$q_{\text{sen}} = 1 - \frac{\alpha_{\min} \cdot \alpha_{\max}}{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}, \quad (5.23)$$

onde α_{\min} e α_{\max} representam, respectivamente, os valores mínimo e máximo do expoente de Hölder extraídos do espectro multifractal da série temporal.

Essa relação estabelece uma ponte conceitual entre a estrutura multifractal do atrator e a dinâmica de sensibilidade às condições iniciais em regimes de caos fraco. À medida que $\Delta\alpha$ aumenta, torna-se mais pronunciada a coexistência de regiões suaves e abruptas na dinâmica, caracterizando um atrator fortemente multifractal. Nesse regime, a separação entre trajetórias próximas segue uma lei de potência menos anômala, fazendo com que o índice de sensibilidade q_{sen} se aproxime progressivamente do valor extensivo $q_{\text{sen}} = 1$, correspondente ao limite exponencial clássico.

O parâmetro (q_{sen}), portanto, constitui um indicador dinâmico fundamental da natureza não linear e da complexidade temporal dos sinais analisados. Sua aplicação permite discriminar entre diferentes regimes dinâmicos, extensivos, caóticos ou críticos mesmo em contextos ruidosos ou parcialmente estacionários, como ocorre nos sinais de deformação associados à onda gravitacional do evento GW150914.

5.4.6 Métricas de confiabilidade aplicadas ao cálculo do índice (q_{rel})

O estudo da relaxação de uma grandeza macroscópica $\Omega(t)$ em um sistema complexo descreve a evolução do sistema em direção a um possível estado estacionário ou meta-estável, a partir de uma dada classe de condições iniciais. Nesse contexto, a dinâmica efetiva pode ser interpretada como a exploração de um espaço de estados dinâmicos efetivo, associado às configurações acessíveis da variável macroscópica considerada, e não do espaço de fases microscópico completo.

O processo de relaxação pode ser caracterizado pela grandeza normalizada [163]

$$\Omega(t) \equiv \frac{\Omega(t) - \Omega(\infty)}{\Omega(0) - \Omega(\infty)}. \quad (5.24)$$

A equação diferencial que relaciona o processo de relaxação ao índice entrópico (q_{rel}) da estatística de Tsallis é

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{1}{\tau_{q_{rel}}} \Omega^{q_{rel}}, \quad (5.25)$$

onde τ é o tempo de relaxação e (q_{rel}) é o parâmetro de relaxação, que leva à seguinte solução

$$\Omega(t) = \left[1 - (1 - q) \frac{t}{\tau_{q_{rel}}} \right]^{1/(1-q)}. \quad (5.26)$$

Como grandes candidatos observáveis $\Omega(t)$ para estimativa de (q_{rel}), pode se usar a função de autocorrelação ou a informação mútua. Neste trabalho, utilizamos este último, devido à sua eficiência em capturar características tanto lineares quanto não lineares, ao contrário da função de autocorrelação, que considera apenas propriedades lineares. Em particular, o índice (q_{rel}) é dado por

$$q_{rel} = \frac{s-1}{s}, \quad (5.27)$$

onde s é o coeficiente angular (inclinação) do gráfico log-log da informação mútua média $I(\tau)$, conforme proposto por Fraser e Swinney (1986)[164], pela seguinte relação

$$I(\tau) = \sum_{s(t), s(t+\tau)} p(s(t), s(t+\tau)) \log \left(\frac{p(s(t), s(t+\tau))}{p(s(t)) p(s(t+\tau))} \right), \quad (5.28)$$

onde:

- i) $s(t)$ é o valor da série temporal no instante t ;
- ii) $p(s(t))$ é a distribuição de probabilidade de $s(t)$;
- iii) $p(s(t), s(t+\tau))$ é a distribuição conjunta entre $s(t)$ e $s(t+\tau)$;

iv) τ é o atraso (*lag*) temporal.

A Informação Mútua Média (AMI) mede o quanto uma variável aleatória nos informa sobre outra. No contexto da análise de séries temporais, a AMI ajuda a quantificar a quantidade de conhecimento obtido sobre o valor de $s(t + \tau)$ ao observa $s(t)$.

Para medir a AMI de uma série temporal, criamos um histograma dos dados usando compartimentos (*bins*). Seja $p(s(t))$ a probabilidade de que o sinal tenha um valor dentro do i -ésimo compartimento, e seja $p(s(t)), s(t + \tau)$ a probabilidade de que $s(t)$ esteja no compartimento i e $s(t + \tau)$ esteja no compartimento j . Então, a AMI para um atraso temporal τ é definida como a Equação 5.28.

A estimativa do índice de relaxação (q_{rel}) neste trabalho foi realizada a partir do tratamento das séries temporais das ondas gravitacionais, inicialmente processadas em Python. Posteriormente, desenvolveu-se um código em MATLAB que implementa o cálculo da Informação Mútua Média (*Mutual Average Information* – AMI) para diferentes defasagens temporais τ de uma série temporal unidimensional. Essa função é uma forma adequada para a análise da dependência não linear e da complexidade informacional da dinâmica temporal dos sinais analisados [164]. Assim, a AMI constitui um indicador mais sensível e fidedigno dos processos de relaxação e da estimativa do expoente de Tsallis (q_{rel}) em sistemas complexos.

Formalmente, a AMI entre duas variáveis $h(t)$ e $h(t + \tau)$, para diferentes valores de defasagem τ , é definida por

$$I(\tau) = \sum_{h_t, h_{t+\tau}} p(h_t, h_{t+\tau}) \log_2 \left(\frac{p(h_{t+\tau}, h_t)}{p(h_t)p(h_{t+\tau})} \right) \sim \tau^s, \quad (5.29)$$

onde $p(h_t, h_{t+\tau})$ representa a distribuição de probabilidade conjunta entre os estados da série em t e $t + \tau$. O expoente s caracteriza a taxa de perda de dependência estatística à medida que os pontos ficam mais distantes no tempo:

- i) Se s é mais negativo, a informação mútua decai mais rapidamente \rightarrow o sistema perde correlação mais rapidamente \rightarrow mais caótico ou mais estocástico.
- ii) Se s é mais próximo de zero, a dependência decai mais lentamente \rightarrow sistema com memória longa ou com forte dependência temporal (processo persistente, autocorrelacionado ou multifractal).

Essa equação quantifica a quantidade de informação obtida sobre $h(t + \tau)$, dado o conhecimento prévio de $h(t)$, permitindo capturar correlações complexas de natureza não linear ao longo do tempo, ou seja, o termo $I(\tau)$ mede quanto de informação sobre o presente h_t pode ser prevista conhecendo o passado a um atraso $I(h_{\tau+t})$.

A partir da Equação (5.29), realizou-se a análise do comportamento inicial da curva de AMI. Observa-se, para pequenos atrasos temporais τ , um decaimento pronunciado da AMI, indicando forte dependência temporal entre amostras próximas da série. Em alguns casos, podem surgir oscilações ou mínimos locais na curva de AMI, associados à presença de estruturas temporais organizadas, como quase-periodicidade, batimentos ou memória temporal persistente no sistema. Esse comportamento evidencia a existência de uma estrutura temporal correlacionada e não puramente aleatória.

O primeiro mínimo local da AMI, identificado em uma defasagem τ^* , é então interpretado, com base no Teorema de *Embedding* de Takens, como o atraso temporal ótimo para a reconstrução do espaço de fases do sistema dinâmico [164, 165]. Essa escolha minimiza a redundância informacional entre cópias defasadas da série temporal, ao mesmo tempo em que preserva a dependência dinâmica essencial, resultando em uma representação mais eficiente do atrator dinâmico do sistema.

Para sistemas que exibem relaxação não extensiva, assume-se que a função $I(\tau)$ decai segundo uma lei de potência, como

$$I(\tau) \sim \tau^s. \quad (5.30)$$

Tomando logaritmo em ambos os lados, obtém-se a forma linear

$$\log I(\tau) = s \cdot \log \tau + \text{constante}, \quad (5.31)$$

permitindo a aplicação de um ajuste de regressão linear ao gráfico $\log I(\tau)$ versus $\log \tau$ considerando $\tau \in [1, n]$. O coeficiente angular obtido, denotado por s , representa a inclinação da curva em escala log-log.

Com base nos trabalhos de Tsallis e colaboradores, sabe-se que o decaimento de funções como a AMI em sistemas não extensivos pode ser descrito por uma relaxação q-exponencial, cuja forma assintótica se aproxima de uma lei de potência. A relação entre o expoente s e o índice q_{rel} é dada por

$$q_{rel} = 1 - \frac{1}{s}. \quad (5.32)$$

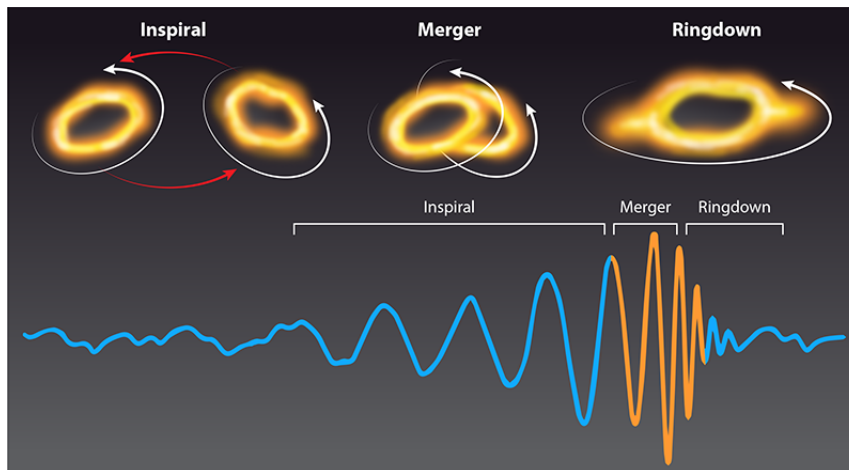
Esse índice quantifica a natureza da relaxação do sistema rumo a estados estacionários metaestáveis, característicos de sistemas complexos fora do equilíbrio termodinâmico convencional. Valores de $q_{rel} > 1$ são esperados para sistemas com relaxação lenta e memória de longo alcance, como evidenciado nas séries temporais de ondas gravitacionais associadas a fusões de buracos negros.

5.5 Estimativa da frequência de pico de amplitude em eventos de ondas gravitacionais para análise do q -tripleto

Para a análise do comportamento do q -tripleto no contexto da estatística não extensiva aplicada a eventos de ondas gravitacionais, é fundamental considerar a frequência de pico da deformação $h(t)$. No caso do evento GW150914, essa frequência corresponde a aproximadamente 150 Hz, momento em que o sinal atinge sua maior amplitude ($h \sim 1 \times 10^{-21}$), caracterizando o instante da coalescência, ou seja, o ponto em que os dois buracos negros se encontram em máxima aproximação e se fundem em um único objeto compacto.

Esse regime corresponde à porção fortemente não linear da dinâmica do sistema (representada pela região laranja na Figura 20), na qual a gravidade atinge sua intensidade máxima e o espaço-tempo encontra-se intensamente distorcido. Trata-se de uma fase crítica para a caracterização da evolução do sistema, pois é justamente nesse ponto que se concentram os principais indícios de comportamento fora do equilíbrio, sensíveis à análise não extensiva baseada no q -tripleto de Tsallis.

Figura 20 – Um sinal típico de onda gravitacional produzido por um par de buracos negros em coalescência. A fase espiral pode ser descrita pela expansão em série pós-newtoniana, enquanto a parte final da fase de anel descendente pode ser descrita pela teoria de perturbação linear (partes azuis do sinal). A fusão e o anel descendente inicial, no entanto, exibem dinâmica espaço-temporal não linear (parte laranja do sinal).



Fonte: (Top) Kip Thorne; (Bottom) B. P. Abbott et al. [29]; adapted by APS/Carin Cain.

Segundo o físico teórico John Wheeler, “O espaço-tempo diz à matéria como se mover; a matéria diz ao espaço-tempo como se curvar” (Wheeler, 2011, p. 175 [166]). Essa característica reflete de forma precisa a essência da Relatividade Geral, ao descrever a reciprocidade dinâmica entre a geometria do espaço-tempo e a distribuição de energia-momento. Um dos aspectos mais marcantes dessa teoria é o seu caráter não linear, ou seja, a própria curvatura do espaço-tempo afeta a evolução subsequente da curvatura, uma característica particularmente evidente em regimes gravitacionais extremos.

A não linearidade da Relatividade Geral torna-se particularmente relevante em regimes gravitacionais extremos, como durante a fusão de buracos negros binários, quando a curvatura do espaço-tempo atinge valores máximos. Estudos recentes, uma liderada por Keefe Mitman (Caltech) [167] e outra por Mark Ho-Yeuk Cheung (Johns Hopkins University) [168], demonstraram, com base em simulações da relatividade numérica, a presença explícita de componentes não lineares nos sinais de OGs pós-coalescência, especialmente durante os estágios iniciais do anelamento (*ringdown*) [167, 168].

Esses resultados indicam que os sinais gravitacionais provenientes de fusões binárias de buracos negros representam um laboratório natural para testar a gravidade em regimes não perturbativos, nos quais as aproximações lineares deixam de ser válidas. As fontes dominantes detectadas pelos interferômetros LIGO, Virgo e KAGRA são justamente fusões de buracos negros binários com órbitas quase circulares [169], o que permite modelagens realistas por meio de simulações numéricas de alta precisão. Nessas simulações, a não linearidade manifesta-se de forma significativa tanto na região próxima aos buracos negros durante a coalescência quanto nos momentos iniciais da fase pós-fusão (ver Figura 20).

A possibilidade de identificar tais assinaturas não lineares observacionalmente fortalece o argumento a favor do uso de ferramentas analíticas não convencionais, como a estatística não extensiva de Tsallis, para investigar os sinais gravitacionais em seus regimes mais críticos. Essa abordagem permite capturar aspectos complexos da dinâmica fora do equilíbrio, presentes no comportamento multifractal e não gaussiano dos sinais de deformação $h(t)$.

Atualmente, a literatura disponibiliza os valores da frequência de pico apenas para um número restrito de eventos, incluindo GW150914-v3 [69], GW151226-v2 [170], GW170104-v2 [171], GW170608-v3 [172], GW170814-v3 [173] e GW190521-v3 [174]. Esses valores podem ser observados na Tabela 3, que reúne os parâmetros principais dos sistemas binários analisados.

Diante dessa limitação, desenvolveu-se um código computacional destinado a estimar a frequência de pico para os demais eventos catalogados pelas colaborações LIGO e Virgo. Esse código fundamenta-se em dois pilares teóricos principais: (i) a dinâmica relativística de sistemas binários compactos, (ii) a modelagem da frequência dos modos quasi-normais (QNMs) do buraco negro resultante da fusão.

Após a fusão, parte da massa total do sistema binário é convertida em energia gravitacional emitida sob a forma de ondas. Considerando os resultados de simulações numéricas em relatividade geral (Pretorius, 2005 [175]; Campanelli *et al.*, 2006 [176]), o código adota uma perda de massa total de 5%, ou seja, assume-se uma eficiência de radiação gravitacional $\varepsilon = 0,5$, simplificação alinhada com simulações numéricas de relatividade geral que indicam perdas entre 3% – 5% para BBH (Blanchet, 2014) [177, 178]. Assim, a massa final do buraco

Tabela 3 – Comparação de parâmetros físicos dos eventos BBH selecionados.

Evento	Massa 1 (M_{\odot})	Massa 2 (M_{\odot})	Massa Final (M_{\odot})	Frequência de Pico Literatura (Hz)	Frequência de Pico (Hz)
GW150914-v3	35,6	30,6	62,89	150	154,09
GW151226-v2	13,7	7,7	20,33	420	476,67
GW170104-v2	30,8	20,0	48,26	160–199	200,80
GW170608-v3	11,0	7,6	17,67	453-610	548,42
GW170814-v3	30,6	25,2	53,01	155–203	182,81
GW190521-v3	95,3	69,0	156,09	60	62,09

Fonte: Dados calculados pelo autor e valores de referência dos catálogos GWTC-1, GWTC-2.1 e GWTC-3.

negro remanescente é estimada por

$$M_{\text{final}} = (m_1 + m_2)(1 - \varepsilon). \quad (5.33)$$

A estimativa da frequência de pico do ringdown é baseada na modelagem do modo quasi-normal fundamental com $\ell = m = 2$, que domina a fase de relaxação do buraco negro recém-formado. Para um buraco negro não rotante⁵, a frequência associada ao modo fundamental é dada por

$$f_{\text{ring}} = \frac{c^3}{\pi G M_{\text{final}}}, \quad (5.34)$$

em que c é a velocidade da luz, G é a constante gravitacional e M_{final} é a massa corrigida do buraco negro remanescente. Esta fórmula, extraída das soluções de perturbações da métrica de Schwarzschild (Berti et al., 2006) [179], constitui uma aproximação válida na ausência de informações sobre o spin do sistema.

Para compatibilizar as estimativas teóricas com os valores observacionais registrados, o código computacional aplica um fator empírico de correção igual a 0,15, conforme indicado por simulações numéricas da relatividade geral, como as de Berti et al. (2006) [179] e Ajith et al. (2008) [180].

$$f_{\text{pico}} = 0,15 \cdot f_{\text{ring}}. \quad (5.35)$$

Esse fator reflete a defasagem sistemática entre a frequência de pico observada no espectro de energia gravitacional e a frequência do modo quasi-normal fundamental do buraco negro recém-formado. Embora o anelamento (*ringdown*) seja dominado por modos quasi-

⁵Embora a maioria dos remanescentes de BBHs apresentem rotação não nula, a ausência de informações detalhadas sobre o spin nos catálogos públicos justifica a adoção do modelo Schwarzschild como aproximação inicial.

normais, a radiação gravitacional não é emitida de forma uniforme em torno dessa frequência. Em vez disso, a maior parte da energia é irradiada de maneira mais eficiente em uma faixa inferior, tipicamente entre 10% e 20% da frequência natural do sistema. Assim, o uso do fator 0,15 fornece uma aproximação realista para a frequência de pico observável, especialmente útil na caracterização do sinal gravitacional durante a fase final da coalescência ajustaram-se os valores estimados para faixas de frequência típicas da sensibilidade dos detectores LIGO/Virgo, conforme indicado por Abbott et al. (2016) [29].

Essa correção considera não apenas a ausência de parâmetros de rotação nos dados públicos disponibilizados, mas também as limitações instrumentais na detecção de componentes de alta frequência do espectro gravitacional. Com isso, foram calculadas as frequências de pico para as ondas gravitacionais analisadas, comparando-se os resultados obtidos com os valores reportados na literatura e com a estimativa aproximada utilizada neste trabalho, conforme apresentado na Tabela 3. As estimativas da frequência de pico para todos os eventos gravitacionais considerados nesta pesquisa encontram-se reunidas no Apêndice C.

Portanto, o código desenvolvido permite a obtenção sistemática de estimativas realistas da frequência de pico para eventos de ondas gravitacionais que não possuem esse parâmetro diretamente reportado na literatura. Esse procedimento é essencial para a análise subsequente dos parâmetros do q -triplo (q_{sen} , q_{rel} , q_{stat}), uma vez que a frequência dominante constitui o ponto de referência para a segmentação da série temporal e para a interpretação física do sinal gravitacional em suas diferentes fases dinâmicas.

5.6 Dinâmica dos parâmetros utilizados nas análises de correlação

Antes de proceder às análises de correlação estatística entre os índices do q -triplo e os parâmetros físicos dos eventos de ondas gravitacionais, é fundamental explicitar a natureza dinâmica das quantidades envolvidas. Os parâmetros analisados neste trabalho não devem ser interpretados como meros descritores estatísticos, mas como grandezas que codificam propriedades dinâmicas fundamentais associadas à evolução temporal do sistema e à sua sensibilidade às condições iniciais.

No contexto da análise multifractal e da estatística não extensiva de Tsallis, o expoente de Hurst generalizado $H(q)$ desempenha um papel central na caracterização das correlações temporais da série analisada. Diferentemente do expoente de Hurst clássico, que descreve apenas a persistência ou antipersistência global de um processo monofractal, o expoente $H(q)$ permite capturar a dependência das flutuações em diferentes ordens estatísticas, refletindo a presença de estruturas multiescalares. Assim, a variação funcional de $H(q)$ com o parâmetro q fornece uma assinatura dinâmica da heterogeneidade temporal do sinal, estando diretamente associada à presença de memória de longo alcance e à complexidade da dinâmica subjacente.

No que se refere ao índice estacionário q_{stat} , este está associado ao regime estatístico efetivo assumido pelas flutuações do sinal em condições quase-estacionárias. Esse índice caracteriza a forma das distribuições de probabilidade das amplitudes do sinal gravitacional, quantificando o desvio em relação à estatística Gaussiana clássica de Boltzmann-Gibbs. Valores de $q_{\text{stat}} \neq 1$ indicam a presença de caudas longas, eventos extremos e heterogeneidade dinâmica, frequentemente associadas a sistemas fora do equilíbrio e com correlações de longo alcance. Nesse sentido, q_{stat} fornece uma descrição estatística complementar aos índices dinâmicos do q -tripleto, refletindo o estado estacionário ou quase-estacionário das flutuações observadas.

De forma complementar, o índice de sensibilidade q_{sen} pode ser interpretado como uma generalização do expoente de Lyapunov no contexto de sistemas fracamente caóticos. Enquanto o expoente de Lyapunov clássico quantifica a taxa exponencial de separação entre trajetórias próximas no espaço de fases, o índice q_{sen} descreve regimes nos quais essa separação ocorre de forma subexponencial, tipicamente obedecendo a leis de potência. Esses regimes são característicos da borda do caos e estão intimamente relacionados à geometria multifractal do atrator dinâmico. Dessa forma, q_{sen} estabelece uma ponte conceitual entre a sensibilidade às condições iniciais e a estrutura estatística das flutuações temporais observadas no sinal gravitacional.

O índice de relaxação q_{rel} , por sua vez, está associado à forma como grandezas macroscópicas evoluem em direção a estados estacionários ou metaestáveis. No formalismo não extensivo, esse índice descreve processos de relaxação não exponencial, frequentemente observados em sistemas fora do equilíbrio termodinâmico e com interações efetivas de longo alcance. No contexto das ondas gravitacionais, q_{rel} pode ser interpretado como um indicador da complexidade do processo de dissipação de energia e da reorganização dinâmica do sistema após a coalescência, refletindo propriedades globais da evolução temporal do sinal.

Os parâmetros físicos considerados nas análises de correlação, tais como a massa final do sistema, a massa *chirp* e a frequência de pico de amplitude, não são tratados como causas diretas dos valores assumidos pelos índices do q -tripleto. Em vez disso, essas grandezas são interpretadas como *proxies* físicos do regime dinâmico da coalescência binária, fornecendo informações sobre a escala temporal característica do evento, a intensidade da emissão gravitacional e o estágio dinâmico dominante do sistema. A correlação entre esses parâmetros físicos e os índices dinâmicos visa, portanto, identificar tendências globais e possíveis associações entre propriedades físicas da fonte e regimes dinâmicos inferidos a partir da análise estatística do sinal.

Nesse sentido, as análises de correlação apresentadas nas seções subsequentes devem ser compreendidas como ferramentas exploratórias, destinadas a investigar associações estatísticas entre parâmetros dinâmicos e físicos, sem implicar causalidade direta. Essa abor-

dagem é particularmente adequada em sistemas complexos, nos quais múltiplos mecanismos físicos e dinâmicos coexistem e interagem de forma não linear. Assim, a combinação entre análise dinâmica e correlação estatística permite uma caracterização mais abrangente do comportamento dos sinais de ondas gravitacionais, integrando informações físicas, estatísticas e dinâmicas em um mesmo arcabouço interpretativo.

5.7 Correlação de Pearson

A análise da correlação entre variáveis quantitativas é uma ferramenta estatística fundamental utilizada para investigar se existe, e em que grau, uma relação de dependência linear entre dois conjuntos de dados. O coeficiente de correlação mais amplamente utilizado é o coeficiente de correlação de Pearson (r), que mede a força e a direção da associação linear entre duas variáveis contínuas [181]. Neste estudo, avaliou-se a existência de correlações lineares entre os índices da estatística não extensiva de Tsallis (q_{sen} , q_{rel} , q_{stat}) e os parâmetros físicos dos sinais de ondas gravitacionais (OGs), tais como massa final, massa chirp e frequência de pico. Para essa finalidade, aplicou-se o coeficiente de correlação de Pearson, que avalia a associação linear entre duas variáveis contínuas.

5.7.1 Definição e interpretação

O coeficiente de correlação de Pearson, denotado por r , mede a força e a direção da associação linear entre duas variáveis. Seu valor varia no intervalo $[-1, 1]$ sendo interpretado da seguinte forma:

- $r > 0$: correlação positiva — à medida que uma variável aumenta, a outra também tende a aumentar;
- $r < 0$: correlação negativa — à medida que uma variável aumenta, a outra tende a diminuir;
- $r = 0$: ausência de correlação linear.

Segundo a classificação proposta por Kuckartz et al. (2013) [181], a intensidade da correlação pode ser avaliada conforme a Tabela 4:

Cabe ressaltar que o coeficiente de correlação de Pearson r não constitui uma métrica no sentido matemático estrito, tampouco representa uma distância entre variáveis no espaço de parâmetros. O valor de r quantifica exclusivamente a intensidade e a direção da associação linear entre duas variáveis contínuas, não satisfazendo propriedades fundamentais de métricas, como positividade definida ou desigualdade triangular.

Tabela 4 – Interpretação da força da correlação baseada no valor de r .

Valor de r	Interpretação da força da correlação
$0,0 < r \leq 0,1$	Correlação nula ou desprezível
$0,1 < r \leq 0,3$	Correlação fraca
$0,3 < r \leq 0,5$	Correlação moderada
$0,5 < r \leq 0,7$	Correlação forte
$0,7 < r \leq 1,0$	Correlação muito forte

Fonte: (Adaptado de Kuckartz et al., 2013, p. 213) [181]

As classificações adotadas neste trabalho, correlação fraca, moderada, forte ou muito forte, devem, portanto, ser compreendidas como convenções estatísticas amplamente utilizadas na literatura, com caráter essencialmente interpretativo. Tais categorias visam apenas facilitar a análise comparativa da força das associações observadas, não possuindo significado geométrico ou físico direto.

5.7.2 Aplicação no presente estudo

O cálculo do coeficiente de Pearson foi realizado para os seguintes pares de variáveis:

- $(q_{sen}, q_{rel}, q_{stat})$ vs. Massa Final;
- $(q_{sen}, q_{rel}, q_{stat})$ vs. Massa Chirp;
- $(q_{sen}, q_{rel}, q_{stat})$ vs. Frequência de Pico.

Os dados empregados foram previamente tratados e organizados com base na média dos índices extraídos dos detectores Hanford e Livingston, a fim de conferir maior robustez estatística às análises. A análise foi conduzida utilizando o pacote `scipy.stats.pearsonr` do Python [182], que retorna o valor de r e o p -valor associado, o qual foi utilizado para inferência estatística.

5.7.3 Cálculo do coeficiente

O coeficiente de correlação de Pearson é calculado pela fórmula:

$$r = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum(y_i - \bar{y})^2}}, \quad (5.36)$$

onde x_i e y_i são os valores observados, e \bar{x} e \bar{y} são as respectivas médias amostrais.

5.7.4 Teste de significância

A significância estatística do coeficiente de correlação de Pearson foi avaliada por meio de um teste de hipótese bilateral, com o objetivo de verificar se a associação observada entre duas variáveis é estatisticamente diferente de zero [181].

As hipóteses formuladas foram:

- Hipótese nula $H_0: r = 0$ (ausência de correlação linear significativa);
- Hipótese alternativa $H_1: r \neq 0$ (presença de correlação linear significativa).

A estatística de teste t associada ao coeficiente de correlação é dada por:

$$t = \frac{r \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}, \quad (5.37)$$

r é o coeficiente de correlação de Pearson, e n é o número de pares de observações válidas.

Essa estatística segue uma distribuição t de Student com $n - 2$ graus de liberdade sob a hipótese nula. Uma vez calculado o valor da estatística t , obtém-se o p -valor associado por meio da função de distribuição acumulada (CDF) da distribuição t [183]

$$p = 2 * [1 - F_t(|t|; \nu = n - 2)], \quad (5.38)$$

onde $F_t(|t|; \nu)$ representa a probabilidade acumulada da distribuição t até o valor $|t|$, com $\nu = n - 2$ graus de liberdade. O fator 2 é aplicado em razão do teste ser bicaudal.

Valores de $p < 0,05$ foram considerados estatisticamente significativos, indicando evidência suficiente para rejeitar a hipótese nula e, portanto, confirmar a existência de uma correlação linear entre as variáveis analisadas [184].

A aplicação do coeficiente de correlação de Pearson pressupõe que as variáveis envolvidas sejam quantitativas contínuas e que apresentem uma distribuição aproximadamente normal. No presente estudo, embora os índices q da estatística não extensiva e as variáveis físicas analisadas sejam quantitativos, a hipótese de normalidade não foi rigorosamente verificada. Diante dessa limitação, os resultados obtidos com Pearson foram complementados pela análise do coeficiente de Spearman [185].

5.7.5 Complemento com regressão linear

A fim de complementar a análise de correlação, foram ajustados modelos de regressão linear simples para os pares de variáveis que apresentaram correlação estatisticamente significativa ($p < 0,05$) segundo o teste de Pearson [181]. A regressão linear permite não apenas verificar a tendência entre duas variáveis contínuas, mas também quantificar a variação da

variável dependente explicada pela variável independente, por meio do coeficiente de determinação R^2 [186].

5.7.5.1 Modelo matemático

O modelo de regressão linear simples é definido pela equação:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon, \quad (5.39)$$

onde:

- y é a variável dependente (neste estudo, um dos índices q : q_{stat} , q_{sen} , ou q_{rel});
- x é a variável independente (parâmetros físicos: massa final, massa *Chirp* ou frequência de pico);
- β_0 é o intercepto, ou seja, o valor estimado de y quando $x = 0$;
- β_1 é o coeficiente angular (ou inclinação da reta), que representa a variação média de y a cada unidade de incremento em x ;
- ε é o termo de erro aleatório, assumido com distribuição normal e média zero.

A estimação dos parâmetros β_0 e β_1 é feita pelo método dos mínimos quadrados ordinários (MQO), que minimiza a soma dos quadrados dos resíduos [187]

$$\text{Soma dos resíduos} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2, \quad (5.40)$$

onde $\hat{y}_i = \beta_0 + \beta_1 x_i$ é o valor ajustado pelo modelo para a observação i .

5.7.5.2 Coeficiente de determinação R^2

Uma das métricas mais importantes na análise de regressão é o coeficiente de determinação, denotado por R^2 [188]

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}. \quad (5.41)$$

Este valor representa a fração da variância total da variável dependente y que é explicada pela variável independente x . Seu valor varia entre 0 e 1:

$R^2 \sim 1$ indica forte capacidade preditiva do modelo;

$R^2 \sim 0$ indica que o modelo não explica a variação de y .

5.7.5.3 Aplicação ao presente estudo

Os modelos de regressão foram aplicados às seguintes relações estatisticamente significativas:

$$q_{\text{sen}} \sim \text{Massa Final};$$

$$q_{\text{sen}} \sim \text{Massa Chirp};$$

$$q_{\text{sen}} \sim \text{Frequência de Pico};$$

$$q_{\text{rel}} \sim \text{Massa Chirp}.$$

A análise permitiu identificar associações estatísticas entre os índices do q -tripletto e variáveis físicas dos eventos. Em particular, observou-se uma tendência de diminuição do índice (q_{sen}) com o aumento da massa do sistema. Tal comportamento sugere uma possível redução da sensibilidade dinâmica em sistemas binários mais massivos; entretanto, essa associação deve ser interpretada com cautela.

Cabe destacar que a massa do sistema pode atuar como um indicador indireto para outras grandezas relevantes, notadamente a razão sinal-ruído (SNR), que influencia diretamente a qualidade estatística da série temporal analisada. Assim, a correlação observada entre (q_{sen}) e a massa pode refletir, ao menos em parte, efeitos associados à variação da SNR entre os eventos considerados, não implicando necessariamente uma relação causal direta entre essas grandezas.

Além disso, os gráficos de dispersão acompanhados das linhas de tendência ajustadas oferecem uma visualização clara da natureza da relação (direta ou inversa) e do grau de dispersão dos dados em torno da reta de regressão.

5.7.5.4 Significância estatística

Para cada modelo, foi testada a hipótese nula de que $\beta_1 = 0$ (ausência de efeito de x sobre y). O teste t associado e os respectivos p -valores permitiram avaliar a significância dos coeficientes. Relações com $p < 0,05$ foram consideradas estatisticamente significativas, o que justifica a interpretação das tendências e o uso do R^2 como métrica de explicação.

5.8 Correlação de Spearman

O coeficiente de Spearman é uma medida não paramétrica que avalia a força e direção de relações monotônicas, independentemente de sua linearidade. Diferentemente da correlação de Pearson, que quantifica exclusivamente relações lineares sob pressupostos de normalidade, o coeficiente de Spearman baseia-se na ordenação (ranks) dos dados. Por essa razão, é ideal para identificar padrões de dependência que não necessariamente obedecem a uma estrutura linear [181].

5.8.1 Fundamentos teóricos e interpretação

O coeficiente de correlação de Spearman, denotado por ρ , varia no intervalo $[-1, 1]$ e é interpretado da seguinte forma:

- $\rho > 0$: associação monotônica positiva — à medida que uma variável aumenta, a outra também tende a aumentar;
- $\rho < 0$: associação monotônica negativa — à medida que uma variável aumenta, a outra tende a diminuir;
- $\rho = 0$: ausência de correlação monotônica.

A força da correlação pode ser lida em uma Tabela 5.

Tabela 5 – Classificação da força da correlação pelo coeficiente ρ .

Valor de ρ	Força da correlação
$0,0 < \rho \leq 0,1$	Nenhuma correlação
$0,1 < \rho \leq 0,3$	Baixa correlação
$0,3 < \rho \leq 0,5$	Correlação média
$0,5 < \rho \leq 0,7$	Alta correlação
$0,7 < \rho \leq 1,0$	Correlação muito alta

Fonte: (Adaptado de Kuckartz et al., 2013, p. 213) [181]

Os Valores negativos ($-1,0 \leq r < 0$) indicam correlação inversa com mesma magnitude.

Matematicamente, ρ é definido como o coeficiente de correlação de Pearson aplicado às classificações (*ranks*) das observações:

$$\rho = r_{\text{Pearson}}(\text{rg}(X), \text{rg}(Y)), \quad (5.42)$$

onde $\text{rg}(X)$ e $\text{rg}(Y)$ representam os vetores de postos (*ranks*) das variáveis X e Y . Quando não há empates nas observações, uma forma alternativa e simplificada da equação é:

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)}, \quad (5.43)$$

sendo d_i a diferença entre os postos das observações para cada par (x_i, y_i) e n o número de pares de dados.

Dado que não pressupõe normalidade na distribuição das variáveis, a correlação de Spearman [189] é particularmente útil em contextos onde os dados apresentam variabilidade não gaussiana ou relações não lineares, situação comum em sinais reais de ondas gravitacionais.

5.8.2 Testando a significância dos coeficientes de correlação

Calculamos o coeficiente de correlação para os dados da amostra. Agora podemos testar se o coeficiente de correlação é significativamente diferente de 0.

A hipótese nula e a hipótese alternativa são as seguintes:

- Hipótese nula: o coeficiente de correlação $\rho = 0$ (Não há correlação);
- Hipótese alternativa O coeficiente de correlação $\rho \neq 0$ (Existe uma correlação).

É possível testar se o coeficiente de correlação é significativamente diferente de zero, com base na amostra coletada, usando um teste t.

$$t = \frac{\rho * \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\rho^2}}, \quad (5.44)$$

onde ρ é o coeficiente de correlação e n é o tamanho da amostra. Um valor de p pode então ser calculado a partir da estatística de teste t [190]. Se o valor de p for menor que o nível de significância especificado (geralmente 5%), a hipótese nula é rejeitada; caso contrário, não.

5.8.3 Aplicação no presente estudo

Neste trabalho, o coeficiente de Spearman foi empregado como estratégia complementar à correlação de Pearson, com o objetivo de verificar se as associações entre os índices da estatística não extensiva de Tsallis (q_{sen} , q_{rel} , q_{stat}) e os parâmetros físicos característicos dos sinais de ondas gravitacionais (massa final, massa chirp e frequência de pico) persistem mesmo quando a hipótese de linearidade é relaxada.

Foram examinadas as seguintes combinações:

- q_{stat} , q_{sen} , q_{rel} versus Massa Final;
- q_{stat} , q_{sen} , q_{rel} versus Massa Chirp;
- q_{stat} , q_{sen} , q_{rel} versus Frequência de Pico.

Os valores de ρ e seus respectivos valores de significância estatística (p-valores) foram calculados utilizando a função `scipy.stats.spearmanr`, presente na biblioteca científica SciPy. Resultados com $p < 0,05$ foram considerados estatisticamente significativos, em conformidade com os critérios usuais de inferência.

5.8.4 Justificativa para o uso da correlação de Spearman no presente contexto

A adoção do coeficiente de Spearman se mostra particularmente pertinente neste estudo por três razões principais:

1. **Robustez frente à não normalidade:** as variáveis analisadas não foram submetidas a transformações que garantam distribuição gaussiana, sendo o Spearman mais adequado nessas condições;
2. **Capacidade de detectar dependências não lineares:** o coeficiente de Spearman permite capturar relações monotônicas mesmo quando não há proporcionalidade linear estrita;
3. **Validação cruzada dos achados:** a comparação entre os coeficientes de Pearson e Spearman contribui para aferir a natureza da dependência entre variáveis e reforça a solidez das inferências estatísticas.

Dessa forma, a utilização conjunta dos dois coeficientes de correlação enriquece a análise estatística, permitindo distinguir entre dependências estritamente lineares e associações monotônicas complexas, o que é especialmente relevante em contextos de sistemas dinâmicos não lineares, como os descritos pelas OGs.

A abordagem estatística adotada permite a identificação refinada de relações entre variáveis físicas e índices de complexidade, consolidando o uso da estatística não extensiva de Tsallis como ferramenta eficaz na caracterização de sinais astrofísicos.

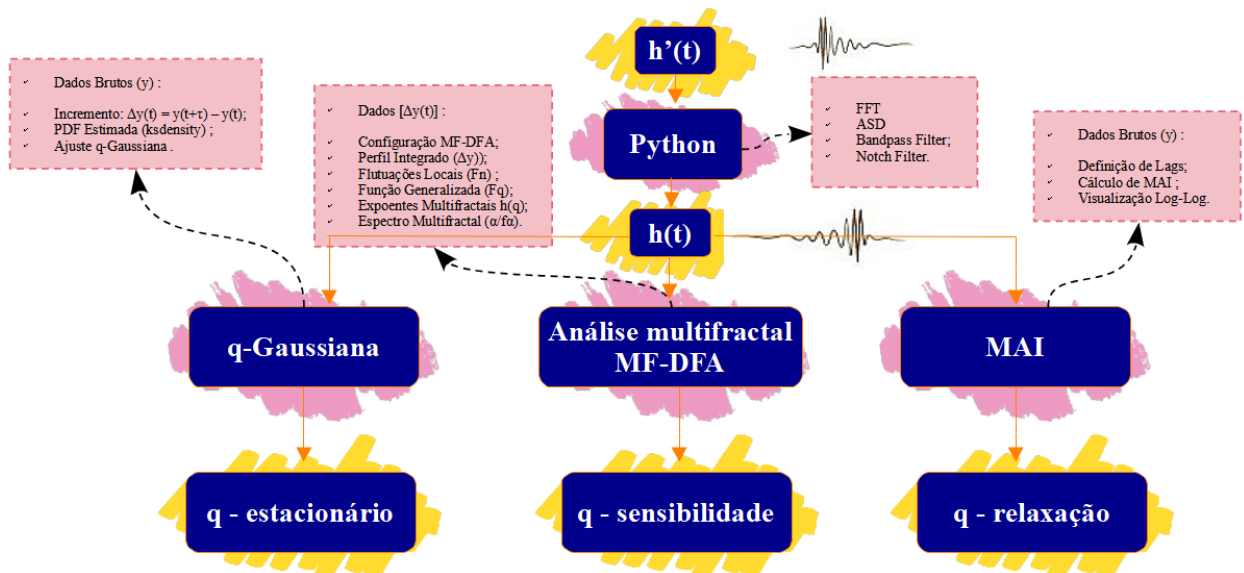
A metodologia desenvolvida neste trabalho foi implementada de forma totalmente reprodutível, utilizando linguagens e bibliotecas científicas de código aberto. As rotinas principais foram desenvolvidas em Python (versão 3.11), com suporte das bibliotecas NumPy, Pandas, SciPy e GWpy, e complementadas por *scripts* auxiliares em MATLAB R2016b para análise multifractal (MF-DFA) e extração de espectros $f(\alpha)$. Todos os códigos foram modularizados em três blocos funcionais pré-processamento dos dados, extração dos índices (q_{stat} , q_{sen} , q_{rel}) e análises de correlação estatística (Pearson e Spearman), de forma a assegurar rastreabilidade e consistência entre as etapas.

Para garantir transparência e reprodutibilidade dos resultados, o conjunto completo de *scripts*, dados de entrada e exemplos de execução foi disponibilizado em um repositório público do GitHub⁶ (licença MIT). O repositório contém instruções detalhadas de dependências, parâmetros de execução e ambiente virtual de software, de modo que outros pesquisadores possam reproduzir integralmente os resultados apresentados nesta tese.

⁶Disponível em: <https://github.com/cleovieira/Tsallis-GW150914>

A estrutura geral da metodologia adotada é sintetizada no fluxograma da Figura 21, que ilustra de forma integrada as três principais etapas do processo analítico, desde o pré-processamento das séries temporais $h(t)$ até a extração dos índices não-extensivos e a análise de correlações estatísticas entre os parâmetros obtidos.

Figura 21 – Fluxograma geral da metodologia de análise das ondas gravitacionais, destacando as etapas de pré-processamento, extração dos índices q e análise de correlação estatística.



Fonte: Elaborado pelo autor.

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, são apresentados e discutidos os principais resultados obtidos a partir da análise estatística não extensiva aplicada às séries temporais de ondas gravitacionais detectadas pelo LIGO. Como estudo de caso inicial, foi analisado o evento GW150914, selecionado em função da alta qualidade do sinal e da ampla caracterização física disponível na literatura. A investigação foi conduzida em três frentes principais: (i) análise do comportamento temporal bruto do sinal $h(t)$ nos detectores de Hanford e Livingston; (ii) caracterização estatística do sinal por meio dos índices q da teoria não extensiva de Tsallis, com foco nos parâmetros q_{stat} , q_{sen} e q_{rel} ; e (iii) exploração das relações entre esses índices e os parâmetros físicos dos sistemas binários de buracos negros (BBH), como massa final, massa chirp e frequência de pico. O objetivo é investigar a natureza estatística e multiescalar do sinal gravitacional, evidenciando sua complexidade e comportamento fora do equilíbrio.

6.1 Análise temporal preliminar do evento GW150914

Como ponto de partida da análise, considerou-se o evento GW150914, com o objetivo de investigar o comportamento temporal da série $h(t)$ registrada nos detectores do LIGO Hanford (H1) e Livingston (L1).

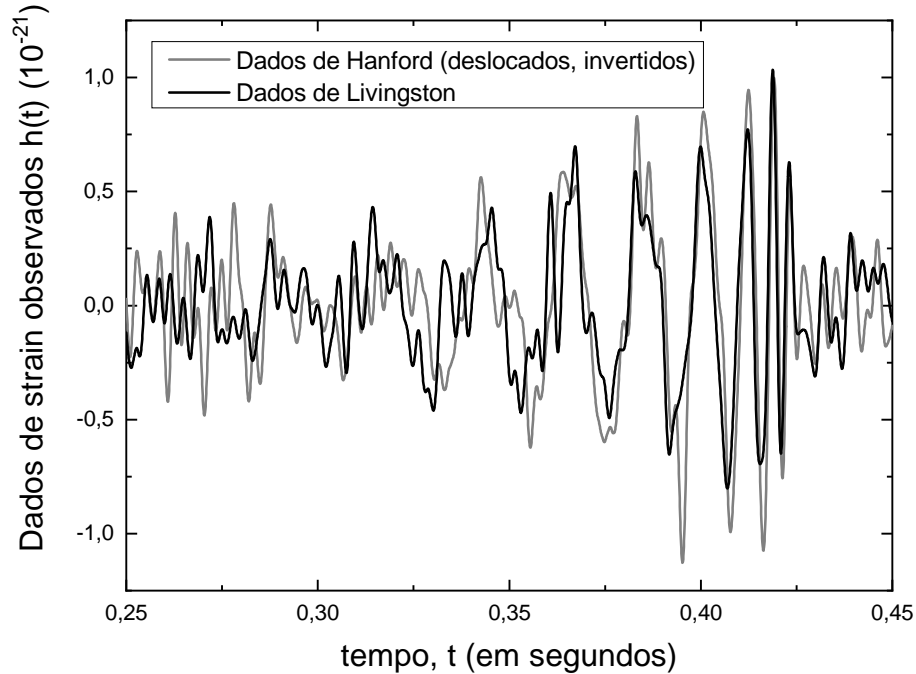
Os interferômetros do LIGO são instrumentos que operam no domínio do tempo, registrando as variações diferenciais no comprimento de seus “braços” causadas pela passagem de uma onda gravitacional. A saída primária de cada detector é um único fluxo de dados temporal conhecido como *strain*, representado por $h(t)$, que expressa a deformação relativa do espaço-tempo.

Após o pré-processamento espectral, que incluiu a aplicação de filtros passa-banda e rejeita-faixa (*bandpass* e *notch*), os sinais foram analisados com uma frequência de amostragem de 16 kHz. A Figura 22 apresenta os sinais resultantes para ambos os detectores, evidenciando o perfil característico de *chirp* associado ao evento GW150914.

Observa-se um aumento progressivo da amplitude do sinal a partir de aproximadamente 0,30 s dentro da janela temporal analisada, seguido de uma intensificação rápida até cerca de 0,42 s, instante que marca a região final do evento. Esse comportamento é compatível com a fase final da coalescência de um sistema binário de buracos negros. Essa evolução temporal é acompanhada por um aumento contínuo da frequência instantânea, atingindo valores da ordem de 150 Hz, em concordância com os resultados reportados na literatura para o GW150914.

Para alinhar os sinais dos dois interferômetros, considerou-se o atraso de chegada

Figura 22 – Sinais de *strain* observados nos detectores Hanford (cinza) e Livingston (preto), ambos filtrados por técnicas bandpass e notch. O sinal de Hanford foi deslocado em 6,9 ms e invertido em fase ($-h$). A duração visível do sinal é de aproximadamente 0,2 segundos.



Fonte: Silva [191].

do sinal ao detector de Hanford. Como os detectores estão separados por cerca de 3000 km, e as ondas gravitacionais propagam-se à velocidade da luz (c), há um atraso de 6,9 milissegundos entre a chegada do sinal em Livingston (primeiro) e Hanford (depois). Assim, o sinal de Hanford foi deslocado retroativamente em 6,9 ms para sincronizar temporalmente com o de Livingston.

Adicionalmente, o sinal de Hanford foi invertido em fase ($-h$), uma vez que os detectores possuem orientações físicas diferentes em relação à direção de propagação da onda gravitacional. Essa diferença pode resultar em sinais com fases opostas, exigindo a inversão para permitir uma comparação direta e visual entre os sinais.

Ressalta-se que a eventual inversão de fase dos sinais foi realizada exclusivamente para fins de alinhamento e comparação visual entre os detectores, sendo aplicada apenas quando necessária, em função da orientação geométrica relativa dos interferômetros e da polarização dominante da onda gravitacional. Esse procedimento não altera as propriedades estatísticas dos sinais analisados, nem impacta a estimativa dos índices do q-tripletto, uma vez que as metodologias empregadas são invariantes sob a transformação $h_H(t) \rightarrow -h_H(t)$.

Após essas correções, torna-se evidente a semelhança entre os sinais capturados por ambos os detectores, reforçando a confiabilidade da detecção e a coerência física da interpretação

do evento GW150914.

6.2 Estado estacionário representado pelo índice entrópico (q_{stat})

A função de distribuição de probabilidade (PDF) utilizada neste estudo segue a forma q-Gaussiana, apresentada na Equação 5.3, e descreve estados metaestáveis ou quase-estacionários caracterizados pelo parâmetro entrópico (q_{sta}) [13, 20]. Para determinar esse parâmetro, a série temporal $h(t)$ do evento GW150914 foi submetida ao processo de extração de incrementos multiescalares conforme

$$\Delta h(t, \tau) = h(t + \tau) - h(t), \quad (6.1)$$

com $\tau = 2^n$, onde $n \in \mathbb{R}$. A escolha dessa progressão geométrica visa capturar informações multiescalares, o que inclui a frequência de pico observada no evento GW150914 é (~ 150 Hz). A frequência de pico em torno de 150 Hz corresponde a um momento intermediário da fusão, quando os buracos negros estão em órbita muito próxima e acelerando rapidamente, emitindo ondas gravitacionais com essa frequência característica. Essa fase dura cerca de 0,2 segundos e representa a fase final da espiralização antes da fusão propriamente dita [29].

Cada distribuição de incrementos $\Delta h(t, \tau)$ foi normalizada e ajustada numericamente por uma função q-Gaussiana por meio de regressão não linear com o algoritmo de Levenberg-Marquardt [152, 153]. Esse ajuste permitiu obter o valor ideal do parâmetro q que melhor descreve a distribuição empírica observada.

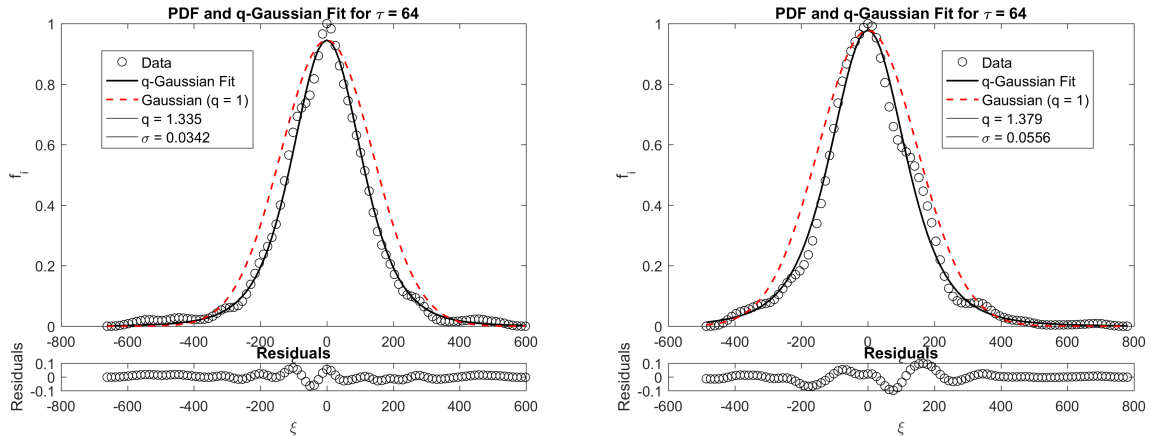
A Figura 23 apresenta os ajustes das distribuições empíricas de $\Delta h(t, \tau)$, para $\tau = 64$, com os dados filtrados dos detectores LIGO de Hanford e Livingston. Os pontos representam os dados normalizados da série temporal; as curvas contínuas indicam os ajustes q-Gaussianos, enquanto as curvas tracejadas representam a comparação com a Gaussiana tradicional ($q = 1$).

Para o detector de Hanford (H1), o ajuste revelou $q = 1,379$ com desvio padrão $\sigma = 0,0556$. Já para Livingston (L1), obteve-se $q = 1,335$ com $\sigma = 0,0342$. Em ambos os casos, as caudas da distribuição são melhor descritas pela q-Gaussiana, superando claramente a estatística de Boltzmann-Gibbs. Os resíduos confirmam a qualidade do ajuste, sem padrões sistemáticos.

Para caracterizar a dependência do parâmetro q com a escala temporal, realizou-se uma análise em múltiplos valores de τ abrangendo desde 1 até 1024, com incrementos não uniformes. Para facilitar a interpretação, as escalas temporais foram convertidas em frequência via

$$f = \frac{1}{\tau * \delta t}, \quad (6.2)$$

Figura 23 – Distribuições das flutuações multiescalares da onda *GW150914* para $\tau = 64$ nos detectores LIGO de Hanford e Livingston.



Fonte: Elaborada pelo autor.

onde $\delta t \sim 61\mu s$ representa a cadência da amostragem. A Figura 24 apresenta a evolução do parâmetro (q_{stat}) em função da frequência (painel superior), e o espectro de amplitude da deformação $h(t)$ (painel inferior).

A Figura 24 apresenta a evolução do índice estacionário (q_{stat}) em função da escala temporal, expressa de forma equivalente pela frequência relativa do sinal, para os detectores LIGO de Hanford e Livingston. As barras de erro e as bandas sombreadas correspondem aos intervalos de confiança de 95%¹, refletindo a incerteza estatística associada à estimativa de (q_{stat}) em cada escala analisada. Essas regiões permitem avaliar a significância dos desvios em relação ao valor extensivo $q = 1$, característico da estatística de Boltzmann–Gibbs.

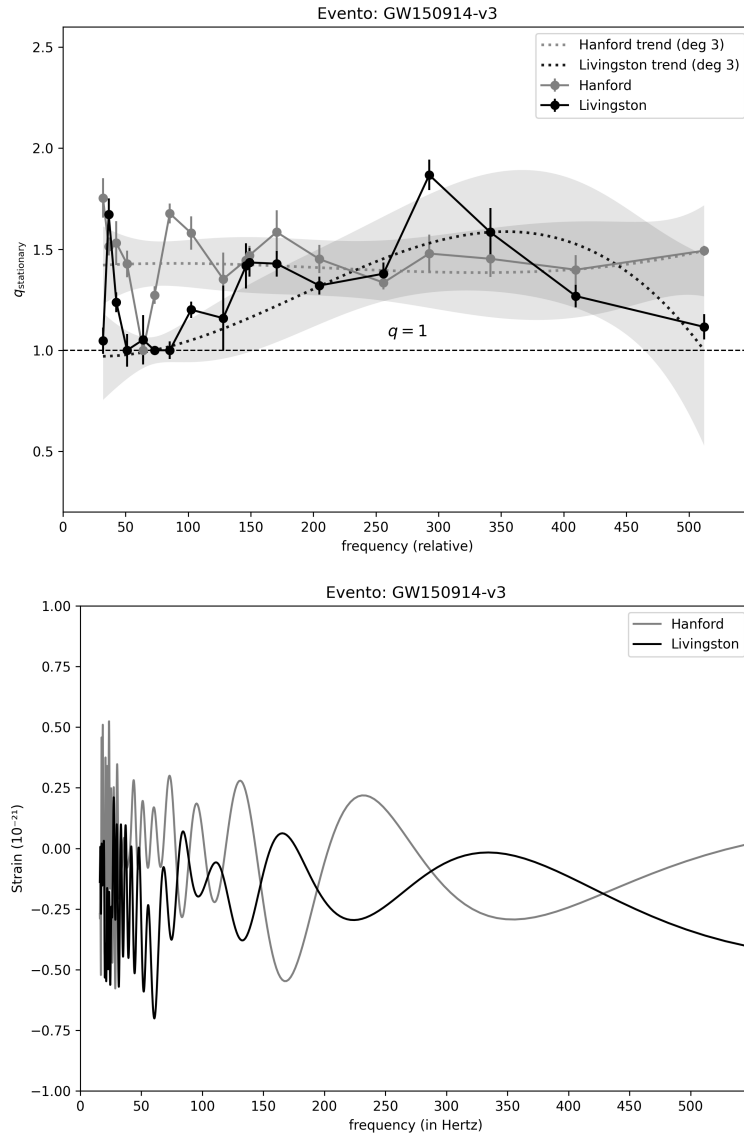
Embora os sinais tenham sido submetidos a procedimentos de filtragem espectral e pré-processamento, tais etapas reduzem significativamente o ruído instrumental, mas não o eliminam completamente. Dessa forma, permanece uma contribuição residual de ruído cuja influência varia com a escala temporal e a frequência analisadas

Observa-se que, nas escalas dominadas pelo sinal astrofísico, isto é, nos intervalos em que a contribuição da onda gravitacional é significativamente superior à do ruído instrumental residual, tipicamente associados a frequências abaixo de aproximadamente ~ 100 Hz, o índice (q_{stat}) assume valores maiores que a unidade, alcançando valores superiores a 1,5 e, em alguns intervalos, próximos de 2,0 no detector de Hanford. Esses valores indicam distribuições com caudas pesadas, evidenciando um regime estatístico não gaussiano associado à dinâmica fora do equilíbrio do sistema binário em coalescência.

Em contrapartida, nas escalas correspondentes a frequências mais elevadas, acima de aproximadamente ~ 200 Hz, onde o sinal passa a ser progressivamente dominado pelo ruído

¹Os intervalos de confiança de 95% indicam que, sob repetição do procedimento de estimação adotado, espera-se que aproximadamente 95% dos intervalos assim construídos contêm o valor verdadeiro do parâmetro estimado, refletindo a incerteza estatística associada à amostra finita do sinal.

Figura 24 – *Painel superior*: Evolução do índice entrópico (q_{stat}) em função da frequência relativa para os detectores LIGO de Hanford e Livingston. As bandas sombreadas representam os intervalos de confiança de 95% associados à estimativa de (q_{stat}) em cada escala, enquanto as curvas tracejadas indicam tendências suavizadas obtidas por ajuste polinomial. A linha horizontal $q = 1$ corresponde ao caso extensivo da estatística de Boltzmann–Gibbs. *Painel inferior*: Espectro de amplitude da deformação $h(t)$ para o evento GW150914.



Fonte: Elaborada pelo autor.

de fundo residual dos detectores, (q_{stat}) tende a se aproximar de 1, indicando um comportamento estatístico compatível com ruído aproximadamente gaussiano. Essa transição entre regimes reforça a interpretação de que os desvios de extensividade observados estão diretamente associados às regiões do sinal com maior conteúdo físico astrofísico.

A dependência do parâmetro (q_{stat}) em relação à frequência revela a natureza multiescalar e não extensiva do sinal gravitacional. Em especial, as flutuações intensas de baixa frequência revelam um regime estatístico multifractal que escapa às ferramentas tradicionais

da estatística clássica, uma conclusão fundamentada e suportada pelas observações. Vale notar que a escolha de uma escala de referência correspondente à frequência de pico (~ 150 Hz) para cálculo preciso de (q_{stat}) é justificável, pois esse ponto marca fisicamente a máxima emissão de energia (momento imediatamente antes da fusão dos buracos negros) e estatisticamente onde a coerência entre os detectores é maior.

Os valores do $q_{stat}(150\text{Hz}) \sim 1,47$ (Hanford) e $1,43$ (Livingston), significativamente maiores que 1, o que confirma quantitativamente a presença de distribuição não-gaussiana no pico do evento. Esses valores reforçam a hipótese de um regime não extensivo subjacente à dinâmica da fusão.

6.2.1 Análise do índice estacionário (q_{stat}) nos sinais gravitacionais

A análise gráfica do catálogo de eventos revela, analisar o Apêndice D, uma tendência sistemática no comportamento do índice (q_{stat}), estimado a partir das distribuições multiescalares dos sinais de deformação $h(t)$. Em particular, observa-se que:

- Valores de ($q_{stat} > 1$) são recorrentes na maioria dos eventos analisados, indicando um desvio significativo da estatística extensiva de Boltzmann-Gibbs ($q = 1$) e apontando para a predominância de distribuições com caudas pesadas. Este comportamento é típico de sistemas físicos que apresentam flutuações intermitentes, forte correlação de longo alcance e estruturas dinâmicas não lineares.

Este regime estatístico não extensivo está intrinsecamente associado à complexidade da dinâmica astrofísica envolvida na geração das ondas gravitacionais, particularmente nos eventos de coalescência de sistemas binários de buracos negros (BBH). Tais sistemas operam sob condições extremas de energia, curvatura espaço-tempo e não linearidade gravitacional, resultando na emissão de sinais altamente complexos e não estacionários.

A recorrência de (q_{stat}) significativamente superior à unidade permite uma interpretação física consistente:

- As ondas gravitacionais analisadas são produtos de processos dinâmicos transientes, dominados por mecanismos de aceleração intensa, fusão e relaxação gravitacional de objetos compactos com massas e *spins* variados. Este processo é caracterizado por um aumento monotônico da frequência e da amplitude do sinal, fenômeno conhecido como *chirp*, seguido por um amortecimento abrupto na fase de *ringdown*;
- O fato de ($q_{stat} > 1$) refletir a presença de caudas pesadas nas distribuições é uma assinatura clara de que as séries temporais $h(t)$ apresentam comportamento multifractal, intermitente e não gaussiano. Este cenário é incompatível com a hipótese de equilíbrio

térmico ou de ergodicidade global, pressupostos fundamentais da mecânica estatística clássica;

- Consequentemente, os sistemas analisados parecem evoluir em estados metaestáveis, governados por uma dinâmica espaço-temporal altamente complexa, na qual o formalismo da estatística não extensiva de Tsallis oferece uma descrição mais adequada. Este formalismo captura, de maneira consistente, os efeitos de não aditividade, memória de longo alcance e ocupação não uniforme do espaço de fases, características tipicamente observadas em sistemas autogravitantes e caóticos.

Portanto, os resultados obtidos consolidam a hipótese de que as ondas gravitacionais provenientes de coalescências de BBH não podem ser plenamente descritas sob o paradigma da estatística extensiva. Ao contrário, elas exigem uma abordagem generalizada, na qual os índices do q -tripleto, em particular, (q_{stat}) tornam-se parâmetros fundamentais para a compreensão das propriedades dinâmicas, estatísticas e estruturais desses sistemas astrofísicos extremos.

6.3 Estado de sensibilidade para o índice entrópico (q_{sen})

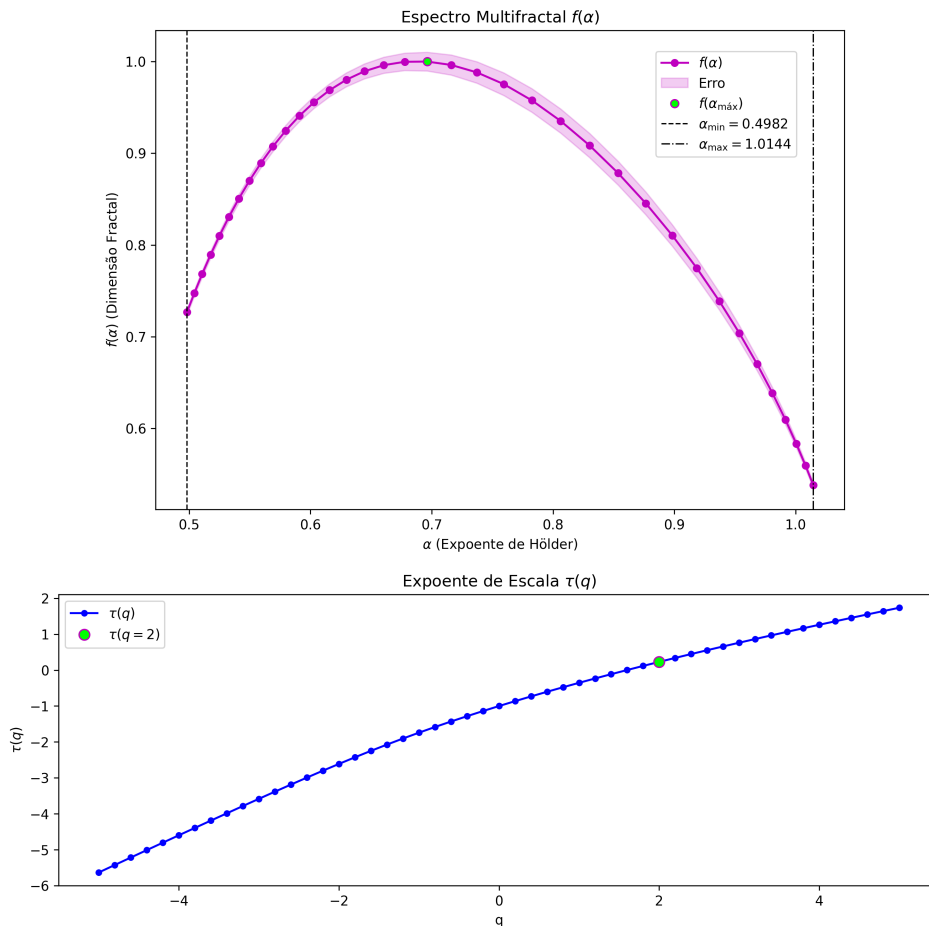
Para a obtenção do parâmetro (q_{sen}), utilizou-se o espectro multifractal $f(\alpha)$ previamente obtido a partir da série temporal da deformação gravitacional $h(t)$, conforme o procedimento metodológico descrito na Seção 5.4.4. Inicialmente, a série foi transformada em incrementos multiescalares $\Delta h(t, \tau)$, com $\tau = 2^n$ escalas de modo a capturar a dinâmica multiescalar relevante do evento GW150914.

A análise multifractal foi conduzida por meio do método MF-DFA, a partir do qual se obtiveram os expoentes de Hurst generalizados $h(q)$ e o espectro multifractal $f(\alpha)$. O parâmetro (q_{sen}) foi então estimado a partir das propriedades geométricas do espectro multifractal, em particular por meio da largura e da assimetria de $f(\alpha)$, conforme discutido na literatura sobre estatística não extensiva e sistemas multifractais.

Essa relação permite uma interpretação geométrica da distribuição das flutuações ao longo de diferentes escalas. Os valores obtidos para a série temporal $h(t)$ associada ao evento GW150914 revelam uma estrutura multifractal bem definida no intervalo de escalas característico do sinal. Os pares (α_i, f_i) correspondentes aos detectores de Hanford (H1) e Livingston (L1) são apresentados, respectivamente, nas Figuras 25 e 26.

No caso do detector de Hanford (H1), Figura 25, observa-se que o espectro multifractal $f(\alpha)$ apresenta um intervalo significativo de expoentes de Hölder, variando de $\alpha_{\text{min}} = 0,4982 \pm 0,0031$ até $\alpha_{\text{max}} = 1,0144 \pm 0,0029$, caracterizando um comportamento autenticamente multifractal da série temporal analisada. Essa dispersão reflete a coexistência de regiões

Figura 25 – *Painel superior*: Espectro multifractal $f(\alpha)$ em função do expoente de Hölder α , obtido a partir da série temporal do evento GW150914 registrado pelo detector LIGO-Hanford (H1). A curvatura acentuada e assimétrica do espectro revela a forte multifractalidade do sinal. *Painel inferior*: Expoente de escala $\tau(q)$ em função do momento estatístico q , no intervalo $q \in [-5, 5]$ com passo de 0,2. A não linearidade de $\tau(q)$ indica a presença de múltiplas escalas de flutuação.

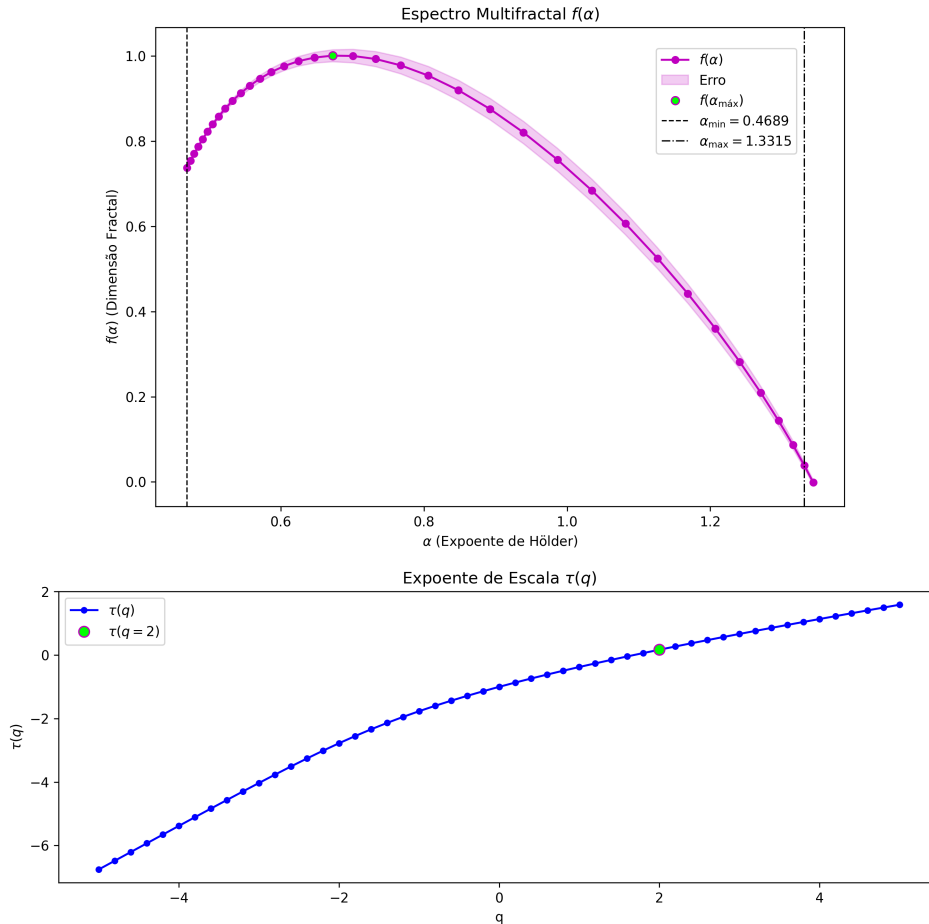


Fonte: Elaborado pelo autor.

com flutuações suaves e abruptas, evidenciando a heterogeneidade dinâmica do sinal gravitacional. Para o caso particular de $q = 2$, o expoente de Hurst generalizado obtido foi $h(2) = H = 0,6145 \pm 0,0357$, sugerindo persistência temporal, ou seja, uma tendência de que flutuações positivas (ou negativas) sejam seguidas por flutuações do mesmo sinal, característica típica de processos correlacionados em sistemas complexos.

Resultados análogos são observados para o detector de Livingston (L1), Figura 26, cujo espectro multifractal também exibe ampla variação dos expoentes de Hölder, com $\alpha_{\text{mín}} = 0,452107 \pm 0,001288$ e $\alpha_{\text{máx}} = 1,334634 \pm 0,005536$. O expoente de Hurst generalizado para $q = 2$ foi estimado como $h(2) = H = 0,584160 \pm 0,034798$, igualmente indicando persistência temporal. A concordância qualitativa entre os resultados de Hanford e Livingston reforça a robustez da multifractalidade observada e sugere que tal comportamento reflete propriedades intrínsecas da dinâmica da onda gravitacional, e não efeitos locais ou puramente instrumentais.

Figura 26 – *Painel superior*: Espectro multifractal $f(\alpha)$ em função do expoente de Hölder α , obtido a partir da série temporal do evento GW150914 registrada pelo detector LIGO-Livingston (L1). *Painel inferior*: Expoente de escala $\tau(q)$ em função do momento estatístico q . Ambos os gráficos revelam a presença de estrutura multifractal robusta.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A simetria e a largura dos espectros multifractais obtidos a partir dos dados dos detectores Hanford (H1) e Livingston (L1) indicam que as características multifractais observadas não se originam unicamente de ruído instrumental ou local, mas refletem propriedades intrínsecas da dinâmica da onda gravitacional associada ao evento GW150914.

A complexidade dessas séries temporais pode ser quantificada pela largura do espectro multifractal, $\Delta\alpha$, definida como a diferença entre os valores extremos dos expoentes de Hölder

$$\Delta\alpha = \alpha_{\max} - \alpha_{\min},$$

onde α_{\min} e α_{\max} representam, respectivamente, as flutuações mais intensas e mais suaves do sinal. Essa métrica fornece uma estimativa da diversidade de singularidades locais na série temporal, servindo como indicador da complexidade dinâmica do sistema.

Nos casos em que $\Delta\alpha$ apresenta valores reduzidos, a série tende a se comportar de maneira mais uniforme, característica típica de processos monofractais. Em contrapartida, uma

largura elevada do espectro multifractal indica a presença de uma ampla gama de comportamentos locais, compatível com a existência de múltiplos mecanismos dinâmicos atuando em diferentes escalas temporais, um traço marcante de sistemas multifractais.

A função $f(\alpha)$, da qual se extrai $\Delta\alpha$, é obtida por meio da transformada de Legendre da função de escala $\tau(q)$ e é sensível às variações de crescimento das flutuações para diferentes ordens q . A curvatura e a assimetria dessa função oferecem informações adicionais sobre a predominância relativa de flutuações suaves ou abruptas.

Em sistemas monofractais ideais, espera-se que $\Delta\alpha = 0$, ou seja, uma dependência linear entre $\tau(q)$ e q . No entanto, conforme ilustrado nas Figuras 25 e 26, os espectros obtidos para os dados de Hanford e Livingston apresentam larguras de $\Delta\alpha = 0,5161 \pm 0,0043$ e $\Delta\alpha = 0,8625 \pm 0,0076$, respectivamente. Tais valores evidenciam um grau elevado de heterogeneidade temporal, consistente com assinaturas complexas originadas por processos não lineares e fora do equilíbrio, que se manifestam por meio de múltiplas escalas de flutuação.

De modo geral, quando um conjunto fractal é homogêneo, ele é caracterizado por uma única dimensão fractal e um único expoente de escala. No presente estudo, os espectros multifractais $f(\alpha)$ calculados para os dados do evento GW150914 exibiram um amplo intervalo de expoentes de Hölder $\Delta\alpha$, o que confirma o caráter multifractal das séries temporais analisadas. Esse comportamento indica a presença de correlações de longo alcance e flutuações dinâmicas estruturadas, reforçando a complexidade e a natureza fora do equilíbrio do sistema gravitacional.

Adicionalmente, estudos anteriores sobre sistemas dissipativos não lineares estabeleceram uma relação analítica entre os extremos do espectro multifractal $f(\alpha)$ e o índice (q_{sen}), este último associado à sensibilidade às condições iniciais no contexto da mecânica estatística não extensiva de Tsallis. Essa relação, validada tanto analiticamente quanto empiricamente em diversos sistemas físicos, incluindo turbulência, dinâmica caótica, plasmas espaciais e até redes complexas, é expressa matematicamente pela seguinte equação

$$q_{\text{sen}} = 1 - \frac{\alpha_{\text{min}} \cdot \alpha_{\text{max}}}{\alpha_{\text{max}} - \alpha_{\text{min}}} \quad (6.3)$$

Com base nos valores extraídos do espectro multifractal $f(\alpha)$ para o evento gravitacional GW150914, estimaram-se os seguintes valores para Hanford (H) e Livingston (L) respectivamente para o índice de sensibilidade (q_{sen}) nos dois detectores

$$\{q_{\text{sen}}\}_H = 0,0208 \pm 0,0085, \quad \{q_{\text{sen}}\}_L = 0,2761 \pm 0,0101.$$

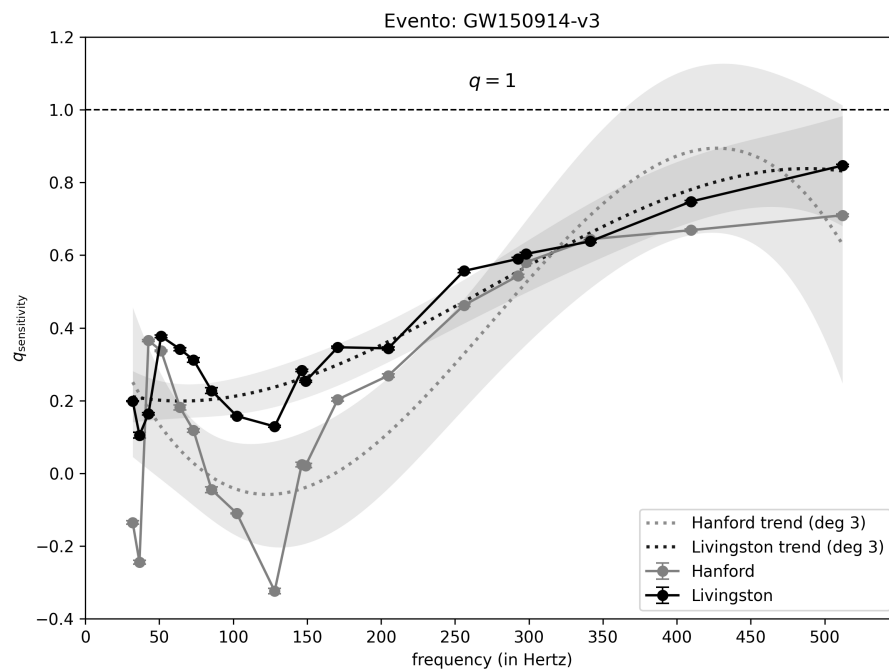
Esses valores confirmam a presença de uma sensibilidade subexponencial às condições iniciais ($q_{\text{sen}} < 1$), característica típica de sistemas dinâmicos situados na borda do caos.

Tal comportamento é indicativo de regimes intermediários entre ordem e desordem, nos quais coexistem flutuações suaves e abruptas em múltiplas escalas.

O resultado obtido é compatível com valores reportados na literatura para sinais reais que exibem comportamento crítico e multifractal, tais como séries financeiras (Mandelbrot et al., 1997) [192], regimes turbulentos (Muzy et al., 1993; Frisch, 1995) [148,193] e fenômenos geofísicos complexos (Lovejoy & Schertzer, 2013) [194].

Os valores estimados para o índice (q_{sen}) em função da frequência de pico são apresentados na Figura 27, tanto para os dados do detector de Hanford (H1) quanto para os de Livingston (L1), considerando diferentes escalas temporais associadas aos parâmetros $\tau = 2^n$.

Figura 27 – Valores do índice de sensibilidade às condições iniciais (q_{sens}) em função da frequência, derivados do espectro multifractal $f(\alpha)$ do evento GW150914, para os detectores LIGO de Hanford (H1) e Livingston (L1). As curvas sólidas representam os valores estimados de (q_{sens}), enquanto as bandas sombreadas correspondem aos intervalos de confiança estatística (95%) associados à estimativa em cada escala. A linha tracejada horizontal indica o valor extensivo $q = 1$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 27 apresenta a variação do índice de sensibilidade a condições iniciais (q_{sen}) em função da frequência, obtido a partir do espectro multifractal $f(\alpha)$ do sinal gravitacional registrado pelos detectores para o evento GW150914. As curvas correspondentes aos detectores de Hanford (cinza) e Livingston (preto) exibem uma tendência crescente de (q_{sen}) com o aumento da frequência, aproximando-se gradualmente de $q = 1$, o que indica uma transição de um regime de dinâmica complexa e intermitente (nas baixas frequências) para um comportamento mais regular e quase extensivo (nas altas frequências).

Os resultados mostrados indicam uma dependência clara de q_{sen} com a frequência, refletindo mudanças na complexidade dinâmica. Observa-se que, para frequências abaixo de ~ 200 Hz, os valores de q_{sen} permanecem bem abaixo de 1 em ambos os detectores, e no caso de Hanford chegam a ficar negativos num intervalo de $\sim 30\text{--}160$ Hz (faixa que engloba tanto a fase de crescimento do *chirp* quanto a região do pico de frequência do evento GW150914). Essa ocorrência de $q_{\text{sen}} < 0$ (matematicamente possível dada a definição em função de α_{min} e α_{max}) é interpretada como um indicativo de instabilidade dinâmica acentuada nessas escalas.

Fisicamente, isso corresponde às flutuações altamente intermitentes e não lineares durante a aproximação orbital dos buracos negros, isto é, na fase pré-fusão onde pequenas variações iniciais pouco influenciam o resultado macroscópico. Conforme a frequência aumenta (acima de ~ 200 Hz, entrando na fase final de *ringdown*), q_{sen} de ambos os detectores cresce gradualmente em direção a 1. Essa tendência indica que o sistema torna-se progressivamente mais regular e tende ao comportamento extensivo em altas frequências, consistente com a ideia de que, após a fusão, o sistema caminha para um estado mais estável (o buraco negro resultante relaxando).

É importante notar que o detector Livingston apresenta sistematicamente valores mais altos de (q_{sen}) do que Hanford em praticamente toda a faixa de frequências analisada. Tal discrepância pode estar relacionada a diferenças a fatores instrumentais e geométricos, ângulos de incidência da onda gravitacional e orientação dos braços dos interferômetros. Essa divergência é consistente com as observações de Chatterjee *et al.* (2019) [195], que demonstraram que o ângulo entre os braços dos detectores e a direção de propagação da onda influencia significativamente a amplitude e fase do sinal detectado.

Um aspecto que merece aprofundamento diz respeito à interpretação física dos valores negativos observados para o índice de sensibilidade (q_{sen}) no detector de Hanford. Embora tais valores possam, à primeira vista, estar associados a instabilidades intermitentes e dinâmicas altamente não lineares, sua ocorrência também pode ser interpretada sob uma perspectiva alternativa: a de um regime de superestabilidade momentânea, no qual as diferenças iniciais entre trajetórias praticamente não se ampliam ao longo do tempo. Nessa condição, o sistema apresenta uma coerência temporal transitória, possivelmente vinculada a flutuações entropicamente intensas, associadas a grandes variações locais da produção de entropia, durante a fase de maior complexidade dinâmica da aproximação orbital dos buracos negros.

Do ponto de vista metodológico, é importante observar que as estimativas dos expoentes multifractais α_{min} e α_{max} , dos quais deriva-se o índice (q_{sen}), podem apresentar variâncias não desprezíveis. Essas incertezas resultam de fatores como o tamanho finito das janelas de análise, a não estacionaridade do sinal, verificada pela evolução temporal de sua amplitude e frequência ao longo do evento, bem como pela variação estatística observada entre diferentes

janelas de análise, e a presença de ruído instrumental, que afetam diretamente a precisão na estimativa do espectro multifractal. Os pontos exibem as estimativas de q por frequência acompanhadas de barras de erro, que quantificam a incerteza associada a cada medida. As linhas pontilhadas correspondem à tendência obtida por regressão, na qual cada observação é ponderada inversamente à sua variância, de modo que pontos mais precisos têm maior influência no ajuste. As faixas sombreadas representam o intervalo de confiança de 95% da média ajustada, isto é, a incerteza da própria curva de tendência, permitindo distinguir variações compatíveis com o erro de estimação de desvios com suporte estatístico.

Em todos os casos, (q_{sen}) permanece abaixo da unidade no espectro inteiro, reforçando que o sinal não se comporta como um processo aleatório ou em equilíbrio. Em linguagem de dinâmica não linear, $(q_{\text{sen}} < 1)$ implica sensibilidade subexponencial às condições iniciais, típica de sistemas de caos fraco (com mistura incompleta e memória de longo alcance). Os valores quantificados inclusive (q_{sen}) em um ponto de máxima coerência do sinal, obtendo $(q_{\text{senH}} \approx 0,021)$ e $(q_{\text{senL}} \approx 0,276)$. Esses números condensam a informação de que o sistema apresenta um nível de caos bastante fraco, isto é, variações iniciais nos parâmetros orbitais resultam em mudanças sutis na forma final do sinal, comparado ao que seria esperado num sistema caótico convencional.

6.3.1 Análise do índice de sensibilidade (q_{sen}) nos sinais gravitacionais

A partir da análise do catálogo dos eventos de ondas gravitacionais, do tipo binário de buracos negros (BBH), analisar o Apêndice E, foram investigadas as propriedades dinâmicas subjacentes às séries temporais $h(t)$ por meio do índice de sensibilidade às condições iniciais, denotado por (q_{sen}) . Este índice integra o chamado q tripleto da estatística não-extensiva de Tsallis, e tem sido amplamente empregado para caracterizar a complexidade de sistemas físicos fora do equilíbrio e com estrutura multifractal. Especificamente, o parâmetro (q_{sen}) fornece uma medida da taxa de separação de trajetórias próximas no espaço de fases, sendo, portanto, diretamente relacionado à presença de caos fraco ou crítica dinâmico-temporal.

A análise do conjunto de gráficos apresentados no catálogo revela um padrão e recorrente de não-extensividade estatística na maioria dos eventos considerados. Os valores obtidos de (q_{sen}) situam-se sistematicamente abaixo da unidade $(q_{\text{sen}} < 1)$, evidenciando uma sensibilidade subexponencial às condições iniciais. Este comportamento é indicativo de uma dinâmica determinística não linear, característica de sistemas caóticos fracos, nos quais a separação entre trajetórias inicialmente próximas não cresce de forma exponencial, como no caos clássico, mas sim de acordo com uma lei q -exponencial. Essa propriedade foi teorizada por Lyra e Tsallis (1998) e posteriormente validada por diversos estudos empíricos.

A persistência de valores de (q_{sen}) significativamente menores do que 1, especial-

mente nas faixas de frequência associadas à fase de coalescência dos buracos negros, sugere que o processo de fusão compacta envolve regimes de alta complexidade dinâmica. Nessa fase, observam-se flutuações altamente não gaussianas, estruturadas em múltiplas escalas, compatíveis com uma organização multifractal da deformação gravitacional.

Adicionalmente, observa-se que os valores de (q_{sen}) extraídos dos sinais de Hanford tendem a ser ligeiramente inferiores aos de Livingston. Essa assimetria pode estar associada a diferenças na geometria de recepção dos interferômetros, aos efeitos de inclinação angular da onda incidente e às características locais de ruído instrumental. Essa interpretação encontra respaldo nos resultados de Chatterjee et al. (2019), que demonstraram a influência do alinhamento interferométrico na detecção e reconstrução de sinais gravitacionais.

6.4 Estado de Relaxação para o índice entrópico (q_{rel})

A estatística de Tsallis está associada à descrição de processos de relaxamento em sistemas complexos, nos quais a aproximação ao equilíbrio térmico não segue uma dinâmica exponencial simples, como preconizado pela estatística de Boltzmann-Gibbs, mas sim uma relaxação q -exponencial. Essa forma generalizada de relaxamento é caracterizada pelo parâmetro (q_{rel}), que quantifica o grau de não-extensividade do sistema e está diretamente relacionado à inclinação de curvas em escala log-log da função de correlação ou da Informação Mútua Média (Mutual Average Information – AMI).

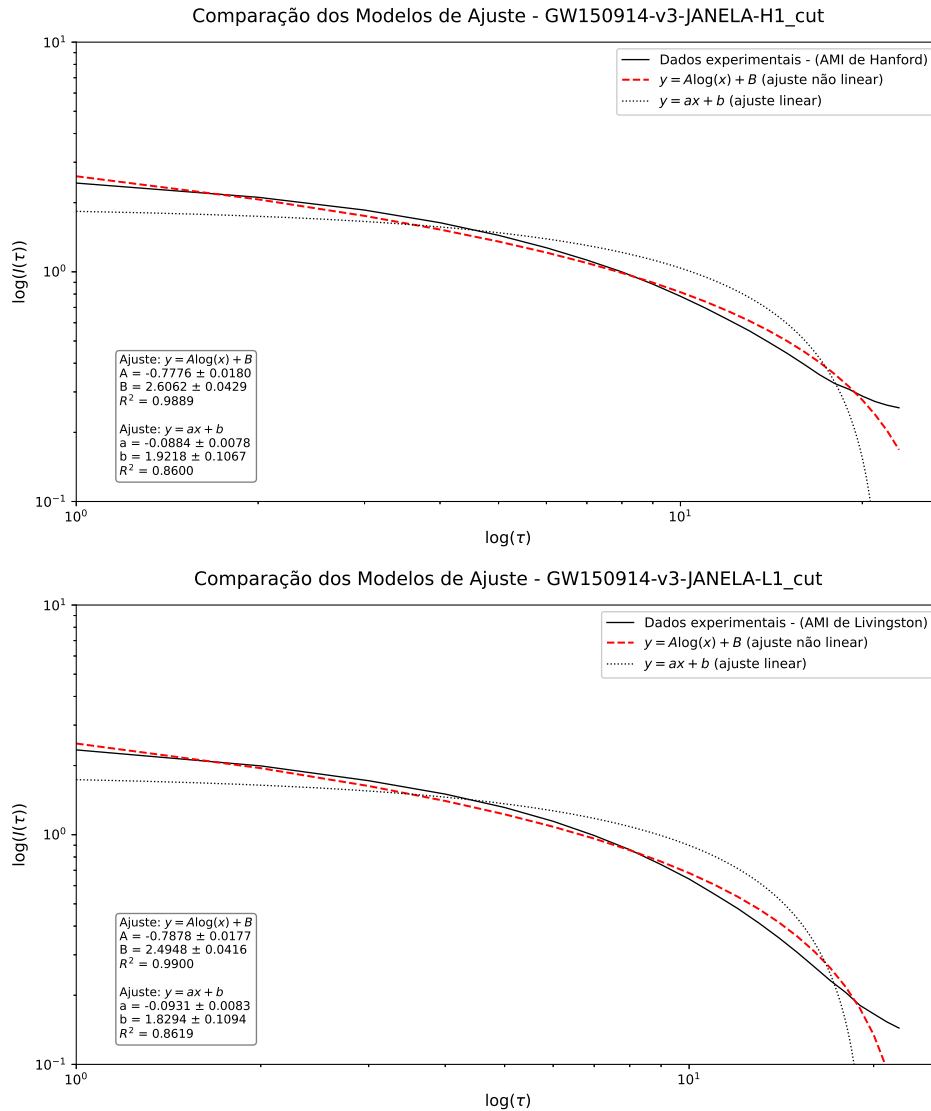
A Figura 28 apresenta os gráficos de $\log I(\tau)$ em função de $\log(\tau)$, correspondentes à análise da função AMI para a onda gravitacional GW150914, obtida a partir das séries temporais dos detectores Hanford (painel superior) e Livingston (painel inferior). As curvas pretas representam os dados empíricos da AMI. A linha tracejada azul indica o ajuste por lei de potência, enquanto a linha pontilhada vermelha representa o ajuste exponencial logarítmico.

De acordo com a mecânica estatística clássica de Boltzmann-Gibbs, espera-se que o decaimento da função $I(\tau)$ ocorra de forma exponencial. No entanto, os dados obtidos para ambos os detectores não exibem esse comportamento. Observa-se, em contrapartida, um decaimento mais lento, compatível com uma lei de potência. Este resultado é indicativo de uma relaxação não-extensiva, em conformidade com a proposta da estatística de Tsallis.

Para o detector Hanford, o ajuste por lei de potência foi obtido na faixa $\tau = 1 - 35$, com coeficiente angular $s = -0,7776 \pm 0,01$ e coeficiente de determinação $R^2 = 0,98889$. Já o ajuste exponencial apresentou desempenho inferior, com $R^2 = 0,85996$. A partir da inclinação da curva log-log, estimou-se o índice (q_{rel}) pela expressão

$$q_{rel} = 1 - \frac{1}{s}, \quad (6.4)$$

Figura 28 – *Painel superior*: Gráfico log-log da Informação Mútua Média $I(\tau)$ em função da defasagem temporal τ , para o detector Hanford. *Painel inferior*: Mesma análise aplicada aos dados do detector Livingston.



resultando em ($q_{rel} = 2,28602 \pm 0,01799$). Esse valor indica que o sistema se encontra em um regime de relaxa o q-exponencial para estados estacionários de meta-equilíbrio não extensivo.

Para o detector Livingston, os resultados foram qualitativamente semelhantes. O ajuste por lei de potência resultou em uma inclina o de $s = -0,78783 \pm 0,01774$, com $R^2 = 0,98997$, enquanto o modelo exponencial obteve $R^2 = 0,86191$. A estimativa do  ndice de relaxa o forneceu ($q_{rel} = 2,26931 \pm 0,01774$), confirmando novamente a presença de um decaimento não-exponencial compatível com a formaliza o de Tsallis.

Os resultados obtidos para os índices (q_{stat}) e (q_{sen}) indicam que o sinal gravita ional analisado apresenta uma dinâmica não estacionária, multifractal e fora do equilíbrio, com correla o de longo alcance. Nesse contexto, espera-se que o processo de relaxa o da

informação ao longo do tempo não siga um decaimento exponencial típico de sistemas extensivos. De fato, os resultados mostram que, para ambos os detectores, o processo de relaxação da informação presente nas séries temporais do evento GW150914 segue uma dinâmica não extensiva, caracterizada por um comportamento q-exponencial. Assim, a análise do índice de relaxação (q_{rel}) fornece uma caracterização complementar da dinâmica temporal do sistema, permitindo investigar como a informação estatística se dissipa ao longo das escalas temporais.

6.4.1 Análise do índice de relaxação (q_{rel}) nos sinais gravitacionais

A estimativa do parâmetro (q_{rel}) fundamenta-se no comportamento da Informação Mútua Média (AMI) como função do atraso temporal τ , avaliada sob uma perspectiva de decaimento não exponencial tradicional, mas sim q-exponencial, típico de sistemas que relaxam para estados metaestáveis fora do equilíbrio termodinâmico. Para cada evento do catálogo, essa abordagem foi aplicada às séries temporais $h(t)$ dos detectores Hanford (H1) e Livingston (L1), proporcionando uma estimativa direta da dinâmica de relaxação subjacente à deformação do espaço-tempo registrada pelas ondas gravitacionais.

Os valores de (q_{rel}) extraídos apresentaram uma tendência sistemática de se manterem acima da unidade ($q_{rel} > 1$), indicando um processo de relaxação mais lento que o exponencial, característico de sistemas que não seguem a termodinâmica extensiva de Boltzmann-Gibbs. Esse comportamento é compatível com o cenário físico de fusões de buracos negros, em que as interações gravitacionais de longo alcance, a não linearidade e a memória temporal desempenham papéis centrais na evolução do sistema.

A comparação entre os detectores revela uma consistência qualitativa dos perfis de (q_{rel}) ao longo da frequência associada, sugerindo que a estrutura informacional da dinâmica é preservada em ambos os observatórios, embora pequenas variações quantitativas possam refletir diferenças nos níveis de ruído local, na orientação relativa dos detectores ou na geometria de recepção do sinal.

Para a maioria dos eventos analisados, observa-se um decaimento não exponencial da AMI, bem descrito por uma lei q-exponencial, indicando uma dinâmica de relaxação não-extensiva. Esse comportamento é consistente com a presença de correlações temporais de longo alcance e memória dinâmica nos sinais gravitacionais, reforçando a aplicabilidade do formalismo de Tsallis à análise estatística global do catálogo.

Esse comportamento reforça a interpretação de que os sinais de ondas gravitacionais não são simplesmente ruído estocástico ou flutuações aleatórias, mas sim manifestações de sistemas altamente complexos em evolução não linear, cujos estados transitam por diferentes regimes de relaxação até atingirem condições quase estacionárias não extensivas.

6.5 Caracterização integrada da dinâmica das ondas gravitacionais via q -tripleto

A análise conjunta dos índices $(q_{\text{stat}}, q_{\text{sen}}, q_{\text{rel}})$ permite uma caracterização integrada da dinâmica estatística das ondas gravitacionais, indo além da interpretação fornecida por cada índice isoladamente. Enquanto (q_{stat}) descreve a natureza não gaussiana das distribuições associadas às flutuações do sinal, (q_{sen}) quantifica a sensibilidade dinâmica às condições iniciais em diferentes escalas, e (q_{rel}) caracteriza o processo de relaxação temporal da informação estatística. Considerados em conjunto, esses índices fornecem uma evidência consistente de que os sinais gravitacionais analisados evoluem em um regime fora do equilíbrio termodinâmico, com memória temporal e correlações de longo alcance.

No caso do evento GW150914, os valores obtidos para o q -tripleto satisfazem sistematicamente as desigualdades esperadas para sistemas não extensivos, isto é, $(q_{\text{stat}} > 1)$, $(q_{\text{sen}} < 1)$ e $(q_{\text{rel}} > 1)$. Essa combinação de índices confirma que a dinâmica do sistema binário em coalescência não pode ser descrita adequadamente pelo formalismo extensivo de Boltzmann–Gibbs, sendo mais bem representada por uma abordagem estatística não-extensiva.

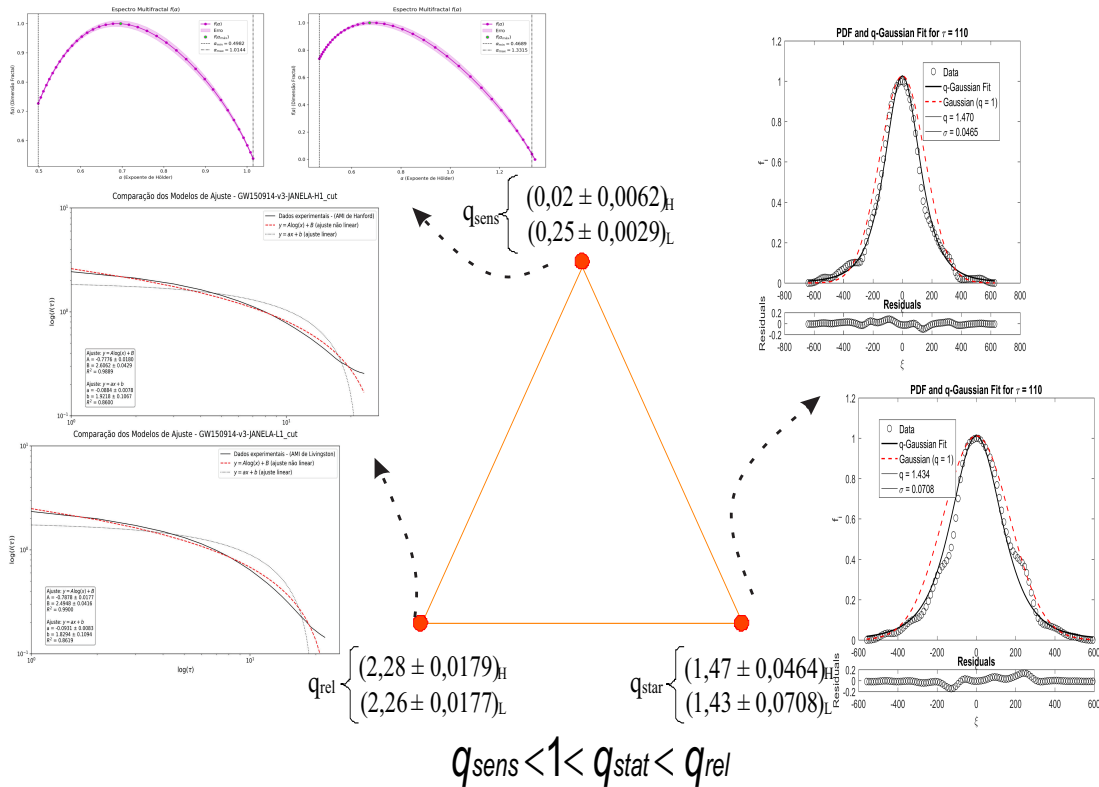
Com base nas séries temporais do evento gravitacional GW150914, detectado simultaneamente pelos interferômetros LIGO Livingston (L1) e Hanford (H1). A partir de ajustes baseados na distribuição q -Gaussiana de Tsallis e na aplicação de métodos multifractais e informacionais às séries $h(t)$, foi possível estimar os três parâmetros que compõem o q -tripleto. De um ajuste da distribuição de Tsallis para as observações associadas à região espectral em torno da frequência de pico (~ 150 Hz) do evento obteve o conjunto de três índices conforme listado abaixo:

$$\{q_{\text{stat}}; q_{\text{sen}}; q_{\text{rel}}\}_{\text{L}} = \{1,4345; 0,2533; 2,2693\} \text{ e } \{q_{\text{stat}}; q_{\text{sen}}; q_{\text{rel}}\}_{\text{H}} = \{1,4699; 0,0215; 2,2860\}.$$

Para facilitar a visualização da interdependência desses três parâmetros, a Figura 29 apresenta o triângulo do q -tripleto construído com base nos valores obtidos para o evento GW150914. Esta Figura inspirado no modelo proposto por Burlaga e Viñas (2005) para o estudo do vento solar, e aqui adaptado para o contexto das ondas gravitacionais. As vértices do triângulo correspondem aos três aspectos fundamentais da descrição estatística de sistemas não extensivos: estado estacionário (q_{stat}), sensibilidade às condições iniciais (q_{sen}) e relaxação temporal (q_{rel}).

Esses valores demonstram que a dinâmica associada ao evento GW150914 não pode ser descrita por modelos estatísticos tradicionais baseados na hipótese de extensividade. Em vez disso, os resultados confirmam que o sistema encontra-se em um estado estacionário fora do equilíbrio, com comportamento multifractal e flutuações não gaussianas. Tais características são compatíveis com a interpretação da coalescência de buracos negros como um fenômeno

Figura 29 – Triângulo do q -tripleto para o evento GW150914: Sensibilidade, Relaxação e Estado Estacionário.



Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados públicos do LIGO Open Science Center. Adaptação metodológica inspirada em: Burlaga, L.F., & Vinas, A.F. (2005). Triangle for the entropic indices (q_{sen}), (q_{rel}), and (q_{stat}) of nonextensive statistical mechanics and solar wind magnetic field fluctuations. *Physica A*, 356, 375–384. NASA Goddard Space Flight Center. [Dados originais: Voyager 1 spacecraft (1989–2002); 40–85 AU; médias diárias].

altamente não linear, cuja descrição teórica é mais bem fundamentada no contexto da estatística generalizada de Tsallis.

Essa representação triangular reforça o fato de que os índices não são independentes, mas sim expressões distintas de uma mesma dinâmica estatística subjacente. A região ocupada por esses valores no espaço do q -tripleto evidencia que os sinais da GW150914 se afastam significativamente da estatística extensiva, corroborando a presença de uma estrutura multiescalar, não gaussiana e sensível a estados metaestáveis. Tais características são compatíveis com a interpretação da coalescência de buracos negros como um fenômeno altamente não linear, cuja descrição teórica é mais bem fundamentada no contexto da estatística generalizada de Tsallis.

Com base na análise conjunta dos três índices do q -tripleto (q_{stat}), (q_{sen}) e (q_{rel}) extraídos dos catálogos de séries temporais de ondas gravitacionais, foi possível investigar, de forma sistemática, as condições físicas subjacentes às dinâmicas de coalescência de sistemas binários de buracos negros. O estudo compreendeu todos os eventos disponíveis nos catálogos analisados e foi fundamentado no formalismo estatístico não-extensivo de Tsallis.

O índice (q_{stat}), associado à distribuição de probabilidade dos incrementos $\Delta h(t, \tau)$,

revelou que praticamente todos os eventos apresentam valores superiores a 1. Isso indica a presença de distribuições com caudas pesadas (não gaussianas), o que é compatível com flutuações intermitentes e dinâmicas caóticas nos sinais analisados. A superação do limiar ($q_{\text{stat}} = 1$) implica que os sistemas gravitacionais estudados operam fora do regime de equilíbrio térmico descrito pela estatística de Boltzmann-Gibbs, reforçando a complexidade estrutural dos processos de emissão de ondas gravitacionais.

O índice (q_{sen}), estimado a partir da largura do espectro multifractal $f(\alpha)$, apresentou valores consistentemente inferiores a 1 em todos os eventos analisados, com variações dependentes da frequência dominante e das características específicas de cada coalescência. Este comportamento reflete uma sensibilidade subexponencial às condições iniciais, típica de sistemas não caóticos no sentido clássico, mas que apresentam mistura incompleta e memória de longo alcance. Os valores de ($q_{\text{sen}} < 1$) observados, mesmo com algumas exceções pontuais, apontam para a predominância de estados dinâmicos regidos por mecanismos determinísticos com fraca sensibilidade às perturbações iniciais, característica marcante de sistemas críticos ou na borda do caos.

Por fim, o índice de relaxação (q_{rel}), obtido a partir do decaimento da Informação Mútua Média (AMI), confirmou que os sinais estudados não relaxam segundo uma lei exponencial clássica, mas sim de forma compatível com uma relaxação q -exponencial. Os valores observados de ($q_{\text{rel}} > 1$) indicam uma desaceleração do processo de relaxação, com persistência de correlações temporais em múltiplas escalas. Tal comportamento denota uma lenta perda de memória do sistema, que tende a atingir estados metaestáveis típicos de processos dissipativos de alta complexidade.

Portanto, ao reunir os resultados obtidos com os três parâmetros, observa-se uma coerência estatística entre os eventos do catálogo, consolidando a hipótese de que as ondas gravitacionais emitidas durante coalescências BBH apresentam assinaturas inequívocas de sistemas físicos complexos, cuja descrição mais adequada se dá no âmbito da estatística generalizada de Tsallis. Esses resultados não apenas confirmam a robustez do formalismo q -tripleto na análise de séries temporais astrofísicas, como também fornecem subsídios para novas interpretações da estrutura dinâmica das ondas gravitacionais em regimes extremos do universo.

6.6 Discussão das relações estatísticas entre os índices q e parâmetros físicos dos sinais de OGs

Nesta seção, discute-se a relação entre os expoentes da estatística não extensiva de Tsallis, o q -tripleto (q_{stat}), (q_{sen}) e (q_{rel}) e os principais parâmetros físicos dos eventos de ondas gravitacionais (OGs), tais como a massa final, a massa *chirp* e a frequência de pico. Para isso, foram empregadas regressões lineares e análises de correlação de Pearson.

Para a realização das análises estatísticas apresentadas, foi adotada a estratégia de combinar os dados provenientes dos detectores Hanford (H) e Livingston (L) por meio do cálculo da média dos parâmetros extraídos em cada detector. Esta abordagem tem como principal motivação o aumento do número efetivo de amostras, o que resulta em uma melhoria substancial na qualidade estatística dos ajustes, refletida na redução dos erros padrão, no estreitamento dos intervalos de confiança e na obtenção de coeficientes de regressão mais robustos. Além disso, considerando que ambos os detectores observam o mesmo evento astrofísico, a média dos resultados representa uma estimativa conjunta mais estável e menos sensível a flutuações específicas de cada instrumento, preservando a informação física relevante associada à fonte das ondas gravitacionais.

A partir dos gráficos de dispersão e dos ajustes lineares realizados, foram identificadas correlações estatisticamente significativas entre os índices q da estatística não extensiva de Tsallis e variáveis físicas associadas aos sinais de ondas gravitacionais. As equações de regressão linear, os coeficientes de determinação R^2 e os p -valores das inclinações estão descritos na Tabelas (vide Apêndice H). Os principais resultados estão organizados conforme segue.

6.6.1 O (q_{sen}) e parâmetros físicos

Os resultados demonstraram que o índice (q_{sen}), que caracteriza a sensibilidade do sistema às condições iniciais, apresenta as relações estatísticas mais expressivas com os parâmetros físicos dos sinais de ondas gravitacionais. Os coeficientes de determinação R^2 superaram 70% nas três variáveis analisadas:

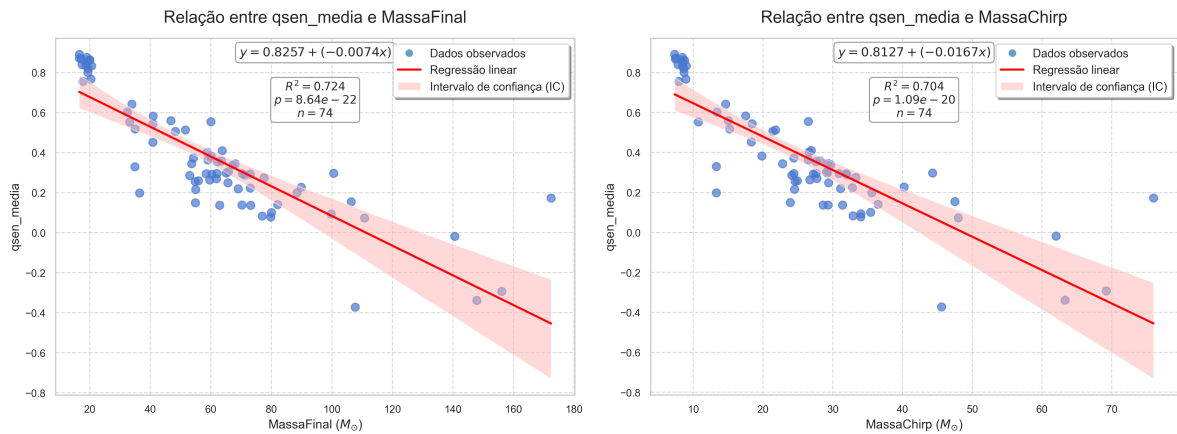
$$\begin{aligned} q_{\text{sen}} &= 0,8257 - 0,0074 * \text{MassaFinal}, & R^2 &= 0,72, \\ q_{\text{sen}} &= 0,8127 - 0,0167 * \text{MassaChirp}, & R^2 &= 0,70, \\ q_{\text{sen}} &= -0,0025 + 0,0017 * \text{FreqPico}, & R^2 &= 0,78. \end{aligned}$$

Observa-se que o índice (q_{sen}) decresce com o aumento da massa final e da massa *chirp*, conforme ilustrado na Figura 30. Esse comportamento indica que sistemas mais massivos tendem a apresentar dinâmicas estatisticamente mais estáveis, com menor grau de caos determinístico. Tal resultado corrobora a hipótese de que sistemas fortemente acoplados gravitacionalmente evoluem em regiões do espaço de fases associadas a comportamentos dinâmicos mais regulares, caracterizados por menor sensibilidade a perturbações iniciais e maior estabilidade estatística.

A Figura 30 também revela regiões de maior densidade de pontos na relação entre (q_{sen}) e os parâmetros de massa, especialmente para sistemas menos massivos. Esses agrupamentos aparentes sugerem a existência de regimes dinâmicos distintos, embora nenhuma análise

formal de clusterização tenha sido conduzida, limitando-se a interpretação ao nível qualitativo.

Figura 30 – Correlações entre o índice de sensibilidade às condições iniciais (q_{sen}) e os parâmetros físicos do sistema binário: (*painel esquerdo*) massa final e (*painel direito*) massa chirp. Os pontos azuis representam os valores observados de (q_{sen}) estimados individualmente para cada evento do catálogo analisado. A linha vermelha indica o ajuste linear obtido por regressão de mínimos quadrados, evidenciando a tendência média de diminuição de (q_{sen}) com o aumento das massas. A região sombreada em vermelho corresponde ao intervalo de confiança de 95% do ajuste, refletindo a incerteza estatística associada à estimativa da tendência linear. A dispersão dos pontos em torno da curva ajustada reflete a variabilidade intrínseca entre os eventos e possíveis efeitos de ruído e não estacionaridade residual.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Por outro lado, o aumento de (q_{sen}) com a frequência de pico (Figura 31) sugere que eventos com maior frequência dominante, normalmente associados a fusões mais rápidas e menos massivas, são estatisticamente mais sensíveis às variações iniciais. Tal característica é compatível com regimes mais caóticos, comuns em sistemas não lineares com elevada instabilidade geométrica do espaço-tempo e rápidas transições energéticas. Este achado reforça a natureza estatístico-dinâmica e multifractal dos sinais de ondas gravitacionais oriundos da coalescência de buracos negros.

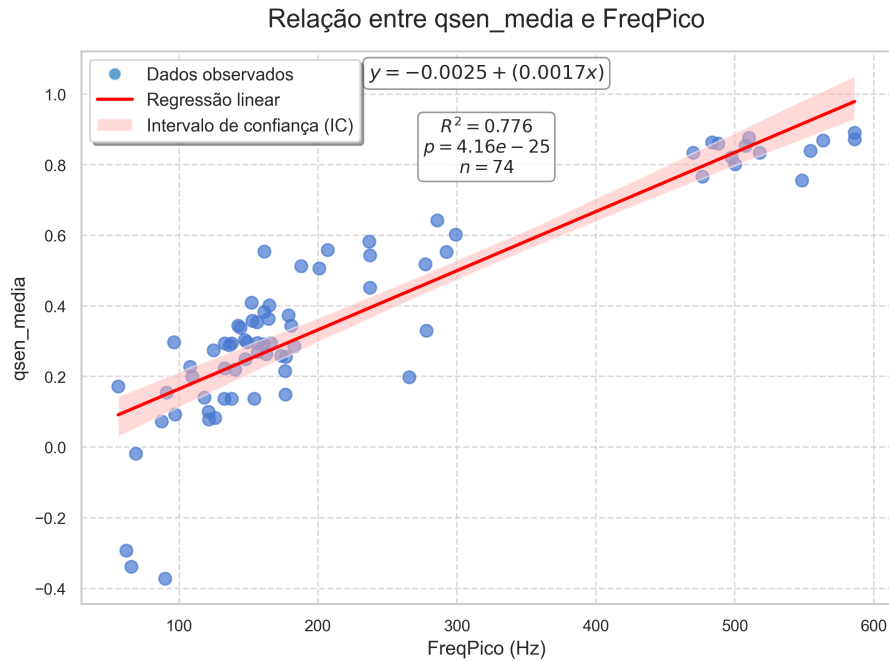
6.6.2 O (q_{rel}) e parâmetros físicos

O índice (q_{rel}), responsável por caracterizar o regime de relaxação estatística do sistema, apresentou uma correlação positiva moderada com a massa chirp. Isso sugere que sistemas mais massivos tendem a relaxar mais lentamente após a coalescência

$$q_{rel} = 2,1493 + 0,0025 * \text{MassaChirp}, \quad R^2 = 0,26.$$

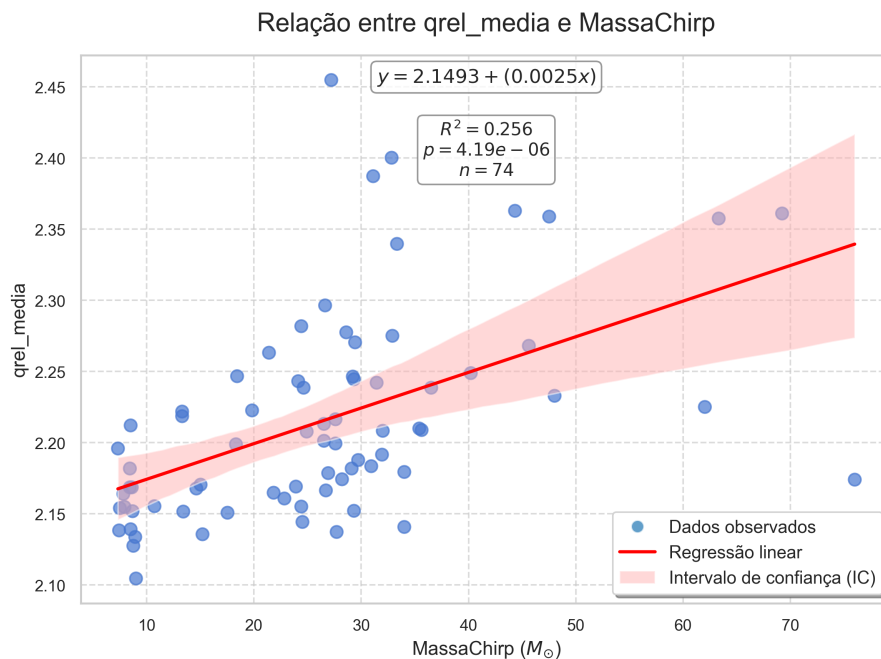
Embora o coeficiente de determinação R^2 seja relativamente baixo, o resultado se mostrou estatisticamente significativo ($p < 0,001$), indicando que há uma tendência clara de crescimento de (q_{rel}) com o aumento da massa chirp, conforme ilustra a Figura 32.

Figura 31 – Correlações lineares entre o índice (q_{sen}) e o parâmetros físicos: frequência de pico.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 32 – Relação linear entre o índice (q_{rel}) e a massa chirp dos sistemas coalescentes.



Fonte: Elaborada pelo autor.

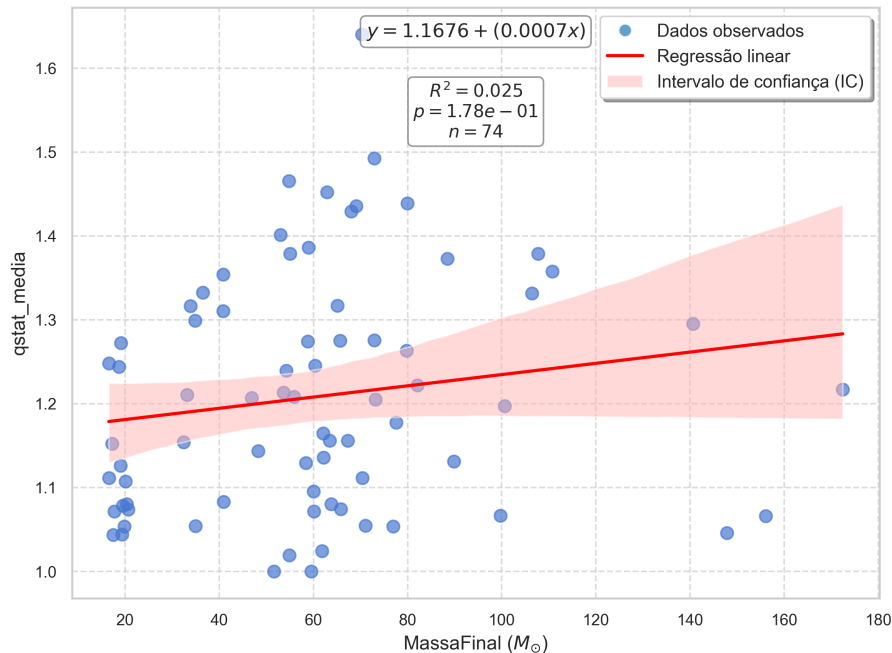
Esse comportamento é característico de dinâmicas não-Markovianas, ou seja, processos com persistência temporal e memória de longo alcance, típicos de sistemas fora do equilíbrio termodinâmico. Em termos astrofísicos, essa lentidão na relaxação pode estar associada à preservação de modos oscilatórios residuais na fase de ringdown, mesmo após o pico da emissão gravitacional. Tal resultado reforça o potencial do índice (q_{rel}) como indicador da

complexidade temporal nas fusões de buracos negros.

6.6.3 O (q_{stat}) e parâmetros físicos

O índice (q_{stat}), associado à distribuição estacionária das flutuações do sinal de onda gravitacional, não apresentou correlações estatisticamente significativas com os parâmetros físicos avaliados. Conforme ilustrado na Figura 33, que exemplifica a relação com a massa final, os coeficientes de determinação R^2 obtidos foram inferiores a 0,1. Esse comportamento indica que a estrutura estatística estacionária do sinal gravitacional não é substancialmente influenciada por variáveis macroscópicas, como a massa de chirp ou a frequência de pico.

Figura 33 – Relação linear entre o índice (q_{stat}) e a massa final dos sistemas coalescentes.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Longe de representar um resultado nulo, essa ausência de correlação reforça o caráter intrínseco e local do índice (q_{stat}). Diferentemente de (q_{sen}) e (q_{rel}), cuja variação reflete propriedades dinâmicas do sistema binário, o (q_{stat}) parece capturar flutuações estocásticas e ruídos residuais oriundos do ambiente gravitacional e instrumental. Assim, o valor metodológico desse achado reside em evidenciar que a componente estacionária do sinal é dominada por processos internos de natureza aleatória, possivelmente relacionados ao ruído instrumental, ao espectro local de Fourier do detector ou à geometria deformada do espaço-tempo durante a coalescência.

Essa interpretação sugere que o índice (q_{stat}) é particularmente sensível à microestrutura estatística local do sinal, refletindo a forma da distribuição dos incrementos temporais $\Delta h(t, \tau)$. Diferentemente de (q_{sen}) e (q_{rel}), que capturam propriedades dinâmicas globais as-

sociadas à sensibilidade e à relaxação temporal, o (q_{stat}) responde de maneira mais direta às flutuações de curta escala e à granularidade estatística do processo observado.

Nesse contexto, valores elevados de (q_{stat}) podem resultar tanto de características intrínsecas do sinal gravitacional, como intermitência e não gaussianidade associadas à dinâmica da coalescência, quanto da contribuição de ruído residual não completamente eliminado no pré-processamento. Assim, o (q_{stat}) não deve ser interpretado exclusivamente como um marcador instrumental, mas como um indicador da complexidade estatística local do sinal, cuja origem pode envolver tanto efeitos físicos quanto limitações experimentais.

6.6.4 Comparação entre os coeficientes de correlação de Pearson e Spearman

Com o objetivo de conferir a validade aos achados obtidos por meio da análise de Pearson, aplicou-se também o coeficiente de correlação de Spearman, que é uma medida não paramétrica de associação monótona entre variáveis. Essa abordagem é especialmente útil quando os pressupostos de normalidade ou linearidade não são plenamente atendidos, como pode ocorrer em sistemas complexos e sinais ruidosos, caso das ondas gravitacionais analisadas neste estudo.

Os valores dos coeficientes de Spearman foram obtidos a partir das mesmas combinações de variáveis físicas e índices da estatística não extensiva (q_{stat} , q_{sen} , q_{rel}), sendo os resultados detalhados no Apêndice H. A Tabela 6 resume as principais correlações significativas, comparando os coeficientes de Pearson (r) e de Spearman (ρ), bem como interpretando as diferenças encontradas.

Tabela 6 – Comparação entre os coeficientes de correlação de Pearson e Spearman

Relação	Pearson r	Spearman ρ	Diferença	Interpretação
q_{sen} MassaFinal	-0,851	-0,856	Muito baixa	Altamente consistente
q_{sen} FreqPico	0,881	0,856	Baixa	Fortemente monotônica e quase linear
q_{rel} MassaChirp	0,506	0,563	Moderada	Pode haver não-linearidade leve
q_{stat} MassaFinal	0,158	0,214	Pequena	Relação fraca, possivelmente não linear
q_{rel} FreqPico	-0,471	-0,541	Moderada	Relação monotônica, possivelmente não linear

Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise comparativa evidencia que, nos casos em que os valores de r e ρ são muito próximos, como nas relações envolvendo (q_{sen}) com a massa final e com a frequência de pico, a dependência entre as variáveis pode ser considerada ao mesmo tempo linear e monotônica, indicando alta confiabilidade nos dois métodos.

Por outro lado, diferenças mais expressivas entre r e ρ , como observado nas relações

envolvendo q_{rel} , sugerem a presença de não-linearidades sutis, embora a associação monotônica ainda se mantenha. Nesses casos, o coeficiente de Spearman pode oferecer uma representação mais fiel da estrutura de dependência presente nos dados.

Adicionalmente, as correlações envolvendo (q_{stat}) permaneceram fracas sob ambos os métodos, reforçando a hipótese de que esse índice apresenta baixa sensibilidade a parâmetros físicos diretos do sistema binário de buracos negros. Isso pode indicar que o comportamento estacionário descrito por (q_{stat}) está mais relacionado à estrutura do ruído ou a propriedades estatísticas globais do sinal, do que a variáveis físicas específicas como massa ou frequência.

Portanto, a utilização conjunta dos métodos de Pearson e Spearman não apenas valida os resultados obtidos, como também fornece uma visão mais completa das relações envolvidas, distinguindo dependências lineares clássicas de associações monotônicas mais gerais, essenciais para o entendimento da dinâmica complexa das OGs no escopo da estatística não extensiva de Tsallis.

6.7 Distribuições bimodais: evidência estatística de múltiplos regimes astrofísicos

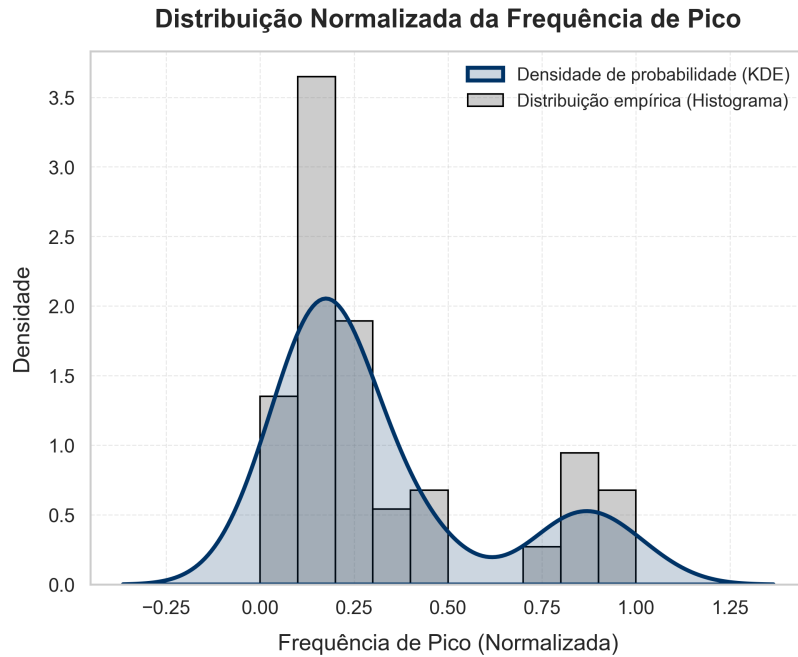
A análise da distribuição normalizada da frequência de pico dos eventos de ondas gravitacionais revela uma característica estatística notável: a presença de uma clara bimodalidade. Como ilustrado na Figura 34, o histograma da frequência de pico, acompanhado da estimativa da densidade de probabilidade (KDE), exibe dois máximos bem definidos, separados por uma região de baixa densidade. O primeiro pico está localizado na faixa aproximadamente entre 0,1 e 0,3 (valores normalizados), enquanto o segundo surge de forma mais suave entre 0,85 e 0,95.

Este comportamento bimodal indica que a distribuição da frequência de pico não se ajusta a uma única população estatística, mas reflete a coexistência de dois regimes físicos distintos no conjunto de eventos analisados. Do ponto de vista astrofísico, tal distribuição está intimamente associada à variação das massas dos sistemas binários de buracos negros. A relação inversa entre a frequência de pico e a massa final do sistema ($f_{\text{pico}} \propto 1/M_{\text{final}}$) implica que sistemas com massas totais mais elevadas geram frequências de pico mais baixas, enquanto sistemas menos massivos estão associados a frequências mais altas.

Consequentemente, a bimodalidade pode ser interpretada como a sobreposição de duas populações astrofísicas bem definidas [196]. A primeira corresponde a sistemas binários de alta massa total, cujos sinais gravitacionais apresentam frequências de pico na faixa mais baixa do espectro observado.

A segunda refere-se a sistemas de menor massa, caracterizados por frequências de pico mais elevadas. Esta distinção é compatível com cenários astrofísicos de formação de buracos negros, nos quais coalescências de primeira geração (originadas da evolução estelar) pre-

Figura 34 – Distribuição bimodal da frequência de pico normalizada dos eventos de ondas gravitacionais: evidência estatística de regimes astrofísicos distintos.



dominam nas frequências mais altas [197], enquanto fusões de segunda geração, provenientes de ambientes densos, como aglomerados globulares ou núcleos galácticos, tendem a apresentar frequências de pico relativamente mais baixas em função das maiores massas envolvidas [198, 199].

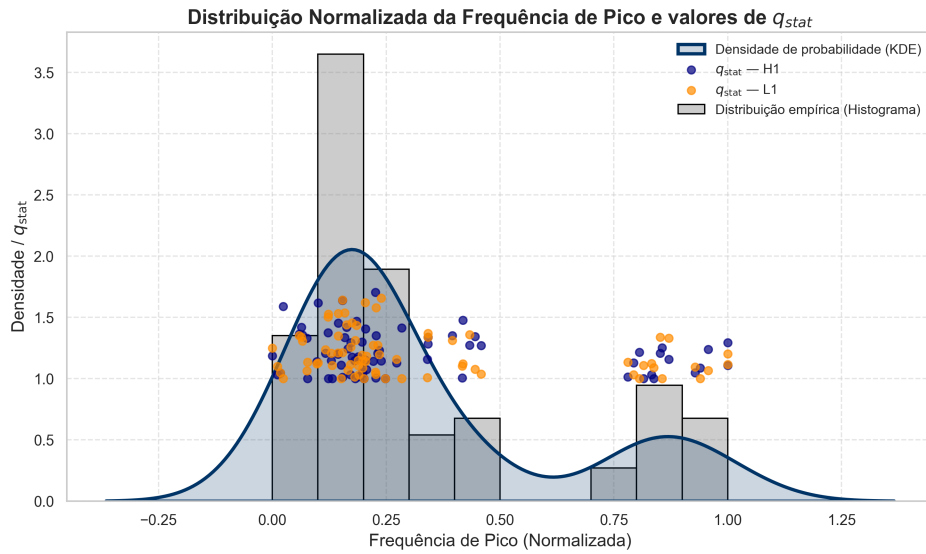
Ressalta-se, contudo, que tais frequências permanecem integralmente dentro da banda de sensibilidade dos detectores LIGO–Virgo, de modo que a distinção observada refere-se a uma variação relativa dentro do conjunto de eventos detectados, e não à presença de sinais fora da capacidade instrumental dos interferômetros.

Adicionalmente, esta mesma estrutura bimodal manifesta-se nas distribuições dos índices não extensivos, (q_{stat}), (q_{sen}) e (q_{rel}), que caracterizam as propriedades dinâmicas e estatísticas dos sinais gravitacionais. As Figuras 35, 36 e 37 apresentam uma comparação direta entre a distribuição normalizada da frequência de pico e os valores individuais dos índices q , permitindo observar, de forma explícita, a correlação entre os dois regimes de frequência e o comportamento dos parâmetros não extensivos.

As Figuras 35–37 demonstram que os valores dos índices não extensivos se organizam de forma consistente com os dois modos espectrais identificados na frequência de pico.

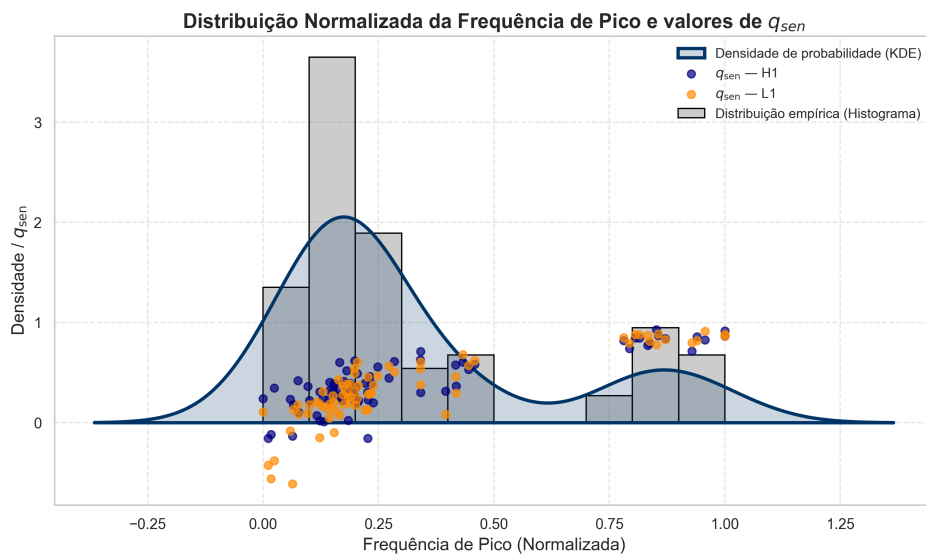
O índice (q_{stat}), associado à caracterização do estado estacionário e à não-Gaussianidade do sistema, apresenta valores mais elevados no modo de baixa frequência, indicando distribuições com caudas mais longas e, portanto, maior afastamento da estatística de Boltzmann–Gibbs.

Figura 35 – Distribuição normalizada da frequência de pico com sobreposição dos valores de q_{stat} para os detectores Hanford (H1) e Livingston (L1).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 36 – Distribuição normalizada da frequência de pico com sobreposição dos valores de q_{sen} para os detectores Hanford (H1) e Livingston (L1).

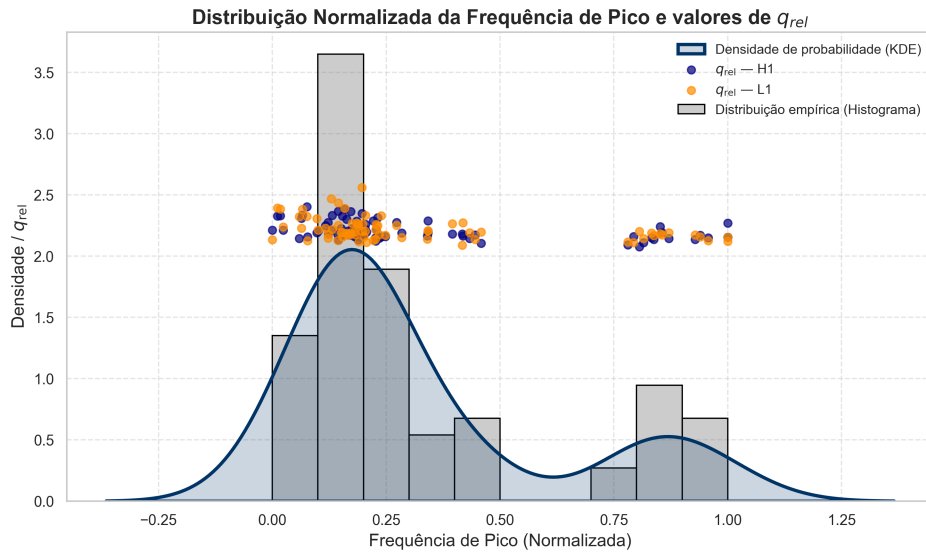


Fonte: Elaborada pelo autor.

O índice (q_{sen}), relacionado à sensibilidade às condições iniciais e à dinâmica multifractal, mostra tendência oposta: seus valores aumentam sistematicamente com a frequência, atingindo máximos no modo de alta frequência. Isso reflete sistemas com maior complexidade e maior resposta a pequenas perturbações.

O índice (q_{rel}), por sua vez, descreve o processo de relaxação temporal e revela valores mais altos no regime de baixa frequência, sugerindo tempos de correlação mais longos e decaimento mais lento das flutuações estatísticas.

Figura 37 – Distribuição normalizada da frequência de pico com sobreposição dos valores de q_{rel} para os detectores Hanford (H1) e Livingston (L1).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Essa estrutura bimodal observada nas distribuições dos índices não-extensivos está associada à dependência desses parâmetros em relação à frequência de pico do sinal, a qual apresenta, por si só, uma distribuição bimodal no catálogo analisado. No entanto, a persistência dessa bimodalidade nos índices (q_{stat}), (q_{sen}) e (q_{rel}) indica que os diferentes regimes espectrais refletem também distinções físicas reais entre as populações de fontes, associadas a massas, escalas temporais e dinâmicas de coalescência distintas.

Portanto, os resultados aqui apresentados não apenas confirmam a existência de duas populações distintas de eventos no domínio da frequência, como também demonstram que essa distinção se reflete de forma consistente nos parâmetros da estatística não extensiva. Ressalta-se, contudo, que a manifestação de estruturas bimodais nos índices (q_{stat}), (q_{sen}) e (q_{rel}) está associada à dependência desses parâmetros em relação à frequência de pico f_{pico} , cuja distribuição já apresenta caráter bimodal no catálogo analisado. Ainda assim, a coerência observada entre os regimes espectrais e os valores dos índices não extensivos reforça que tal dependência não é meramente tautológica, mas reflete diferenças físicas reais entre as populações de fontes gravitacionais, associadas a distintas escalas de massa, dinâmicas de coalescência e regimes de complexidade

7 CONCLUSÃO

Os resultados obtidos nesta tese mostram que sinais de ondas gravitacionais exibem propriedades multiescalares, não gaussianas e não-extensivas, para as quais o formalismo de Tsallis fornece uma caracterização mais adequada do que abordagens de equilíbrio da estatística de Boltzmann-Gibbs. A extração sistemática do q -tripleto $\{q_{stat}, q_{sen}, q_{rel}\}$ permitiu mapear diferentes regimes dinâmicos ao longo da coalescência (*inspiral/chirp*, *merger* e *ringdown*), algo que vai além do que análises tradicionais no domínio tempo-frequência (*Fourier/Wavelet*) tipicamente capturam, pois agrega, em três expoentes, informações sobre não-gaussianidade, sensibilidade às condições iniciais e relaxação temporal do sistema.

Com base na análise minuciosa das séries temporais associadas ao evento GW1509-14, registradas pelos interferômetros Hanford (H) e Livingston (L), foram extraídas os três intervalos do q -tripleto. Os valores encontrados, para uma frequência de pico de 150 Hz foram:

A análise do índice de estacionariedade (q_{stat}) revelou valores significativamente superiores a 1, sendo $\{q_{stat}\}_H = \{1,46\}$ para o detector de Hanford e $\{q_{stat}\}_L = \{1,43\}$ para o de Livingston. Esses resultados indicam que a distribuição estatística das flutuações do sinal gravitacional possui caudas pesadas, ou seja, há uma maior ocorrência de flutuações de alta amplitude do que seria esperado em uma distribuição Gaussiana convencional.

Esse comportamento sugere que tais flutuações intensas não são raras, mas sim características fundamentais da dinâmica do sistema, o que é típico de fenômenos com interações de longo alcance, efeitos de memória persistente e estruturas complexas, exatamente o cenário físico da coalescência de buracos negros. Assim, o índice (q_{stat}) se mostra um marcador estatístico sensível para caracterizar a fase estacionária do sistema fora do equilíbrio. Além disso, os valores obtidos apontam para o potencial uso dos parâmetros entrópicos da estatística não extensiva como descritores estatísticos sensíveis às mudanças de regime dinâmico ao longo da evolução dos sinais de ondas gravitacionais, especialmente durante a fase crítica da fusão dos buracos negros, quando ocorre intensa emissão de radiação gravitacional. Tal interpretação está em consonância com a abordagem apresentada em *Multiscale structure of the gravitational wave signal from GW150914 based on the non-extensivity q -triplet* [21], na qual os índices não-extensivos são empregados para caracterizar a complexidade multiescalar e a dinâmica fora do equilíbrio, sem pressupor um critério automático de detecção de transições.

O índice (q_{sen}), obtido por meio da análise multifractal e do expoente de Hölder, revelou valores significativamente inferiores a 1, $\{q_{sen}\}_H = \{0,02\}$ e $\{q_{sen}\}_L = \{0,25\}$, o que é interpretado, da teoria de Tsallis, como um indicativo de caos fraco ou sensibilidade subexponencial às condições iniciais. Em termos físicos, isso implica que as variações iniciais

na separação orbital, *spins* ou assimetrias dos buracos negros influenciam a estrutura fina do sinal com intensidade muito abaixo da esperada em sistemas caóticos clássicos. Tal característica multifractal reforça a hipótese de que os sinais de OGs contêm informação codificada em múltiplas escalas, compatível com uma hierarquia de instabilidades no campo gravitacional.

Por fim, o índice (q_{rel}), relacionado à relaxação do sistema, apresentou valores sistematicamente superiores a 1, $\{q_{rel}\}_H = \{2,28\}$ e $\{q_{rel}\}_L = \{2,26\}$, sugerindo que a perda de correlação temporal nos sinais de $h(t)$ ocorre de maneira lenta e prolongada, em oposição ao decaimento exponencial típico de sistemas ergódicos. Essa lenta relaxação pode estar associada à persistência de modos oscilatórios e ressonâncias gravitacionais residuais no final da fusão, como o *ringdown* (fase de anelamento) do buraco negro resultante.

Esses parâmetros refletem diferentes aspectos da dinâmica não extensiva do sistema:

- i) (q_{stat}): descreve o grau de não gaussianidade da distribuição de probabilidade dos incrementos da série temporal, associado à presença de flutuações intermitentes e caudas pesadas no espectro estatístico do sinal gravitacional;
- ii) (q_{sen}): quantifica a sensibilidade do sistema às condições iniciais, refletindo o grau de imprevisibilidade e a complexidade na evolução das trajetórias dinâmicas durante a fase de coalescência;
- iii) (q_{rel}): caracteriza o processo de relaxação temporal do sistema, indicando se a dissipação de energia e a perda de correlação ocorrem de forma convencional (exponencial) ou segundo uma dinâmica desacelerada, típica de processos não lineares e com memória de longo alcance.

Para o conjunto completo dos eventos de OGs analisadas, a investigação estatística das correlações entre os índices da estatística não extensiva de Tsallis (q_{stat} , q_{sen} , q_{rel}) e os parâmetros físicos característicos das OGs revelou evidências consistentes da relevância dos expoentes q na descrição da dinâmica de fusões de buracos negros.

No plano quantitativo, as correlações estatísticas no conjunto multi-evento confirmam o papel de destaque de (q_{sen}), esse índice mostra correlações muito fortes com frequência de pico e massas ($|r| \gtrsim 0,84$) e o maior poder explicativo entre os modelos lineares testados, com $R^2 \approx 0,776$ para (q_{sen}) vs. $f_{pico}(10^{-24})$. Isso indica que o (q_{sen}) é o candidato mais promissor para aplicações futuras, por capturar de maneira eficaz as dependências estruturais do sistema binário.

Adicionalmente, o índice (q_{rel}) demonstrou uma tendência de crescimento com a massa *chirp*, refletindo um comportamento de relaxação mais lento em sistemas mais massivos.

Essa característica é compatível com a presença de efeitos não-Markovianos e persistência temporal na fase de anelamento (*ringdown*) das OGs. Em contrapartida, o índice (q_{stat}) apresentou baixa correlação com os parâmetros físicos, sugerindo que a estrutura estatística estacionária do sinal gravitacional é governada por fatores mais intrínsecos, como a morfologia espectral e a natureza multifractal das flutuações.

Do ponto de vista estatístico-astrofísico, a distribuição normalizada da frequência de pico dos eventos apresenta bimodalidade clara, com dois máximos separados por região de baixa densidade (primeiro modo em $0,1 - 0,3$ e segundo em $0,85 - 0,95$, valores normalizados). Essa estrutura indica a coexistência de duas populações no conjunto de eventos e é coerente com a relação inversa entre frequência de pico e massa final do sistema binário, distinguindo sistemas mais massivos (baixa frequência) de menos massivos (alta frequência).

Crucialmente, a mesma estrutura bimodal se manifesta nos índices não- extensivos ($q_{\text{stat}}, q_{\text{sen}}, q_{\text{rel}}$), quando analisados por grupos definidos pela frequência de pico. Os histogramas segregados por grupo com a sobreposição de q sobre a distribuição da frequência normalizada) tornam explícito que as duas populações espectrais também se refletem nos regimes de não-gaussianidade, sensibilidade e relaxação descritos pelo q -triplete. Com isso, a análise conjunta de f_{pico} e $\{q_{\text{stat}}, q_{\text{sen}}, q_{\text{rel}}\}$ fornece uma descrição unificada multiescalar, conectando complexidade, não linearidade e dissipação nas fusões de buracos negros.

As conclusões específicas dos três índices são consistentes com a literatura e com a física do processo: ($q_{\text{stat}} > 1$), confirma não-gaussianidade e caudas pesadas; ($q_{\text{sen}} < 1$) caracteriza sensibilidade subexponencial (caos fraco), compatível com hierarquias de instabilidades durante o *chirp*; e ($q_{\text{rel}} > 1$) aponta relaxação lenta com persistência de correlações no ring-down. Em conjunto, o q -triplete constitui uma “impressão digital estatística” da coalescência de buracos negros, com potencial para complementar as análises espectrais convencionais baseadas em modelos da Relatividade Geral. Além disso, os resultados indicam que tais eventos podem ser reinterpretados como mudanças de regime dinâmico não-extensivo na evolução do sinal gravitacional, com implicações tanto na física estatística quanto na astrofísica computacional.

Conclui-se, portanto, que a mecânica estatística não-extensiva de Tsallis constitui uma abordagem teórica promissora para a caracterização de sinais gravitacionais oriundos de eventos extremos. Ao revelar propriedades multiescalares, não-gaussianas e fortemente correlacionadas, os índices q -estatísticos extraídos fornecem evidências relevantes da complexidade intrínseca desses fenômenos, abrindo novas perspectivas para a compreensão da física de sistemas fora do equilíbrio. Esta tese, ao integrar fundamentos estatísticos avançados com dados observacionais, estabelece um marco conceitual relevante na intersecção entre astrofísica, teoria da complexidade e análise de dados em gravitação.

8 PERSPECTIVAS DE TRABALHOS

Considerando os avanços alcançados nesta tese, que propõe uma abordagem metodológica inovadora baseada na mecânica estatísticas não extensivas, caracterizadas pelo q -tripleto $(q_{stat}, q_{sen}, q_{rel})$ de Tsallis, para caracterização de sinais de ondas gravitacionais, as seguintes diretrizes são sugeridas para trabalhos futuros:

- a) Aplicar a metodologia a outros sistemas astrofísicos (fusões de estrelas de nêutrons, fontes estocásticas): Esta é uma sugestão natural e muito relevante. Testar o q -tripleto em diferentes regimes dinâmicos verificaria a teoria e universalidade do formalismo. Em particular, fusões NS–NS possuem características de sinal distintas (duração maior, possível *tidal deformability* etc.), e fontes estocásticas (como fundo cósmico de OG) representariam um regime totalmente diferente (superposição de muitas fontes, possivelmente gaussiano). Verificar se os índices de Tsallis continuam informativos nesses casos seria um passo importante para generalizar a abordagem. Essa perspectiva denota originalidade pois sugere levar uma técnica desenvolvida para BH–BH a outros domínios; caso bem-sucedido, mostraria que o q -tripleto pode ser uma ferramenta universal em astrofísica de OG. Recomenda-se, inclusive, não se limitar a NS–NS: eventos de BH–NS (misto) também seriam um interessante caso de teste, assim como supernovas (se sinais curtos de colapso estelar forem detectados no futuro). A menção explícita de fontes estocásticas demonstra visão de longo prazo, pois envolveria aplicar o formalismo a ruído de fundo, algo desafiador, porém muito inovador caso revele estruturas não-extensivas num sinal estocástico cosmológico.
- b) Integrar a análise não-extensiva com algoritmos de detecção de sinais e templates teóricos aprimorados: Esta sugestão é particularmente inovadora. Isso propõe combinar os parâmetros não-extensivos com as técnicas padrão de detecção (baseadas em *match filtering*, métrica de *overlap* etc.). A ideia seria usar os índices q como parâmetros complementares na identificação e caracterização de eventos, possivelmente melhorando a inferência de propriedades físicas. Essa integração poderia, por exemplo, ajudar a diferenciar sinais reais de *glitches* de ruído: se um evento detectado não apresenta o *fingerprint* q esperado para um sinal astrofísico, poderia ser um falso alarme. Ou então, no ajuste de modelos, além de encaixar a forma de onda no domínio do tempo, poder exigir que o q -tripleto simulado coincida com o observado, adicionando um critério estatístico adicional à análise de *parameter estimation*. Essa perspectiva mostra originalidade ao pensar fora da caixa: até agora, os métodos de detecção não consideram caracterizações estatísticas

não-extensivas. Desenvolver isso pode abrir um novo campo de pesquisa, unindo métodos de data science de OG com física estatística.

- c) Desenvolver modelos termodinâmicos da coalescência (calculando entropia BG e Tsallis): Essa linha de futuro busca aprofundar a base teórica. Isso sugere quantificar a entropia física do sistema durante a fusão, tanto na forma tradicional quanto na generalizada. Isso poderia elucidar como se dá a dissipação de energia gravitacional e a evolução da desordem ao longo das fases do evento. Trata-se de uma perspectiva ambiciosa e original, pois envolveria provavelmente associar um conteúdo entrópico ao horizonte do buraco negro em formação, ou à radiação gravitacional emitida, e verificar se a não-extensividade está ligada a alguma definição de entropia generalizada do sistema gravitacional. Alguns trabalhos já discutem entropia de ondas gravitacionais sob óticas diversas, mas aplicar a entropia de Tsallis explicitamente à fusão de BHs seria algo novo. Essa direção pode criar pontes entre termodinâmica de buracos negros (que tem todo um arcabouço teórico) e complexidade estatística. No mínimo, calcular a entropia de Shannon/Boltzmann do sinal versus entropia de Tsallis e compará-las ao longo do tempo do *chirp* seria esclarecedor. Sugere-se realmente investir nessa ideia, pois pode responder questões fundamentais: por exemplo, a fusão maximiza alguma entropia não extensiva? Há conservação de algo como energia livre não extensiva?. É um terreno fértil para publicações teóricas de alto impacto.
- d) Implementar simulações computacionais multiescala combinando dados observacionais, relatividade numérica e estatística avançada: Isso propõe síntese interdisciplinar, usar simulações de fusão (resultados de relatividade numérica) e “contaminar” ou analisar esses dados simulados com o ferramental estatístico para modelar a complexidade dinâmica. Essas simulações serviriam para explorar correlações entre multifractalidade e parâmetros astrofísicos. Em outras palavras, variar condições (massas, *spins*, excentricidade etc.) em simulações de fusão e medir os índices q resultantes, para ver como cada parâmetro impacta $q_{\text{stat}}, q_{\text{sen}}, q_{\text{rel}}$. Essa abordagem seria extremamente útil para validar e calibrar a interpretação física dos índices. Por exemplo, poderíamos confirmar em ambiente controlado que aumentar a massa realmente diminui q_{sen} , ou investigar como a presença de precessão (não presente em GW150914) afetaria o q -tripleto. A combinação de data science (análise multifractal) com simulações de relatividade não tem precedentes na literatura conhecida, sendo portanto uma perspectiva bastante original. Também demandará alta performance computacional, como citado, indicando que visualiza colaboração entre áreas (astrofísica, computação).
- e) Investigar a sensibilidade dos parâmetros não-extensivos a ruídos instrumentais e incerte-

zas de calibração: Esta é uma perspectiva de caráter prático e necessário. Antes de aplicar o formalismo a dados de próxima geração (Einstein Telescope, LISA), é preciso estabelecer critérios de confiabilidade, entendendo como ruído e erros de calibração afetam a estimação dos índices q . Essa sugestão demonstra rigor e preocupação com a teoria experimental. Seria importante realizar testes com ruído real: por exemplo, aplicar o cálculo do q -tripleto em segmentos de dados sem sinal (ruído puro) dos detectores atuais para verificar qual é o “falso q -tripleto” de ruído. Se o ruído puro produz índices próximos de $(1, 1, 1)$, ou seja, estatística gaussiana extensiva, ótimo, isso confirma que os desvios encontrados vêm do sinal. Se porém o ruído contém artefatos que geram q significativamente diferente de 1 (devido a *non-stationarities*, linhas espectrais, etc.), então seria preciso isolar esses efeitos ou corrigi-los. Também convém analisar a estabilidade dos índices com respeito à calibração: pequenas incertezas na amplitude/fase do *strain* podem alterar os incrementos Δh e seu espectro multifractal. Avaliar isso (talvez injetando sinais em diferentes versões de dados calibrados) garantirá que quando novos detectores mais sensíveis surgirem, a metodologia estará preparada com critérios de erro. Essa perspectiva é menos “glamourosa” que as demais, mas é crucial para pavimentar a aplicação real do método na era dos grandes observatórios de OG.

- f) Explorar a física fundamental através de teorias gravitacionais com torção. Esta perspectiva propõe uma extensão conceptual ambiciosa, visando utilizar o formalismo não-extensivo como uma ferramenta para testar os próprios fundamentos da gravitação. A ideia central é investigar se as métricas de complexidade do q -tripleto e as análises multifractais são sensíveis a assinaturas de física além da Relatividade Geral, nomeadamente aos efeitos de torção do espaço-tempo previstos por teorias como a Relatividade de Einstein-Cartan. A originalidade desta abordagem reside em utilizar a estatística não-extensiva do sinal para procurar distorções sutis na forma de onda que possam ser indícios de modos de polarização adicionais ou de uma dinâmica do espaço-tempo mais rica, associada ao acoplamento entre a curvatura e o spin intrínseco da matéria. A implementação prática envolveria a análise comparativa de sinais sintéticos: por um lado, formas de onda geradas no contexto da Relatividade Geral padrão e, por outro, formas de onda que incorporam os efeitos da torção, simuladas no âmbito de teorias alternativas. O objetivo seria verificar se os parâmetros $q_{\text{stat}}, q_{\text{sen}}, q_{\text{rel}}$ exibem uma sensibilidade distintiva a estas alterações, funcionando como um “classificador estatístico” entre diferentes teorias gravitacionais. Caso bem-sucedida, esta linha de pesquisa não só validaria o poder discriminatório do formalismo de Tsallis, como também abriria um novo canal de baixo custo computacional para restringir fisicamente teorias da gravitação quântica em regimes de

campo forte, complementando as análises tradicionais baseadas no *overlap* de templates. Esta é, portanto, uma perspectiva de elevado impacto potencial, que posiciona a análise de dados de ondas gravitacionais na vanguarda da física teórica.

Estas perspectivas abrem caminho para estudos interdisciplinares que unifiquem teoria gravitacional, métodos estatísticos inovadores e análise computacional de alta performance, ampliando a compreensão da física de sistemas coalescentes.

REFERÊNCIAS

- [1] MEHRA, J. **Einstein, Hilbert, and the theory of gravitation: Historical origins of general relativity theory**. Berlina: Springer Science & Business Media, 2012.
- [2] EINSTEIN, A. Uber gravitationswellen. sitzungsberichte der königlich preussische akademie der wissenschaften, sitzung der physikalisch-mathematischen klasse. **Translated as “On Gravitational Waves,” in Alfred Engel (translator) and Engelbert Schucking (consultant), The Collected Papers of Albert Einstein**, v. 7, p. 1918–1921, 1918.
- [3] WEISBERG, J. M.; TAYLOR, J. H.; FOWLER, L. A. Gravitational waves from an orbiting pulsar. **Scientific American**, JSTOR, v. 245, n. 4, p. 74–83, 1981.
- [4] DAMOUR, T. 1974: the discovery of the first binary pulsar. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 32, n. 12, p. 124009, 2015.
- [5] HULSE, R. A.; TAYLOR, J. H. Discovery of a pulsar in a binary system. **The Astrophysical Journal**, v. 195, n. 15, p. L51–L53, jan. 1975.
- [6] ABBOTT, B. P.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T.; ABERNATHY, M.; ACERNESE, F.; ACKLEY, K.; ADAMS, C.; ADAMS, T.; ADDESSO, P.; ADHIKARI, R. Properties of the binary black hole merger gw150914. **Physical review letters**, APS, v. 116, n. 24, p. 241102, 2016.
- [7] ABBOTT, B. P.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T.; ABERNATHY, M.; ACERNESE, F.; ACKLEY, K.; ADAMS, C.; ADAMS, T.; ADDESSO, P.; ADHIKARI, R. Gw150914: The advanced ligo detectors in the era of first discoveries. **Physical review letters**, APS, v. 116, n. 13, p. 131103, 2016.
- [8] COLLABORATION, L. S.; JANI, V. C. T. G. . K. **Introduction to LIGO & gravitational waves**. 2018. Disponível em: <https://www.ligo.org/detections/O1O2catalog.php> Acesso em: 15 mar. 2023.
- [9] AASI, J.; ABBOTT, B.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T.; ABERNATHY, M.; ACKLEY, K.; ADAMS, C.; ADAMS, T.; ADDESSO, P.; ADHIKARI, R. Advanced ligo. **Classical and quantum gravity**, IOP Publishing, v. 32, n. 7, p. 074001, 2015.
- [10] WEISS, R. Nobel lecture: Ligo and the discovery of gravitational waves i. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 90, n. 4, p. 040501, 2018.
- [11] POGGIANI, R. Gw170817: A short review of the first multimessenger event in gravitational astronomy. **Galaxies**, MDPI, v. 13, n. 5, p. 112, 2025.
- [12] COYNE, R.; CORSI, A.; OWEN, B. J. Cross-correlation method for intermediate-duration gravitational wave searches associated with gamma-ray bursts. **Physical Review D**, APS, v. 93, n. 10, p. 104059, 2016.
- [13] TSALLIS, C. Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics. **Journal of statistical physics**, Springer, v. 52, n. 1, p. 479–487, 1988.

- [14] TSALLIS, C.; TSALLIS, C.; PRATO, D.; PLASTINO, A. R.; PLASTINO, A. R. Nonextensive statistical mechanics: some links with astronomical phenomena. **Astrophysics and space science**, Springer, v. 290, p. 259–274, 2004.
- [15] TSALLIS, C. Dynamical scenario for nonextensive statistical mechanics. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 340, n. 1-3, p. 1–10, 2004.
- [16] BURLAGA, L. Multifractal structure of the interplanetary magnetic field: Voyager 2 observations near 25 au, 1987-1988. **Geophysical research letters**, v. 18, n. 1, p. 69–72.
- [17] PAVLOS, G.; XENAKIS, M.; KARAKATSANIS, L.; ILIOPOULOS, A.; PAVLOS, A.; SARAFOPOULOS, D. Universality of tsallis non-extensive statistics and fractal dynamics for complex systems. **arXiv preprint arXiv:1203.5556**, 2012.
- [18] LIVADIOTIS, G. **Kappa distributions: Theory and applications in plasmas**. [S.l.]: Elsevier, 2017.
- [19] FREITAS, D. D.; MEDEIROS, J. D. Nonextensivity in the solar magnetic activity during the increasing phase of solar cycle 23. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 88, n. 1, p. 19001, 2009.
- [20] BURLAGA, L. *et al.* Triangle for the entropic index q of non-extensive statistical mechanics observed by voyager 1 in the distant heliosphere. **Physica A: Statistical mechanics and its applications**, Elsevier, v. 356, n. 2-4, p. 375–384, 2005.
- [21] SILVA, C. da; NEPOMUCENO, M.; FREITAS, D. de. Multiscale structure of the gravitational wave signal from gw150914 based on the non-extensivity q -triplet. **Europhysics Letters**, IOP Publishing, v. 141, n. 5, p. 59002, 2023.
- [22] TSALLIS, C.; BALDOVIN, F.; CERBINO, R.; PIEROBON, P. **Introduction to nonextensive statistical mechanics: approaching a complex world**. Berlin: Springer Science & Business Media, 2009.
- [23] TSALLIS, C.; BALDOVIN, F.; CERBINO, R.; PIEROBON, P. Introduction to nonextensive statistical mechanics and thermodynamics. **arXiv preprint cond-mat/0309093**, 2003.
- [24] FREITAS, D. D.; MEDEIROS, J. D. Nonextensivity in the solar neighborhood. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 97, n. 1, p. 19001, 2012.
- [25] FREITAS, D. D.; MEDEIROS, J. D. A non-extensive approach to the stellar rotational evolution—i. f-and g-type stars. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 433, n. 3, p. 1789–1795, 2013.
- [26] TSALLIS, C.; BALDOVIN, F.; CERBINO, R.; PIEROBON, P. Generalizing what we learnt: Nonextensive statistical mechanics. In: **Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World**. [S.l.]: Springer, 2023. p. 47–136.
- [27] TSALLIS, C. The nonadditive entropy s_q and its applications in physics and elsewhere: Some remarks. **Entropy**, MDPI, v. 13, n. 10, p. 1765–1804, 2011.
- [28] PAVLOS, G. Understanding the multi-scale and multi-fractal dynamics of space plasmas through tsallis non-extensive statistical theory. **arXiv preprint arXiv:1203.4003**, 2012.

- [29] ABBOTT, B. P.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T.; ABERNATHY, M.; ACERNESE, F.; ACKLEY, K.; ADAMS, C.; ADAMS, T.; ADDESSO, P.; ADHIKARI, R. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. **Physical review letters**, APS, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016.
- [30] KIP, T.; THORNE, K.; HAWKING, S. Black holes and time warps: Einstein's outrageous legacy. **New York: p/h WW Norton & Company**, p. 509–513, 1994.
- [31] THORNE, K. S. Gravitational radiation. **Three hundred years of gravitation**, p. 330–458, 1987.
- [32] SABBATA, V. D.; GASPERINI, M. **Introduction to gravitation**. [S.l.]: World scientific, 1985.
- [33] EINSTEIN, A. **Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1915**. See also "The Collected Papers of Albert Einstein". vol. 6. [S.l.]: Princeton University Press, 1996.
- [34] EINSTEIN, A. **Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativit. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1915**. See also "The Collected Papers of Albert Einstein". vol. 6. [S.l.]: Princeton University Press, 1996.
- [35] SCHUTZ, B. **A first course in general relativity**. [S.l.]: Cambridge university press, 2022.
- [36] WALD, R. M. General relativity (university of chicago, chicago, 1984); a. ashtekar, j. lewandowski. **Class. Quant. Grav**, v. 21, p. R53, 2004.
- [37] POISSON, E.; WILL, C. M. **Gravity: Newtonian, post-newtonian, relativistic**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2014.
- [38] MAGGIORE, M. **Gravitational waves**. [S.l.]: Oxford university press, 2008. v. 2.
- [39] CARROLL, S. M. **Spacetime and geometry. An introduction to general relativity**. [S.l.: s.n.], 2004.
- [40] WEINBERG, S. **Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013.
- [41] CARROLL, S. M. An introduction to general relativity: spacetime and geometry. **Addison Wesley**, v. 101, p. 102, 2004.
- [42] JACKSON, J. D. **Classical electrodynamics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007.
- [43] AUGER, G.; PLAGNOL, E. **Theory of gravitational waves**. In: An Overview of Gravitational Waves: Theory, Sources and Detection. [S.l.]: World Scientific, 2017. p. 1–41.
- [44] MACHADO, K. D. **Equações diferenciais aplicadas à física**. [S.l.]: Editora UEPG, 2004.
- [45] MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A.; KAISER, D. I. **Gravitation**. [S.l.]: Princeton University Press, 2017.

- [46] GREEN, G. **An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism**. [S.l.]: Mayer & Müller, 1889. v. 3.
- [47] LI, T. G. F. Extracting physics from gravitational waves: testing the strong-field dynamics of general relativity and inferring the large-scale structure of the universe. 2013.
- [48] HERDEIRO, C. A. Ondas gravitacionais e (astro) física fundamental. **Revista de Ciência Elementar**, Casa das Ciências, v. 8, n. 4, 2020.
- [49] DLAPA, C.; KÄLIN, G.; LIU, Z.; NEEF, J.; PORTO, R. A. Radiation reaction and gravitational waves at fourth post-minkowskian order. **Physical review letters**, APS, v. 130, n. 10, p. 101401, 2023.
- [50] ABBOTT, B. P.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T.; ACERNESE, F.; ACKLEY, K.; ADAMS, C.; ADAMS, T.; ADDESSO, P.; ADHIKARI, R. X.; ADYA, V. B. Tests of general relativity with gw170817. **Physical review letters**, APS, v. 123, n. 1, p. 011102, 2019.
- [51] HILBERT, D. Mathematische probleme. **Nachrichten von der Koniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen**, 1900.
- [52] FREITAS, D. B. d. Eclipses: Revealing the secret life of stars and human nature. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 41, p. e20190198, 2019.
- [53] DIRAC, P. A. Wave equations in conformal space. **Annals of Mathematics**, JSTOR, USA, v. 37, n. 2, p. 429–442, abr. 1936.
- [54] WILL, C. M. The 1919 measurement of the deflection of light. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 32, n. 12, p. 124001, 2015.
- [55] EINSTEIN, A. Lens-like action of a star by the deviation of light in the gravitational field. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 84, n. 2188, p. 506–507, 1936.
- [56] BONDI, H.; PIRANI, F. A.; ROBINSON, I. Gravitational waves in general relativity iii. exact plane waves. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences**, The Royal Society London, v. 251, n. 1267, p. 519–533, 1959.
- [57] WEBER, J. J. weber, phys. rev. lett. 22, 1320 (1969). **Phys. Rev. Lett.**, v. 22, p. 1320, 1969.
- [58] SCIENTIFIC, L.; ABBOTT, B.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T.; ACERNESE, F.; ACKLEY, K.; ADAMS, C.; ADAMS, T.; ADDESSO, P.; ADHIKARI, R. Gw170104: Observation of a 50-solar-mass binary black hole coalescence at redshift 0.2. **Physical Review Letters**, APS, New York, v. 118, n. 22, p. 221101, 2017.
- [59] THORNE, K. S. Multipole expansions of gravitational radiation. **Reviews of Modern Physics**, APS, New York, v. 52, n. 2, p. 299, 1980.
- [60] ARUN, K.; PAI, A. Tests of general relativity and alternative theories of gravity using gravitational wave observations. **International Journal of Modern Physics D**, World Scientific, USA, v. 22, n. 01, p. 0218–2718, 2013.

- [61] VALLISNERI, M.; KANNER, J.; WILLIAMS, R.; WEINSTEIN, A.; STEPHENS, B. The ligo open science center. In: IOP PUBLISHING. **Journal of Physics: Conference Series**. [S.l.], 2015. v. 610, n. 1, p. 012021.
- [62] LIGO. **LIGO Hanford**. 2016. Disponível em: <https://www.ligo.caltech.edu/WA>. Acesso em: 3 nov. 2023.
- [63] ABRAMOVICI, A. A. abramovici et al., science 256, 325 (1992). **Science**, v. 256, p. 325, 1992.
- [64] ABBOTT, B. P.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T.; ABERNATHY, M.; ACERNESE, F.; ACKLEY, K.; ADAMS, C.; ADAMS, T.; ADDESSO, P.; ADHIKARI, R. Gw151226: Observation of gravitational waves from a 22-solar-mass binary black hole coalescence. **Physical review letters**, APS, v. 116, n. 24, p. 241103, 2016.
- [65] Science News. **Space-time**. 2016. Disponível em: <https://www.sciencenews.org/article/gravitational-waves-explained>. Acesso em: 3 nov. 2023.
- [66] MARTYNOV, D. V.; HALL, E.; ABBOTT, B.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T.; ADAMS, C.; ADHIKARI, R.; ANDERSON, R.; ANDERSON, S.; ARAI, K. Sensitivity of the advanced ligo detectors at the beginning of gravitational wave astronomy. **Physical Review D**, APS, v. 93, n. 11, p. 112004, 2016.
- [67] ABE, H.; AKUTSU, T.; ANDO, M.; ARAYA, A.; ARITOMI, N.; ASADA, H.; ASO, Y.; BAE, S.; BAJPAI, R.; CANNON, K. The current status and future prospects of kagra, the large-scale cryogenic gravitational wave telescope built in the kamioka underground. **Galaxies**, MDPI, v. 10, n. 3, p. 63, 2022.
- [68] PADMAN, T. V. India to begin construction of gravitational wave project. **Nature**, jan. 2025. News Feature. Disponível em: <https://www.nature.com/articles/d44151-025-00061-x>.
- [69] ABBOTT, B.; JAWAHAR, S.; LOCKERBIE, N.; TOKMAKOV, K. Ligo scientific collaboration and virgo collaboration (2016) directly comparing gw150914 with numerical solutions of einstein's equations for binary black hole coalescence. *physical review d*, 94 (6). issn 1550-2368, <http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.94.064035>. **PHYSICAL REVIEW D Phys Rev D**, American Physical Society, v. 94, p. 064035, 2016.
- [70] REZZOLLA, L. **The irresistible attraction of gravity: a journey to discover black holes**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2023.
- [71] KEITEL, D. Hunting the oxymoron: transient continuous waves from disturbed neutron stars. **LIGO Graphical Presentation LIGO-G1700712**, 2017.
- [72] Virgo. **Astrophysical Sources of Gravitational Waves**. 2016. Disponível em: <https://www.virgo-gw.eu/science/gw-universe/astrophysical-sources-of-gw/>. Acesso em: 24 out. 2022.
- [73] COLLABORATION, L. S.; COLLABORATION, V.; COLLABORATION, K. Gwtc-3: compact binary coalescences observed by ligo and virgo during the second part of the third observing run. **Physical Review X**, American Physical Society, v. 13, n. 4, p. 041039, 2023.

- [74] ACERNESE, F.; AGATHOS, M.; AIN, A.; ALBANESI, S.; ALLÉNÉ, C.; ALLOCCA, A.; AMATO, A.; ANDIA, M.; ANDRADE, T.; ANDRES, N. Advanced virgo plus: future perspectives. In: IOP PUBLISHING. **Journal of Physics: Conference Series**. [S.l.], 2023. v. 2429, n. 1, p. 012040.
- [75] ABAC, A.; ABOUELFETTOUH, I.; ACERNESE, F.; ACKLEY, K.; ADAMCEWICZ, C.; ADHICARY, S.; ADHIKARI, D.; ADHIKARI, N.; ADHIKARI, R.; ADKINS, V. Open data from ligo, virgo, and kagra through the first part of the fourth observing run. **arXiv preprint arXiv:2508.18079**, 2025.
- [76] GALAUDAGE, S. **Cosmic lighthouses and continuous gravitational waves**. 2023. <https://spaceaustralia.com/news/cosmic-lighthouses-and-continuous-gravitational-waves>. Acesso em: 1 jan. 2026.
- [77] BROECK, C. V. D. *et al.* Gravitational wave searches with advanced ligo and advanced virgo. **Proceedings of the 50th Rencontres de Moriond, "Gravitation"**, v. 100, 2015.
- [78] RILES, K. Recent searches for continuous gravitational waves. **Modern Physics Letters A**, World Scientific, v. 32, n. 39, p. 1730035, 2017.
- [79] CHRISTENSEN, N. Stochastic gravitational wave backgrounds. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, v. 82, n. 1, p. 016903, 2018.
- [80] ALLEN, B.; ROMANO, J. D. Detecting a stochastic background of gravitational radiation: Signal processing strategies and sensitivities. **Physical Review D**, APS, v. 59, n. 10, p. 102001, 1999.
- [81] ABADIE, J.; ABBOTT, B.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T.; ABERNATHY, M.; ACCADIA, T.; ACERNESE, F.; ADAMS, C.; ADHIKARI, R.; AFFELDT, C. All-sky search for gravitational-wave bursts in the second joint ligo-virgo run. **Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology**, APS, v. 85, n. 12, p. 122007, 2012.
- [82] THRANE, E.; TALBOT, C. An introduction to bayesian inference in gravitational-wave astronomy: parameter estimation, model selection, and hierarchical models. **Publications of the Astronomical Society of Australia**, Cambridge University Press, v. 36, p. e010, 2019.
- [83] EINSTEIN, A. Theorie der opaleszenz von homogenen flüssigkeiten und flüssigkeitsgemischen in der nähe des kritischen zustandes. **Annalen der Physik**, WILEY-VCH Verlag Leipzig, v. 338, n. 16, p. 1275–1298, 1910.
- [84] BOLTZMANN, L.; HASENÖHRL, F. **Wissenschaftliche Abhandlungen von Ludwig Boltzmann**. [S.l.]: Chelsea Publishing Company, 1909.
- [85] KHINCHIN, A. Y. **Mathematical foundations of information theory**. [S.l.]: Courier Corporation, 2013.
- [86] PATHRIA, R.; BEALE, P. **Statistical Mechanics**. [SI]. [S.l.]: Elsevier, 2016.
- [87] HUANG, K. **Statistical mechanics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008.
- [88] REIF, F. **Fundamentals of statistical and thermal physics**. [S.l.]: Waveland Press, 2009.
- [89] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **Statistical Physics: Volume 5**. [S.l.]: Elsevier, 2013. v. 5.

- [90] CALLEN, H. B. Thermodynamics and an introduction to thermostatistics. **John Wiley & Sons**, Nokia Bell Labs, v. 2, p. 379–423, 1993.
- [91] AMIGÓ, J. M.; BALOGH, S. G.; HERNÁNDEZ, S. A brief review of generalized entropies. **Entropy**, MDPI, v. 20, n. 11, p. 813, 2018.
- [92] KOLMOGOROV, A. N. A new metric invariant of transitive dynamical systems and lebesgue space automorphisms. In: **Dokl. Acad. Sci. USSR**. [S.l.: s.n.], 1958. v. 119, n. 1958, p. 861.
- [93] RÉNYI, A. On measures of entropy and information. In: UNIVERSITY OF CALIFORNIA PRESS. **Proceedings of the fourth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability, volume 1: contributions to the theory of statistics**. [S.l.], 1961. v. 4, p. 547–562.
- [94] KANIADAKIS, G. Statistical mechanics in the context of special relativity. **Physical review E**, APS, v. 66, n. 5, p. 056125, 2002.
- [95] MATHAI, A.; HAUBOLD, H. J. Pathway model, superstatistics, tsallis statistics, and a generalized measure of entropy. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 375, n. 1, p. 110–122, 2007.
- [96] SHANNON, C. E. A mathematical theory of communication. **The Bell system technical journal**, Nokia Bell Labs, v. 27, n. 3, p. 379–423, 1948.
- [97] CBPF.BR. **CBPF - Grupo de Física Estatística/Group of Statistical Physics**. 2025. Acesso em: 10 out. 2023. Disponível em: <https://tsallis.cbpf.br/biblio.htm>.
- [98] TSALLIS, C. Nonextensive statistics: theoretical, experimental and computational evidences and connections. **Brazilian Journal of Physics**, SciELO Brasil, v. 29, p. 1–35, 1999.
- [99] TSALLIS, C.; MENDES, R.; PLASTINO, A. R. The role of constraints within generalized nonextensive statistics. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 261, n. 3-4, p. 534–554, 1998.
- [100] MOURA, F. D.; TIRNAKLI, U.; LYRA, M. Convergence to the critical attractor of dissipative maps: Log-periodic oscillations, fractality, and nonextensivity. **Physical Review E**, APS, v. 62, n. 5, p. 6361, 2000.
- [101] GELL-MANN, M.; TSALLIS, C. **Nonextensive entropy: interdisciplinary applications**. [S.l.]: Oxford University Press, 2004.
- [102] GALLAVOTTI, G. **Statistical mechanics: A short treatise**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- [103] DORFMAN, J. R. **An introduction to chaos in nonequilibrium statistical mechanics**. [S.l.]: Cambridge university press, 1999.
- [104] TSALLIS, C. Some comments on boltzmann-gibbs statistical mechanics. **Chaos, Solitons & Fractals**, Elsevier, v. 6, p. 539–559, 1995.
- [105] TSALLIS, C. What are the numbers that experiments provide. **Quimica Nova**, v. 17, n. 6, p. 468–471, 1994.

- [106] NAJAFI, D.; VASEGHI, B.; REZAEI, G.; KHORDAD, R. Combinations of tunneling and spin-orbit interaction effects on the thermodynamics and entropy of coaxial quantum wires. **The European Physical Journal Plus**, Springer, v. 134, p. 1–10, 2019.
- [107] FAVATA, M. The gravitational-wave memory effect. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 27, n. 8, p. 084036, 2010.
- [108] COHEN, E. Boltzmann and einstein: Statistics and dynamics—an unsolved problem. **Pramana**, Springer, v. 64, p. 635–643, 2005.
- [109] LIVI, R.; PETTINI, M.; RUFFO, S.; VULPIANI, A. Chaotic behavior in nonlinear hamiltonian systems and equilibrium statistical mechanics. **Journal of statistical physics**, Springer, v. 48, p. 539–559, 1987.
- [110] CASETTI, L.; PETTINI, M.; COHEN, E. Geometric approach to hamiltonian dynamics and statistical mechanics. **Physics Reports**, Elsevier, v. 337, n. 3, p. 237–341, 2000.
- [111] ESCANDE, D.; KANTZ, H.; LIVI, R.; RUFFO, S. Self-consistent check of the validity of gibbs calculus using dynamical variables. **Journal of statistical physics**, Springer, v. 76, p. 605–626, 1994.
- [112] KANIADAKIS, G.; LISSIA, M. News and expectations in thermostatics. **arXiv preprint cond-mat/0409615**, 2004.
- [113] TSALLIS, C. Nonadditive entropy: The concept and its use. **The European Physical Journal A**, Springer, v. 40, n. 3, p. 257, 2009.
- [114] ALBERT, R.; BARABÁSI, A.-L. Topology of evolving networks: local events and universality. **Physical review letters**, APS, v. 85, n. 24, p. 5234, 2000.
- [115] TSALLIS, C.; PLASTINO, A.; ZHENG, W.-M. Power-law sensitivity to initial conditions—new entropic representation. **Chaos, Solitons & Fractals**, Elsevier, v. 8, n. 6, p. 885–891, 1997.
- [116] TSALLIS, C.; GELL-MANN, M.; SATO, Y. Asymptotically scale-invariant occupancy of phase space makes the entropy sq extensive. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, National Academy of Sciences, v. 102, n. 43, p. 15377–15382, 2005.
- [117] EROGLU, D.; BOGHOSIAN, B. M.; BORGES, E. P.; TIRNAKLI, U. The statistics of q-statistics. **Entropy**, MDPI, v. 26, n. 7, p. 554, 2024.
- [118] VASYLIUNAS, V. M. A survey of low-energy electrons in the evening sector of the magnetosphere with ogo 1 and ogo 3. **Journal of Geophysical Research**, Wiley Online Library, v. 73, n. 9, p. 2839–2884, 1968.
- [119] LYRA, M.; TSALLIS, C. Nonextensivity and multifractality in low-dimensional dissipative systems. **Physical review letters**, APS, v. 80, n. 1, p. 53, 1998.
- [120] BALDOVIN, F.; ROBLEDO, A. Universal renormalization-group dynamics at the onset of chaos in logistic maps and nonextensive statistical mechanics. **Physical Review E**, APS, v. 66, n. 4, p. 045104, 2002.

- [121] BALDOVIN, F.; ROBLEDO, A. Parallels between the dynamics at the noise-perturbed onset of chaos in logistic maps and the dynamics of glass formation. **Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics**, APS, v. 72, n. 6, p. 066213, 2005.
- [122] MONTEMURRO, M. A.; TAMARIT, F. A.; ANTENEODO, C. Aging in an infinite-range hamiltonian system of coupled rotators. **Physical Review E**, APS, v. 67, n. 3, p. 031106, 2003.
- [123] ABE, S.; SUZUKI, N. Scale-free statistics of time interval between successive earthquakes. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 350, n. 2-4, p. 588–596, 2005.
- [124] PLUCHINO, A.; LATORA, V.; RAPISARDA, A. Effective spin-glass hamiltonian for the anomalous dynamics of the hmf model. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 370, n. 2, p. 573–584, 2006.
- [125] BALDOVIN, F.; MOYANO, L. G.; MAJTEY, A. P.; ROBLEDO, A.; TSALLIS, C. Ubiquity of metastable-to-stable crossover in weakly chaotic dynamical systems. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 340, n. 1-3, p. 205–218, 2004.
- [126] MOYANO, L. G.; MAJTEY, A. P.; TSALLIS, C. Weak chaos and metastability in a symplectic system of many long-range-coupled standard maps. **The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems**, Springer, v. 52, p. 493–500, 2006.
- [127] HERNÁNDEZ-SALDAÑA, H.; ROBLEDO, A. Fluctuating dynamics at the quasiperiodic onset of chaos, tsallis q-statistics and mori's q-phase thermodynamics. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 370, n. 2, p. 286–300, 2006.
- [128] MILLHOUSE, M.; CORNISH, N. J.; LITTENBERG, T. Bayesian reconstruction of gravitational wave bursts using chirplets. **Physical Review D**, APS, v. 97, n. 10, p. 104057, 2018.
- [129] ABBOTT, R.; ABBOTT, T. D.; ABRAHAM, S.; ACERNESE, F.; ACKLEY, K.; ADAMS, C.; ADHIKARI, R. X.; ADYA, V. B.; AFFELDT, C.; AGATHOS, M. Open data from the first and second observing runs of advanced ligo and advanced virgo. **SoftwareX**, Elsevier, v. 13, p. 100658, 2021.
- [130] HASSANIBESHELI, F.; BOERS, N.; KURTHS, J. Reconstructing complex system dynamics from time series: a method comparison. **New journal of physics**, IOP Publishing, v. 22, n. 7, p. 073053, 2020.
- [131] MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. d. C. Análise de séries temporais. 2022.
- [132] SHUMWAY, R. H. **Time Series Analysis and Its Applications: With R Examples**. [S.l.]: Springer, 2006.
- [133] HAMILTON, J. D. **Time series analysis**. [S.l.]: Princeton university press, 2020.
- [134] PRIESTLEY, M. **Spectral Analysis and Time Series**. [S.l.]: Academic Press, 1981.
- [135] HURST, H. E. Long-term storage capacity of reservoirs. **Transactions of the American society of civil engineers**, American Society of Civil Engineers, v. 116, n. 1, p. 770–799, 1951.

- [136] KANTELHARDT, J. W. Fractal and multifractal time series. In: **Encyclopedia of complexity and systems science**. [S.l.]: Springer, 2015. p. 1–37.
- [137] MACLEOD, D. M.; AREEDA, J. S.; COUGHLIN, S. B.; MASSINGER, T. J.; URBAN, A. L. Gwpy: A python package for gravitational-wave astrophysics. **SoftwareX**, Elsevier, v. 13, p. 100657, 2021.
- [138] FINCH, E.; MOORE, C. J. Searching for a ringdown overtone in gw150914. **Physical Review D**, APS, v. 106, n. 4, p. 043005, 2022.
- [139] ABBOTT, R.; ABBOTT, T.; ACERNESE, F.; ACKLEY, K.; ADAMS, C.; ADHIKARI, N.; ADHIKARI, R.; ADYA, V.; AFFELDT, C.; AGARWAL, D. Population of merging compact binaries inferred using gravitational waves through gwtc-3. **Physical Review X**, APS, v. 13, n. 1, p. 011048, 2023.
- [140] CALLISTER, T. Observed gravitational-wave populations. **arXiv preprint arXiv:2410.19145**, 2024.
- [141] COVAS, P.; EFFLER, A.; GOETZ, E.; MEYERS, P.; NEUNZERT, A.; OLIVER, M.; PEARLSTONE, B.; ROMA, V.; SCHOFIELD, R.; ADYA, V. Identification and mitigation of narrow spectral artifacts that degrade searches for persistent gravitational waves in the first two observing runs of advanced ligo. **Physical Review D**, APS, v. 97, n. 8, p. 082002, 2018.
- [142] BUONANNO, A.; DAMOUR, T. Transition from inspiral to plunge in binary black hole coalescences. **Physical Review D**, APS, v. 62, n. 6, p. 064015, 2000.
- [143] ABBOTT, B. P.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T.; ACERNESE, F.; ACKLEY, K.; ADAMS, C.; ADAMS, T.; ADDESSO, P.; ADHIKARI, R.; ADYA, V. B. Gw170817: observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. **Physical review letters**, APS, v. 119, n. 16, p. 161101, 2017.
- [144] SILVA, E. A. d. Análise estatística descritiva e de multiescala em sinais de ondas gravitacionais detectadas pelo ligo. 2022.
- [145] UMAROV, S.; TSALLIS, C.; STEINBERG, S. On a q-central limit theorem consistent with nonextensive statistical mechanics. **Milan journal of mathematics**, Springer, v. 76, n. 1, p. 307–328, 2008.
- [146] JR, S. P.; MENDES, R.; MALACARNE, L.; SANTOS, R. q-distributions in complex systems: A brief review. **Brazilian Journal of Physics**, SciELO Brasil, v. 39, p. 468–474, 2009.
- [147] CHAPMAN, S. J. **Programação em MATLAB para engenheiros**. [S.l.]: Pioneira Thomson Learning, 2003.
- [148] FRISCH, U.; KOLMOGOROV, A. N. **Turbulence: the legacy of AN Kolmogorov**. Cambridge, England: Cambridge university press, 1995.
- [149] BURLAGA, L.; WANG, C.; RICHARDSON, J.; NESS, N. Large-scale magnetic field fluctuations and development of the 1999-2000 global merged interaction region: 1-60 au. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 585, n. 2, p. 1158, 2003.

- [150] SORRISO-VALVO, L.; CARBONE, V.; VELTRI, P.; CONSOLINI, G.; BRUNO, R. Intermittency in the solar wind turbulence through probability distribution functions of fluctuations. **Geophysical Research Letters**, Wiley Online Library, v. 26, n. 13, p. 1801–1804, 1999.
- [151] MARSCH, E.; TU, C. Non-gaussian probability distributions of solar wind fluctuations. In: SPRINGER. **Annales Geophysicae**. [S.l.], 1994. v. 12, n. 12, p. 1127–1138.
- [152] LEVENBERG, K. A method for the solution of certain non-linear problems in least squares. **Quarterly of applied mathematics**, v. 2, n. 2, p. 164–168, 1944.
- [153] MARQUARDT, D. W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. **Journal of the society for Industrial and Applied Mathematics**, SIAM, v. 11, n. 2, p. 431–441, 1963.
- [154] JIZBA, P. Generalized statistics and its applications. ČVUT. Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská., 2021.
- [155] BACKES, L.; BARAVIERA, A. T.; BRANCO, F. M. Uma introdução aos sistemas dinâmicos via exemplos. **Rio de Janeiro: IMPA**, 2023.
- [156] LATORA, V.; BARANGER, M.; RAPISARDA, A.; TSALLIS, C. The rate of entropy increase at the edge of chaos. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 273, n. 1-2, p. 97–103, 2000.
- [157] FREITAS, D. D.; FRANÇA, G.; SCHEERER, T.; VILAR, C.; SILVA, R. On a possible fractal relationship between the hurst exponent and the nonextensive gutenbergrichter index. **arXiv preprint arXiv:1707.09018**, 2017.
- [158] KANTELHARDT, J. W.; ZSCHIEGNER, S. A.; KOSCIELNY-BUNDE, E.; HAVLIN, S.; BUNDE, A.; STANLEY, H. E. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 316, n. 1-4, p. 87–114, 2002.
- [159] GU, G.-F.; ZHOU, W.-X. Detrending moving average algorithm for multifractals. **Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics**, APS, v. 82, n. 1, p. 011136, 2010.
- [160] BAK, P. **How nature works: the science of self-organized criticality**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- [161] HENTSCHEL, H. G. E.; PROCACCIA, I. The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Elsevier, v. 8, n. 3, p. 435–444, 1983.
- [162] HALSEY, T. C.; JENSEN, M. H.; KADANOFF, L. P.; PROCACCIA, I.; SHRAIMAN, B. I. Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets. **Physical review A**, APS, v. 33, n. 2, p. 1141, 1986.
- [163] PAVLOS, G.; KARAKATSANIS, L.; XENAKIS, M. Tsallis non-extensive statistics, intermittent turbulence, soc and chaos in the solar plasma, part one: Sunspot dynamics. **Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications**, Elsevier, v. 391, n. 24, p. 6287–6319, 2012.

- [164] FRASER, A. M.; SWINNEY, H. L. Independent coordinates for strange attractors from mutual information. **Physical review A**, APS, v. 33, n. 2, p. 1134, 1986.
- [165] TAKENS, F. Detecting strange attractors in turbulence. In: SPRINGER. **Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980: proceedings of a symposium held at the University of Warwick 1979/80**. [S.l.], 2006. p. 366–381.
- [166] CREASE, R. P. As grandes equações. a história das fórmulas matemáticas mais importante e os cientistas que as criaram. trad. alexandre cherman. **Rio de Janeiro: Jorge Zahar**, 2011.
- [167] MITMAN, K.; LAGOS, M.; STEIN, L. C.; MA, S.; HUI, L.; CHEN, Y.; DEPPE, N.; HÉBERT, F.; KIDDER, L. E.; MOXON, J. Nonlinearities in black hole ringdowns. **Physical Review Letters**, APS, v. 130, n. 8, p. 081402, 2023.
- [168] CHEUNG, M. H.-Y.; BAIBHAV, V.; BERTI, E.; CARDOSO, V.; CARULLO, G.; COSTA, R.; POZZO, W. D.; DUQUE, F.; HELFER, T.; SHUKLA, E. *et al.* Nonlinear effects in black hole ringdown. **Physical Review Letters**, APS, v. 130, n. 8, p. 081401, 2023.
- [169] ABBOTT, R.; ABBOTT, T.; ACERNESE, F.; ACKLEY, K.; ADAMS, C.; ADHIKARI, N.; ADHIKARI, R.; ADYA, V.; AFFELDT, C.; AGARWAL, D. Gwtc-3: Compact binary coalescences observed by ligo and virgo during the second part of the third observing run. **Physical Review X**, APS, v. 13, n. 4, p. 041039, 2023.
- [170] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration. **GW151226 Fact Sheet**. 2016. <https://dcc.ligo.org/public/0126/G1601226/004/GW151226-FactSheet.pdf>. Acesso em: 21 abr. 2025.
- [171] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration. **GW170104 Fact Sheet**. 2017. [https://dcc.ligo.org/public/0141/G1700676/023/GW170104-FactSheet`English.pdf](https://dcc.ligo.org/public/0141/G1700676/023/GW170104-FactSheet%20English.pdf). Acesso em: 21 abr. 2025.
- [172] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration. **GW170608 Fact Sheet**. 2017. <https://dcc.ligo.org/public/0147/G1702257/003/GW170608`Factsheet.pdf>. Acesso em: 21 abr. 2025.
- [173] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration. **GW170814 Fact Sheet**. 2017. <https://dcc.ligo.org/public/0145/G1701862/011/GW170814-FactSheet.pdf>. Acesso em: 21 abr. 2025.
- [174] University of the Balearic Islands. **GW190521 Fact Sheet**. 2020. <https://grg.uib.es/development2/news/files/GW190521`Factsheet.pdf>. Acesso em: 21 abr. 2025.
- [175] PRETORIUS, F. Evolution of binary black-hole spacetimes. **Physical review letters**, APS, v. 95, n. 12, p. 121101, 2005.
- [176] CAMPANELLI, M.; LOUSTO, C. O.; MARRONETTI, P.; ZLOCHOWER, Y. Accurate evolutions of orbiting black-hole binaries without excision. **Physical Review Letters**, APS, v. 96, n. 11, p. 111101, 2006.
- [177] BLANCHET, L. Gravitational radiation from post-newtonian sources and inspiralling compact binaries. **Living Reviews in Relativity**, Springer, v. 17, n. 1, p. 2, 2014.

- [178] REZZOLLA, L.; BARAUSSE, E.; DORBAND, E. N.; POLLNEY, D.; REISSWIG, C.; SEILER, . f. J.; HUSA, S. Final spin from the coalescence of two black holes. **Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology**, APS, v. 78, n. 4, p. 044002, 2008.
- [179] BERTI, E.; CARDOSO, V.; WILL, C. M. Gravitational-wave spectroscopy of massive black holes with the space interferometer lisa. **Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology**, APS, v. 73, n. 6, p. 064030, 2006.
- [180] AJITH, P.; BABAK, S.; CHEN, Y.; HEWITSON, M.; KRISHNAN, B.; SINTES, A.; WHELAN, J. T.; BRUEGMANN, B.; DIENER, P.; DORBAND, N. *et al.* Template bank for gravitational waveforms from coalescing binary black holes: nonspinning binaries. **Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology**, APS, v. 77, n. 10, p. 104017, 2008.
- [181] KUCKARTZ, U.; RÄDIKER, S.; EBERT, T.; SCHEHL, J. **Statistik: eine verständliche Einführung**. [S.l.]: Springer-Verlag, 2013.
- [182] VIRTANEN, P.; GOMMERS, R.; OLIPHANT, T. E.; HABERLAND, M.; REDDY, T.; COURNAPEAU, D.; BUROVSKI, E.; PETERSON, P.; WECKESSER, W.; BRIGHT, J. *et al.* Scipy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in python. **Nature methods**, Nature Publishing Group US New York, v. 17, n. 3, p. 261–272, 2020.
- [183] MOORE, D. S.; MCCABE, G. P.; CRAIG, B. A. **Introduction to the Practice of Statistics**. [S.l.]: Macmillan Higher Education, 2014.
- [184] WASSERSTEIN, R. L.; LAZAR, N. A. **The ASA statement on p-values: context, process, and purpose**. [S.l.]: Taylor & Francis, 2016. 129–133 p.
- [185] ZAR, J. H. **Biostatistical analysis**. [S.l.]: Pearson Education India, 1999.
- [186] MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Applied statistics and probability for engineers**. [S.l.]: John wiley & sons, 2010.
- [187] WOOLDRIDGE, J. M. **Introductory Econometrics: A Modern Approach 6rd ed.** [S.l.]: Cengage learning, 2016.
- [188] DRAPER, N. R.; SMITH, H. **Applied regression analysis**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1998. v. 326.
- [189] KENDALL, M. G.; STUART, A. The advanced theory of statistics. vol. 3. **Biometrics**, JSTOR, v. 25, n. 2, p. 435, 1969.
- [190] ZWILLINGER, D.; KOKOSKA, S. **CRC standard probability and statistics tables and formulae**. [S.l.]: Crc Press, 1999.
- [191] SILVA, M. M. F. N. C. V. da; FREITAS, D. B. de. in preparation: Multiscale structure of the gravitational wave signal from gw150914 based on the nonextensivity q-triplet. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, ?, n. ?, p. ?, 2023.
- [192] MANDELBROT, B.; FISHER, A.; CALVET, L. A multifractal model of asset returns. 1997.

- [193] MUZY, J.-F.; BACRY, E.; ARNEODO, A. Multifractal formalism for fractal signals: The structure-function approach versus the wavelet-transform modulus-maxima method. **Physical review E**, APS, v. 47, n. 2, p. 875, 1993.
- [194] LOVEJOY, S.; SCHERTZER, D. **The weather and climate: emergent laws and multifractal cascades**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013.
- [195] CHATTERJEE, C.; WEN, L.; VINSEN, K.; KOVALAM, M.; DATTA, A. Using deep learning to localize gravitational wave sources. **Physical Review D**, APS, v. 100, n. 10, p. 103025, 2019.
- [196] SCHNEIDER, F. R.; PODSIADLOWSKI, P.; LAPLACE, E. Bimodal black hole mass distribution and chirp masses of binary black hole mergers. **The Astrophysical Journal Letters**, IOP Publishing, v. 950, n. 2, p. L9, 2023.
- [197] VITALE, S.; WHITTLE, C. Characterization of binary black holes by heterogeneous gravitational-wave networks. **Physical Review D**, APS, v. 98, n. 2, p. 024029, 2018.
- [198] MAPELLI, M. Formation channels of single and binary stellar-mass black holes. **Handbook of gravitational wave astronomy**, Springer, p. 705–769, 2022.
- [199] CAPANO, C. D.; CABERO, M.; WESTERWECK, J.; ABEDI, J.; KASTHA, S.; NITZ, A. H.; WANG, Y.-F.; NIELSEN, A. B.; KRISHNAN, B. Multimode quasinormal spectrum from a perturbed black hole. **Physical Review Letters**, APS, v. 131, n. 22, p. 221402, 2023.
- [200] Gravitational Wave Open Science Center. **GWTC Event Catalog API – Gravitational Wave Open Science Center**. 2025. <https://gwosc.org/eventapi/html/GWTC/?pagesize=all>. Acesso em: 16 maio 2025.

APÊNDICE A – DISTRIBUIÇÃO DE EQUILÍBRIO DA MECÂNICA ESTATÍSTICA NÃO-EXTENSIVA

Neste apêndice derivamos, passo a passo, a distribuição de equilíbrio que maximiza a entropia contínua de Tsallis sob vínculos na medida *escort*. O resultado final é a distribuição q -Gaussiana,

$$p(x) = A_q \left[1 - (1 - q) B_q (x - \mu_q)^2 \right]^{\frac{1}{1-q}} \equiv A_q e_q^{-B_q (x - \mu_q)^2},$$

com $B_q = [(3 - q)\sigma_q^2]^{-1}$ e constantes de normalização A_q dadas adiante.

Objetivo

Maximizar a entropia contínua de Tsallis

$$S_q[p] = k \frac{1 - \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)^q dx}{q - 1}, \quad (\text{A.1})$$

sujeita aos vínculos de normalização e de momentos definidos na medida *escort*.

Vínculos variacionais (versão contínua com *escort*)

Usaremos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1, \quad (\text{A.2})$$

$$\mu_q = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x p(x)^q dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)^q dx}, \quad (\text{A.3})$$

$$\sigma_q^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_q)^2 p(x)^q dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)^q dx}. \quad (\text{A.4})$$

Para a variação, é conveniente escrever vínculos equivalentes sem denominadores:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_q) p(x)^q dx = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_q)^2 p(x)^q dx = \sigma_q^2 \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)^q dx. \quad (\text{A.6})$$

Funcional de Lagrange

Definimos o funcional

$$\mathcal{J}[p] = \frac{S_q[p]}{k} + \alpha \left(\int p - 1 \right) + \beta \left(\int (x - \mu_q)^2 p^q - \sigma_q^2 \int p^q \right) + \gamma \left(\int (x - \mu_q) p^q \right), \quad (\text{A.7})$$

onde α, β, γ são multiplicadores de Lagrange e os integrais são em $(-\infty, +\infty)$.

Varição funcional

As variações elementares são

$$\delta \left(\int p \right) = \int \delta p, \quad (\text{A.8})$$

$$\delta \left(\int p^q \right) = q \int p^{q-1} \delta p, \quad (\text{A.9})$$

$$\delta \left(\int (x - \mu_q) p^q \right) = q \int (x - \mu_q) p^{q-1} \delta p, \quad (\text{A.10})$$

$$\delta \left(\int (x - \mu_q)^2 p^q \right) = q \int (x - \mu_q)^2 p^{q-1} \delta p, \quad (\text{A.11})$$

$$\delta \left(\frac{S_q}{k} \right) = -\frac{q}{q-1} \int p^{q-1} \delta p. \quad (\text{A.12})$$

Logo,

$$\delta \mathcal{J} = \int \delta p(x) \left\{ -\frac{q}{q-1} p^{q-1} + \alpha + q\beta[(x - \mu_q)^2 - \sigma_q^2] p^{q-1} + q\gamma(x - \mu_q) p^{q-1} \right\} dx. \quad (\text{A.13})$$

Estacionariedade

Impondo $\delta \mathcal{J} = 0$ para todo δp , o colchete em (A.13) deve anular-se:

$$-\frac{q}{q-1} p^{q-1} + \alpha + q\beta[(x - \mu_q)^2 - \sigma_q^2] p^{q-1} + q\gamma(x - \mu_q) p^{q-1} = 0. \quad (\text{A.14})$$

Dividindo por qp^{q-1} (em $p > 0$):

$$-\frac{1}{q-1} + \frac{\alpha}{q} p^{1-q} + \beta[(x - \mu_q)^2 - \sigma_q^2] + \gamma(x - \mu_q) = 0. \quad (\text{A.15})$$

Simetria e eliminação do termo linear

O vínculo (A.5) implica simetria de $p(x)$ em torno de μ_q , o que força $\gamma = 0$. Com isso, (A.15) torna-se

$$\frac{\alpha}{q} p^{1-q} = \frac{1}{q-1} - \beta[(x - \mu_q)^2 - \sigma_q^2] \equiv C_0 - \beta(x - \mu_q)^2, \quad (\text{A.16})$$

onde C_0 é uma constante.

Solução geral e forma q -exponencial

Elevando à potência $1/(1-q)$, obtemos

$$p(x) = \left[A - C(x - \mu_q)^2 \right]^{\frac{1}{1-q}} \equiv A_q \left[1 - (1-q)B_q(x - \mu_q)^2 \right]^{\frac{1}{1-q}} = A_q e_q^{-B_q(x - \mu_q)^2}, \quad (\text{A.17})$$

onde definimos a função q -exponencial

$$e_q^z \equiv [1 + (1-q)z]^{\frac{1}{1-q}}, \quad \lim_{q \rightarrow 1} e_q^z = e^z. \quad (\text{A.18})$$

Parâmetros B_q e A_q

A partir dos vínculos (A.6) e (A.2), obtém-se

$$B_q = \frac{1}{(3-q)\sigma_q^2}, \quad (q < 3). \quad (\text{A.19})$$

A constante de normalização A_q segue de integrais Beta/Gamma. Usando (A.19):

$$\text{para } q < 1: \quad A_q = \frac{\Gamma\left(\frac{5-3q}{2(1-q)}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right)} \sqrt{\frac{1-q}{\pi}} B_q, \quad (\text{A.20})$$

$$\text{para } 1 < q < 3: \quad A_q = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)} \sqrt{\frac{q-1}{\pi}} B_q. \quad (\text{A.21})$$

Condições de existência

- **Normalizabilidade:** requer $q < 3$.
- **Variância q -escort finita:** requer $q < 5/3$.
- **Variância usual (clássica) finita:** para $q > 1$, a cauda é de lei de potência $\sim |x|^{-2/(q-1)}$; a variância clássica existe apenas se $2/(q-1) > 3 \Rightarrow q < 5/3$.

Limite Gaussiano $q \rightarrow 1$

Usando $\lim_{q \rightarrow 1} [1 - (1-q)z]^{\frac{1}{1-q}} = e^{-z}$, segue que

$$\lim_{q \rightarrow 1} p(x) = A_1 \exp[-B_1(x - \mu)^2], \quad (\text{A.22})$$

isto é, recupera-se a Gaussiana de Boltzmann–Gibbs–Shannon.

Convenções (sinal e interpretação física)

A forma unificada (A.17) usa $p(x) = A_q [1 - (1-q)B_q(x - \mu_q)^2]^{\frac{1}{1-q}}$.

- Para $q > 1$: $1 - (1 - q)z = 1 + (q - 1)z \Rightarrow$ *caudas pesadas* (sem *cut-off*).
- Para $q < 1$: há *suporte finito* (existência de *cut-off*).

Resumo (resultado principal)

$$p(x) = A_q [1 - (1 - q)B_q(x - \mu_q)^2]^{1/(1-q)}, \quad B_q = \frac{1}{(3 - q)\sigma_q^2}, \quad A_q \text{ dados em (A.20)–(A.21).}$$

APÊNDICE B – LISTA DE EVENTOS DE ONDAS GRAVITACIONAIS DO TIPO BBH DETECTADOS

De acordo com os dados da Tabela 7 foi realizada uma avaliação completa do conjunto de dados. Do total de 103 eventos catalogados, 87 corresponderam a sistemas binários de buracos negros (BBH) que satisfizeram os critérios de elegibilidade estabelecidos pelo algoritmo em Python, enquanto 14 eventos foram classificados como não-BBH (incluindo sistemas mistos ou binários de estrelas de nêutrons) e 2 eventos descartados devido a inconsistências nos dados. A predominância de BBH (84,5% do total) reforça a eficácia dos critérios de seleção, alinhados à sensibilidade dos detectores LIGO (Hanford e Livingston) para eventos de alta massa.

A Tabela 7 apresenta uma amostra dos eventos do tipo BBH selecionados, com informações sobre a versão dos dados, a origem catalográfica e a disponibilidade dos registros para os detectores LIGO Livingston (L) e LIGO Hanford (H). Nesta tabela, utiliza-se a convenção: (✓) indica que os dados do detector foram aprovados (disponíveis e em boas condições para análise), enquanto (✗) indica que os dados foram reprovados (ausentes, corrompidos ou considerados inadequados para os objetivos deste estudo).

Após a aplicação do algoritmo de triagem e análise da integridade dos arquivos, obteve-se o seguinte panorama:

- i) Total de eventos BBH encontrados: 87;
- ii) Eventos com pares completos (dados de Hanford e Livingston disponíveis): 79;
- iii) Eventos com problemas (dados ausentes ou inutilizáveis em pelo menos um dos detectores): 8.

Essa filtragem visa garantir a consistência metodológica da análise, restringindo os resultados a eventos com strain completo e confiável, quando possível. Casos com apenas um detector foram mantidos sob critério de qualidade do dado remanescente.

Tabela 7 – Lista de eventos de ondas gravitacionais do tipo BBH detectados.

Nº	Evento	Version	Release	Data de Detecção	(L)	(H)
1	GW150914	v3	GWTC-1-confident	2015 (O2)	✓	✓

Continua na próxima página

Tabela 7 – Continuação da página anterior

Nº	Evento	Version	Release	Data de Detecção	(L)	(H)
2	GW151012	v3	GWTC-1-confident	2015 (O2)	✓	✓
3	GW151226	v2	GWTC-1-confident	2015 (O2)	✓	✓
4	GW170104	v2	GWTC-1-confident	2017 (O2)	✓	✓
5	GW170608	v3	GWTC-1-confident	2017 (O2)	✓	✓
6	GW170729	v1	GWTC-1-confident	2017 (O2)	✓	✓
7	GW170809	v1	GWTC-1-confident	2017 (O2)	✓	✓
8	GW170814	v3	GWTC-1-confident	2017 (O2)	✓	✓
9	GW170818	v1	GWTC-1-confident	2017 (O2)	✓	✓
10	GW170823	v1	GWTC-1-confident	2017 (O2)	✓	✓
11	GW190403_051519	v1	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
12	GW190408_181802	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
13	GW190412	v3	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
14	GW190412_053044	v4	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
15	GW190413_052954	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
16	GW190413_134308	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
17	GW190421_213856	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
18	GW190424_180648	v1	GWTC-2.1-auxiliary	2019 (O3a)	✗	✓
19	GW190426_190642	v1	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
20	GW190503_185404	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
21	GW190512_180714	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
22	GW190513_205428	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
23	GW190514_065416	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
24	GW190517_055101	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
25	GW190519_153544	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
26	GW190521	v3	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
27	GW190521_030229	v4	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
28	GW190521_074359	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
29	GW190527_092055	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
30	GW190602_175927	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
31	GW190620_030421	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✗	✓
32	GW190630_185205	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✗	✓
33	GW190701_203306	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
34	GW190706_222641	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
35	GW190707_093326	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓

Continua na próxima página

Tabela 7 – Continuação da página anterior

Nº	Evento	Version	Release	Data de Detecção	(L)	(H)
36	GW190708_232457	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	×	✓
37	GW190719_215514	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
38	GW190720_000836	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
39	GW190725_174728	v1	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
40	GW190727_060333	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
41	GW190728_064510	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
42	GW190731_140936	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
43	GW190803_022701	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
44	GW190805_211137	v1	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
45	GW190828_063405	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
46	GW190828_065509	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
47	GW190909_114149	v1	GWTC-2.1-auxiliary	2019 (O3a)	✓	✓
48	GW190910_112807	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
49	GW190915_235702	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
50	GW190916_200658	v1	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
51	GW190924_021846	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
52	GW190925_232845	v1	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	×
53	GW190926_050336	v1	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
54	GW190929_012149	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
55	GW190930_133541	v2	GWTC-2.1-confident	2019 (O3a)	✓	✓
56	GW191103_012549	v1	GWTC-3-confident	2019 (O3b)	✓	✓
57	GW191105_143521	v1	GWTC-3-confident	2019 (O3b)	✓	✓
58	GW191109_010717	v1	GWTC-3-confident	2019 (O3b)	✓	✓
59	GW191113_071753	v1	GWTC-3-confident	2019 (O3b)	✓	✓
60	GW191126_115259	v1	GWTC-3-confident	2019 (O3b)	✓	✓
61	GW191127_050227	v1	GWTC-3-confident	2019 (O3b)	✓	✓
62	GW191129_134029	v1	GWTC-3-confident	2019 (O3b)	✓	✓
63	GW191204_110529	v1	GWTC-3-confident	2019 (O3b)	✓	✓
64	GW191204_171526	v1	GWTC-3-confident	2019 (O3b)	✓	✓
65	GW191215_223052	v1	GWTC-3-confident	2019 (O3b)	✓	✓
66	GW191216_213338	v1	GWTC-3-confident	2019 (O3b)	✓	×
67	GW191222_033537	v1	GWTC-3-confident	2019 (O3b)	✓	✓
68	GW191230_180458	v1	GWTC-3-confident	2019 (O3b)	✓	✓
69	GW200112_155838	v1	GWTC-3-confident	2020 (O3b cont.)	×	✓

Continua na próxima página

Tabela 7 – Continuação da página anterior

Nº	Evento	Version	Release	Data de Detecção	(L)	(H)
70	GW200128_022011	v1	GWTC-3-confident	2020 (O3b cont.)	✓	✓
71	GW200129_065458	v1	GWTC-3-confident	2020 (O3b cont.)	✓	✓
72	GW200202_154313	v1	GWTC-3-confident	2020 (O3b cont.)	✓	✓
73	GW200208_130117	v1	GWTC-3-confident	2020 (O3b cont.)	✓	✓
74	GW200208_222617	v1	GWTC-3-confident	2020 (O3b cont.)	✓	✓
75	GW200209_085452	v1	GWTC-3-confident	2020 (O3b cont.)	✓	✓
76	GW200216_220804	v1	GWTC-3-confident	2020 (O3b cont.)	✓	✓
77	GW200219_094415	v1	GWTC-3-confident	2020 (O3b cont.)	✓	✓
78	GW200220_061928	v1	GWTC-3-confident	2020 (O3b cont.)	✓	✓
79	GW200220_124850	v1	GWTC-3-confident	2020 (O3b cont.)	✓	✓
80	GW200224_222234	v1	GWTC-3-confident	2020 (O3b cont.)	✓	✓
81	GW200225_060421	v1	GWTC-3-confident	2020 (O3b cont.)	✓	✓
82	GW200302_015811	v1	GWTC-3-confident	2020 (O3b cont.)	✓	✗
83	GW200306_093714	v1	GWTC-3-confident	2020 (O3b cont.)	✓	✓
84	GW200308_173609	v1	GWTC-3-confident	2020 (O3b cont.)	✓	✓
85	GW200311_115853	v1	GWTC-3-confident	2020 (O3b cont.)	✓	✓
86	GW200316_215756	v1	GWTC-3-confident	2020 (O3b cont.)	✓	✓
87	GW200322_091133	v1	GWTC-3-confident	2020 (O3b cont.)	✓	✓
Total				87	82	84

Fonte: Elaborada pelo autor com base nos catálogos GWTC-1, GWTC-2.1 e GWTC-3.

É relevante destacar que a execução do código de seleção ocorreu em 22 de Janeiro de 2025, limitando a base de dados aos eventos catalogados até essa data. Essa delimitação temporal assegura a reprodutibilidade dos resultados e evita viés decorrente de atualizações posteriores nos catálogos públicos (atualizações do GraceDB ou inclusão de eventos retroativos [200]).

APÊNDICE C – TABELA DAS FREQUÊNCIAS DE PICO DE EVENTOS BBH DETECTADOS

A Tabela 8 apresenta os resultados obtidos para a frequência de pico das ondas gravitacionais emitidas por sistemas binários de buracos negros (BBH, do inglês Binary Black Hole), detectados por colaborações como LIGO e Virgo. Esses valores foram calculados por meio de um código computacional desenvolvido em Python, com base em parâmetros físicos extraídos diretamente dos dados oficiais disponibilizados nos catálogos de eventos observacionais.

O código utiliza as massas individuais dos componentes do sistema (m_1 e m_2), para estimar a massa final do buraco negro remanescente, levando em consideração uma perda média de aproximadamente 5% da massa total do sistema em forma de radiação gravitacional durante o processo de fusão. Essa perda é consistente com resultados relatados na literatura especializada.

A frequência de pico (f_{pico}) foi obtida a partir da relação entre a frequência característica de anelamento do modo fundamental (modo $l = m = 2$) e a massa final do buraco negro formado. A fórmula empregada baseia-se na relação inversa entre a massa do buraco negro final e a frequência do modo quasinormal fundamental, ajustada por um fator empírico de escala. Esse fator, de ordem 0,15, foi adotado com base em estudos prévios sobre o espectro de energia emitida durante a fusão de buracos negros e corresponde aproximadamente à frequência de maior intensidade no espectro gravitacional.

Tabela 8 – Parâmetros de massa e frequência de pico de eventos BBH detectados.

Evento	Massa 1 (M_{\odot})	Massa 2 (M_{\odot})	Massa Final (M_{\odot})	Frequência de Pico (Hz)
GW150914-v3	35,6	30,6	62,89	154,0886716
GW151012-v3	23,2	13,6	34,96	277,1921213
GW151226-v2	13,7	7,7	20,33	476,6668254
GW170104-v2	30,8	20	48,26	200,8005918
GW170608-v3	11	7,6	17,67	548,4231217
GW170729-v1	50,2	34	79,99	121,1481005
GW170809-v1	35	23,8	55,86	173,4807834
GW170814-v3	30,6	25,2	53,01	182,8077072
GW170818-v1	35,4	26,7	58,995	164,2619978

Continua na próxima página

Tabela 8 – Continuação

Evento	Massa 1 (M_{\odot})	Massa 2 (M_{\odot})	Massa Final (M_{\odot})	Frequência de Pico (Hz)
GW170823-v1	39,5	29	65,075	148,9148914
GW190403'051519-v1	85	20	99,75	97,14923869
GW190408'181802-v2	24,6	18,4	40,85	237,2248852
GW190412-v3	30,1	8,3	36,48	265,6424496
GW190412'053044-v4	27,7	9	34,865	277,9474132
GW190413'052954-v2	33,7	24,2	55,005	176,1773759
GW190413'134308-v2	51,3	30,4	77,615	124,8552027
GW190421'213856-v2	42	32	70,3	137,8468927
GW190424'180648-v1	40,5	31,8	68,685	141,088106
GW190426'190642-v1	105,5	76	172,425	56,20203891
GW190503'185404-v2	43,3	28,3	68,02	142,467459
GW190512'180714-v2	23,2	12,5	33,915	285,733055
GW190513'205428-v2	36	18,3	51,585	187,8576439
GW190514'065416-v2	40,9	28,4	65,835	147,1958162
GW190517'055101-v2	39,2	24	60,04	161,4030073
GW190519'153544-v2	65,1	40,8	100,605	96,32360777
GW190521-v3	95,3	69	156,085	62,08563641
GW190521'030229-v4	98,4	57,2	147,82	65,55700554
GW190521'074359-v2	43,4	33,4	72,96	132,8212248
GW190527'092055-v2	35,6	22,2	54,91	176,482181
GW190602'175927-v2	71,8	44,8	110,77	87,48430586
GW190620'030421-v2	58	35	88,35	109,6846243
GW190630'185205-v2	35,1	24	56,145	172,6001703
GW190701'203306-v2	54,1	40,5	89,87	107,8294933
GW190706'222641-v2	74	39,4	107,73	89,95299879
GW190707'093326-v2	12,1	7,9	19	510,0335031
GW190708'232457-v2	19,8	11,6	29,83	324,8621039
GW190719'215514-v2	36,6	19,9	53,675	180,542833
GW190720'000836-v2	14,2	7,5	20,615	470,0769614
GW190725'174728-v1	11,8	6,3	17,195	563,5729316
GW190727'060333-v2	38,9	30,2	65,645	147,6218533
GW190728'064510-v2	12,5	8	19,475	497,5936616
GW190731'140936-v2	41,8	29	67,26	144,0772608
GW190803'022701-v2	37,7	27,6	62,035	156,2124052

Continua na próxima página

Tabela 8 – Continuação

Evento	Massa 1 (M_{\odot})	Massa 2 (M_{\odot})	Massa Final (M_{\odot})	Frequência de Pico (Hz)
GW190805`211137-v1	46,2	30,6	72,96	132,8212248
GW190828`063405-v2	31,9	25,8	54,815	176,7880427
GW190828`065509-v2	23,7	10,4	32,395	299,1398845
GW190909`114149-v1	45,8	28,3	70,395	137,6608645
GW190910`112807-v2	43,8	34,2	74,1	130,7778213
GW190915`235702-v2	32,6	24,5	54,245	178,6457104
GW190916`200658-v1	43,8	23,3	63,745	152,0219085
GW190924`021846-v2	8,8	5,1	13,205	733,8611556
GW190925`232845-v1	20,8	15,5	34,485	281,0101946
GW190926`050336-v1	41,1	20,4	58,425	165,8645539
GW190929`012149-v2	66,3	26,8	88,445	109,5668106
GW190930`133541-v2	14,2	6,9	20,045	483,4440788
GW191103`012549-v1	11,8	7,9	18,715	517,8005108
GW191105`143521-v1	10,7	7,7	17,48	554,3842425
GW191109`010717-v1	65	47	106,4	91,07741127
GW191113`071753-v1	29	5,9	33,155	292,2828098
GW191126`115259-v1	12,1	8,3	19,38	500,0328462
GW191127`050227-v1	53	24	73,15	132,4762346
GW191129`134029-v1	10,7	6,7	16,53	586,2454059
GW191204`110529-v1	27,3	19,2	44,175	219,3692487
GW191204`171526-v1	11,7	8,4	19,095	507,496023
GW191215`223052-v1	24,9	18,1	40,85	237,2248852
GW191216`213338-v1	12,1	7,7	18,81	515,1853567
GW191222`033537-v1	45,1	34,7	75,81	127,8279456
GW191230`180458-v1	49,4	37	82,08	118,0633109
GW200112`155838-v1	35,6	28,3	60,705	159,6348993
GW200128`022011-v1	42,2	32,6	71,06	136,3725944
GW200129`065458-v1	34,5	29	60,325	160,6404734
GW200202`154313-v1	10,1	7,3	16,53	586,2454059
GW200208`130117-v1	37,7	27,4	61,845	156,6923205
GW200208`222617-v1	51	12,3	60,135	161,1480263
GW200209`085452-v1	35,6	27,1	59,565	162,6901126
GW200216`220804-v1	51	30	76,95	125,9341983
GW200219`094415-v1	37,5	27,9	62,13	155,9735484

Continua na próxima página

Tabela 8 – Continuação

Evento	Massa 1 (M_{\odot})	Massa 2 (M_{\odot})	Massa Final (M_{\odot})	Frequência de Pico (Hz)
GW200220`061928-v1	87	61	140,6	68,92344637
GW200220`124850-v1	38,9	27,9	63,46	152,7046417
GW200224`222234-v1	40	32,7	69,065	140,3118303
GW200225`060421-v1	19,3	14	31,635	306,3264283
GW200302`015811-v1	37,8	20	54,91	176,482181
GW200306`093714-v1	28,3	14,8	40,945	236,6744794
GW200308`173609-v1	60	24	79,8	121,4365484
GW200311`115853-v1	34,2	27,7	58,805	164,7927312
GW200316`215756-v1	13,1	7,8	19,855	488,0703379
GW200322`091133-v1	38	11,3	46,835	206,9101433

Fonte: Elaborada pelo autor com base nos catálogos GWTC-1, GWTC-2.1 e GWTC-3.

APÊNDICE D – Q ESTACIONÁRIO

Durante o processo de análise, constatou-se a existência de inconsistências nos dados de alguns eventos, tais como: GW190424_180648-v1, GW190620_030421-v2, GW190630_185205-v2, GW190708_232457-v2, GW190925_232845-v1, GW191216_213338-v1, GW200112_155838-v1, GW200302_015811-v1. Para garantir a confiabilidade da análise estatística, optou-se por considerar apenas os eventos cujos sinais de deformação $h(t)$ estivessem disponíveis de forma íntegra e sincronizada em ambos os detectores do LIGO — Hanford (H1) e Livingston (L1). Essa decisão metodológica visa assegurar a consistência das comparações entre eventos e a qualidade dos parâmetros extraídos.

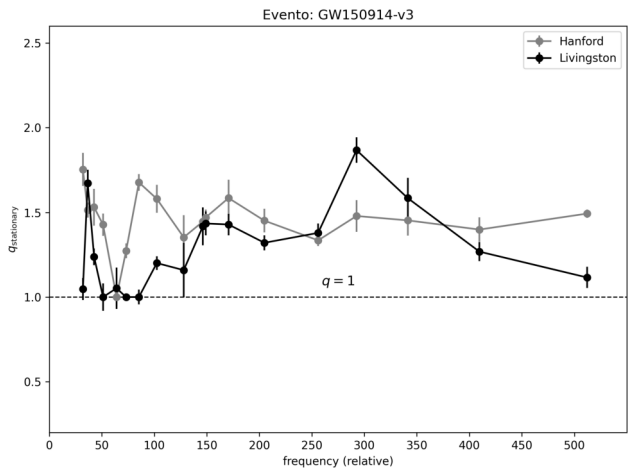
A análise conjunta dos gráficos disponibilizados no catálogo evidencia um padrão recorrente de não extensividade estatística na maioria dos eventos do tipo binário de buracos negros (BBH), detectados pelos interferômetros LIGO e VIRGO. A predominância de valores de $(q_{\text{stat}} > 1)$ indica que os sinais não seguem uma distribuição gaussiana clássica, mas sim distribuições com caudas pesadas, como as q-Gaussianas previstas pela estatística não extensiva de Tsallis. Esse comportamento é compatível com dinâmicas não lineares, intermitentes e multifractais, típicas de sistemas físicos em estados fora do equilíbrio e de alta complexidade, como os envolvidos na coalescência de buracos negros.

Adicionalmente, o catálogo permite observar variações sutis no valor de (q_{stat}) entre os diferentes eventos. Em geral, eventos com menor amplitude espectral ou baixa razão sinal-ruído apresentam valores de (q_{stat}) ligeiramente inferiores, enquanto sinais mais intensos, com estrutura espectral mais rica, resultam em valores mais elevados. Essa sensibilidade do parâmetro (q_{stat}) à morfologia do sinal e à escala de observação corrobora sua relevância como ferramenta diagnóstica da complexidade estatística e estrutural dos sistemas emissores.

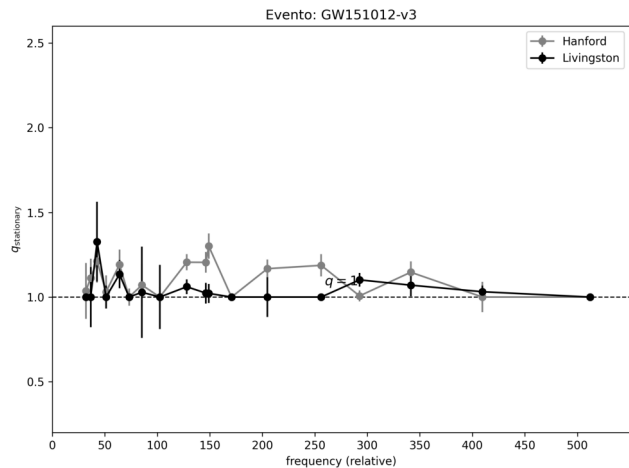
Os resultados obtidos, portanto, consolidam a aplicação da estatística não extensiva como uma abordagem teórica robusta e promissora para a caracterização de sinais gravitacionais. Essa metodologia permite extrair propriedades físicas relevantes dos sistemas astrofísicos extremos, ampliando nossa capacidade de compreender a dinâmica subjacente aos fenômenos detectados pelos observatórios de ondas gravitacionais.

Catálogo de Ondas Gravitacionais - $q_{\text{stationary}}$

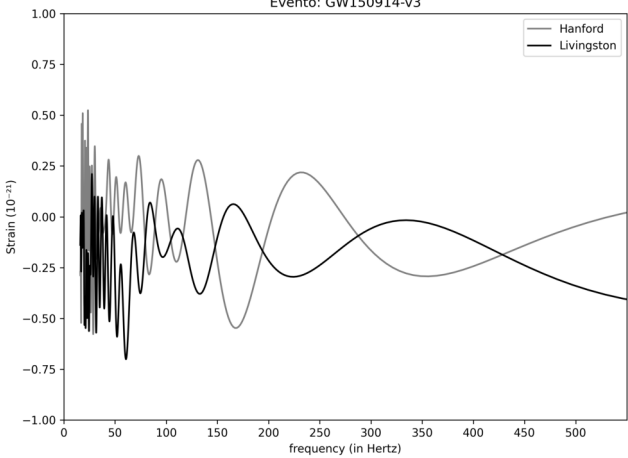
GW150914-v3



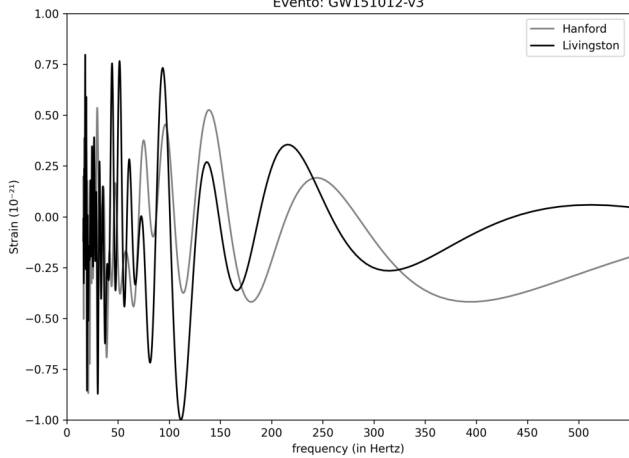
GW151012-v3



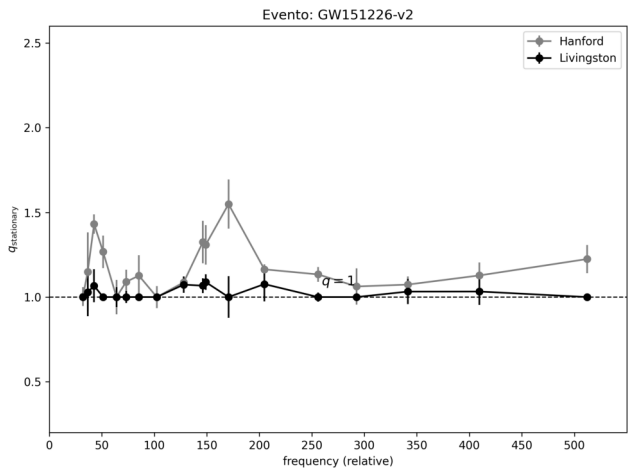
Evento: GW150914-v3



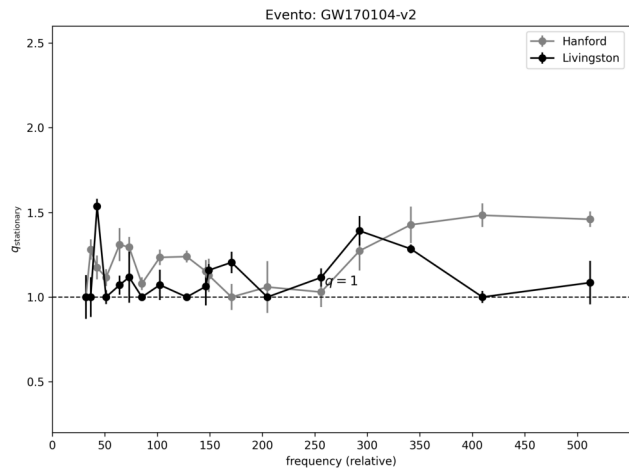
Evento: GW151012-v3



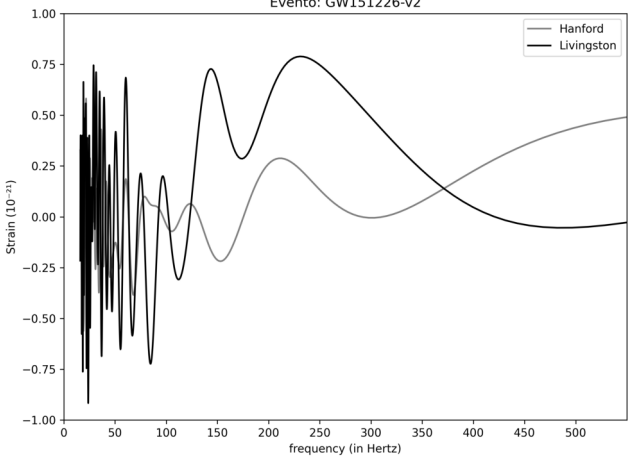
GW151226-v2



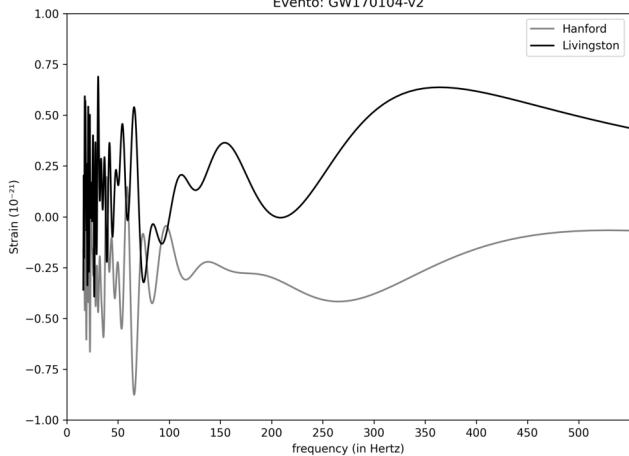
GW170104-v2



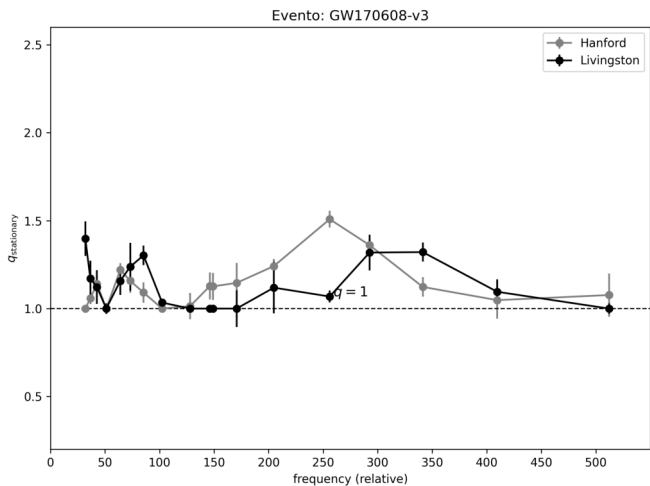
Evento: GW151226-v2



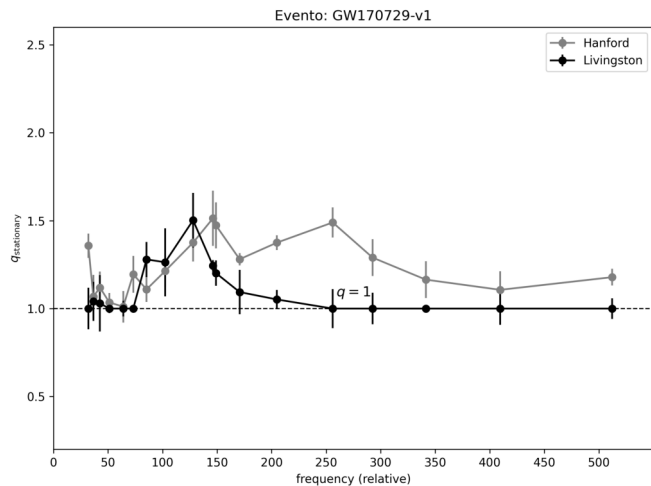
Evento: GW170104-v2



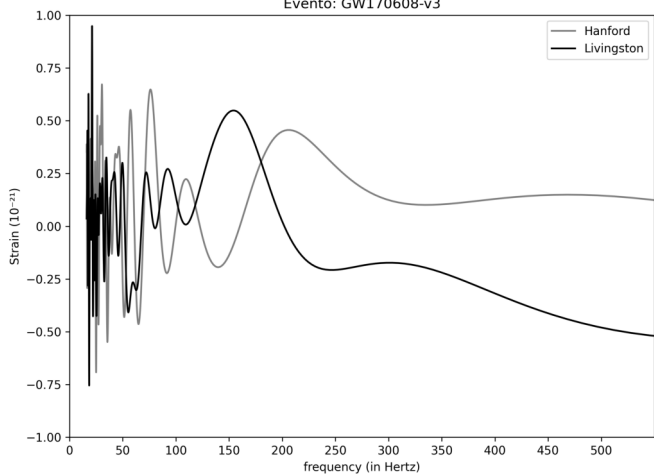
GW170608-v3



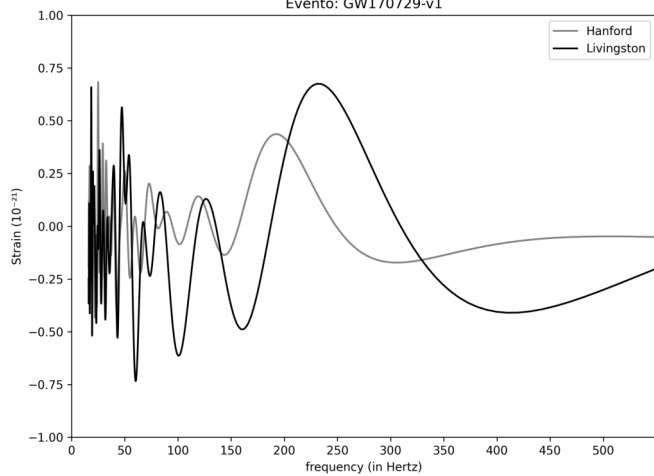
GW170729-v1



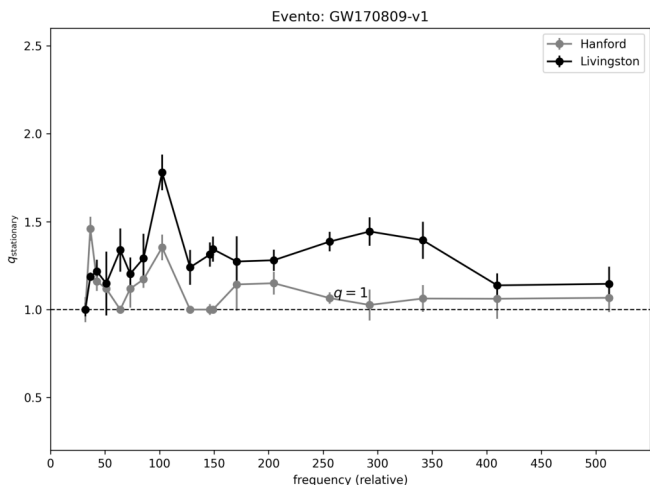
Evento: GW170608-v3



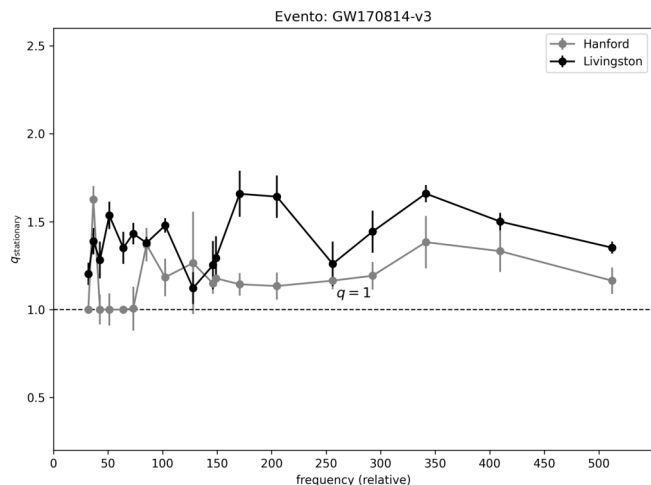
Evento: GW170729-v1



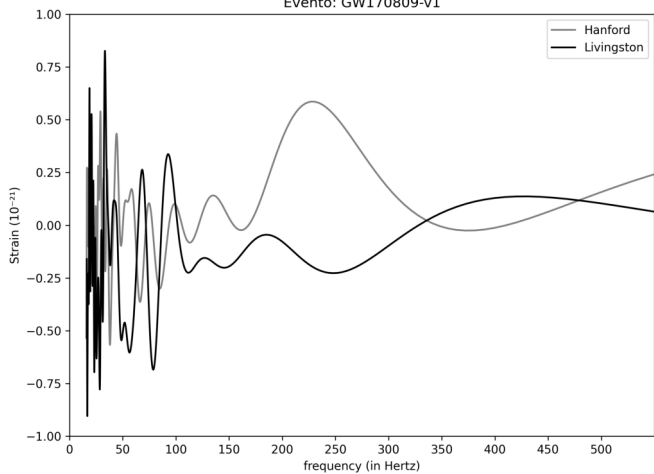
GW170809-v1



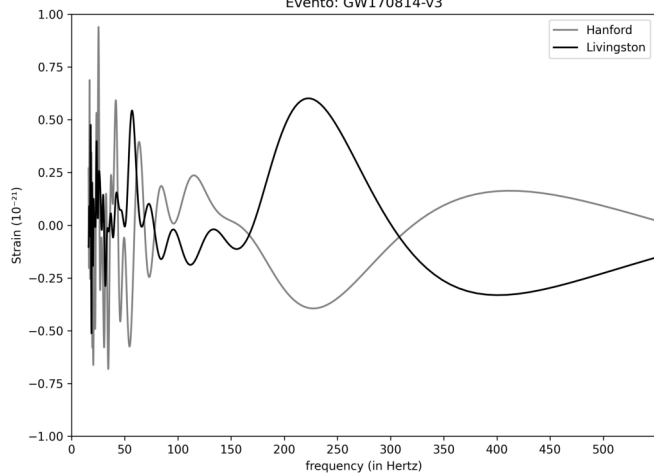
GW170814-v3



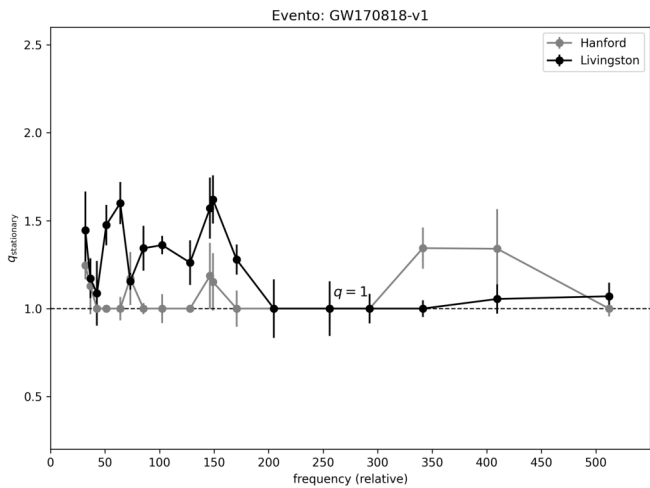
Evento: GW170809-v1



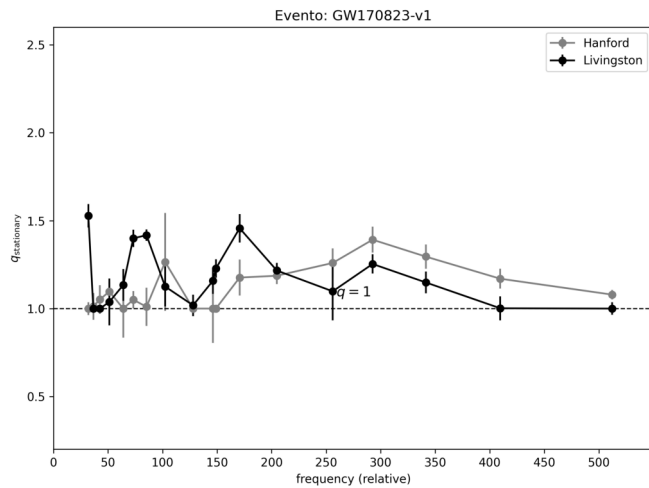
Evento: GW170814-v3



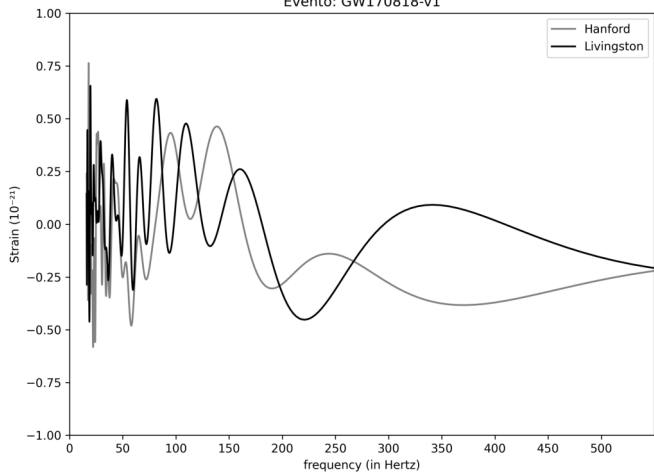
GW170818-v1



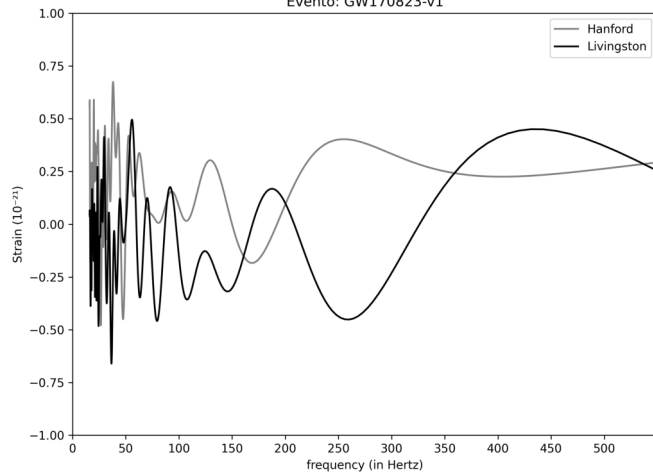
GW170823-v1



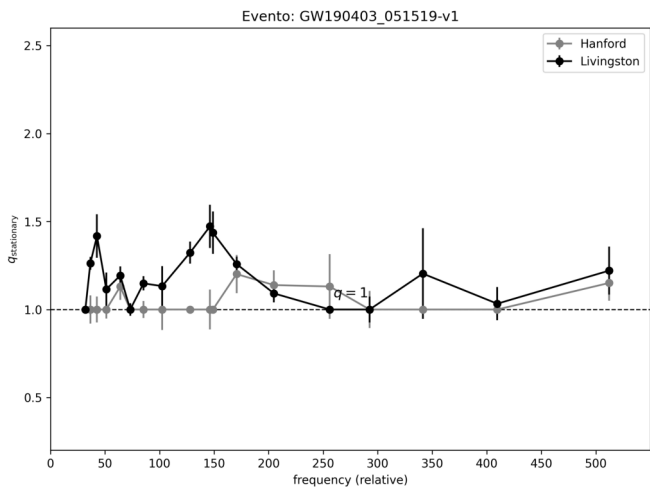
Evento: GW170818-v1



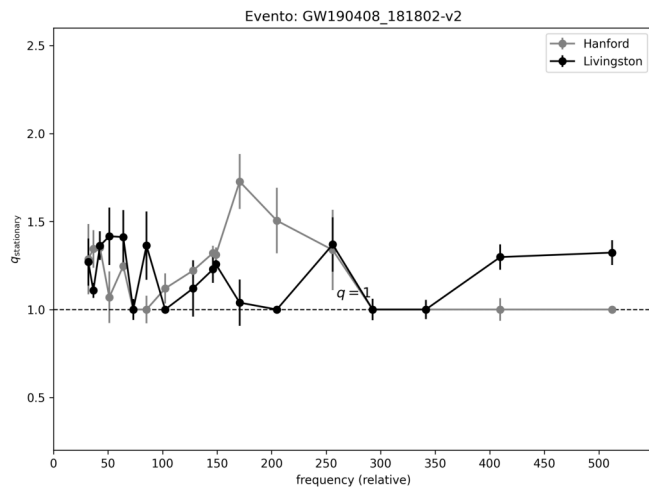
Evento: GW170823-v1



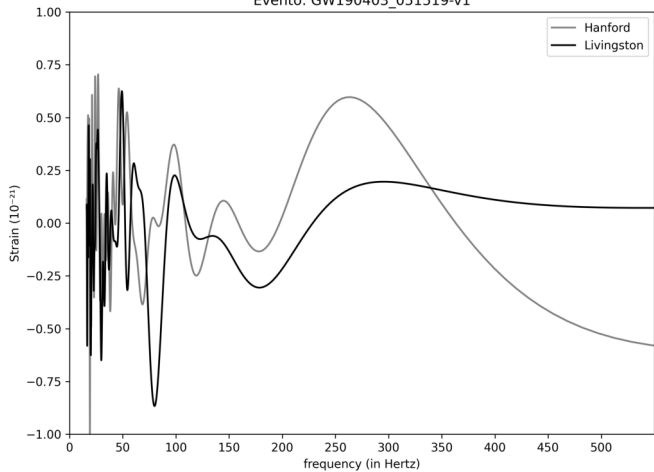
GW190403_051519-v1



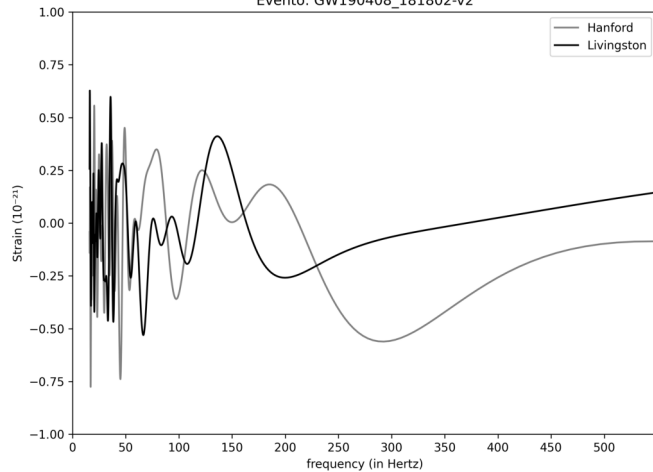
GW190408_181802-v2



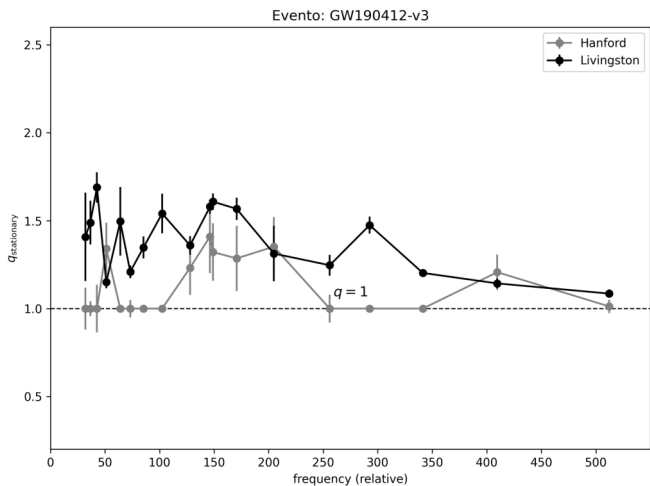
Evento: GW190403_051519-v1



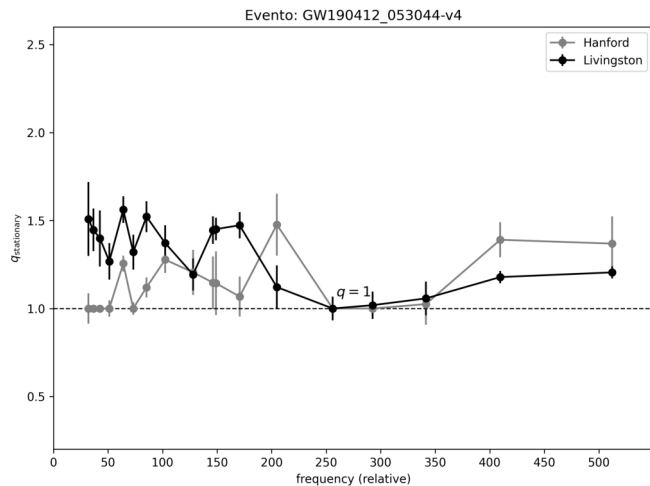
Evento: GW190408_181802-v2



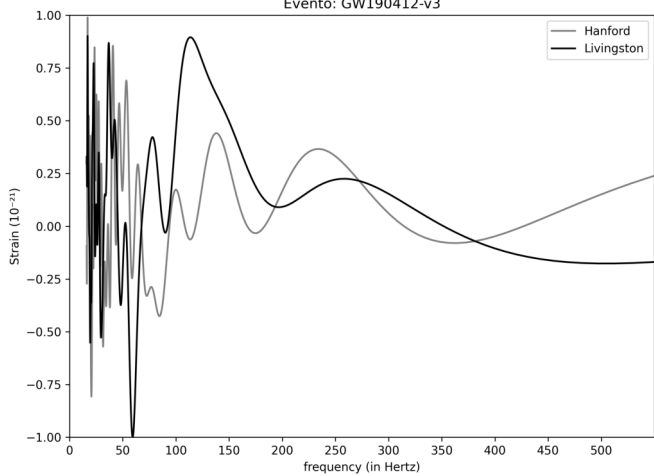
GW190412-v3



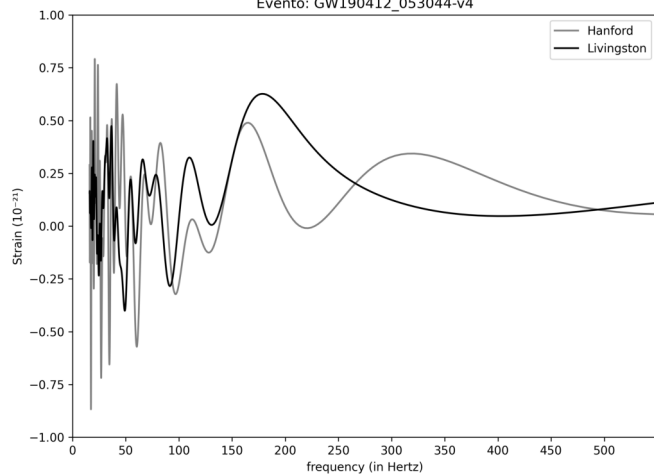
GW190412_053044-v4



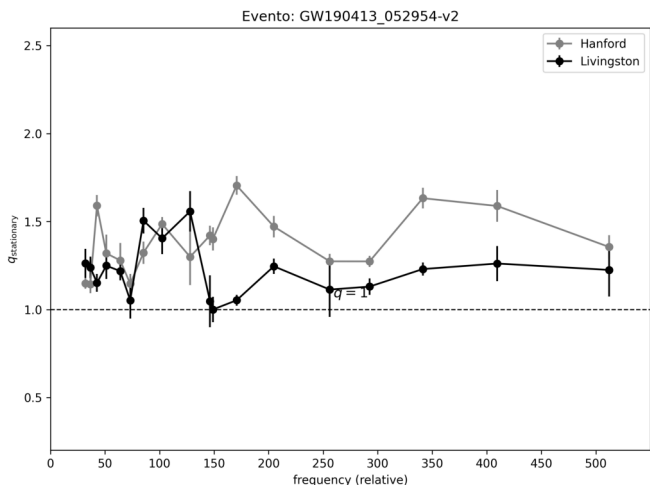
Evento: GW190412-v3



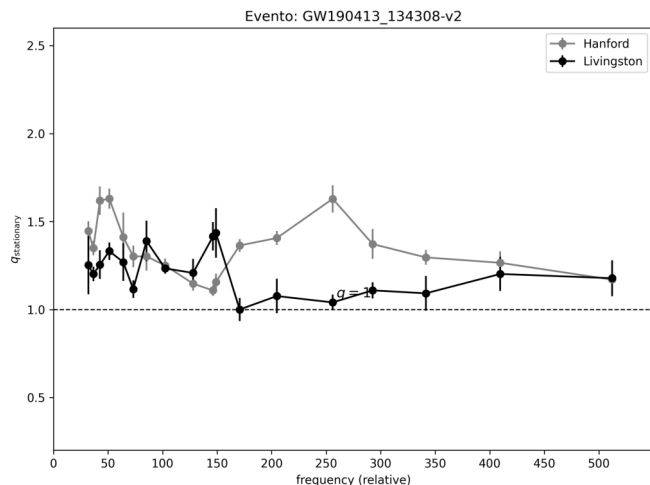
Evento: GW190412_053044-v4



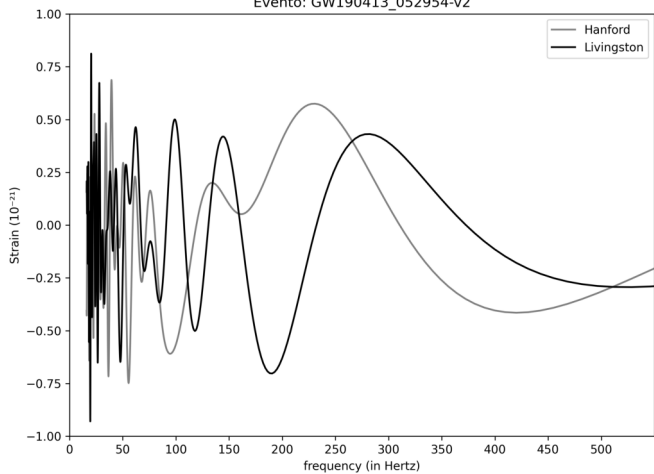
GW190413_052954-v2



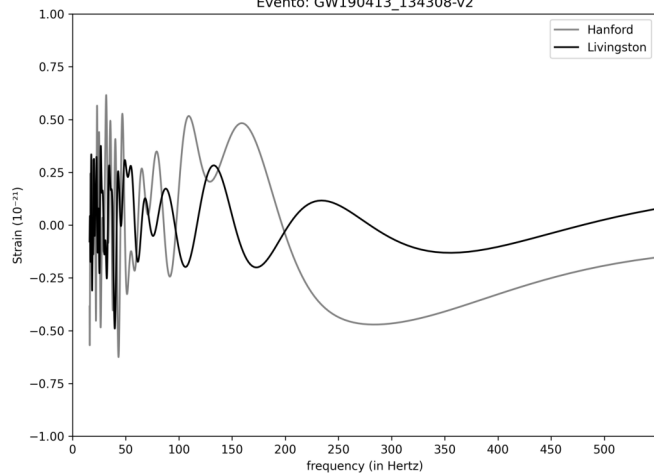
GW190413_134308-v2



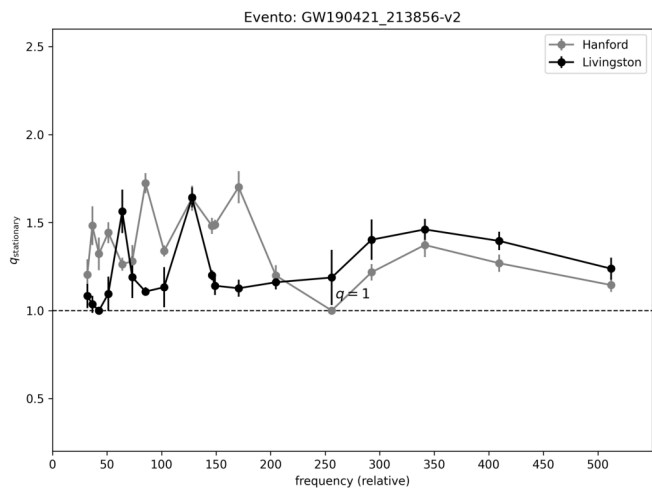
Evento: GW190413_052954-v2



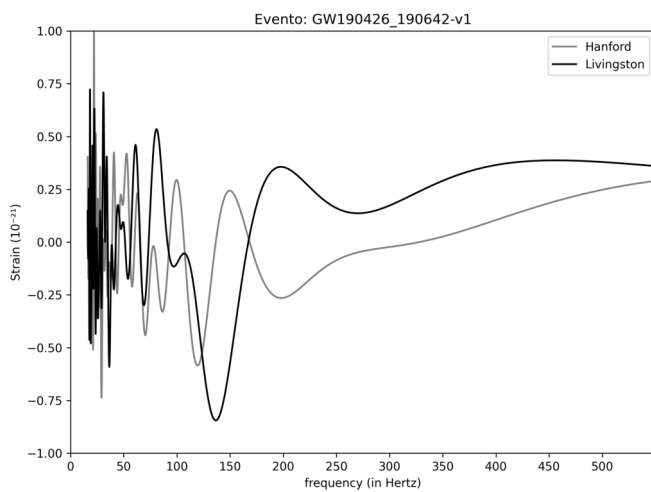
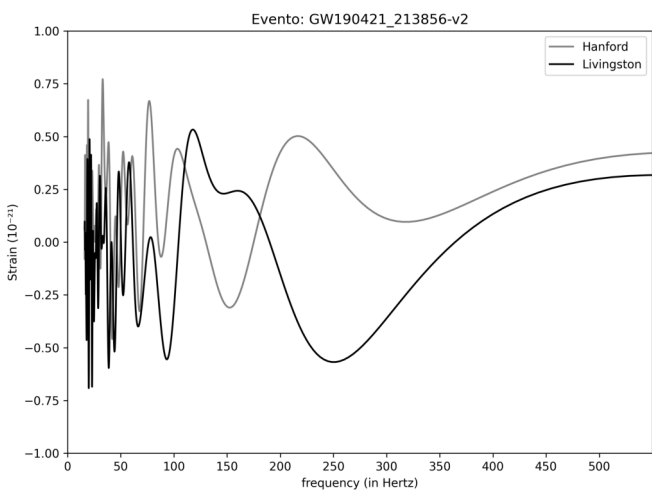
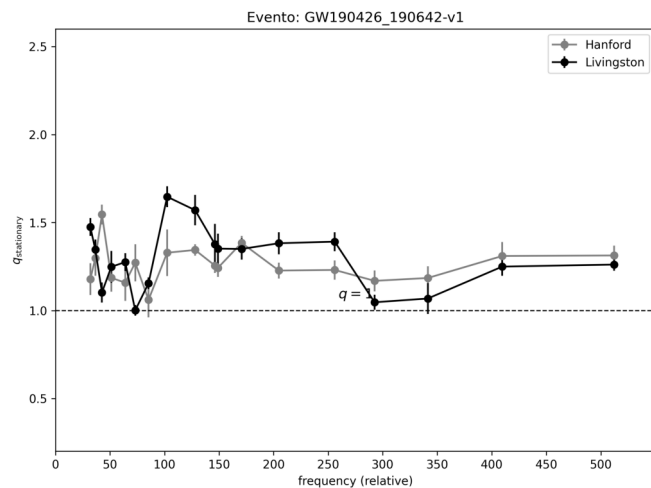
Evento: GW190413_134308-v2



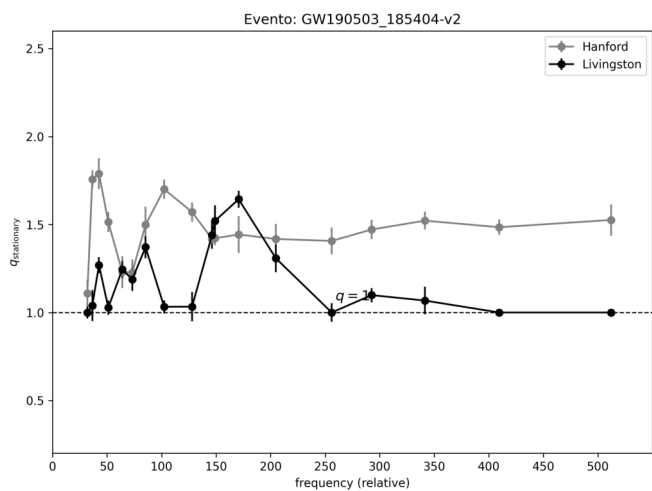
GW190421_213856-v2



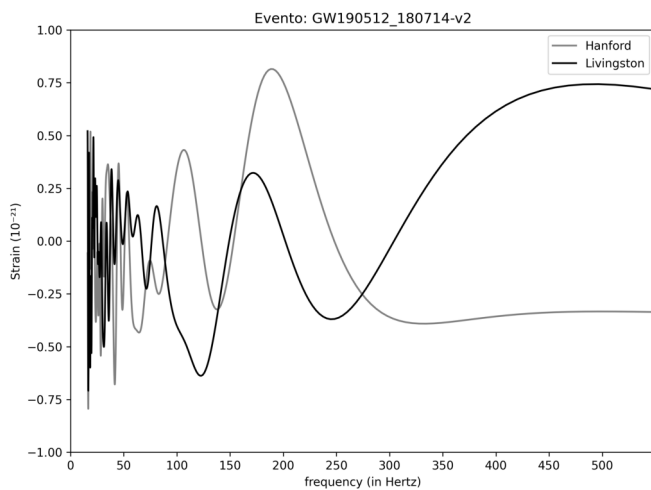
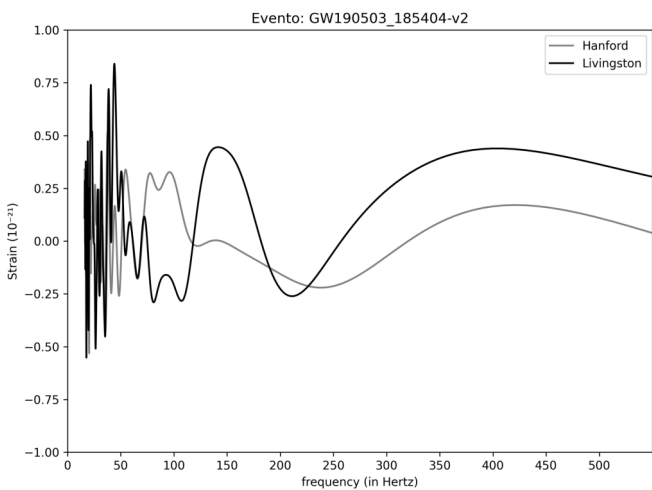
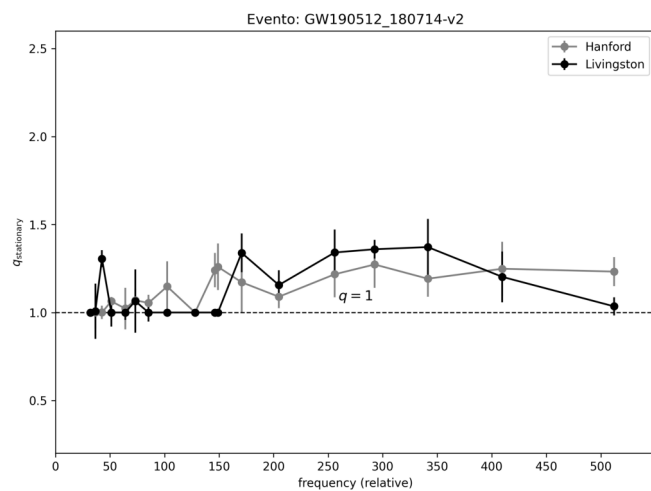
GW190426_190642-v1



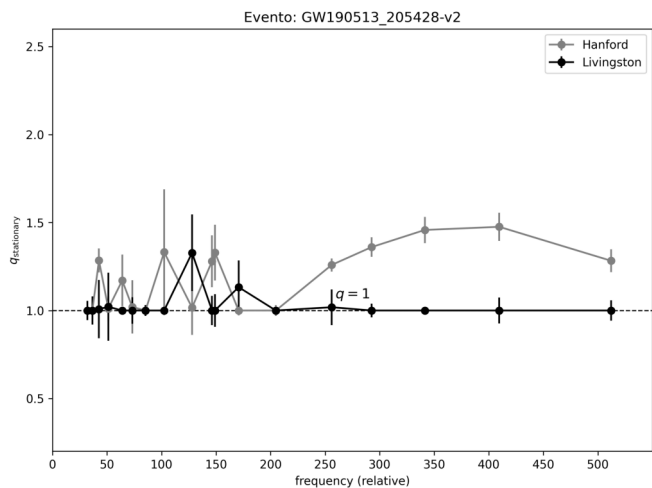
GW190503_185404-v2



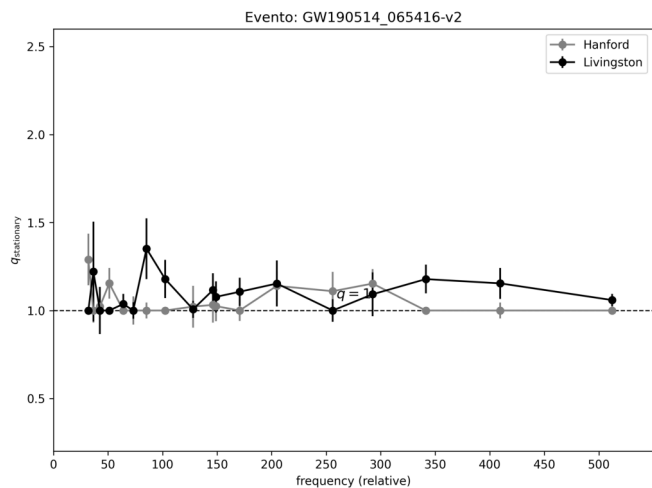
GW190512_180714-v2



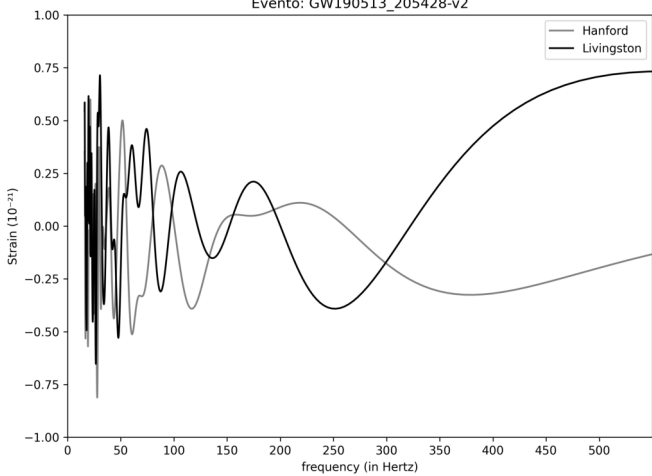
GW190513_205428-v2



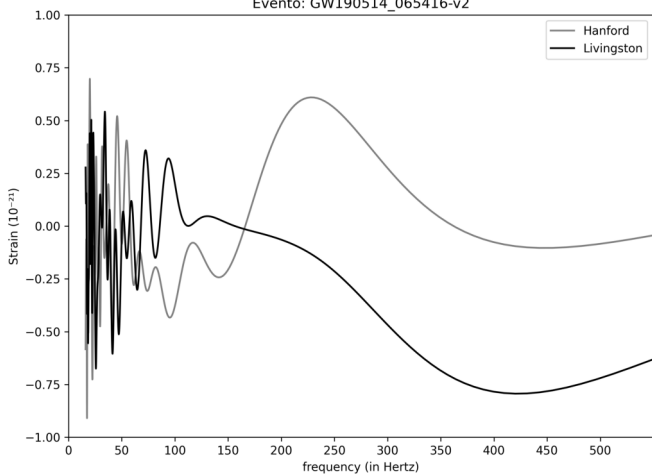
GW190514_065416-v2



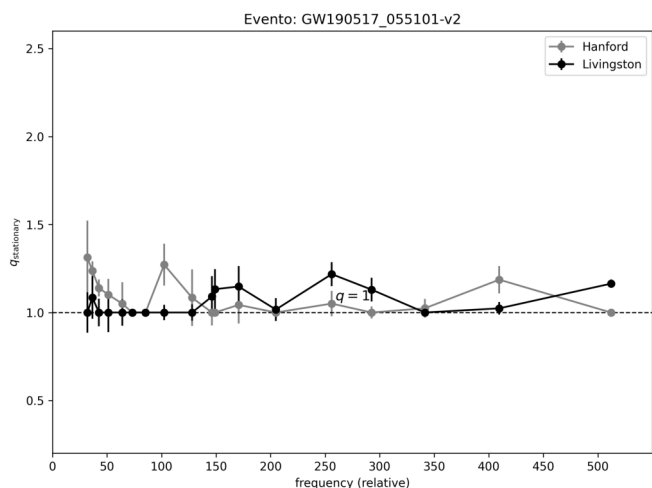
Evento: GW190513_205428-v2



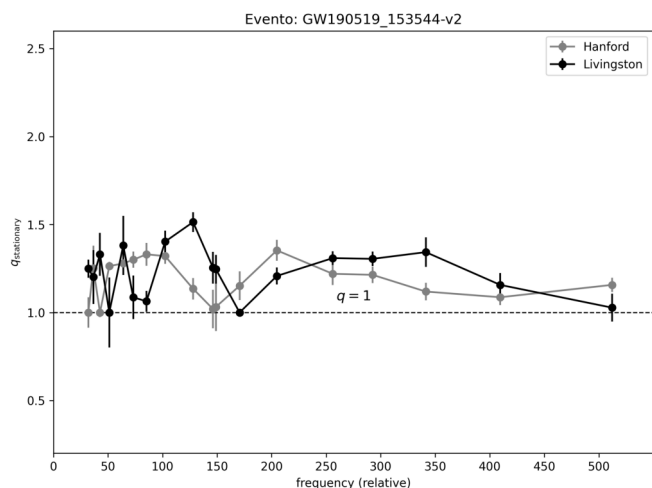
Evento: GW190514_065416-v2



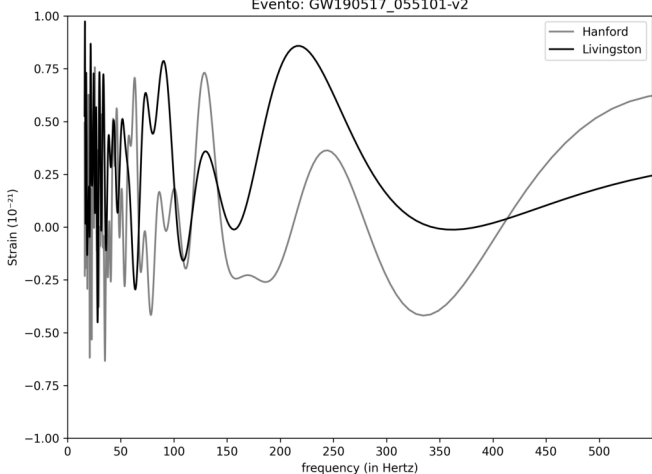
GW190517_055101-v2



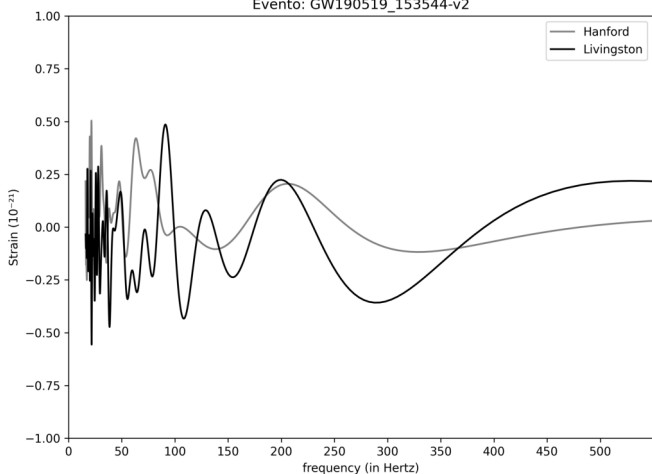
GW190519_153544-v2



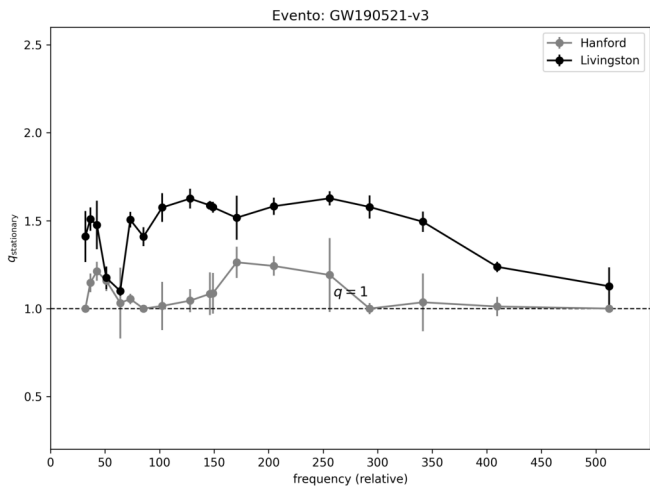
Evento: GW190517_055101-v2



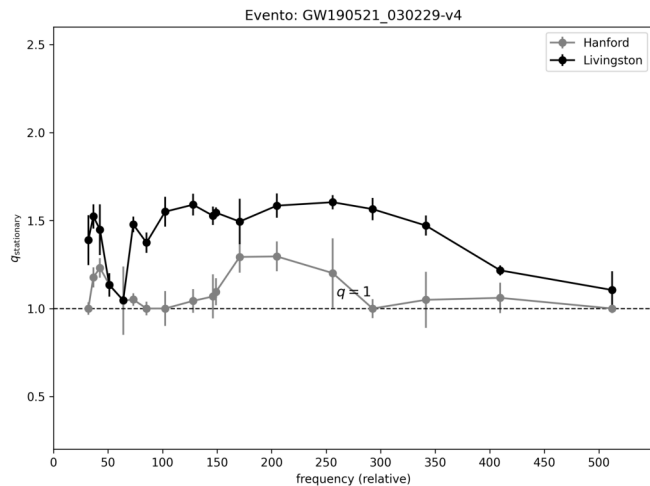
Evento: GW190519_153544-v2



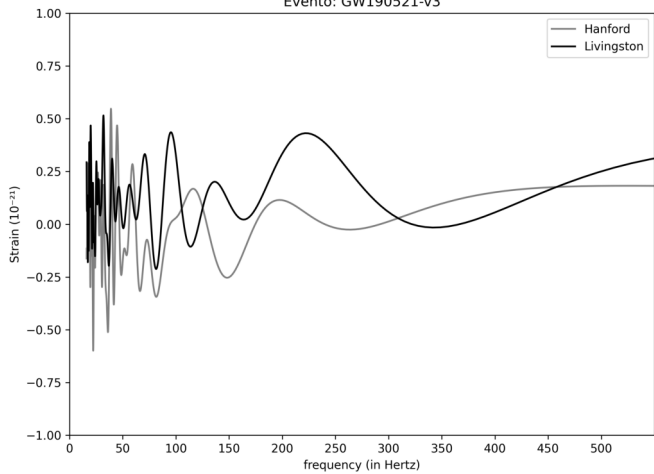
GW190521-v3



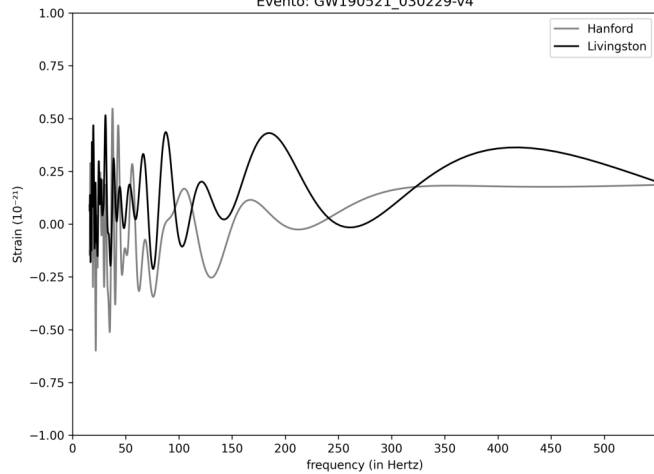
GW190521_030229-v4



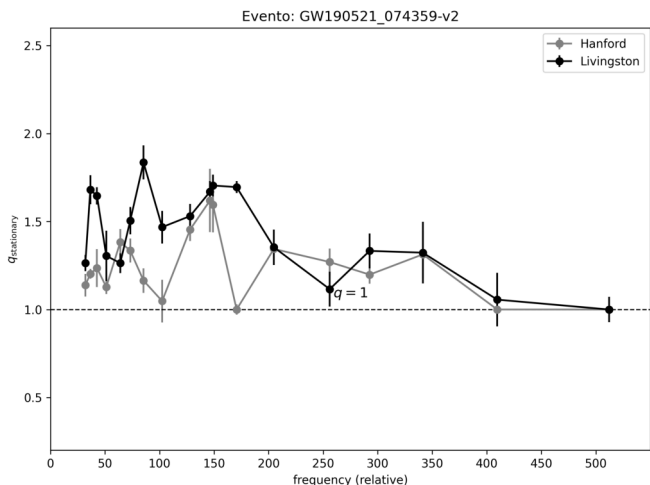
Evento: GW190521-v3



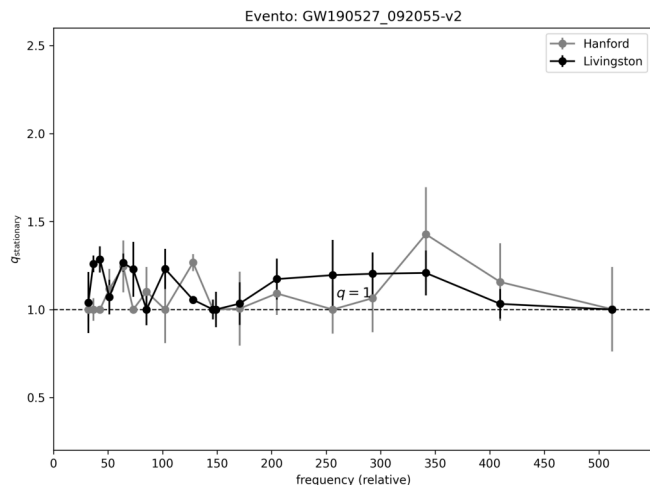
Evento: GW190521_030229-v4



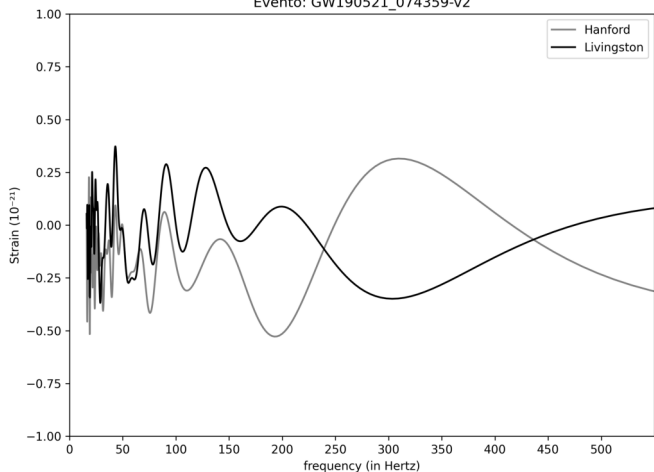
GW190521_074359-v2



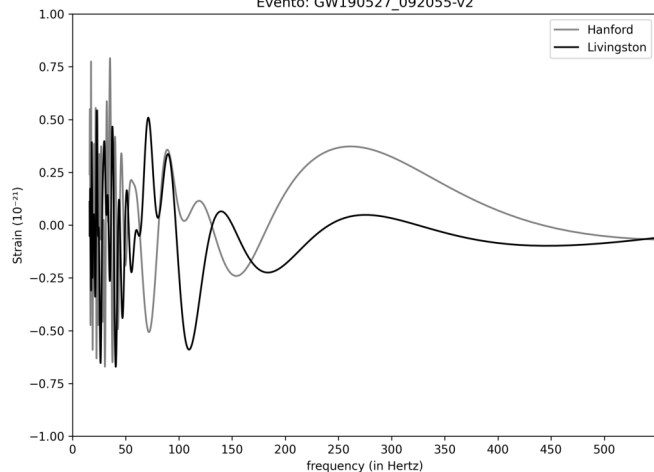
GW190527_092055-v2



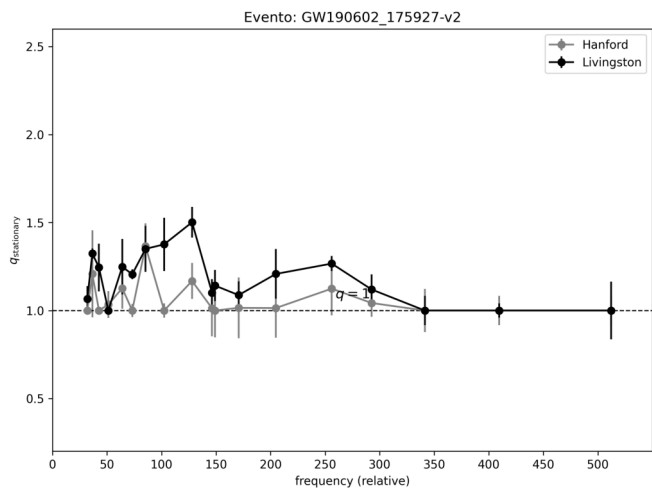
Evento: GW190521_074359-v2



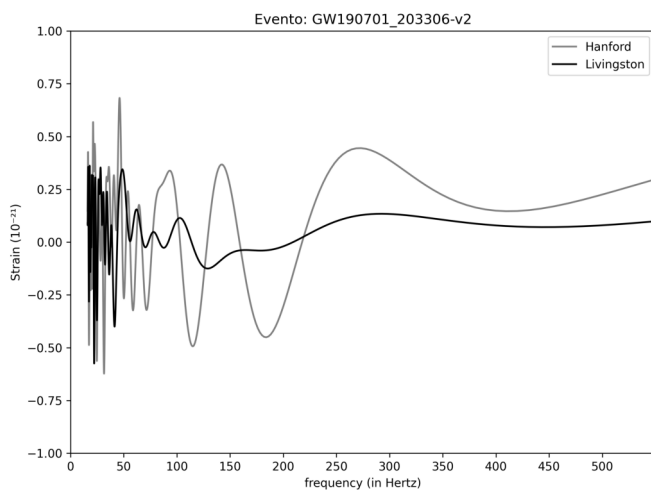
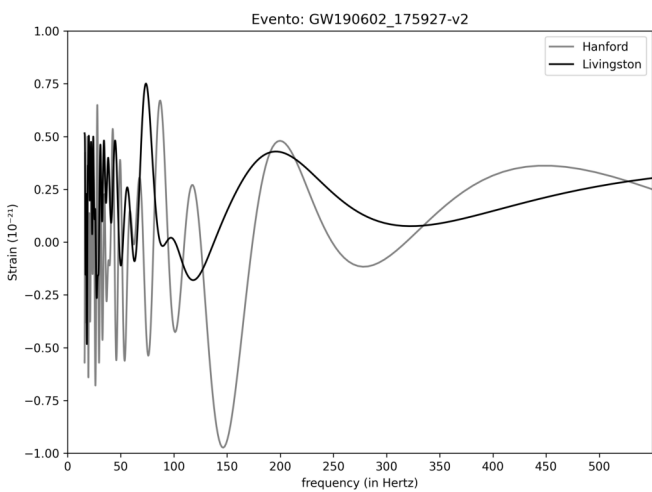
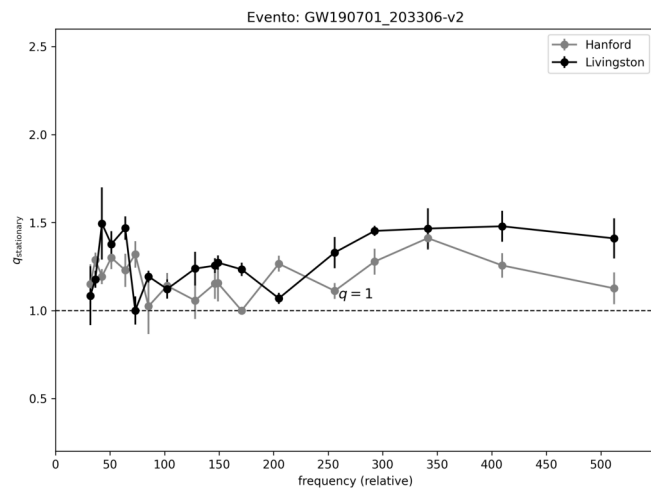
Evento: GW190527_092055-v2



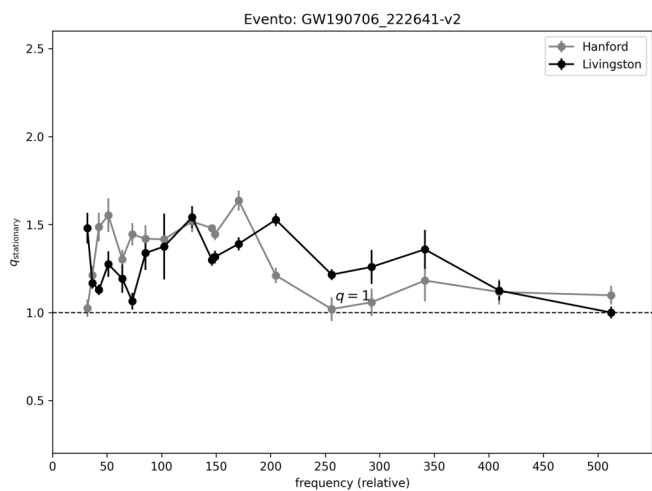
GW190602_175927-v2



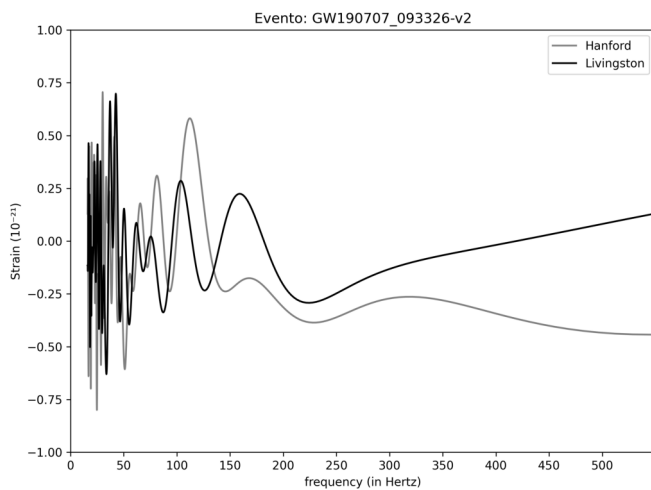
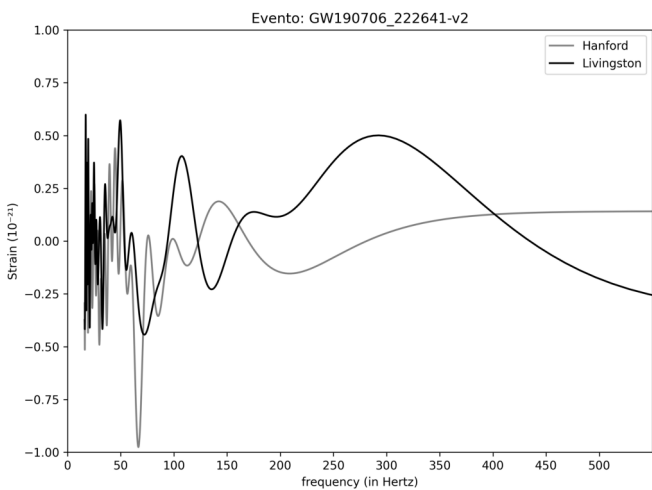
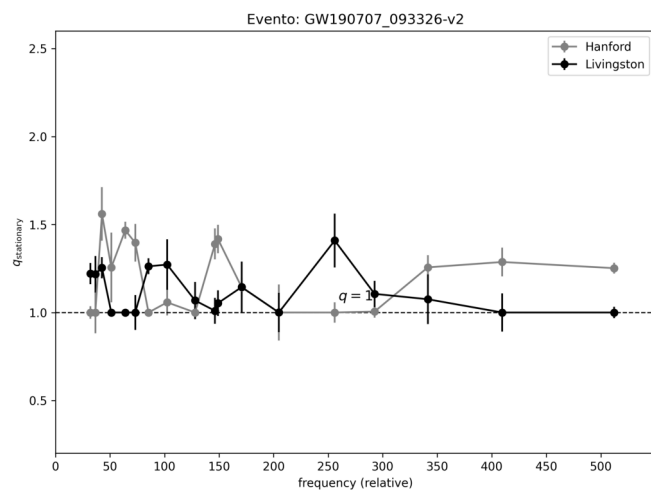
GW190701_203306-v2



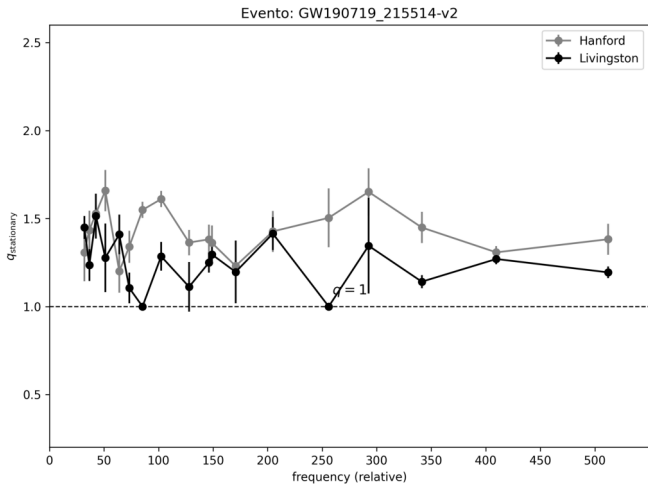
GW190706_222641-v2



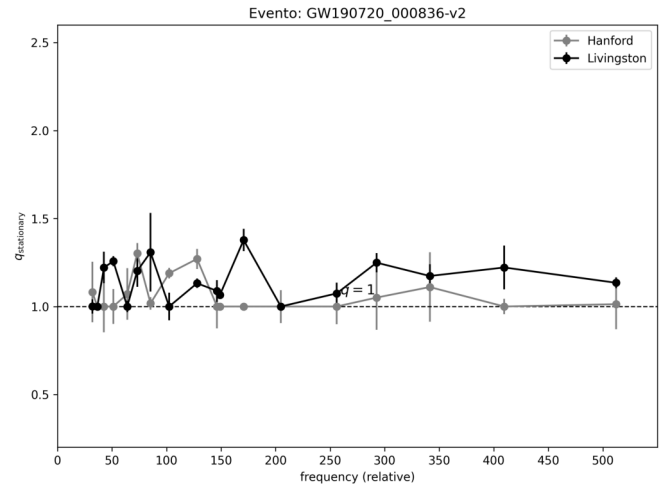
GW190707_093326-v2



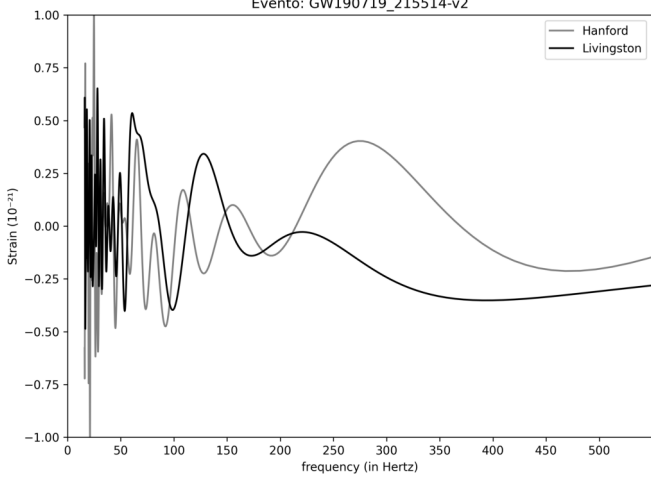
GW190719_215514-v2



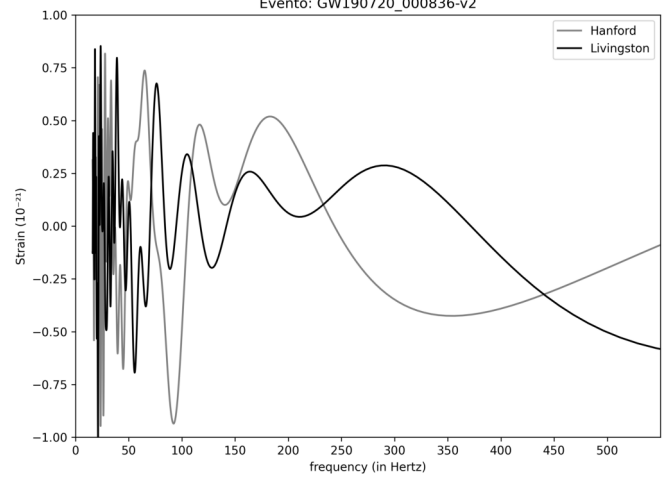
GW190720_000836-v2



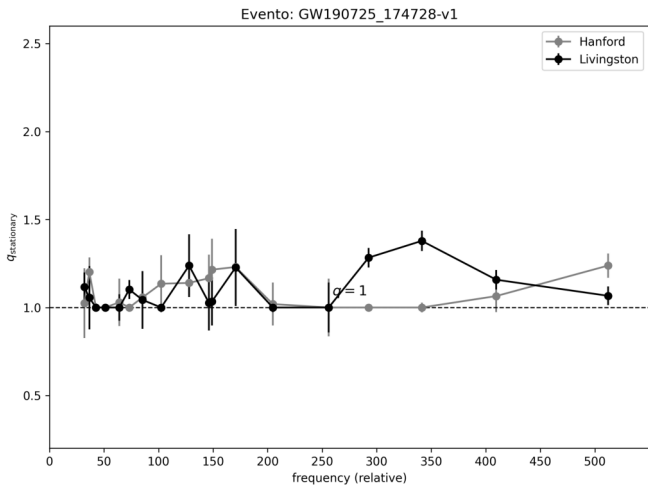
Evento: GW190719_215514-v2



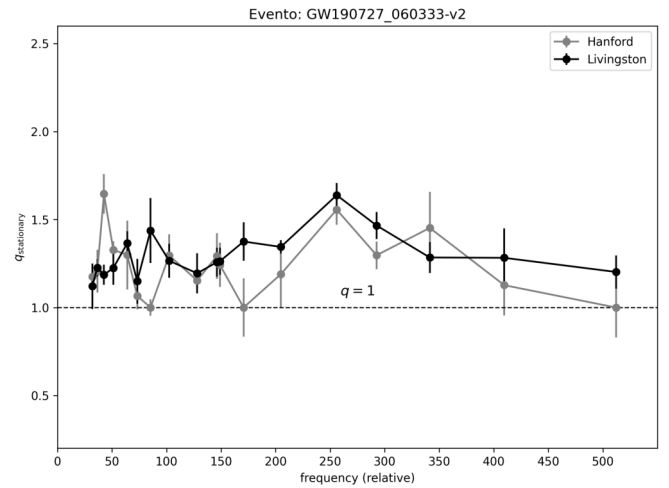
Evento: GW190720_000836-v2



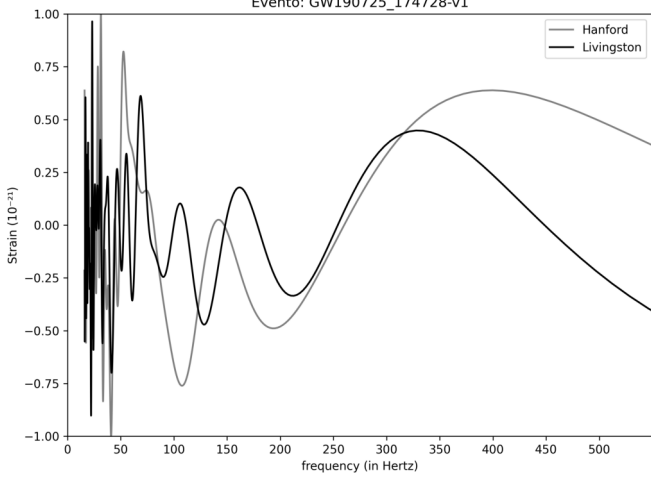
GW190725_174728-v1



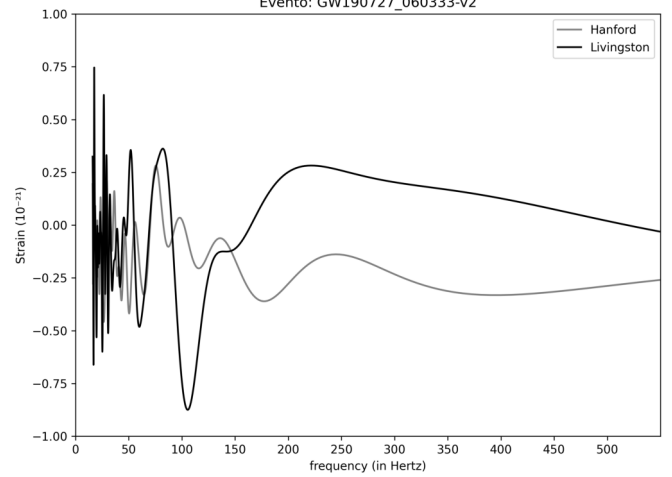
GW190727_060333-v2



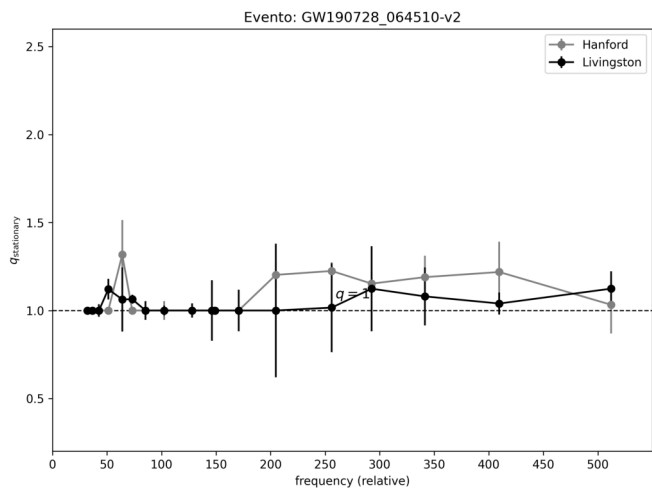
Evento: GW190725_174728-v1



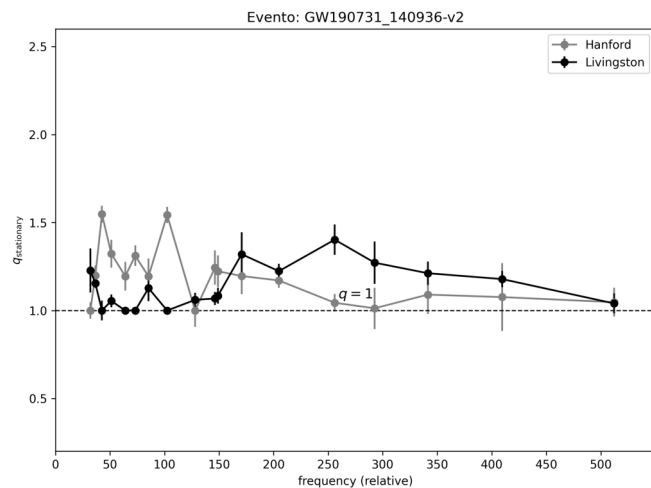
Evento: GW190727_060333-v2



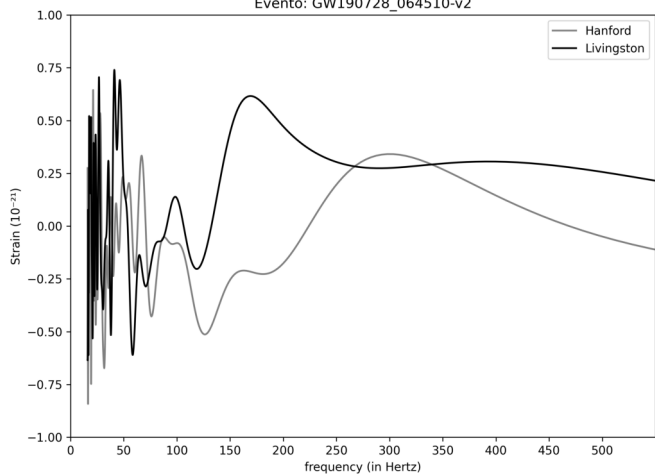
GW190728_064510-v2



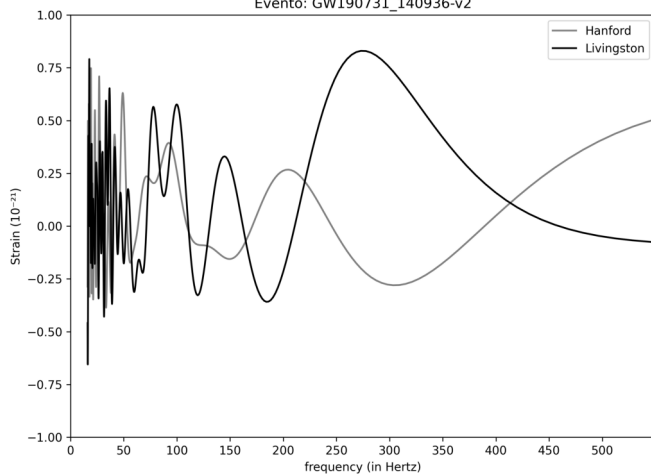
GW190731_140936-v2



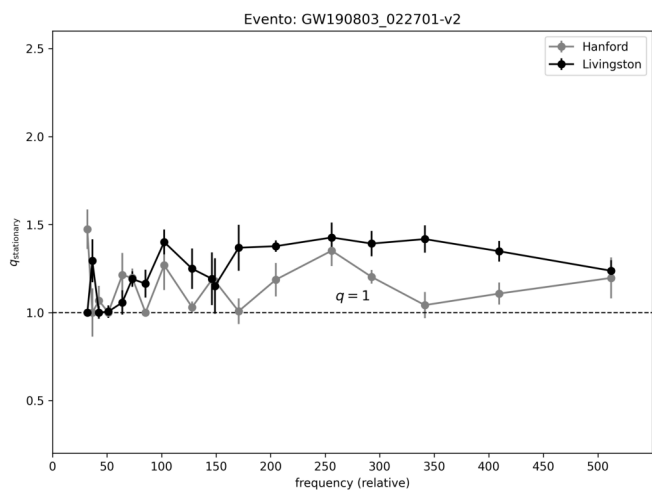
Evento: GW190728_064510-v2



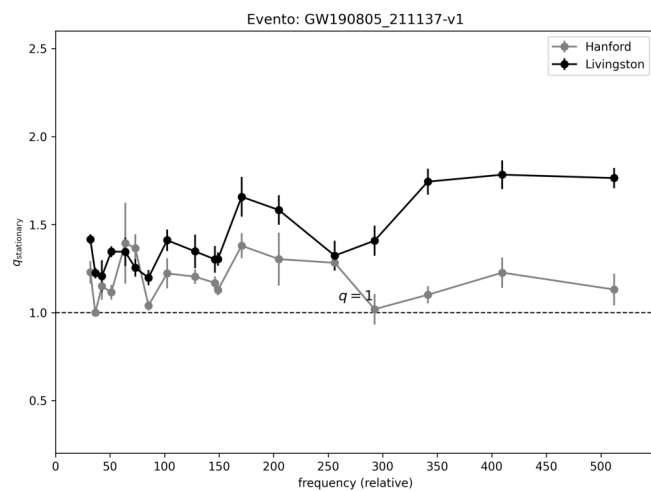
Evento: GW190731_140936-v2



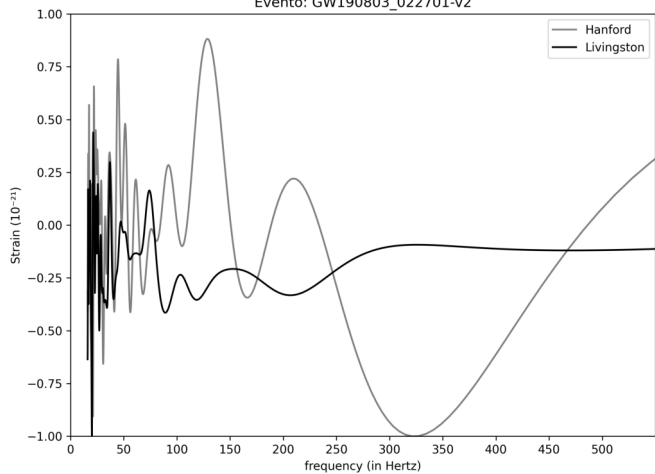
GW190803_022701-v2



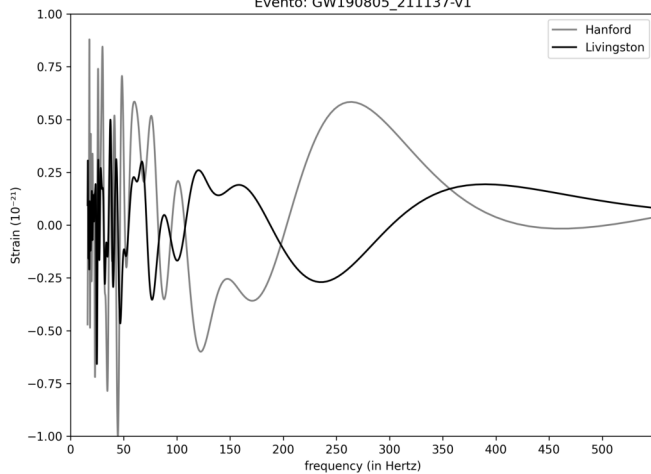
GW190805_211137-v1



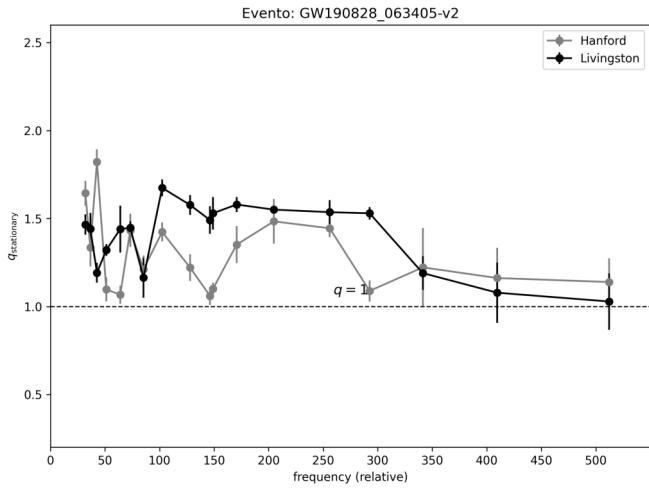
Evento: GW190803_022701-v2



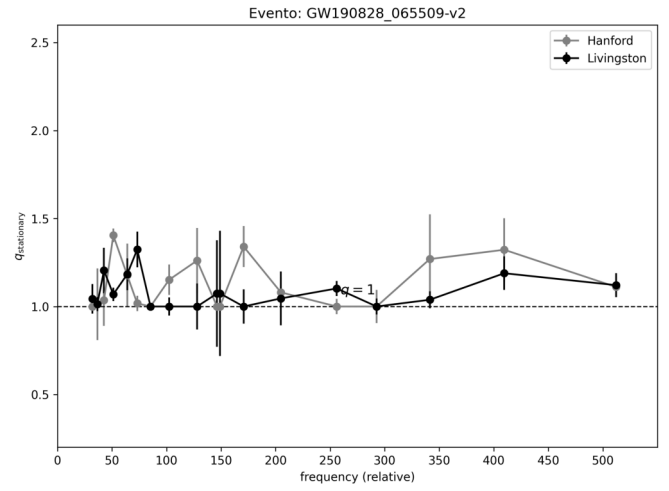
Evento: GW190805_211137-v1



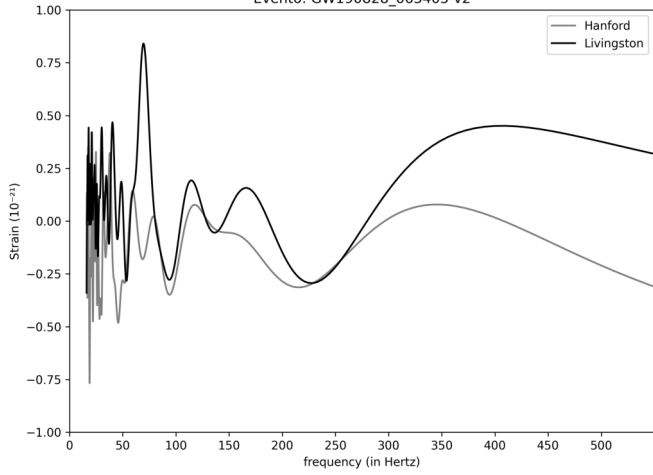
GW190828_063405-v2



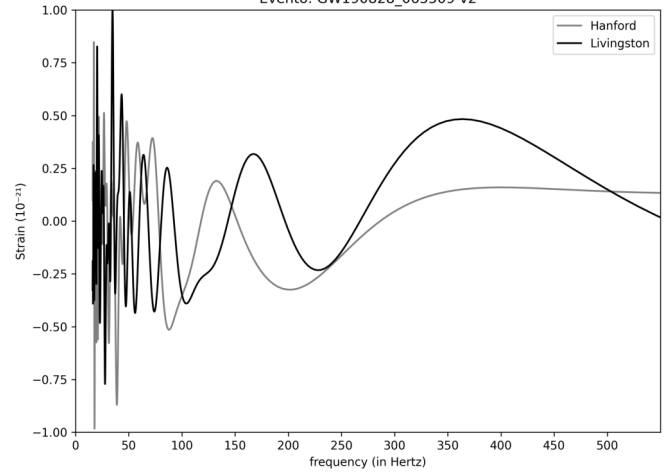
GW190828_065509-v2



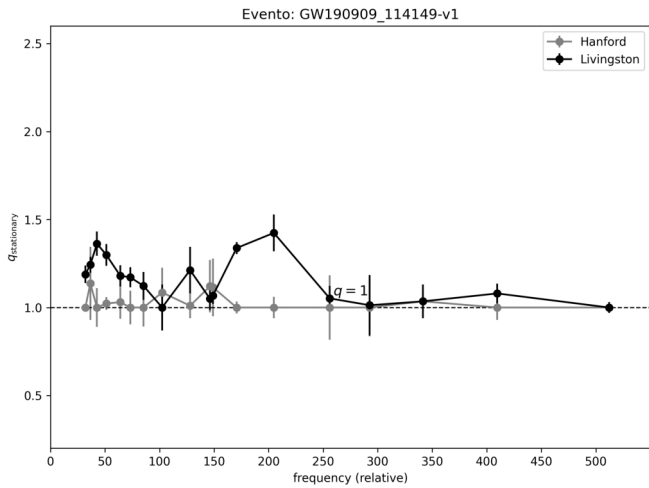
Evento: GW190828_063405-v2



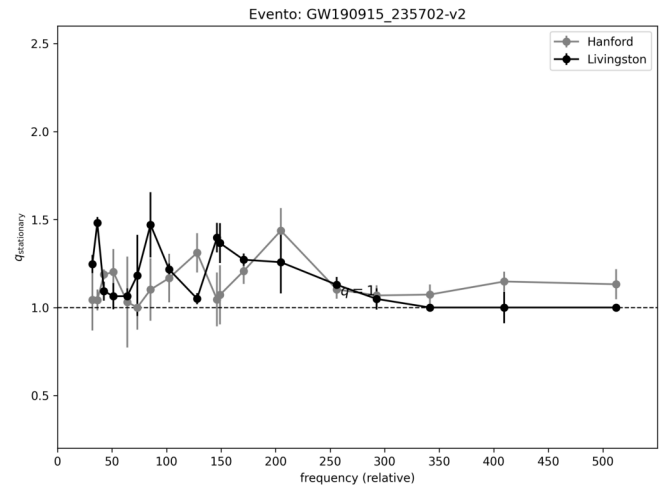
Evento: GW190828_065509-v2



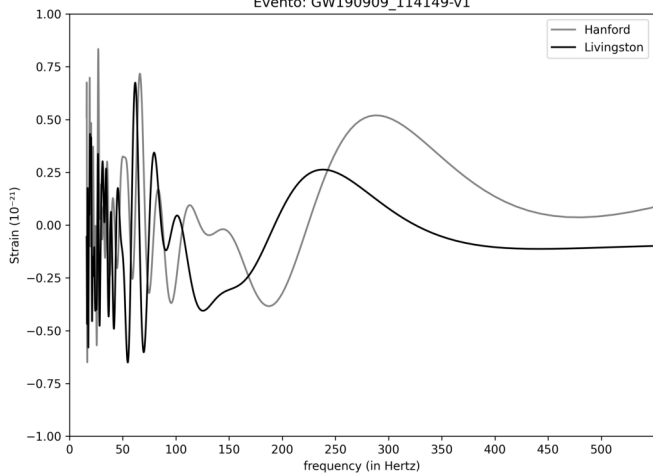
GW190909_114149-v1



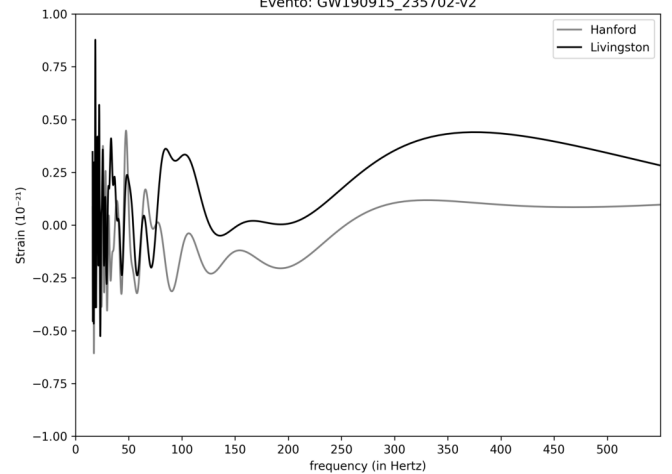
GW190915_235702-v2



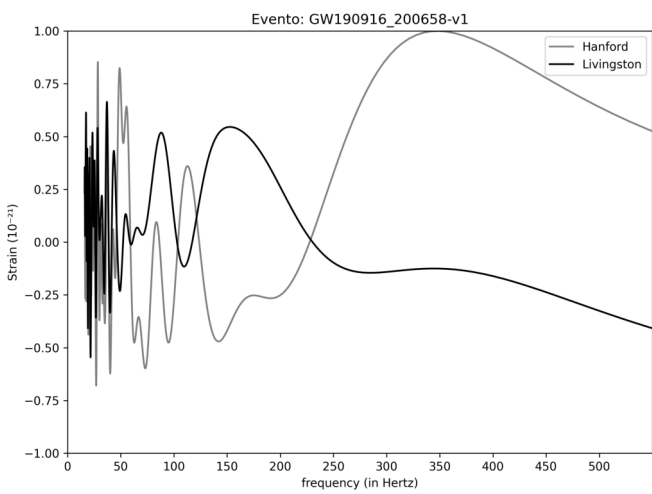
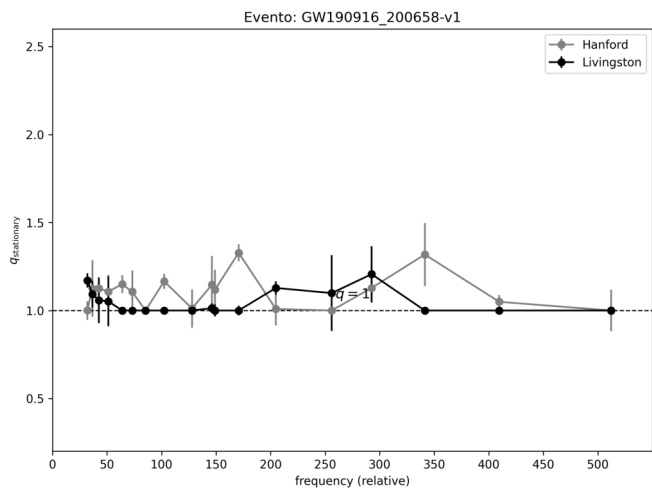
Evento: GW190909_114149-v1



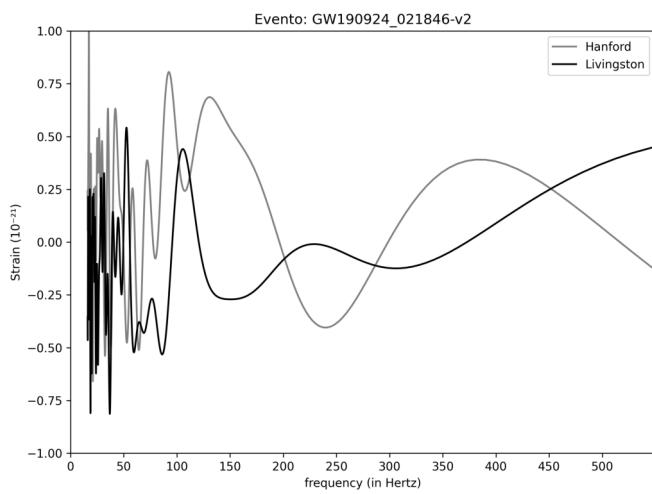
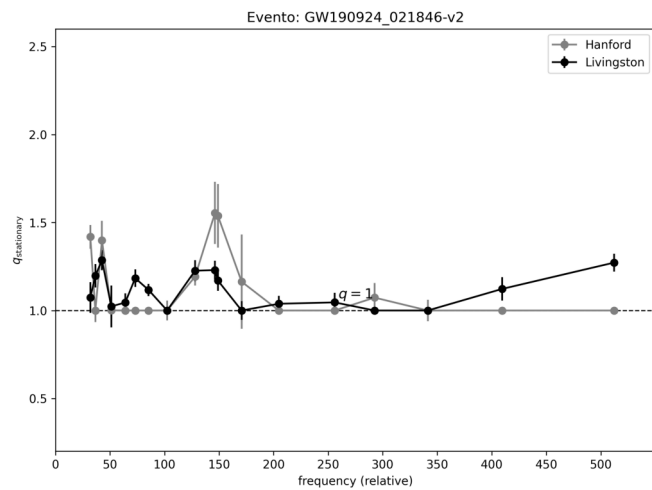
Evento: GW190915_235702-v2



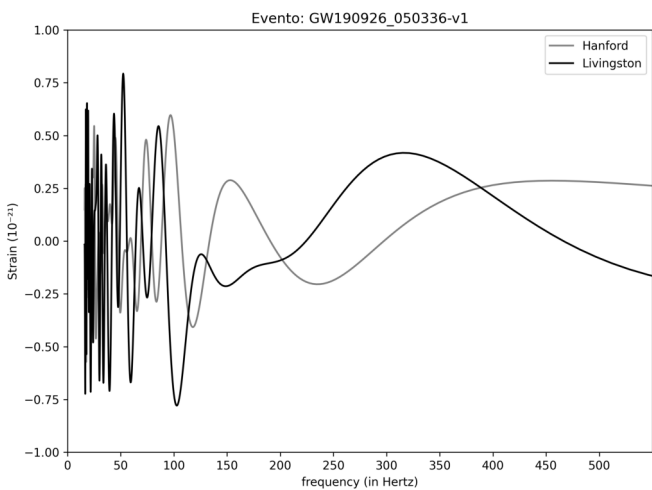
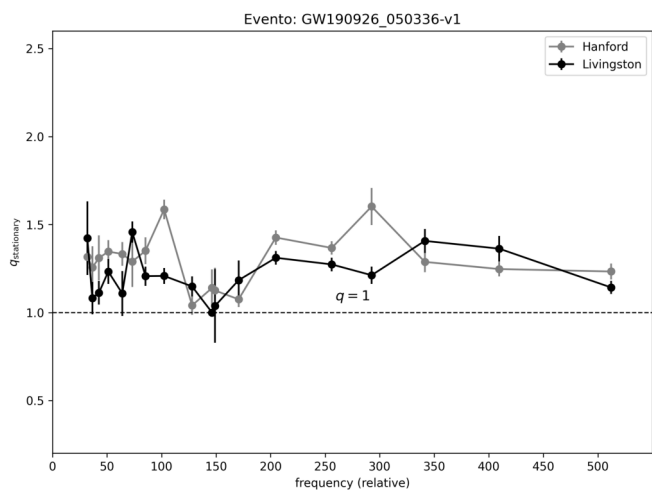
GW190916_200658-v1



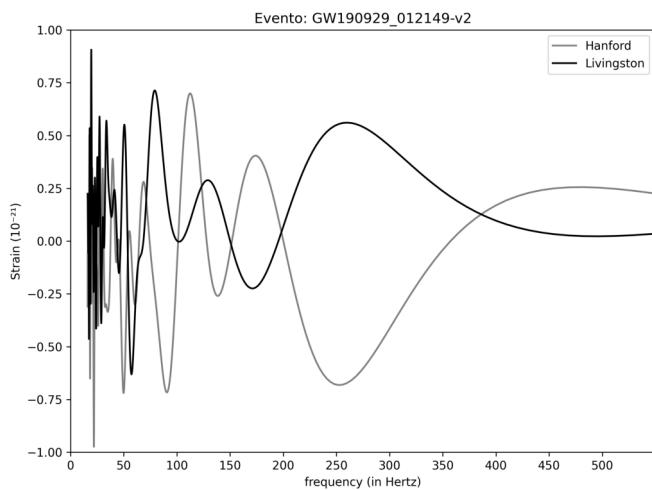
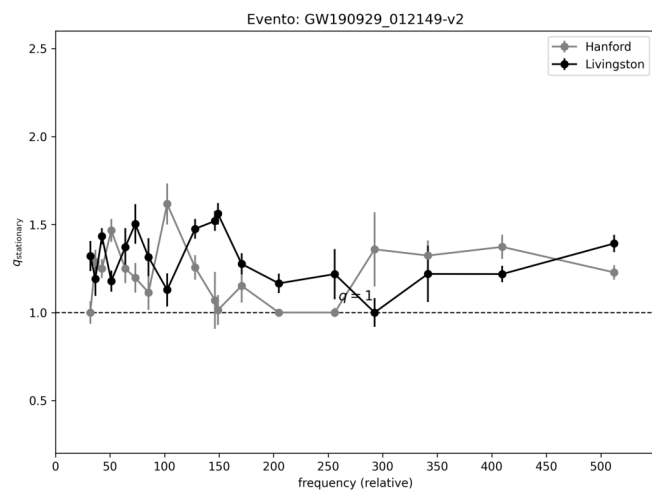
GW190924_021846-v2



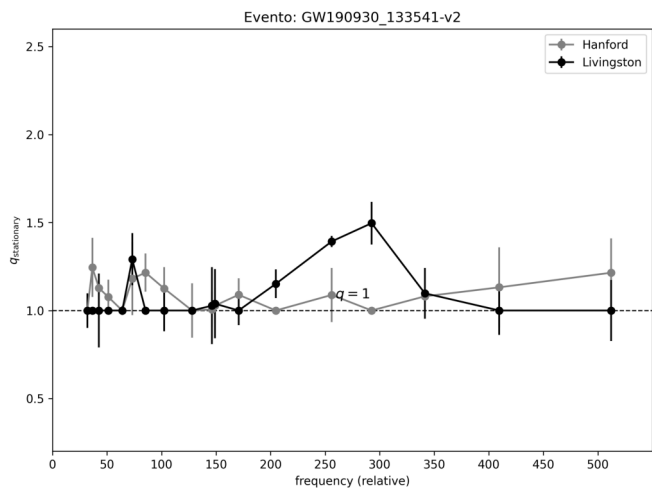
GW190926_050336-v1



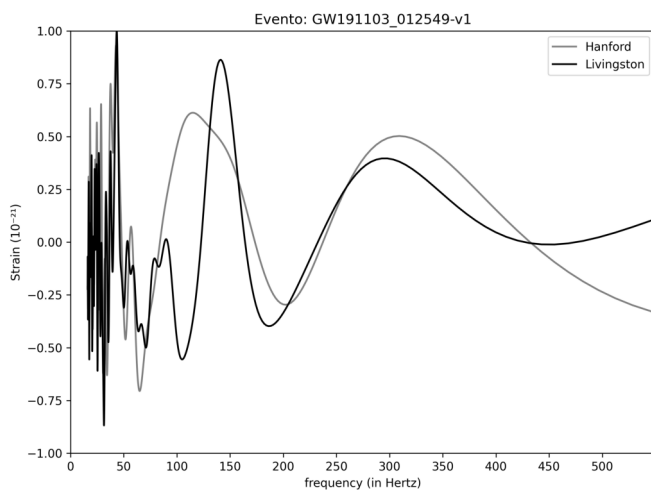
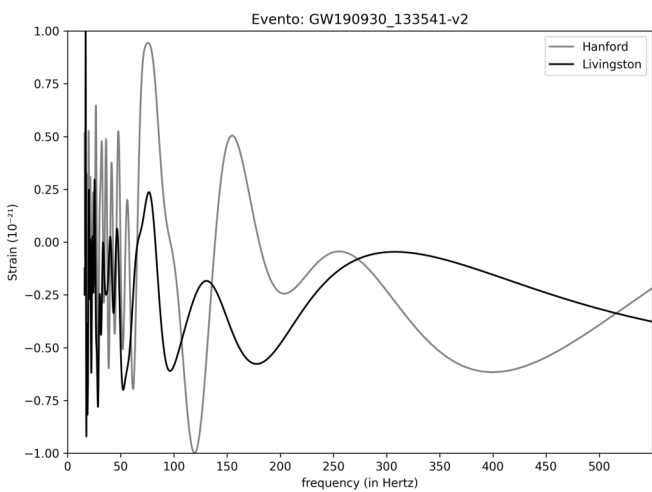
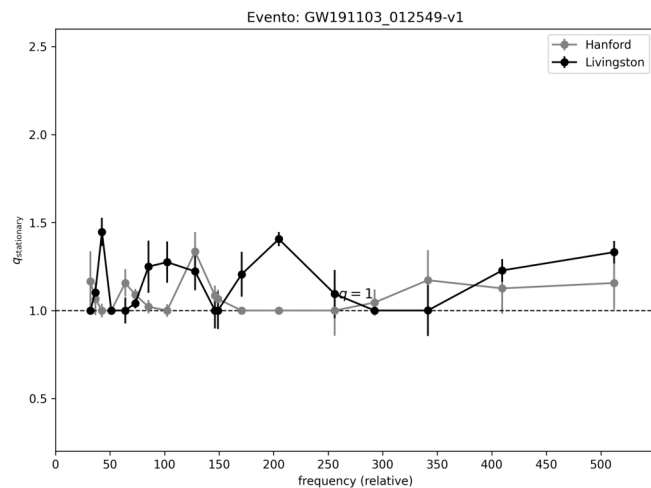
GW190929_012149-v2



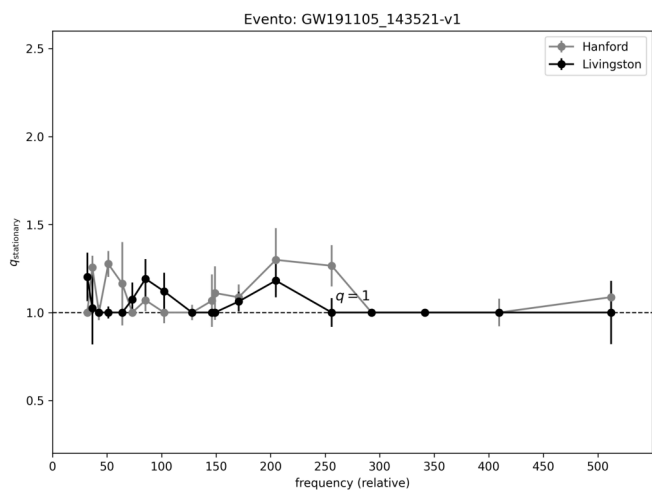
GW190930_133541-v2



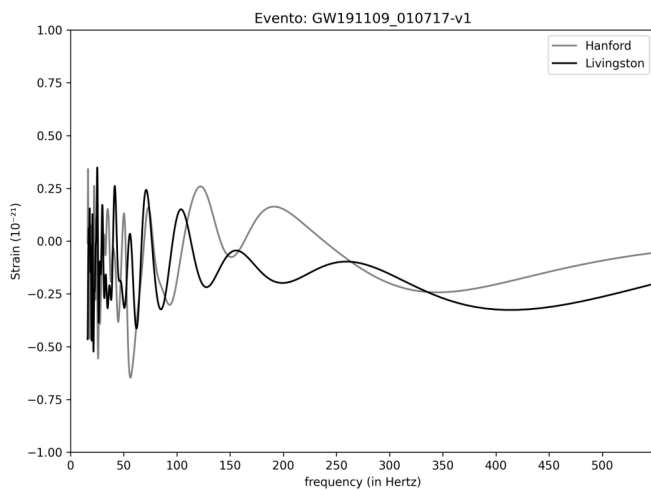
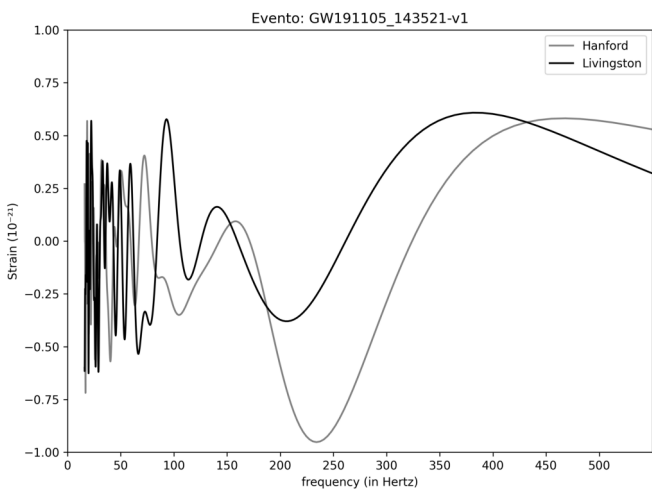
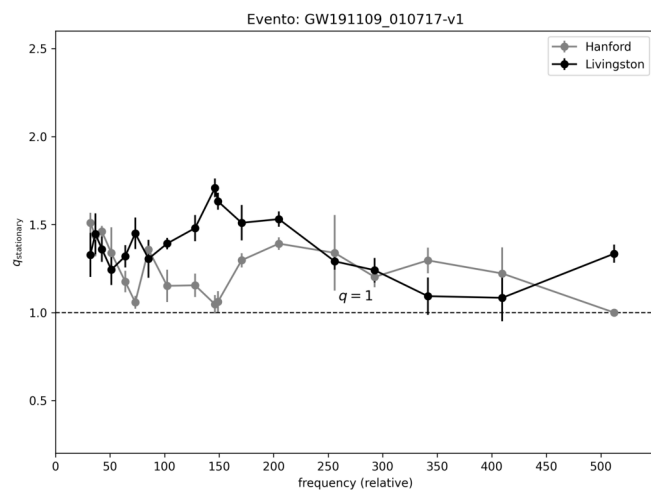
GW191103_012549-v1



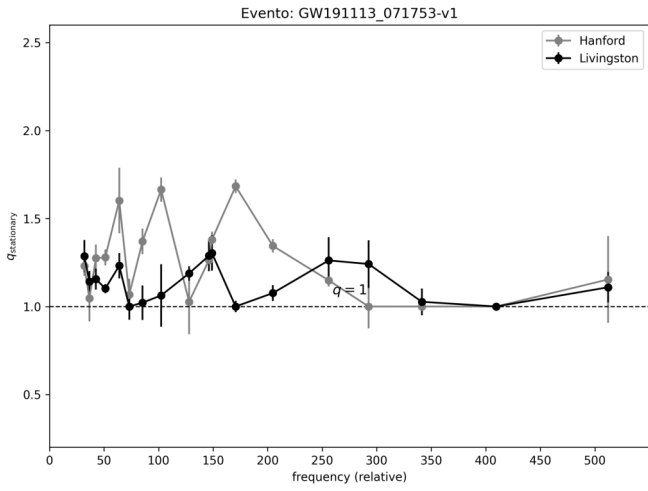
GW191105_143521-v1



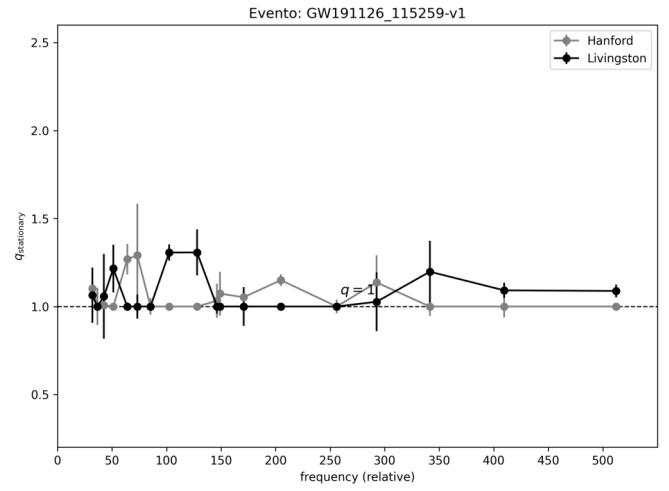
GW191109_010717-v1



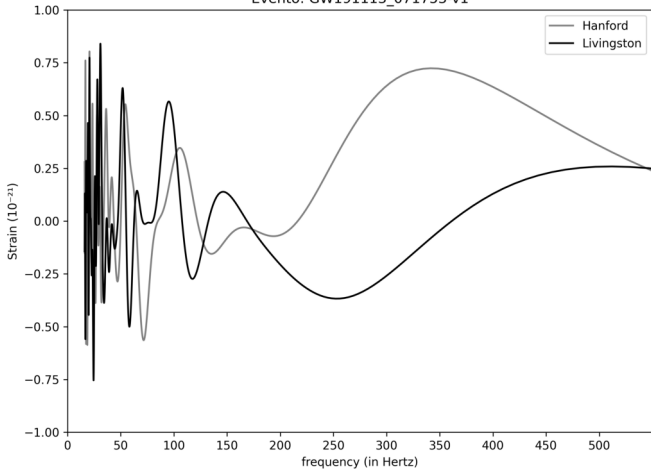
GW191113_071753-v1



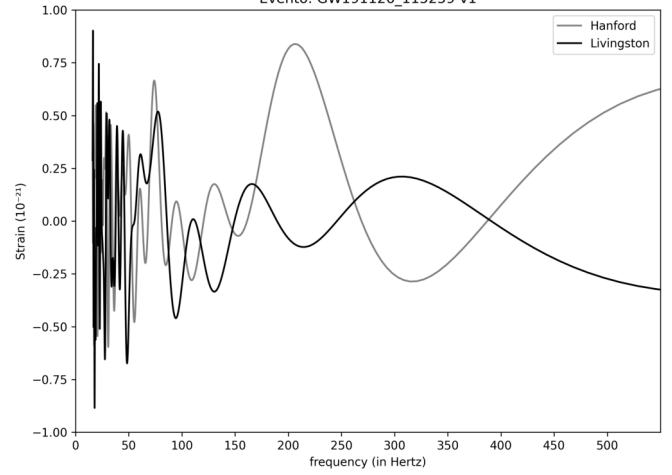
GW191126_115259-v1



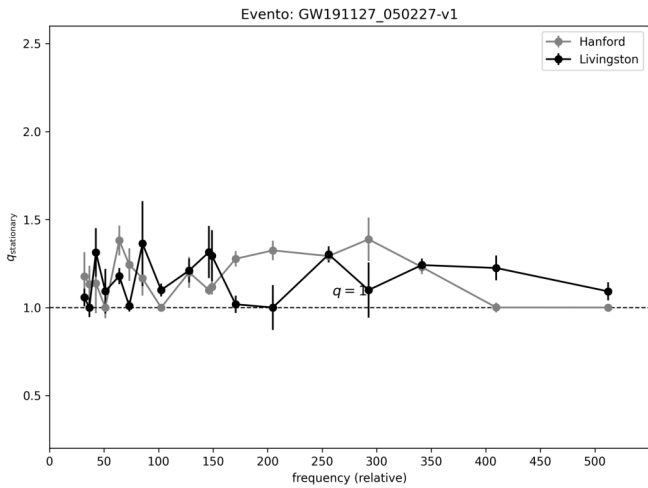
Evento: GW191113_071753-v1



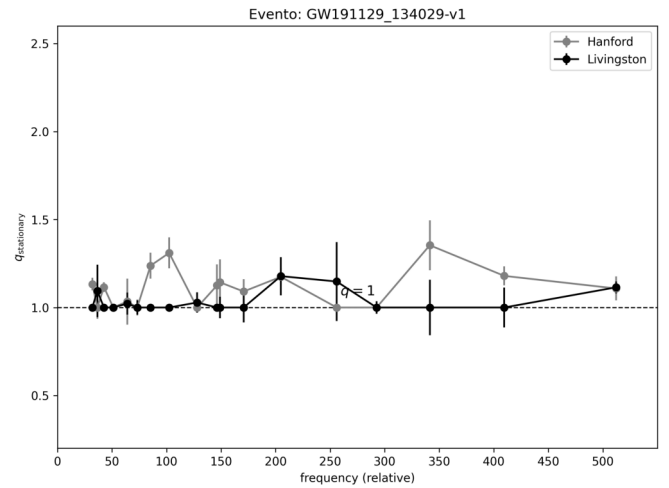
Evento: GW191126_115259-v1



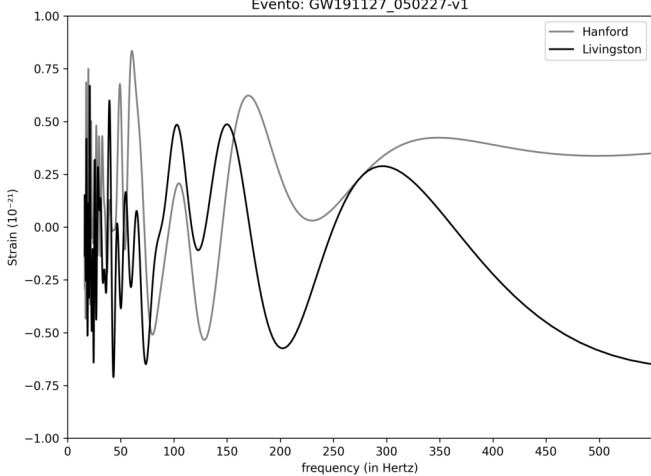
GW191127_050227-v1



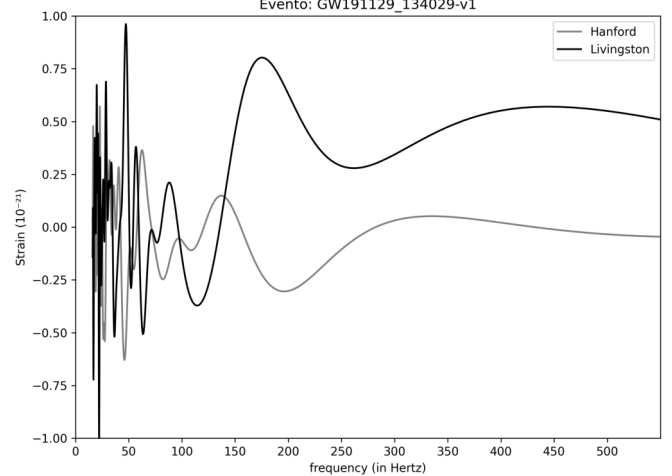
GW191129_134029-v1



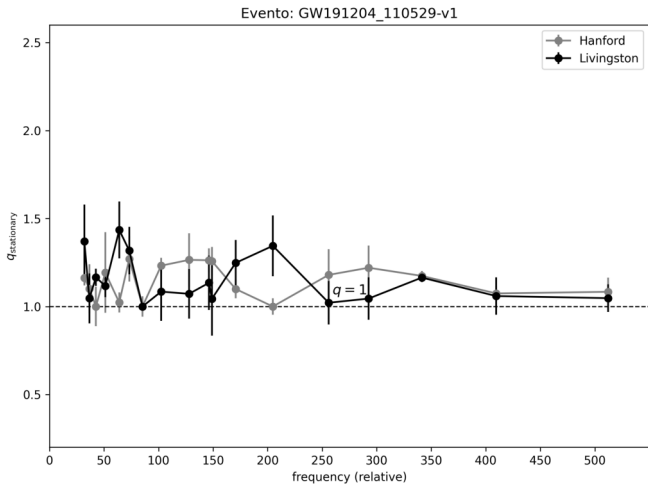
Evento: GW191127_050227-v1



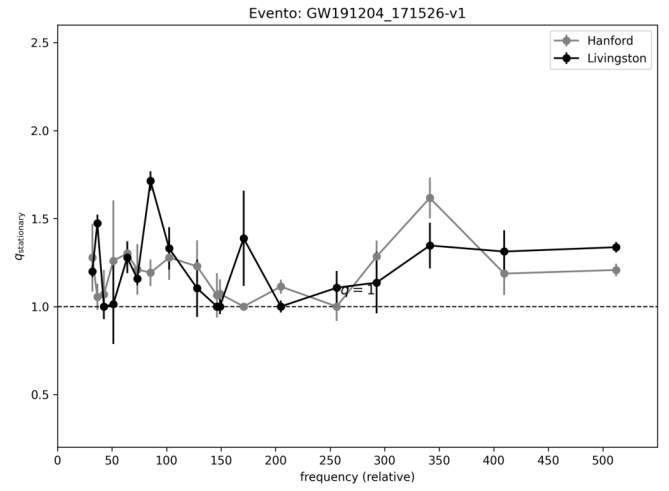
Evento: GW191129_134029-v1



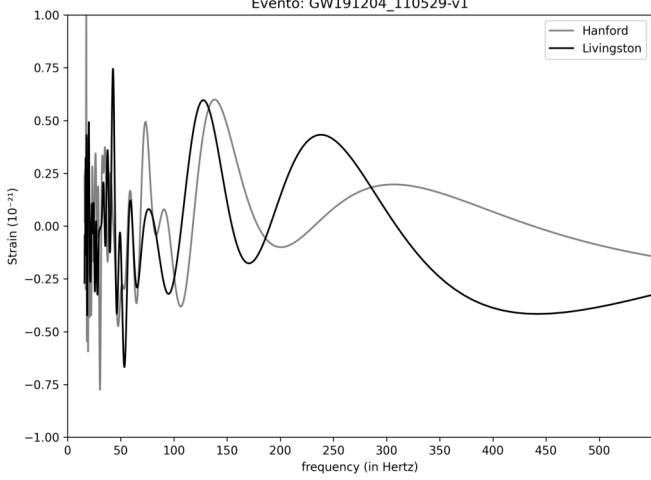
GW191204_110529-v1



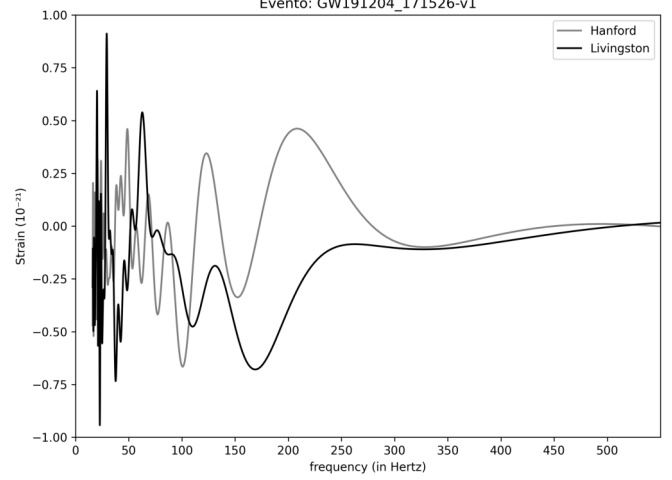
GW191204_171526-v1



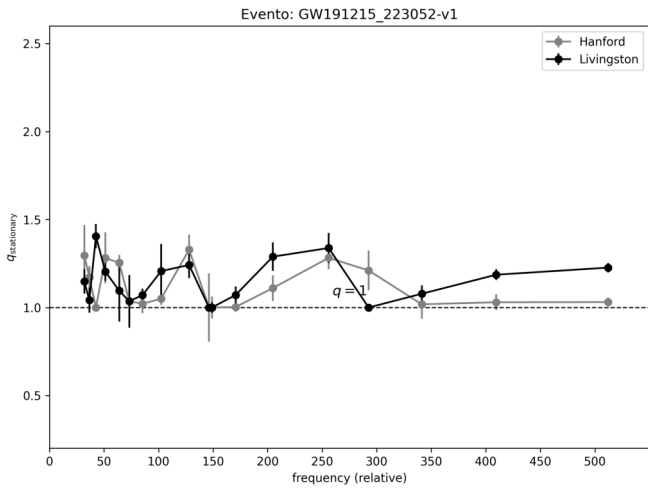
Evento: GW191204_110529-v1



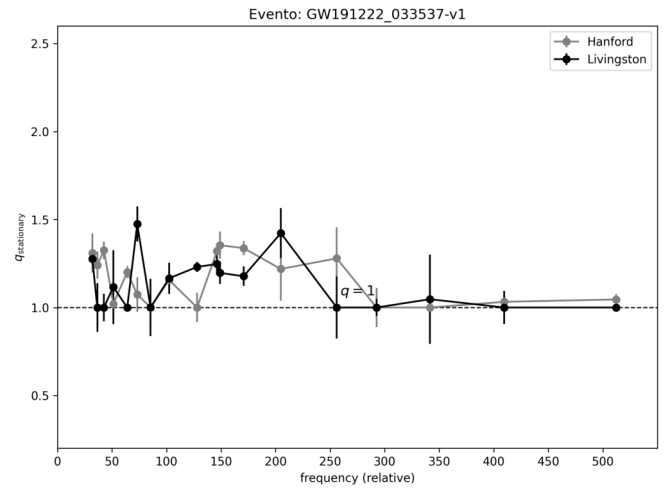
Evento: GW191204_171526-v1



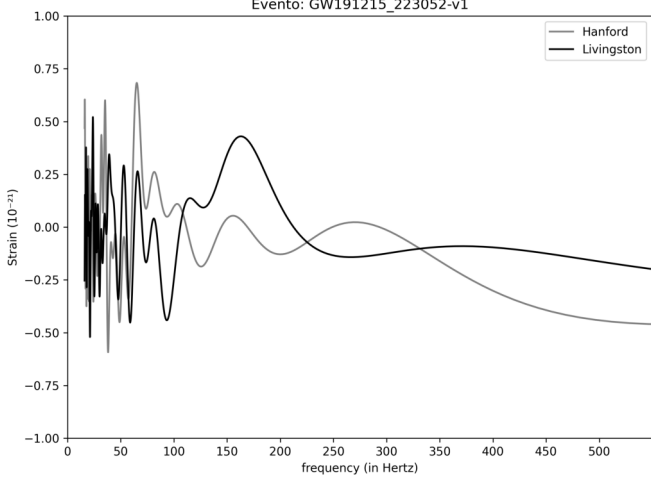
GW191215_223052-v1



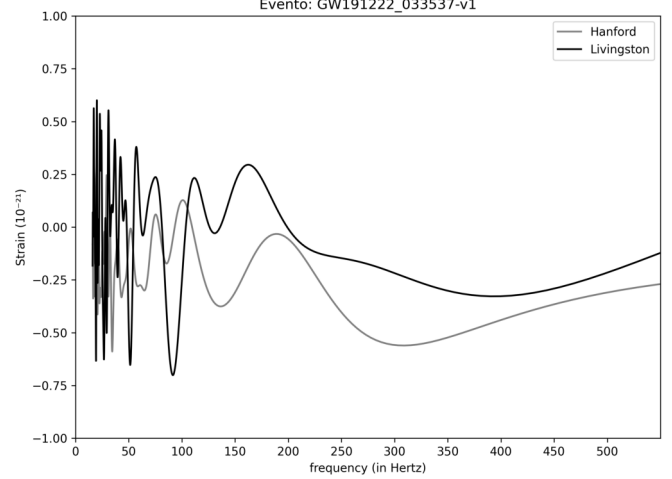
GW191222_033537-v1



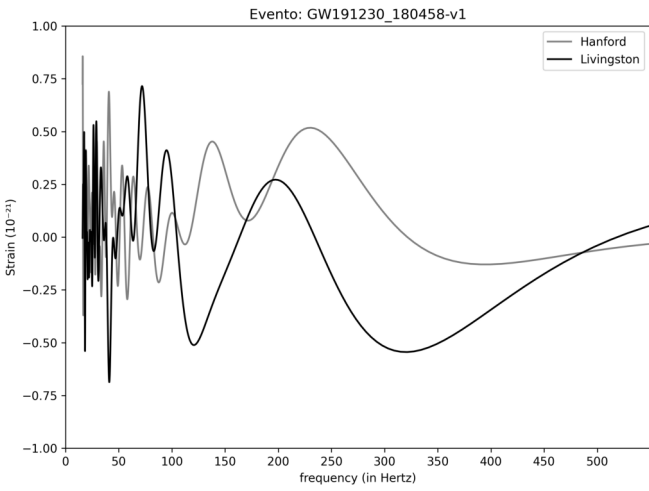
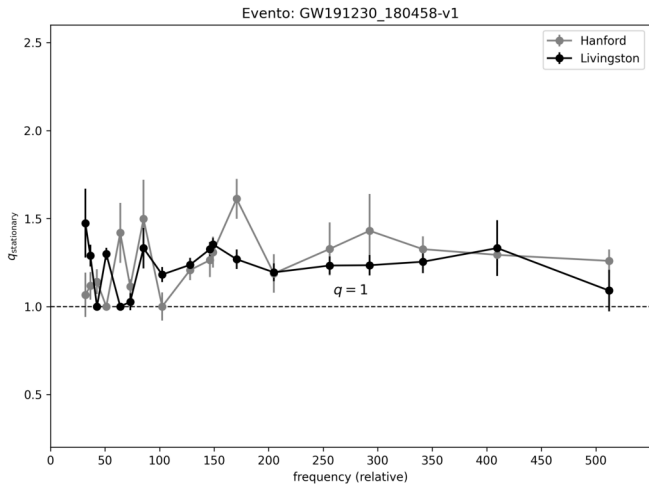
Evento: GW191215_223052-v1



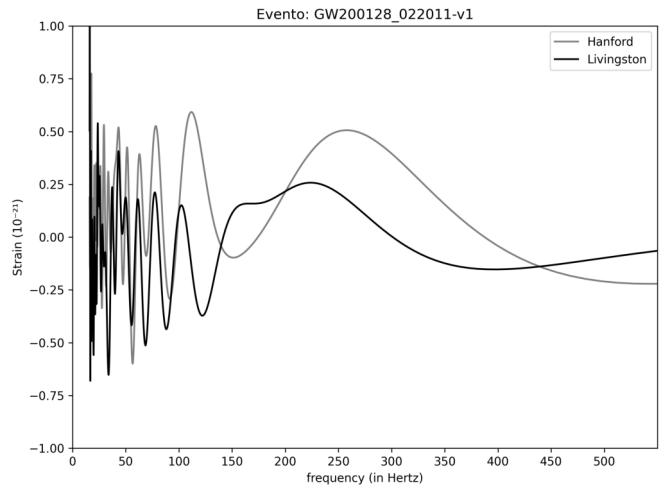
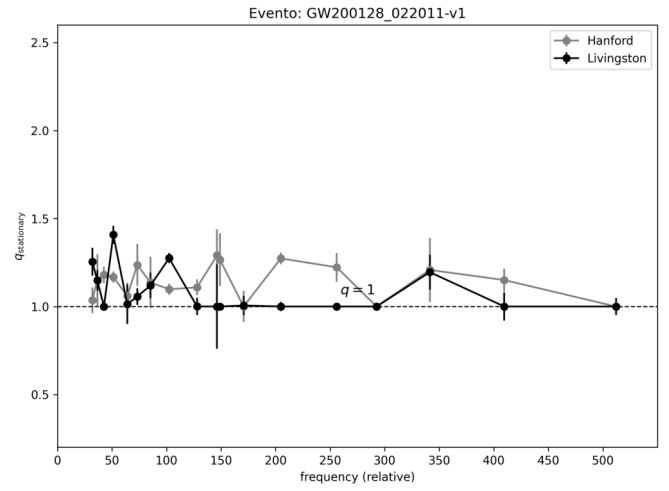
Evento: GW191222_033537-v1



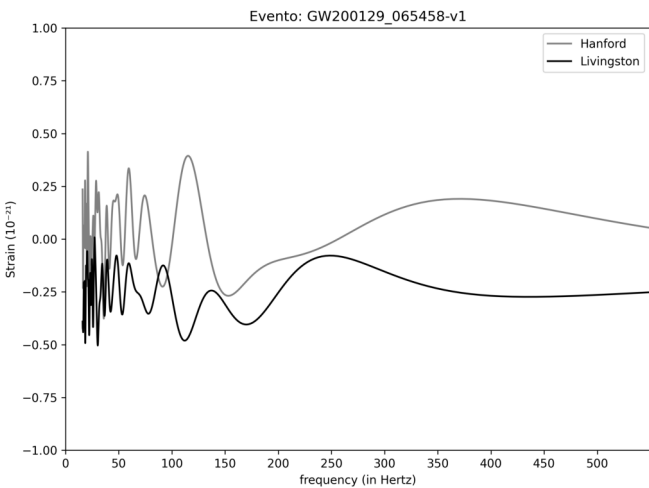
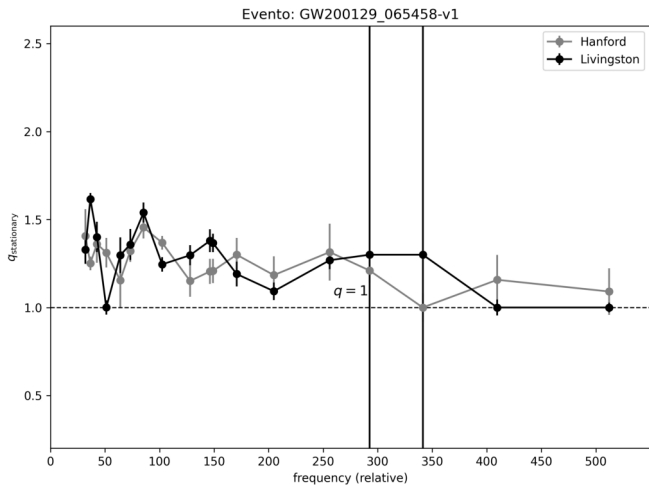
GW191230_180458-v1



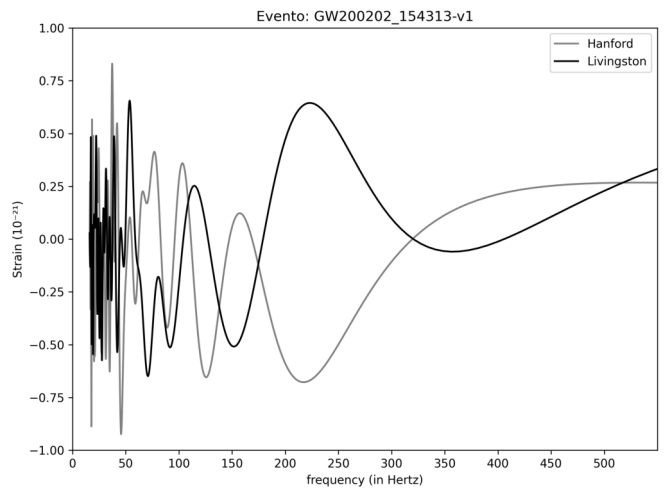
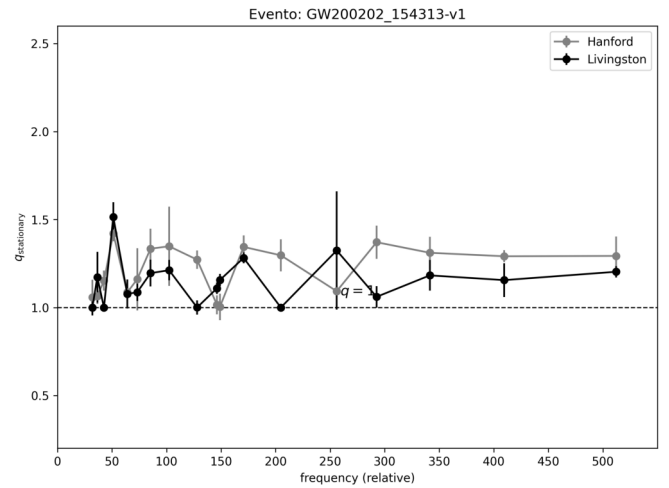
GW200128_022011-v1



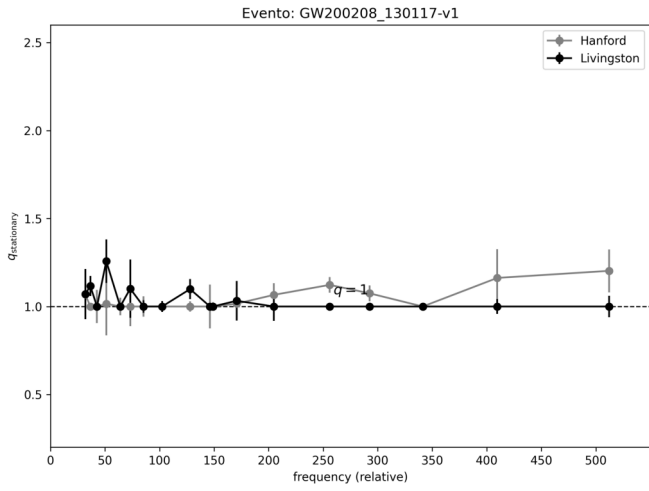
GW200129_065458-v1



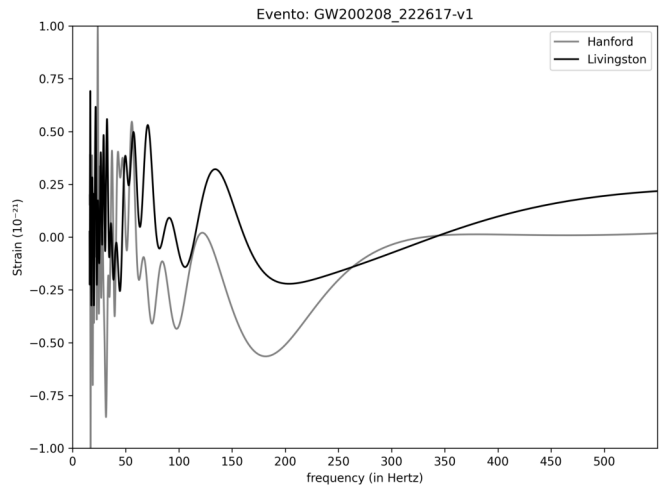
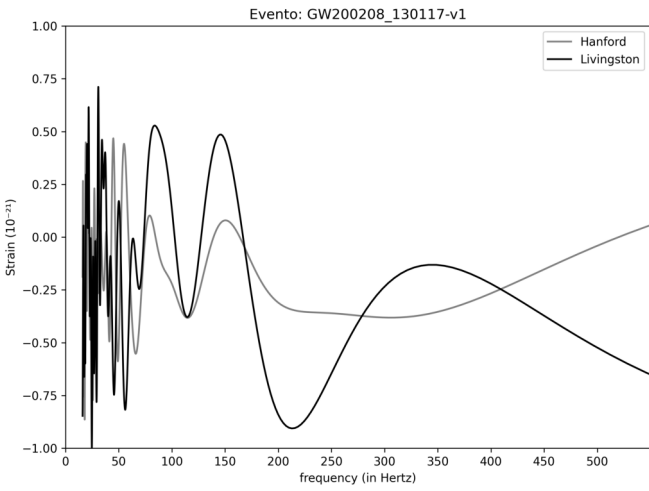
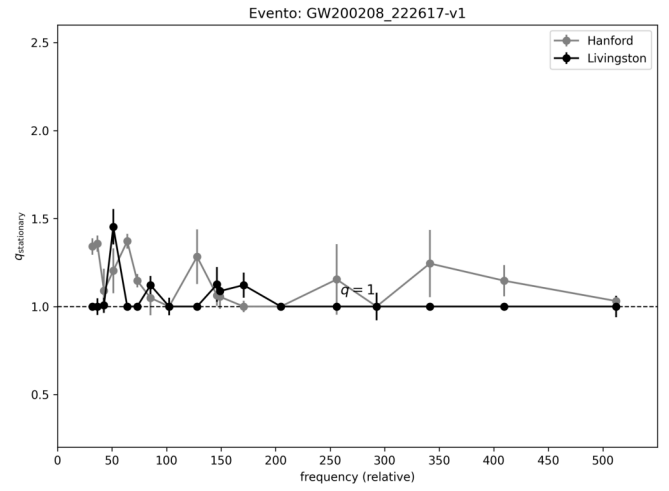
GW200202_154313-v1



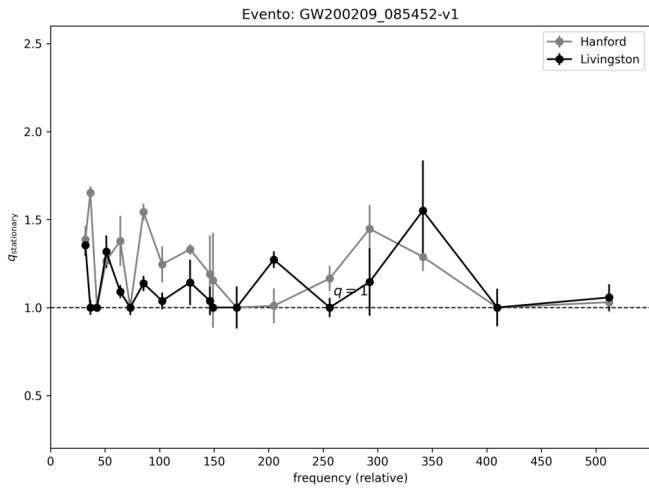
GW200208_130117-v1



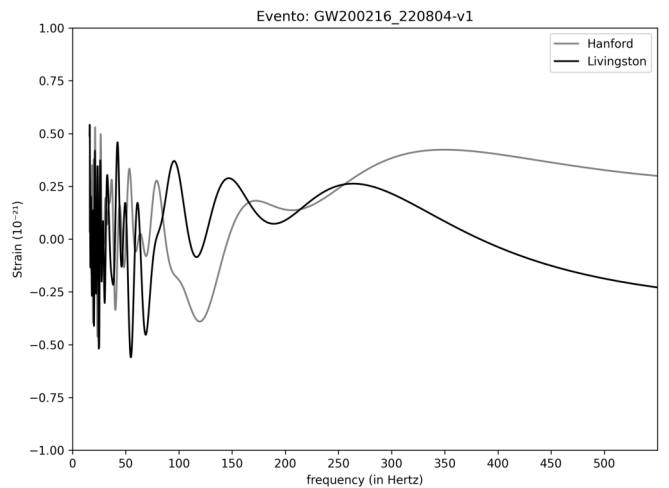
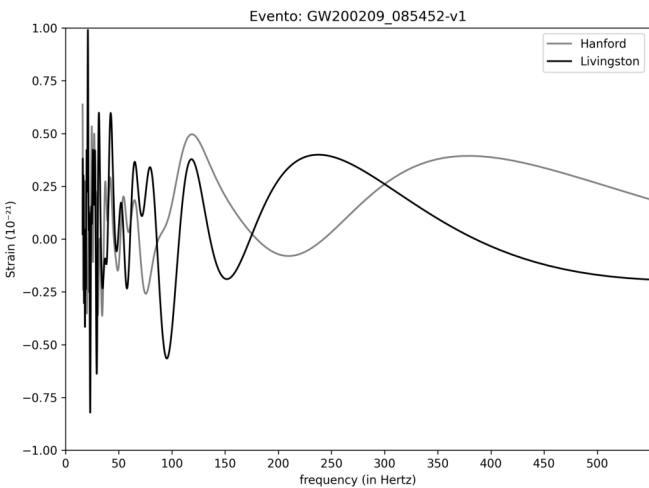
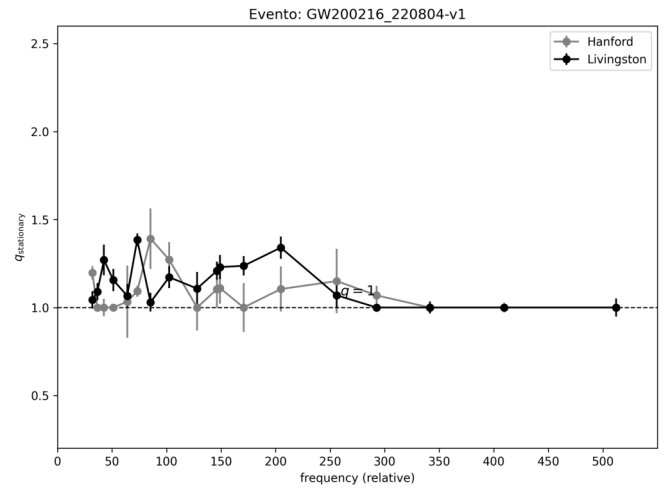
GW200208_222617-v1



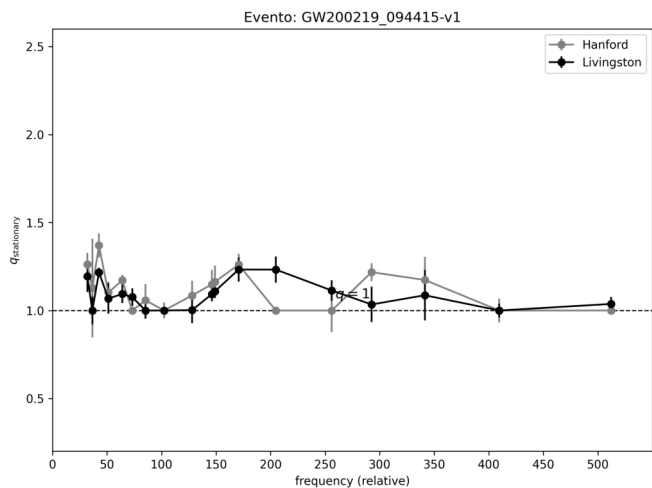
GW200209_085452-v1



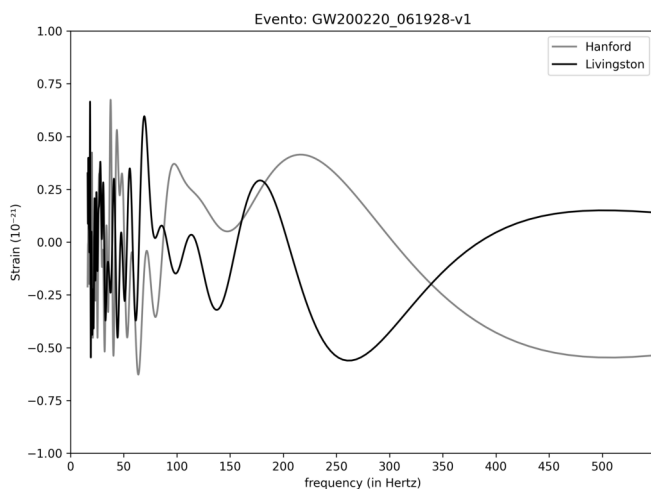
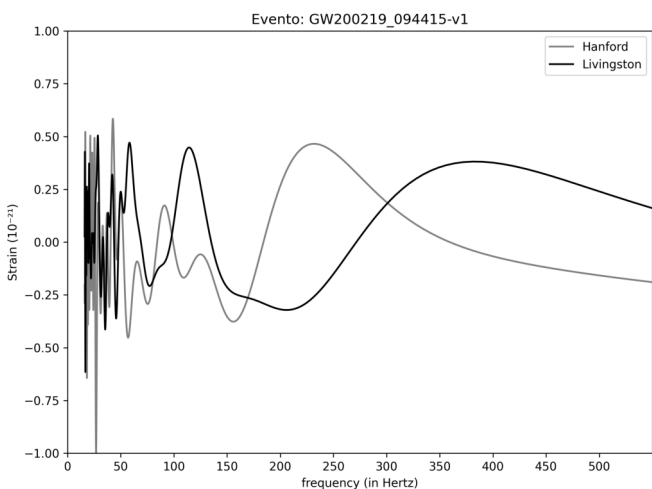
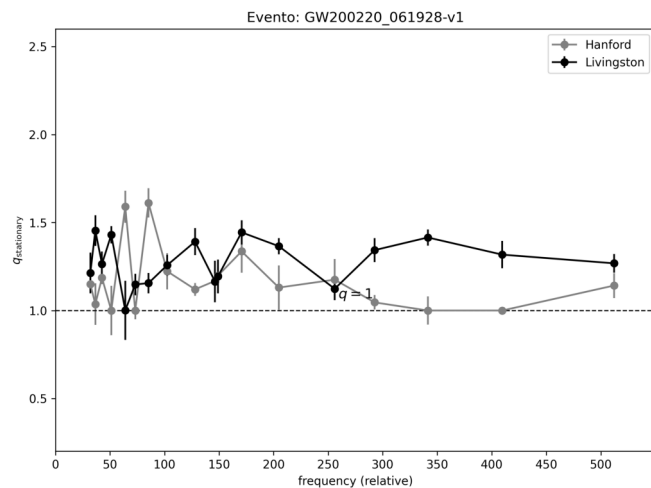
GW200216_220804-v1



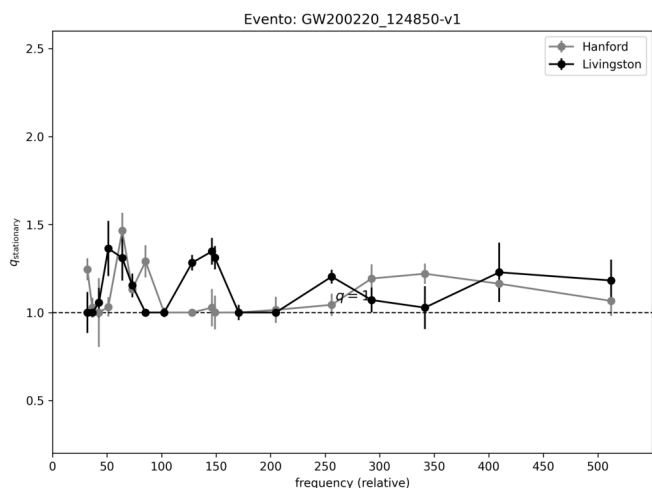
GW200219_094415-v1



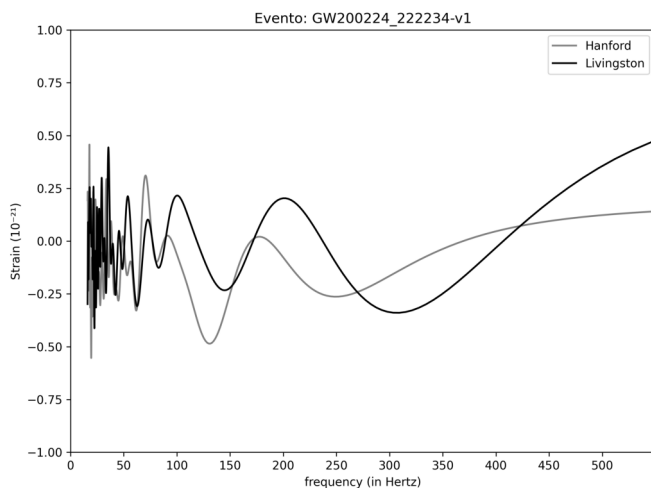
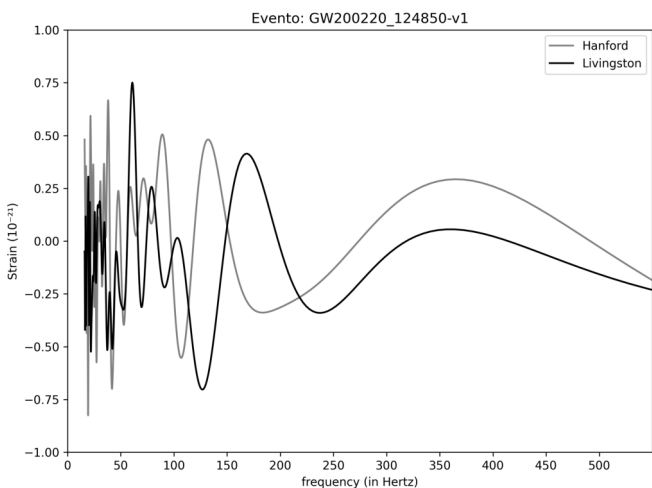
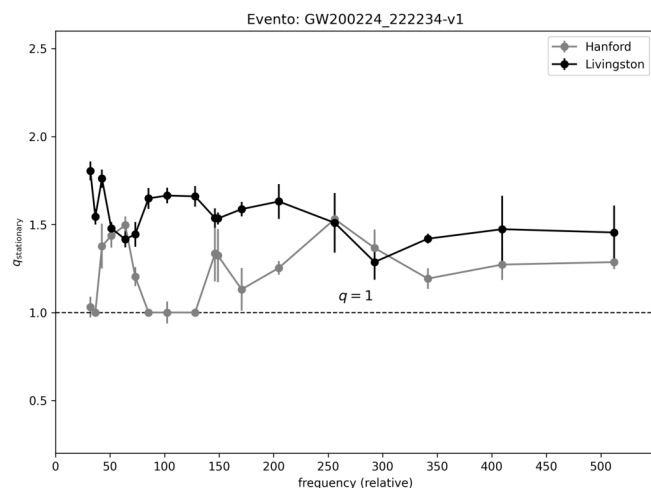
GW200220_061928-v1



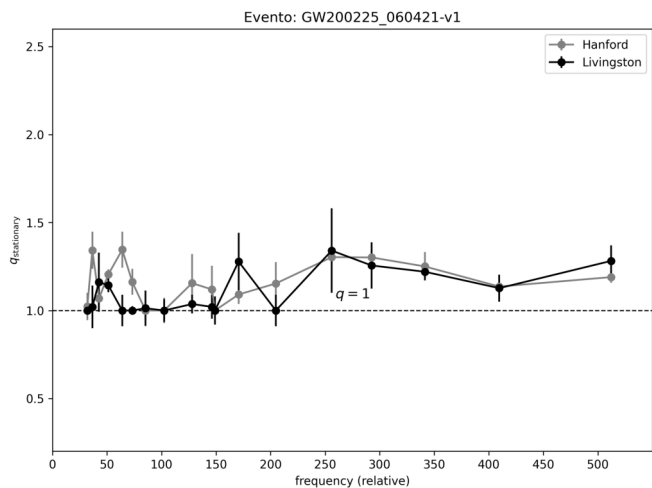
GW200220_124850-v1



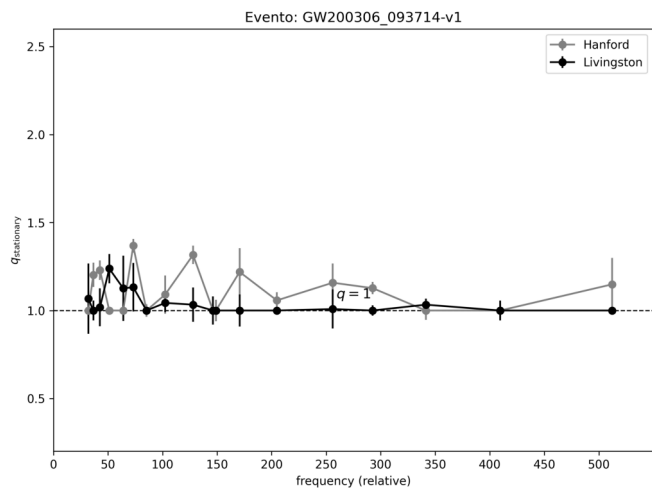
GW200224_222234-v1



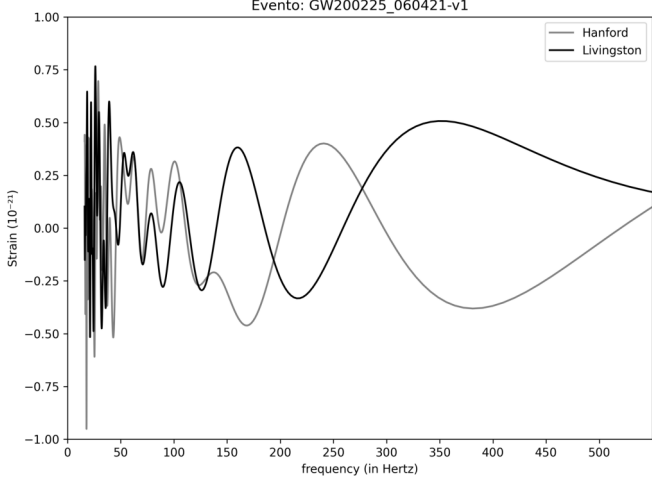
GW200225_060421-v1



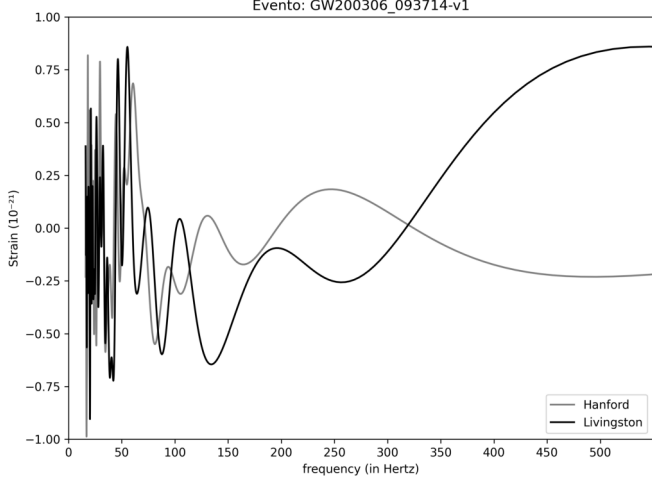
GW200306_093714-v1



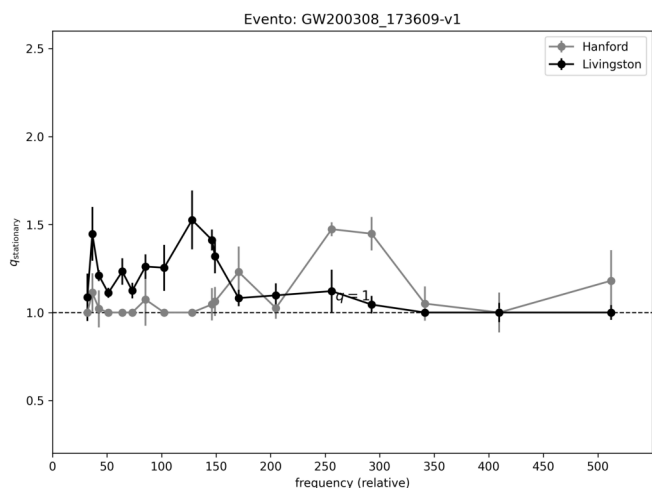
Evento: GW200225_060421-v1



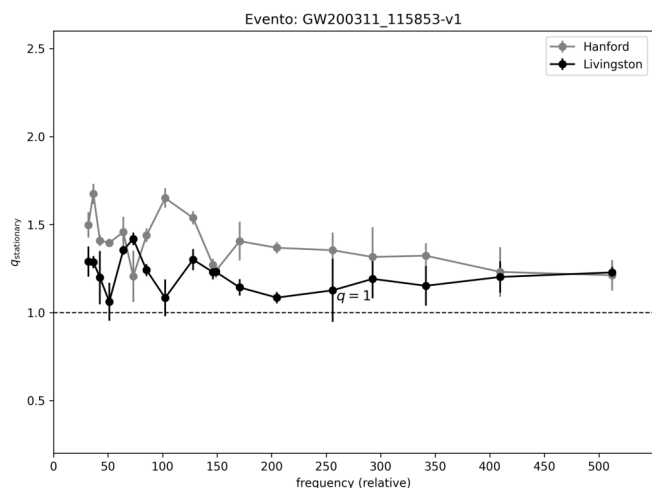
Evento: GW200306_093714-v1



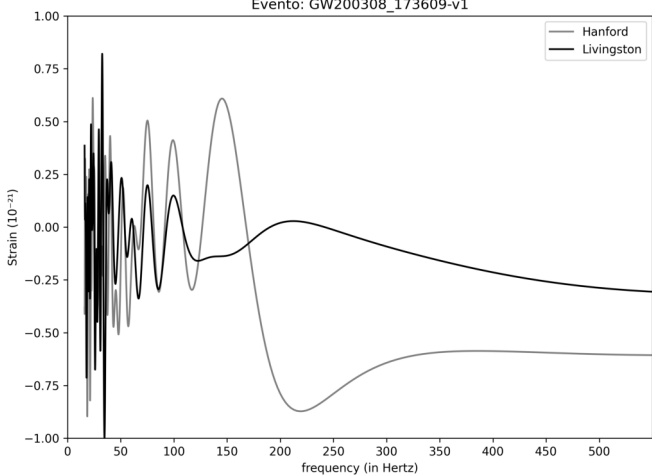
GW200308_173609-v1



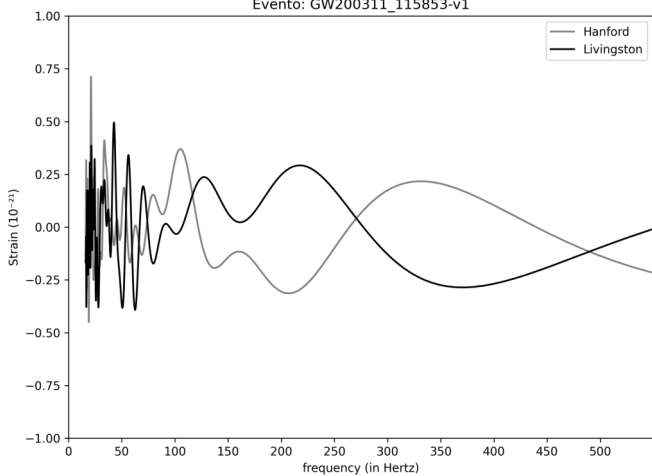
GW200311_115853-v1



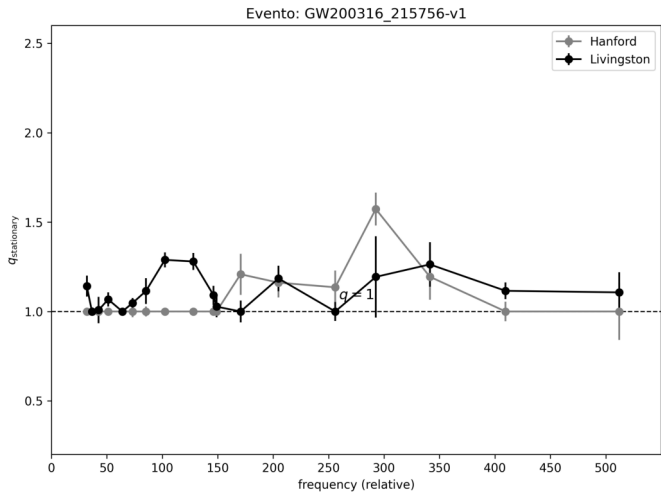
Evento: GW200308_173609-v1



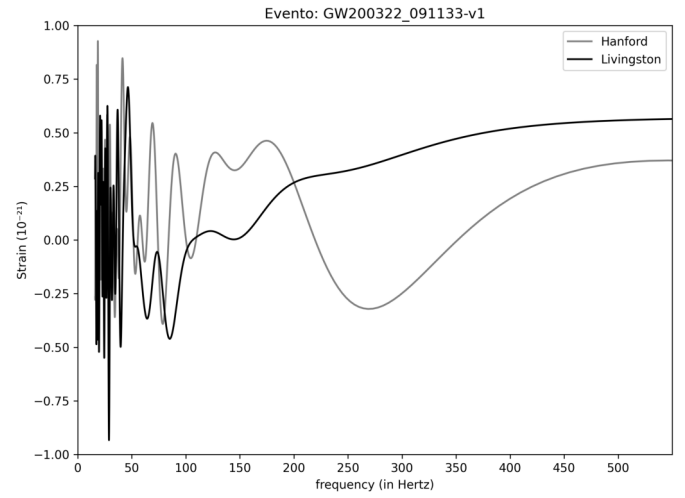
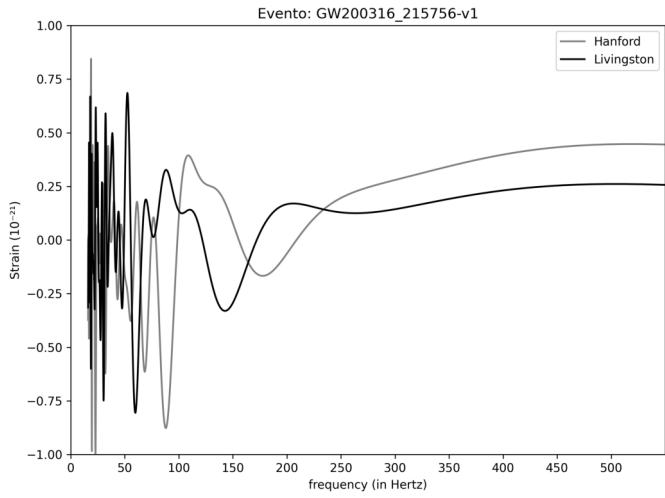
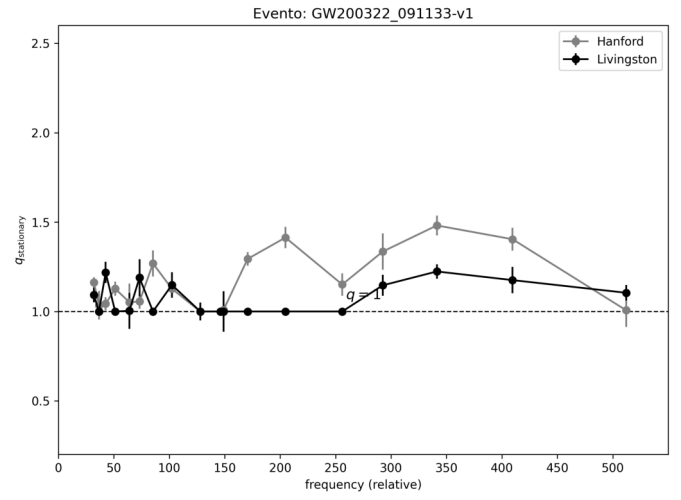
Evento: GW200311_115853-v1



GW200316_215756-v1



GW200322_091133-v1



APÊNDICE E – Q SENSIBILIDADE

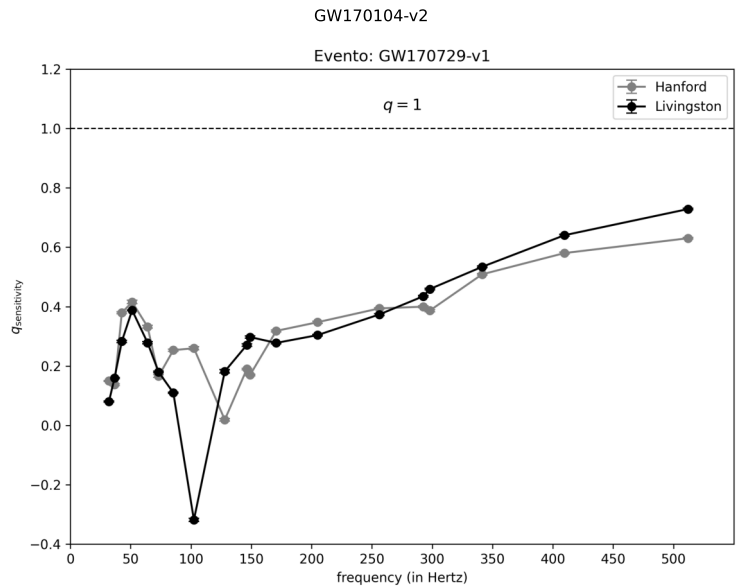
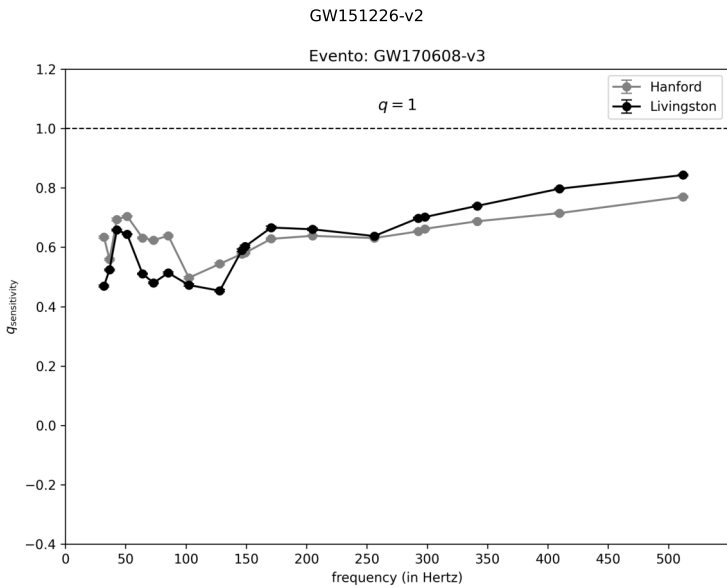
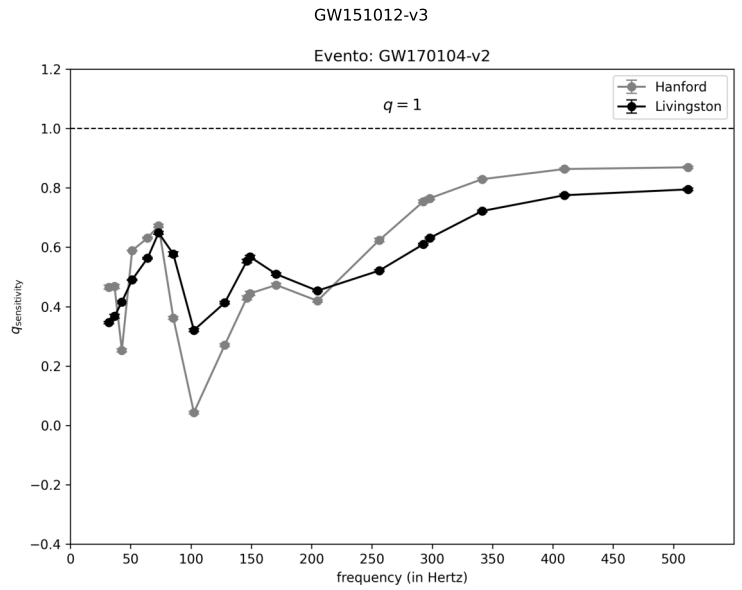
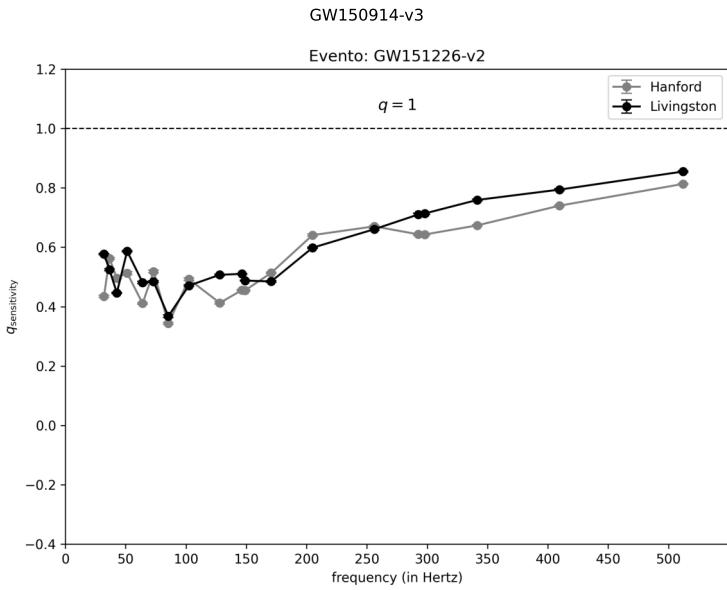
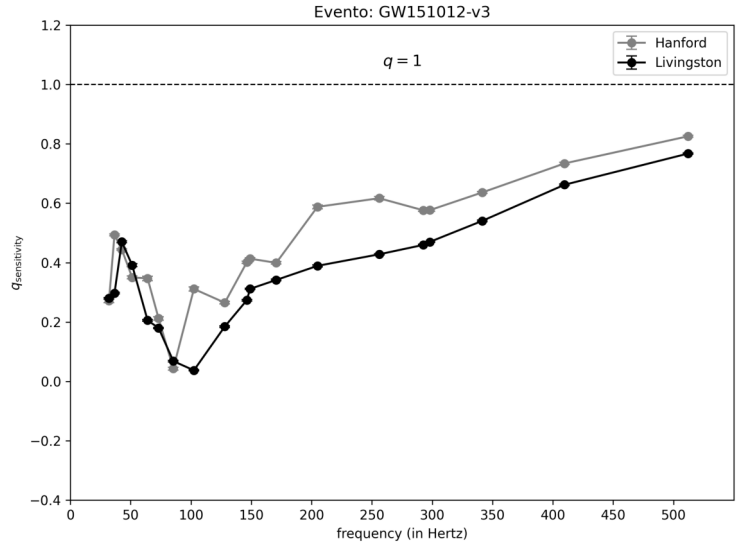
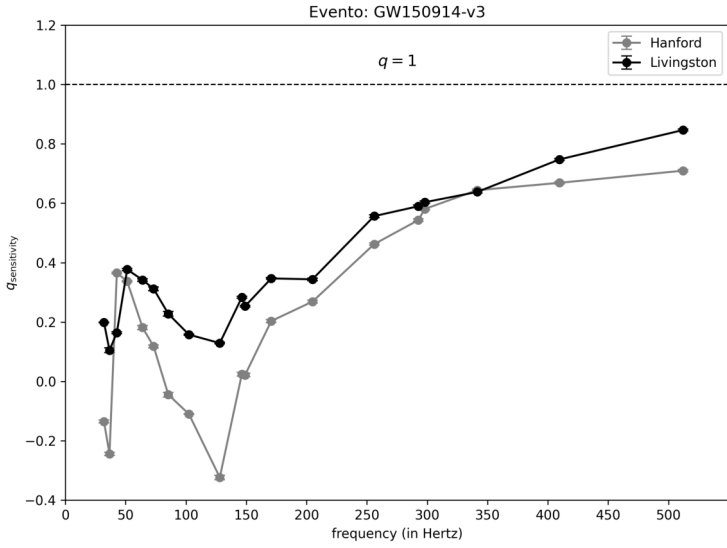
Para assegurar a confiabilidade da análise multifractal aplicada às séries temporais de ondas gravitacionais, foi realizada uma triagem rigorosa dos eventos disponíveis nos catálogos GWTC-1, GWTC-2.1 e GWTC-3. Foram excluídos da amostra final todos os eventos que apresentaram ausência de dados simultâneos nos detectores LIGO Hanford (H1) e Livingston (L1), bem como aqueles cuja integridade dos dados revelou inconsistências técnicas ou lacunas que comprometeriam a extração precisa dos parâmetros multifractais. Os seguintes eventos foram descartados com base nesses critérios: GW190620_030421-v1, GW190630_185205-v2, GW190708_232452-v2, GW190910_112807-v2, GW190925_232845-v1, GW191216_213338-v1, GW200112_155838-v1, GW200302_015811-v1.

A exclusão desses registros garante que as análises realizadas estejam fundamentadas em séries temporais completas, contínuas e sincronizadas entre os dois detectores, condição imprescindível para a correta construção do espectro multifractal $f(\alpha)$ e, por conseguinte, para a estimativa precisa do índice de sensibilidade às condições iniciais, (q_{sen}).

Destaca-se ainda que os resultados foram corroborados pela coerência dos espectros multifractais obtidos, os quais apresentaram larguras significativas ($\Delta\alpha$), refletindo uma complexidade estrutural evidente nas flutuações temporais dos sinais. Tais características indicam a presença de correlações de longo alcance e comportamento não estacionário, compatíveis com dinâmicas típicas de sistemas fora do equilíbrio termodinâmico.

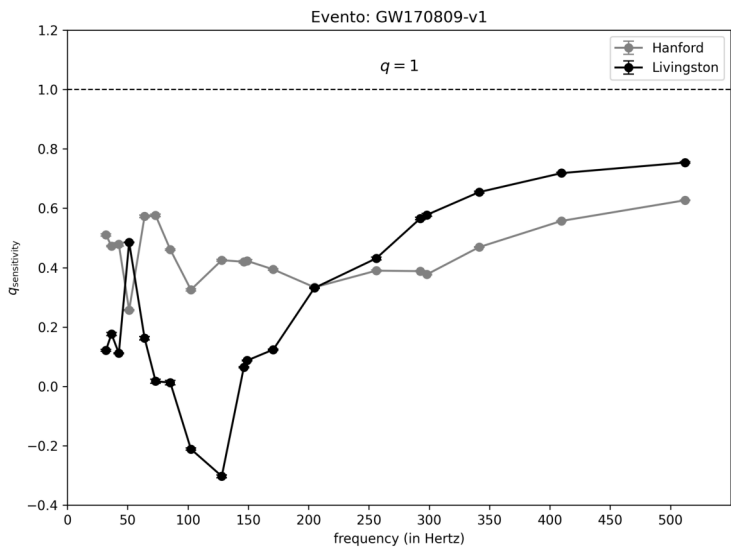
Em síntese, a análise do parâmetro (q_{sen}) aplicada ao conjunto selecionado de eventos BBH demonstrou que os sinais gravitacionais analisados não seguem modelos gaussianos ou estatisticamente extensivos. Pelo contrário, revelam uma dinâmica não linear altamente complexa, intermitente e multifractal, cuja descrição mais adequada se dá no contexto da estatística não-extensiva de Tsallis, consolidando essa abordagem como uma ferramenta promissora para a caracterização física de sinais gravitacionais em ambientes extremos do universo.

Catálogo de Ondas Gravitacionais - q _sensitivity

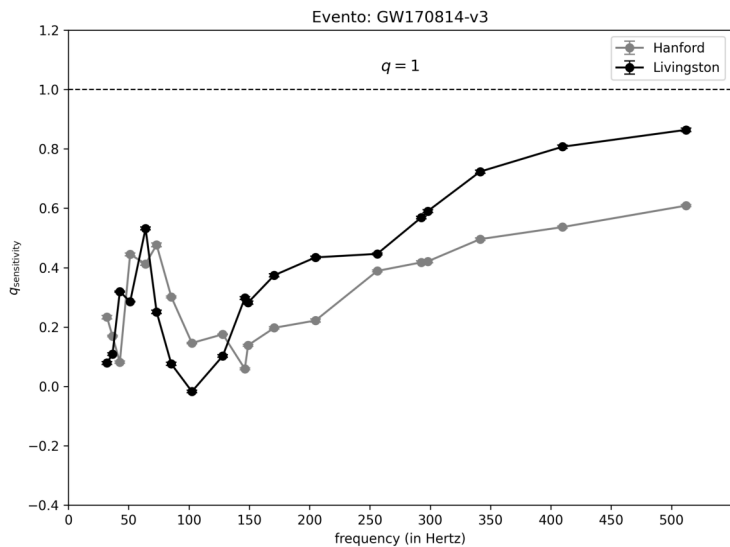


GW170608-v3

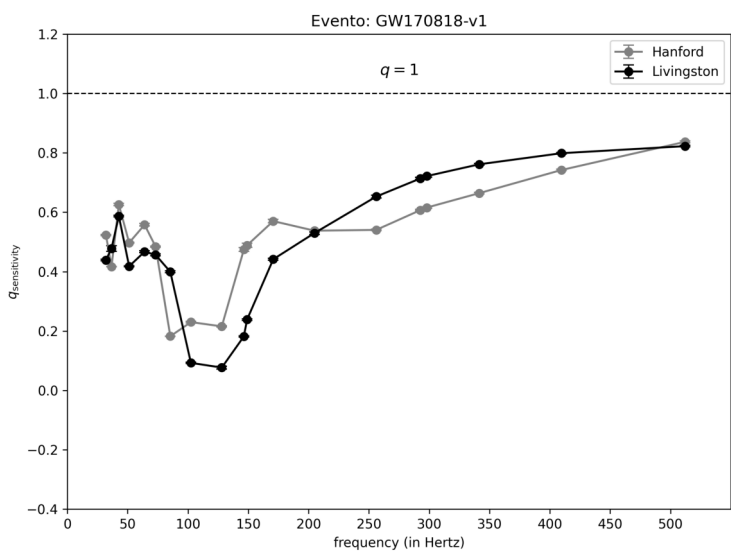
GW170729-v1



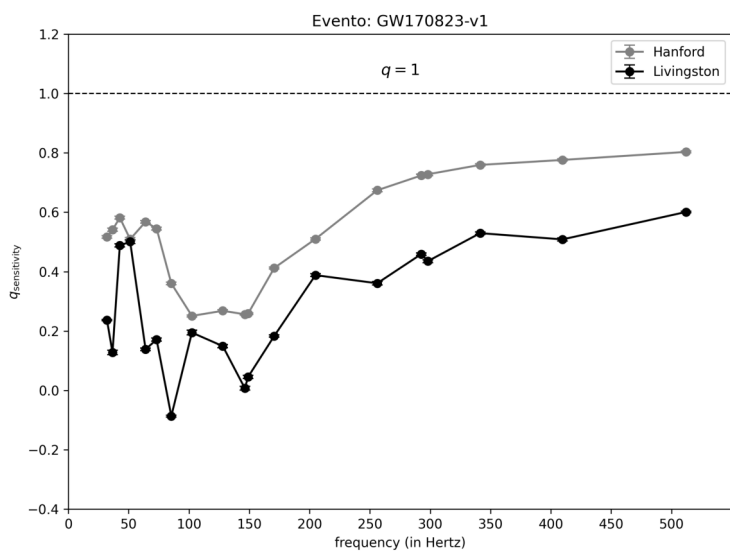
GW170809-v1



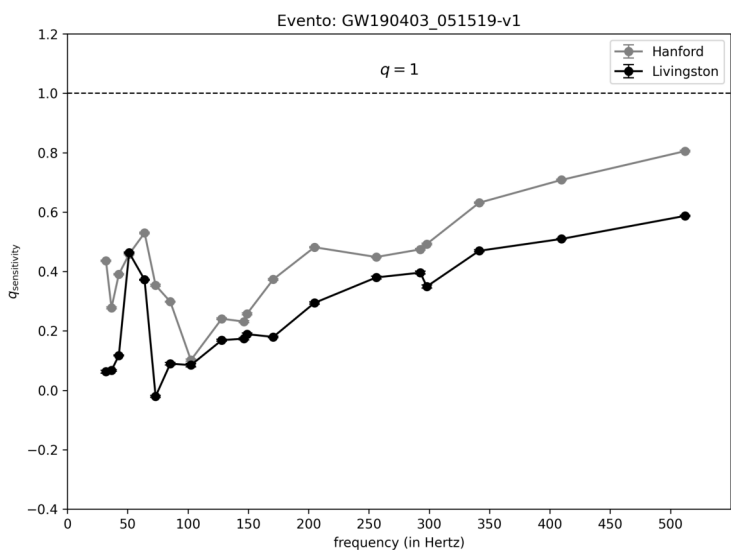
GW170814-v3



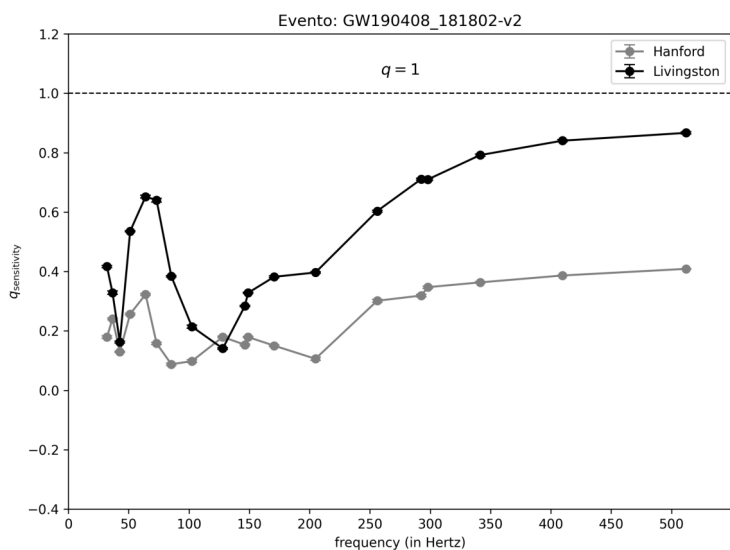
GW170818-v1



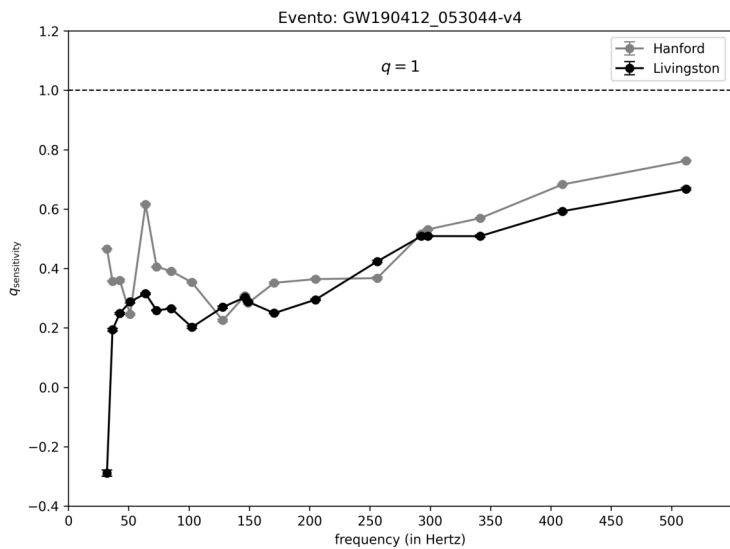
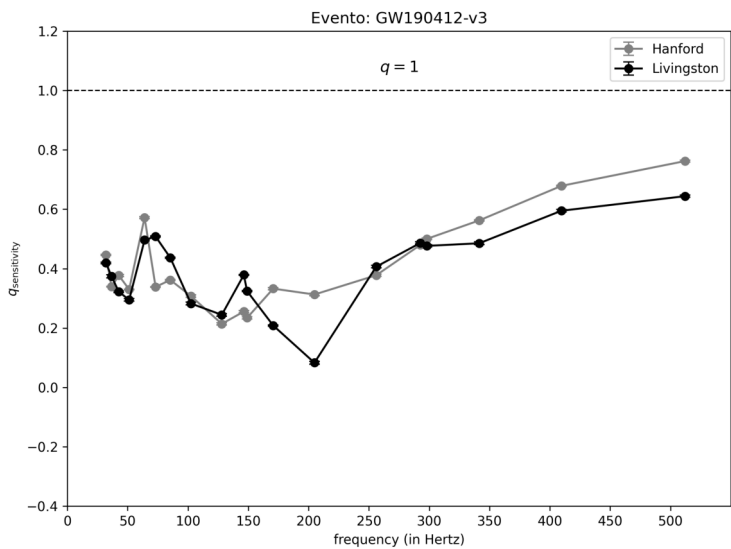
GW170823-v1



GW190403_051519-v1

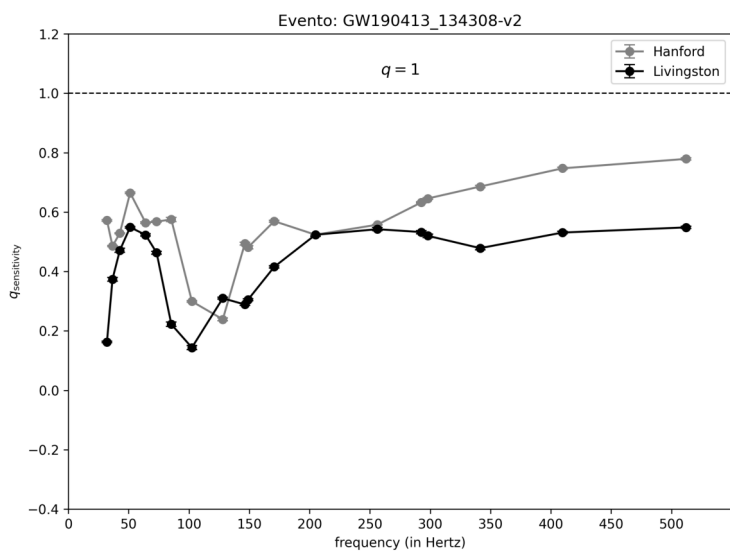
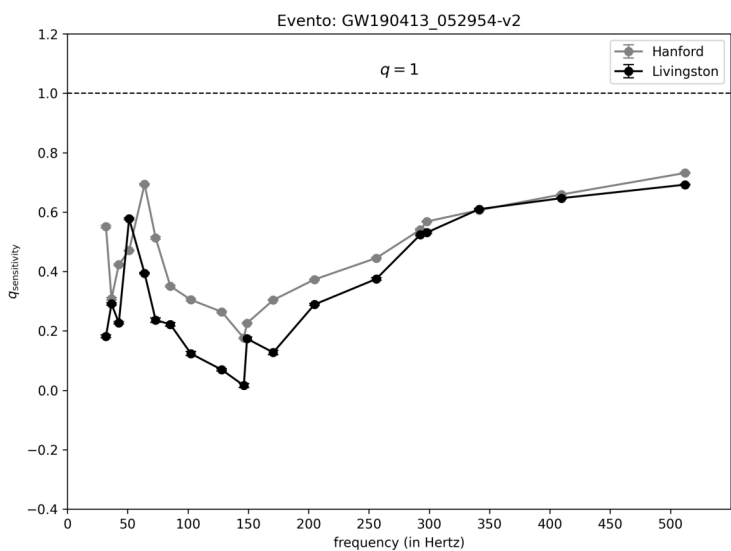


GW190408_181802-v2



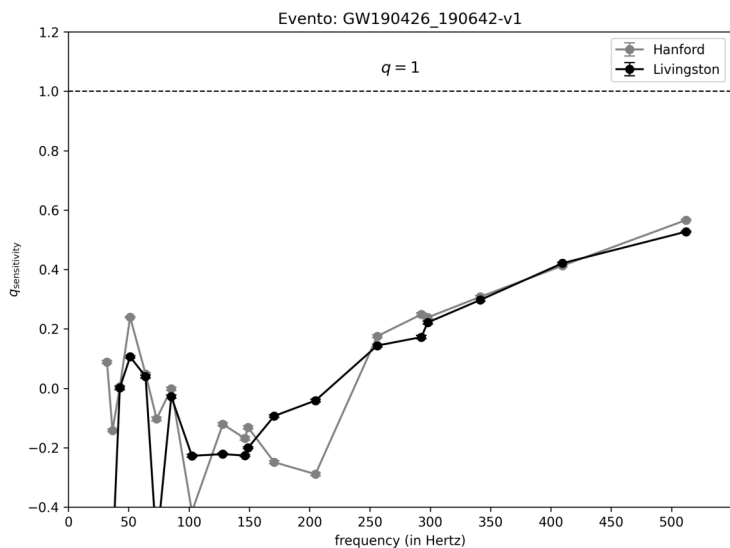
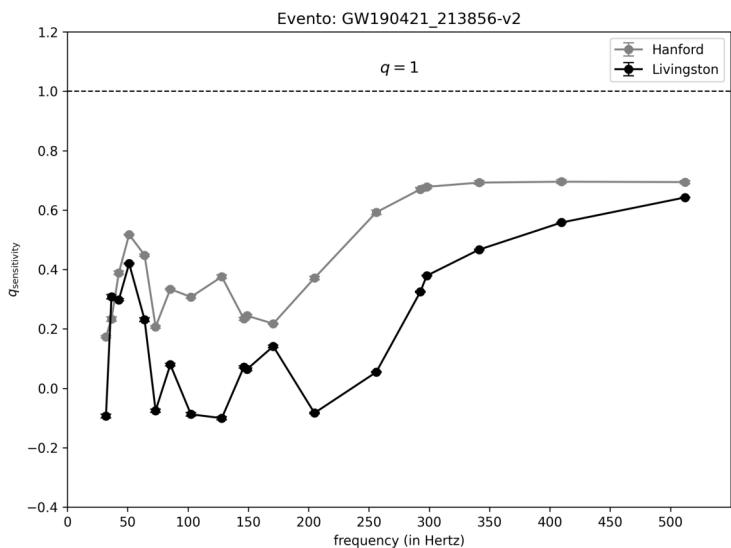
GW190412-v3

GW190412_053044-v4



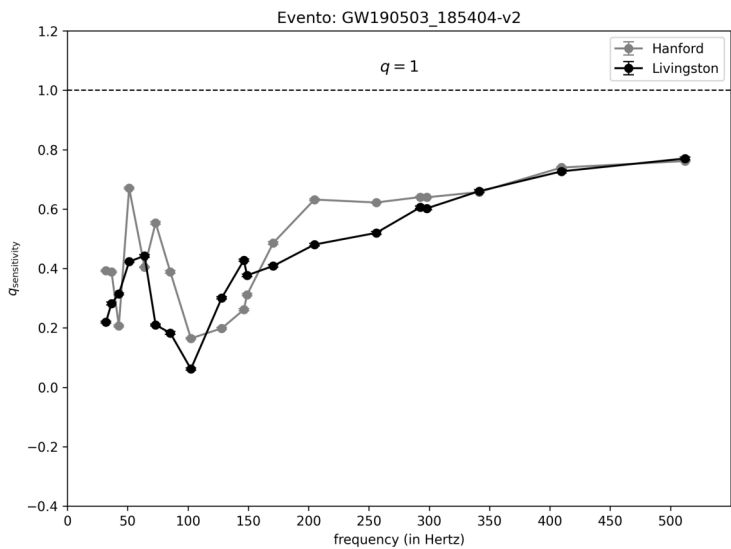
GW190413_052954-v2

GW190413_134308-v2

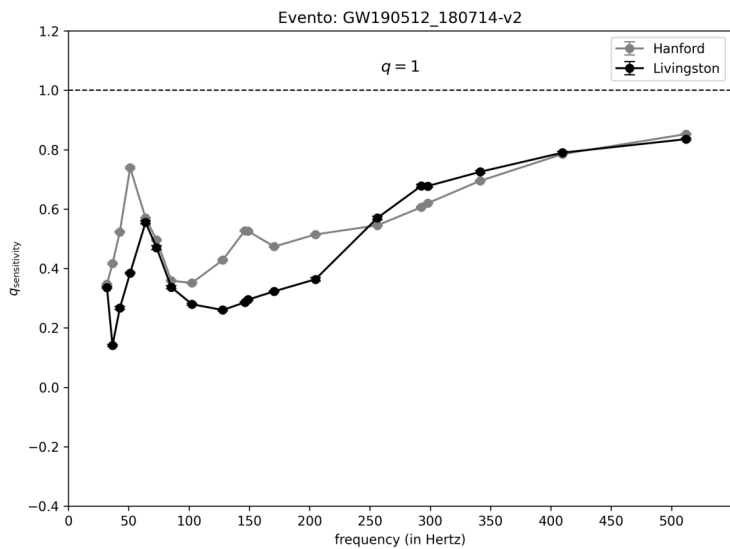


GW190421_213856-v2

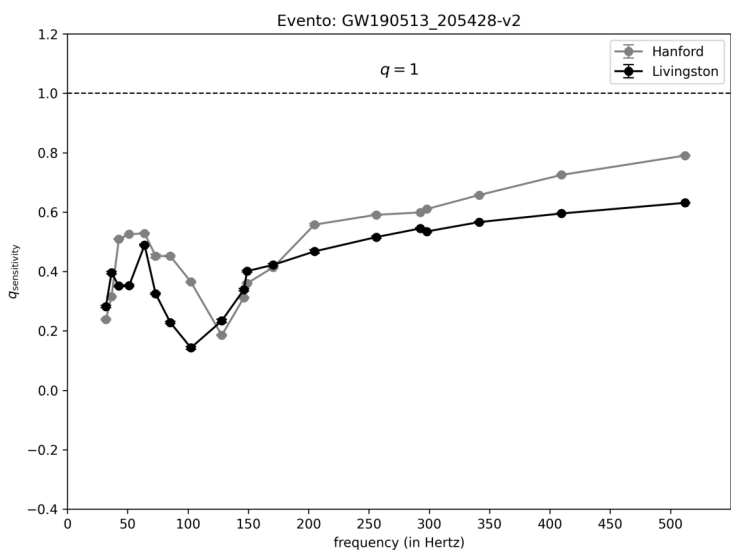
GW190426_190642-v1



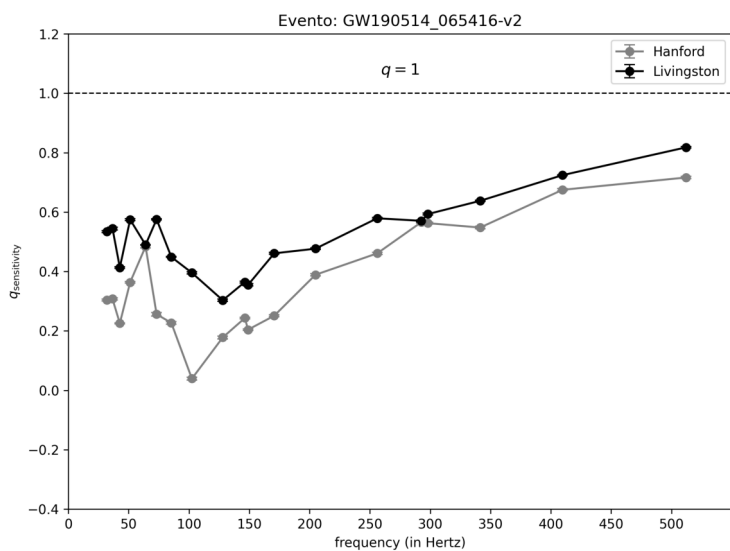
GW190503_185404-v2



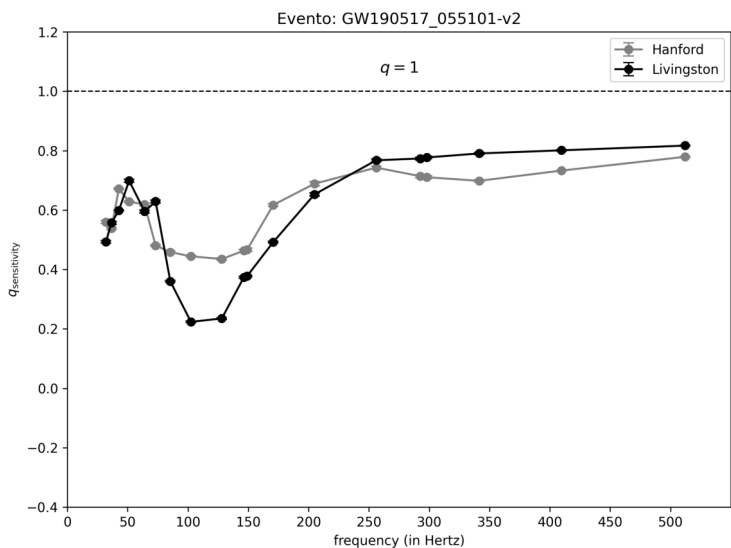
GW190512_180714-v2



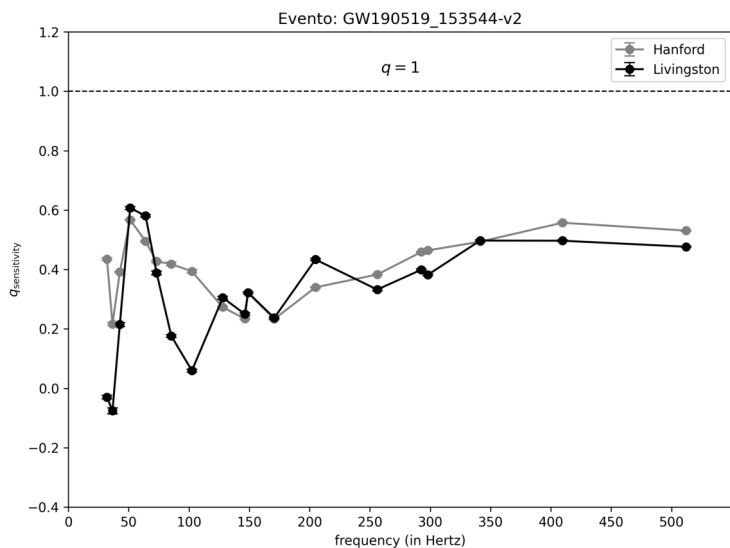
GW190513_205428-v2



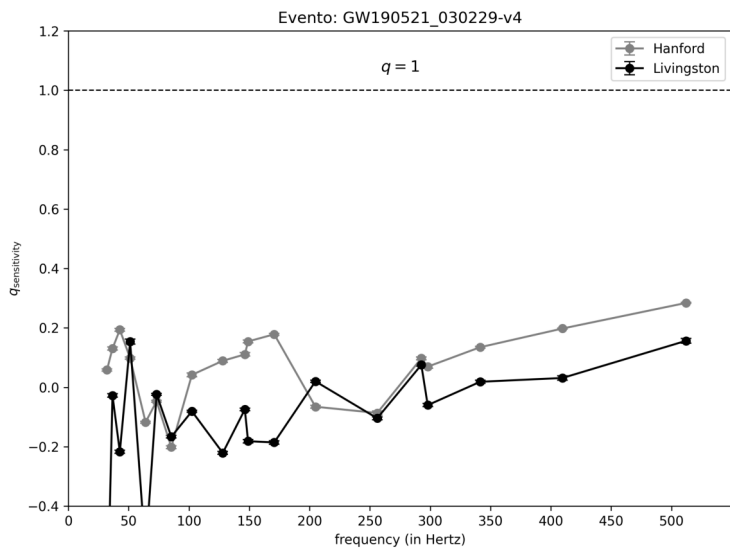
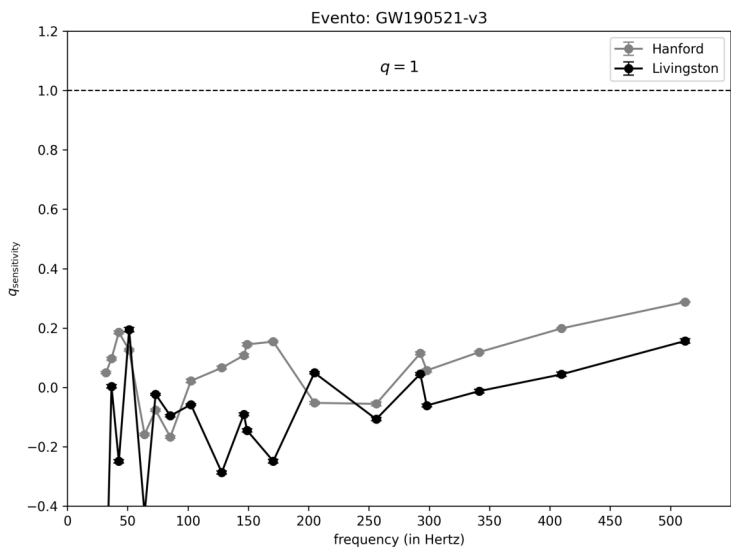
GW190514_065416-v2



GW190517_055101-v2

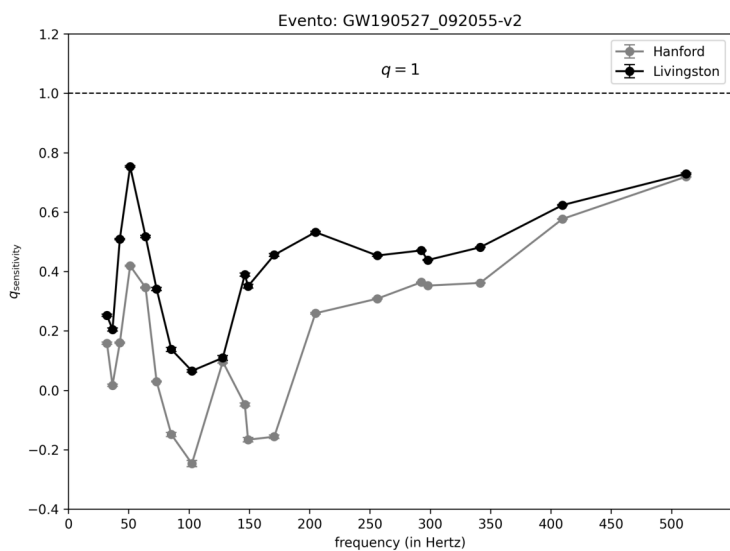
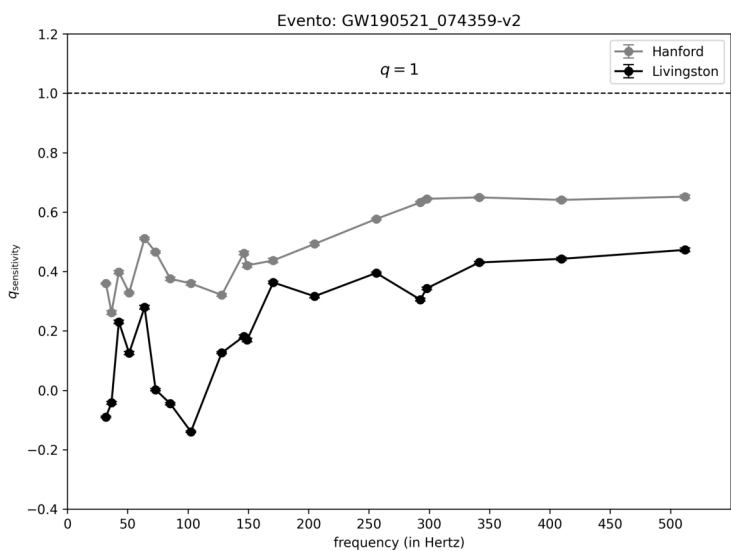


GW190519_153544-v2



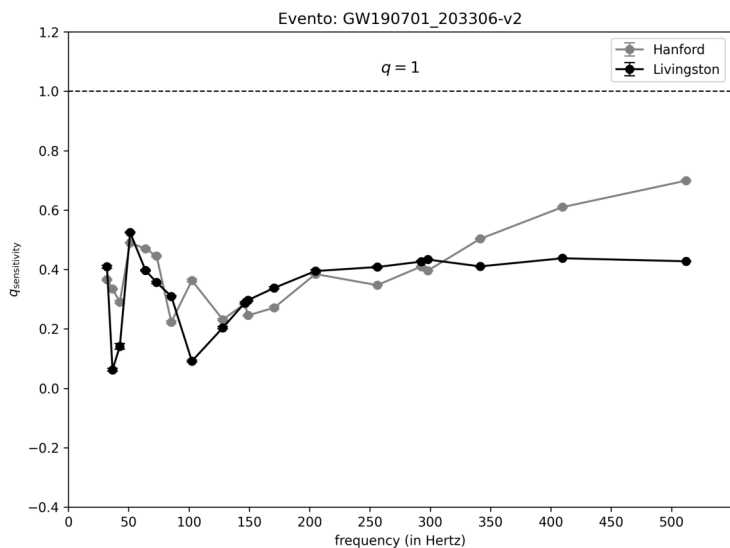
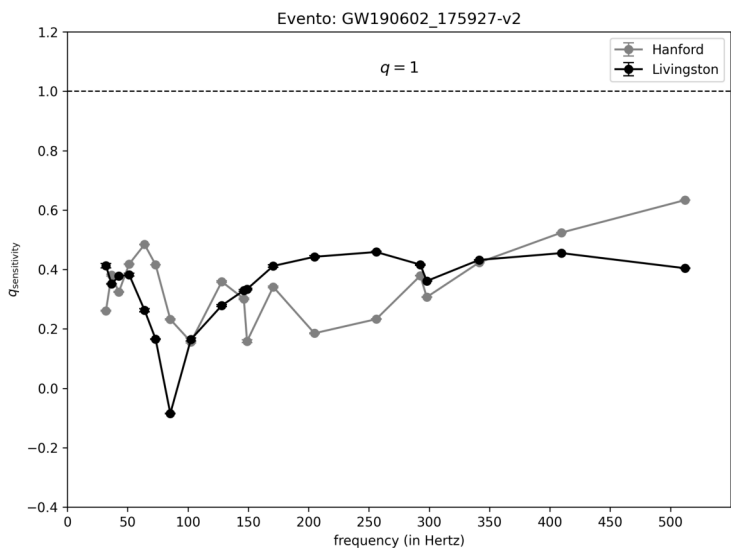
GW190521-v3

GW190521_030229-v4



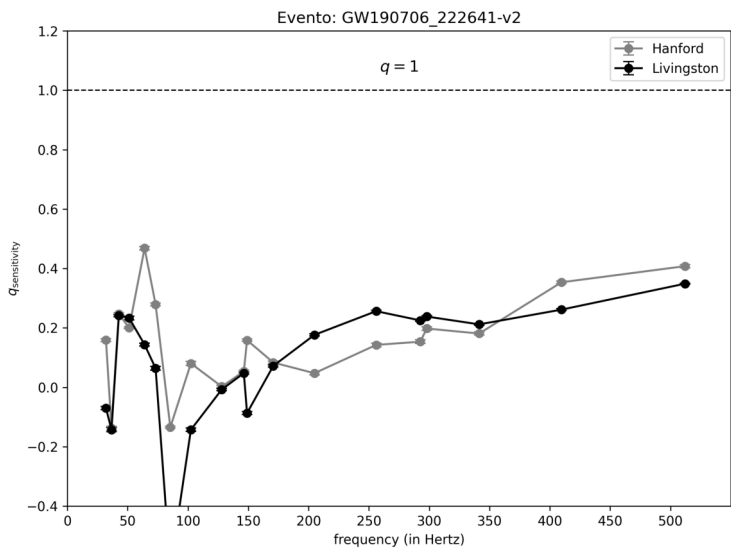
GW190521_074359-v2

GW190527_092055-v2

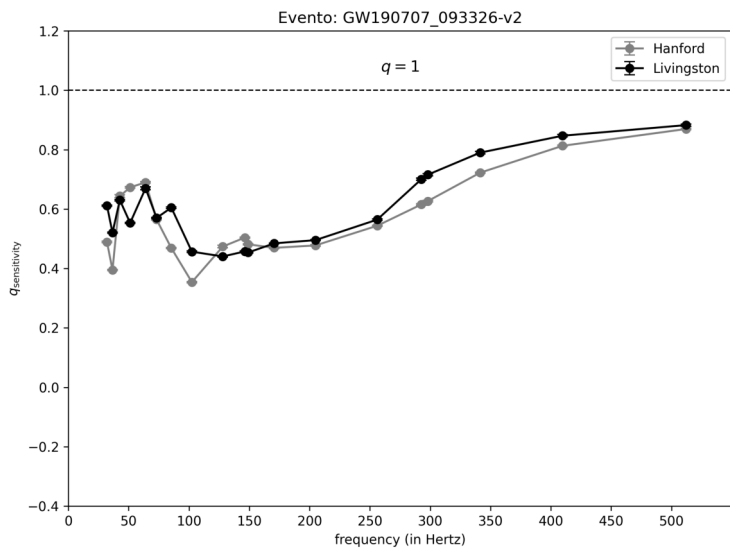


GW190602_175927-v2

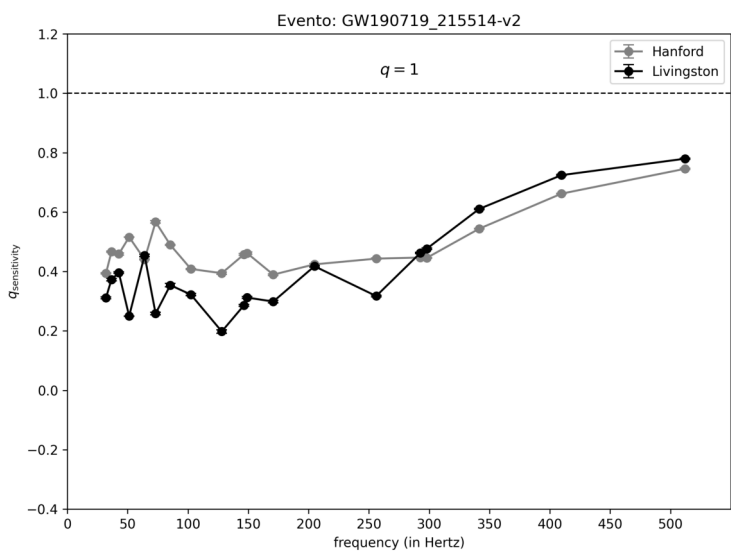
GW190701_203306-v2



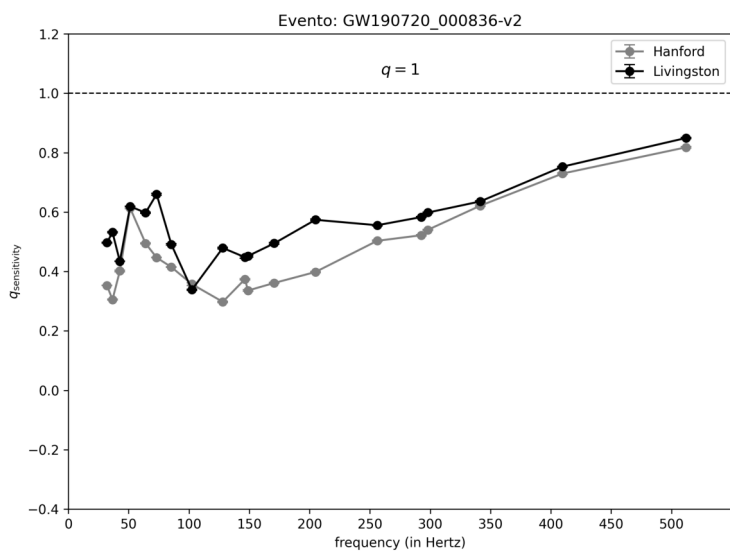
GW190706_222641-v2



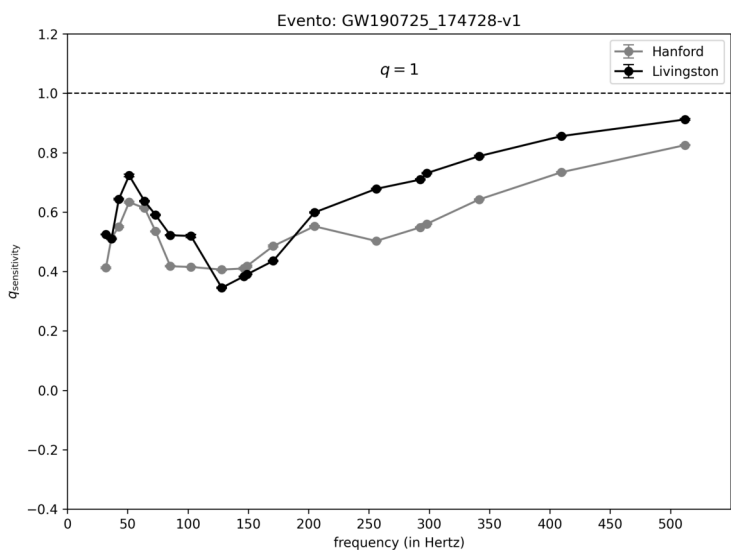
GW190707_093326-v2



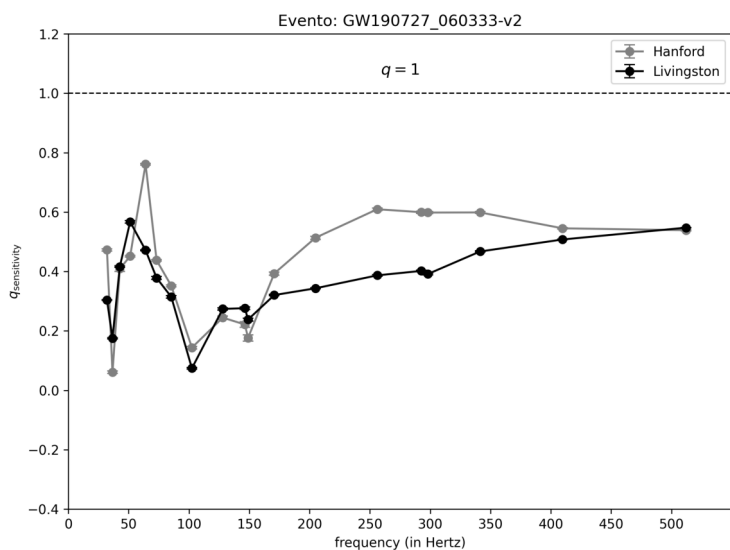
GW190719_215514-v2



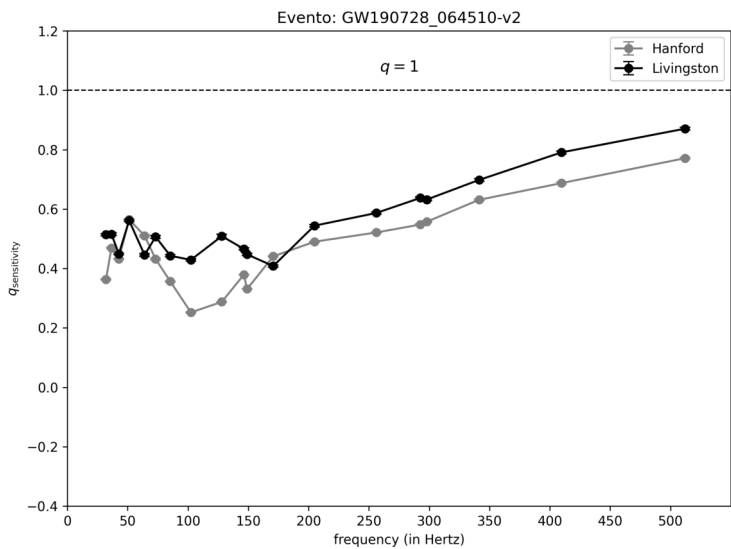
GW190720_000836-v2



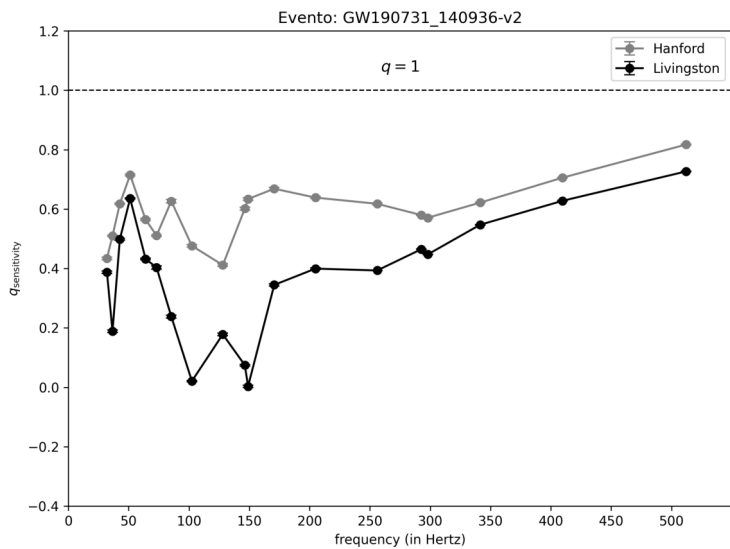
GW190725_174728-v1



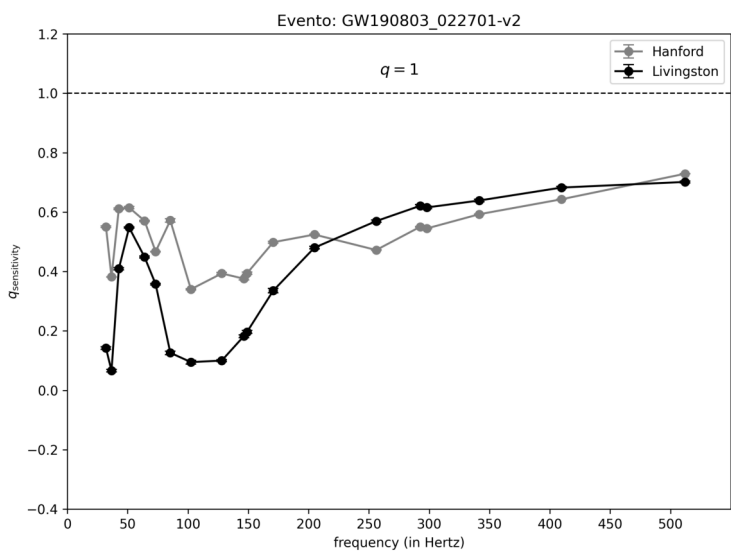
GW190727_060333-v2



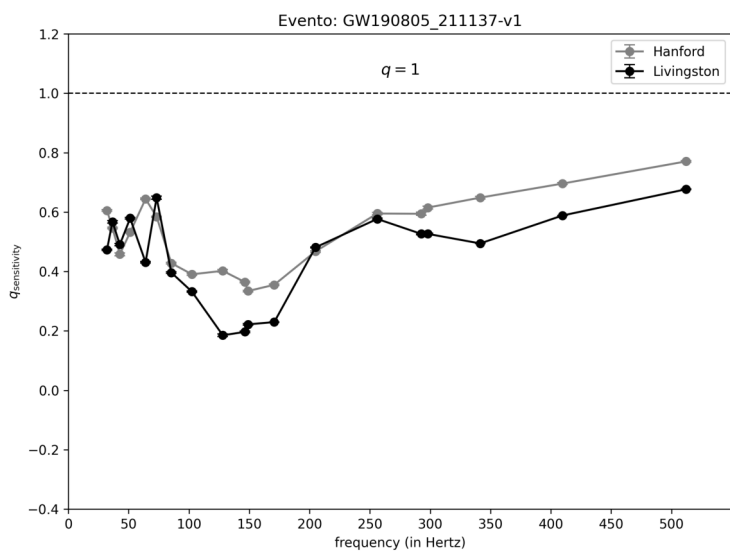
GW190728_064510-v2



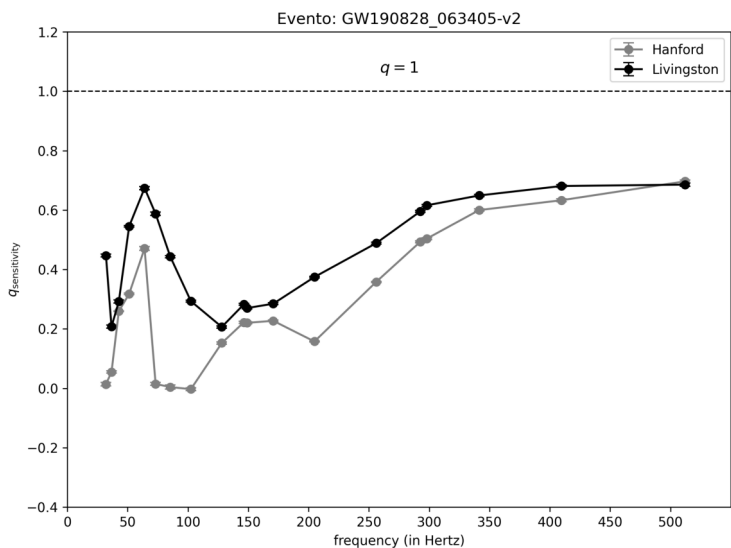
GW190731_140936-v2



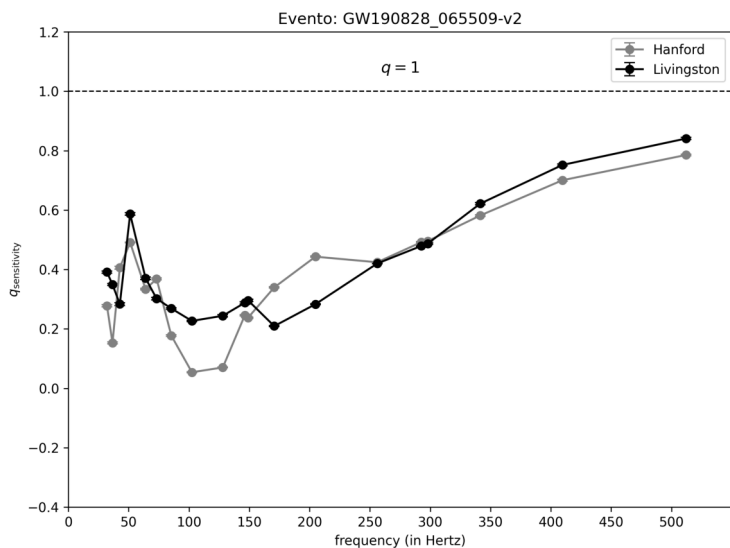
GW190803_022701-v2



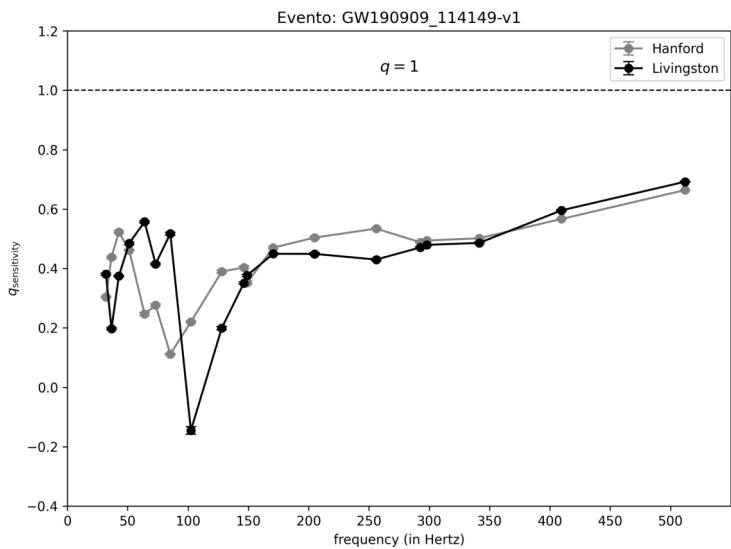
GW190805_211137-v1



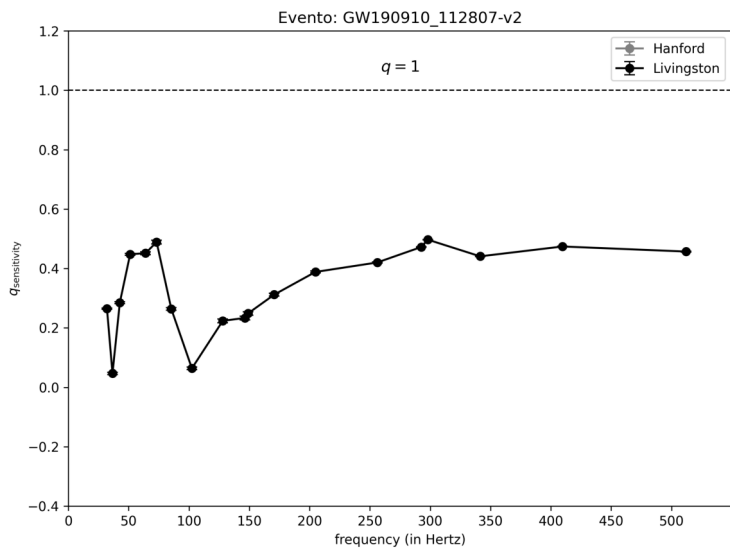
GW190828_063405-v2



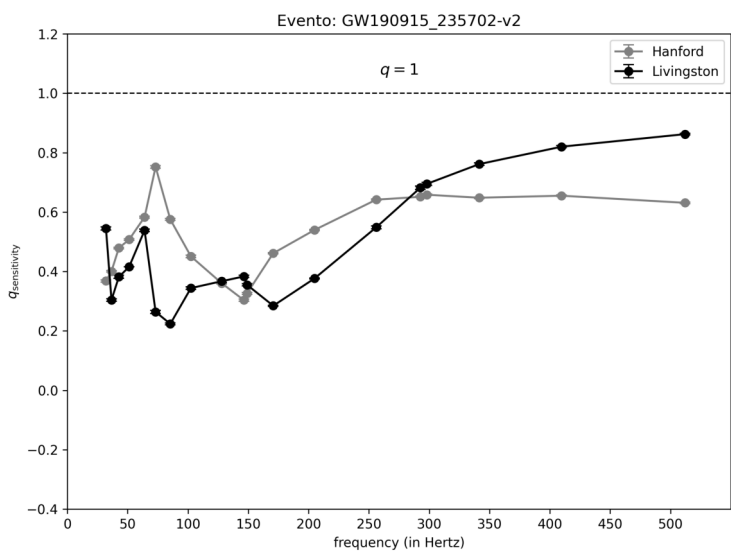
GW190828_065509-v2



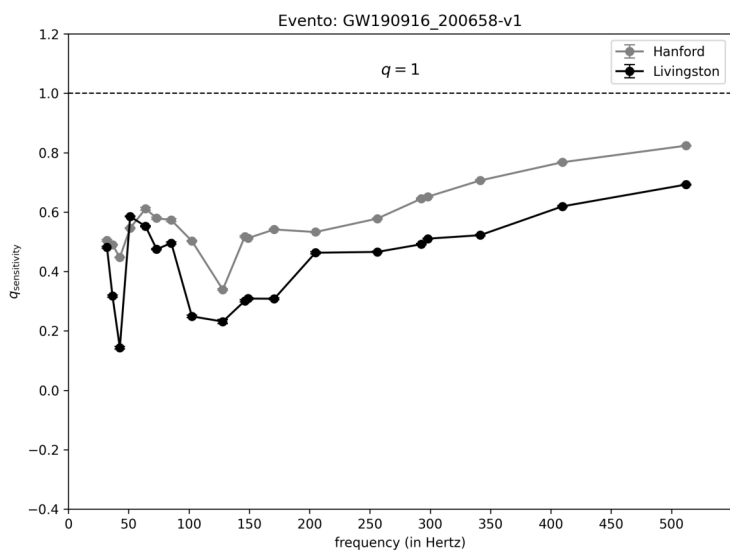
GW190909_114149-v1



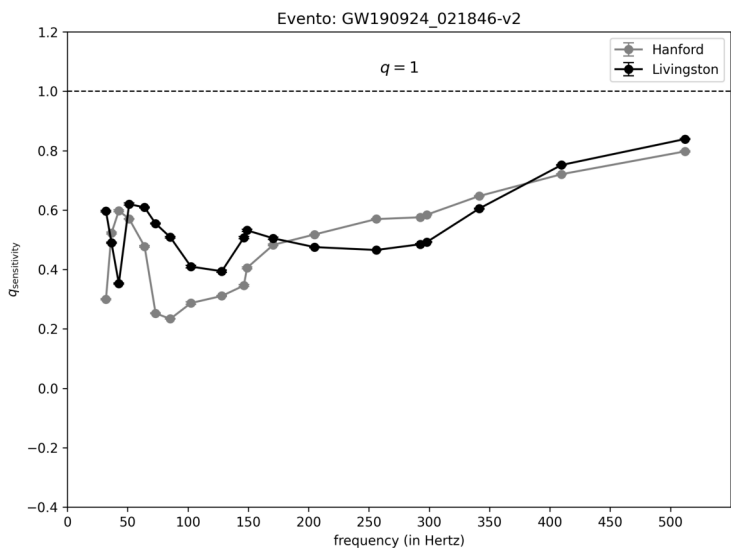
GW190910_112807-v2



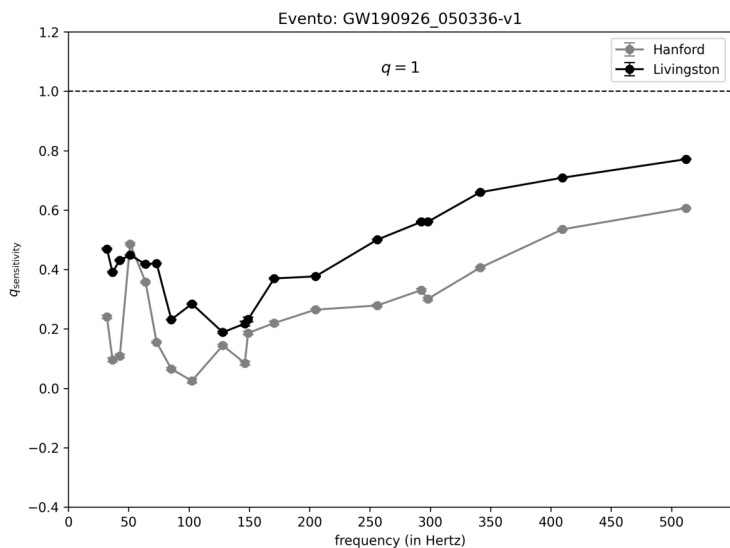
GW190915_235702-v2



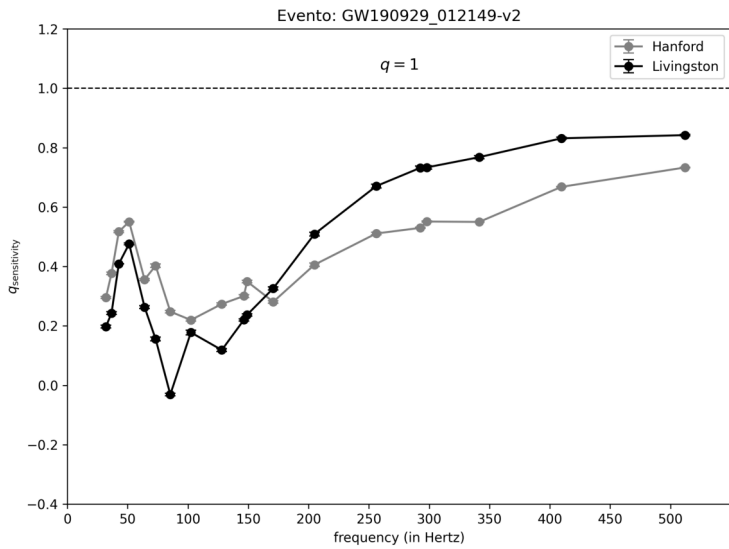
GW190916_200658-v1



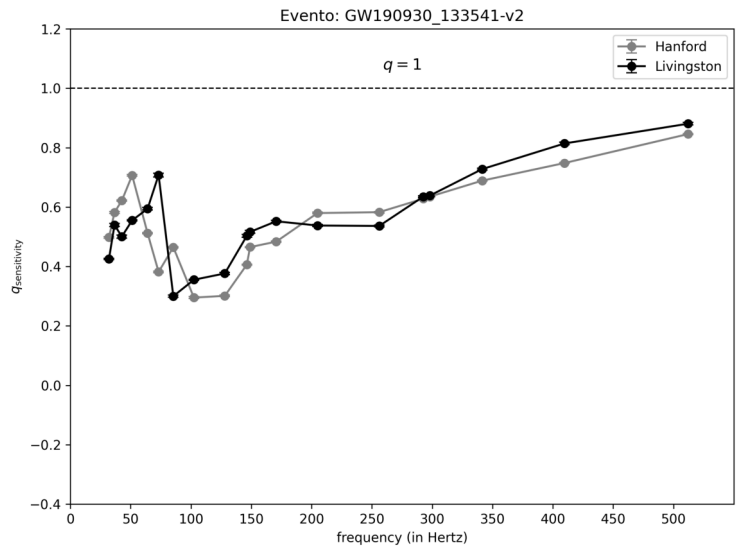
GW190924_021846-v2



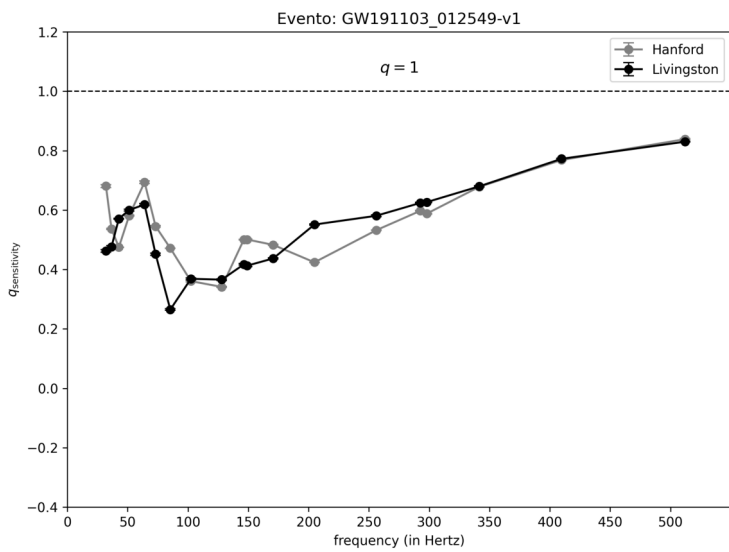
GW190926_050336-v1



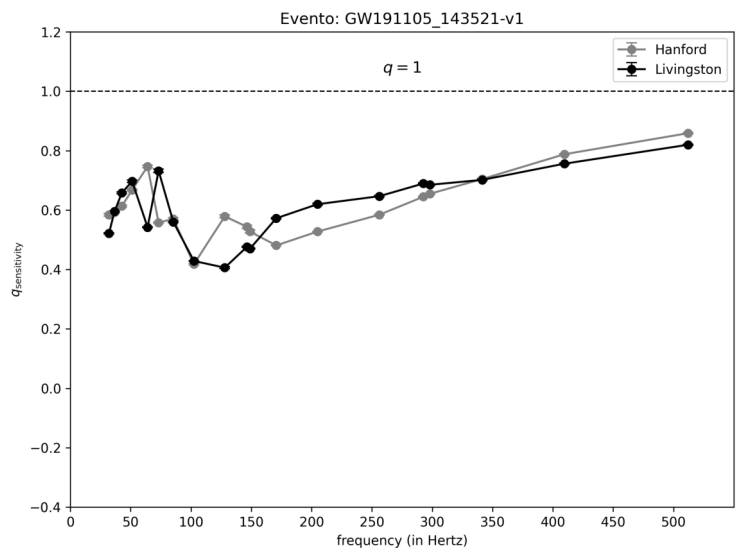
GW190929_012149-v2



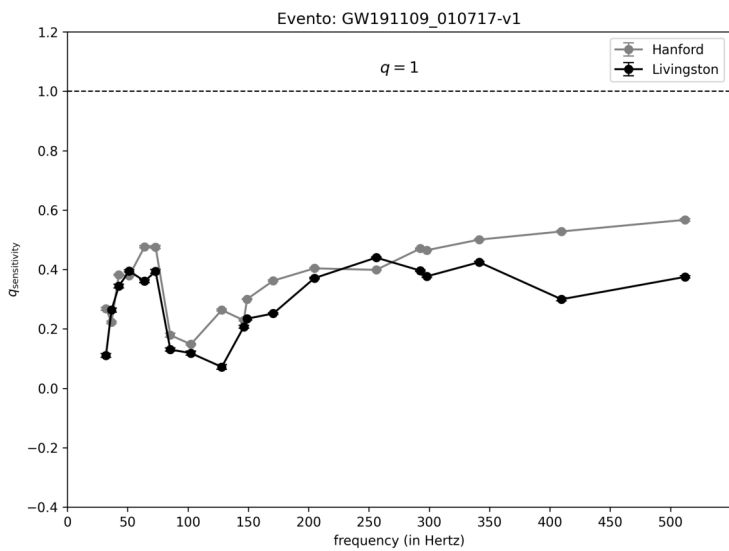
GW190930_133541-v2



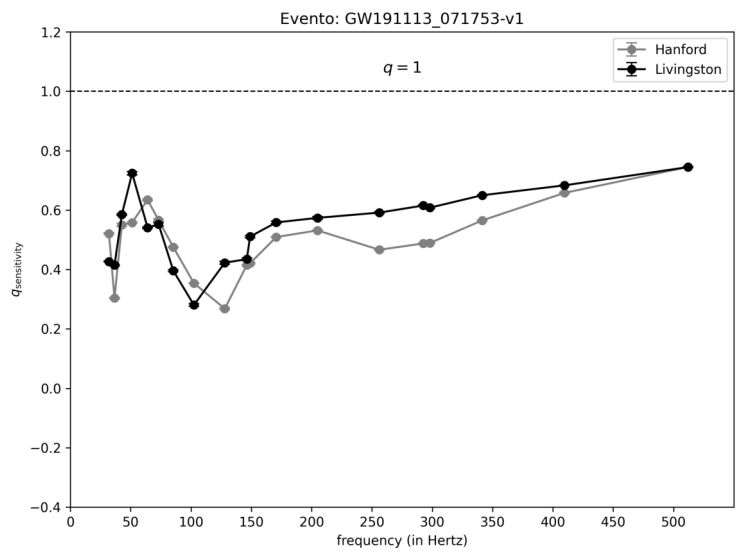
GW191103_012549-v1



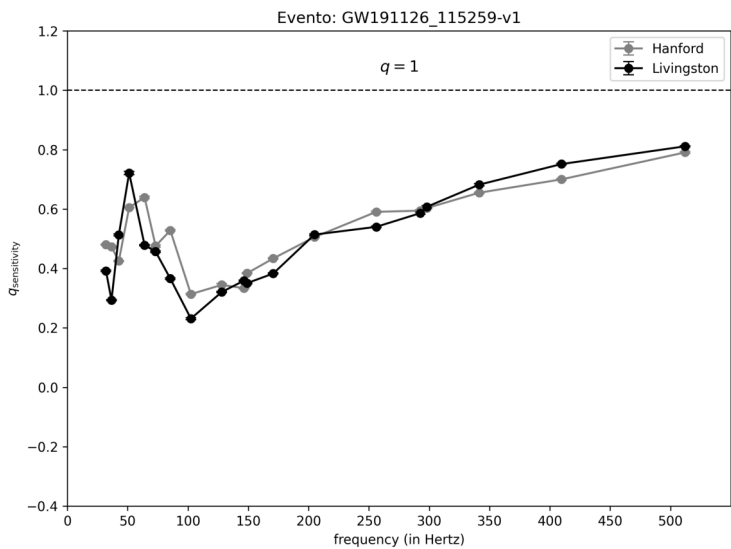
GW191105_143521-v1



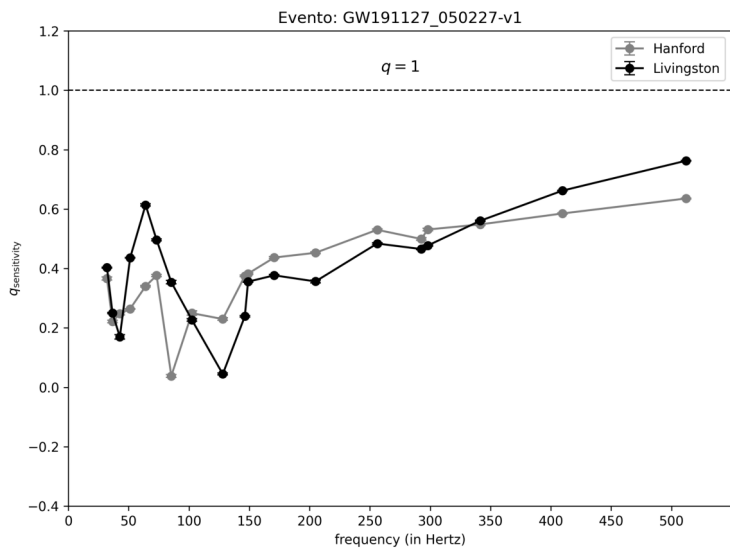
GW191109_010717-v1



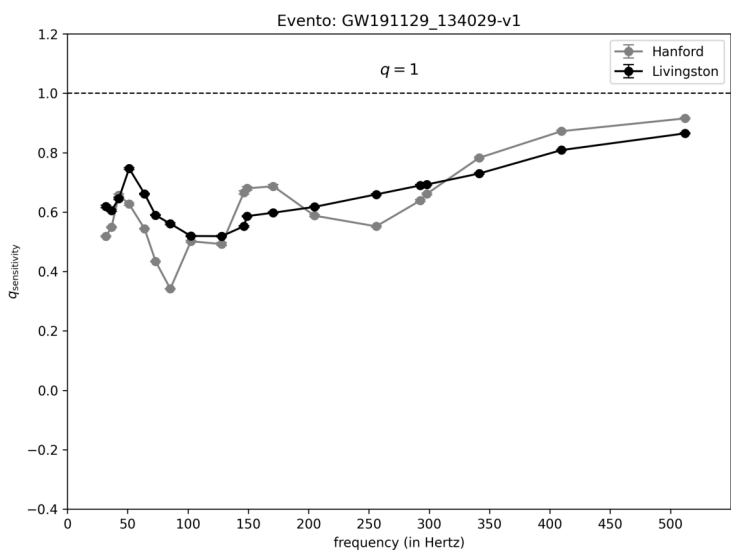
GW191113_071753-v1



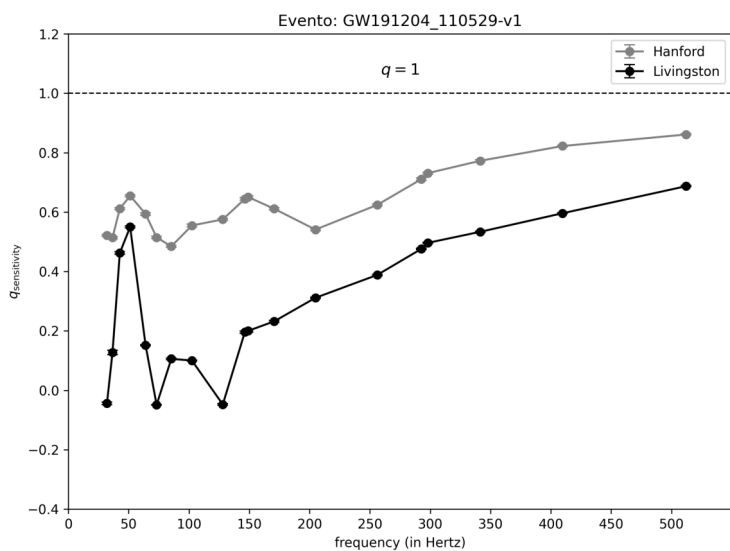
GW191126_115259-v1



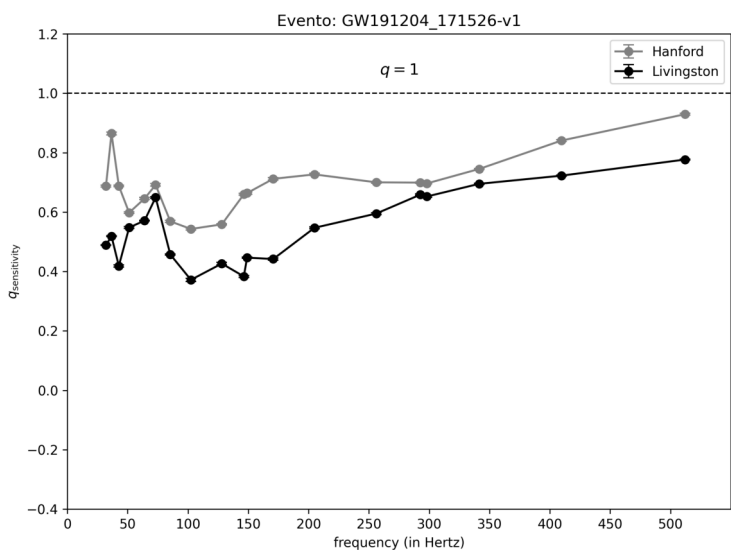
GW191127_050227-v1



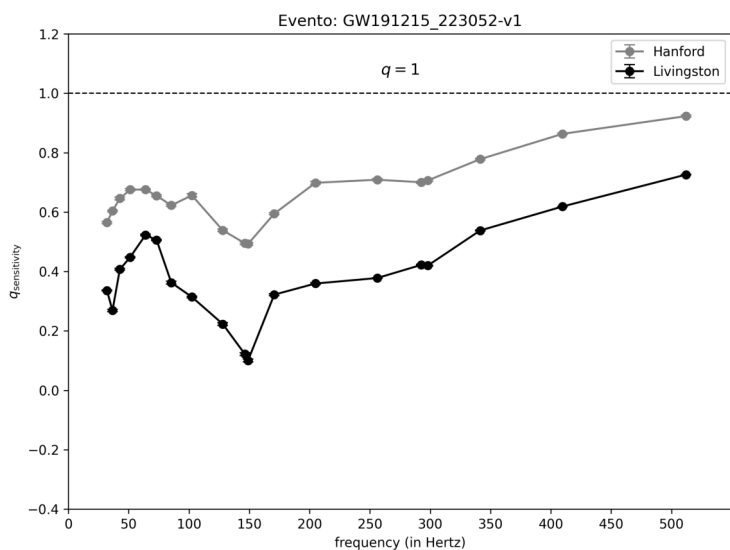
GW191129_134029-v1



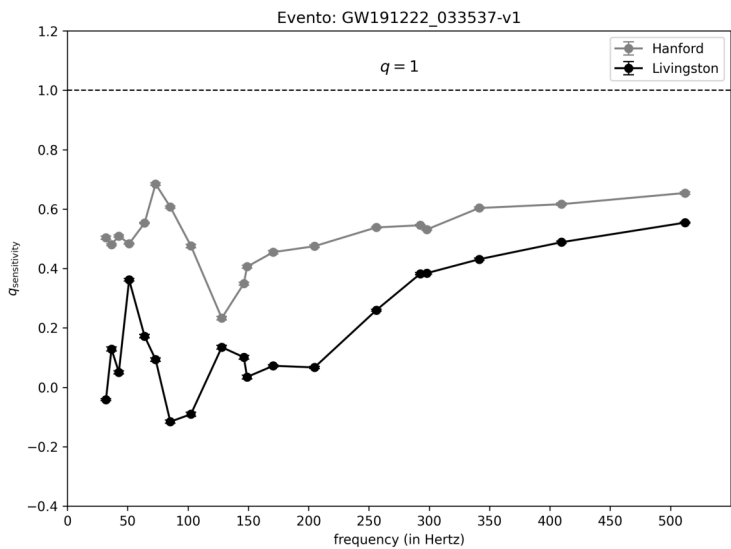
GW191204_110529-v1



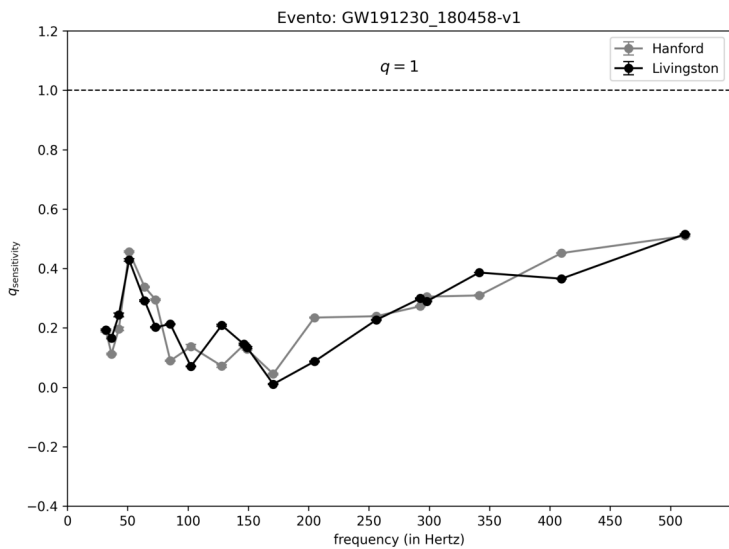
GW191204_171526-v1



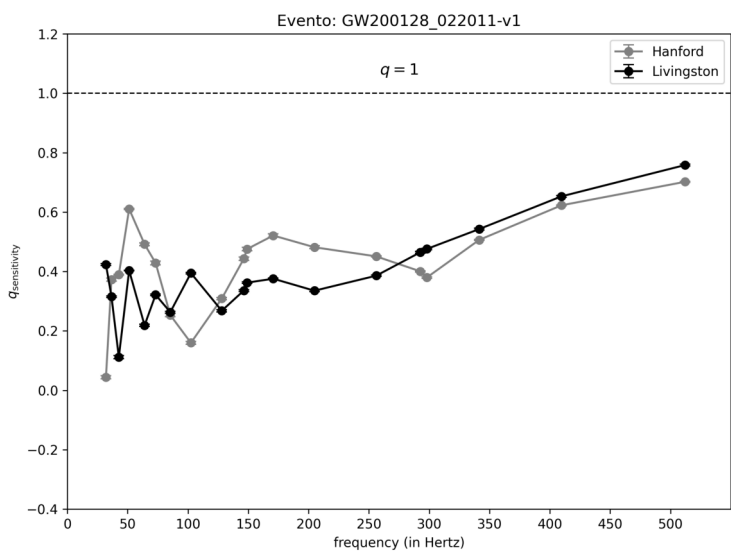
GW191215_223052-v1



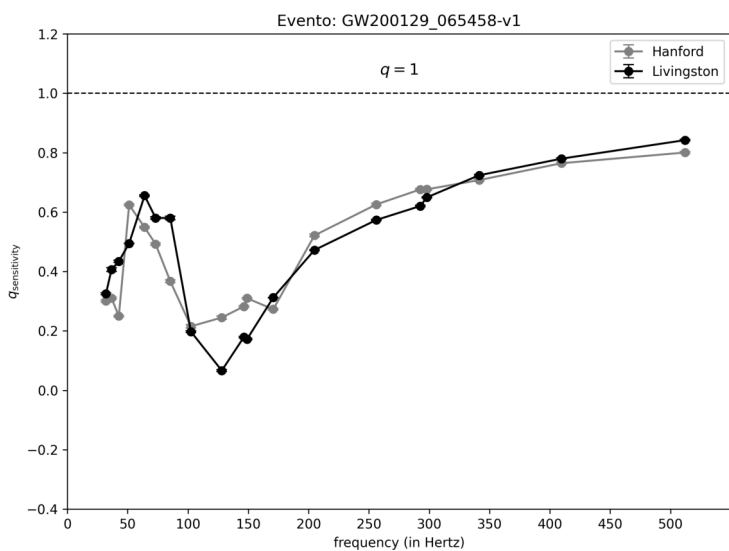
GW191222_033537-v1



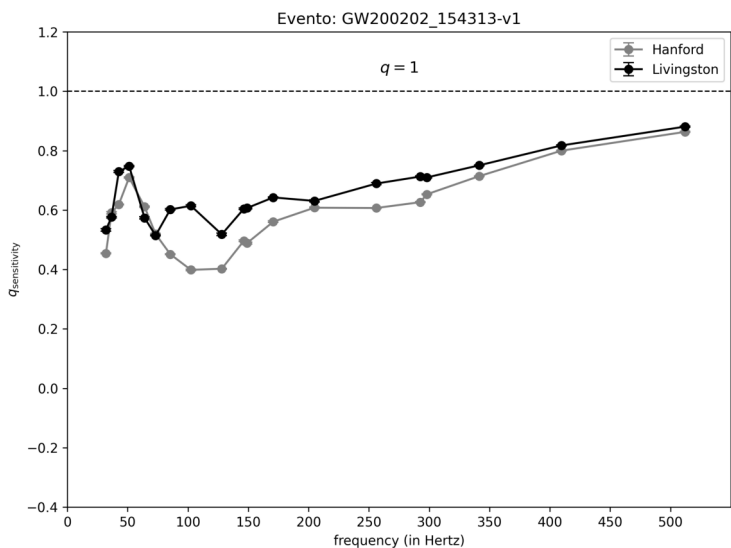
GW191230_180458-v1



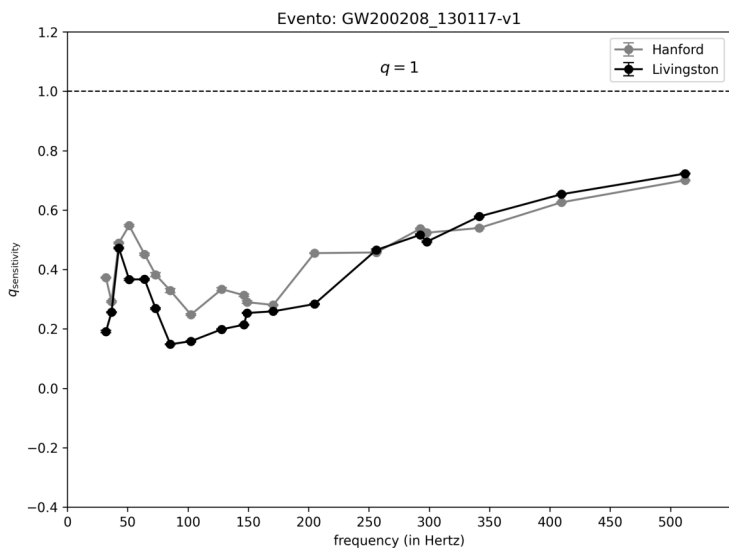
GW200128_022011-v1



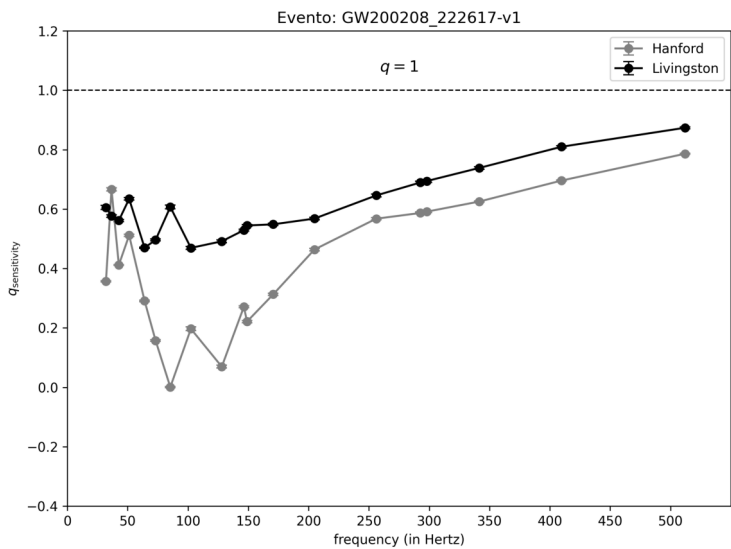
GW200129_065458-v1



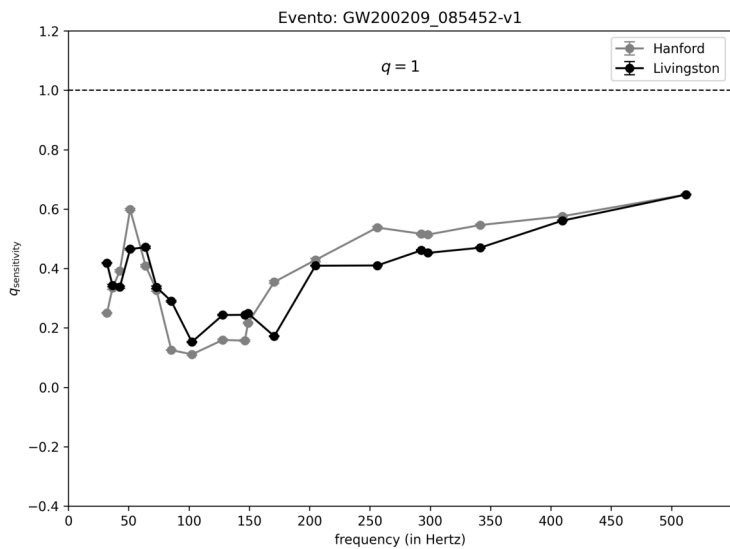
GW200202_154313-v1



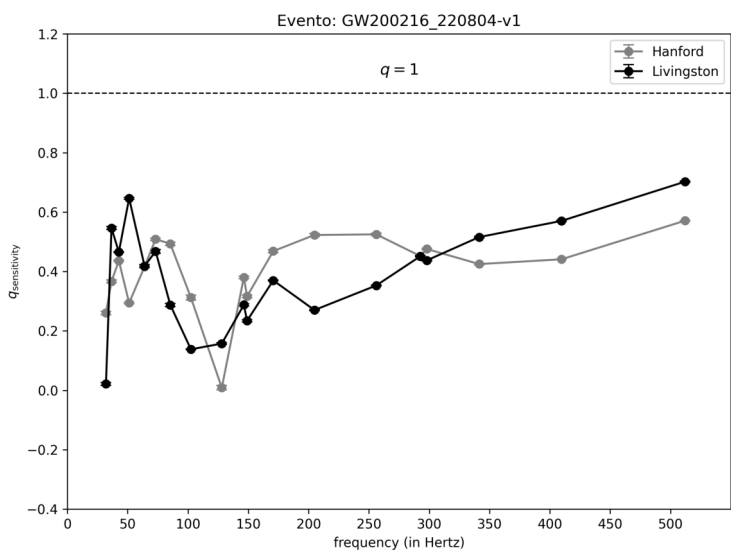
GW200208_130117-v1



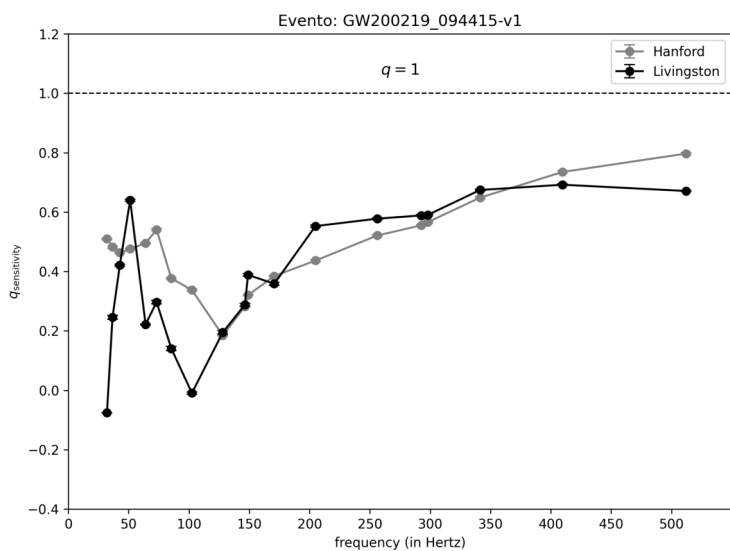
GW200208_222617-v1



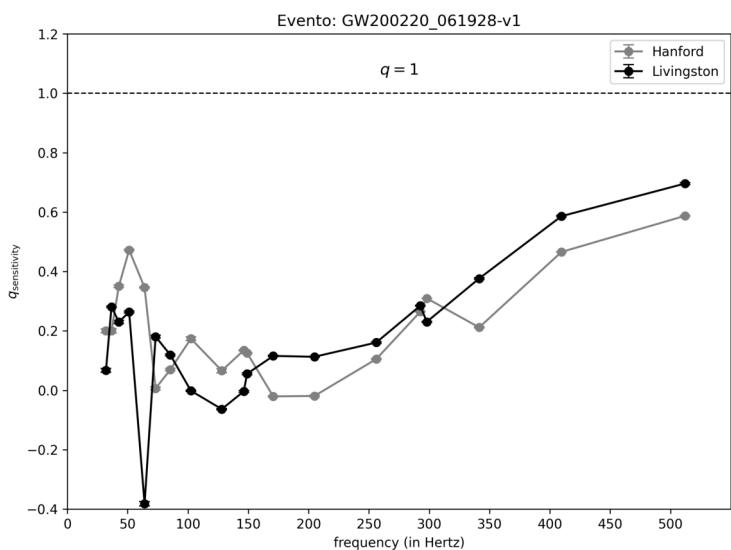
GW200209_085452-v1



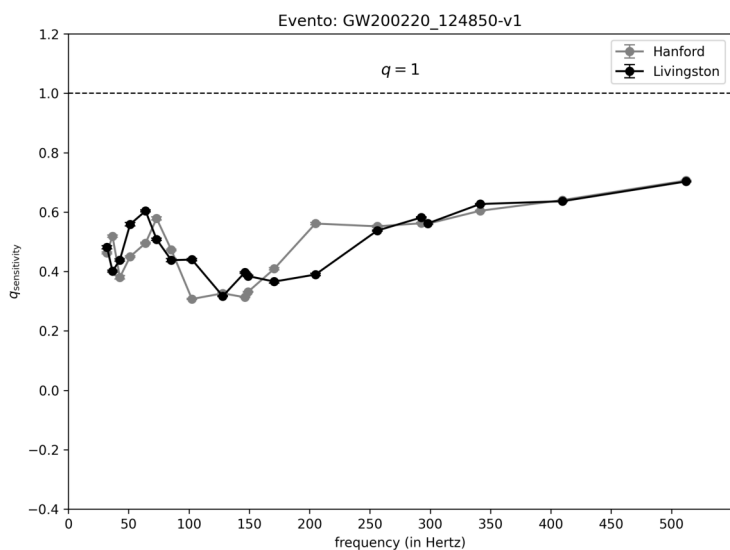
GW200216_220804-v1



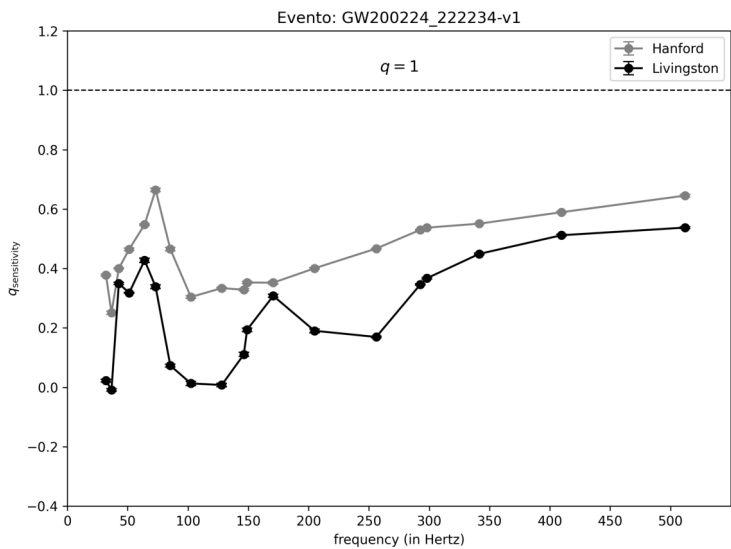
GW200219_094415-v1



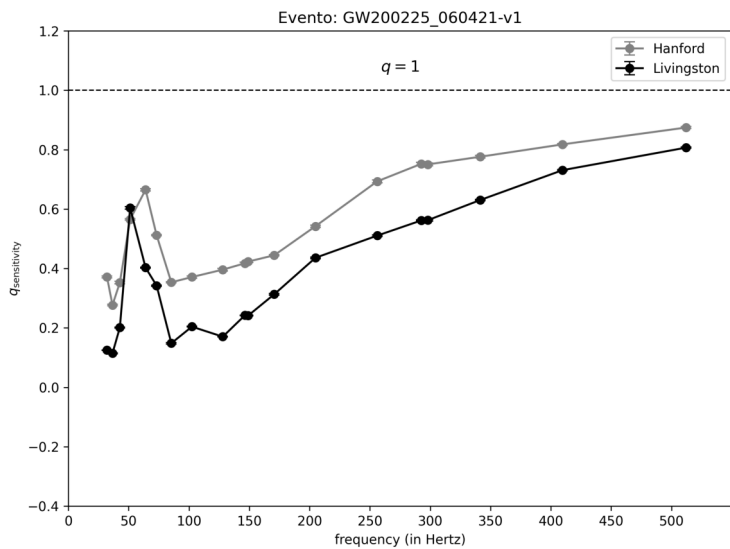
GW200220_061928-v1



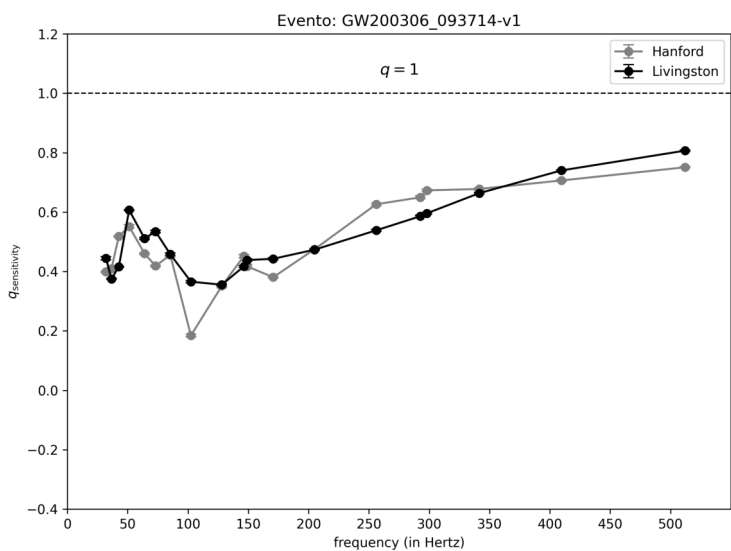
GW200220_124850-v1



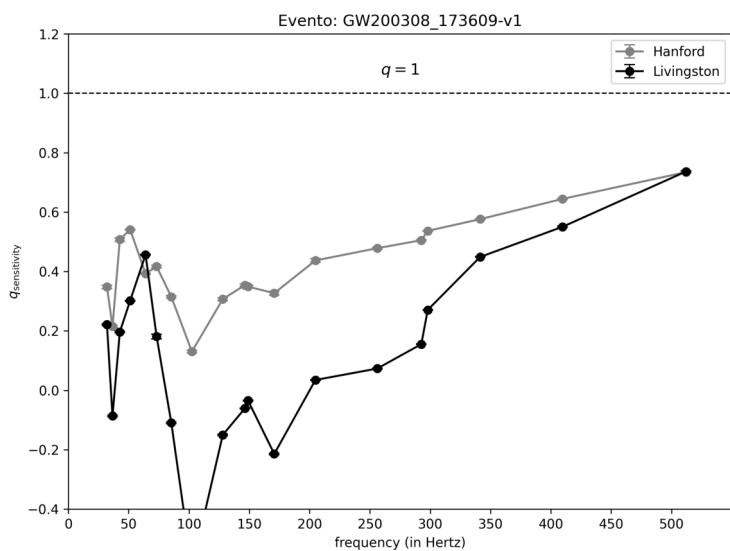
GW200224_222234-v1



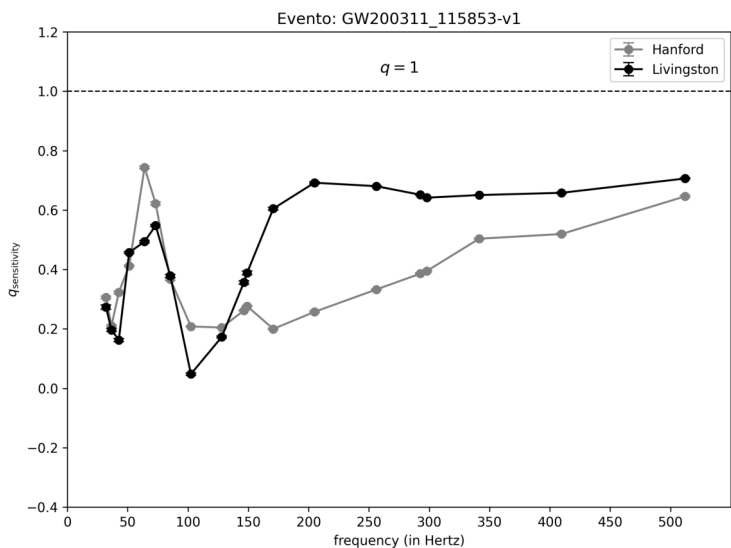
GW200225_060421-v1



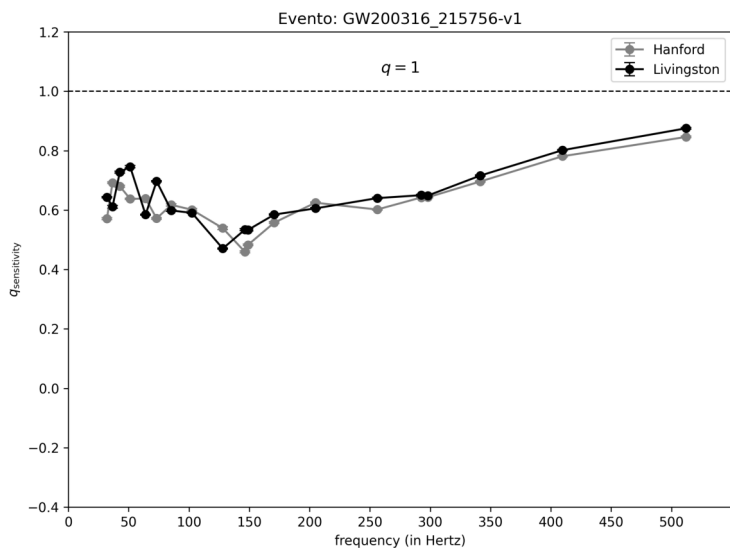
GW200306_093714-v1



GW200308_173609-v1

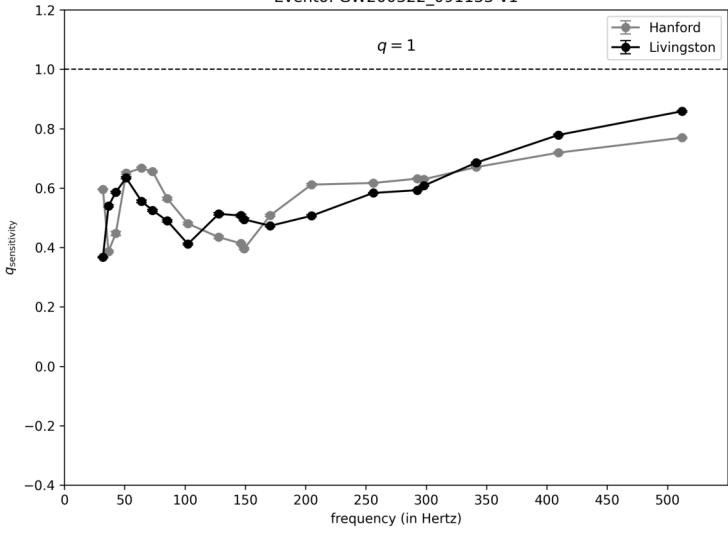


GW200311_115853-v1



GW200316_215756-v1

Evento: GW200322_091133-v1



GW200322_091133-v1

APÊNDICE F – Q RELAXAÇÃO

Durante a análise do parâmetro de relaxação (q_{rel}), alguns eventos do catálogo de ondas gravitacionais apresentaram inconsistências que comprometeram a aplicabilidade dos métodos de extração baseados na função de Informação Mútua Média (AMI). Esses problemas se manifestaram de diferentes formas, incluindo: ausência de dados em um dos detectores (Hanford ou Livingston), falhas no alinhamento temporal entre os sinais, dados corrompidos, séries temporais incompletas ou ruído excessivo que inviabilizou a detecção confiável do primeiro mínimo da função $I(\tau)$, fundamental para estimar o atraso informacional.

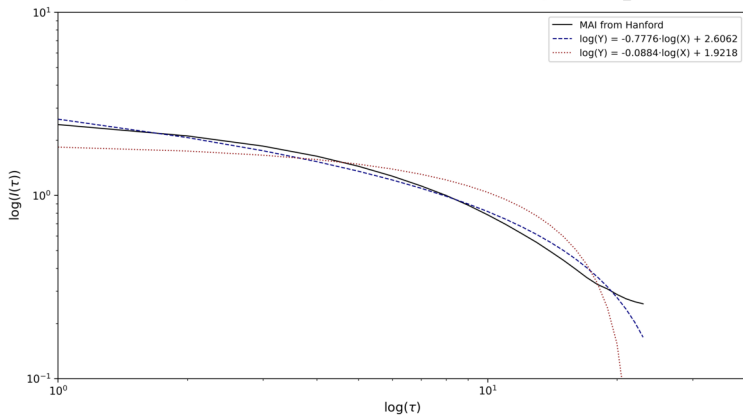
Foram identificados os seguintes eventos com inconsistências que impossibilitaram a extração confiável do índice (q_{rel}): GW190424_180648-v1, GW190620_030421-v2, GW190630_185205-v2, GW190708_232457-v2, GW190910_112807-v2, GW190925_232845-v1, GW191216_213338-v1, GW200112_155838-v1, GW200302_015811-v1.

Dentre esses eventos, alguns apresentaram ausência total de strain em um dos detectores no intervalo padrão de 32 segundos. A exclusão desses eventos da análise de (q_{rel}) teve como objetivo preservar a integridade metodológica do estudo e garantir a consistência estatística dos resultados obtidos. Dessa forma, somente os eventos que apresentaram dados completos e confiáveis em ambos os detectores, com detecção clara da defasagem temporal característica do mínimo local da AMI, foram considerados na amostra final de análise do parâmetro (q_{rel}).

Essa triagem rigorosa reforça a metodologia adotada e assegura que as conclusões obtidas estejam fundamentadas em dados observacionais de alta qualidade, compatíveis com os pressupostos teóricos da estatística não extensiva de Tsallis aplicados à caracterização de sinais gravitacionais complexos.

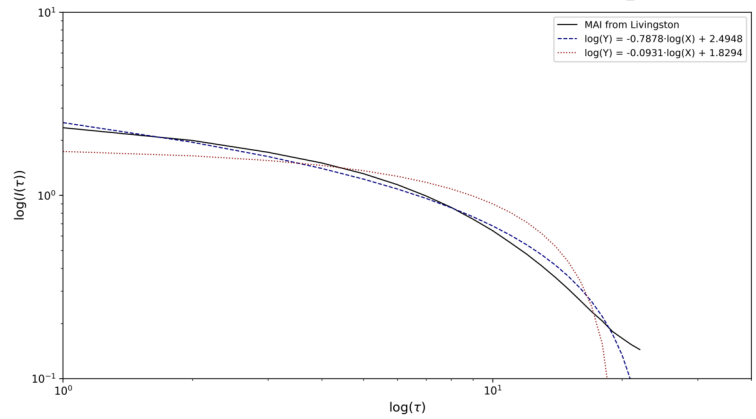
Catálogo de Ondas Gravitacionais q_relaxation.

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW150914-v3-JANELA-H1_cut



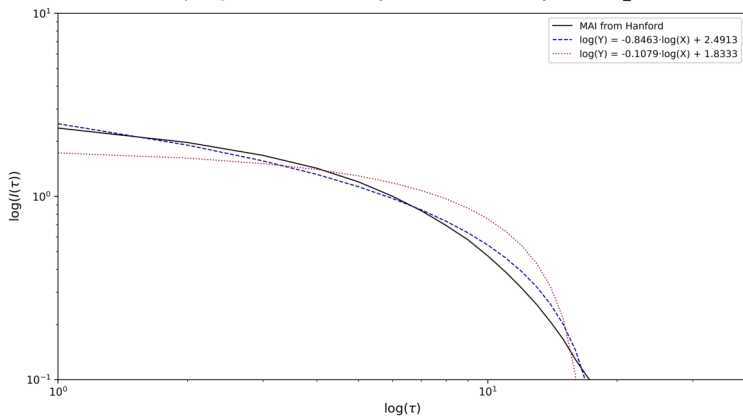
GW150914-v3-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW150914-v3-JANELA-L1_cut



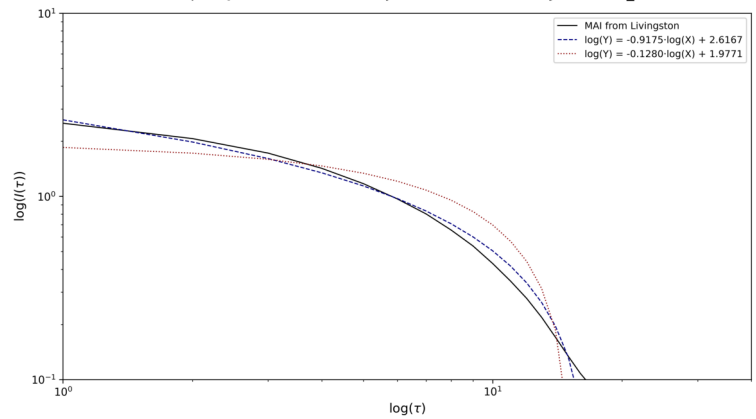
GW150914-v3-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW151012-v3-JANELA-H1_cut



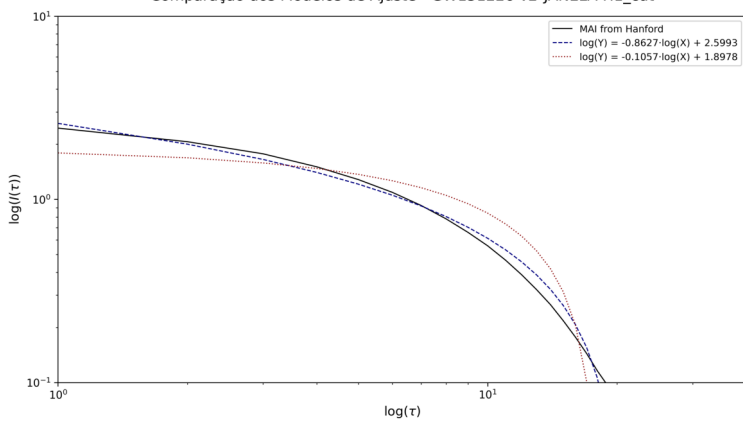
GW151012-v3-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW151012-v3-JANELA-L1_cut



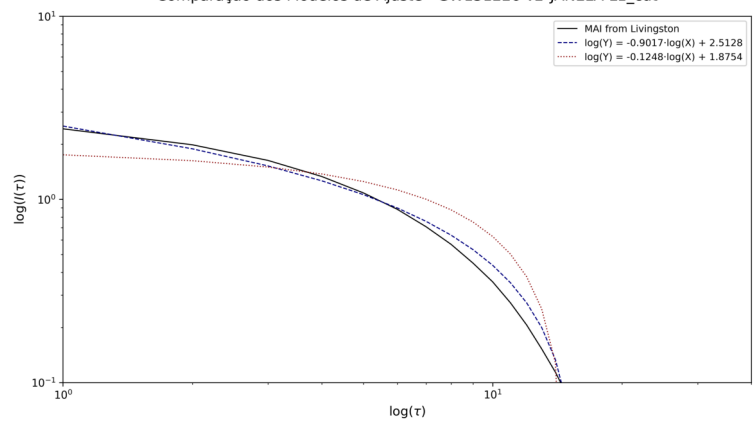
GW151012-v3-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW151226-v2-JANELA-H1_cut



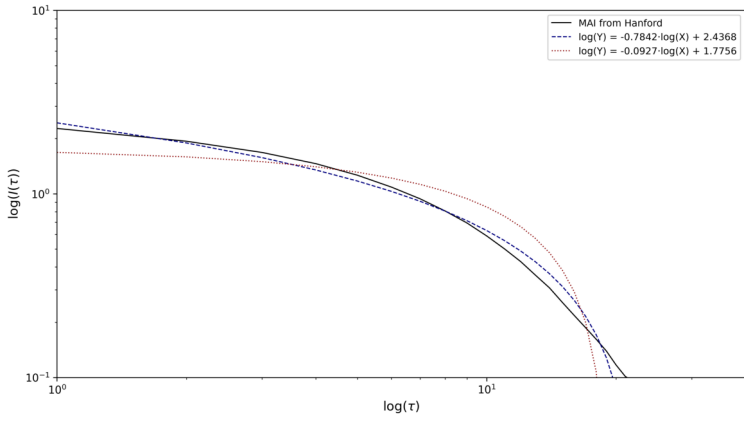
GW151226-v2-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW151226-v2-JANELA-L1_cut



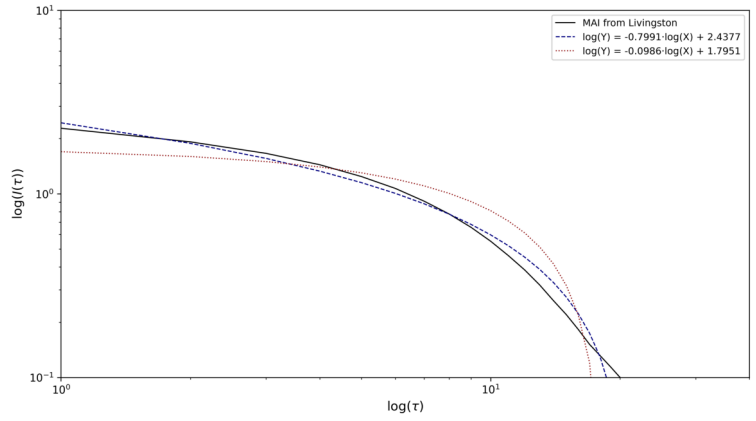
GW151226-v2-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW170104-v2-JANELA-H1_cut



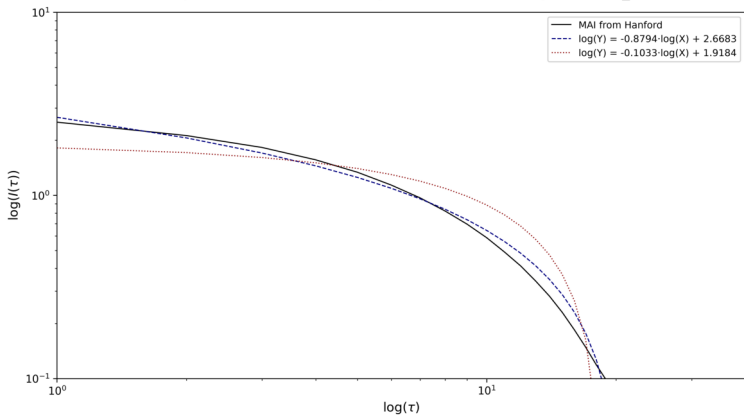
GW170104-v2-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW170104-v2-JANELA-L1_cut



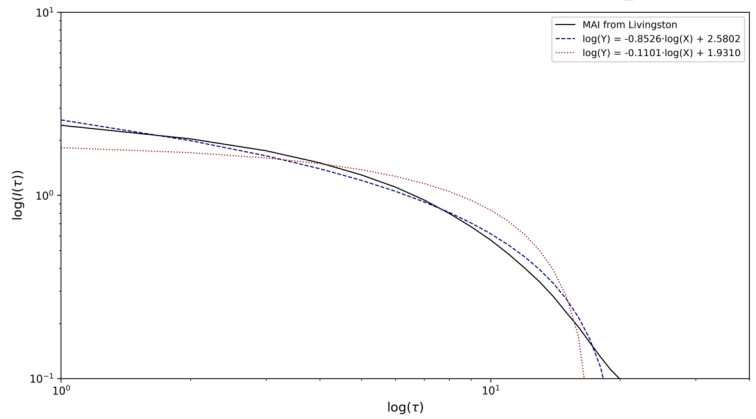
GW170104-v2-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW170608-v3-JANELA-H1_cut



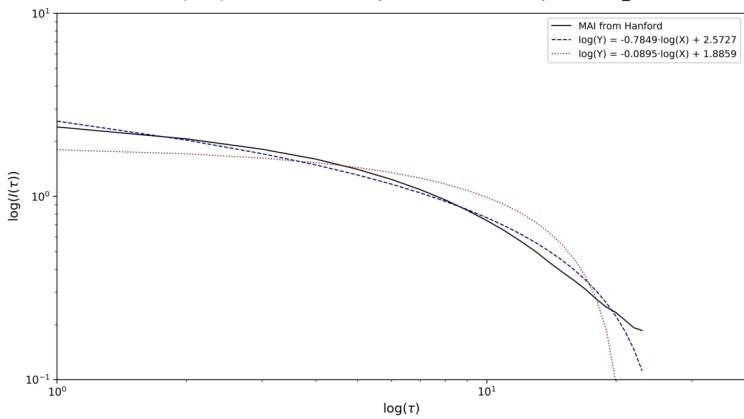
GW170608-v3-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW170608-v3-JANELA-L1_cut



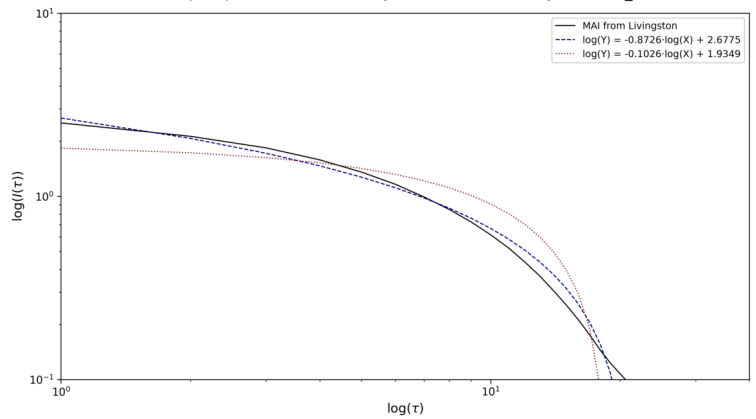
GW170608-v3-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW170729-v1-JANELA-H1_cut



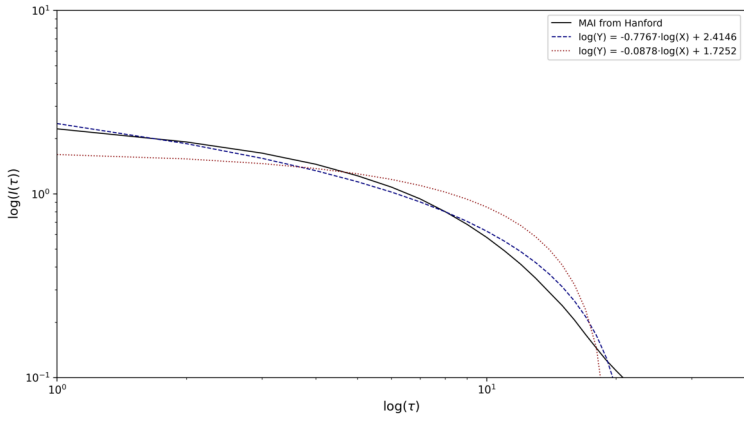
GW170729-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW170729-v1-JANELA-L1_cut



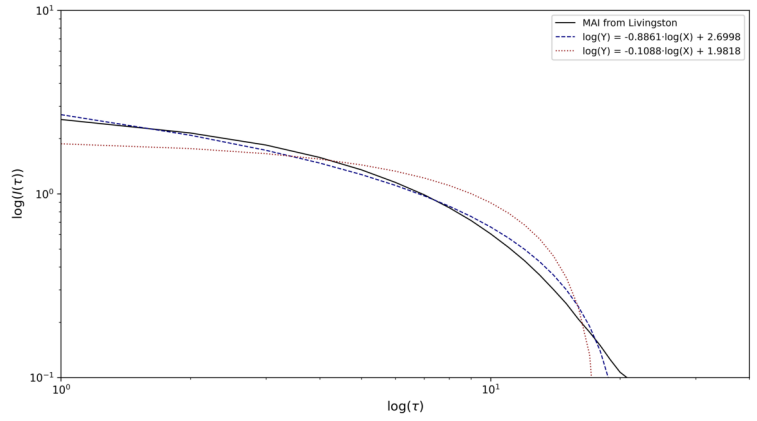
GW170729-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW170809-v1-JANELA-H1_cut



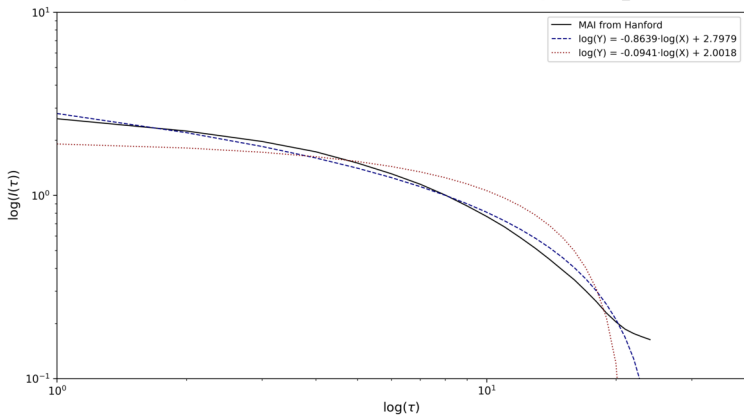
GW170809-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW170809-v1-JANELA-L1_cut



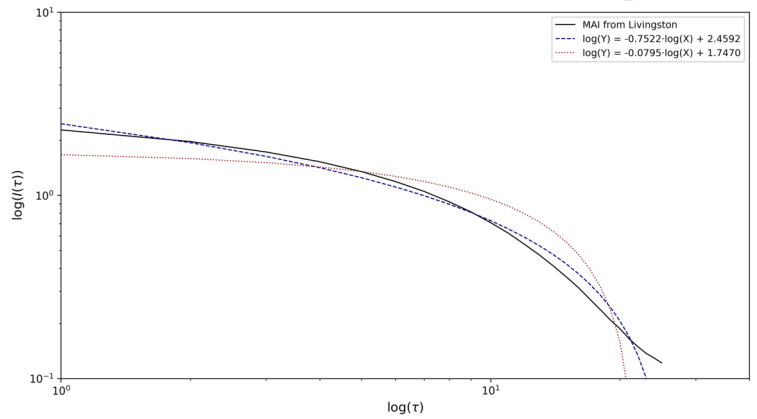
GW170809-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW170814-v3-JANELA-H1_cut



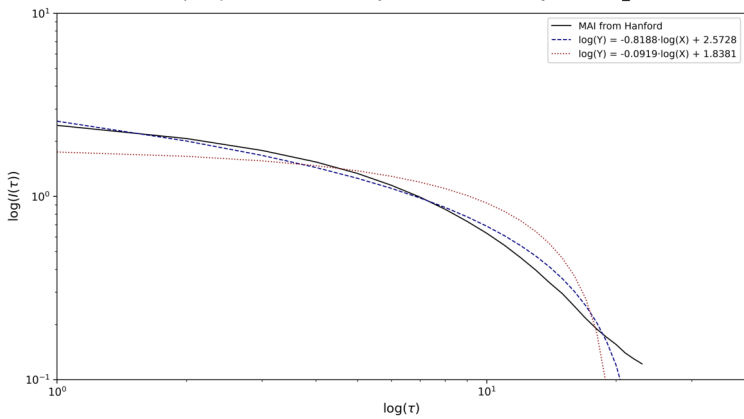
GW170814-v3-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW170814-v3-JANELA-L1_cut



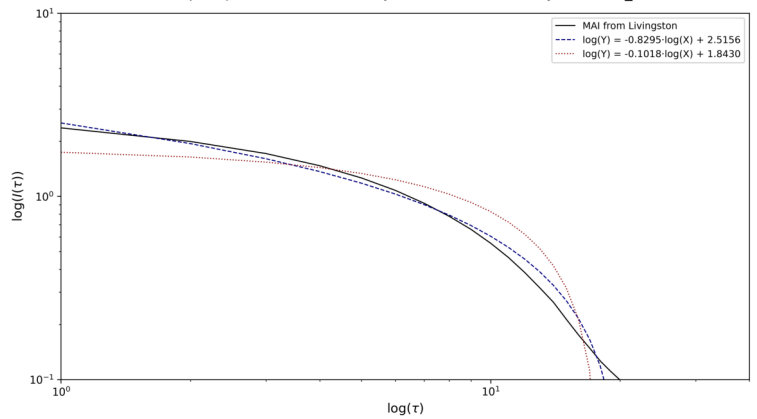
GW170814-v3-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW170818-v1-JANELA-H1_cut



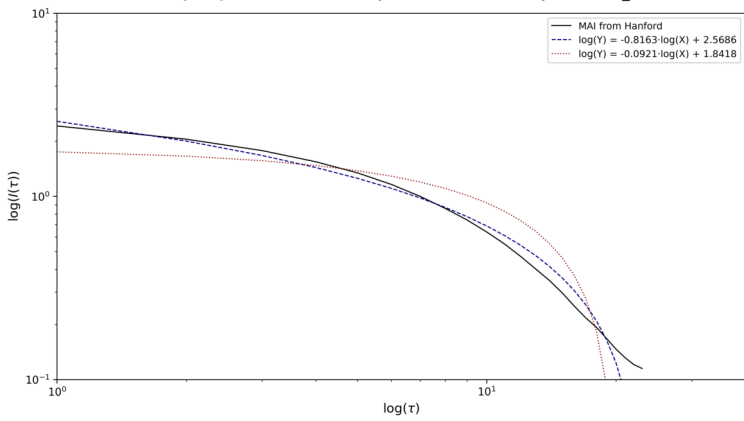
GW170818-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW170818-v1-JANELA-L1_cut



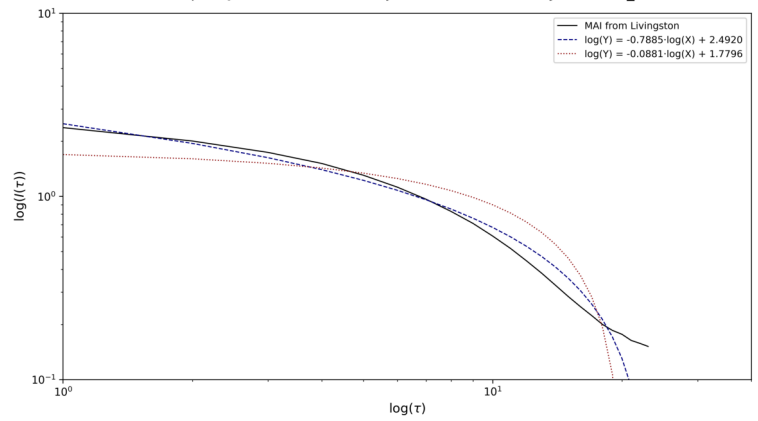
GW170818-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW170823-v1-JANELA-H1_cut



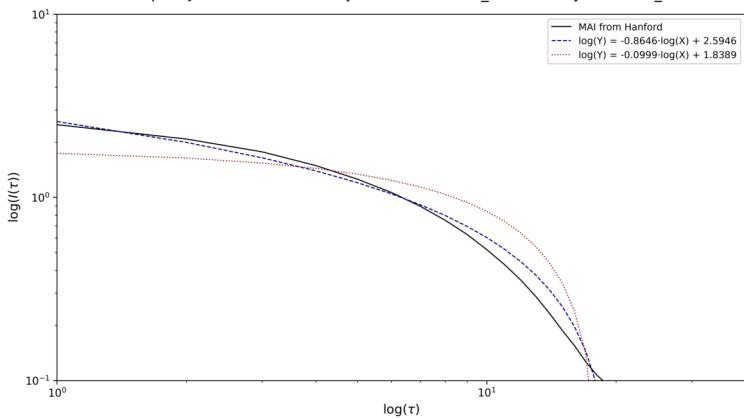
GW170823-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW170823-v1-JANELA-L1_cut



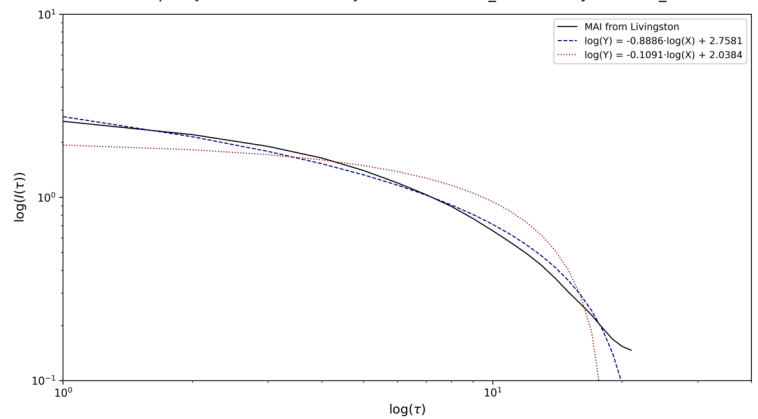
GW170823-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190403_051519-v1-JANELA-H1_cut



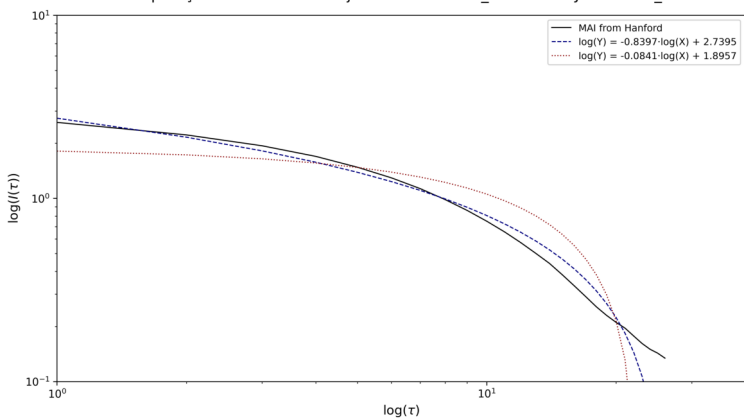
GW190403_051519-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190403_051519-v1-JANELA-L1_cut



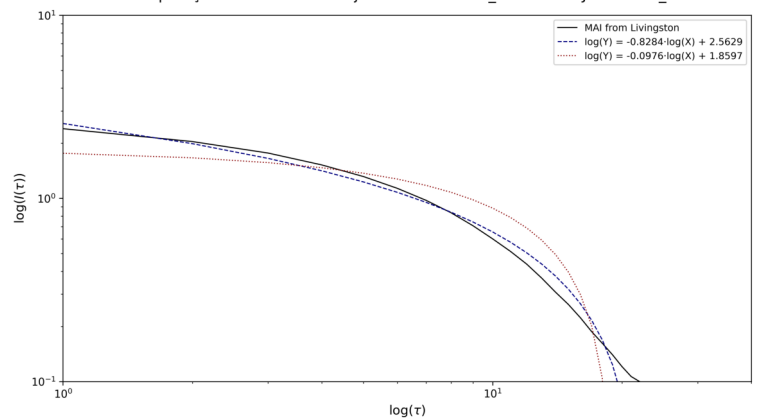
GW190403_051519-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190408_181802-v2-JANELA-H1_cut



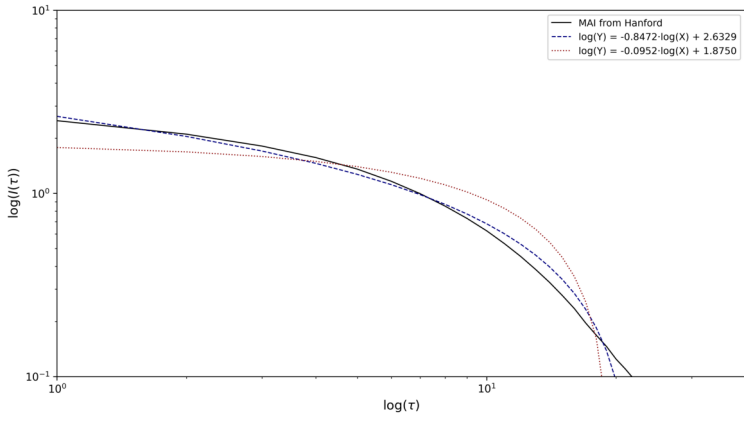
GW190408_181802-v2-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190408_181802-v2-JANELA-L1_cut



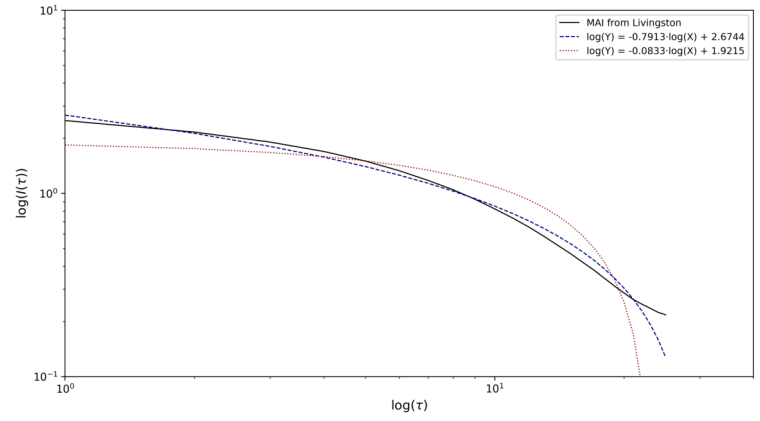
GW190408_181802-v2-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190412-v3-JANELA-H1_cut



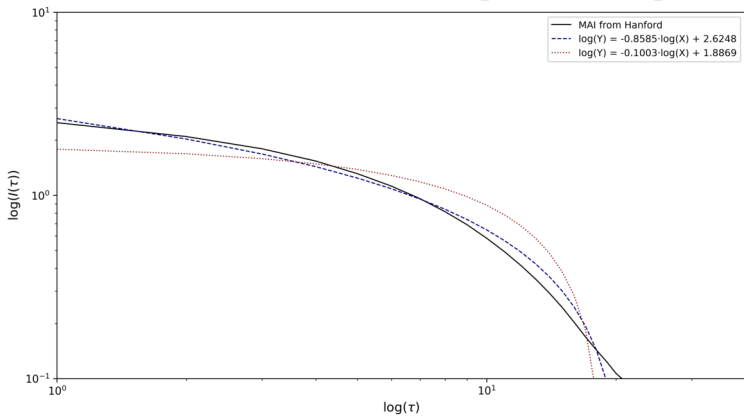
GW190412-v3-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190412-v3-JANELA-L1_cut



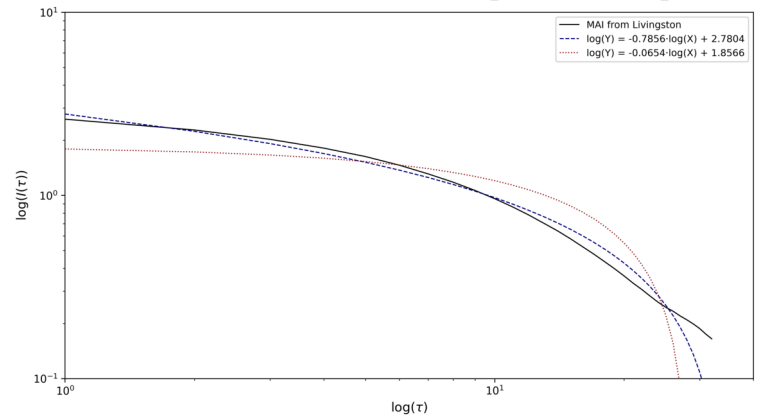
GW190412-v3-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190412_053044-v4-JANELA-H1_cut



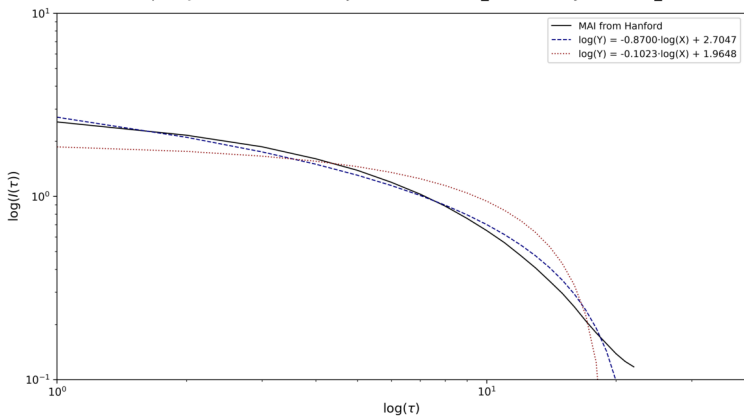
GW190412_053044-v4-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190412_053044-v4-JANELA-L1_cut



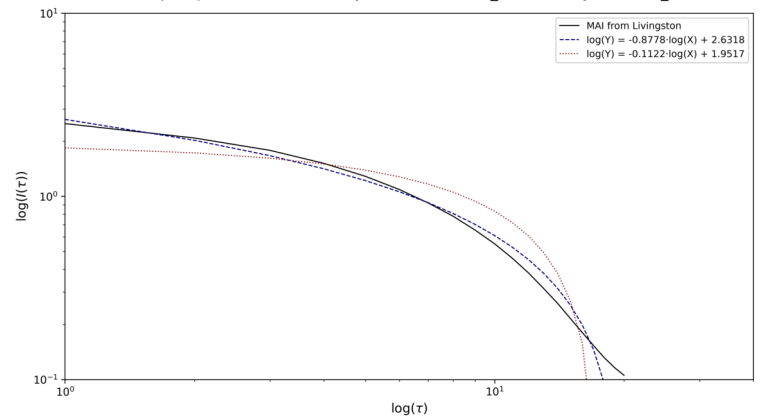
GW190412_053044-v4-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190413_052954-v2-JANELA-H1_cut



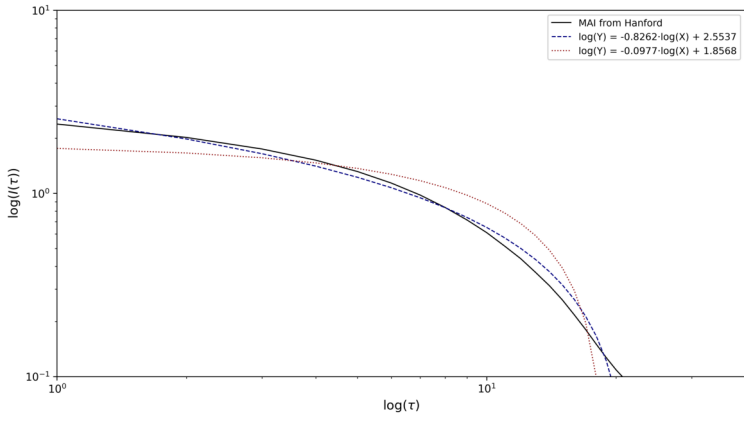
GW190413_052954-v2-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190413_052954-v2-JANELA-L1_cut



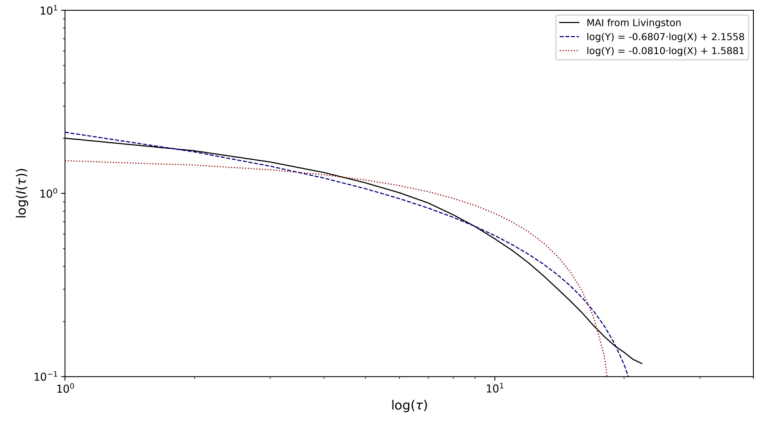
GW190413_052954-v2-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190413_134308-v2-JANELA-H1_cut



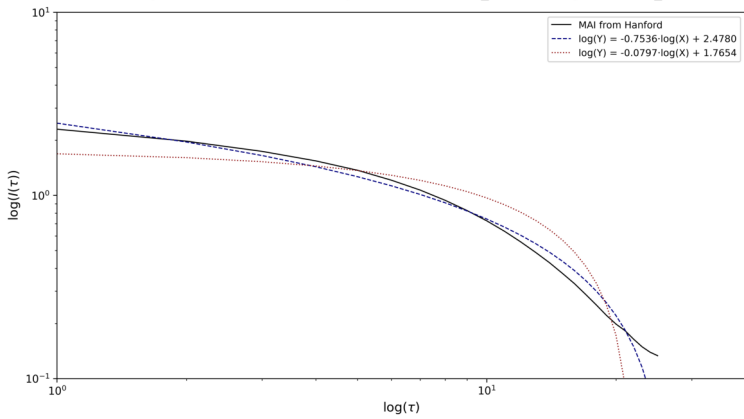
GW190413_134308-v2-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190413_134308-v2-JANELA-L1_cut



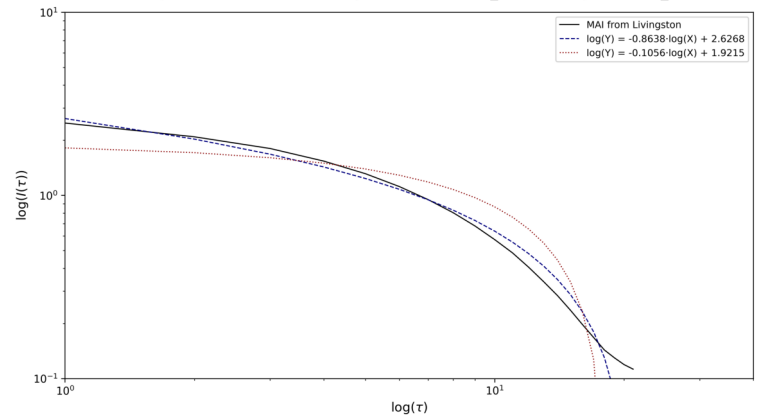
GW190413_134308-v2-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190421_213856-v2-JANELA-H1_cut



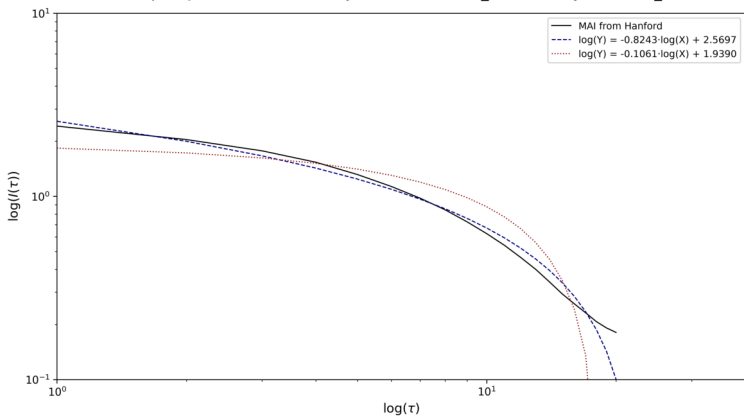
GW190421_213856-v2-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190421_213856-v2-JANELA-L1_cut



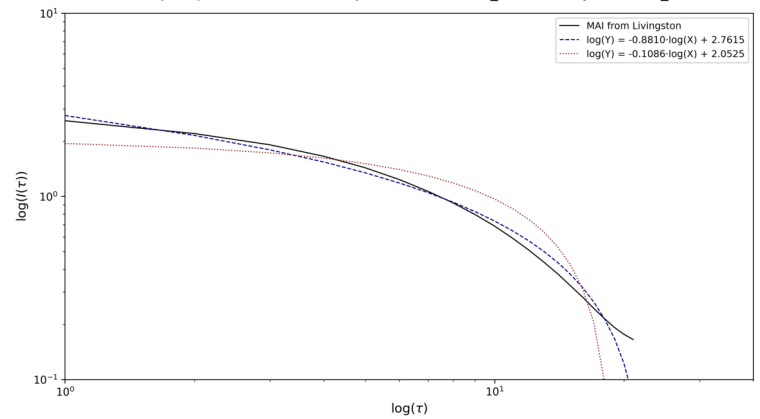
GW190421_213856-v2-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190426_190642-v1-JANELA-H1_cut



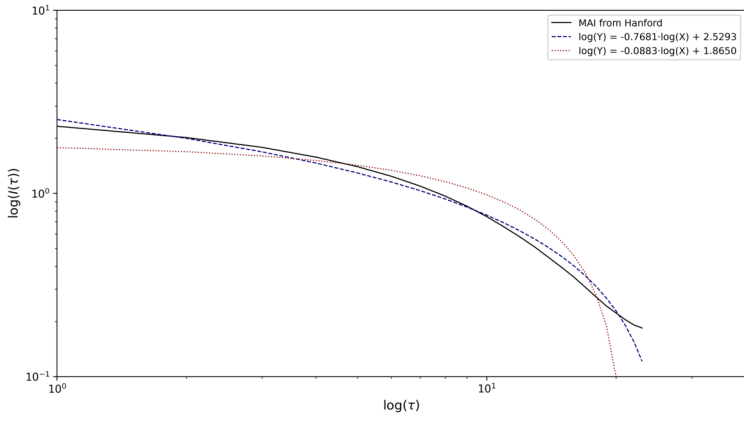
GW190426_190642-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190426_190642-v1-JANELA-L1_cut



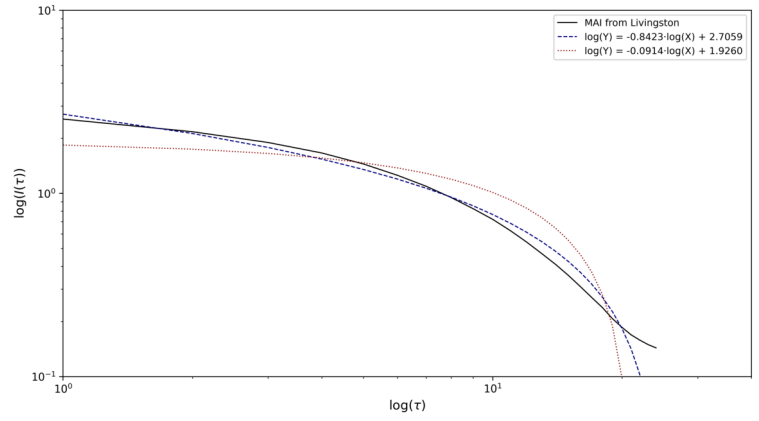
GW190426_190642-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190503_185404-v2-JANELA-H1_cut



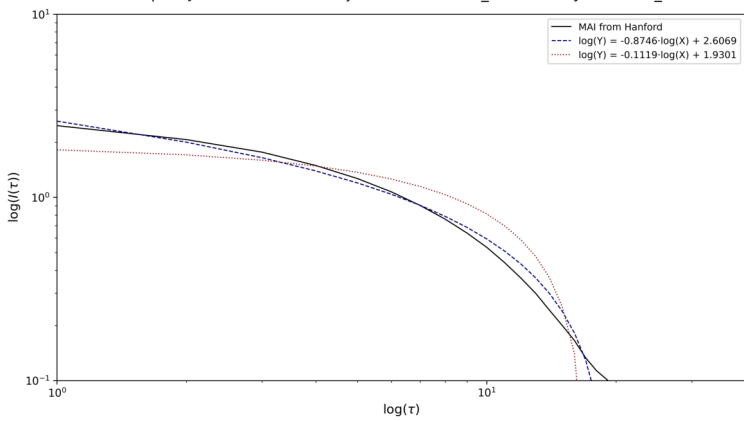
GW190503_185404-v2-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190503_185404-v2-JANELA-L1_cut



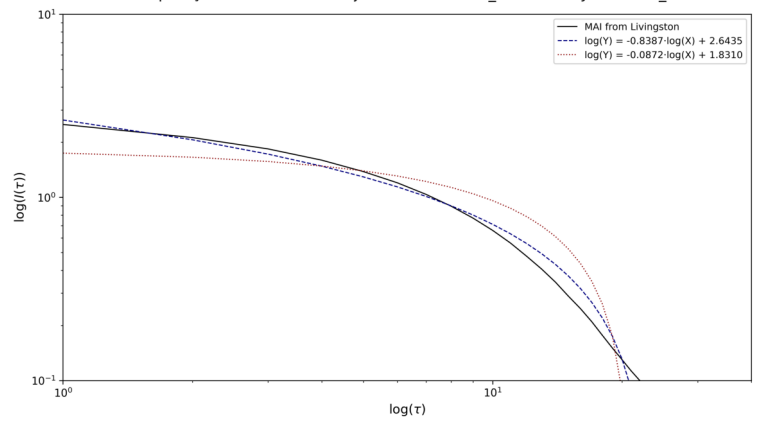
GW190503_185404-v2-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190512_180714-v2-JANELA-H1_cut



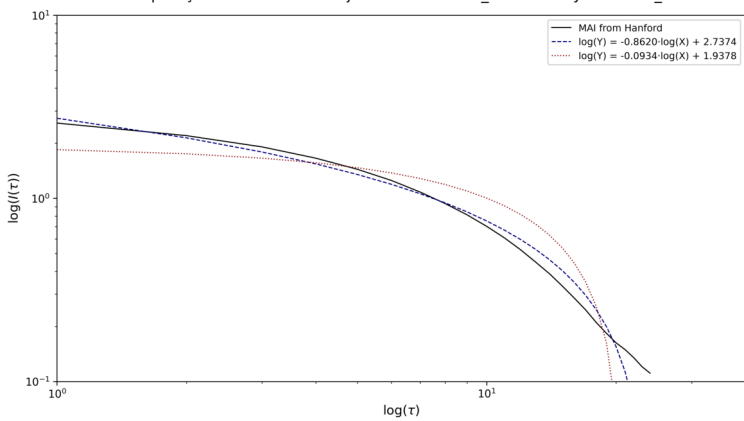
GW190512_180714-v2-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190512_180714-v2-JANELA-L1_cut



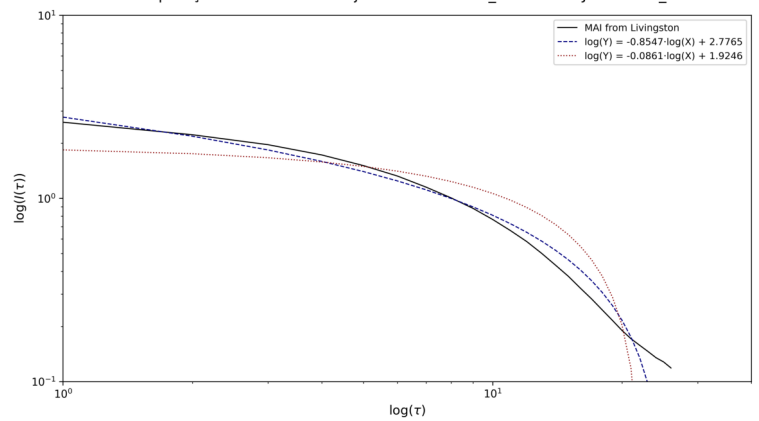
GW190512_180714-v2-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190513_205428-v2-JANELA-H1_cut



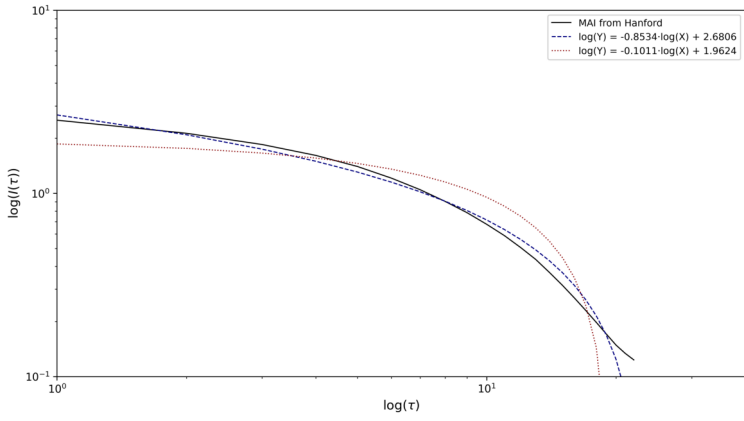
GW190513_205428-v2-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190513_205428-v2-JANELA-L1_cut



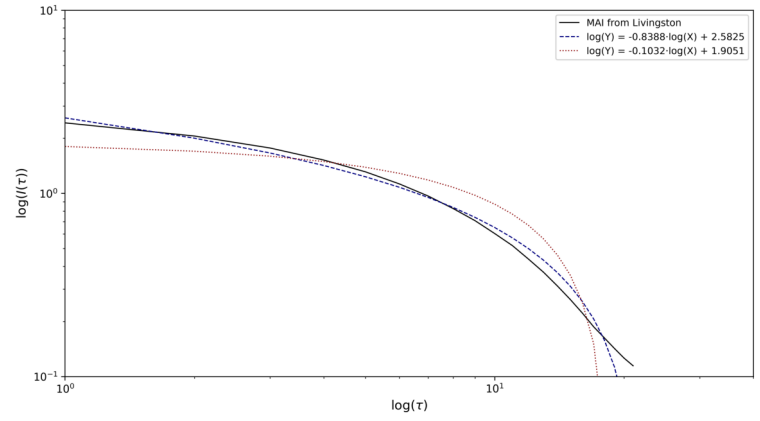
GW190513_205428-v2-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190514_065416-v2-JANELA-H1_cut



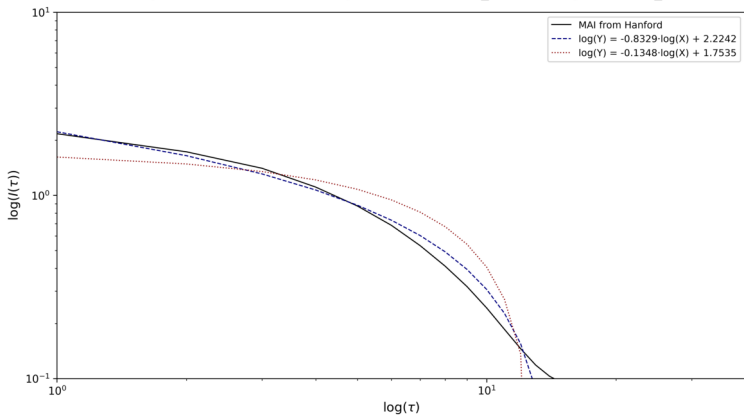
GW190514_065416-v2-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190514_065416-v2-JANELA-L1_cut



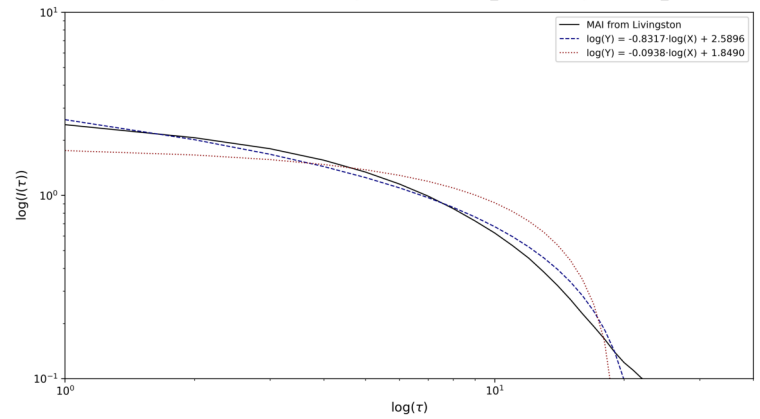
GW190514_065416-v2-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190517_055101-v2-JANELA-H1_cut



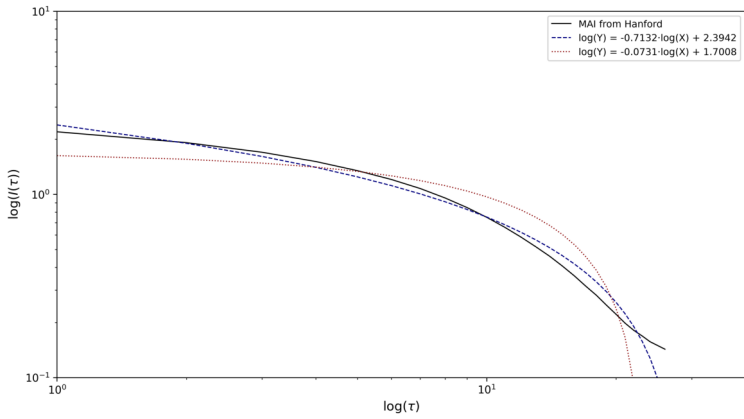
GW190517_055101-v2-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190517_055101-v2-JANELA-L1_cut



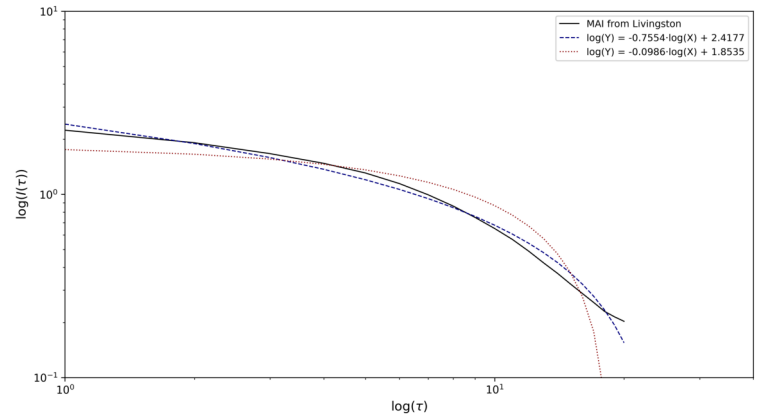
GW190517_055101-v2-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190519_153544-v2-JANELA-H1_cut



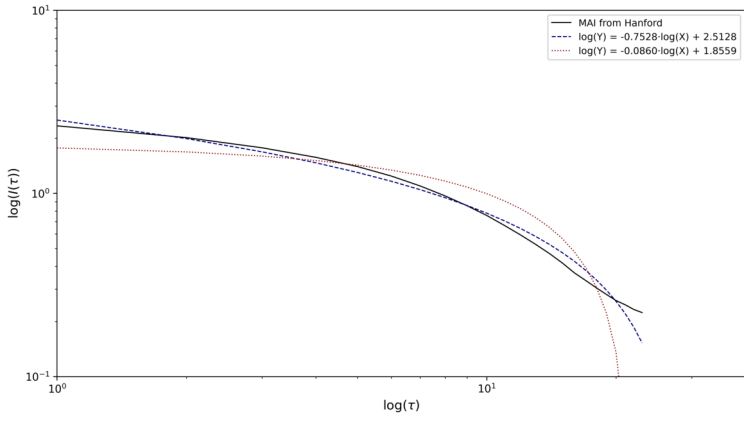
GW190519_153544-v2-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190519_153544-v2-JANELA-L1_cut



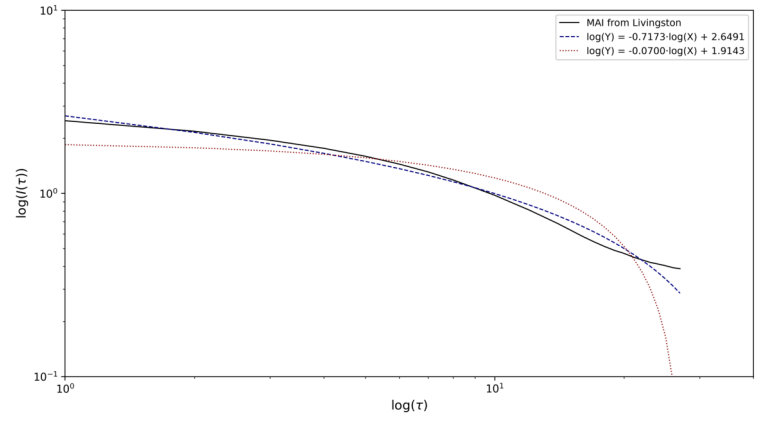
GW190519_153544-v2-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190521-v3-JANELA-H1_cut



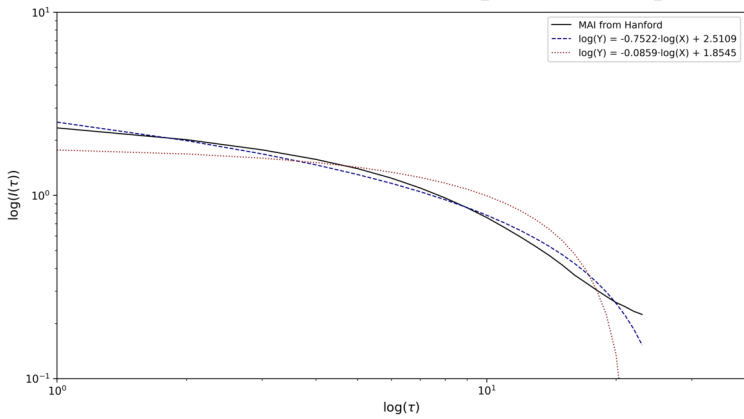
GW190521-v3-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190521-v3-JANELA-L1_cut



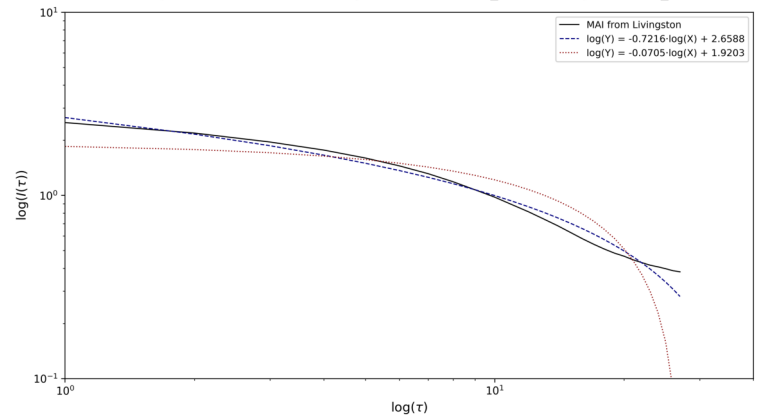
GW190521-v3-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190521_030229-v4-JANELA-H1_cut



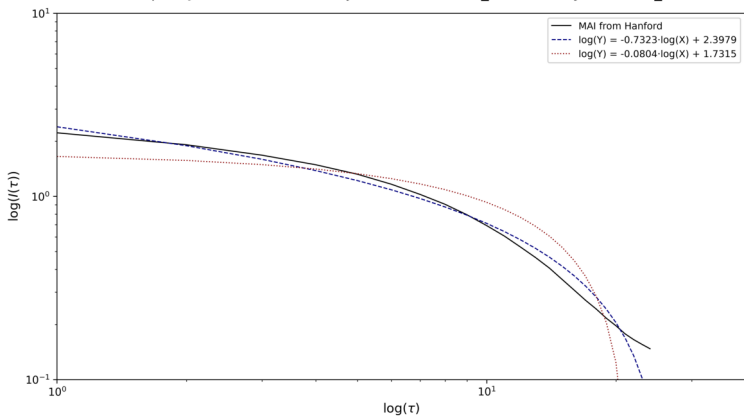
GW190521_030229-v4-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190521_030229-v4-JANELA-L1_cut



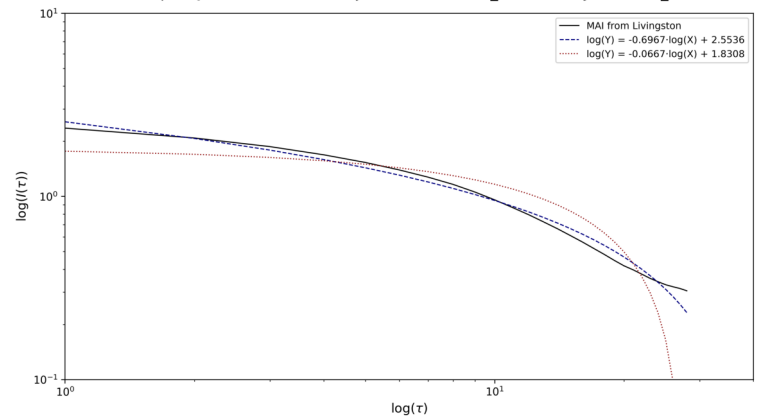
GW190521_030229-v4-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190521_074359-v2-JANELA-H1_cut



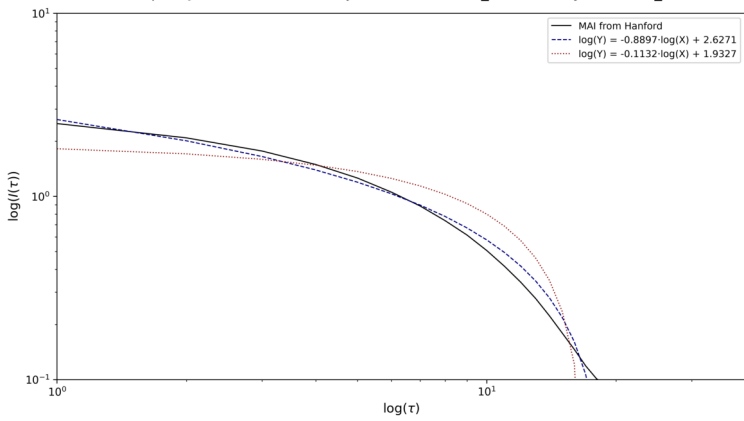
GW190521_074359-v2-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190521_074359-v2-JANELA-L1_cut



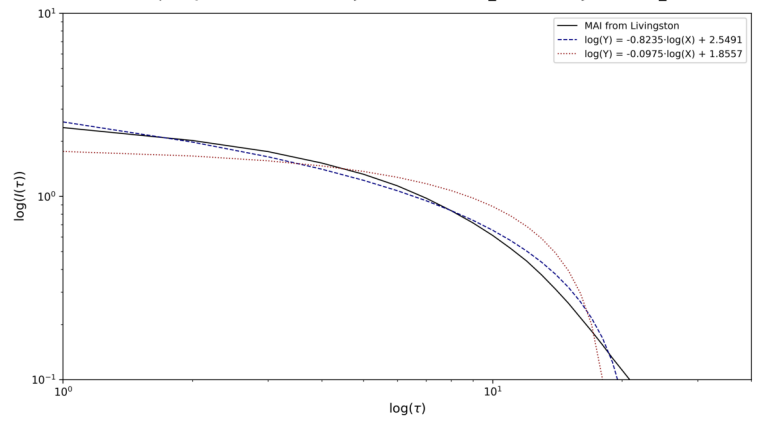
GW190521_074359-v2-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190527_092055-v2-JANELA-H1_cut



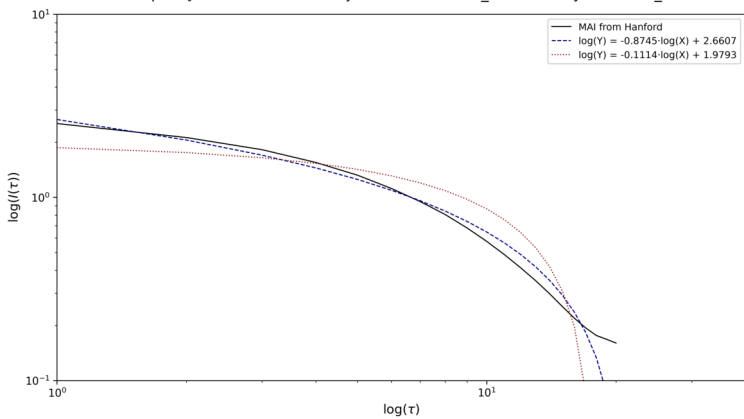
GW190527_092055-v2-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190527_092055-v2-JANELA-L1_cut



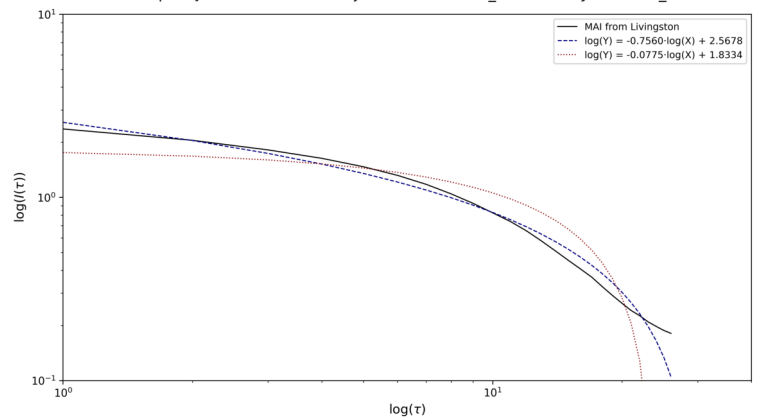
GW190527_092055-v2-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190602_175927-v2-JANELA-H1_cut



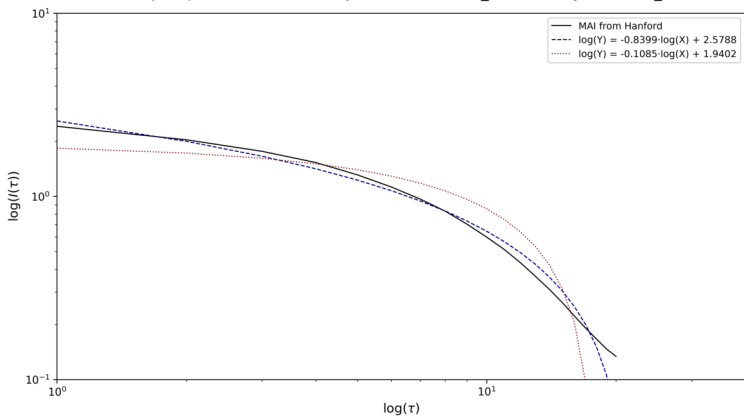
GW190602_175927-v2-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190602_175927-v2-JANELA-L1_cut



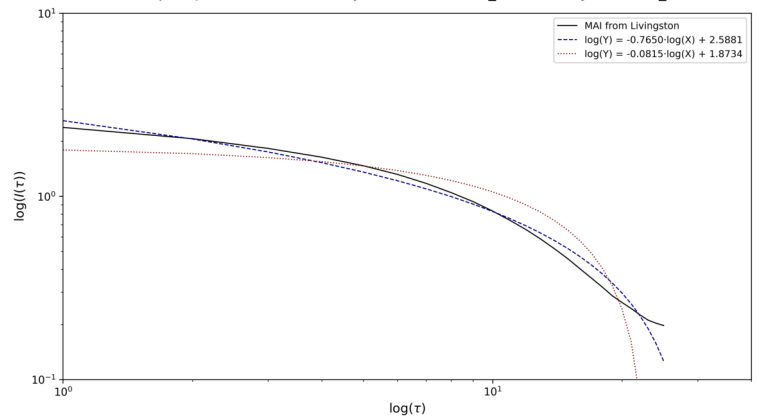
GW190602_175927-v2-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190701_203306-v2-JANELA-H1_cut



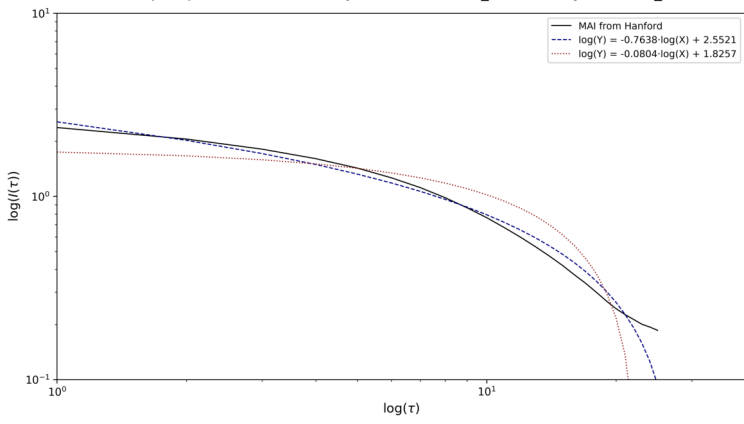
GW190701_203306-v2-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190701_203306-v2-JANELA-L1_cut



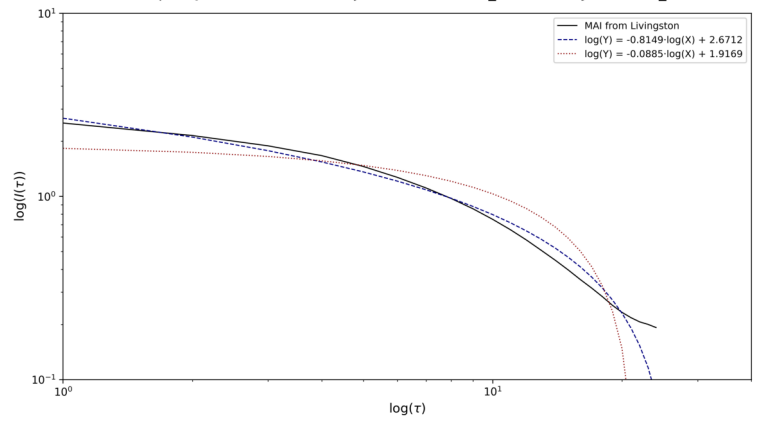
GW190701_203306-v2-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190706_222641-v2-JANELA-H1_cut



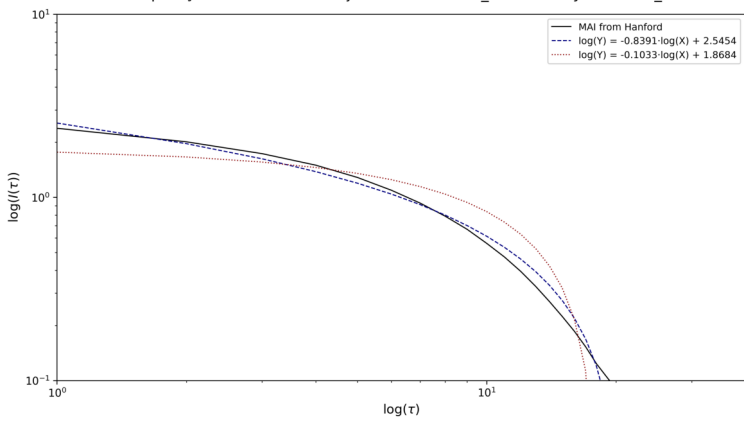
GW190706_222641-v2-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190706_222641-v2-JANELA-L1_cut



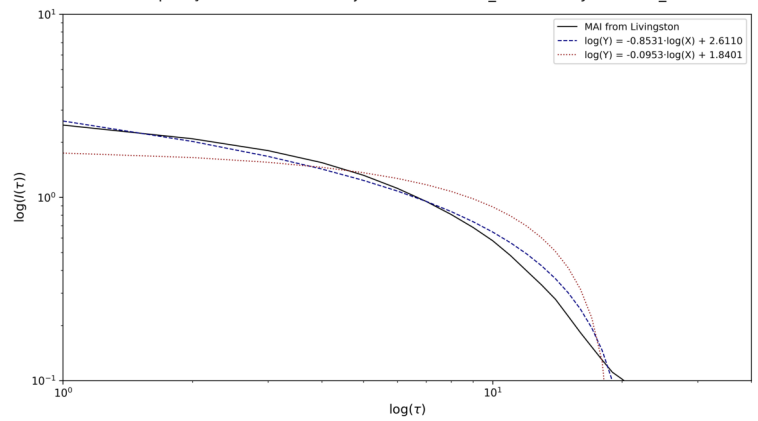
GW190706_222641-v2-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190707_093326-v2-JANELA-H1_cut



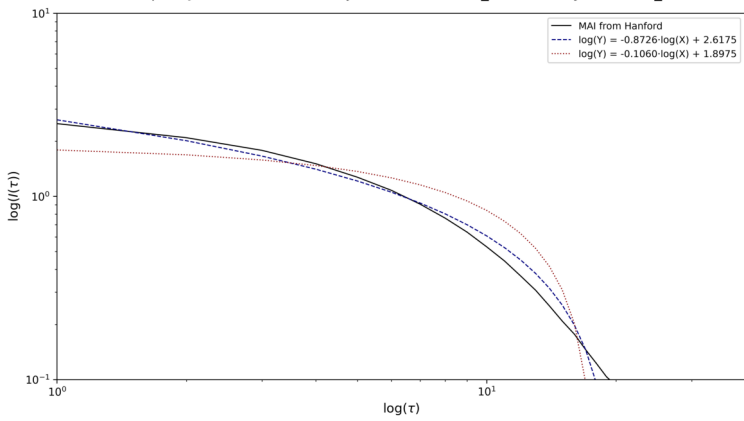
GW190707_093326-v2-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190707_093326-v2-JANELA-L1_cut



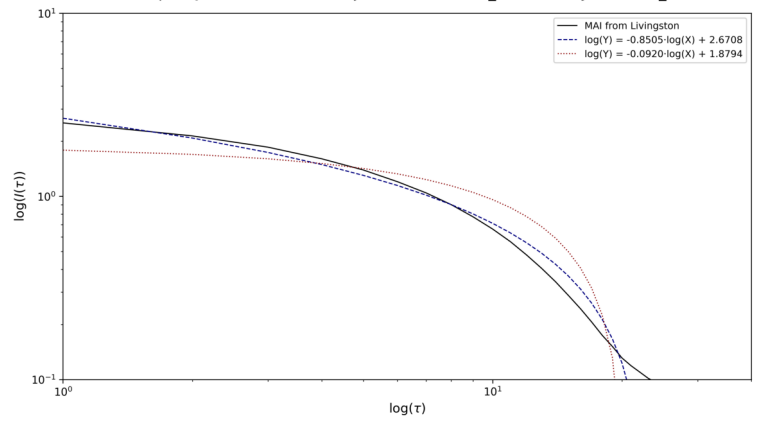
GW190707_093326-v2-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190719_215514-v2-JANELA-H1_cut



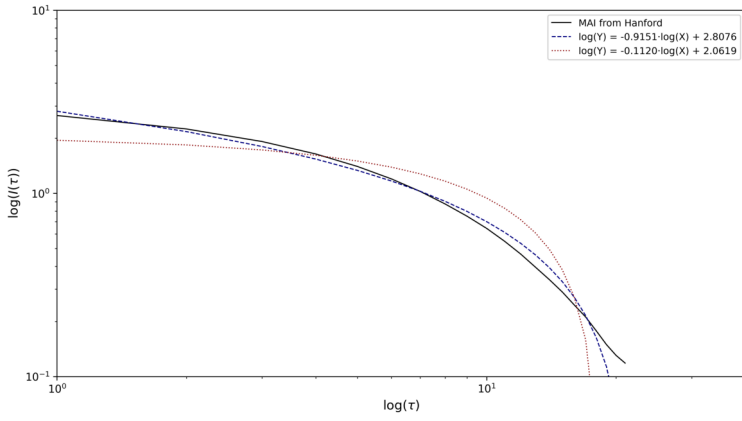
GW190719_215514-v2-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190719_215514-v2-JANELA-L1_cut



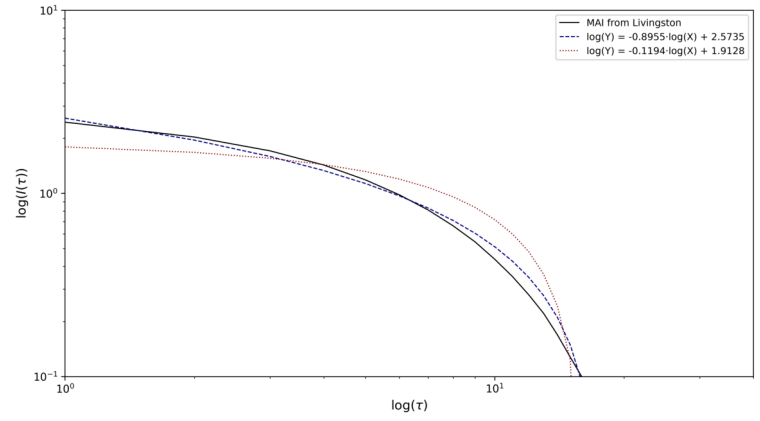
GW190719_215514-v2-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190720_000836-v2-JANELA-H1_cut



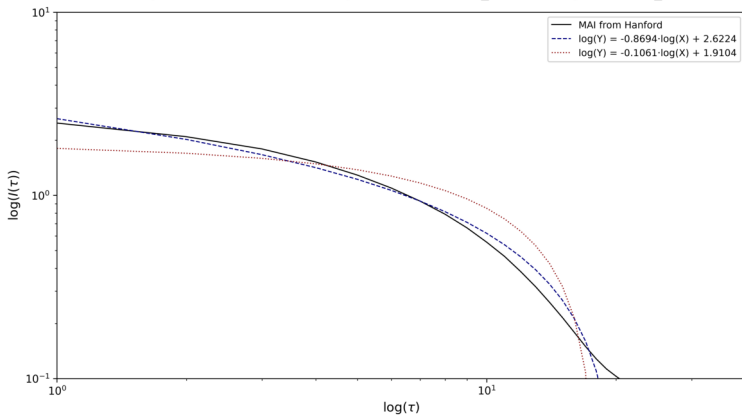
GW190720_000836-v2-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190720_000836-v2-JANELA-L1_cut



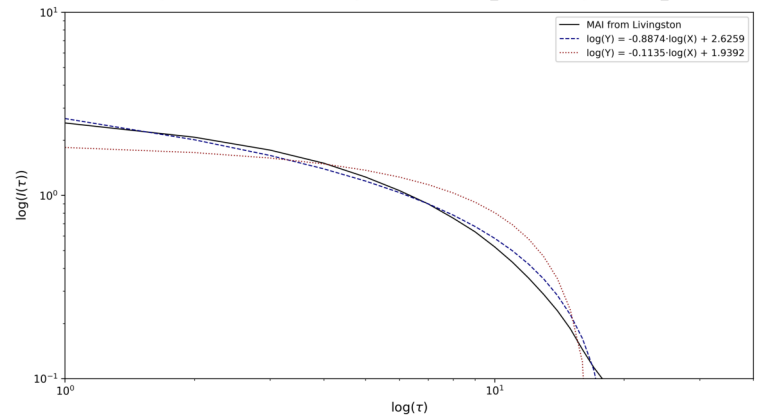
GW190720_000836-v2-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190725_174728-v1-JANELA-H1_cut



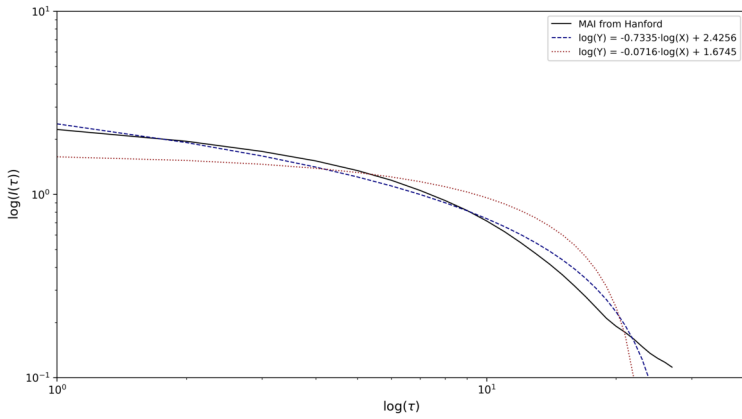
GW190725_174728-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190725_174728-v1-JANELA-L1_cut



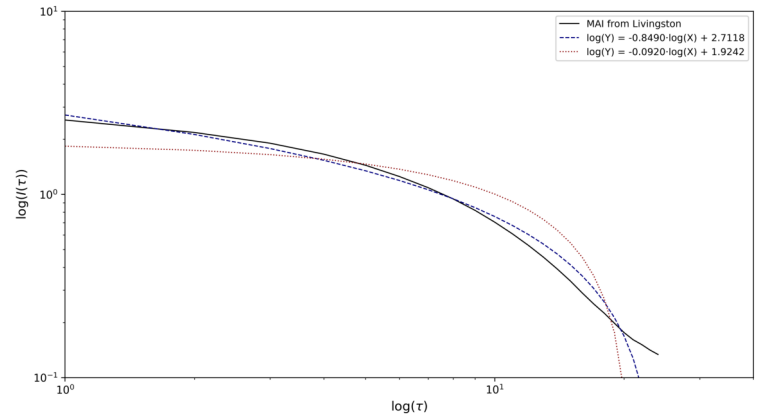
GW190725_174728-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190727_060333-v2-JANELA-H1_cut



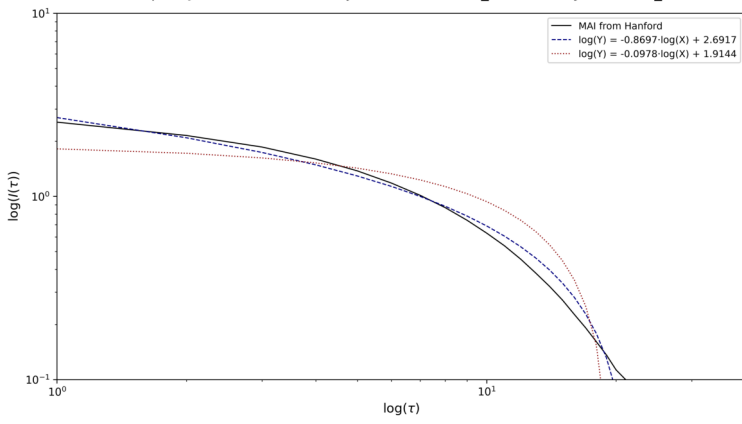
GW190727_060333-v2-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190727_060333-v2-JANELA-L1_cut



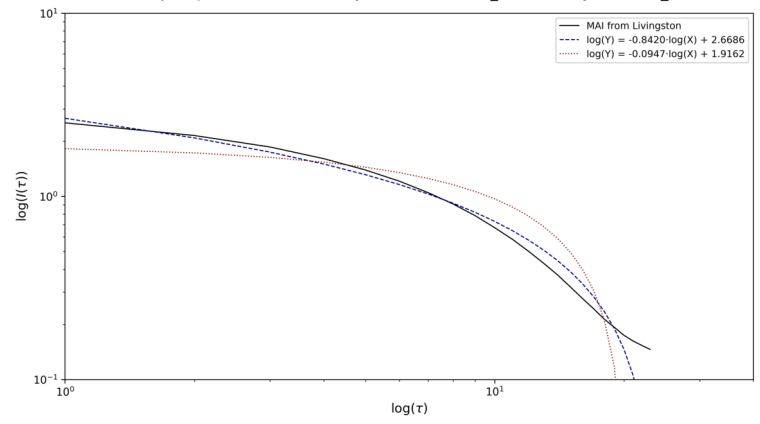
GW190727_060333-v2-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190728_064510-v2-JANELA-H1_cut



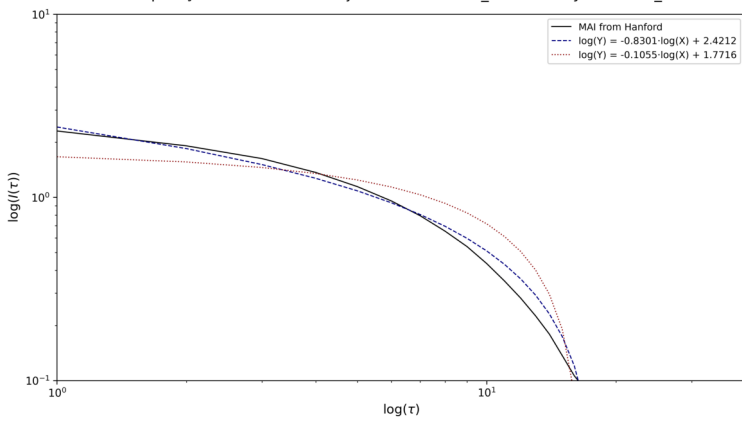
GW190728_064510-v2-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190728_064510-v2-JANELA-L1_cut



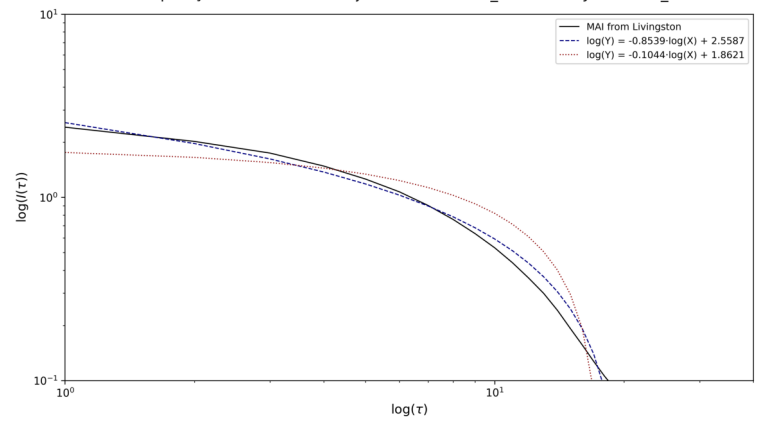
GW190728_064510-v2-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190731_140936-v2-JANELA-H1_cut



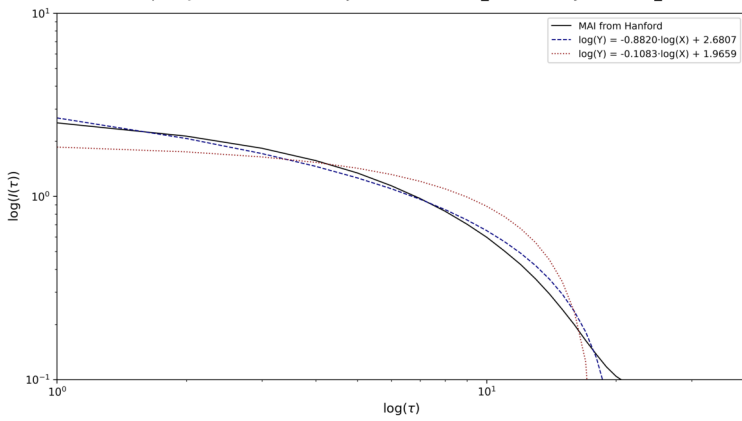
GW190731_140936-v2-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190731_140936-v2-JANELA-L1_cut



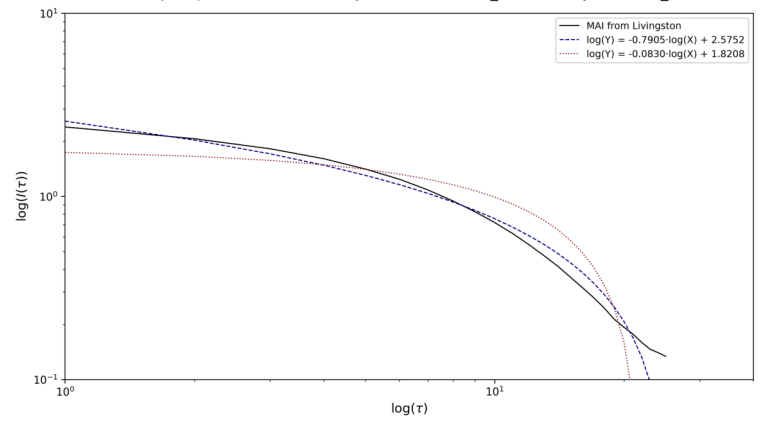
GW190731_140936-v2-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190803_022701-v2-JANELA-H1_cut



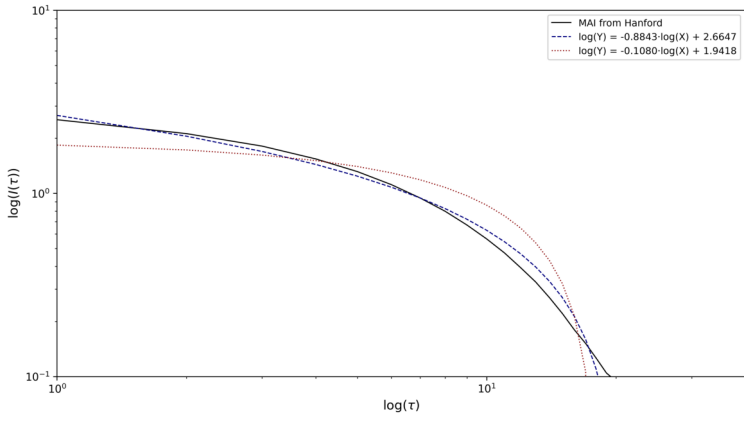
GW190803_022701-v2-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190803_022701-v2-JANELA-L1_cut



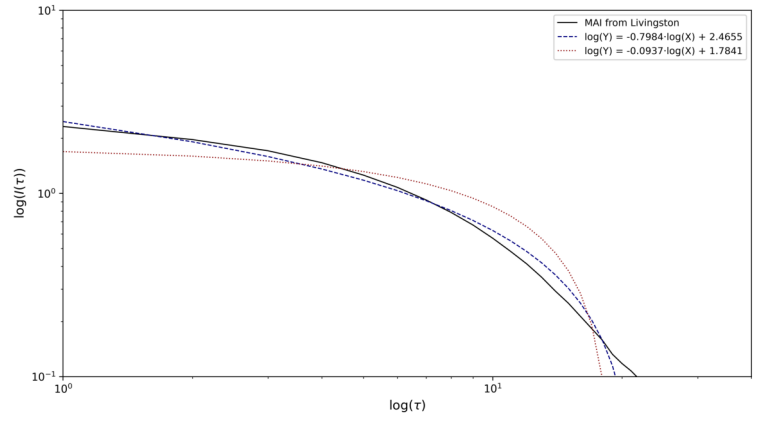
GW190803_022701-v2-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190805_211137-v1-JANELA-H1_cut



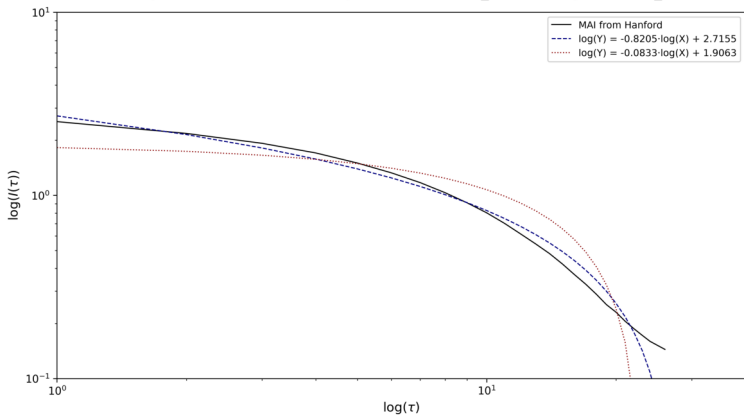
GW190805_211137-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190805_211137-v1-JANELA-L1_cut



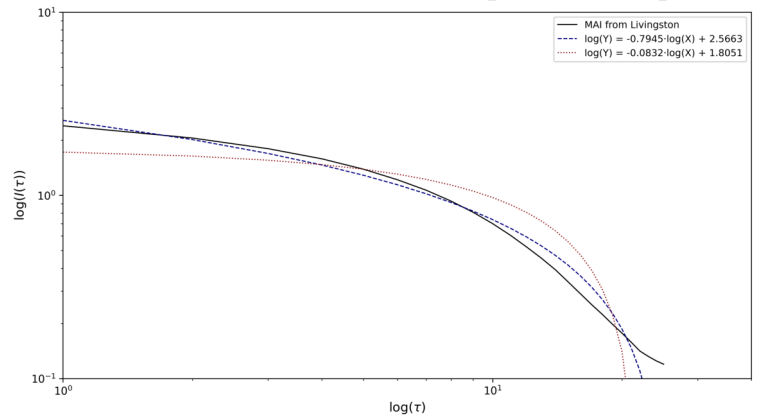
GW190805_211137-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190828_063405-v2-JANELA-H1_cut



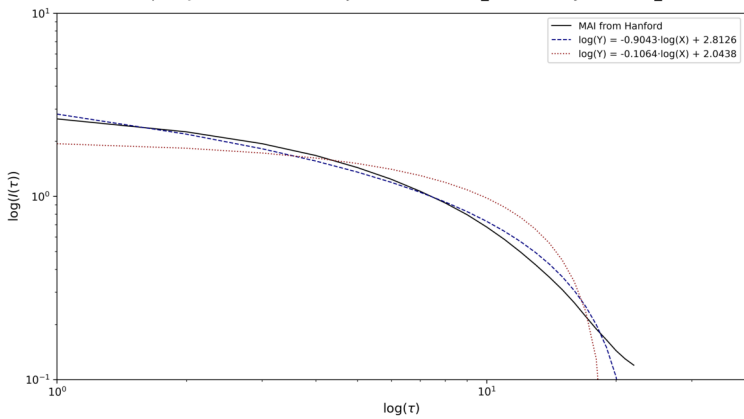
GW190828_063405-v2-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190828_063405-v2-JANELA-L1_cut



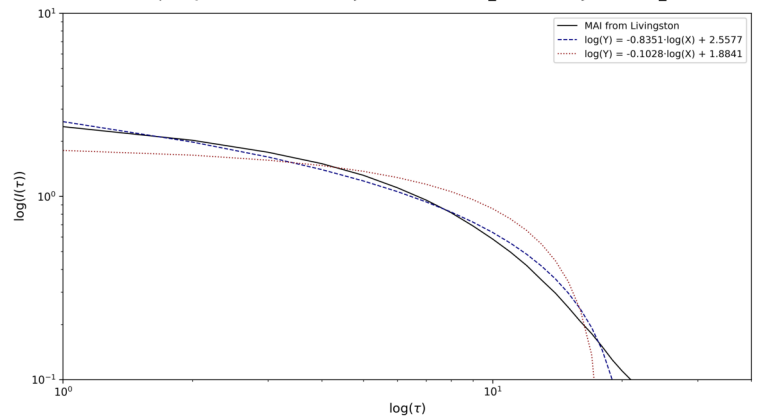
GW190828_063405-v2-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190828_065509-v2-JANELA-H1_cut



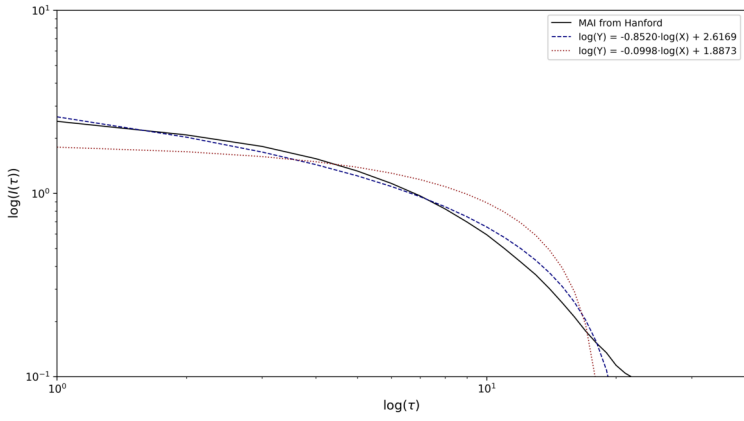
GW190828_065509-v2-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190828_065509-v2-JANELA-L1_cut



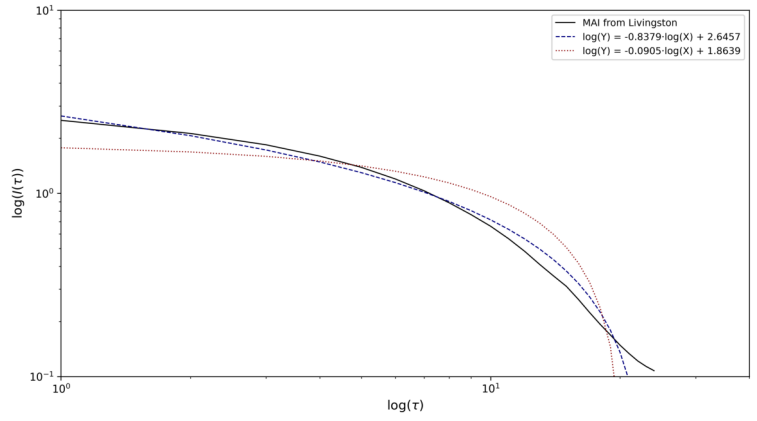
GW190828_065509-v2-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190909_114149-v1-JANELA-H1_cut



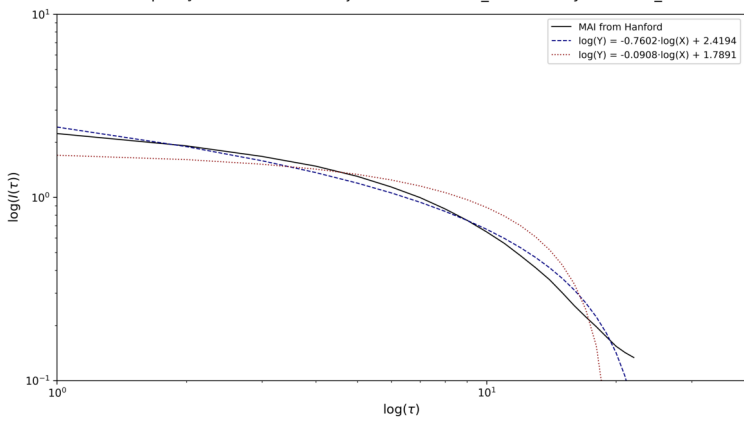
GW190909_114149-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190909_114149-v1-JANELA-L1_cut



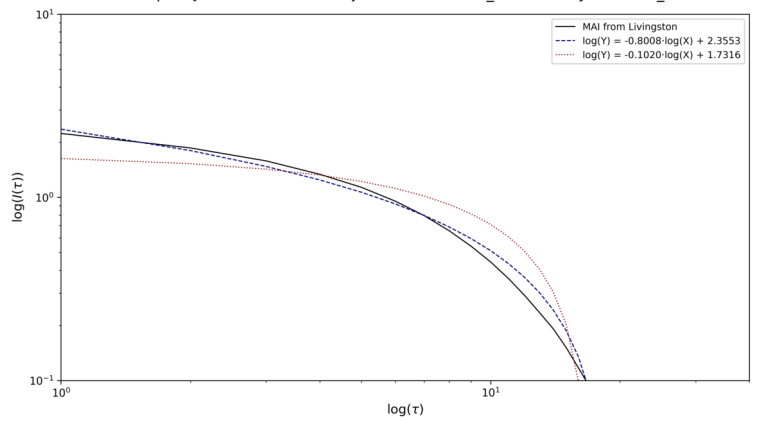
GW190909_114149-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190915_235702-v2-JANELA-H1_cut



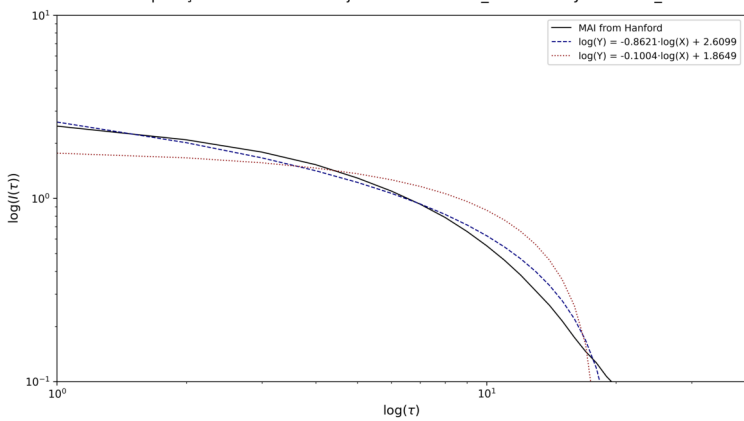
GW190915_235702-v2-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190915_235702-v2-JANELA-L1_cut



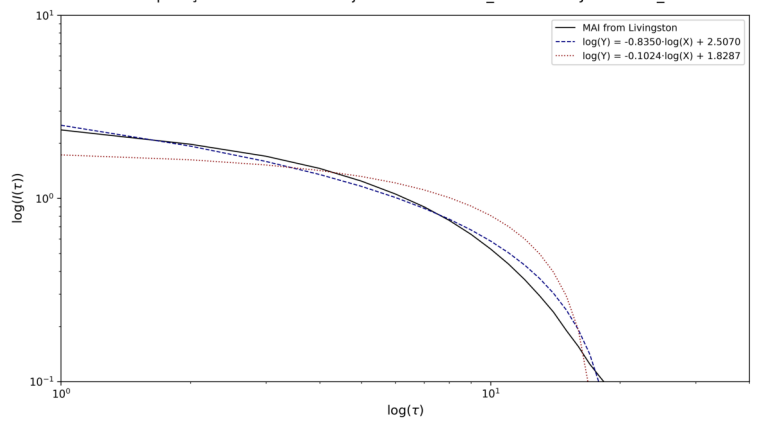
GW190915_235702-v2-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190916_200658-v1-JANELA-H1_cut



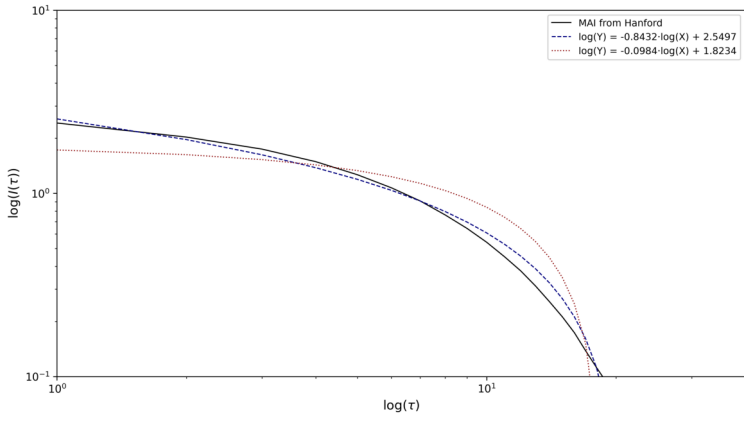
GW190916_200658-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190916_200658-v1-JANELA-L1_cut



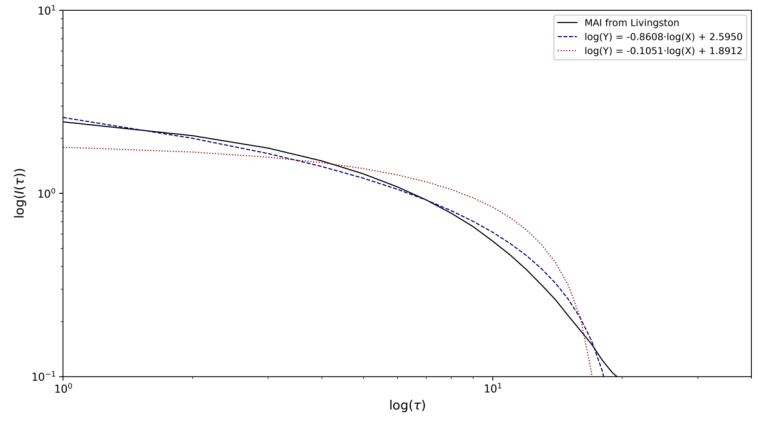
GW190916_200658-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190924_021846-v2-JANELA-H1_cut



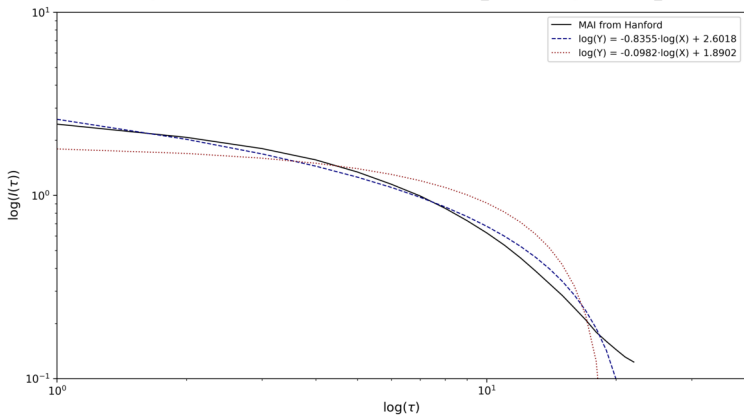
GW190924_021846-v2-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190924_021846-v2-JANELA-L1_cut



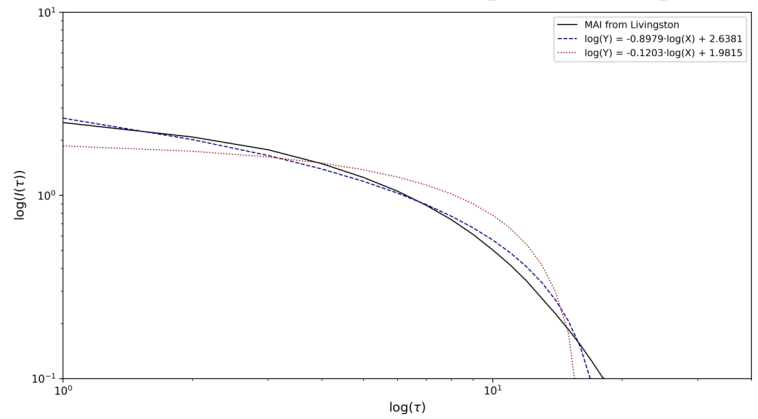
GW190924_021846-v2-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190926_050336-v1-JANELA-H1_cut



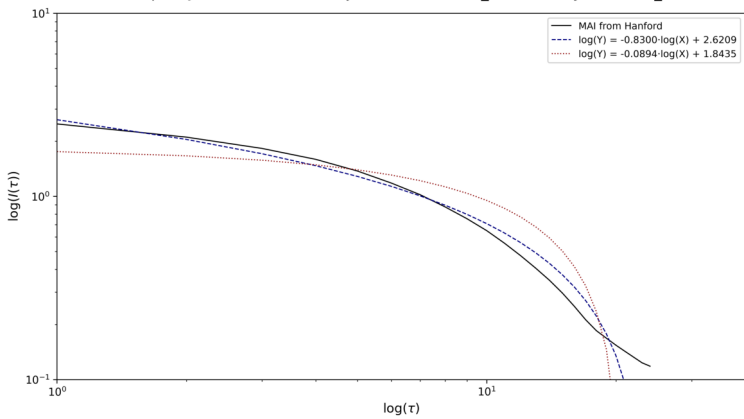
GW190926_050336-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190926_050336-v1-JANELA-L1_cut



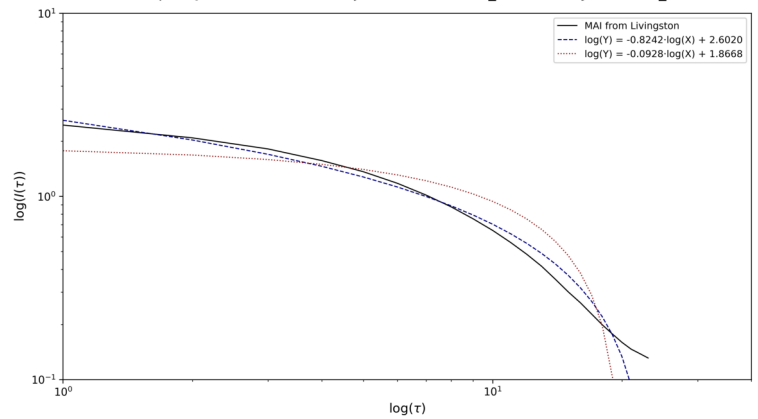
GW190926_050336-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190929_012149-v2-JANELA-H1_cut



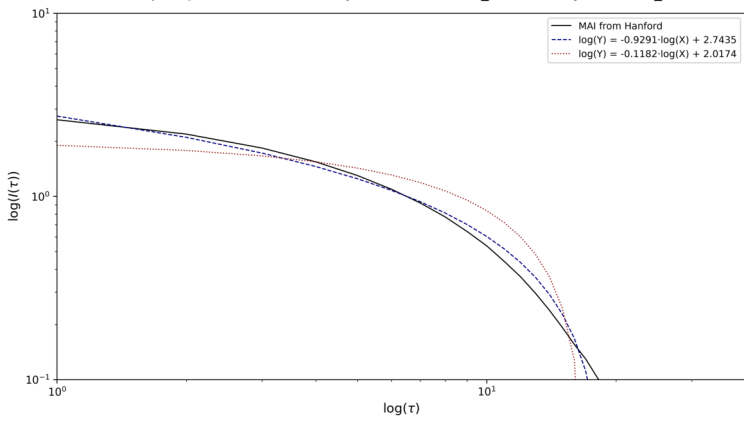
GW190929_012149-v2-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190929_012149-v2-JANELA-L1_cut



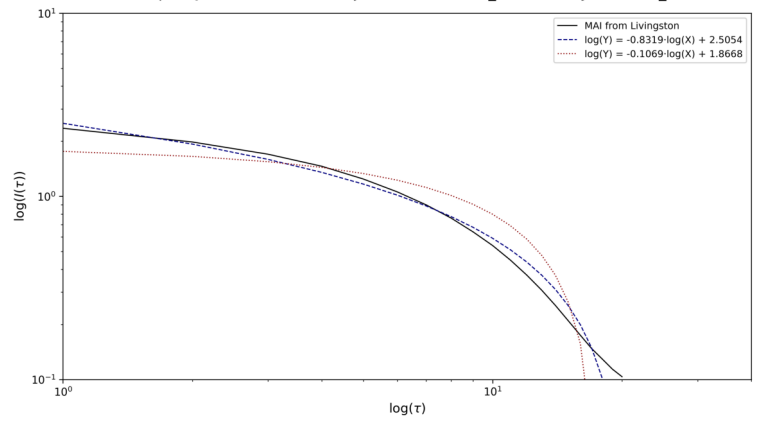
GW190929_012149-v2-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190930_133541-v2-JANELA-H1_cut



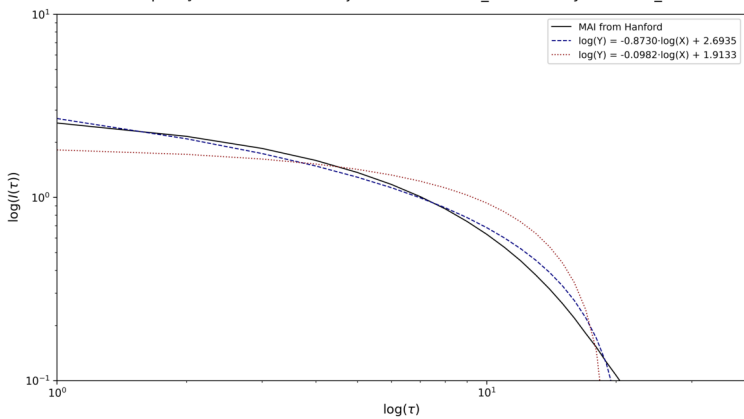
GW190930_133541-v2-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW190930_133541-v2-JANELA-L1_cut



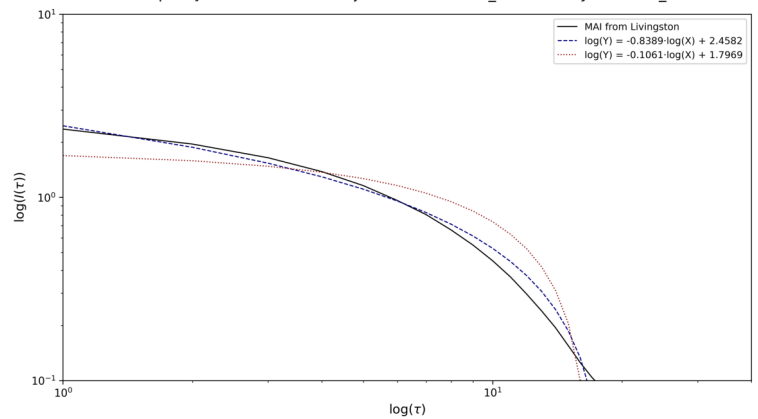
GW190930_133541-v2-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW191103_012549-v1-JANELA-H1_cut



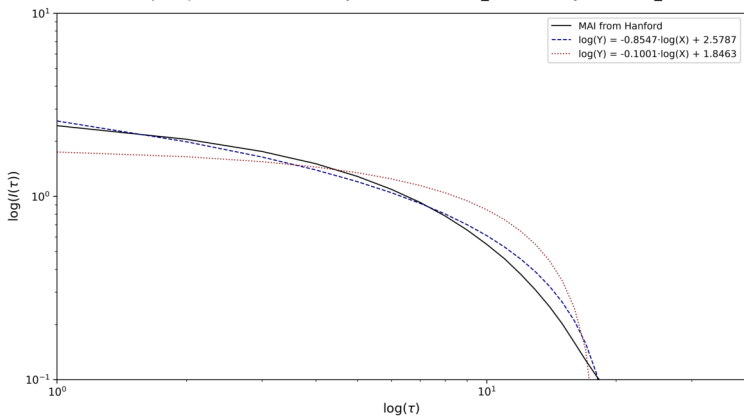
GW191103_012549-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW191103_012549-v1-JANELA-L1_cut



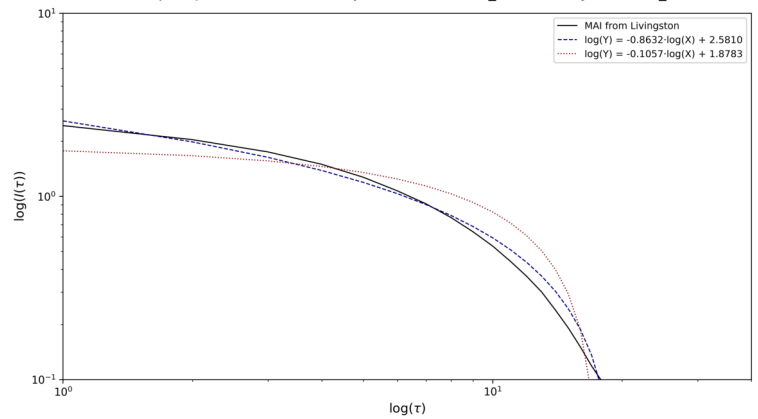
GW191103_012549-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW191105_143521-v1-JANELA-H1_cut



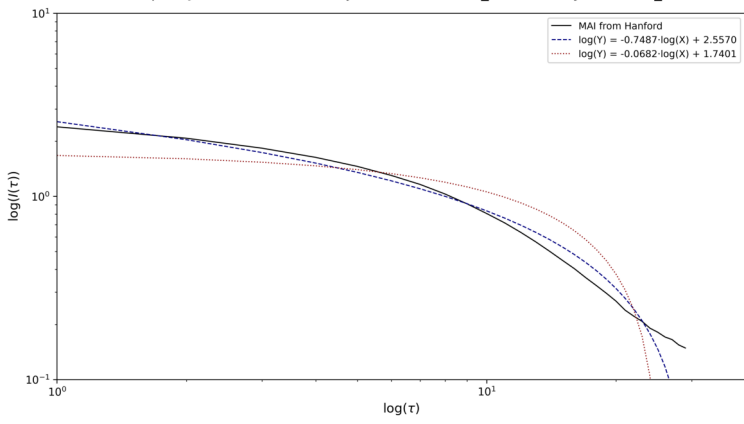
GW191105_143521-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW191105_143521-v1-JANELA-L1_cut



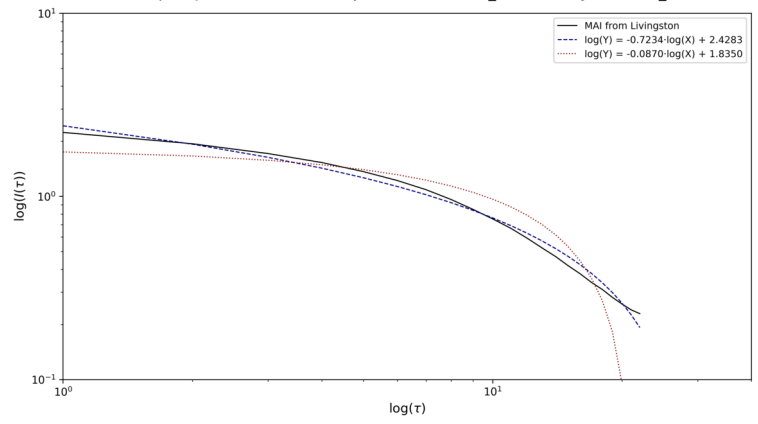
GW191105_143521-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW191109_010717-v1-JANELA-H1_cut



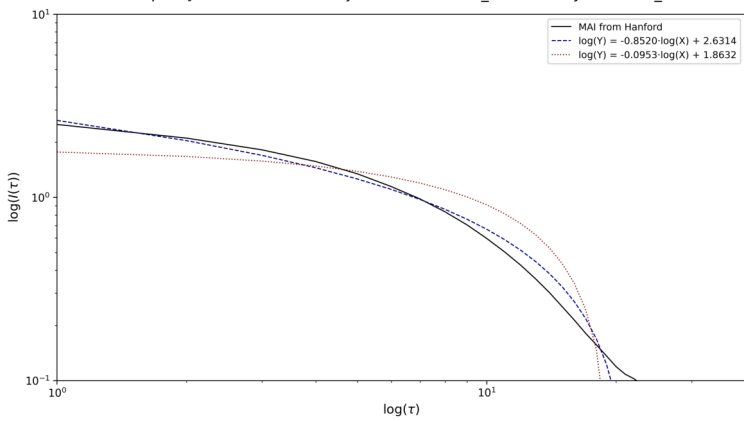
GW191109_010717-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW191109_010717-v1-JANELA-L1_cut



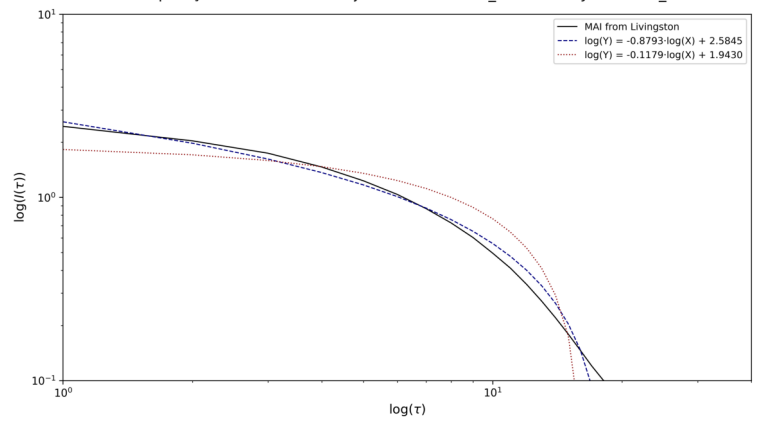
GW191109_010717-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW191113_071753-v1-JANELA-H1_cut



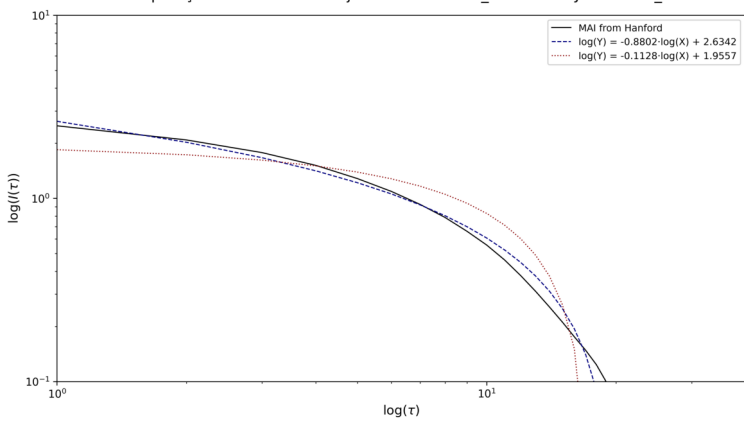
GW191113_071753-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW191113_071753-v1-JANELA-L1_cut



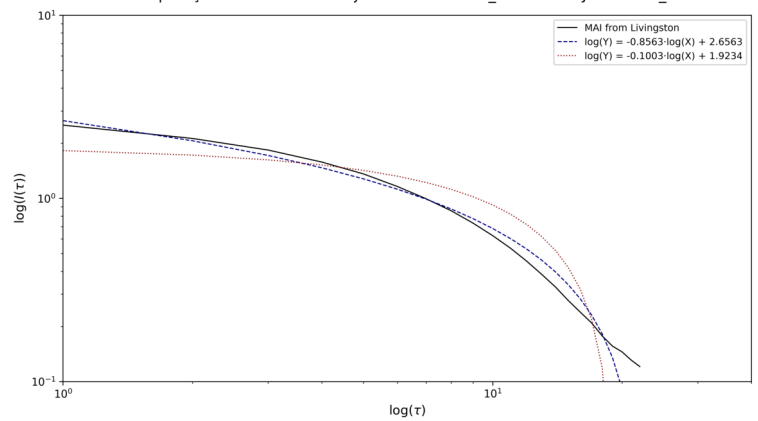
GW191113_071753-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW191126_115259-v1-JANELA-H1_cut



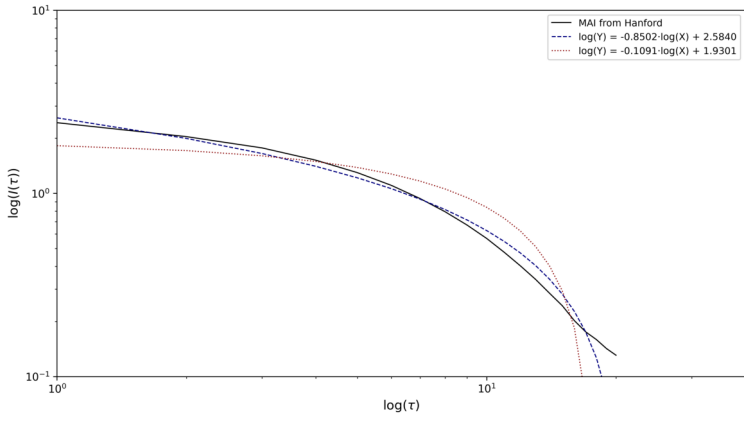
GW191126_115259-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW191126_115259-v1-JANELA-L1_cut



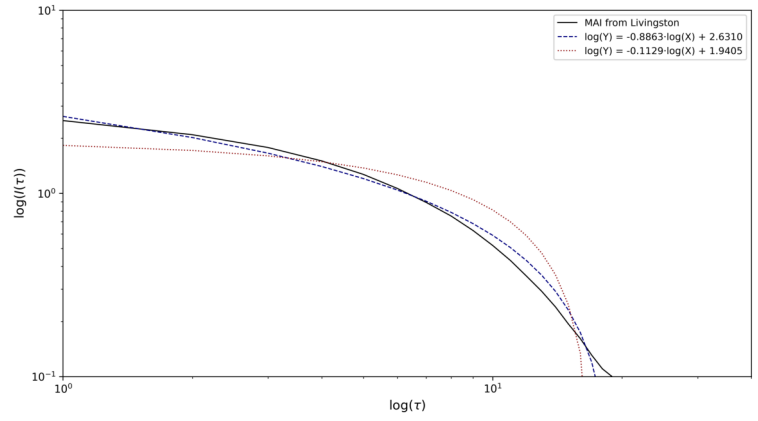
GW191126_115259-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW191127_050227-v1-JANELA-H1_cut



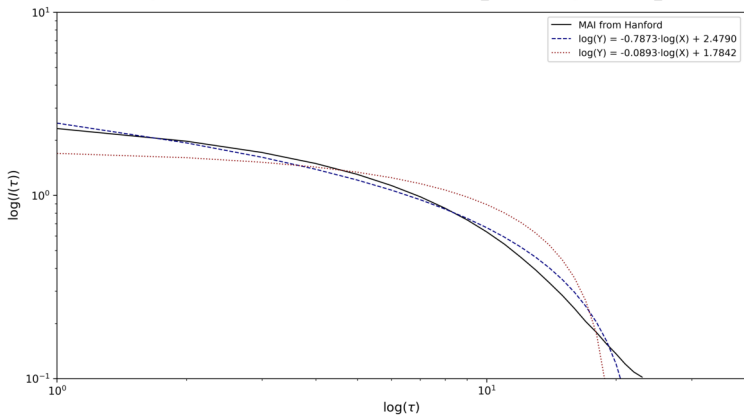
GW191127_050227-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW191127_050227-v1-JANELA-L1_cut



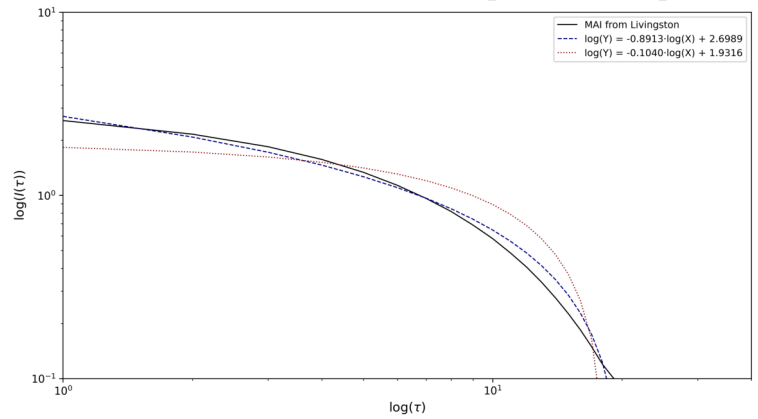
GW191127_050227-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW191129_134029-v1-JANELA-H1_cut



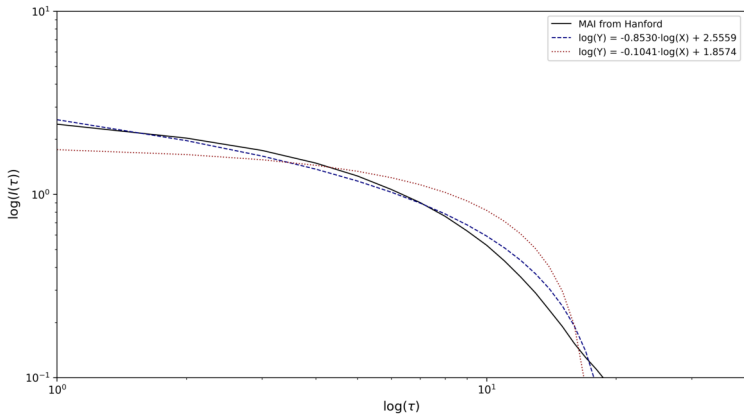
GW191129_134029-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW191129_134029-v1-JANELA-L1_cut



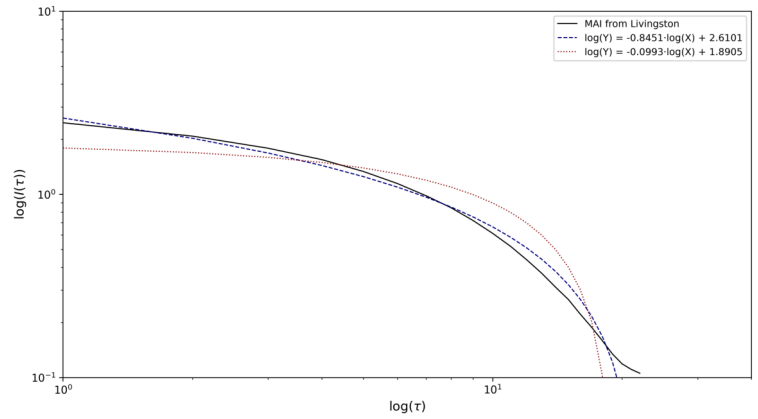
GW191129_134029-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW191204_110529-v1-JANELA-H1_cut



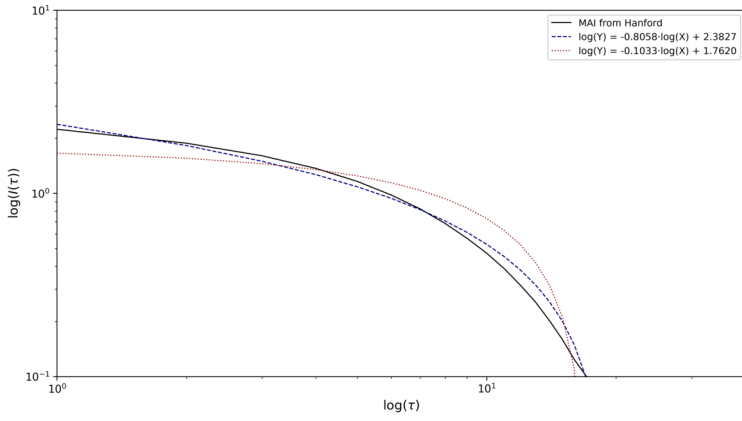
GW191204_110529-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW191204_110529-v1-JANELA-L1_cut



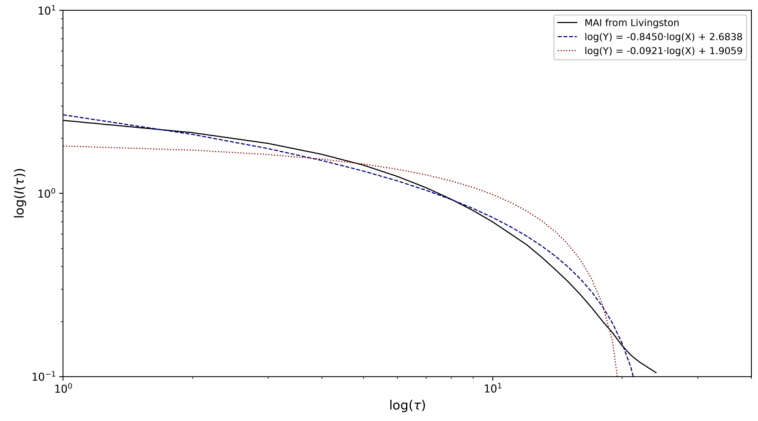
GW191204_110529-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW191204_171526-v1-JANELA-H1_cut



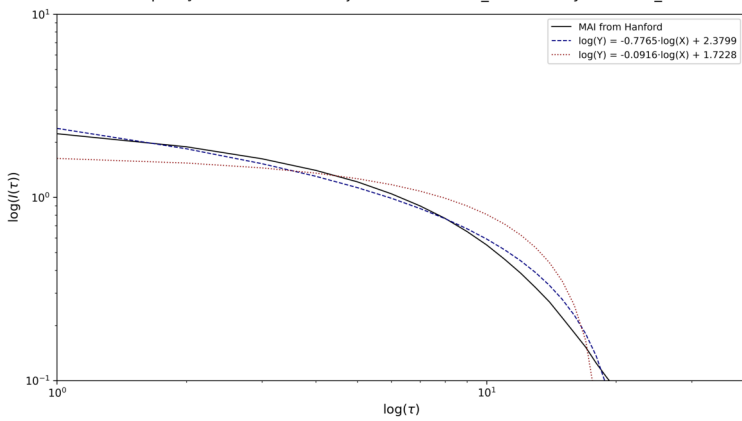
GW191204_171526-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW191204_171526-v1-JANELA-L1_cut



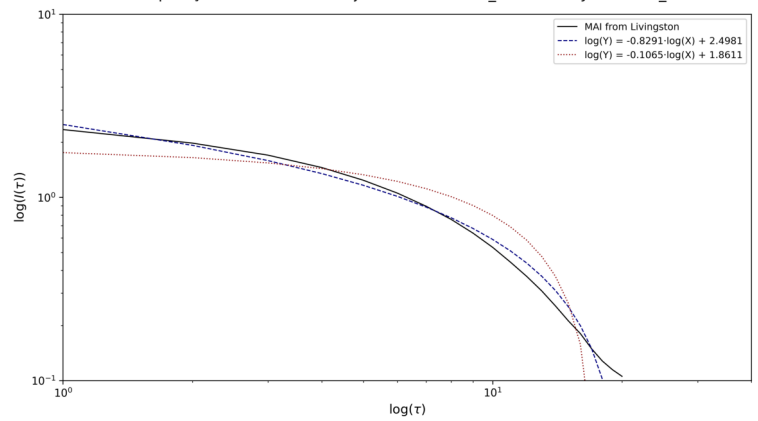
GW191204_171526-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW191215_223052-v1-JANELA-H1_cut



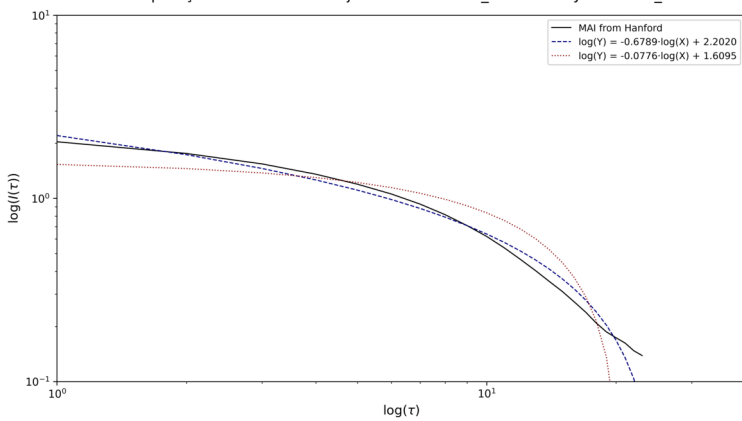
GW191215_223052-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW191215_223052-v1-JANELA-L1_cut



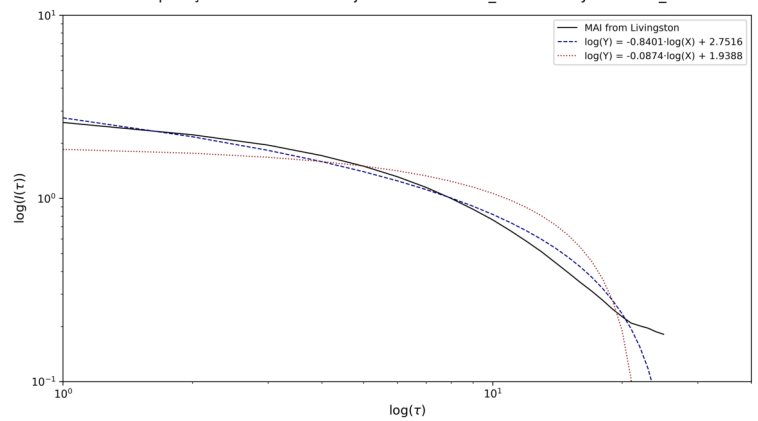
GW191215_223052-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW191222_033537-v1-JANELA-H1_cut



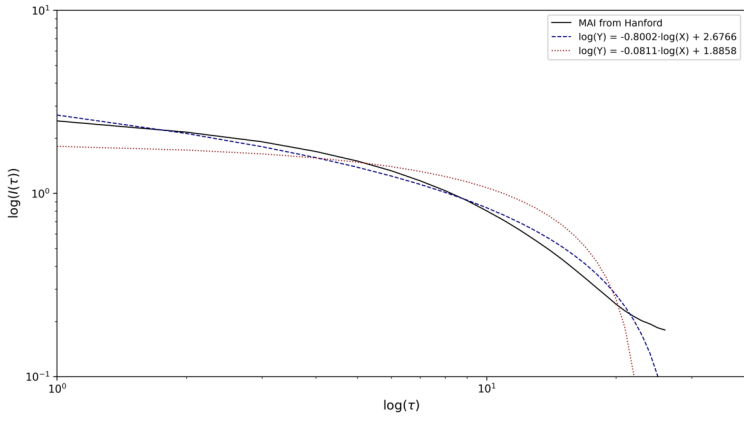
GW191222_033537-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW191222_033537-v1-JANELA-L1_cut



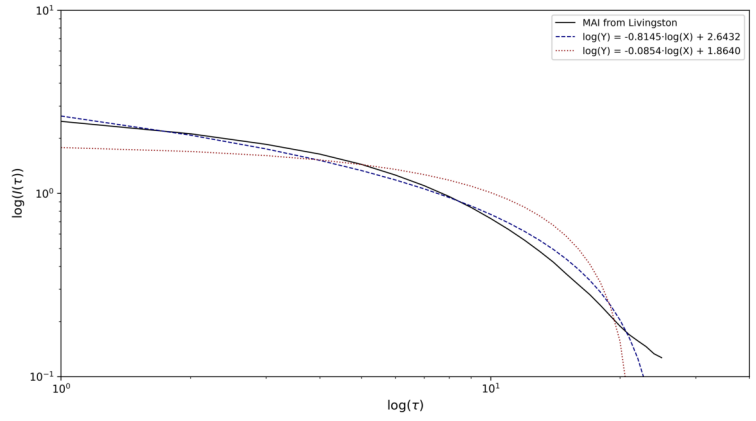
GW191222_033537-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW191230_180458-v1-JANELA-H1_cut



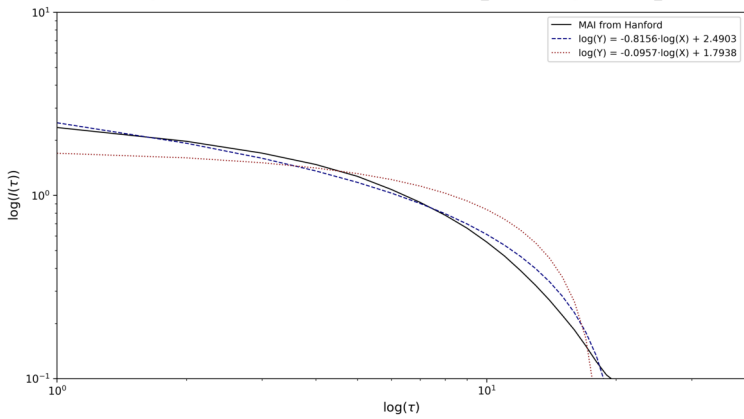
GW191230_180458-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW191230_180458-v1-JANELA-L1_cut



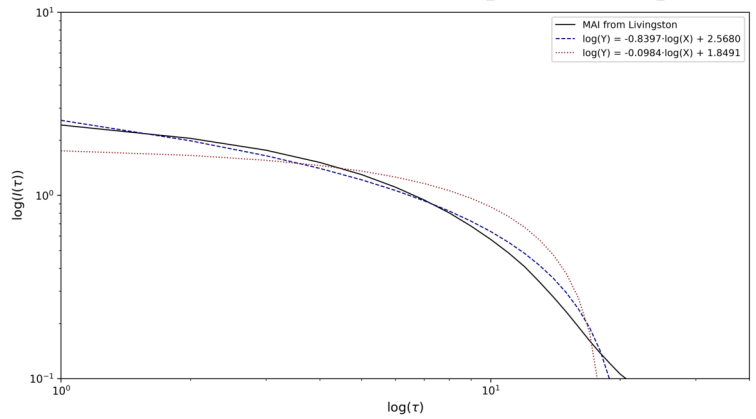
GW191230_180458-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200128_022011-v1-JANELA-H1_cut



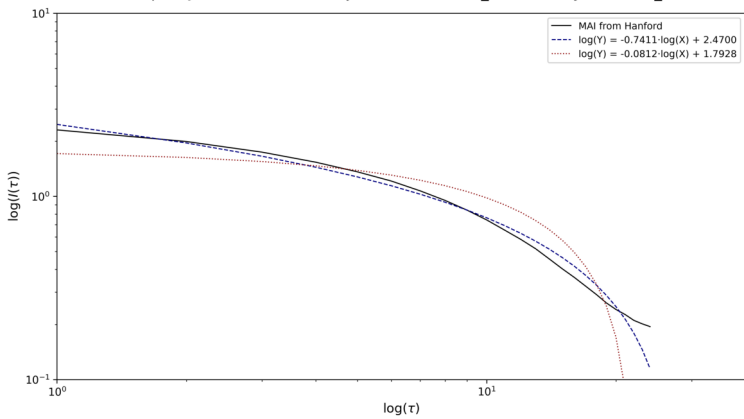
GW200128_022011-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200128_022011-v1-JANELA-L1_cut



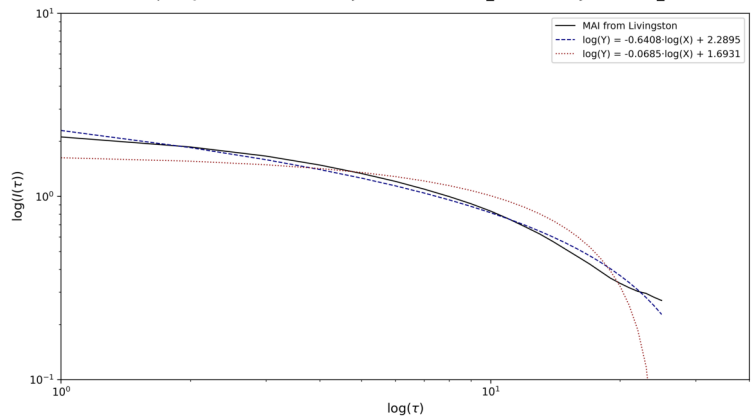
GW200128_022011-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200129_065458-v1-JANELA-H1_cut



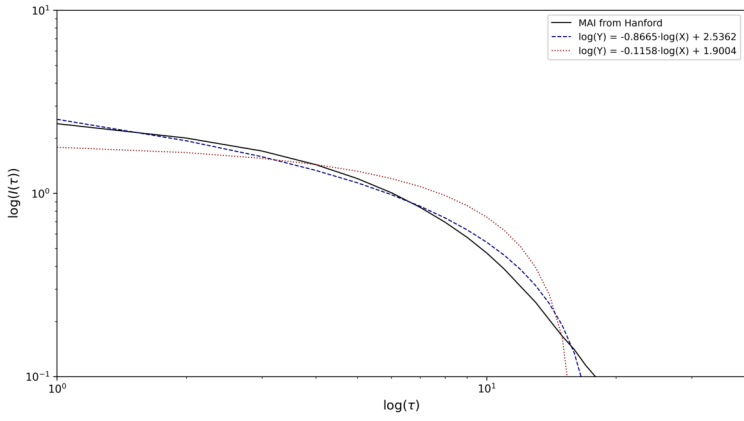
GW200129_065458-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200129_065458-v1-JANELA-L1_cut



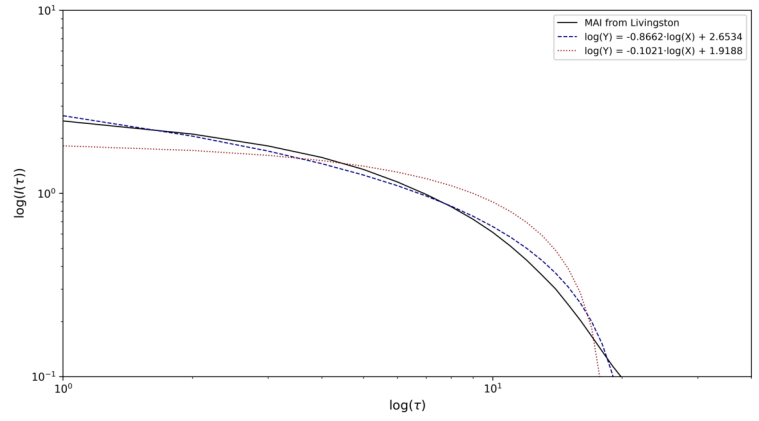
GW200129_065458-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200202_154313-v1-JANELA-H1_cut



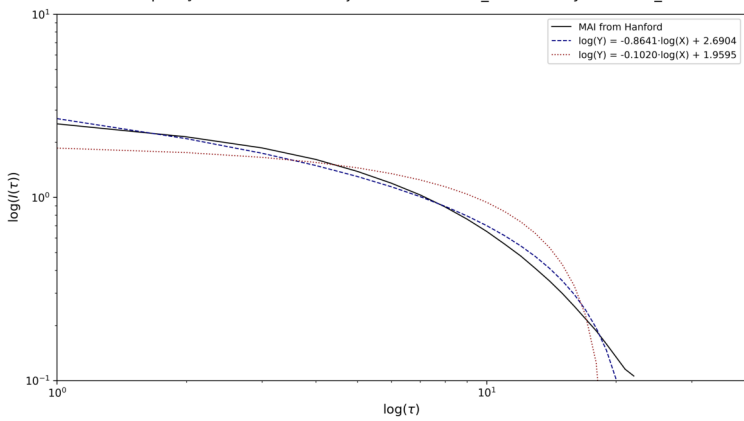
GW200202_154313-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200202_154313-v1-JANELA-L1_cut



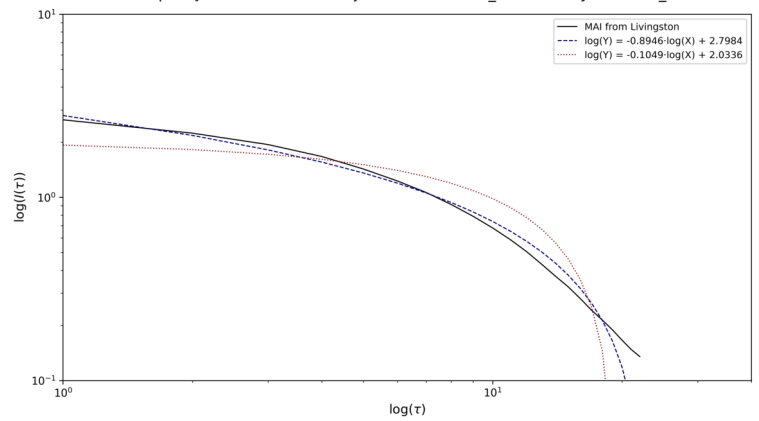
GW200202_154313-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200208_130117-v1-JANELA-H1_cut



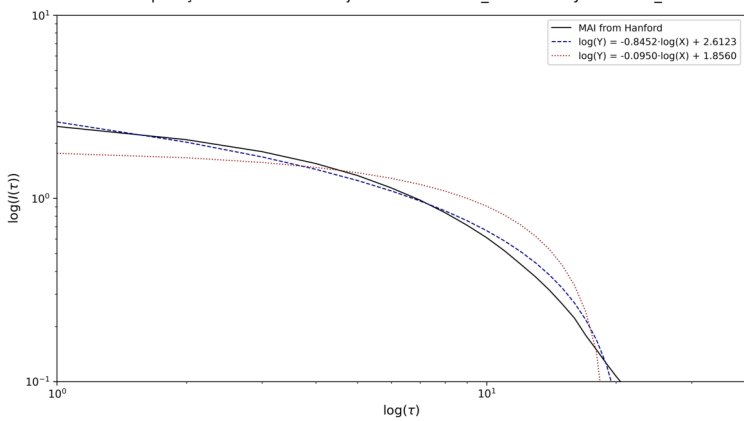
GW200208_130117-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200208_130117-v1-JANELA-L1_cut



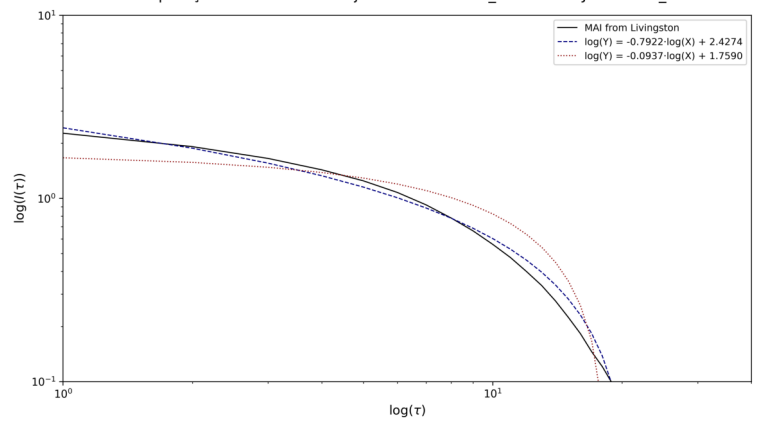
GW200208_130117-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200208_222617-v1-JANELA-H1_cut



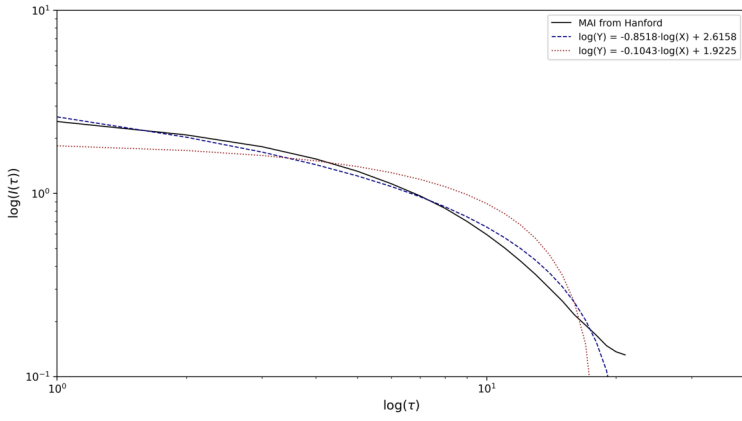
GW200208_222617-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200208_222617-v1-JANELA-L1_cut



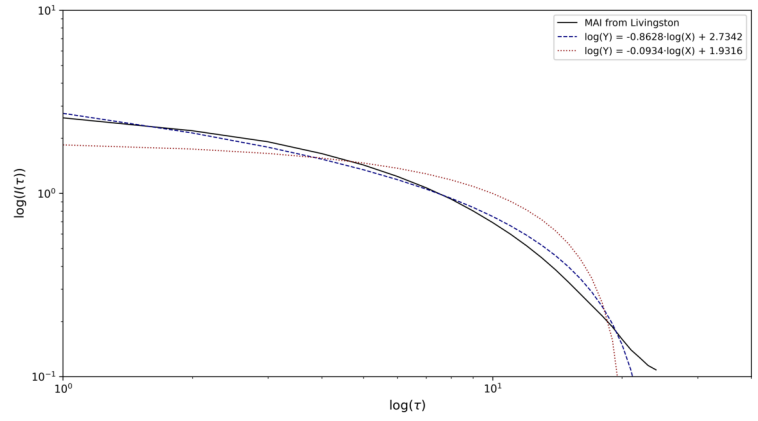
GW200208_222617-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200209_085452-v1-JANELA-H1_cut



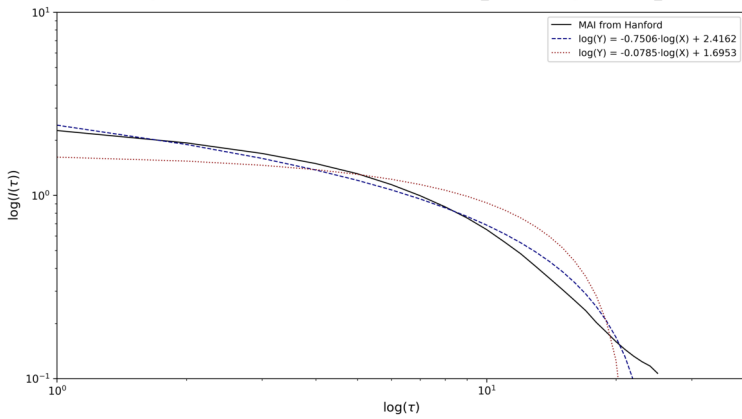
GW200209_085452-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200209_085452-v1-JANELA-L1_cut



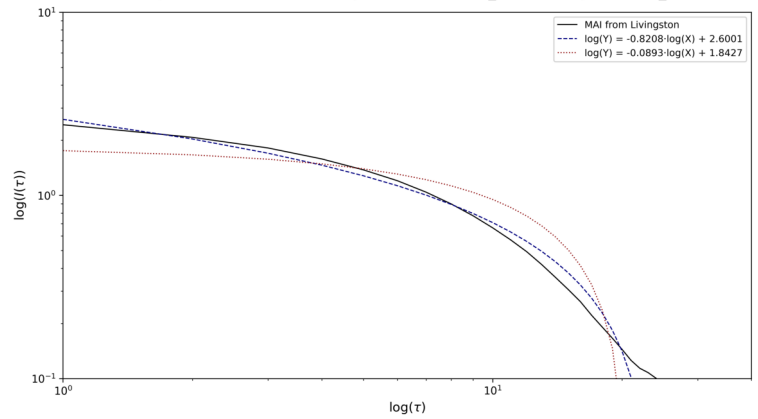
GW200209_085452-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200216_220804-v1-JANELA-H1_cut



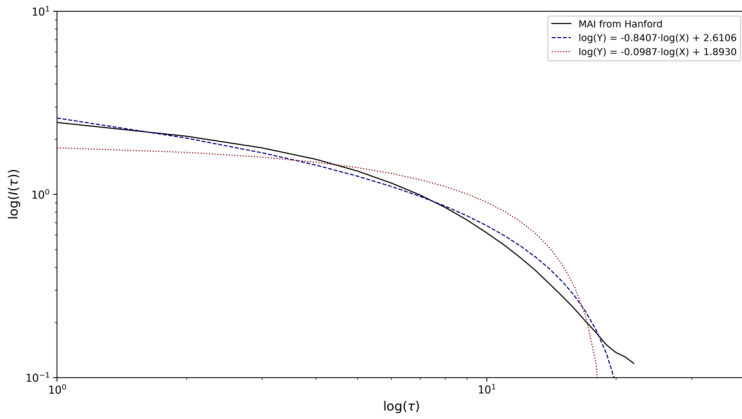
GW200216_220804-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200216_220804-v1-JANELA-L1_cut



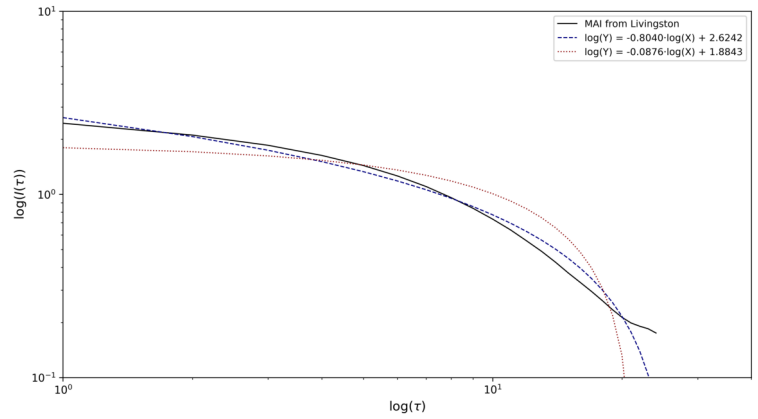
GW200216_220804-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200219_094415-v1-JANELA-H1_cut



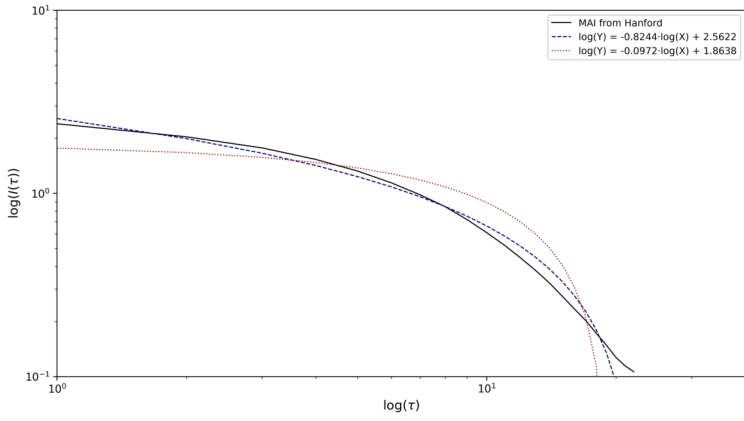
GW200219_094415-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200219_094415-v1-JANELA-L1_cut



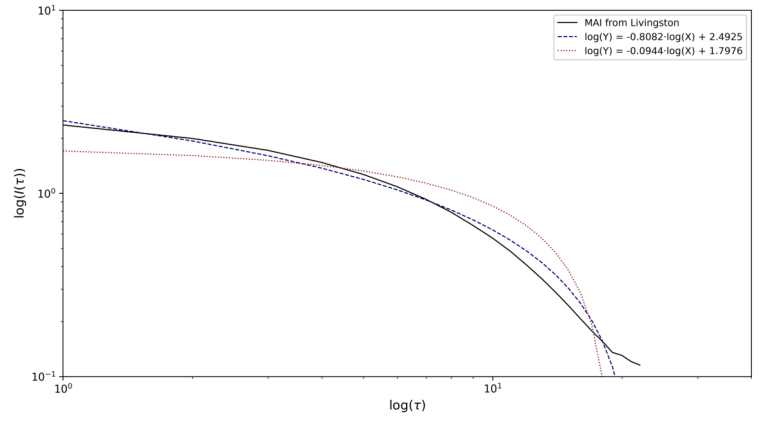
GW200219_094415-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200220_061928-v1-JANELA-H1_cut



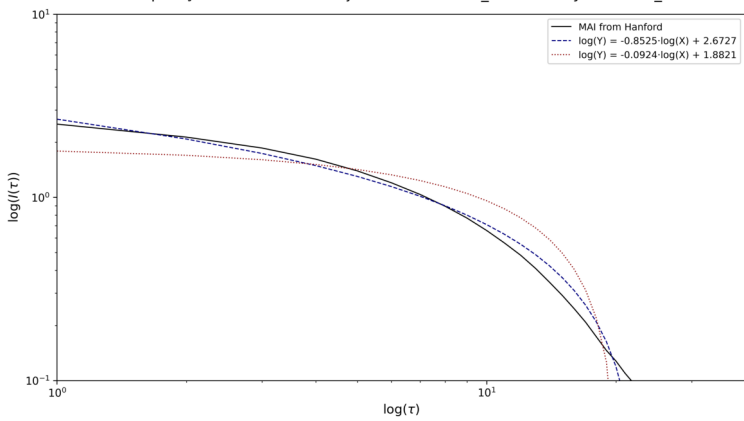
GW200220_061928-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200220_061928-v1-JANELA-L1_cut



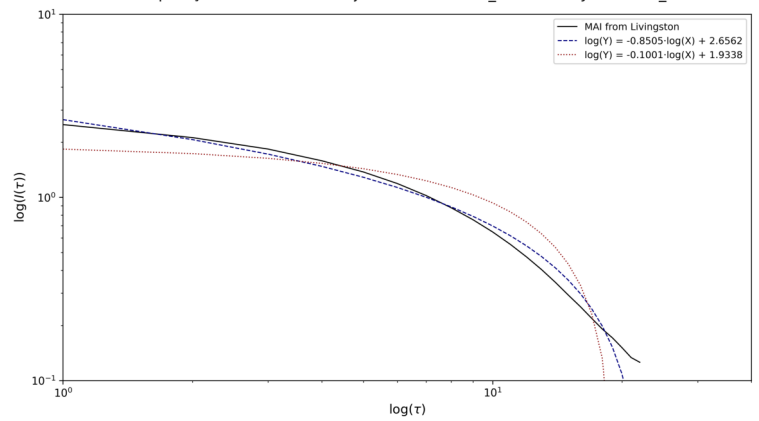
GW200220_061928-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200220_124850-v1-JANELA-H1_cut



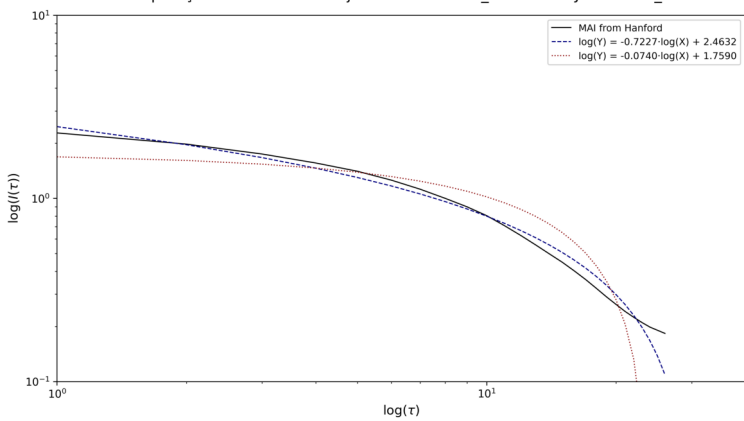
GW200220_124850-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200220_124850-v1-JANELA-L1_cut



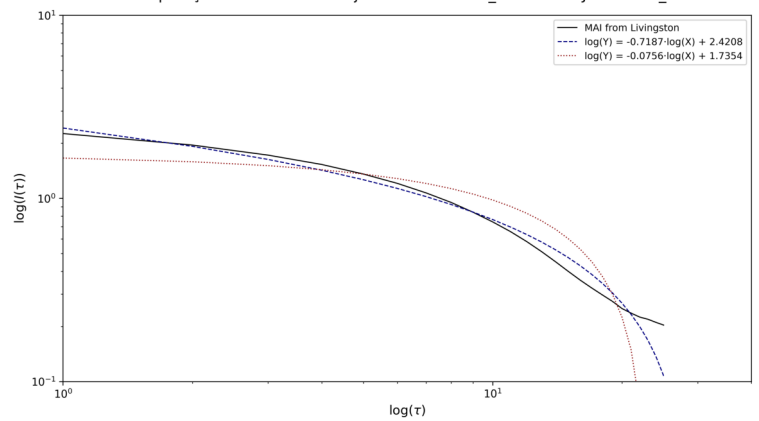
GW200220_124850-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200224_222234-v1-JANELA-H1_cut



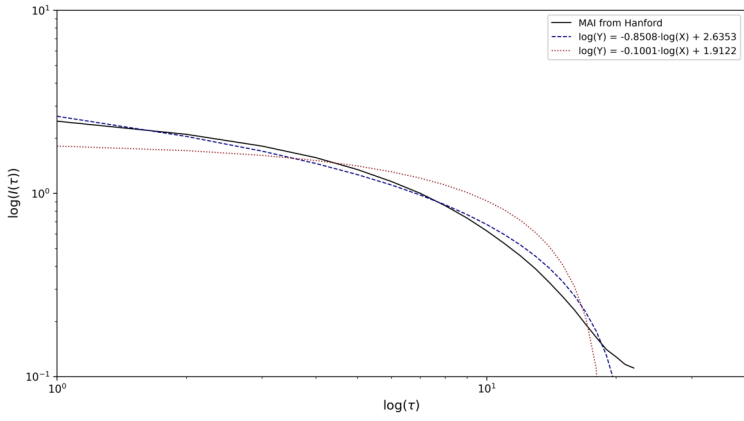
GW200224_222234-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200224_222234-v1-JANELA-L1_cut



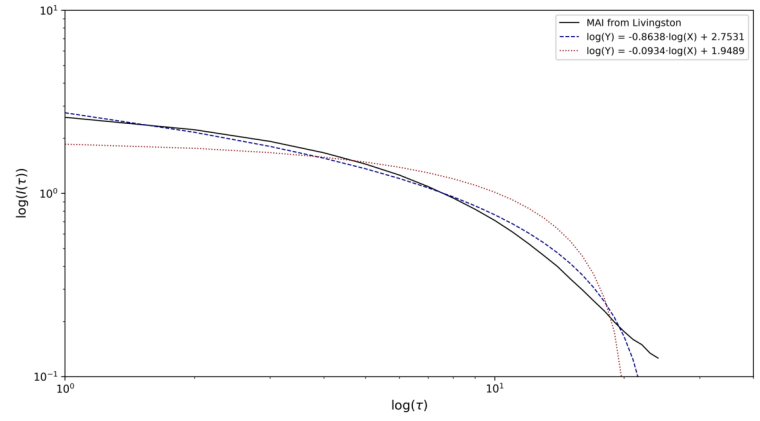
GW200224_222234-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200225_060421-v1-JANELA-H1_cut



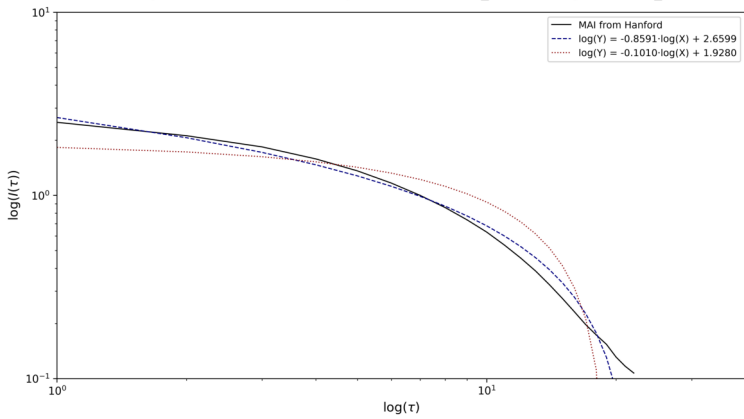
GW200225_060421-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200225_060421-v1-JANELA-L1_cut



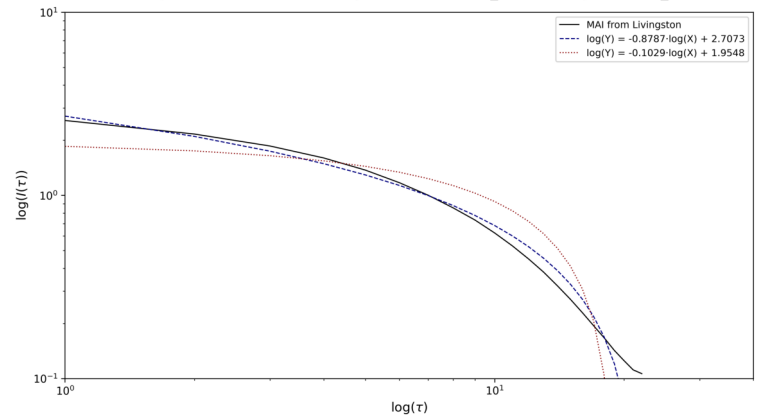
GW200225_060421-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200306_093714-v1-JANELA-H1_cut



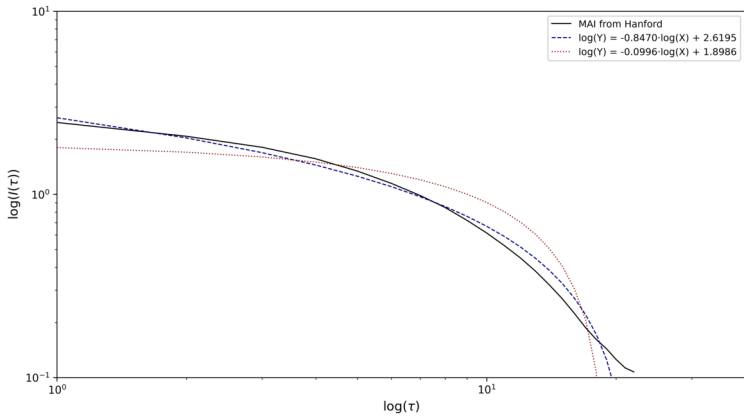
GW200306_093714-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200306_093714-v1-JANELA-L1_cut



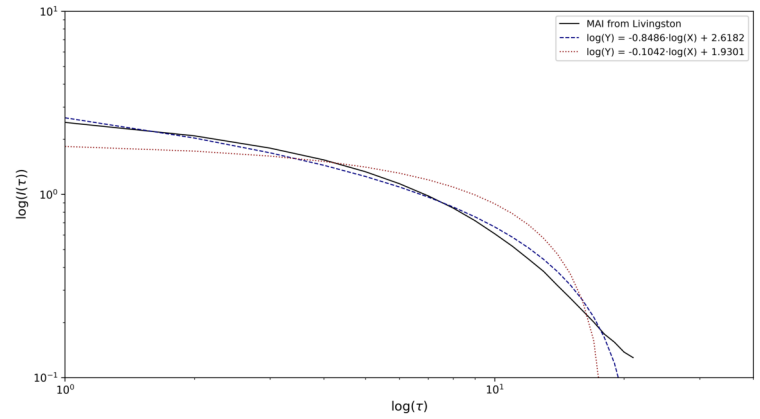
GW200306_093714-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200308_173609-v1-JANELA-H1_cut



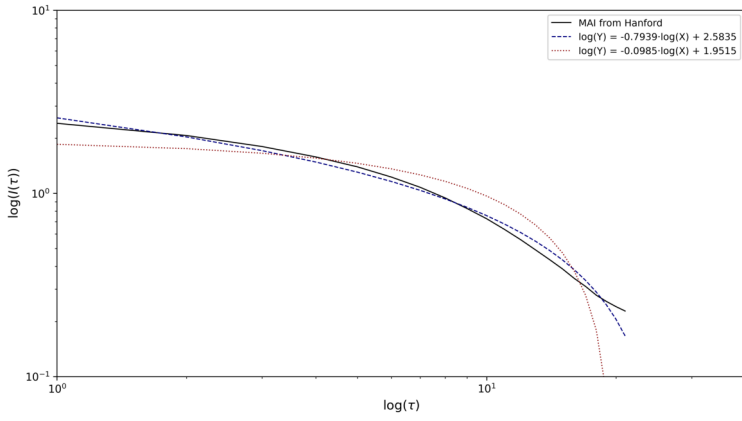
GW200308_173609-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200308_173609-v1-JANELA-L1_cut



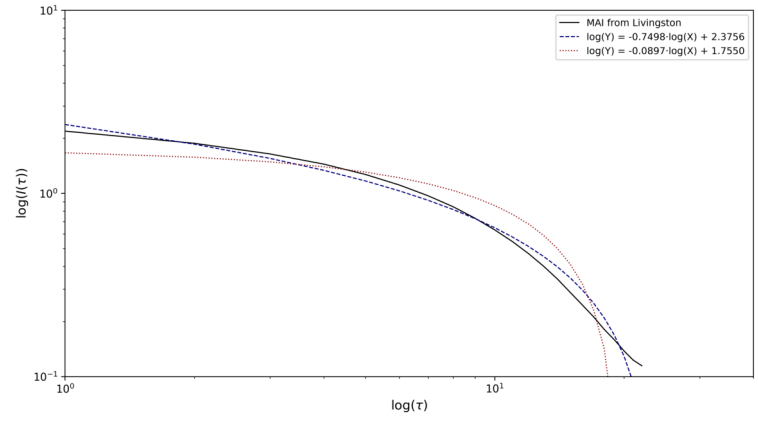
GW200308_173609-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200311_115853-v1-JANELA-H1_cut



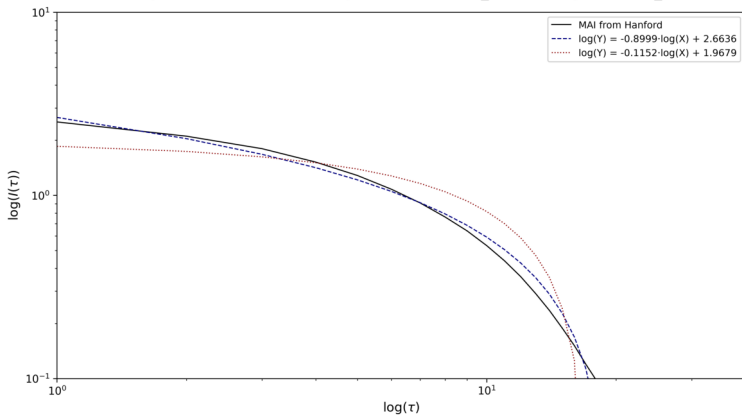
GW200311_115853-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200311_115853-v1-JANELA-L1_cut



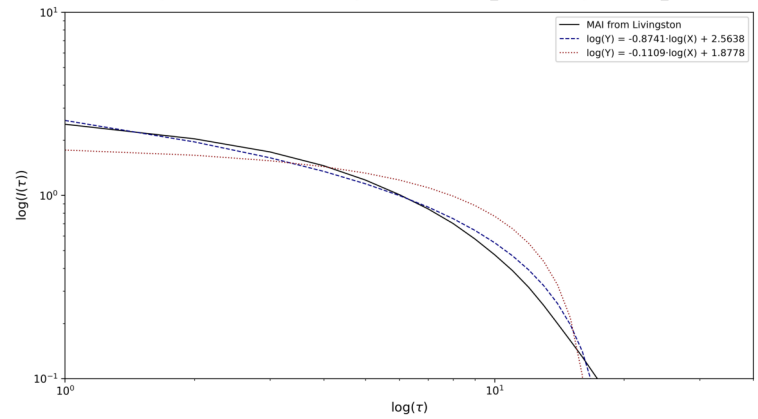
GW200311_115853-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200316_215756-v1-JANELA-H1_cut



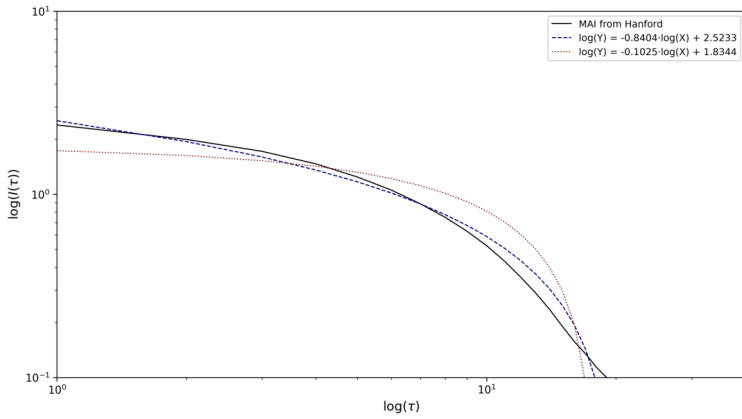
GW200316_215756-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200316_215756-v1-JANELA-L1_cut



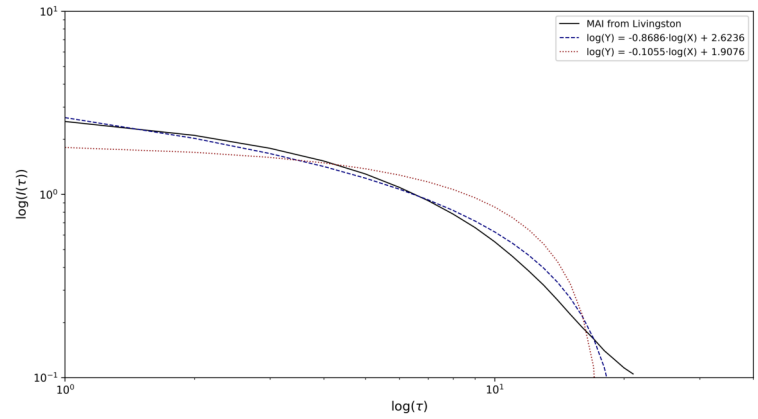
GW200316_215756-v1-JANELA-L1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200322_091133-v1-JANELA-H1_cut



GW200322_091133-v1-JANELA-H1

Comparação dos Modelos de Ajuste - GW200322_091133-v1-JANELA-L1_cut



GW200322_091133-v1-JANELA-L1

APÊNDICE G – RESULTADOS DO Q -TRIPLETO PARA EVENTOS BBH

Este apêndice apresenta a consolidação dos dados obtidos para os três índices da estatística não-extensiva de Tsallis o chamado q -tripleto: $(q_{\text{stat}}, q_{\text{sen}}, q_{\text{rel}})$ aplicados ao conjunto de séries temporais de ondas gravitacionais associadas a coalescências de sistemas binários de buracos negros (BBH), detectadas pelos interferômetros LIGO e VIRGO.

Os dados foram processados individualmente para cada evento, a partir dos arquivos disponibilizados pelo Gravitational Wave Open Science Center (GWOSC), empregando-se metodologias específicas para cada componente do q -tripleto:

- (q_{stat}) : obtido a partir do ajuste de distribuições q -Gaussianas aos incrementos multiesca- lares $\Delta h(t, \tau)$ da série temporal de deformação $h(t)$, para diferentes valores de defasagem τ ;
- (q_{sen}) : estimado com base na análise multifractal dos sinais, pela extração do espectro $f(\alpha)$ via MF-DFA e cálculo do índice de sensibilidade às condições iniciais conforme a equação de Lyra-Tsallis;
- (q_{rel}) : derivado da análise da função de Informação Mútua Média (AMI), identificando o primeiro mínimo local da função $I(\tau)$ e ajustando a regressão logarítmica para a obtenção da lei de potência.

Dos 87 eventos inicialmente selecionados do catálogo GWTC, todos classificados como sistemas BBH, 74 eventos foram analisados com sucesso para os três parâmetros do q -tripleto. A exclusão de 13 eventos decorreu de inconsistências nos dados observacionais, tais como ausência de sinais em um dos detectores, falhas no sincronismo temporal ou impossibilidade de ajuste confiável aos modelos estatísticos adotados.

A Tabela G apresenta os valores de (q_{stat}) , (q_{sen}) e (q_{rel}) obtidos para os eventos analisados. Para cada evento, são fornecidos os valores individuais calculados a partir dos dados de Hanford (H1) e Livingston (L1), assim como as respectivas escalas τ e as frequências associadas.

Os resultados reunidos neste apêndice reforçam a robustez da abordagem baseada na mecânica estatística não-extensiva, evidenciando que os sinais de ondas gravitacionais de sistemas BBH apresentam, em sua maioria, comportamento estatístico fortemente não-gaussiano,

multifractal e com dinâmicas temporais fora do equilíbrio térmico convencional. Essa análise, portanto, aprofunda a compreensão física dos processos de fusão de buracos negros, revelando características dinâmicas que escapam às descrições tradicionais baseadas exclusivamente na relatividade geral e na estatística de Boltzmann-Gibbs.

Tabela 9 – Tabela do q tripleto dos eventos de onda gravitacional.

Evento	Freq. Pico (Hz)	tau	Hanford			Livingston		
			qstat	qsen	qrel	qstat	qsen	qrel
GW150914-v3	154,08867	110	1,4699	0,0215	2.28602	1,4345	0,2533	2.26931
GW151012-v3	277,19212	56	1,0067	0,5763	2.18165	1,1015	0,4597	2.08993
GW151226-v2	476,66683	40	1,1277	0,7401	2.15911	1,0326	0,7942	2.10896
GW170104-v2	200,80059	110	1,1285	0,4444	2.27514	1,1582	0,5676	2.25135
GW170608-v3	548,42312	40	1,0478	0,7150	2.13713	1,0954	0,7972	2.17293
GW170729-v1	121,14810	128	1,3749	0,0189	2.27402	1,5024	0,1819	2.14598
GW170809-v1	173,48078	96	1,1429	0,3940	2.28743	1,2732	0,1238	2.12853
GW170814-v3	182,80771	96	1,1437	0,1973	2.15751	1,6584	0,3743	2.32944
GW170818-v1	164,26200	110	1,1521	0,4887	2.22131	1,6205	0,2384	2.20552
GW170823-v1	148,91489	96	1,1763	0,4124	2.22505	1,4570	0,1833	2.26828
GW190403_051519-v1	97,14924	160	1,0000	0,1017	2.15658	1,1329	0,0848	2.12540
GW190408_181802-v2	237,22489	64	1,3383	0,3015	2.19089	1,3694	0,6036	2.20714
GW190412-v3	265,64245	80	1,3520	0,3128	2.18039	1,3128	0,0829	2.26367
GW190412_053044-v4	277,94741	80	1,4767	0,3642	2.16476	1,1216	0,2950	2.27291
GW190413_052954-v2	176,17738	96	1,7051	0,3040	2.14941	1,0525	0,1275	2.13923
GW190413_134308-v2	124,85520	128	1,1472	0,2390	2.21040	1,2079	0,3099	2.46914
GW190421_213856-v2	137,84689	128	1,6382	0,3757	2.32699	1,6423	-0,1004	2.15767
GW190426_190642-v1	56,20204	320	1,1857	0,2393	2.21315	1,2484	0,1061	2.13503
GW190503_185404-v2	142,46746	112	1,4181	0,2616	2.30200	1,4406	0,4280	2.18720
GW190512_180714-v2	285,73305	56	1,2730	0,6062	2.14334	1,3596	0,6784	2.19237
GW190513_205428-v2	187,85764	80	1,0000	0,5578	2.16011	1,0000	0,4676	2.16994
GW190514_065416-v2	147,19582	112	1,0319	0,2433	2.17175	1,1164	0,3645	2.19220
GW190517_055101-v2	161,40301	96	1,0432	0,6173	2.20060	1,1476	0,4924	2.20240
GW190519_153544-v2	96,32361	192	1,3308	0,4184	2.40207	1,0636	0,1761	2.32388
GW190521-v3	62,08564	256	1,0317	-0,1585	2.32838	1,1001	-0,4270	2.39409
GW190521_030229-v4	65,55701	256	1,0447	-0,1175	2.32947	1,0467	-0,5597	2.38577
GW190521_074359-v2	132,82122	128	1,4543	0,3208	2.36560	1,5310	0,1263	2.43524
GW190527_092055-v2	176,48218	96	1,0050	-0,1562	2.12401	1,0334	0,4558	2.21436
GW190602_175927-v2	87,48431	192	1,3655	0,2322	2.14350	1,3502	-0,0848	2.32279

Continua na próxima página

Tabela 9 – Continuação da página anterior

Evento	Freq. Pico (Hz)	tau	Hanford			Livingston		
			qstat	qsen	qrel	qstat	qsen	qrel
GW190701_203306-v2	107,82949	160	1,1403	0,3632	2.19062	1,1220	0,0914	2.30725
GW190706_222641-v2	89,95300	192	1,4193	-0,1346	2.30920	1,3378	-0,6105	2.22719
GW190707_093326-v2	510,03350	32	1,2519	0,8697	2.19182	1,0000	0,8828	2.17214
GW190719_215514-v2	180,54283	96	1,2302	0,3894	2.14599	1,1963	0,2988	2.17574
GW190720_000836-v2	470,07696	32	1,0131	0,8181	2.09277	1,1349	0,8496	2.11667
GW190725_174728-v1	563,57293	32	1,2380	0,8255	2.15020	1,0665	0,9119	2.12695
GW190727_060333-v2	147,62185	112	1,2928	0,2216	2.36338	1,2578	0,2765	2.17789
GW190728_064510-v2	497,59366	32	1,0328	0,7714	2.14987	1,1240	0,8708	2.18759
GW190731_140936-v2	144,07726	112	1,2439	0,6020	2.20474	1,0683	0,0746	2.17107
GW190803_022701-v2	156,21241	110	1,1790	0,3942	2.13381	1,1504	0,1967	2.26510
GW190805_211137-v1	132,82122	128	1,2039	0,4022	2.13086	1,3474	0,1853	2.25247
GW190828_063405-v2	176,78804	96	1,3515	0,2273	2.21871	1,5796	0,2849	2.25866
GW190828_065509-v2	299,13988	48	1,2697	0,5818	2.10582	1,0382	0,6216	2.19752
GW190909_114149-v1	137,66086	128	1,0101	0,3897	2.17377	1,2124	0,1995	2.19347
GW190915_235702-v2	178,64571	96	1,2068	0,4616	2.31544	1,2716	0,2846	2.24871
GW190916_200658-v1	152,02191	112	1,1474	0,5180	2.16000	1,0132	0,3013	2.19754
GW190926_050336-v1	165,86455	96	1,0748	0,2198	2.19695	1,1836	0,3701	2.11368
GW190929_012149-v2	109,56681	160	1,6170	0,2199	2.20485	1,1285	0,1780	2.21332
GW190930_133541-v2	483,44408	32	1,2146	0,8458	2.07629	1,0000	0,8807	2.20212
GW191103_012549-v1	517,80051	32	1,1564	0,8388	2.14548	1,3315	0,8302	2.19207
GW191105_143521-v1	554,38424	32	1,0871	0,8589	2.17000	1,0000	0,8200	2.15850
GW191109_010717-v1	91,07741	192	1,3572	0,1789	2.33561	1,3054	0,1304	2.38234
GW191113_071753-v1	292,28281	80	1,3444	0,5317	2.17375	1,0762	0,5739	2.13731
GW191126_115259-v1	500,03285	32	1,0000	0,7909	2.13606	1,0884	0,8114	2.16785
GW191127_050227-v1	132,47623	128	1,1997	0,2298	2.17613	1,2101	0,0446	2.12823
GW191129_134029-v1	586,24541	32	1,1082	0,9155	2.27010	1,1145	0,8651	2.12198
GW191204_171526-v1	507,49602	32	1,2074	0,9295	2.24098	1,3370	0,7770	2.18339
GW191215_223052-v1	237,22489	64	1,2823	0,7091	2.28776	1,3381	0,3780	2.20607
GW191230_180458-v1	118,06331	128	1,2072	0,0719	2.24965	1,2369	0,2090	2.22779
GW200128_022011-v1	136,37259	128	1,1091	0,3089	2.22602	1,0001	0,2679	2.19092
GW200129_065458-v1	160,64047	96	1,3001	0,2729	2.34929	1,1906	0,3122	2.56045
GW200202_154313-v1	586,24541	32	1,2931	0,8634	2.15410	1,2031	0,8810	2.15447
GW200208_130117-v1	156,69232	96	1,0160	0,2806	2.15725	1,0324	0,2592	2.11777

Continua na próxima página

Tabela 9 – Continuação da página anterior

Evento	Freq. Pico (Hz)	tau	Hanford			Livingston		
			qstat	qsen	qrel	qstat	qsen	qrel
GW200208_222617-v1	161,14803	110	1,0556	0,2215	2.18312	1,0875	0,5448	2.26231
GW200209_085452-v1	162,69011	96	1,0000	0,3547	2.17400	1,0000	0,1721	2.15902
GW200216_220804-v1	125,93420	128	1,0000	0,0089	2.33232	1,1076	0,1574	2.21826
GW200219_094415-v1	155,97355	110	1,1627	0,3205	2.18950	1,1088	0,3886	2.24384
GW200220_061928-v1	68,92345	256	1,5901	0,3461	2.21295	1,0008	-0,3823	2.23731
GW200220_124850-v1	152,70464	110	1,0000	0,3317	2.17302	1,3115	0,3847	2.17576
GW200224_222234-v1	140,31183	112	1,3346	0,3285	2.38374	1,5366	0,1108	2.39131
GW200306_093714-v1	236,67448	64	1,1580	0,6264	2.16403	1,0082	0,5386	2.13802
GW200308_173609-v1	121,43655	128	1,0000	0,3071	2.18069	1,5260	-0,1501	2.17835
GW200311_115853-v1	164,79273	96	1,4056	0,1999	2.25961	1,1427	0,6049	2.33363
GW200316_215756-v1	488,07034	32	1,0000	0,8463	2.11119	1,1069	0,8753	2.14402
GW200322_091133-v1	206,91014	80	1,4135	0,6117	2.18990	1,0000	0,5067	2.15131

Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE H – RESULTADOS ESTATÍSTICOS DETALHADOS DAS CORRELAÇÕES E REGRESSÕES

Este apêndice apresenta, além dos resultados discutidos no Capítulo de Análise, tabelas com dados estatísticos completos das análises de correlação de Pearson, Spearman e regressão linear simples realizadas entre os índices das estatísticas de Tsallis não extensivas (q_{stat} , q_{sen} , q_{rel}) e os parâmetros físicos dos sinais de ondas gravitacionais (massa final, massa de chirp e frequência de pico). Essas informações corroboram as interpretações e conclusões apresentadas nos capítulos principais da tese.

A Tabela 10 apresenta a matriz de correlação de Pearson entre as variáveis analisadas. Observa-se, por exemplo, uma correlação negativa muito forte entre (q_{sen}) e a massa final ($r = -0,85$), bem como uma correlação positiva muito forte entre (q_{sen}) e a frequência de pico ($r = 0,88$).

Tabela 10 – Matriz de correlação de Pearson entre os parâmetros analisados.

	MassaFinal	FreqPico	MassaChirp	qstat_media	qsen_media	qrel_media
MassaFinal	1.00	-0.80	0.99	0.16	-0.85	0.48
FreqPico	-0.80	1.00	-0.79	-0.28	0.88	-0.47
MassaChirp	0.99	-0.79	1.00	0.18	-0.84	0.51
qstat_media	0.16	-0.28	0.18	1.00	-0.30	0.39
qsen_media	-0.85	0.88	-0.84	-0.30	1.00	-0.51
qrel_media	0.48	-0.47	0.51	0.39	-0.51	1.00

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Tabela 11, são listadas as correlações de Pearson com seus respectivos coeficientes r , valores de significância (p -valor) e número de observações válidas (n). Esses resultados reforçam a robustez das associações detectadas para os índices (q_{sen}) e (q_{rel}), sobretudo em relação à massa de chirp e à frequência de pico.

A Tabela 12 sintetiza os modelos de regressão linear simples ajustados para os pares de variáveis com correlações significativas. Para cada modelo, são apresentados os valores estimados do intercepto (β_0), coeficiente angular (β_1), o coeficiente de determinação R^2 , que indica a proporção da variabilidade explicada, o valor- p associado à inclinação e o número total de eventos (n). O modelo com maior poder explicativo foi o que relaciona q_{sen} e a frequência de pico, com $R^2 = 0,776$ e $p < 10^{-24}$.

Ao examinar essas regressões, nota-se que a força das correlações varia significativamente entre os índices do q -tripleto. As relações envolvendo q_{sen} e q_{rel} exibem coeficientes de determinação elevados ($R^2 > 0,2$), refletindo dependências estatisticamente consistentes com parâmetros físicos do sistema binário. Entretanto, para os modelos em que $R^2 < 0,3$, especialmente aqueles associados a q_{stat} , os resultados devem ser interpretados com cautela, sendo classificados como evidências fracas (*weak evidence*) de tendência estatística, sem implicação direta de relevância física.

Tabela 11 – Correlações de Pearson entre as variáveis analisadas.

Variáveis	Pearson r	p-valor	n
qstat_media vs MassaFinal	0.158	1.78×10^{-1}	74
qsen_media vs MassaFinal	-0.851	8.64×10^{-22}	74
qrel_media vs MassaFinal	0.480	1.53×10^{-5}	74
qstat_media vs FreqPico	-0.275	1.76×10^{-2}	74
qsen_media vs FreqPico	0.881	4.16×10^{-25}	74
qrel_media vs FreqPico	-0.471	2.23×10^{-5}	74
qstat_media vs MassaChirp	0.177	1.31×10^{-1}	74
qsen_media vs MassaChirp	-0.839	1.09×10^{-20}	74
qrel_media vs MassaChirp	0.506	4.19×10^{-6}	74

Fonte: Elaborada pelo autor com base nos resultados estatísticos da análise de correlação de Pearson.

Tabela 12 – Resultados das regressões lineares entre variáveis selecionadas.

Modelo	Intercepto	Coef. Angular	R ²	p-valor	n
qsen_media ~ MassaFinal	0.8257	-0.0074	0.724	8.64×10^{-22}	74
qsen_media ~ MassaChirp	0.8127	-0.0167	0.704	1.09×10^{-20}	74
qsen_media ~ FreqPico	-0.0025	0.0017	0.776	4.16×10^{-25}	74
qrel_media ~ MassaFinal	2.1517	0.0010	0.230	1.53×10^{-5}	74
qrel_media ~ MassaChirp	2.1493	0.0025	0.256	4.19×10^{-6}	74
qrel_media ~ FreqPico	2.2651	-0.0002	0.222	2.23×10^{-5}	74
qstat_media ~ MassaFinal	1.1676	0.0007	0.025	1.78×10^{-1}	74
qstat_media ~ MassaChirp	1.1634	0.0017	0.031	1.31×10^{-1}	74
qstat_media ~ FreqPico	1.2657	-0.0003	0.076	1.76×10^{-2}	74

Fonte: Elaborada pelo autor com base nos modelos de regressão linear simples aplicados.

Essa distinção é metodologicamente importante, pois correlações fracas podem decorrer de flutuações aleatórias, ruído instrumental ou da própria natureza estocástica do sinal gravitacional, e não necessariamente de uma causalidade física subjacente. Assim, este trabalho reconhece explicitamente as limitações interpretativas desses baixos valores de R^2 , reforçando que sua principal contribuição reside na caracterização estatística e metodológica do comportamento dos índices não extensivos.

Complementarmente, a Tabela 13 apresenta os coeficientes de correlação de Spearman (ρ) calculados para os mesmos pares de variáveis. Essa análise não paramétrica fornece suporte adicional aos achados da correlação de Pearson, ao capturar associações monotônicas mesmo na ausência de linearidade estrita. Os resultados mostram forte concordância entre os dois métodos, notadamente nos casos envolvendo q_{sen} , com $\rho \approx \pm 0,85$ e $p < 10^{-21}$.

A comparação entre as análises de Pearson e Spearman está sintetizada e discutida no corpo do texto principal (ver Tabela 6), permitindo uma avaliação crítica sobre a natureza linear ou não linear das dependências entre variáveis.

As tabelas deste apêndice foram geradas automaticamente a partir de scripts desenvolvidos em Python, com uso das bibliotecas `pandas`, `scipy.stats`, `statsmodels` e `seaborn`. Todas as análises foram reproduzidas com controle rigoroso da significância estatística ($\alpha = 0,05$), garantindo

Tabela 13 – Coeficientes de correlação de Spearman (ρ) entre variáveis selecionadas.

Relação		Spearman ρ	Valor- p	n
q_{stat}	MassaFinal	0,214	0,0670	74
q_{sen}	MassaFinal	-0,856	2,34e-22	74
q_{rel}	MassaFinal	0,541	6,62e-07	74
q_{stat}	FreqPico	-0,214	0,0670	74
q_{sen}	FreqPico	0,856	2,34e-22	74
q_{rel}	FreqPico	-0,541	6,62e-07	74
q_{stat}	MassaChirp	0,245	0,0355	74
q_{sen}	MassaChirp	-0,859	1,24e-22	74
q_{rel}	MassaChirp	0,563	1,80e-07	74

Fonte: Elaborado pelo autor.

confiabilidade e transparência nos resultados apresentados.