



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
MESTRADO ACADÊMICO EM FÍSICA**

LUCAS SIEVERS DE ALMEIDA

EXPLORANDO ANYONS EM INFORMAÇÕES QUÂNTICAS TOPOLOGICAS

**FORTALEZA
2024**

LUCAS SIEVERS DE ALMEIDA

EXPLORANDO ANYONS EM INFORMAÇÕES QUÂNTICAS TOPOLOGICAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Física do Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Física. Área de Concentração: Informação Quântica.

Orientador: Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho.

FORTALEZA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A448e Almeida, Lucas.

Explorando Anyons em Informações Quânticas Topológicas / Lucas Almeida. – 2026.
74 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação
em Física, Fortaleza, 2026.

Orientação: Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho.

1. anyons. 2. computação quântica topológica. 3. fibrados e conexões de Hilbert. 4. teoria de Chern-Simons. I. Título.

CDD 530

LUCAS SIEVERS DE ALMEIDA

EXPLORANDO ANYONS EM INFORMAÇÕES QUÂNTICAS TOPOLOGICAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Física do Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Física. Área de Concentração: Informação Quântica.

Aprovada em: 28/08/2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa
Filho (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Diego Rabelo da Costa
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Andrey Chaves
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Mauricio Godoy
Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT)

À minha família e amigos, pelo apoio e incentivo
a seguir o que gosto sem duvidar em nenhum
momento. Feia e Very, tamo junto.

AGRADECIMENTOS

À Instituição CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

Ao Prof. Dr. Raimundo, pela excelente orientação, e aos professores participantes da banca examinadora Diego Rabelo da Costa, Andrey Chaves e Mauricio Godoy pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Ao meu irmão Marco, minha mãe Vanessa, namorada Jamile e todos os amigos que me apoiaram nessa jornada.

Um agradecimento especial ao meu amigo Northon o qual me ajudou imensamente com conversas e discussões matemáticas e conceituais, e pelo apoio.

Se as nossas mentes pequenas, por alguma conveniência, dividem este universo em partes — física, biologia, geologia, astronomia, psicologia e assim por diante — lembre-se que a natureza não reconhece essas divisões.

(FEYNMAN, 1964, cap. 3)

RESUMO

Esta dissertação apresenta uma introdução conceitual e matemática aos fundamentos da computação quântica topológica, com ênfase na emergência de anyons não abelianos em sistemas bidimensionais. Partimos da análise do espaço de configurações de partículas idênticas e construímos a descrição quântica por meio da linguagem de fibrados de Hilbert, conexões e holonomia, explicitando a transição natural entre conceitos topológicos e sua formulação física. Nesse enquadramento, mostramos como a teoria de Chern-Simons fornece um modelo eficaz para a dinâmica topológica dos sistemas anyônicos, capturando as transformações unitárias induzidas por processos de fusão e braiding. A partir dessa estrutura, discutimos como essas operações podem ser utilizadas para implementar computação quântica tolerante a falhas. O trabalho tem caráter essencialmente didático, buscando elucidar a relação entre topologia, geometria e física anyônica, destacando os elementos fundamentais que sustentam a proposta de computadores topológicos.

Palavras-chave: anyons; computação quântica topológica; fibrados e conexões de Hilbert; teoria de Chern-Simons.

ABSTRACT

This dissertation presents a conceptual and mathematical introduction to the foundations of topological quantum computation, with emphasis on the emergence of non-Abelian anyons in two-dimensional systems. We start from the analysis of the configuration space of identical particles and build the quantum description through the language of Hilbert bundles, connections, and holonomy, making explicit the natural transition between topological concepts and their physical formulation. Within this framework, we show how Chern-Simons theory provides an effective model for the topological dynamics of anyonic systems, capturing the unitary transformations induced by fusion and braiding processes. From this structure, we discuss how these operations can be used to implement fault-tolerant quantum computation. The work has an essentially didactic character, aiming to elucidate the relationship between topology, geometry, and anyonic physics, highlighting the fundamental elements that support the proposal of topological computers.

Keywords: anyons; topological quantum computation; Hilbert bundles and connections; Chern-Simons theory.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ilustração de uma variedade	27
Figura 2 – Espaços das posições relativas das partículas	29
Figura 3 – Caminhos para permutação de partículas em diferentes dimensões	30
Figura 4 – Espaço das posições relativas em 3D e o processo de identificação	30
Figura 5 – Espaço das posições relativas em 2D e formação do cone	31
Figura 6 – Representação de caminhos e permutações no espaço projetivo 3D	32
Figura 7 – Espaço de configuração 2D e classes de homotopia no cone	33
Figura 8 – Ilustração de um fibrado vetorial trivial sobre S^1	37
Figura 9 – Representação de um fibrado vetorial e funções de transição	39
Figura 10 – Diferença entre cilindro e fita de Möbius e o papel do grupo estrutural	40
Figura 11 – Transporte paralelo e holonomia em uma superfície curva	48
Figura 12 – Efeito Aharonov–Bohm e o potencial vetor	54
Figura 13 – Fusão de cinco anyons de Fibonacci e estados resultantes	61
Figura 14 – Bases do espaço de fusão para quatro anyons	64
Figura 15 – Representação de diferentes ordens de fusão para quatro anyons	65
Figura 16 – Relação do pentágono para matrizes de fusão	66
Figura 17 – Representação do trançamento (braiding) de partículas no tempo	67
Figura 18 – Equações do hexágono e consistência entre trançamento e fusão	68

LISTA DE SÍMBOLOS

\wedge	Produto exterior (wedge)
A	Forma de conexão (1-forma de gauge)
F	Curvatura / 2-forma de campo ou matriz de recoupling (F-move)
$\mathcal{P} \exp$	Exponencial ordenada ao longo de curva
g_γ	Holonomia / transportador paralelo
W_γ	Loop de Wilson
$\pi_1(M)$	Grupo fundamental do espaço-base
B_n	Grupo de tranças (braid group)
S_n	Grupo de permutação
Δ	Variação ou pontos de colisão
ρ	Representação do grupo estrutural
$R = \rho(g_\gamma)$	Representação da holonomia
R_{ab}^c	Operador de braiding no canal de fusão c
N_{ab}^c	Coeficiente de fusão
d_a	Dimensão quântica
V_{abc}^λ	Espaço de fusão
$ \cdot\rangle$	Estado (ket)
$\langle\cdot $	Estado dual (bra)
$\langle\cdot \cdot\rangle$	Produto interno
T_k	Geradores da álgebra de Lie
Tr	Traço de operador
\otimes	Produto tensorial
\times	Produto cartesiano
\setminus	Subtração de conjunto
\cdot/\cdot	Operador quociente
\simeq	Isomorfismo

\mathcal{E}	Espaço euclidiano de coordenadas generalizadas
$\mathcal{C}(\mathcal{E}_d^N)$	Espaço euclidiano identificado
Σ	Somatório

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	COMPUTAÇÃO QUÂNTICA	15
2.1	Portas lógicas universais	15
2.2	Qubit	16
2.3	Portas lógicas quânticas universais	17
2.4	Compilação quântica	18
2.5	Dificuldades de uma computação quântica robusta	19
3	SISTEMAS BIDIMENSIONAIS	22
4	PARTÍCULAS IDÊNTICAS	24
4.1	Espaço de configurações	25
4.2	Fibrado de Hilbert	35
4.3	Diferenciação no fibrado: conexões, invariância de calibre, curvatura	42
4.3.1	<i>Derivada covariante</i>	45
4.3.2	<i>Curvatura</i>	46
4.3.3	<i>Holonomia</i>	47
4.4	Permutação de partículas idênticas	50
4.5	Dinâmica no fibrado	51
5	O EFEITO AHARONOV–BOHM	54
6	ANYONS	57
6.1	Fusão	58
6.1.1	<i>Dimensão quântica</i>	62
6.1.2	<i>Espaço de fusão V</i>	63
6.1.3	<i>Matrizes F, relação do pentágono</i>	64
6.2	Braiding e equações do hexágono	66
6.3	Computação com anyons.	68
7	CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS	70
	REFERÊNCIAS	72

1 INTRODUÇÃO

A capacidade humana de manipular informações foi decisiva ao longo da história, moldando a organização social e impulsionando o progresso tecnológico. Com o advento de computadores com poder de processamento cada vez maior, novos horizontes para o desenvolvimento científico e tecnológico têm se aberto.

Nesse contexto, a computação quântica surge como uma tecnologia com potencial revolucionário. Computadores que operam com sistemas regidos pelas leis da mecânica quântica podem, graças aos fenômenos de superposição e entrelaçamento, superar exponencialmente os clássicos em determinadas tarefas. Entre os exemplos mais promissores estão a *fatoração de números primos* (Shor, 1999; Xiao *et al.*, 2022), *álgebra linear* (Ayoade *et al.*, 2022), *simulação de sistemas quânticos* (Aspuru-Guzik *et al.*, 2005) e *machine learning* (Peral-García *et al.*, 2024).

Normalmente, os computadores quânticos são classificados de acordo com o princípio físico no qual se baseiam. Entre as principais abordagens, destacam-se os computadores baseados em fôtons, supercondutores, armadilhas de íons e os topológicos. Tais categorias são abrangentes um vez que, associado a cada uma, podem existir diferentes sistemas que utilizam distintos graus de liberdade para representar a informação. Em cada um desses sistemas específicos a informação é associada aos estados e às fases complexas do mesmo, podendo ser manipulada por meio de operadores unitários. Computadores fotônicos, por exemplo, pode utilizar os estados de Fock e associá-los as unidades de informação (qubits), mas também pode utilizar a polarização vertical ou horizontal dos fôtons.

Atualmente, ainda não há computadores quânticos capazes de resolver problemas de alta complexidade, como a simulação de fármacos ou a quebra da criptografia RSA. Isso se deve à necessidade de um número extremamente elevado de qubits lógicos para executar tais tarefas (Dalzell *et al.*, ; Gidney; Ekerå, 2021; Gouzien; Sangouard, 2021). Apesar de avanços importantes por parte de empresas como a Microsoft (Microsoft, 2024; Microsoft, 2025) e a IBM (IBM Quantum, 2024), a meta de construir máquinas com baixa taxa de erro e muitos qubits ainda não foi alcançada.

O funcionamento de um computador quântico depende do controle preciso e da preservação dos estados físicos que codificam os qubits. Esses sistemas são extremamente sensíveis e estão sujeitos a múltiplas fontes de erro (Devitt *et al.*, 2013; Terhal, 2015). Entre elas,

destaca-se a interação inevitável com o ambiente¹, além das interações internas entre os próprios componentes, que provocam processos de decoerência. A taxa e o tipo de erros variam conforme o sistema físico e sua arquitetura, mas tendem a crescer com o número de qubits, dificultando a escalabilidade dos dispositivos mantendo taxas de erro toleráveis.

A mitigação de erros é, portanto, um dos principais desafios para a escalabilidade da computação quântica. Nesse cenário, os computadores quânticos topológicos ganham destaque por proporem o armazenamento e processamento da informação em subespaços de Hilbert protegidos topologicamente. Como consequência, perturbações locais, causadas pela interação com o ambiente ou por imperfeições internas, são naturalmente suprimidas pelo caráter global das propriedades topológicas².

A computação quântica topológica baseia-se na manipulação dos estados de quasi-partículas chamadas *anyons*. Ao contrário das partículas fundamentais em 3+1 dimensões, os anyons emergem em sistemas efetivamente bidimensionais (2+1 dimensões), onde a topologia do espaço permite estatísticas fracionárias que diferem das estatísticas bosônicas e fermiônicas usuais.

Essas quasipartículas dividem-se em duas classes: anyons abelianos e anyons não abelianos. Embora os anyons abelianos ofereçam uma introdução útil ao tema³, eles não possuem estrutura suficiente para computação quântica universal⁴. Assim, apenas os anyons não abelianos são relevantes para os objetivos deste trabalho.

O grande interesse nos anyons não abelianos reside na estrutura do estado fundamental do sistema, que é degenerado e composto por subespaços topologicamente distintos. Cada subespaço representa um estado global sensível apenas à configuração coletiva das quasipartículas. Trocas adiabáticas entre elas, protegidas por um gap de energia, induzem transformações unitárias no espaço degenerado que dependem apenas da topologia dos trajetos — as chamadas holonomias. Esse comportamento permite representar e manipular estados robustos contra perturbações locais, viabilizando modelos de computação naturalmente resistentes a erros.

Sistemas anyônicos apresentam uma forma de organização chamada ordem topoló-

¹ O ambiente pode incluir o aparato de medida e/ou elementos periféricos, como as paredes da câmara de isolamento, que inevitavelmente interagem com o sistema em análise.

² É importante ressaltar que grandes perturbações capazes de alterar essas configurações globais do sistema ainda são fontes de erros possíveis dentro desses sistemas.

³ Os anyons abelianos estão profundamente relacionados com efeitos Aharonov–Bohm (Aharonov; Bohm, 1959) e as Fases de Berry (Berry, 1984).

⁴ As operações unitárias associadas à troca de anyons abelianos são densas apenas em $U(1)$, enquanto para a computação universal é necessário que sejam densas em $SU(2)$.

gica, que se manifesta, por exemplo, na existência de múltiplos estados fundamentais que não podem ser distinguidos por observáveis locais. Essa ordem também está associada à presença de anyons. Uma maneira de identificar essa ordem é por meio da entropia de entrelaçamento, especialmente através do termo constante conhecido como entropia topológica, que revela a presença de entrelaçamento de longo alcance no sistema. Experimentalmente, há evidências da existência de anyons em sistemas como o Efeito Hall Quântico Fracionário e em spin liquids, que exibem estados altamente correlacionados sem apresentar ordem magnética convencional.

O objetivo deste trabalho é apresentar, de forma clara e acessível, os principais conceitos físicos e matemáticos relacionados aos anyons, partindo de sua definição e das ideias topológicas que fundamentam sua existência. Começaremos explorando como sistemas quânticos bidimensionais permitem a emergência de estatísticas distintas das convencionais, e como a topologia do espaço desempenha um papel central na descrição dessas quasipartículas. Em seguida, discutimos a estrutura da evolução quântica desses sistemas, abordando noções como teorias topológicas de calibre, fibrados e conexões, que fornecem a linguagem matemática adequada para descrever os estados protegidos e as operações de entrelaçamento. A partir dessa base conceitual, discutiremos como essas propriedades anyônicas podem ser capazes de implementar um computador quântico, a partir de suas matrizes de Fusão F e de trança R .

O desenvolvimento do trabalho busca ser principalmente didático envolvendo diversas imagens e explicações detalhadas em tópicos mais complicados os quais muitas das vezes não são tratados diretamente em materiais introdutórios. Os conceitos principais discutidos nesse trabalho estão relacionados a topologia, geometria diferencial, teoria de calibre, teoria quântica de campos topológica, assim como a descrição efetiva da física anyônica.

Apesar das citações ao longo do texto. Vale a pena citar alguns artigos e livros os quais esse trabalho foi principalmente baseado. Os aspectos topológicos/geométricos discutidos são baseados principalmente nos livros (Nash; Sen, 1988) e (Nakahara, 2018) enquanto os aspectos físicos se baseiam no artigo (Leinaas; Myrheim, 1977) e nos livros (Pachos, 2012) e (Simon, 2023)

2 COMPUTAÇÃO QUÂNTICA

A essência da computação quântica reside na manipulação inteligente de amplitudes de probabilidade. Enquanto computadores clássicos processam bits binários (0 ou 1), sistemas quânticos exploram a superposição, onde um qubit pode existir simultaneamente em múltiplos estados. Cada estado possível possui uma amplitude complexa associada, que determina sua probabilidade de ser observado durante uma medição.

O objetivo final da computação quântica é "confinar" a distribuição de probabilidade resultante em picos estreitos em torno das soluções corretas. Quando o sistema é medido, a alta probabilidade concentrada nesses estados garante que a resposta útil seja obtida com elevada confiança. Essa orquestra de amplitudes - direcionando interferência destrutiva para respostas indesejadas e construtiva para a solução ótima - é o cerne da vantagem quântica em problemas como fatoração e otimização.

2.1 Portas lógicas universais

Em computação clássica as informações são representadas de forma binária através de bits¹, os quais podem assumir valores $\{0, 1\}$. Uma informação, como um número ou uma letra, por exemplo, pode ser representada por um conjunto de bits. Com 3 bits, podemos ter 2^3 combinações diferentes. Se associarmos a cada uma dessas combinações um número natural, podemos representar os números $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

000	—————→	0
001	—————→	1
010	—————→	2
011	—————→	3
100	—————→	4
101	—————→	5
110	—————→	6
111	—————→	7

ou qualquer outro conjunto de 8 números (no caso de 3 bits). Da mesma forma, temos a tabela ASCII a qual associa letras, algarismos e sinais de pontuação e controle a uma possível combinação de 8 bits². Com 8 bits, podemos ter $2^8 = 256$ combinações diferentes, permitindo a

¹ Existem computadores ternários também, que utilizam trits assumindo valores $\{-1, 0, 1\}$

² Um conjunto de 8 bits é conhecido com byte

representação de uma vasta gama de caracteres usados na comunicação textual digital.

Em um computador queremos ser capazes de manipular tais informações da forma mais ampla possível, como alterar um texto, somar dois números, ou qualquer outra instrução que leve um conjunto de informações em outro. Matematicamente tais manipulações são representadas pelo conjunto de todas as funções $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^m$ as quais levam um conjunto de n bits a um conjunto de m bits. Obviamente existem infinitas funções desse tipo dados m e n arbitrários.

Obviamente não somos capazes de criar um dispositivo físico para cada possível função $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^m$, com tudo, essas funções podem ser obtidas a partir da combinação de um conjunto finito de funções do tipo $g : \{0,1\}^k \rightarrow \{0,1\}$ (Nielsen; Chuang, 2010). Os dispositivos que implementam fisicamente essas funções são chamados de portas lógicas. Se esse conjunto é capaz de implementar (dado tempo e recursos suficiente) qualquer função $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^m$ então ele é um conjunto universal de portas lógicas.

Em computação clássica, existem alguns grupos de portas as quais podem ser universais, por exemplo $\{AND, OR, NOT\}$ ou $\{NAND\}$. Apesar de existir conjuntos de apenas uma porta lógica que conseguem ser universais, nem sempre é a melhor escolha, um vez que pode ser muito mais custoso em questão de tempo e recursos implementar funções com apenas um tipo de porta lógica.

2.2 Qubit

Em computação quântica as informações são armazenadas nos estados quânticos do sistema. A unidade de informação mais simples, com propriedades quânticas, que podemos ter é o sistema de dois níveis, nesse contexto, chamamos ele de *bit quântico* ou *qubit*. Existem computadores quânticos baseados em sistemas de mais níveis, como por exemplo, os qutrits (sistemas de três níveis), no entanto, eles não constituem o foco desse trabalho.

Um sistema quântico onde existe a superposição de dois estados puros $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ é dito ser um qubit e seu vetor de estado é dado por

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \tag{2.1}$$

onde α e β são números complexos. Sabemos da mecânica quântica que $|\langle\psi|\psi\rangle|^2 = 1$ de modo

que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Tal estado pode ser representado por uma matriz coluna de duas posições:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \equiv \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (2.2)$$

2.3 Portas lógicas quânticas universais

Todas as possíveis transformações que levam um estado de um qubit à outro $|\psi_1\rangle \rightarrow |\psi_2\rangle$, sem perda de informação³, podem ser representados por uma matriz complexa unitária 2×2 . Tais transformações recebem o nome de portas lógicas de um qubit.

Uma sucessão de transformações U_1, U_2 pode ser representada por uma única matriz unitária U_3 através da multiplicação matricial, uma vez que $U_3^\dagger U_3 = (U_1 U_2)^\dagger U_1 U_2 = U_2^\dagger U_1^\dagger U_1 U_2 = \mathbf{1}$.

O conjunto de todas as matrizes unitárias 2×2 munidos da operação de multiplicação matricial formam um grupo chamado de $U(2)$:

Operação do Grupo: $U_1 U_2 = U_3 \quad \forall U_1, U_2, U_3 \in U(2)$.

Elemento Identidade: $U\mathbf{1} = U \quad \forall U \in U(2)$.

Elemento Inverso: $U^\dagger U = \mathbf{1} \quad \forall U \in U(2)$.

Do ponto de vista físico, nem todas as transformações unitárias são relevantes. Uma vez que uma aquisição de uma fase global do sistema é indistinguível, o grupo de transformações unitárias que nos permite manipular o estado de um qubit sem perda de informação é um subgrupo de $U(2)$. Esse subgrupo é conhecido como $SU(2)$ e é formado por todas as transformações $U \in U(2)$ onde $\det(U) = 1$.

Podemos verificar isso decompondo U em uma fase $e^{i\theta/2}$ e um operador $S \in SU(2)$ de modo que $U = e^{i\theta/2}S$. Para isso utilizamos o fato de que U é um operador unitário e seu determinante deve ser da forma

$$\det(U) = e^{i\theta} \quad (2.3)$$

O que nos permite verificar diretamente que:

$$\det(S) = \det(e^{-i\theta/2}U) = e^{-i\theta/2} \det(U) = e^{-i\theta/2} e^{i\theta/2} = 1 \quad (2.4)$$

³ A informação de um qubit está armazenada em sua superposição de estados e em suas amplitudes de probabilidade α e β . Operadores de medida, por exemplo, quebram tal superposição, resultando na perda de informação.

e

$$U^\dagger U = (e^{i\theta/2} S)^\dagger (e^{i\theta/2} S) = (e^{-i\theta/2} S^\dagger)(e^{i\theta/2} S) = S^\dagger S = I \quad (2.5)$$

Um conjunto de portas lógicas $\{V\}$ é universal para um único qubit se o grupo gerado por $\{V\}$ (isto é, todas as combinações possíveis de produtos $V_1 V_2 \dots V_n$) for denso em $SU(2)$ na topologia padrão. Isso equivale a dizer que, para qualquer operador $S \in SU(2)$ e qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma sequência finita de operadores $\{V_i\}$ tal que:

$$\|V_1 V_2 \dots V_n - S\| < \varepsilon, \quad (2.6)$$

onde $\|\cdot\|$ é uma norma apropriada.

Para que um computador quântico seja universal, é preciso que tal ideia seja estendida para um conjunto de n qubits. É possível mostrar que, dado um conjunto de portas lógicas $\{V\}$ que seja denso em $SU(2)$, podemos torná-lo computacionalmente universal para n qubits adicionando uma porta lógica capaz de gerar entrelaçamento entre os qubits, veja (Nielsen; Chuang, 2010).

Essa característica é fundamental pois nos permite aferir a viabilidade de um sistema se comportar como um computador quântico a partir de suas operações acessíveis. A nível informacional nossa única exigência é:

1. Um conjunto de operações $\{V_i\}$ o qual seja denso em $SU(2)$.
2. Uma operação que promova entrelaçamento entre os espaços $H_1 \otimes \dots \otimes H_n$ individuais de cada qubit.

Apesar de existir um grande passo entre a realização experimental de um computador quântico e a teoria a qual o suporta. A análise da sua capacidade de representar informação é imprescindível.

2.4 Compilação quântica

A ideia de um computador quântico é algo abrangente, no sentido que o termo não define completamente a arquitetura operacional do mesmo. Qualquer sistema que seja capaz de satisfazer os requerimentos de densidade e entrelaçamento é um candidato plausível a ser um computador quântico. Diversas arquiteturas físicas têm sido exploradas para realizar computação quântica, incluindo:

1. Computadores baseados em íons aprisionados

2. Sistemas de circuitos supercondutores
3. Pontos quânticos semicondutores
4. Sistemas fotônicos
5. Topologias baseadas em anyons

Cada uma dessas plataformas aproveita os fenômenos de superposição de estados e entrelaçamento quântico para representar e manipular informação. A linguagem natural para descrever problemas e operações nesses sistemas é o conjunto padrão de portas quânticas universais (como portas de Pauli, Hadamard, CNOT e T). Contudo, as operações nativas acessíveis a cada hardware são distintas, de forma que surge a necessidade de converter entre representações de circuitos equivalentes.

O teorema que garante a existência dessa correspondência, com complexidade eficiente, é conhecido como algoritmo de Solovay-Kitaev (Ozols, 2009). Este assegura que qualquer porta universal pode ser aproximada por uma sequência de portas de um conjunto discreto, embora a execução sucessiva de portas lógicas possam acumular erros.

Para o caso específico de sistemas topológicos baseados em anyons (como modelos de Ising e Fibonacci), técnicas avançadas de compilação são necessárias para mapear portas lógicas em operações de braiding. Dois artigos relevantes que abordam essa conversão com análise de taxa de erro induzida são: (Johansen; Simula, 2021; Long *et al.*, 2025). Ambos exploram modelos capazes de percorrer grafos de combinações de operadores que sejam capazes de optimizar a convergência da aproximação.

2.5 Dificuldades de uma computação quântica robusta

Apesar do enorme potencial teórico da computação quântica, sua implementação prática enfrenta obstáculos consideráveis. O principal deles é a fragilidade dos estados quânticos diante do ambiente. Um qubit isolado é um sistema idealizado: no mundo real, ele sempre interage com graus de liberdade externos, o que gera ruído e perda de coerência quântica. Esse fenômeno é conhecido como **decoerência**.

Para ilustrar o processo de decoerência suponha \mathcal{H}_S (espaço de computação/qubits) e \mathcal{H}_E (ambiente) espaços de Hilbert finito-dimensionais com bases $\{|s_i\rangle\}_{i=1}^{d_s}$ e $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{d_e}$. O sistema total é $\mathcal{H} = \mathcal{H}_C \otimes \mathcal{H}_E$.

Um vetor arbitrário $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ pode ser escrito como

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{d_s} \sum_{k=1}^{d_e} c_{ik} |s_i\rangle \otimes |e_k\rangle, \quad \sum_{i,k} |c_{ik}|^2 = 1. \quad (2.7)$$

O operador densidade do estado global (puro) é

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_{i,k} \sum_{i',k'} c_{ik} c_{i'k'}^* (|s_i\rangle\langle s_{i'}|) \otimes (|e_k\rangle\langle e_{k'}|). \quad (2.8)$$

A matriz densidade reduzida do espaço de computação C é obtida pelo traço parcial sobre o ambiente E :

$$\rho_C = Tr_E[\rho] = \sum_{k=1}^{d_E} (\mathbb{I}_C \otimes \langle e_k |) \rho (\mathbb{I}_C \otimes |e_k\rangle) = \sum_{i,i'} \left(\sum_k c_{ik} c_{i'k}^* \right) |s_i\rangle\langle s_{i'}|. \quad (2.9)$$

Critério de separabilidade (para estados puros do sistema total): o estado $|\Psi\rangle$ é **separável** entre espaço de computação e ambiente se, e somente se, a matriz de coeficientes $C = (c_{ik})$ tem $\text{rank}(C) = 1$. Ou seja, existem vetores $u \in \mathbb{C}^{d_C}$ e $v \in \mathbb{C}^{d_E}$ tais que

$$c_{ik} = u_i v_k \iff |\Psi\rangle = \left(\sum_i u_i |s_i\rangle \right) \otimes \left(\sum_k v_k |e_k\rangle \right). \quad (2.10)$$

Caso contrário, $\text{rank}(C) \geq 2$ e $|\Psi\rangle$ está **entrelaçado** entre C e E . Equivalentemente, ρ_C é pura ($\rho_C^2 = \rho_C$) se e somente se $|\Psi\rangle$ é separável; se ρ_C é mista, o estado global está entrelaçado.

Esse entrelaçamento entre espaço de computação e ambiente tem consequências físicas importantes: ao entrelaçar-se com E , o subsistema computacional deixa de estar descrito por um vetor de estado puro e passa a possuir uma distribuição estatística de estados (estado misto). Medidas como a *pureza* $Tr[\rho_C^2]$ (que vale 1 para estados puros e < 1 para mistos) e a entropia de von Neumann

$$S(\rho_C) = -Tr(\rho_C \log \rho_C)$$

quantificam essa perda de coerência local. Na prática isso significa que, embora o espaço de Hilbert formal \mathcal{H}_C mantenha dimensão d_C , o entrelaçamento com o ambiente reduz os *graus de liberdade efetivamente acessíveis* ao controlador quântico: parte da informação quântica ficou correlacionada com E e não pode ser recuperada sem acesso ao ambiente (muitas vezes esses processos são irreversíveis).

A computação clássica possui mecanismos bem estabelecidos de correção de erros, como códigos de redundância. No regime quântico, no entanto, o problema é mais delicado: não podemos clonar qubits arbitrariamente devido ao teorema da não-clonagem, e qualquer tentativa

de medir um estado para verificar sua integridade tende a destruir a superposição que carrega a informação.

Para mitigar esses problemas, surgiram os *códigos de correção de erros quânticos* (Steane, 1996), capazes de distribuir a informação de um qubit lógico em muitos qubits físicos⁴. Ainda assim, esses esquemas exigem um número muito elevado de qubits auxiliares e operações adicionais, o que acentua o problema de escalabilidade.

Em resumo, o grande desafio atual não está apenas em conceber algoritmos quânticos eficientes, mas em *garantir que a informação quântica sobreviva tempo suficiente para que eles sejam executados*. A decoerência local continua sendo o principal inimigo a ser superado. É justamente esse problema que torna os anyons — excitações cujo estado é robusto a perturbações locais — particularmente promissores para aplicações em computação quântica.

⁴ Qubits físicos são elementos do sistema real onde ocorrem as interações físicas, já os lógicos são a representação teórica ideal a qual muita das vezes necessita múltiplos qubits físicos para garantir a confiabilidade.

3 SISTEMAS BIDIMENSIONAIS

As excitações estudadas neste trabalho possuem, como característica essencial, sua natureza bidimensional. Para isso, é necessário definir com precisão o que entendemos por um sistema 2D. Embora não existam partículas fundamentais intrinsecamente bidimensionais, é possível construir sistemas nos quais a função de onda $\Psi(\vec{r})$ esteja efetivamente confinada a duas dimensões. Nesse regime, as excitações do sistema se comportam como se fossem partículas intrinsecamente bidimensionais, permitindo a emergência de fenômenos exclusivos de sistemas 2D.

Para exemplificar essa ideia podemos considerar uma função de onda a qual possa ser colocada na seguinte forma:

$$\Psi(\vec{x}) = \psi(x, y) \cdot \phi(z) \quad (3.1)$$

Essa consideração exige que $V(\vec{x}) = V(x, y) + V(z)$. Se inserirmos essas relações na equação de Schrodinger obtemos as soluções:

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{xy}^2 \psi(x, y) + V(x, y) \psi(x, y) = E_{xy} \psi(x, y), \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \phi(z)}{dz^2} + V(z) \phi(z) = E_z \phi(z), \end{cases}$$

Quando o potencial $V(z)$ confina fortemente a partícula ao plano xy , a função $\phi(z)$ se reduz à sua forma fundamental, e a dinâmica efetiva do sistema é dominada por $\psi(x, y)$. Podemos ver isso considerando o caso onde $V(z)$ é submetido ao potencial de um poço infinito com uma largura L pequena:

$$V(z) = \begin{cases} 0, & \text{se } |z| \leq \frac{L}{2}, \\ \infty, & \text{se } |z| > \frac{L}{2}. \end{cases} \quad (3.2)$$

As soluções para esse problema são conhecidas e são dadas por:

$$\phi_n(z) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right), & n \text{ ímpar,} \\ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right), & n \text{ par,} \end{cases} \quad E_z(n) = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Com isso calculamos o gap de energia entre o estado fundamental e o primeiro estado excitado:

$$\Delta E_z = E_z(2) - E_z(1) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (2^2 - 1^2) = \frac{3\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}.$$

O qual é inversamente proporcional à L^2 . Um exemplo típico de sistema bidimensional é fornecido pelas heterojunturas, formadas na interface entre semicondutores distintos. Nessas estruturas pode-se confinar os elétrons em um potencial de poço quântico, resultando na formação de um gás eletrônico bidimensional (2DEG) (Frensky,). Dentre os fenômenos observados nesses sistemas formados em heterojunturas, destaca-se o efeito Hall quântico, que se manifesta sob condições de baixo temperatura e altos campos magnéticos.

De forma geral, para que um sistema tridimensional exiba comportamento efetivamente bidimensional, o elemento crucial é um confinamento energético forte na direção z . Isso pode ser alcançado quando conseguimos estabelecer um gap ΔE_z muito maior que as escalas relevantes do problema. De forma que

$$\Delta E_z \gg \max(k_B T, \hbar\omega_c, \delta\epsilon_{xy}),$$

onde $\delta\epsilon_{xy}$ representa a escala das flutuações e excitações no plano (mini-bandas, modos coletivos, desordem, etc.). Essa hierarquia garante que flutuações térmicas ou dinâmicas em x, y não consigam transferir amplitude para os modos excitados em z . Desse forma, $\phi(z)$ permanece essencialmente no estado fundamental e a função efetiva $\psi(x, y)$ descreve com fidelidade a física observável.

4 PARTÍCULAS IDÊNTICAS

Na mecânica quântica, partículas que possuem os mesmos números quânticos intrínsecos (como massa, carga e spin) são consideradas idênticas e, portanto, indistinguíveis. O fato delas serem indistinguíveis é um princípio fundamental da natureza, no sentido de que a física descreve a natureza a partir do que é acessível experimentalmente. Essa característica não se trata apenas de uma questão filosófica sobre os limites do conhecimento, mas tem implicações práticas diretas na forma como modelamos matematicamente os sistemas físicos. Muitos fenômenos coletivos conhecidos, como ferromagnetismo, supercondutividade e o condensado de Bose-Einstein só emergem quando a teoria incorpora essa característica.

Classicamente, mesmo para partículas idênticas, a distinguibilidade é preservada pelo rastreamento contínuo de suas trajetórias no espaço de configurações (ou espaço-q das posições generalizadas) — cada caminho é univocamente determinado pelas condições iniciais. Entretanto, o caráter ondulatório dos sistemas quânticos dissolve essa noção de trajetória única. O sistema evolui por uma superposição coerente de caminhos no espaço de configurações clássico, onde a amplitude de probabilidade associada a cada trajetória interfere com as demais.

A ideia de que todos os caminhos contribuem para a função de onda torna a estrutura do espaço de configurações — e os tipos de caminhos que ele admite — uma peça central da descrição quântica. Nesta seção, discutiremos como a indistinguibilidade das partículas pode ser incorporada de forma fundamental na formulação quântica, por que esperamos que essa abordagem reflita a realidade física e como essas características abrem espaço para a existência de excitações exóticas, como os anyons.

O desenvolvimento da mecânica quântica está profundamente enraizado na mecânica clássica. Essa conexão não é apenas histórica, mas conceitual: espera-se que qualquer teoria quântica consistente recupere a física clássica em um limite apropriado. Por isso, é natural que nossas intuições e formulações iniciais partam do formalismo clássico. Formalismos fundamentais como o de Schrödinger — que derivou sua equação a partir da ideia de ondas de equi-ação se propagando no espaço de configurações — ou o de Feynman — cuja formulação por integrais de caminho descreve a dinâmica quântica como uma soma sobre trajetórias clássicas — evidenciam essa ligação profunda entre os dois domínios.

Como o objetivo de apresentar o surgimento de excitações anyônicas, começaremos analisando como a simetria de permutação entre partículas idênticas modifica a estrutura do espaço de configurações. Essa modificação faz com que existam caminhos topologicamente

não equivalentes para a função de onda, o que, por sua vez, dá origem fenômenos topológicos. Como veremos, em três dimensões existem apenas duas classes de caminhos inequivalentes os quais são associados a estatística bosônica e fermiônica. Já em duas dimensões existem infinitas classes, o que permite evoluções mais complexas na função de onda. O caso de uma dimensão, embora didático, sua grande restrição em seus graus de liberdade resultam em uma estatística pouco rica, de modo a não ser discutido nas seções subsequentes.

4.1 Espaço de configurações

Em um sistema clássico, uma partícula livre em d dimensões pode ter suas posições representadas por um número d de parâmetros independentes que definam unicamente a posição dela no espaço. Essa representação é feita em um espaço vetorial \mathcal{E}_d o qual isomorfo a \mathbb{R}^d , ou seja $\mathcal{E}_d \simeq \mathbb{R}^d$. Para o caso de N partículas livres podemos construir um espaço vetorial \mathcal{E}_d^N que represente nosso sistema a partir dos espaços individuais dessas partículas $\mathcal{E}_d^N \simeq \underbrace{\mathcal{E}_d \times \cdots \times \mathcal{E}_d}_{N-\text{vezes}}$.

Normalmente, denotamos as posições das partículas como

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N) \in \mathcal{E}_d^N, \quad \text{com } \vec{x}_i \in \mathcal{E}_d \quad (4.1)$$

Com tudo, para manter nosso espaço bem definido, precisamos remover os pontos onde duas partículas ocupam o mesmo local no espaço. O conjunto desses pontos é escrito como:

$$\Delta = \bigcup_{1 \leq i < j \leq N} \{(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \in \mathcal{E}_d^N \mid \vec{x}_i = \vec{x}_j\} \quad (4.2)$$

Os valores d e N serão omitidos de Δ ao longo desse trabalho, uma vez que não haverá ambiguidade nos contextos onde a mesma é inserida. Dessa forma podemos escrever o espaço das posições sem esses pontos da seguinte forma:

$$\mathcal{C}(\mathcal{E}_d^N) = \mathcal{E}_d^N \setminus \Delta \quad (4.3)$$

Perceba que $\mathcal{C}(\mathcal{E}_d^N)$ é suficiente para descrever as possíveis posições no espaço de cada partícula, caso nosso foco fosse desenvolver uma teoria quântica para partículas distinguíveis. Quando consideramos partículas idênticas, entretanto, automaticamente o espaço das posições se torna redundante, uma vez que estados que diferem por uma permuta como $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N)$ e $(\vec{x}_2, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$ são equivalentes $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N) \sim (\vec{x}_2, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$.

Para remover essa redundância em nosso espaço, precisamos identificar e "unificar" os pontos que representam configurações fisicamente equivalentes. Matematicamente, isso é feito

por meio de uma operação chamada *quociente*: a partir de uma relação de equivalência definida no espaço, construímos um novo espaço onde cada classe de pontos equivalentes é representada por um único elemento. Essa operação é uma ferramenta geral para eliminar redundâncias e estruturar espaços a partir de relações de equivalência e pode ser escrita como \mathbb{A}/\sim , onde \mathbb{A} é nosso espaço vetorial¹ e \sim é a relação de equivalência. Dessa maneira, podemos remover a redundância do nosso espaço $\mathcal{C}(\mathcal{E}_d^N)$ tomando

$$\mathcal{C}(\mathcal{E}_d^N) = (\mathcal{E}_d^N \setminus \Delta) / \sim \quad (4.4)$$

Perceba que a relação de equivalência está diretamente relacionada com a operação de permutação entre as partículas. E que ao realizar duas permutações sucessivas, sempre existe uma única permutação resultante equivalente. Essa operação de composição, quando considerada junto com todas as permutações possíveis, revela uma estrutura algébrica conhecida como grupo:

- **Fechamento:** A composição de duas permutações é outra permutação válida.

Exemplo: Se $\sigma = (1\ 2)$ (troca das partículas 1 e 2) e $\tau = (2\ 3)$ (troca das partículas 2 e 3), então $\sigma \circ \tau = (1\ 2\ 3)$ (mapeamento cíclico $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$).

- **Elemento neutro:** Existe uma permutação identidade e que deixa todas as partículas inalteradas, satisfazendo $e \circ \sigma = \sigma \circ e = \sigma$ para qualquer σ .
- **Inverso:** Para toda permutação σ , existe uma permutação inversa σ^{-1} que desfaz sua ação, tal que $\sigma \circ \sigma^{-1} = e$.

Exemplo: Se $\sigma = (1\ 2\ 3)$, então $\sigma^{-1} = (1\ 3\ 2)$, pois $(1\ 2\ 3) \circ (1\ 3\ 2) = e$.

- **Associatividade:** A operação de composição é associativa, ou seja, $(\sigma \circ \tau) \circ \rho = \sigma \circ (\tau \circ \rho)$.

Exemplo: Para $\sigma = (1\ 2)$, $\tau = (2\ 3)$, $\rho = (1\ 3)$, ambos $(\sigma \circ \tau) \circ \rho$ e $\sigma \circ (\tau \circ \rho)$ resultam na mesma permutação $(1\ 3\ 2)$.

Esse grupo é conhecido como grupo simétrico S_N , veja (Rotman, 2005, Seção 2.2), ou em nosso caso, grupo de permutação.

Simetrias sempre criam uma relação de equivalência e, essa relação por sua vez, podem ser associadas a um grupo. Muita das vezes utilizamos diretamente esse grupo para expressar essa relação de equivalência, de forma que a operação de quociente pode ser escrita como $\mathcal{C}(\mathcal{E}_d^N) = (\mathcal{E}_d^N \setminus \Delta) / S_N$.

O quocientamento do espaço, entretanto, tem um custo: ele atua sobre a topologia do espaço, e não em sua estrutura vetorial. O resultado que obtemos dessa operação é um novo

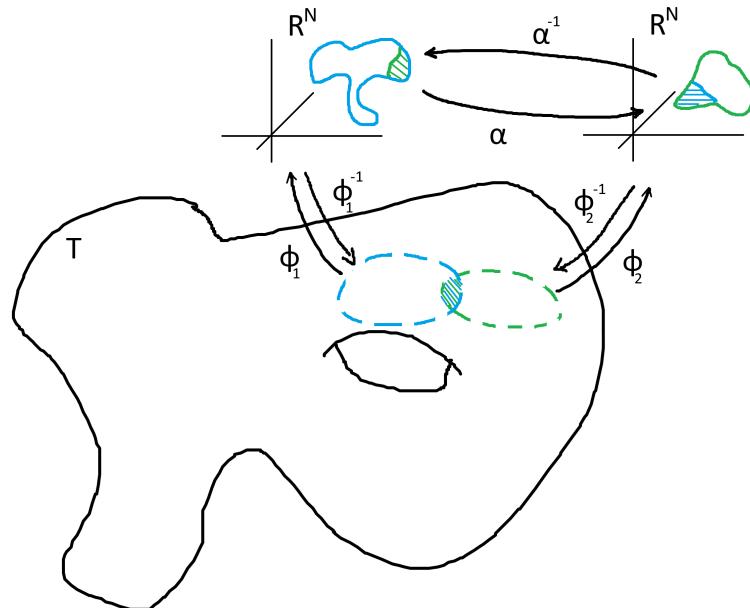
¹ A operação de quocientamento é definida sobre espaços topológicos e não vetoriais, entretanto, nosso espaço vetorial possui uma topologia inerente, de modo que estamos considerando tal operação sobre esse espaço topológico.

espaço topológico. A topologia é o que descreve a conectividade do espaço, definindo como os pontos se agrupam em vizinhanças. Espaços vetoriais metrados como \mathbb{R}^N ou \mathbb{C}^N possuem uma topologia natural, induzida pela métrica, que está ligada diretamente a noções como continuidade de funções e convergência de sequências.

É importante notar que nem toda topologia pode ser induzida por uma estrutura vetorial. O espaço resultante dessa operação possui, em nosso caso, uma estrutura topológica mais complexa do que uma que possa ser obtida de um espaço vetorial. Para garantir uma estrutura vetorial nesse espaço quociente, precisamos recorrer a uma estrutura matemática mais geral, conhecida como variedade (manifold).

Uma variedade é construída sobre um espaço topológico de forma que, localmente, podemos associar os pontos a um espaço euclidiano \mathbb{R}^N . Enquanto é necessário descartar uma estrutura que consegue descrever globalmente sistemas com topologia mais simples, ganhamos a capacidade de descrever um sistema com uma estrutura global mais abrangente. A Figura 1 mostra uma ilustração desse processo. Uma introdução a esse assunto é encontrada em (Nash; Sen, 1988; Nakahara, 2018; Baez; Muniain, 1994)

Figura 1 – Ilustração de uma variedade



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Legenda: Podemos mapear pequenas vizinhanças U_i a espaços euclidianos \mathbb{R}^N através dos mapas (homeomorfismos) ϕ_i . Os conjuntos U_i devem cobrir todo o espaço T , e os mapas (difeomorfismos) α garantem a coerência e diferenciabilidade entre as representações em pontos onde há intersecção dos conjuntos $U_i \cap U_j$.

O que precisamos fazer agora é entender melhor os espaços resultantes das identificações que realizamos. Para isso podemos tentar visualizar a geometria do nosso problema. Isso inicialmente é um problema devido a dimensionalidade do nosso problema, entretanto, podemos contornar esse problema considerando o caso de duas partículas $\mathcal{C}(\mathcal{E}_d^2)$. Esse caso, apesar de mais simples, preserva todas as características essenciais do problema geral. Mesmo nesse caso mais simples a dimensão do nosso espaço ainda é grande demais para ser visualizada diretamente. Continuamos assim contornando nosso problema: introduziremos uma representação que isola as propriedades fundamentais (permutações e colisões) em um subespaço de dimensão reduzida.

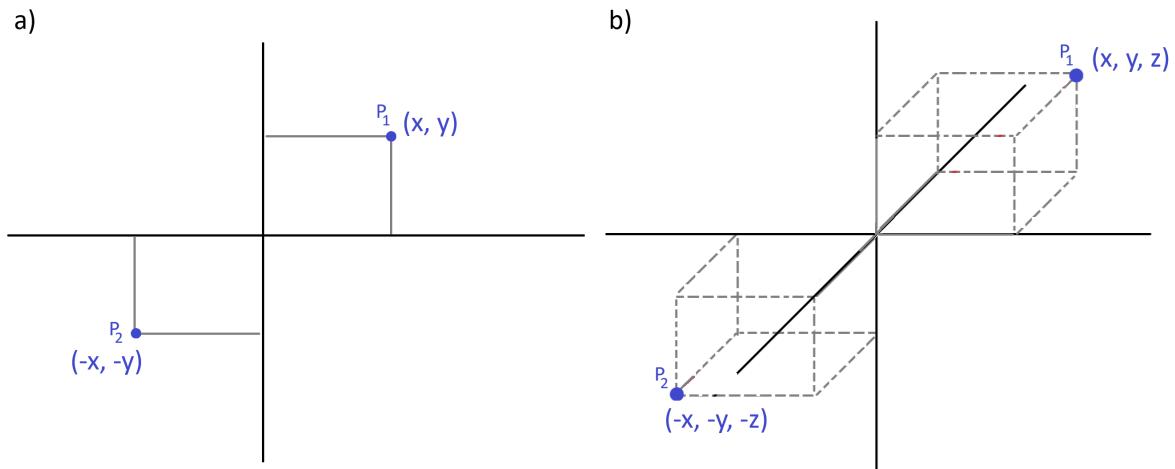
A beleza de um espaço de posições generalizadas \mathcal{E}_d^N é que o mesmo nos permite assumir a representação que é mais conveniente para nosso problema, sem perda de generalização, uma vez que, independente da nossa escolha, garantimos que $\mathcal{E}_d^N \simeq \mathbb{R}^N$. Podemos, dessa forma, adotar um sistema de coordenadas particular, que nos permita visualizar melhor o nosso espaço, sem perda de generalidade em nossa análise.

O sistema de coordenadas a se adotar, em nosso caso, é justamente o do centro de massa, e das coordenadas relativas $\mathcal{C}(\mathcal{E}_d^2) \simeq \mathbb{R}_{cm}^d \times \mathbb{R}_{rel}^d \simeq \mathbb{R}^{2d}$. O centro de massa do sistema se mantém inalterado sob a permutação de partículas idênticas, o que o torna inalterado também sob as ações de quocientamento. Nessa representação também não há colisões no espaço que se refere ao centro de massa do sistema, dessa forma:

$$\mathcal{C}(\mathcal{E}_d^2) = (\mathcal{E}_d^2 \setminus \Delta) / S_2 \simeq \mathbb{R}_{cm}^d \times (\mathbb{R}_{rel}^d \setminus \Delta) / S_N \quad (4.5)$$

Com isso, nosso problema se separa em uma parte continua, e outra com as singularidades e identificações, o que nos permite focar nossa análise apenas em $(\mathbb{R}_{rel}^3 \setminus \Delta) / S_N$ e $(\mathbb{R}_{rel}^2 \setminus \Delta) / S_N$.

Figura 2 – Espaços das posições relativas das partículas



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

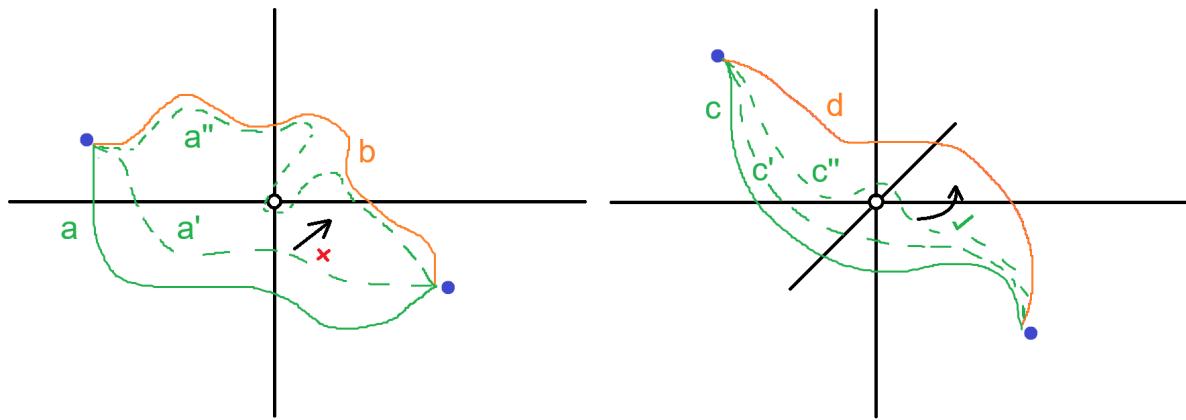
Legenda: **a)** Espaço das posições relativas das partículas em duas dimensões espaciais \mathbb{R}_{rel}^2 . Observe que as partículas (P_1 e P_2) possuem uma posição simétrica com relação à origem e correspondem a configurações equivalentes. Dessa forma, podemos definir a posição de ambas apenas pelas coordenadas (x, y) . **b)** Espaço das posições relativas das partículas em três dimensões espaciais \mathbb{R}_{rel}^3 .

Veja que, nessa representação, os espaços $\mathbb{R}_{rel}^3 \setminus \Delta$ e $\mathbb{R}_{rel}^2 \setminus \Delta$ são justamente os espaços relativos de duas partículas distinguíveis, como representado na Figura 2.

Repare principalmente em duas características: A primeira é que as colisões entre as partículas correspondem à origem do sistema, de modo que $\Delta = \{\vec{0}\}$. A segunda característica é que as configurações que diferem por uma permuta são simétricas com relação à origem.

A remoção das colisões em cada um desses espaços torna automaticamente a topologia do nosso espaço não triviais. Em 2D essa característica é mais forte uma vez que existem caminhos os quais não podem ser transformados continuamente em outros. O que é diferente do caso 3D onde o grau de liberdade a mais permite contornar a origem. Essa diferença pode ser vista na Figura 3.

Figura 3 – Caminhos para permutação de partículas em diferentes dimensões



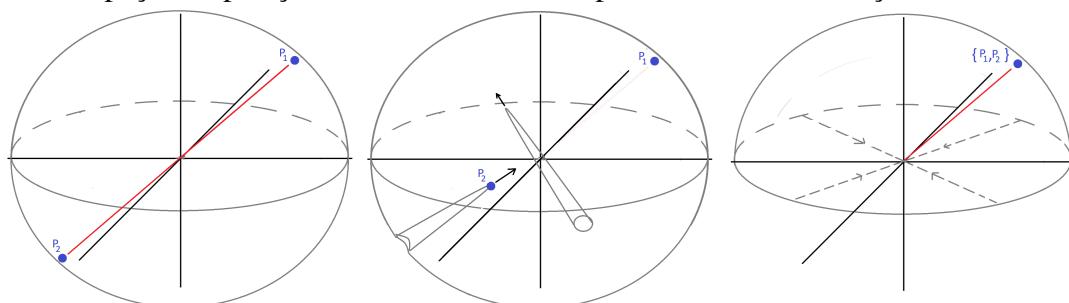
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Legenda: Possíveis caminhos para se permutar duas as partículas em $\mathbb{R}_{rel}^2 \setminus \Delta$ e $\mathbb{R}_{rel}^3 \setminus \Delta$. A ação de permutar as partículas pode ser vista como levá-las ao seu ponto oposto com relação à origem. Em $\mathbb{R}_{rel}^2 \setminus \Delta$ vemos que não é possível transformar o caminho **a** no **b** continuamente. Já em $\mathbb{R}_{rel}^3 \setminus \Delta$, é possível fazer essa transformação entre **c** em **d** devido à dimensionalidade superior.

Essa descontinuidade do espaço tem grande impacto na descrição de permutação das partículas. Essas desconexidades do espaço são evidenciadas quando consideramos essas transformações contínuas, na matemática topológica, chamamos essas transformações de homotopia². Caminhos que podem ser transformados continuamente entre si são ditos serem *homotópicos* entre si e pertencem a mesma *classe de homotopia*.

O processo de quocientar um espaço pode ser visto, geometricamente, como deformá-lo até que os pontos equivalentes se encontrem, dessa forma estamos identificando todas as equivalências e associando elas a um único ponto, assim como mostrado nas Figuras 4 e 5.

Figura 4 – Espaço das posições relativas em 3D e o processo de identificação

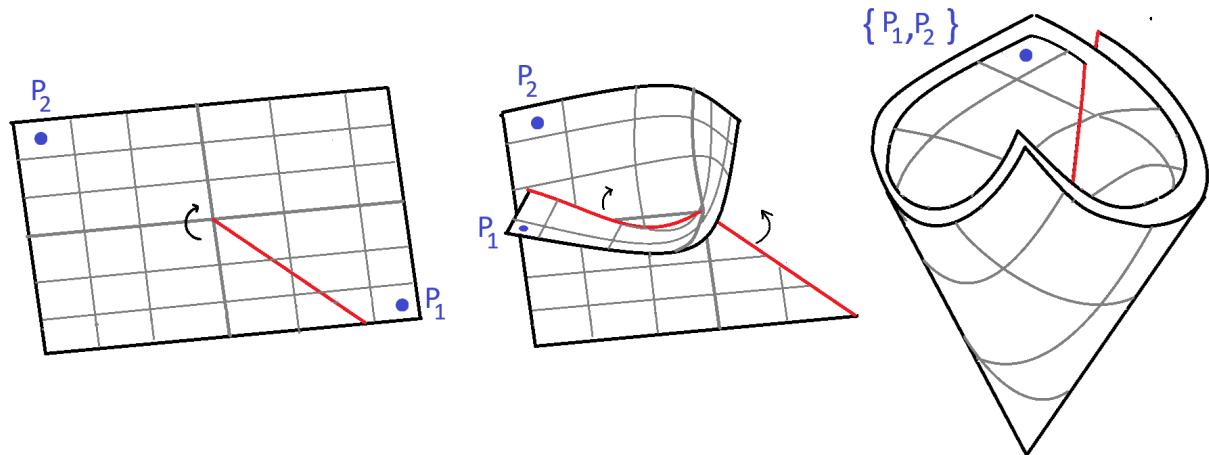


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Legenda: Espaço das posições relativas em 3D para duas partículas. O processo de identificação pode ser visto como "amassar" a esfera em pontos opostos, como mostrado na figura do meio. Tal identificação gera uma forma geométrica quadridimensional, onde cada ponto da semiesfera inferior e o equador são levados individualmente ao seus opostos. Essa identificação é feita para todos os raios possíveis também. Cruzar a linha do equador corresponde a ir para o lado oposto da esfera. Esse espaço é conhecido como espaço projetivo real \mathbb{RP}^2 .

² Veja seção 4.1 de (Nakahara, 2018)

Figura 5 – Espaço das posições relativas em 2D e formação do cone



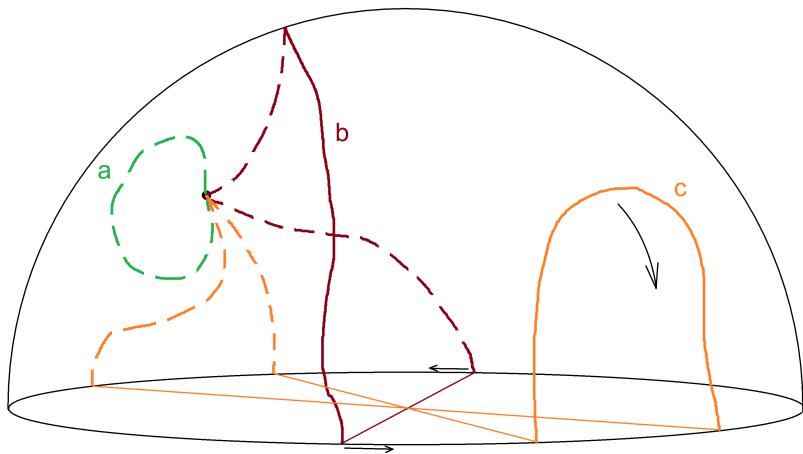
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Legenda: Espaço das posições relativas em 2D para duas partículas. O processo de identificação pode ser visto como "cortar" o plano em um segmento de reta que sai da origem, e torcê-lo até que as duas partes do corte se encontrem, fazendo com que os pontos opostos se sobreponham. Essa construção forma um cone sem a origem.

Diferente de $\mathbb{R}_{rel}^3 \setminus \Delta$ e $\mathbb{R}_{rel}^2 \setminus \Delta$, permutar duas partículas nos espaços $(\mathbb{R}^3 \setminus \Delta)/S_N$ e $(\mathbb{R}^2 \setminus \Delta)/S_N$, corresponde a evoluir o sistema no espaço das configurações de modo que a configuração final seja igual a inicial. **Todas as permutas correspondem a um loop em nosso espaço.**

O espaço $(\mathbb{R}^3 \setminus \Delta)/S_N$ não pode ser visualizado completamente em três dimensões, uma vez que corresponde a uma hiper-calota esférica com as extremidades do equador coladas em cada ponto oposto à singularidade. Mas com um pouco de abstração ainda é possível visualizar, em uma representação tridimensional, as características relevantes do espaço, veja a Figura 6.

Figura 6 – Representação de caminhos e permutações no espaço projetivo 3D



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

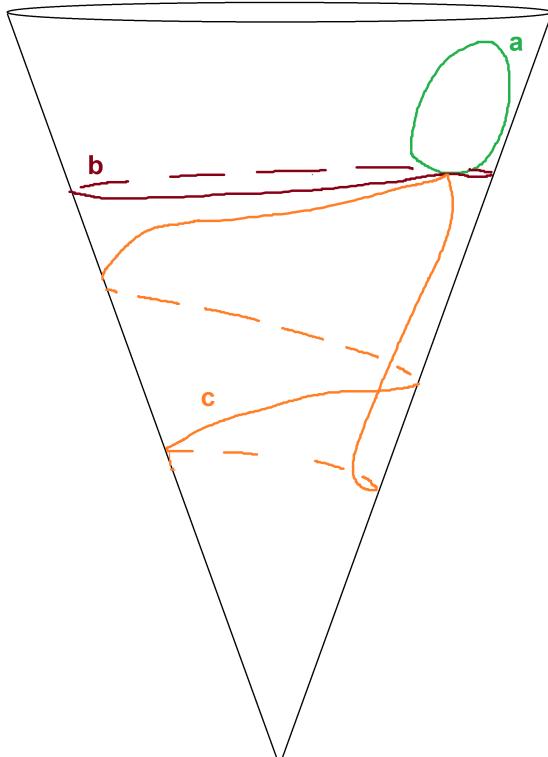
Legenda: A imagem consiste em uma representação do $(\mathbb{R}^3 \setminus \Delta)/S_N$ em 3D. Essa representação considera um conjunto de distância entre as partículas fixo, diferente do espaço completo, contendo a liberdade de todas as distâncias exceto 0. Os pontos opostos na linha do equador também devem ser vistos como o mesmo ponto. Os loops **a**, **b** e **c** correspondem a uma das infinitas maneiras de permutar, respectivamente, 0, 1 e 2 vezes um par de partículas idênticas.

Repare que o loop **a** pode ser continuamente deformado no **c**, de modo que cruzar duas vezes o "equador" é homotopicamente equivalente a não cruzar nenhuma vez. Já o loop **b** passa apenas uma vez no equador e por mais que deformemos esse caminho, não podemos desfazer essa volta. Tentar deformar a curva ao longo do equador faz com que seu ponto seja percorrido em direções opostas no equador, sem se aproximar. Como vemos, o caminho **b** não pode ser transformado em **a** nem em **c**.

Como um número par de passagens pelo equador podem ser desfeitas, temos que homotopicamente existam apenas duas classes distintas, as que passam um número par de vezes e as que passam um número ímpar.

Esse caso muda quando analisamos o espaço $(\mathbb{R}^2 \setminus \Delta)/S_N$, o qual pode ser completamente visualizado na Figura 5. A dimensionalidade reduzida desse espaço faz com que os loops **a**, **b** e **c**, dessa figura não sejam equivalentes entre si. Em realidade, os loops que dão N voltas ao entorno da singularidade só são equivalentes homotópicamente a outros loops que dão o mesmo número de voltas.

Figura 7 – Espaço de configuração 2D e classes de homotopia no cone



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Legenda: Espaço $(\mathbb{R}^2 \setminus \Delta)/S_N$. O espaço possui um formato de um cone sem a sua origem. Os caminhos **a**, **b** e **c** representam um possível caminho para permutar 0, 1 e 2 vezes um par de partículas. Nesse espaço apenas os loops com o mesmo número de voltas ao entorno da singularidade são homotopicamente equivalentes.

De maneira geral, para um ponto específico $q \in \mathcal{M}$, onde \mathcal{M} representa os espaços quocientes $(\mathbb{R}^2 \setminus \Delta)/S_N$ ou $(\mathbb{R}^3 \setminus \Delta)/S_N$, consideramos os loops baseados em q , isto é, caminhos fechados que partem e retornam a esse ponto. É possível definir a operação de composição entre dois desses loops: percorremos o primeiro caminho e, em seguida, imediatamente o segundo, formando assim um novo loop baseado em q .

Essa operação de composição de loops induz uma operação entre as classes de homotopia desses loops, uma vez que a deformação contínua (homotopia) respeita a concatenação. Podemos assim trabalhar com as classes de equivalência formadas por todos os loops que podem ser continuamente deformados entre si. A composição de classes de homotopia satisfaz propriedades fundamentais que configuram uma estrutura de grupo:

- **Fechamento:** A composição de dois loops sempre resulta em outro loop baseado em q , cuja classe homotópica também pertence ao conjunto.

Exemplo: Se $[\gamma_1]$ e $[\gamma_2]$ são classes de loops, então $[\gamma_1 \cdot \gamma_2]$ também é uma classe válida.

- **Elemento neutro:** Existe uma classe de loop trivial — o loop que permanece constantemente em q — que atua como elemento neutro, pois sua composição com qualquer outro loop não altera a classe deste.

Exemplo: O loop constante $e(t) = q$ satisfaz $[\gamma] \cdot [e] = [\gamma]$.

- **Inverso:** Para cada classe de loop, existe outra classe correspondente ao caminho percorrido no sentido inverso, de modo que a composição de ambos é homotopicamente trivial.

Exemplo: Se $\gamma(t)$ é um loop, então $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$ representa seu inverso.

- **Associatividade:** A composição de classes de loops é associativa, ou seja, a ordem de agrupamento na composição não altera o resultado.

Exemplo: $([\gamma_1] \cdot [\gamma_2]) \cdot [\gamma_3] = [\gamma_1] \cdot ([\gamma_2] \cdot [\gamma_3])$.

Essa estrutura é chamada de *grupo fundamental* do espaço \mathcal{M} baseado em q , denotado por $\pi_1(\mathcal{M}, q)$ ³. O grupo fundamental capta informações essenciais sobre a topologia do espaço, refletindo, em nosso contexto, as possíveis permutações e a natureza topológica do sistema.

A razão pela qual nossas conclusões são válidas para qualquer ponto q reside no fato de que existe um isomorfismo entre os grupos fundamentais baseados em quaisquer dois pontos do espaço desde que seja conexo por caminhos, veja (Hatcher, 2002, Seção 1.1). Essa equivalência nos dá a liberdade de falar do grupo fundamental do espaço $\pi_1(\mathcal{M})$, como um invariante topológico que descreve o sistema como um todo.

Para o caso tridimensional temos

$$\pi_1(\mathcal{C}(\mathcal{E}_3^N)) = \pi_1((\mathbb{R}^{3N} \setminus \Delta)/S_N) \simeq S_N$$

Como visto em nossas análises quando $N = 2$, temos $S_2 \simeq \mathbb{Z}_2$, onde \mathbb{Z}_2 é o grupo cíclico de dois elementos, veja (Laidlaw; DeWitt, 1971). Já o caso bidimensional obtemos $\pi_1(\mathcal{C}(\mathcal{E}_2^N)) = B_N$, onde B_N é conhecido como o grupo de trança, a demonstração detalhada pode ser vista em (Fadell; Neuwirth, 1962).

A discussão até aqui concentrou-se nas possíveis coordenadas generalizadas que podem descrever nosso sistema. Essa análise conduz naturalmente à observação de que a permutação de partículas indistinguíveis corresponde à descrição de um loop no espaço de

³ O subscrito "1" em π_1 indica que estamos estudando classes de homotopia de laços, que são mapeamentos da **1-esfera** (o círculo, S^1) para o manifold \mathcal{M} . Essa ideia pode ser generalizada para mapeamentos de esferas de dimensões superiores (S^n) para \mathcal{M} . Os grupos resultantes são chamados de **grupos de homotopia superiores** e são denotados por $\pi_n(\mathcal{M}, q)$, onde n é a dimensão da esfera de teste.

configurações. Tais loops podem ser caracterizados, de forma global e independente do ponto em \mathcal{M} , pelo grupo fundamental $\pi_1(\mathcal{M})$. Nesse enquadramento, a permutação entre partículas adquire, de maneira intrínseca, uma natureza topológica.

Para compreender plenamente os efeitos dessa estrutura, é necessário adotar uma linguagem capaz de representar adequadamente sistemas quânticos. Até este momento, consideramos apenas o espaço de estudo como uma variedade diferenciável (manifold), cujos pontos codificam as diferentes configurações espaciais do sistema. A descrição quântica, contudo, exige associar a esse espaço uma função de onda ψ , que vive em um espaço de Hilbert complexo e cuja evolução temporal é regida pela equação de Schrödinger.

Representar essas características de forma consistente requer uma análise cuidadosa de aspectos como singularidades, continuidade e evolução temporal da função de onda. Ao considerar essas propriedades, torna-se natural associar as diferentes classes de homotopia das permutações de partículas a uma evolução unitária da função de onda. Esse procedimento dá origem aos possíveis comportamentos estatísticos observados: férmions e bósons em $3 + 1$ dimensões, e anyons em $2 + 1$ dimensões.⁴

4.2 Fibrado de Hilbert

Para alinhar a dinâmica quântica à topologia de \mathcal{M} , impõem-se três requisitos essenciais. Primeiro, as amplitudes de probabilidade devem variar de modo contínuo ao longo de trajetórias em \mathcal{M} , conforme a equação de continuidade quântica garante a conservação local de probabilidade. Segundo, as funções de onda precisam ser diferenciáveis, permitindo definir operadores dinâmicos — como o Hamiltoniano — e formular evoluções temporais coerentes. Por fim, a evolução do sistema deve manter a linearidade das superposições e a unitariedade, em consonância com os postulados da mecânica quântica.

Atender a essas condições implica associar a cada ponto $q \in \mathcal{M}$, que representa uma configuração espacial, um espaço de estados internos. Esse estado deve ser capaz de oscilar quanticamente em um espaço de Hilbert, onde suas fases são complexas. Para uma partícula com spin $1/2$, por exemplo, temos temos 2^N vetores de base em \mathcal{H} , esperamos algo como

$$q \longmapsto \sum_i^{2N} c_i |x_1, \dots, x_N\rangle \otimes |s_1, \dots, s_n\rangle_i, \quad (4.6)$$

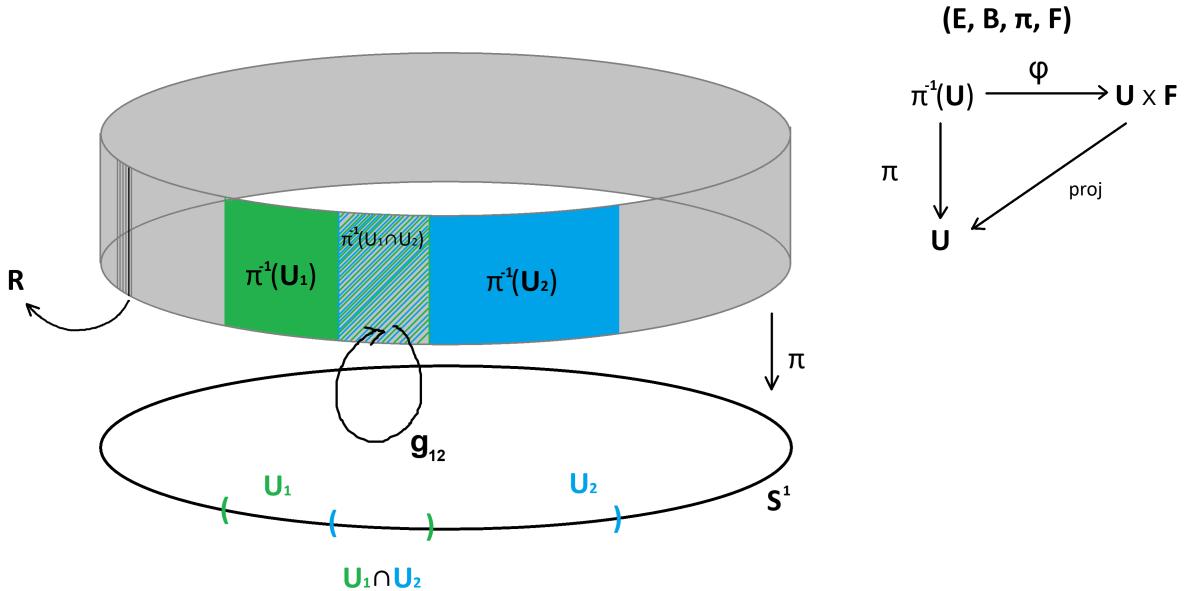
⁴ O fato de uma partícula ser bóson ou férmion é uma propriedade fundamental, explicada pelo teorema spin-estatística. No entanto, as restrições sobre as possíveis transformações unitárias da função de onda estão enraizadas na topologia do espaço de configurações.

com $|x_1, \dots, x_N\rangle$ fixo, de modo a preservar a relação entre posição e estado quântico da mesma. Essa associação viabiliza também a superposições e evolução unitária local.

Uma solução intuitiva seria considerar o produto cartesiano $\mathcal{M} \times \mathcal{H}$, que satisfaz naturalmente os critérios exigidos. No entanto, essa construção global só é viável para espaços de topologia trivial. Em variedades com singularidades ou desconexidades, essa descrição torna-se inadequada, o que nos conduz à necessidade de desenvolver uma representação válida localmente. O fibrado vetorial diferenciável configura-se como a estrutura matemática mínima capaz de realizar esta construção global. Nesta abordagem, associamos a cada ponto q da variedade base \mathcal{M} (espaço de configurações $\mathcal{C}(\mathcal{E}_d^N)$) um espaço de Hilbert \mathcal{H}_q (fibra), garantindo que localmente, em vizinhanças abertas $U \subset \mathcal{M}$, o espaço total seja difeomorfo a um produto cartesiano $U \times \mathcal{H}_q$. A coerência global exige que, nas regiões de sobreposição $U_i \cap U_j$, as diferentes representações locais sejam relacionadas por funções de transição diferenciáveis $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{H})^5$. Estas funções atuam como operadores lineares que conectam suavemente as representações locais das trivializações, preservando a estrutura vetorial e garantindo consistência topológica em todo o manifold. Podemos dessa forma, manter a simplicidade local do produto cartesiano sem comprometer a integridade global da estrutura.

⁵ $\text{Aut}(\mathcal{H})$ representa o conjunto de todos os automorfismos $\mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$

Figura 8 – Ilustração de um fibrado vetorial trivial sobre S^1



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Legenda: Ilustração de um fibrado vetorial trivial (cilindro) sobre S^1 . O espaço base $B \cong S^1$ (círculo inferior) possui fibras $F \cong \mathbb{R}$ (retas verticais). A projeção $\pi : E \rightarrow B$ mapeia cada fibra ao ponto correspondente na base. Para cada aberto $U \subset B$, o homeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ garante a trivialidade local. Nas interseções $U_i \cap U_j$, as funções de transição $g_{ij}(q) : F_q \rightarrow F_q$ agem como difeomorfismos em cada fibra $\pi^{-1}(q)$, assegurando coerência global. No cilindro (fibrado trivial), $g_{ij}(q) = \text{Id}_F$.

Para que as funções de transição $\{g_{ij}\}$ definam um fibrado globalmente consistente, elas devem satisfazer duas condições fundamentais:

1. **Relação de Cociclo:** Em toda interseção tripla $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$, vale a composição

$$g_{ij}(q) \cdot g_{jk}(q) = g_{ik}(q), \quad \forall q \in U_i \cap U_j \cap U_k, \quad (4.7)$$

garantindo que as trivializações locais se encaixem sem ambiguidades.

2. **Invertibilidade:** Para cada par $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, existe uma inversa bem definida:

$$g_{ji}(q) = g_{ij}(q)^{-1}. \quad (4.8)$$

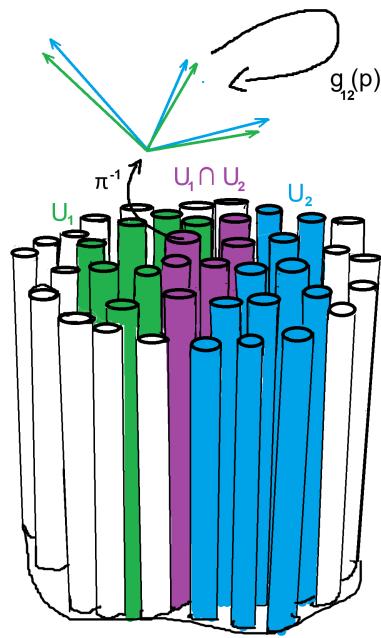
Perceba que a relação de cociclo juntamente com a invertibilidade exigem composição, associatividade, fechamento e invertibilidade, de modo que precisamos restringir $\text{Aut}(\mathcal{H})$ a um grupo $G \subset \text{Aut}(\mathcal{H})$. Esta restrição garante a consistência algébrica mínima para transições entre representações da fibra, mas é insuficiente para estruturar um fibrado diferenciável. A transição entre as representações da fibra no mesmo ponto q precisa ser diferenciável, essa exigência surge naturalmente por dois motivos fundamentais:

1. **Preservação da suavidade em composições:** A relação de cociclo $g_{ij} \circ g_{jk} = g_{ik}$ deve manter a diferenciabilidade em cada estágio. Isto significa que a diferenciabilidade de cada g_{ij} é necessária para garantir que a aplicação composta g_{ik} herde essa propriedade.
2. **Estrutura diferenciável global:** A aplicação que relaciona duas trivializações locais $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathcal{H}_q \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathcal{H}_q$, só será um difeomorfismo (ou seja, uma transformação suave com inversa suave) se a função $g_{ij}(q)$ que governa esta transformação for ela própria diferenciável em relação ao ponto base $q \in U_i \cap U_j$.

As exigências de ausência de descontinuidades e suavidade nas transições forçam G a portar uma estrutura que compatibilize operações de grupo com variação suave. Concretamente, G deve ser uma variedade diferenciável onde multiplicação e inversão são aplicações suaves (C^∞), o que por definição o constitui um **grupo de Lie**⁶, veja (Gilmore, 2006). Esta estrutura é a única que garante que as ações de G nas fibras preservem simultaneamente continuidade, diferenciabilidade e as propriedades algébricas necessárias para a consistência global de E . Em livros como (Nakahara, 2018) definem o fibrado vetorial é definido como o conjunto (E, B, π, F, G) .

⁶ Uma das principais características de um grupo de Lie é que o mesmo constitui um manifold, veja (Gilmore, 2006, Cap. 2)

Figura 9 – Representação de um fibrado vetorial e funções de transição



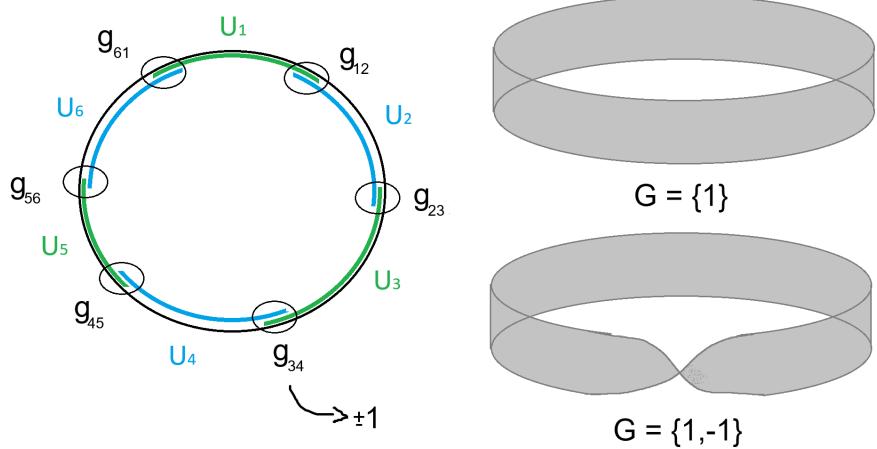
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Legenda: Representação de um fibrado vetorial com fibras $F \cong \mathbb{R}^3$ ao longo de uma base. As fibras estão representadas como hastas verticais formando uma "escova". A função de transição "traduz" a representação da fibra entre diferentes abertos U num ponto p .

Em livros como (Nakahara, 2018) definem o fibrado vetorial é definido como o conjunto (E, B, π, F, G) .

O grupo estrutural é de grande importância para as análises geométricas do espaço E , ele retem informações geométricas sobre o nosso espaço, como as possíveis curvaturas e torções nas fibras de E . Um exemplo clássico que evidência isso é o dos fibrado $(E, B = S^1, \pi, F = \mathbb{R}, G)$, com $G = \{\mathbb{I}\}, \{\mathbb{I}, -\mathbb{I}\}$, representando na Figura 8 para dois G diferentes. Para mais detalhes veja (Nash; Sen, 1988, Cap. 7).

Figura 10 – Diferença entre cilindro e fita de Möbius e o papel do grupo estrutural



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Legenda: Imagem ilustrativa da diferença entre um cilindro e uma fita de Möbius. A imagem ilustra como o grupo estrutural está relacionado com a torção do espaço, as transformações g_{ij} podem gerar torções e curvaturas no fibrado. A fita de Möbius da imagem é apenas ilustrativa, uma vez que a fita da imagem possui uma torção suave.

De maneira geral, em um fibrado vetorial, o grupo de lie mais geral de automorfismos num espaço complexo é o *grupo geral linear complexo* $GL(n, \mathbb{C})$. Entretanto, como característica adicional de que as transformações devem preservar o produto interno do espaço de Hilbert, ou seja, as probabilidades, exigimos que $G \subset U(n)$, mais precisamente $G \subset U(\dim(\mathcal{H}))$, uma vez que n está associado ao numero de vetores que formam uma base em \mathcal{H} . Um sistema de apenas com posição

Perceba que a ação de $g_{ij} \in G$ sobre a fibra \mathcal{H}_q corresponde a uma mudança de base entre as trivializações locais. Especificamente, na interseção $U_i \cap U_j$, a base $\{e_\beta^j\}$ associada à trivialização sobre U_j é expressa em termos da base $\{e_\alpha^i\}$ sobre U_i mediante:

$$e_\beta^j = \sum_\alpha e_\alpha^i [g_{ij}]_{\alpha\beta}, \quad (4.9)$$

Onde $[g_{ij}]_{\alpha\beta}$ denota os elementos de uma *representação matricial* de $g \in G$, podemos definir uma *ação à direita* de G sobre o conjunto de bases (ou referenciais) de \mathcal{H}_q :

$$R_g(\{e_\alpha\}) = \left\{ \sum_\beta e_\beta [g]_{\beta\alpha} \right\}.$$

A escolha por uma ação à direita é apenas uma *convenção* que garante consistência com a condição de cociclo para as funções de transição:

$$g_{ik} = g_{ij} g_{jk} \quad \text{em} \quad U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Fixada uma base de referência $\{e_*\}$ em \mathcal{H}_q , obtém-se um isomorfismo entre elementos $g \in G$ e bases de \mathcal{H}_q via $g \mapsto R_g(\{e_*\})$. Consequentemente, para cada $q \in \mathcal{M}$, o espaço das bases de \mathcal{H}_q é difeomorfo a G . A união disjunta $\bigsqcup_q G_q$ — onde $G_q \cong G$ — munida da projeção $\pi : P \rightarrow \mathcal{M}$ que associa cada $g \in G_q$ a q , define um **fibrado principal** P sobre \mathcal{M} . Este fibrado, denominado *fibrado de referenciais*, codifica a liberdade de escolha de base em cada fibra \mathcal{H}_q . De certo modo esse fibrado é mais fundamental que nosso fibrado vetorial, no sentido que, um fibrado diferente com os mesmos \mathcal{M} e $\{g_{ij}\}$ dão origem ao mesmo fibrado principal.

A partir do nosso fibrado principal P com grupo estrutural G e da representação natural $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{H})$ que descreve a ação unitária sobre a fibra típica \mathcal{H} , podemos reconstruir o fibrado vetorial associado usando

$$E = P \times_{U(n)} \mathcal{H} := (P \times \mathcal{H})/G, \quad (4.10)$$

onde $(p, \psi) \sim (pg, \rho(g^{-1})\psi)$. O mapeamento ρ é de grande importância, pois é responsável por conectar os elementos de representação entre os dois fibrados. Assim, o fibrado principal organiza geometricamente a liberdade de escolha de referenciais nas fibras \mathcal{H}_q , enquanto o fibrado vetorial associado mantém explicitamente a estrutura linear e a interpretação física dos estados quânticos.

Definir uma base ortogonal $\{e_i^{(q)}\}$ ao longo das fibras \mathcal{H}_q do nosso fibrado vetorial consiste em definir um ponto de G para cada $q \in \mathcal{M}$ em nosso fibrado principal. Explicitamente, essa escolha pode ser dada por uma aplicação

$$s : U \subset \mathcal{M} \longrightarrow P \quad (4.11)$$

com $\pi \circ s = \text{id}_U$ e exigimos que s seja suave para garantir que a escolha de referencial varie de modo diferenciável com a configuração q — condição necessária para que quantidades dependentes da base (como amplitudes locais) sejam funções diferenciáveis em q . Essa aplicação s é precisamente o que chamamos de *seção (local)* do fibrado principal.

Analogamente, no fibrado vetorial associado, a seção $s : U \subset \mathcal{M} \longrightarrow H$ nos possibilita, escolhido os referenciais, associar à cada ponto da base q um elemento de H_q , ou seja, fixar as amplitudes de probabilidade $c_i^{(q)} \in \mathbb{C}$ dos elementos dessa base. Dessa maneira, localmente a seção do fibrado vetorial nos permite, dada uma base, representar a função de onda localmente como:

$$\psi(q) = \sum_{i=1}^n c_i(q) |e_i^{(q)}\rangle, \quad c_i(q) \in \mathbb{C}, \quad (4.12)$$

4.3 Diferenciação no fibrado: conexões, invariância de calibre, curvatura

Para completar a descrição topológica do sistema de partículas idênticas, falta definir sua evolução temporal. Essa questão está intrinsecamente ligada ao conceito de derivadas, mas enfrentamos uma obstrução: nos pontos distintos $p, q \in \mathcal{M}$, os espaços \mathcal{H}_p e \mathcal{H}_q são desconexos. Isso naturalmente exige um método para comparar vetores em espaços diferentes.

A ideia central é examinar como as representações de \mathcal{H}_q se rotacionam ao percorrermos uma trajetória na variedade base \mathcal{M} . Assim, podemos compensar essas rotações induzidas pela topologia não trivial do fibrado E . Como as relações entre as representações de \mathcal{H}_q são codificadas no fibrado principal $P(E)$, essa construção deve ser realizada sobre ele.

O problema resume-se a compreender como os referenciais na fibra principal G (denominado grupo de gauge) rotacionam sob diferenciação ao longo de \mathcal{M} . A solução mais direta é elevar a curva $\gamma(t) \in U \subset \mathcal{M}$ a $P(E)$ via uma seção $s(x)$, gerando um mapeamento entre as curvas e, consequentemente, entre os espaços tangentes através do pushforward:

$$ds : T_x \mathcal{M} \rightarrow T_{s(x)} P. \quad (4.13)$$

Isso permite decompor $T_{s(x)} P$ em componentes que contribuem para variações na fibra $G_{s(x)}$ e na base \mathcal{M} . As variações em \mathcal{M} são físicas (alteram o estado do sistema), enquanto as em $G_{s(x)}$ correspondem a mudanças de referencial - que desejamos anular para comparações entre pontos distintos:

$$\begin{array}{ccc} T_x \mathcal{M} & \xrightarrow{\substack{\text{elevação} \\ (\text{via seção } s)}} & T_{s(x)} P & \xrightarrow{\substack{\omega \\ (\text{forma de conexão})}} & A \in \mathfrak{g} \\ \text{Direção} & & \text{Vetor em} & & \text{variação} \\ \text{em } \mathcal{M} & & P(E) & & \text{em } \mathfrak{g} \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{s^* \omega(v) = \omega \circ ds(v)} & & & & \end{array} \quad (4.14)$$

Motivados por essa construção, buscamos separar $T_u P$ em dois subespaços:

- **Vertical** ($V_u P$): contém variações ao longo da fibra G ;
- **Horizontal** ($H_u P$): contém variações ao longo da base \mathcal{M} .

Assim, temos a decomposição:

$$T_u P = V_u P \oplus H_u P. \quad (4.15)$$

O espaço vertical é definido por:

$$V_u P = \ker(d\pi_u) = \{X \in T_u P \mid d\pi_u(X) = 0\}, \quad (4.16)$$

onde $d\pi_u : T_u P \rightarrow T_{\pi(u)} \mathcal{M}$ é o diferencial da projeção $\pi : P \rightarrow \mathcal{M}$.

Para $X \in V_u P$, considere uma curva $\gamma(t)$ em P com $\gamma(0) = u$ e $\gamma'(0) = X$. Como $d\pi_u(X) = 0$, temos $\pi(\gamma(t)) = b \in \mathcal{M}$ constante, logo $\gamma(t)$ varia apenas na fibra G_b . Isso garante $V_u P \subseteq T_u G_b \cong T_u G$.

Variações direcionais em torno de $u \in G$ podem ser mapeadas para a identidade $e \in G$. Tais variações infinitesimais em $T_e G$ - munidas do colchete de Lie $[\cdot, \cdot]$ - formam a álgebra de Lie \mathfrak{g} . A conexão crucial entre \mathfrak{g} e $T_e G$ vem da relação exponencial (Gilmore, 2006, Sec. 4.2):

$$\exp(tK) \in G, \quad K \in \mathfrak{g}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.17)$$

que mapeia K a curvas em G partindo de e :

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tK) = K \in \mathfrak{g} \cong T_e G. \quad (4.18)$$

Elevando essa curva à fibra G_b com origem em $u \in P(E)$ ($\pi(u) = b$):

$$t \mapsto R_{\exp(tK)}(u) = u \cdot \exp(tK), \quad (4.19)$$

obtemos um vetor tangente $K_u^\# \in T_u G$ via derivação:

$$K_u^\# = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (u \cdot \exp(tK)) \in V_u P. \quad (4.20)$$

Esse processo define o mapeamento:

$$\underbrace{K}_{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\exp} \exp(tK) \in G \xrightarrow{R_{\exp(tK)}(u)} u \cdot \exp(tK) \in G_b \xrightarrow{\frac{d}{dt} \Big|_{t=0}} \underbrace{K_u^\#}_{\in V_u P} \quad (4.21)$$

Essa relação nos dá em cada vetor direcional, em um ponto $b \in \mathcal{M}$ da base, um diferencial que mede o quanto nosso referencial rotaciona devido a topologia não trivial do sistema.

Para capturar as variações verticais ao diferenciar e integrar ao longo da base, introduzimos a **forma de conexão**:

$$\omega \in T^* P \otimes \mathfrak{g}, \quad (4.22)$$

uma 1-forma em P ($T^* P$ é o espaço cotangente em P) com valores em \mathfrak{g} ⁷. Ela nos dá variação infinitesimal

⁷ Variações infinitesimais em G são elementos de $\mathfrak{g} \cong T_e G$. Para identificar $T_g G$ com $T_e G$, usa-se o diferencial da translação (e.g., $(R_{g^{-1}})_* : T_g G \rightarrow T_e G$). Assim, variações em torno de g correspondem a elementos de \mathfrak{g} , gerados por $\{T_i\}$ com $[\cdot, \cdot]$.

Aplicando ω a um vetor $v \in T_u P$, obtemos:

$$\omega(v) = \sum_i \omega^i(v) T_i \in \mathfrak{g}, \quad (4.23)$$

onde $\omega^i(v)$ são escalares. Intuitivamente, ω extrai as componentes infinitesimais da transformação de gauge associada a v .

Para garantir consistência física, a conexão global ω no fibrado principal P deve satisfazer dois axiomas fundamentais que respeitem a estrutura de gauge. Primeiramente, ω precisa identificar corretamente variações puramente verticais (ao longo da fibra G), o que estabelecemos pelo axioma de normalização vertical:

$$\omega(K_u^\#) = K, \quad \forall K \in \mathfrak{g}. \quad (4.24)$$

Este axioma garante que vetores verticais - gerados pela ação do grupo G através do mapeamento $K \mapsto K_u^\#$ - sejam precisamente quantificados por ω como elementos da álgebra de Lie \mathfrak{g} .

Em segundo lugar, a conexão deve comportar-se consistentemente sob mudanças de referencial (transformações de gauge). Isto é capturado pelo axioma de equivariância:

$$R_g^* \omega = \text{Ad}_{g^{-1}} \omega, \quad (4.25)$$

onde $\text{Ad}_{g^{-1}}$ é a ação adjunta do grupo G sobre sua álgebra de Lie \mathfrak{g} , definida explicitamente como $\text{Ad}_{g^{-1}}(K) = g^{-1}Kg$ para todo $K \in \mathfrak{g}$. Intuitivamente, quando mudamos nosso sistema de referência via $g \in G$, os elementos da álgebra de Lie (que geram transformações infinitesimais) conjugam-se por g^{-1} . Esta operação preserva a estrutura algébrica e reflete como quantidades físicas devem transformar-se coerentemente.

Embora ω viva no espaço abstrato P , objetos físicos (como funções de onda ou campos quânticos) são definidos na variedade base \mathcal{M} . Para conectar a teoria à física, projetamos ω em \mathcal{M} através de uma seção local $s : U \subset \mathcal{M} \rightarrow P$, obtendo a conexão local (ou forma de gauge):

$$A \equiv s^* \omega. \quad (4.26)$$

A é uma 1-forma em \mathcal{M} com valores em \mathfrak{g} que age sobre vetores tangentes $v \in T_x \mathcal{M}$ como:

$$A(v) = \omega(ds(v)) \in \mathfrak{g}, \quad (4.27)$$

onde $ds(v)$ é o vetor em $T_{s(x)} P$ obtido ao elevarmos v via s . Fisicamente, $A(v)$ mede a componente de gauge "misturada" ao deslocamento v na base \mathcal{M} .

Vemos em 4.26 que A depende explicitamente da seção local (referencial) escolhida, como exigimos que nossa conexão ω seja única, precisamos exigir que A se transforme coerentemente quando mudamos nossa escolha de seção local $s \mapsto s'$, tomando $g : U \subset \mathcal{M} \rightarrow G$ as seções se relacionam a partir de:

$$s' = R_g(s) = s \cdot g. \quad (4.28)$$

Para relacionar A e A' podemos tomar $A' = (s')^* \omega = \omega(ds'(v))$ e expandir $ds'(v)$ via regra da cadeia:

$$ds'(v) = d(R_g \circ s)(v) = dR_g(ds(v)) + (dg(v))_{s(x)}^\#, \quad (4.29)$$

onde $(dg(v))^\#$ é o vetor vertical gerado por $dg(v) \in T_{g(x)}G$. Aplicando ω e os axiomas:

$$A'(v) = \underbrace{\omega(dR_g(ds(v)))}_{\text{Ad}_{g^{-1}}(A(v))} + \underbrace{\omega((dg(v))^\#)}_{dg(v)}. \quad (4.30)$$

O termo $dg(v)$ é um vetor tangente a G . Para associá-lo a \mathfrak{g} , usamos a operação:

$$g^{-1}dg(v) \equiv g^{-1} \cdot \frac{\partial g}{\partial v}, \quad (4.31)$$

que representa a derivada logarítmica de g na direção v . Geometricamente, ela transporta a variação infinitesimal de g de volta ao elemento neutro via multiplicação por g^{-1} , ou seja $T_{g(x)}G \mapsto T_eG$. Combinando os resultados:

$$A'(v) = g^{-1}A(v)g + g^{-1}dg(v). \quad (4.32)$$

Esta construção estabelece as bases para derivadas que sejam invariantes sob transformação de gauge.

4.3.1 Derivada covariante

Podemos agora garantir uma diferenciação que seja invariante de calibre. Para isso começamos, assim como em (Nash; Sen, 1988, 7.12), definindo uma curva $\gamma(t)$ sobre \mathcal{M} a qual é escrita nas coordenadas locais do manifold como $\gamma(t) = x_\mu(t)$, considerando a representação local, podemos elevar essa curva através da seção de modo que obtemos

$$\tilde{\gamma}(t) = (x_\mu(t), g(t)) \quad \tilde{\gamma}(t) \in P \quad (4.33)$$

de modo que seu ponto tangente que pertence a $T_x P$ é descrito como

$$\frac{d}{dt} = \dot{x}^\mu(t) \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \dot{g}(t) \frac{\partial}{\partial g} \quad (4.34)$$

O nosso objetivo é impor que essa derivada fique restrita ao subespaço horizontal $H_x P$, de forma a garantir a invariância de calibre. Para isso, exigimos que o vetor tangente d/dt seja proporcional ao vetor de transporte paralelo, de forma que:

$$\frac{d}{dt} = \dot{x}^\mu(t) \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \dot{g}(t) \frac{\partial}{\partial g} = \beta^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - A_\mu^i \frac{T_i}{2i} g \frac{\partial}{\partial g} \right) \quad (4.35)$$

onde o fator $(2i)^{-1}$ onde o fator é a normalização necessária para "fechar" a álgebra de Lie, garantindo sua integridade assim como o i faz na álgebra do momento angular ou na incerteza de Heisenberg. O valor negativo garante a "rotação" contrária e o vetor dentro do parenteses definimos como o vetor base principal, de forma que $\beta^\mu = x^\mu(t)$, e automaticamente:

$$\dot{g}(t) = -\beta^\mu A_\mu^i \frac{T_i}{2i} g = -x^\mu A_\mu^i \frac{T_i}{2i} g \quad (4.36)$$

Essa associação de $\dot{g}(t)$ com A é justamente o que restringe o movimento a ser invariante em G . Perceba que 4.36 é uma equação diferencial em g de modo que

$$\dot{g}(t) + x^\mu A_\mu^k \frac{T_k}{2i} g = 0 \quad (4.37)$$

Essa equação é chamada de equação do transporte paralelo e apenas transformações $g(t)$ as quais seguem 4.37 transportam paralelamente nosso vetor. Dessa maneira podemos definir nossa derivada covariante através do vetor de base de $H_x P$ como sendo o vetor $\beta^\mu D_\mu$ de 4.36:

$$D_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - A_\mu^k \frac{T_k}{2i} g \frac{\partial}{\partial g} \quad (4.38)$$

O que é justamente nossa derivada covariante.

4.3.2 Curvatura

O fato da derivada covariante ser uma resposta de correção à curvatura do sistema, podemos entender a falha dos deslocamentos tangentes em comutar pelo operador de lie $[D_\mu, D_\nu]$, expandindo essa relação temos utilizando 4.38, obtemos:

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] &= \left[\overbrace{\frac{\partial}{\partial x^\mu}}^{\partial_\mu} - A_\mu^k \frac{T_k}{2i} g \frac{\partial}{\partial g}, \overbrace{\frac{\partial}{\partial x^\nu}}^{\partial_\nu} - A_\nu^m \frac{T_m}{2i} g \frac{\partial}{\partial g} \right] = \\ &= -\partial_\mu A_\nu^m \frac{T_m}{2i} g \frac{\partial}{\partial g} + \partial_\nu A_\mu^k \frac{T_k}{2i} g \frac{\partial}{\partial g} + \\ &\quad + A_\mu^k A_\nu^m \left(\frac{T_k}{2i} g \frac{\partial}{\partial g} \right) \left(\frac{T_m}{2i} g \frac{\partial}{\partial g} \right) - A_\nu^m A_\mu^k \left(\frac{T_m}{2i} g \frac{\partial}{\partial g} \right) \left(\frac{T_k}{2i} g \frac{\partial}{\partial g} \right) \end{aligned}$$

com um pouco de álgebra e com relação $[R_a, R_b] = -f_{abc}R_c$, podemos mostrar(Nash; Sen, 1988, p. 180) que a contribuição $[D_\mu, D_\nu] = -F_{\mu\nu}^a R_a$ é dada por:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (4.39)$$

o que dá origem a uma 2-forma do tipo

$$\mathbf{F} = d\mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{A} \quad (4.40)$$

O qual é conhecido como tensor de curvatura e desempenha um papel fundamental na física, sendo associado ao campo de força, como no caso do tensor eletromagnético.

4.3.3 *Holonomia*

Considere a evolução de um elemento estado quântico dada uma curva $\gamma(t) : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$, queremos entender o efeito de transportar paralelamente uma representação $g \in G$ ao longo da evolução de $\gamma(t)$. Para que g seja transportado paralelamente ele tem que ser uma solução da equação de transporte paralelo 4.37, de forma que:

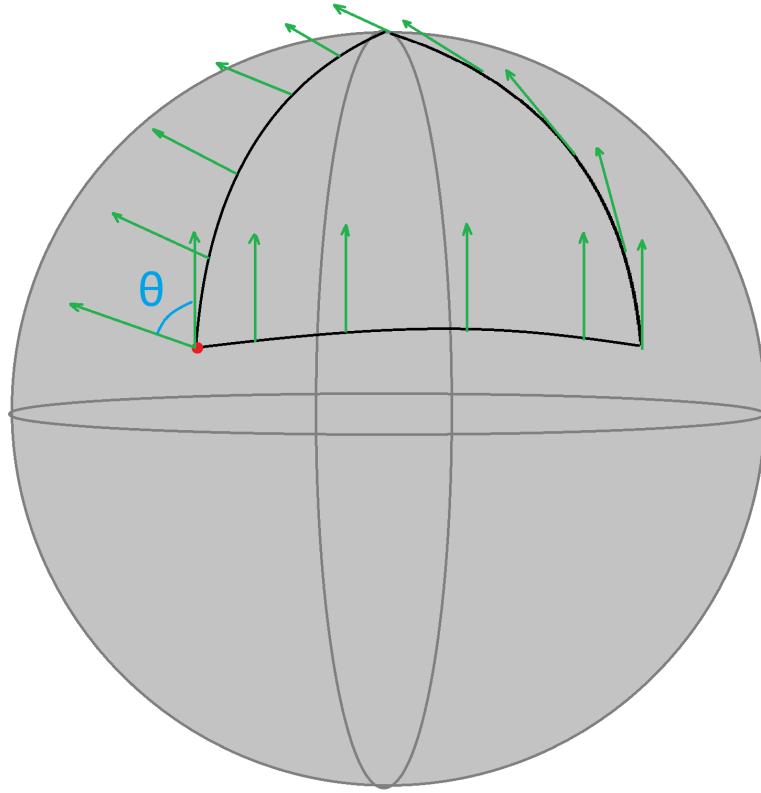
$$\dot{g} = -\dot{\gamma} A_\mu^k \frac{T_k}{2i} g, \quad g(0) = \mathbb{I} \quad (4.41)$$

A solução dessa equação é dada por

$$\begin{aligned} g_\gamma &= \mathcal{P} \exp \left(- \int_0^1 A_\mu^k(\gamma(t)) \frac{T_k}{2i} \dot{\gamma}^\mu(t) dt \right) \\ &= \mathbb{I} - \int_0^1 dt_1 A(t_1) + \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 A(t_1) A(t_2) + \dots \end{aligned} \quad (4.42)$$

Como os elementos de $[A(t_i), A(t_j)]$ podem não comutar entre si, a exponencial precisa ter sua expansão temporal ordenada. Quando g_γ é um círculo fechado $\gamma(0) = \gamma(1)$, chamamos g_γ de holonomia. Geometricamente a holonomia é um jeito de comparar como um vetor volta ao mesmo ponto ao ser transportado paralelamente no espaço, como exemplificado na Figura 11

Figura 11 – Transporte paralelo e holonomia em uma superfície curva



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Legenda: Um vetor sendo paralelamente transportado numa superfície curva de uma esfera. Ao ser transportado em um loop, o vetor volta rotacionado por um ângulo θ .

Veja que se tomarmos $\tilde{A} \rightarrow h^{-1}Ah + h^{-1}dh$, nosso transportador paralelo mudar como algo $G = h^{-1}g$, se modo que

$$\dot{G} = \frac{d}{dt}(h^{-1}g) + h^{-1}\dot{g} \quad (4.43)$$

vemos que

$$\frac{d}{dt}(h^{-1}g) = 0 \implies \frac{d}{dt}(h^{-1})g + h^{-1}\dot{g} = -h^{-1}\dot{h}h^{-1} + h^{-1}\dot{g} \implies \frac{d}{dt}(h^{-1}) = -h^{-1}\dot{h}h^{-1} \quad (4.44)$$

de modo que aplicando em 4.37 obtemos:

$$\dot{G} = -(h^{-1}Ah + h^{-1}\dot{h})G \implies \dot{G} = \tilde{A}G \quad (4.45)$$

aplicando as condições de contorno $G(0) = \mathbb{I}$ vemos que:

$$G(0) = h^{-1}(0)g(0) = h^{-1}(0) \quad (4.46)$$

O que não é garantido ser $h^{-1}(0) = \mathbb{I}$, adicionando a constante $h(0)$ a transformação $G = h(0)^{-1}gh(0)$ não altera as análises anteriores e garante que $G(0) = h(0)^{-1}h(0) = \mathbb{I}$. Isso significa

que $A \rightarrow \tilde{A}$ nos dá $g_\gamma(t) \rightarrow h^{-1}(t)g_\gamma(t)h(0)$ de modo que:

$$\tilde{g}_\gamma = h^{-1}(t) \mathcal{P} \exp \left(- \int_0^1 A_\mu^k(\gamma(t)) \frac{T_k}{2i} \dot{\gamma}^\mu(t) dt \right) h(0) \quad (4.47)$$

Isso mostra que g_γ não é invariante de calibre. Entretanto, observe que se $\gamma(0) = \gamma(1)$, então temos que

$$\tilde{g}_\gamma = h^{-1}(0)g_\gamma h(0) \quad (4.48)$$

essa relação é conhecida como relação de equivariância e garante que g_γ se transforme por conjugação em nosso fibrado vetorial. Apesar dessa relação não garantir invariância de calibre, podemos utilizar a propriedade $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(BCA) = \text{Tr}(CAB)$ e unitariedade de h para obter um operador

$$\text{Tr}(\tilde{g}_\gamma) = \text{Tr}(g_\gamma h h^{-1}) = \text{Tr}(g) \quad (4.49)$$

o qual é um invariante de calibre. Como esse valor não muda independente do nosso referencial, esperamos que o mesmo seja um observável físico. Esse observável é conhecido como loop de Wilson:

$$w_\gamma = \text{Tr} \left[\mathcal{P} \exp \left(- \oint_\gamma \underbrace{A_\mu^k(\gamma(t))}_{\mathbf{A}} \frac{T_k}{2i} \widetilde{\dot{\gamma}^\mu(t) dt} \right) \right] = \text{Tr} \left[\mathcal{P} \exp \left(- \oint_\gamma \mathbf{A} \right) \right] \quad (4.50)$$

Quando $g \in U(1)$ a exponencial ordenada $P \exp$ não é importante uma vez que os elementos comutam e podemos tomar $P \exp \rightarrow \exp$, o que nos dá uma fase $e^{i\theta}$. Quando $g \in U(n)$ isso não é garantido.

Veja que, quando a curva fechada γ é a fronteira de uma superfície orientável S em nosso manifold (ou seja, $\gamma = \partial S$), podemos estabelecer uma relação fundamental conhecida como **teorema de Stokes generalizado para conexões não abelianas**. Este teorema relaciona a holonomia ao longo de γ com a curvatura sobre S :

$$\mathcal{P} \exp \left(- \oint_\gamma \mathbf{A} \right) = \mathcal{P} \exp \left(- \int_S \mathbf{U}(s)^{-1} \mathbf{F} \mathbf{U}(s) dS \right) \quad (4.51)$$

onde F é a curvatura associada à conexão \mathbf{A} e $\mathbf{U}(s)$ é o transporte paralelo ao longo da superfície. Uma demonstração mais detalhada pode ser encontrada em (Nakahara, 2018, cap. 10.3).

4.4 Permutação de partículas idênticas

Até aqui, mostramos que existe uma fase geométrica observável, que depende da geometria do fibrado. No entanto, se considerarmos partículas sem graus de liberdade internos, é natural esperar que, em regiões livres de partículas, a curvatura seja nula, $\mathbf{F} = 0$. Isso implica que o lado direito de 4.51 deve ser a identidade, de modo que, para um caminho contrátil à um ponto esperamos que

$$g_\gamma = \mathbb{I}.$$

Em contraste, quando outro caminho Γ circula uma partícula, esperamos obter um operador observável $g_\Gamma \neq \mathbb{I}$. Podemos dessa forma considerar a curva $\gamma \circ \Gamma$ de modo que $g_{\gamma \circ \Gamma} = g_\Gamma$. Essa característica implica que a evolução paralela de um estado quântico não depende do caminho γ e sim de sua classe de homotopia relacionada.

Isso é um aspecto crucial na descrição de anyons e de estatística convencional de permutação em 3D, uma vez que a evolução unitária do sistema depende apenas das possíveis permutações que podemos realizar em nosso espaço. Essa característica faz com que as fases geométricas passem a ter um comportamento totalmente topológico o qual depende do grupo fundamental $\pi_1(\mathcal{M})$. Esse ponto torna explícita a relação entre a topologia de \mathcal{M} ditada por $\pi_1(\mathcal{M})$ e as possíveis representações do grupo de estrutura do nosso sistema.

O efeito de transportar uma estado quântico paralelamente é dado em nosso fibrado principal por g_γ o qual seu traço é um observável W_γ associado. A representação física desses operadores pode ser obtida facilmente através do mapeamento $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{H})$ discutido anteriormente, o que nos deixa com

$$R = \rho(g_\gamma) \tag{4.52}$$

$$W_\gamma = \rho(w_\gamma) \tag{4.53}$$

como os possíveis valores de R possuem uma correspondência entre os elementos $\gamma \in \pi_1(\mathcal{M})$ podemos ver essa operação como a representação do grupo fundamental em nosso fibrado vetorial.

Para duas partículas idênticas em três dimensões $\pi_1(\mathcal{C}(\mathcal{E}_3^2)) = \mathbb{Z}_2$ e o que é exatamente o esperado, temos duas representações unitárias de permutação em 3D. Para duas partículas temos $\pi_1(\mathcal{C}(\mathcal{E}_2^2)) = \mathbb{N}$ o que nos permite infinitas representações. Enquanto a fase específica que cada partícula ganha depende de propriedades intrínsecas delas, o fator que limita as possíveis fases é puramente topológico.

4.5 Dinâmica no fibrado

Para discutir as ideias de como a dinâmica é definida em nosso espaço quântico, podemos começar com uma análise clássica sobre \mathcal{M} . Nossa espaço de configurações contém todos os possíveis estados que o nosso sistema pode se encontrar, quando estamos num ponto $q \in \mathcal{M}$ e nosso sistema pode evoluir de maneira continua entre qualquer ponto vizinho. Quando queremos descrever para onde nosso ponto deve ir, estamos pensando na dinâmica do sistema.

A pergunta então que surge naturalmente é: *qual ponto devemos ir em cada momento?*. Sabemos que classicamente a natureza escolhe um caminho, e para escolher esse caminho ela deve decidir qual é o melhor passo a se dar em cada ponto. Se a natureza fosse uma entidade, ela seria uma preguiçosa a qual caminha sobre \mathcal{M} . Para cada passo dela, ela precisaria olhar para todos os pontos que ela pode andar e escolher o menos cansativo.

Para definir qual passo será dado em \mathcal{M} ela precisa ter um critério de quão cansativo é andar para cada ponto. A função que avalia esses pontos é conhecida como ação $S[\gamma(t)]$, e o seu critério de avaliação é chamado de lagrangiana \mathcal{L} . A curva γ menos cansativa é a que minimiza $S[\gamma(t)]$, esse princípio é conhecido como princípio da mínima ação.

A função lagrangiana é o que descreve a dinâmica de nosso sistema, uma vez que ela é responsável por ranquear cada ponto. O modo como isso é feito depende apenas do dados de \mathcal{M} e de $\gamma(t)$. Repare nas seguintes ações conhecidas

$$S_{\text{livre}} = -mc \int_a^b ds - \frac{q}{c} \int_a^b A_\mu dx^\mu \quad (4.54)$$

$$S_{\text{EM}} = -\frac{1}{4\mu_0 c} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x \quad (4.55)$$

Essas ações representam a da partícula livre no campo eletromagnético e a outra do campo eletromagnético livre. Perceba que as ações em geral podem ser vistas como a resposta de certas características à geometria do próprio espaço \mathcal{M} . A energia cinética é uma análise do elemento tangencial da curva $\gamma(t)$, a contribuição do campo eletromagnético com uma partícula carregada é uma análise em cima das rotações do espaço de calibre e o campo eletromagnético livre depende da curvatura do espaço. O ponto é o modo como pesamos e definimos a evolução do sistema é em cima da geometria e topologia do sistema.

As interações que descrevemos em nossa ação dependem normalmente de características locais, como a noção de distância entre duas configurações. Para termos desse tipo,

exigimos que nosso sistema tenha uma métrica bem definida a qual dita a física das relações locais. Entretanto, nada nos impede de analisar as características topológicas do nosso espaço, e nos perguntar como ela pode refletir no "ranqueamento da natureza".

Seguindo essa analogia, podemos estudar a dinâmica da topologia de nosso espaço bidimensional através de uma ação que reflita o caráter topológico do nosso espaço. Essa ação é conhecida como ação de chern-simon:

$$S_{CS} = \frac{k}{4\pi} \int_M \text{Tr} \left(\mathbf{A} \wedge d\mathbf{A} + \frac{2}{3} \mathbf{A} \wedge \mathbf{A} \wedge \mathbf{A} \right) \quad (4.56)$$

Se lembrarmos que A assume valores na álgebra de lie, vemos que o termo $\mathbf{A} \wedge d\mathbf{A}$ mede como essa torção se enrosca ao redor de si mesma, criando estruturas helicoidais no espaço. E o termo antissimétrico $\mathbf{A} \wedge \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}$ mede a capacidade dessas torções do espaço comutarem, veja que esse termo é nulo se os geradores T^j de $\mathbf{A} = A_\mu^a T^a dx^\mu$ comutarem, isso só é possível se o nosso gauge for representado por um grupo $U(1)$. O termo k é um numero inteiro, isso garante que garante a invariância de calibre de S_{CS} para grandes transformações de gauge. O traço Tr é necessário porque \mathbf{A} é matricial. Ele garante que o integrando seja um escalar, adequado para integração sobre a variedade M . Além disso, o traço assegura que a ação seja invariante sob transformações de gauge.

No regime clássico, a natureza parece fazer uma escolha precisa: dentre todas as trajetórias possíveis em \mathcal{M} , ela seleciona aquela que extremiza a ação $S[\gamma]$. Essa trajetória única reflete uma dinâmica determinística, onde a geometria local (métrica, conexões) e a topologia global (classes características) ditam o caminho "menos cansativo".

Quanticamente, entretanto, a descrição física sofre uma transformação radical: todas as trajetórias possíveis coexistem em sobreposição coerente. Nossa problema não se reduz mais a encontrar um único caminho privilegiado, mas sim a somar democraticamente todas as histórias possíveis, respeitando a geometria e a topologia do espaço de configurações.

Do ponto de vista geométrico, essa passagem possui uma sutileza essencial: embora em cada carta $U_i \subset \mathcal{M}$ seja possível trivializar o fibrado, construir espaços de Hilbert locais \mathcal{H}_{U_i} e definir superposições de estados, nada garante, a priori, que essas descrições locais se costurem em uma função de onda global. Em outras palavras, ainda não dispomos de uma seção $\psi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$ bem definida que associe, de maneira consistente, cada ponto do espaço de configurações a um estado quântico. A tarefa de promover essa descrição local a uma representação global — compatível com as transições de carta e com a estrutura topológica do

fibrado — constitui justamente o problema central da quantização em espaços com topologia não trivial.

A formulação por integral de caminho de Feynman resolve este impasse através de uma síntese relacional. Em lugar de buscar uma função de onda global, ela define amplitudes de transição via soma histórica ponderada

$$\langle q_f | q_i \rangle = \int_{\gamma(0)=q_i}^{\gamma(T)=q_f} \mathcal{D}\gamma e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma]}.$$

Nesta formulação, cada trajetória γ não é apenas uma curva no espaço de configurações: ela também determina um transporte paralelo ao longo do fibrado, que relaciona as fibras (espaços de Hilbert locais) nas cartas por onde γ passa. Em particular, ao atravessar uma interseção de cartas $U_\alpha \cap U_\beta$ as descrições locais estão relacionadas por uma transformação de calibre $g_{\alpha\beta}$, e o transporte paralelo ao longo de γ é representado pelo operador de holonomia

$$\mathcal{H}ol_\gamma(A) = \mathcal{P} \exp \left(- \int_\gamma A \right),$$

que atua como um mapa linear entre a fibra em q_i e a fibra em q_f . Assim, uma expressão mais explícita da amplitude, que evidencia a ação da conexão sobre os estados locais $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}_{q_i}$ e $|\psi_f\rangle \in \mathcal{H}_{q_f}$, é

$$\langle \psi_f, q_f | \psi_i, q_i \rangle = \int_{\gamma(0)=q_i}^{\gamma(T)=q_f} \mathcal{D}\gamma \langle \psi_f | \mathcal{P} \exp \left(- \int_\gamma A \right) e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma]} | \psi_i \rangle.$$

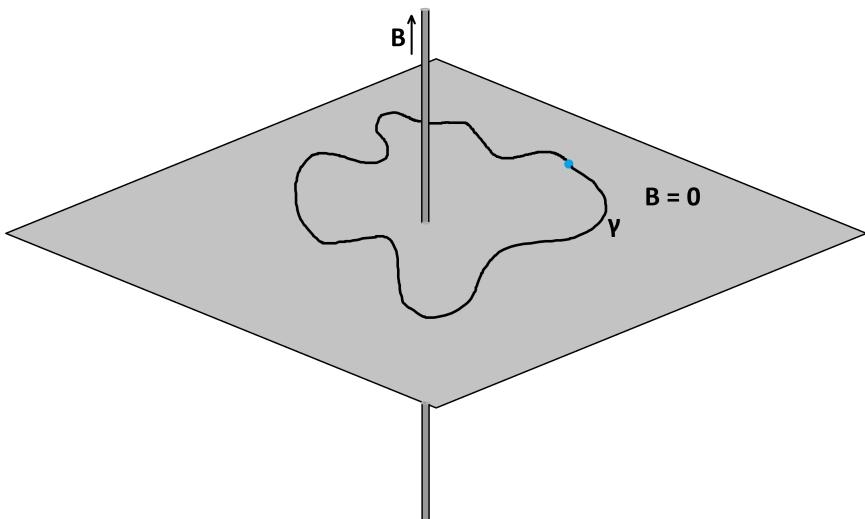
Dessa forma, cada trajetória γ fornece simultaneamente (i) a fase dinâmica $e^{iS[\gamma]/\hbar}$ que pesa a contribuição clássica da trajetória e (ii) o operador de transporte paralelo $\mathcal{P} \exp(-\int_\gamma A)$ que “cola” as descrições locais das fibras ao longo do caminho. Quando γ cruza diferentes cartas, as transformações de calibre locais aparecem apenas como conjugação do transportador paralelo, e a integral funcional soma essas contribuições de maneira coerente — isto é, a amplitude final é independente da escolha de trivialização local, desde que as regras de transição sejam respeitadas.

5 O EFEITO AHARONOV–BOHM

O exemplo mais simples de fases topológicas é o efeito Aharonov–Bohm. Embora não compartilhe a mesma origem física dos *anyons*, este fenômeno ilustra claramente como holonomias em fibrados principais geram fases geométricas observáveis, decorrentes da topologia não trivial do espaço e da invariância de calibre.

Considere uma partícula carregada confinada a um plano \mathbb{R}^2 . Um solenoide infinitamente longo, perpendicular ao plano e localizado na origem, confina um campo magnético $\vec{B} \neq 0$ em seu interior, enquanto na região acessível à partícula temos $\vec{B} = 0$ (Fig. 12).

Figura 12 – Efeito Aharonov–Bohm e o potencial vetor



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Legenda: Efeito Aharonov–Bohm. Um elétron move-se em um plano com solenoide na origem confinando campo magnético \vec{B} . Na região acessível, $\vec{B} = 0$ mas $\nabla \times \vec{A} \neq 0$.

A invariância de calibre na eletrodinâmica implica que o acoplamento mínimo substitui o momento canônico pelo momento cinético generalizado:

$$\vec{p} \longrightarrow \vec{\pi} = \vec{p} - q\vec{A},$$

correspondente à derivada covariante na equação de Schrödinger:

$$\nabla \longrightarrow D = \nabla - i\frac{q}{\hbar}\vec{A}.$$

O Hamiltoniano assume então a forma:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - q\vec{A} \right)^2.$$

Para um caminho fechado γ envolvendo o solenoide, a função de onda adquire uma fase de holonomia:

$$g_\gamma = \exp\left(-i\frac{q}{\hbar} \oint_\gamma \vec{A} \cdot d\vec{l}\right) \quad (5.1)$$

A curvatura da conexão $U(1)$ é dada pela 2-forma $F = dA$, correspondente ao tensor campo eletromagnético. Como $F = dA$ é uma forma exata, temos $dF = 0$ (fechada). Pelo teorema de Stokes:

$$\oint_\gamma \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi_B,$$

onde S é qualquer superfície com $\partial S = \gamma$. A independência topológica manifesta-se na equivalência:

$$\oint_{\gamma_1} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_{\gamma_2} \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (5.2)$$

para caminhos γ_1, γ_2 homotopicamente equivalentes em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. A fase resultante:

$$g_\gamma = \exp\left(-i\frac{q}{\hbar} \Phi_B\right)$$

é um invariante de calibre (loop de Wilson para $G = U(1)$).

Dessa forma esperamos que nossa função de onda se transforme como

$$|\psi'\rangle = \exp\left(-i\frac{q}{\hbar} \Phi_B\right) |\psi\rangle, \quad (5.3)$$

garantindo uma fase que depende da carga de teste q e do fluxo magnético B no solenoide.

Apesar do efeito Aharonov-Bohm ter origem distinta da dos anyons - sendo induzido por um fluxo magnético externo em contraste com a topologia intrínseca do espaço de configuração de partículas idênticas - ele revela três características fundamentais que antecipam aspectos essenciais do processo de permutação entre anyons:

- 1. Topologicidade da fase:** A fase adquirida pela função de onda é puramente topológica, dependendo exclusivamente da classe de homotopia do caminho percorrido. Esta independência de deformações contínuas do caminho (desde que não cruze o solenoide) decorre diretamente da curvatura nula ($F = dA = 0$) na região acessível e da multiconectividade do espaço $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
- 2. Não-trivialidade de conexões planas:** Mesmo na ausência local de campos físicos ($\vec{B} = 0$), a conexão A_μ pode induzir holonomias não triviais. Esta aparente contradição resolve-se pela natureza global da topologia: o fluxo magnético confinado atua como obstáculo topológico, tornando o grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ não trivial.

3. **Não-localidade quântica:** A fase resulta de uma interação não-local, sendo determinada inteiramente pelo fluxo magnético total enlaçado, sem qualquer mediação de campos locais mensuráveis. Esta ação à distância manifesta a natureza da geometria do fibrado principal.

Estas propriedades estão obviamente interconectadas e prefiguram profundamente o comportamento de anyons, onde a permutação de partículas gera fases topológicas oriundas da estrutura não trivial do espaço de configuração.

6 ANYONS

Nos capítulos anteriores, estabelecemos como a topologia do espaço de configurações em sistemas bidimensionais dá origem a uma rica estrutura geométrica, descrita por fibrados onde o transporte paralelo de estados quânticos gera fases observáveis. Agora, exploraremos as consequências físicas diretas dessa estrutura: as quasipartículas conhecidas como anyons.

Anyons são excitações localizadas, de baixa energia, cujas propriedades são intrinsecamente ligadas à dimensionalidade do sistema em que habitam. A sua descrição teórica mais eficaz é realizada por meio de uma teoria de calibre puramente topológica, a teoria de Chern-Simons¹. Para que as propriedades topológicas dominem a física, duas condições são essenciais. Primeiro, a existência de um gap de energia (ΔE) que separa o estado fundamental degenerado do primeiro estado excitado. Segundo, que a evolução do sistema seja adiabática, ou seja, lenta o suficiente para não fornecer a energia necessária para cruzar esse gap.

Juntas, essas exigências garantem que o sistema permaneça confinado ao subespaço do estado fundamental, onde a informação é protegida topologicamente. Embora as propriedades topológicas existam independentemente da escala de energia, grandes perturbações podem superar o gap e fazer com que interações locais predominem.

Sob as condições de proteção topológica, a dinâmica governada pela ação de Chern-Simons revela que as excitações do sistema possuem cargas topológicas conservadas e seguem regras de permutação e combinação muito particulares. A quantização dessa teoria leva naturalmente a uma estrutura matemática poderosa conhecida como Categoría Tensorial Modular (MTC), que organiza de forma consistente o comportamento dessas partículas. É nesse contexto que emergem as teorias de calibre do tipo $SU(N)_k$, onde o nível k é um parâmetro inteiro que dita as regras específicas de interação.

Dentre as diversas teorias de calibre do tipo $SU(N)_k$, duas classes de anyons merecem destaque especial devido à sua relevância em computação quântica topológica: os anyons de Ising e os anyons de Fibonacci.

Os anyons de Ising, descritos pela teoria de Chern-Simons $SU(2)_2$, são fundamentais para a construção de qubits topológicos. Eles são esperados em sistemas como o estado $\nu = 5/2$ do Efeito Hall Quântico Fracionário (estados do tipo Moore-Read)(Halász, 2023), supercondutores p-wave (como o Sr_2RuO_4)(Kallin, 2012) e em junções de nanofios semicondutores com

¹ Existem teorias as quais abordam a possibilidade de anyons que não são abrangidos pela teoria Chern-Simons. Entretanto, não existe evidências fortes da existência experimental de anyons fora dessa teoria.

supercondutividade induzida. Estes anyons possuem uma estatística não-abeliana onde suas operações de trança são densas no grupo de Clifford, o qual não é universal para computação quântica. Apesar de não serem universais apenas com tranças, existem diferentes abordagens que permitem a universalização das operações, como a adição de uma porta não-Clifford obtida via destilação de estados mágicos(Nayak *et al.*, 2008; Bravyi; Kitaev, 2005). No entanto, um trabalho recente mostra que, ao considerar um Hamiltoniano efetivo que realize uma extensão não-semisimples do modelo de Ising, as operações de trança por si só podem ser suficientes para a computação quântica universal(Iulianelli *et al.*, 2025).

Já os anyons de Fibonacci, que emergem da teoria $SU(2)_3$, representam uma plataforma ainda mais rica para a computação quântica universal. Eles são previstos em sistemas de Efeito Hall Quântico Fracionário com fator de preenchimento $\nu = 12/5$ (estados do tipo Read-Rezayi)(Mong *et al.*, 2017) e em certos líquidos de spin quânticos. A sua estatística de trança é capaz de gerar qualquer operação unitária, pois suas representações do grupo de trança têm imagem densa em grupos unitários, tornando-os candidatos ideais para a construção de um computador quântico tolerante a falhas(Freedman *et al.*, 2002).

Este arcabouço teórico nos permite descrever as duas operações fundamentais que caracterizam um sistema anyônico. A primeira é a fusão, que dita os possíveis resultados da combinação de duas ou mais quasipartículas. A segunda é a trança (braiding), que descreve como os estados quânticos evoluem quando as posições das partículas são permutadas. Essas operações são precisamente codificadas por um conjunto de dados algébricos: as matrizes F governam a consistência da fusão, enquanto as matrizes R definem as transformações unitárias resultantes da trança.

Neste capítulo, nosso foco será detalhar esse formalismo. Analisaremos as regras de fusão, os espaços de Hilbert resultantes e como as matrizes F e R emergem como as ferramentas essenciais para descrever a física dos anyons, preparando o caminho para sua aplicação em informação quântica.

6.1 Fusão

Na teoria de anyons, a fusão representa um processo topológico fundamental que emerge da interação entre geometria e quantização topológica. Como previamente estabelecido, anyons são excitações quasipartículas descritas por holonomias não-Abelianas e loops de Wilson ($W_\gamma = \mathcal{P} \exp \oint_\gamma A$), que codificam cargas topológicas através da conexão de gauge A_μ .

Em sistemas com ação de Chern-Simons

$$S_{CS} = \frac{k}{4\pi} \int_M \text{tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right),$$

a quantização impõe restrições globais cruciais: sob condições de contorno periódicas em superfícies fechadas, o loop de Wilson ao longo de ciclos não contraíveis deve satisfazer $W_\gamma = \mathbb{I}$, refletindo a neutralidade topológica global do sistema. Esta condição assegura que a soma algébrica das cargas topológicas seja trivial, embora a conservação local de carga não se aplique.

A fusão de anyons é definida como a aproximação espacial de duas excitações a e b a uma distância crítica ξ (comprimento de correlação topológica), onde suas identidades individuais tornam-se indistinguíveis sob operadores de loop de Wilson. Geometricamente, quando a separação d entre os anyons satisfaz $d \ll \xi$, qualquer curva γ englobando ambos os pontos não pode acessar suas contribuições individuais, pois as flutuações quânticas do campo de gauge "misturam" suas propriedades locais.

Contudo, este processo não corresponde a uma simples adição de cargas, mas sim a uma reconfiguração topológica do espaço de estados. A ausência de conservação local de carga manifesta-se no fato de que o resultado da fusão é governado por regras combinatórias:

$$a \times b = \sum_i N_{ab}^c c \quad (6.1)$$

onde os coeficientes N_{ab}^c denotam as multiplicidades dos possíveis resultados c , determinados pela teoria de representação do grupo de gauge com nível k .

O mecanismo subjacente à fusão reside na contração do espaço de configurações efetivo: ao aproximar a e b abaixo de ξ , o grupo de trança B_n (que descreve o entrelaçamento de n partículas) reduz-se a B_{n-1} , e o plano perfurado $\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\}$ é topologicamente equivalente a $\mathbb{R}^2 \setminus \{c\}$. Fisicamente, observáveis globais (como fases de Berry ou operadores de loop) tornam-se insensíveis aos detalhes locais, respondendo apenas à carga combinada c .

Esta transição, embora desencadeada por uma operação geométrica, é essencialmente um fenômeno de não-localidade quântica, onde a escala ξ atua como um limite de resolução topológica.

Quando especificamos um tipo de sistema anyonico, estamos estabelecendo suas regras de fusões a qual envolve todas as excitações intermediárias possíveis com cargas topológicas distintas. Se um sistema possui um conjunto de excitações $\{a, b, c, \dots\}$ escrevemos a relação de fusão pela equação 6.1. Quando $N_{ab}^c > 1$, significa que existem cargas localmente idênticas que se transformam globalmente de forma distinta, dessa forma os símbolos $\{a, b, c, \dots\}$ determinam

a distinguibilidade local entre as partículas e os N_{ab}^c determinam os graus de liberdade globais de cada uma dessas partículas. Em nosso caso iremos nos referir apenas a sistemas onde $N_{ab}^c \leq 1$.

Um sistema de anyons simples que exemplifica esse ponto é o $\{\tau, 1\}$ o qual é determinado pelo conjunto essencial de coeficientes de fusão:

$$N_{\tau\tau}^1 = 1, \quad N_{\tau\tau}^\tau = 1, \quad N_{\tau 1}^\tau = 1, \quad (6.2)$$

onde a comutatividade da fusão ($a \times b = b \times a$) elimina repetições redundantes. Os anyons descritos por esse sistema são chamados de **Anyons de Fibonacci**.

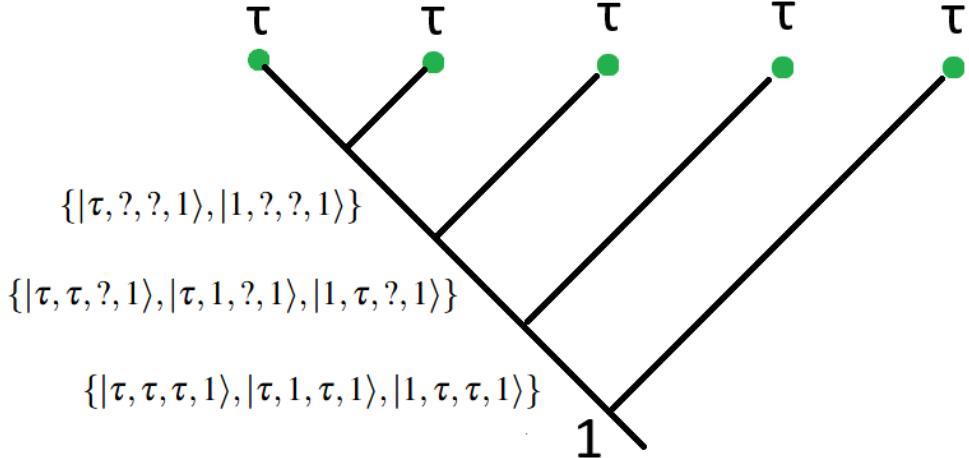
Em nosso exemplo, a multiplicidade $N_{\tau\tau}^1 = 1$ indica que dois anyons τ fundem-se no vácuo 1 através de um único canal topológico, assim como $N_{\tau\tau}^\tau = 1$ mostra que os mesmos anyons podem fundir-se em um único τ com multiplicidade unitária. Finalmente, $N_{\tau 1}^\tau = 1$ estabelece que 1 é elemento neutro: τ fundido com 1 resulta no próprio τ .

Uma representação sintética destas regras é dada por:

$$\tau \times \tau \rightarrow \tau + 1, \quad \tau \times 1 \rightarrow \tau, \quad (6.3)$$

onde o símbolo "+"denota superposição de resultados distintos, ambos com multiplicidade 1. Um modo de construir uma base num espaço que seja gerado através dessa regra é imaginar nossos vetores de base como um histórico de fusões o qual vai da esquerda para a direita, como mostrado na Figura 13. Como podemos ver na figura, um conjunto de 4 anyons de Fibonacci onde a carga total fixada é o vácuo, os possíveis caminhos em que as partículas podem se fundir são quatro: $\{|\tau, \tau, 1, 1\rangle, |\tau, 1, \tau, 1\rangle, |1, \tau, 1, 1\rangle, |1, \tau, \tau, 1\rangle\}$

Figura 13 – Fusão de cinco anyons de Fibonacci e estados resultantes



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Legenda: Cinco anyons de Fibonacci se fundem um a um da esquerda para a direita. A carga topológica total fixada no exemplo é 1; veja que a penúltima fusão obrigatoriamente precisa ser τ , uma vez que $\tau \times 1 \nrightarrow \tau$. As possíveis evoluções do sistema são $\{|\tau, \tau, \tau, 1\rangle, |\tau, 1, \tau, 1\rangle, |1, \tau, \tau, 1\rangle\}$.

Veja que o caráter recursivo dos anyons de fibonacci faz com que a base de estados que representam as possíveis evoluções do sistema cresça na proporção aurea:

$$N = 2 : |\tau, 1\rangle$$

$$N = 3 : |\tau, \tau, 1\rangle$$

$$N = 4 : |\tau, 1, \tau, 1\rangle, |\tau, \tau, \tau, 1\rangle$$

$$N = 5 : |\tau, 1, 1, \tau, 1\rangle, |\tau, 1, \tau, \tau, 1\rangle, |\tau, \tau, \tau, \tau, 1\rangle$$

$$N = 6 : |\tau, 1, 1, 1, \tau, 1\rangle, |\tau, 1, 1, \tau, \tau, 1\rangle, |\tau, 1, \tau, \tau, \tau, 1\rangle, |\tau, \tau, \tau, 1, \tau, 1\rangle, |\tau, \tau, \tau, \tau, \tau, 1\rangle$$

Um outro conjunto de anyons conhecido são os anyons de Ising. Eles são definidos por um conjunto de três cargas topológicas: o vácuo (1), um férnion (ψ) e uma partícula não abeliana (σ). As regras de fusão que governam suas interações são:

$$\psi \times \psi = 1 \tag{6.4}$$

$$\psi \times \sigma = \sigma \tag{6.5}$$

$$\sigma \times \sigma = 1 + \psi \tag{6.6}$$

$$\sigma \times 1 = \sigma \tag{6.7}$$

$$\psi \times 1 = \psi \tag{6.8}$$

A regra mais notável é a da fusão de dois anyons σ , que pode resultar tanto no vácuo (1) quanto em um férnion (ψ). É essa multiplicidade de resultados que confere o caráter não abeliano ao

sistema. Veja que considerando 1 como nossa fusão final obtemos para esse caso

$$N = 2 : |1, 1\rangle$$

$$N = 3 : (\text{nenhum estado com fusão total} = 1)$$

$$N = 4 : |1, \sigma, 1, 1\rangle, |\psi, \sigma, 1, 1\rangle$$

$$N = 5 : (\text{nenhum estado com fusão total} = 1)$$

$$N = 6 : |1, \sigma, 1, \sigma, 1, 1\rangle, |1, \sigma, \psi, \sigma, 1, 1\rangle, |\psi, \sigma, 1, \sigma, 1, 1\rangle, |\psi, \sigma, \psi, \sigma, 1, 1\rangle$$

A primeira coisa que percebemos ao comparar os dois tipos de anyons diferentes é que a dimensão do espaço de hilbert gerado por esses históricos é diferente. Os anyons de Fibonacci parecem crescer numa proporção maior que os anyons de Ising.

6.1.1 Dimensão quântica

A característica que determina o tamanho do espaço de Hilbert gerado pelas operações de fusão é conhecida como dimensão quântica (d_a) de uma partícula topológica a . Ela quantifica o crescimento assintótico do número de estados quânticos distinguíveis quando o número de partículas do tipo a aumenta, sob restrições topológicas. A dimensão quântica é um número real algébrico ≥ 1 e pode ser calculada como o autovalor dominante (maior autovalor real) da matriz de fusão associada à partícula.

Quando dizemos matriz de fusão associada a uma carga fixa a , denotamos por (N_a) a matriz cujas entradas são

$$(N_a)_b^c = N_{ab}^c, \quad (6.9)$$

onde a linha indica a carga b que está sendo fundida com a e a coluna indica o resultado c .

Para os anyons de Fibonacci (ordem dos rótulos: $\{1, \tau\}$) obtemos as matrizes

$$N_1 = \begin{array}{c|cc} & 1 & \tau \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ \tau & 0 & 1 \end{array} \quad N_\tau = \begin{array}{c|cc} & 1 & \tau \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \tau & 1 & 1 \end{array} \quad (6.10)$$

Para os anyons de Ising (ordem dos rótulos: $\{1, \psi, \sigma\}$) as matrizes são

$$N_1 = \begin{array}{c|ccc} & 1 & \psi & \sigma \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \psi & 0 & 1 & 0 \\ \sigma & 0 & 0 & 1 \end{array}, \quad N_\psi = \begin{array}{c|ccc} & 1 & \psi & \sigma \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ \psi & 1 & 0 & 0 \\ \sigma & 0 & 0 & 1 \end{array}, \quad N_\sigma = \begin{array}{c|ccc} & 1 & \psi & \sigma \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ \psi & 0 & 0 & 1 \\ \sigma & 1 & 1 & 0 \end{array}. \quad (6.11)$$

A dimensão quântica d_a de uma partícula a é o autovalor dominante (por Perron–Frobenius) da matriz N_a . Para Fibonacci, os autovalores de N_τ vêm da equação característica

$$\det(N_\tau - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

cuja raiz positiva é a razão áurea

$$d_\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618033989. \quad (6.12)$$

Para Ising, os autovalores de N_σ são $\{\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}\}$, portanto

$$d_\sigma = \sqrt{2} \approx 1.414213562. \quad (6.13)$$

Esses d_a controlam o crescimento assintótico do número de estados quando o número de partículas do tipo a aumenta: o número de estados cresce como $\sim d_a^N$, veja em (Simon, 2023, Cap. 8).

6.1.2 Espaço de fusão V

A possibilidade de múltiplos resultados ao fundir duas partículas é o que confere aos sistemas de anyons a característica de *superposição de caminhos de fusão*. Cada fusão intermediária pode ser imaginada como um *ramo* numa árvore: escolher uma carga resultante numa fusão é escolher um ramo. O espaço de fusão total $\mathcal{V}_{a_1 \dots a_N}^\lambda$ é, portanto, o espaço gerado por todos os ramos (todos os caminhos) que levam à carga final fixa λ ; a dimensão de \mathcal{V} é exatamente o número desses ramos.

Como nos interessa apenas os caminhos que terminam em uma carga final *específica* λ , é conveniente construir a árvore *ao contrário*: começamos por λ e aplicamos a "divisão" (fusão reversa) coerentes até chegar às partículas iniciais. Esta construção reversa garante coerência global — isto é, evita contar sequências locais de fusões que, embora permitidas ponto a ponto, violam a carga total λ a qual deve ser conservada.

Para três partículas a, b, c fundindo para λ , a descrição tensorial é

$$\mathcal{V}_\lambda^{abc} \cong \bigoplus_d \mathcal{V}_d^{ab} \otimes \mathcal{V}_\lambda^{dc}, \quad (6.14)$$

onde o espaço de fusão de $a \otimes b \rightarrow d$, se funde com o espaço tensorial de $d \otimes c \rightarrow \lambda$. Ao somar sobre todos os intermediários d e índices de multiplicidade (μ, v) obtemos uma base completa

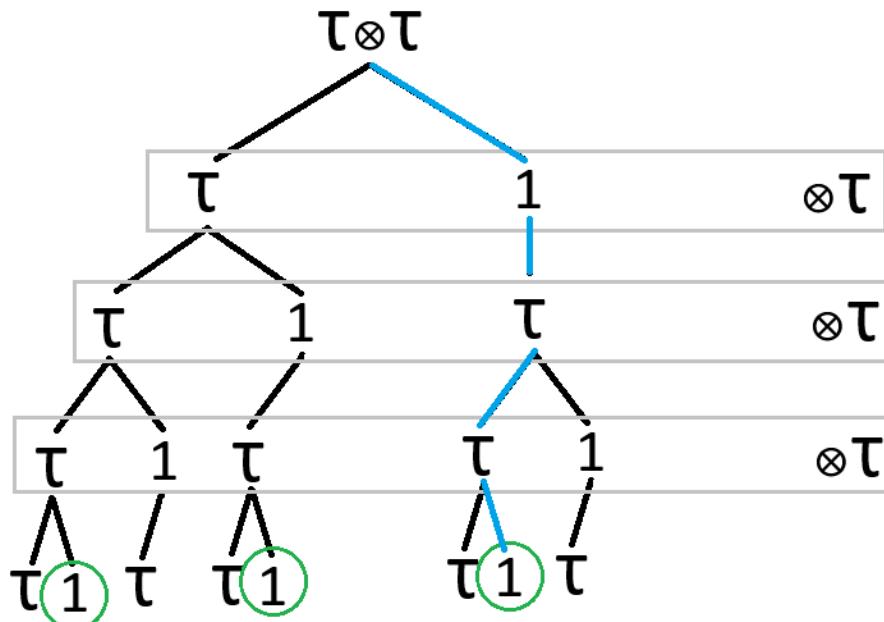
para $\mathcal{V}_\lambda^{abc}$ que pode ser escrita da seguinte forma:

$$|(a,b),d_\mu\rangle \otimes |(d,c),\lambda_v\rangle \quad \text{com } \mu = 1, \dots, N_{ab}^d, \quad v = 1, \dots, N_{dc}^\lambda. \quad (6.15)$$

Aqui usamos uma notação mais completa explicitando as fusões $(a, b) \rightarrow c$. A dimensão desse espaço pode ser obtida diretamente pelas dimensões associadas aos $N_{\alpha\beta}^\gamma$:

$$\dim \mathcal{V}_\lambda^{abc} = \sum_d N_{ab}^d N_{dc}^\lambda. \quad (6.16)$$

Figura 14 – Bases do espaço de fusão para quatro anyons



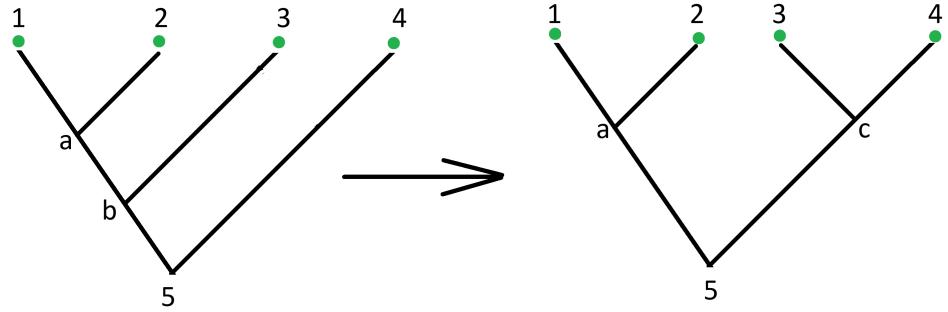
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Legenda: As bases do espaço de fusão dos anyons para 4 fusões. Para construir os vetores referentes a esse espaço podemos começar da carga final fixa (1) da base; cada caminho que leva ao topo $\tau \otimes \tau$ é uma possível base de nosso espaço. O caminho azul representa o vetor $|(\tau, \tau), 1 \rangle \otimes |(1, \tau), \tau \rangle \otimes |(\tau, \tau), \tau \rangle \otimes |(\tau, \tau), 1 \rangle = |(\tau, \tau), 1; (1, \tau), \tau; (\tau, \tau), \tau; (\tau, \tau), 1 \rangle = | 1, \tau, \tau, 1 \rangle$.

6.1.3 Matrizes F , relação do pentágono

Apesar do modo como esquematizamos as diferentes fusões ser muito mais intuitivo, qualquer ordem de fusão deve expandir o mesmo espaço ortonormal de possíveis caminhos. Escolher uma outra representação é a mesma coisa que mudar nossa base de representação do problema. Com o objetivo de manter a coerência da teoria, devemos ser capazes de determinar uma equivalência entre tais espaços através de uma matriz de mudança de base.

Figura 15 – Representação de diferentes ordens de fusão para quatro anyons



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

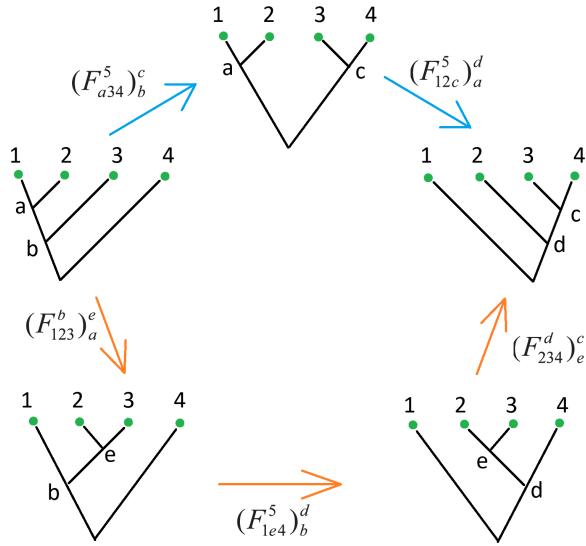
Legenda: Quatro anyons de Fibonacci se fundindo em duas maneiras diferentes. Na esquerda, os anyons são fundidos um a um com o resultado anterior. Na direita os anyons são fundidos em pares, depois tem seus resultados combinados. Obtendo uma base $\{ |(\tau, \tau), a \rangle \otimes |(a, \tau), b \rangle \otimes |(b, \tau), 5 \rangle \}$ e outra $\{ |(\tau, \tau), a \rangle \otimes |(\tau, \tau), c \rangle \otimes |(a, c), 5 \rangle \}$.

A Figura 15 mostra duas possíveis representações de base, possíveis caminhos de cada grafo correspondem aos vetores que expandem nossa base. A matriz que representa essa mudança de base pode ser escrita como

$$\{ |(\tau, \tau), a \rangle \otimes |(a, \tau), b \rangle \otimes |(b, \tau), 5 \rangle \} \xrightarrow{(F_{a34}^5)_b^c} \{ |(\tau, \tau), a \rangle \otimes |(\tau, \tau), c \rangle \otimes |(a, c), 5 \rangle \} \quad (6.17)$$

Para um conjunto de quatro partículas nos temos um total de cinco representações diferentes. Essas representações podem ser associadas considerando a equivalência entre dois conjuntos de transformações distintos que nos levam para a mesma base, como representado na Figura 16.

Figura 16 – Relação do pentágono para matrizes de fusão



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Legenda: Relação do pentágono. As matrizes de transformação devem ser equivalentes seguindo o caminho inferior e o superior.

A associação acima é representada na seguinte equação

$$(F_{12c}^5)_a^d (F_{a34}^5)_b^c = \sum_e (F_{234}^d)_e^c (F_{1e4}^5)_b^d (F_{123}^b)_a^e, \quad (6.18)$$

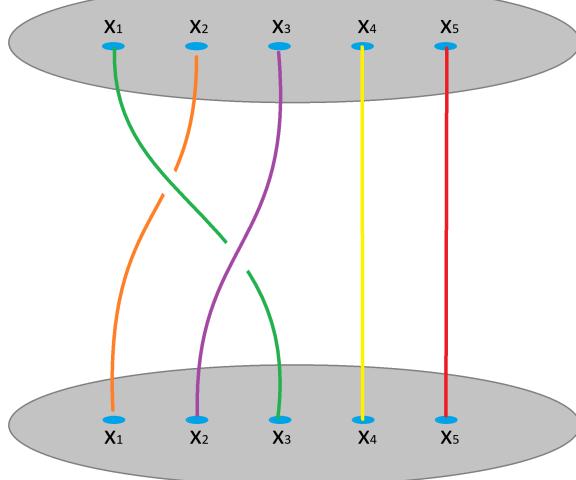
Essa equação é conhecida como a *relação do pentágono* e é responsável por garantir a consistência das transformações de base dentro da teoria. Perceba que por exigência da conservação de probabilidade essas equações devem ser unitárias.

Em teorias mais simples, é possível encontrar facilmente os valores dessas matrizes através da relação do pentágono e a imposição da unitariedade, veja (Ahmadi, 2025), o que é verdade para os casos discutidos nesse trabalho.

6.2 Braiding e equações do hexágono

Em um sistema anyônico, a permutação entre partículas idênticas induz uma transformação unitária dada pela holonomia $R = \rho(g_\gamma)$. Como vimos, essa holonomia realiza uma representação do grupo de tranças B_n . A figura 17 evidencia, de forma visual, a relação entre as representações de B_n e o processo de permutação entre as partículas.

Figura 17 – Representação do trançamento (braiding) de partículas no tempo



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Legenda: Conjunto de 5 partículas bidimensionais com posições fixas x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sendo permutadas numa superfície ao longo do tempo. A permuta pode ser vista como o ato de trançar os caminhos de evolução temporal de cada partícula.

Na representação visual, é importante atentar para as sobreposições (“over/under”) das tranças, pois elas fixam a orientação do cruzamento: o cruzamento inverso corresponde ao operador inverso $\rho(g_\gamma^{-1}) = \rho(g_\gamma)^{-1}$. Embora as linhas pareçam abertas na figura, tratam-se de partículas idênticas; topologicamente, o processo corresponde a um *loop* fechado no espaço de configurações que envolve as partículas pelas quais a trança passou.

Para cada par de tipos de anyons (a, b) e cada canal de fusão c , definimos o operador de braiding

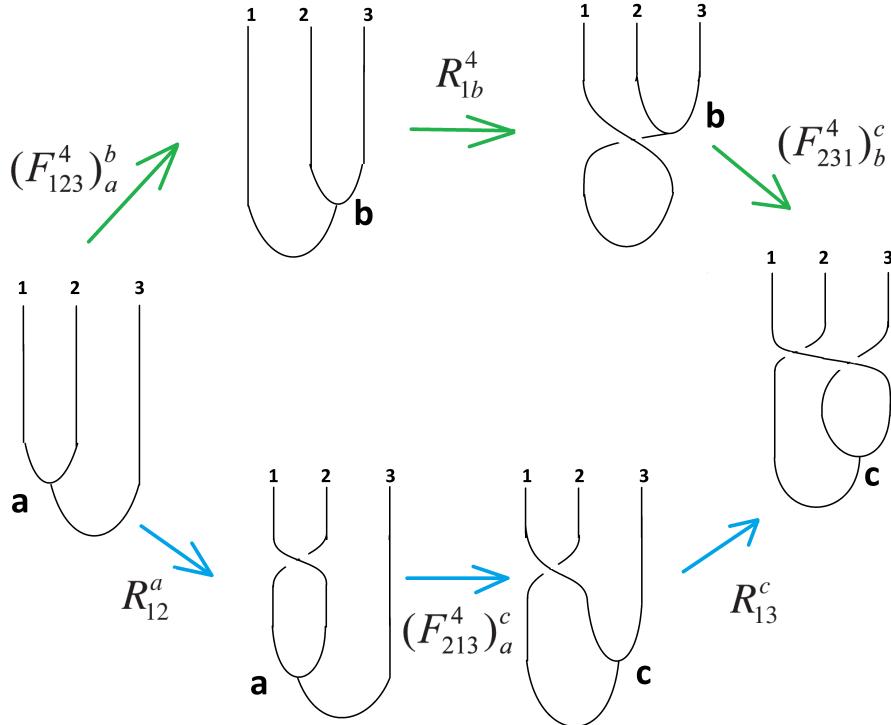
$$R_c^{ab} : \mathcal{V}_c^{ab} \longrightarrow \mathcal{V}_c^{ba},$$

que codifica a holonomia associada à permutação de a com b no canal c . Em ausência de multiplicidades ($N_{ab}^c = 1$), R_c^{ab} atua por uma fase. Na presença de multiplicidades, R_c^{ab} possui componentes matriciais em uma base de \mathcal{V}_c^{ab} . Em sistemas com múltiplos tipos de anyons ($\sigma, \psi, 1$), os operadores R_c^{ab} e as transformações de re-associação F satisfazem equações de consistência topológica (pentágono e hexágono) que garantem a invariância sob deformações contínuas dos trajetos.

Nosso objetivo nesta seção é entender como as operações de *braiding* são representadas, de forma consistente, em diferentes bases relacionadas por transformações F . Para isso, consideraremos a trança em um sistema de três anyons e imponhamos consistência com os

F -moves, como ilustrado na figura 18.

Figura 18 – Equações do hexágono e consistência entre trançamento e fusão



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Legenda: Equações do hexágono — Existem dois caminhos distintos de transformações que levam da configuração da esquerda à da direita. Podemos imaginar cada linha como uma corda: a cada fusão damos um “nó” (mudança de associação) e preservamos a ordem de sobreposição em cada cruzamento.

Vemos que há uma relação de equivalência entre dois conjuntos de transformações, dada por

$$\sum_b (F_{231})_b^c R_{1b}^4 (F_{123})_a^b = R_{13}^c (F_{213})_a^c R_{12}^a. \quad (6.19)$$

Essas relações são as *equações do hexágono*. Em conjunto com as equações do pentágono, elas garantem a consistência entre diferentes representações (ou bases) do problema, assegurando que fusão e trançamento sejam compatíveis.

6.3 Computação com anyons.

A construção de um computador topológico a partir de uma teoria anyônica começa pela especificação das matrizes de recoupling F e dos operadores de troca R , que determinam completamente as representações dos geradores do grupo de tranças no espaço de fusão escolhido.

Como exemplo podemos ver as analisar as matrizes R e F correspondentes aos anyons de Ising e os anyons de Fibonacci.

No caso dos anyons de Ising, temos três tipos de partículas: $\{1, \sigma, \psi\}$, com regras de fusão $\sigma \times \sigma = 1 + \psi$, $\sigma \times \psi = \sigma$ e $\psi \times \psi = 1$. As matrizes relevantes são:

$$F_\sigma^{\sigma\sigma\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad R^{\sigma\sigma} = \begin{pmatrix} e^{-i\pi/8} & 0 \\ 0 & e^{3i\pi/8} \end{pmatrix}, \quad R^{\sigma\psi} = -i.$$

Essas transformações geram, por trançamento, apenas o grupo de Clifford, o que limita a universalidade.

Já os anyons de **Fibonacci**, definidos apenas por $\{1, \tau\}$ com a regra de fusão $\tau \times \tau = 1 + \tau$, possuem:

$$F_\tau^{\tau\tau\tau} = \begin{pmatrix} \varphi^{-1} & \varphi^{-1/2} \\ \varphi^{-1/2} & -\varphi^{-1} \end{pmatrix}, \quad R^{\tau\tau} = \begin{pmatrix} e^{-4\pi i/5} & 0 \\ 0 & e^{3\pi i/5} \end{pmatrix},$$

onde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é a razão áurea. Neste caso, o conjunto de portas obtido pelo trançamento é universal para computação quântica, tornando os anyons de Fibonacci um modelo de referência para arquiteturas topológicas.

Escolhendo-se uma codificação lógica, os geradores de braid σ_i são obtidos por uma mudança de base (F), aplicação do R -move no canal de fusão relevante e retorno à base original (F^{-1}); em notação índice-a-índice, essa operação escreve-se convenientemente como

$$[U(\sigma_i)]_\alpha^\beta = \sum_{f,\mu,\nu} [F^{-1}]_\alpha^{(f,\mu)} [R_f^{ab}]_\mu^\nu [F]_{(f,\nu)}^\beta,$$

onde f percorre os canais intermediários e μ, ν indexam eventuais multiplicidades. A tarefa algorítmica consiste em aproximar portas lógicas U_{target} por produtos finitos desses geradores; para conjuntos geradores densos aplicam-se resultados de compilação (por exemplo Solovay–Kitaev), e para sequências curtas frequentemente obtêm-se melhores resultados com otimização numérica direta. A inicialização realiza-se pela criação de pares a, \bar{a} do vácuo em canais conhecidos, e a leitura topológica por fusão, observando o canal resultante.

7 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS

Ao longo desta dissertação, empreendemos uma jornada pela estrutura matemática e física que fundamenta a computação quântica topológica, com foco especial na emergência das propriedades topológicas desses sistemas. Foi apresentado inicialmente as propriedades gerais esperadas de um sistema para que ele seja capaz de realizar uma computação quântica. Em uma analogia com a computação clássica, discutimos alguns conceitos de informação, assim como sua representação e manipulação. Dentro desse aspecto vimos a necessidade de um conjunto universal de portas lógicas, bem como a dificuldade em preservar a coerência quântica diante de processos de decoerência e ruído ambiental.

Em seguida, mostramos como sistemas bidimensionais oferecem a arena necessária para o surgimento de excitações com estatísticas fracionárias — os anyons. A análise da topologia do espaço de configurações de partículas idênticas revelou a conexão natural com o grupo de trança, fornecendo a base para entender o braiding como operação unitária. Para descrever de forma consistente esses estados, recorremos ao formalismo de fibrados e conexões, no qual a evolução quântica se manifesta como transporte paralelo associado a uma conexão de gauge.

Como premissa para a definição de uma ação topológica, discutimos os aspectos geométricos presentes nas formulações lagrangianas de sistemas clássicos. A teoria de Chern-Simons foi então destacada como a formulação efetiva capaz de capturar a natureza puramente topológica do espaço de configurações a qual, juntamente com o formalismo de integrais de caminho de feynmann é capaz de descrever essas quasipartículas. Através dessa sequencia de relações, conseguimos evidenciar o processo de transição entre a descrição geométrica do espaço de configurações e a representação da natureza.

A partir desse arcabouço, investigamos as operações fundamentais da computação quântica topológica: fusão e troca de anyons. Essas operações foram formalizadas por meio das matrizes F e R , que, em conjunto, definem a estrutura de uma categoria tensorial modular. Esse formalismo não apenas fornece a linguagem matemática adequada, mas também conecta de maneira natural a física de quasipartículas com a teoria da informação quântica.

Apesar de sua robustez teórica, destacamos também as limitações de certas plataformas, como os anyons de Ising, que não são universais para computação por braiding isoladamente. Esse ponto abre espaço para a exploração de modelos mais ricos, como os anyons de Fibonacci, ou para a hibridização com técnicas de correção de erros quânticos convencionais.

Como perspectivas futuras, ressalto a relevância de explorar modelos efetivos da

matéria condensada (Kitaev, Haldane, Kane-Mele, BHZ), bem como a aplicação de métodos numéricos e de aprendizado de máquina para a classificação automática de fases topológicas. Além disso, os recentes avanços experimentais na observação de modos de Majorana e nos estados fracionários do efeito Hall quântico sugerem que a concretização de computadores quânticos topológicos pode estar ao nosso alcance em médio prazo.

Em conclusão, este trabalho buscou não apenas apresentar os fundamentos teóricos e matemáticos da computação quântica topológica, mas também evidenciar como a interação entre geometria, topologia e física da matéria condensada oferece uma nova perspectiva para o processamento da informação quântica.

REFERÊNCIAS

- AHARONOV, Y.; BOHM, D. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. **Physical review**, APS, v. 115, n. 3, p. 485, 1959.
- AHMADI, F. R. **The 2-Category of Topological Quantum Computation**. 2025. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2505.22171>. Acesso em: 25 ago. 2025.
- ASPURU-GUZIK, A.; DUTOI, A. D.; LOVE, P. J.; HEAD-GORDON, M. Simulated quantum computation of molecular energies. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 309, n. 5741, p. 1704–1707, 2005.
- AYOADE, O.; RIVAS, P.; ORDUZ, J. Artificial intelligence computing at the quantum level. **Data**, MDPI, v. 7, n. 3, p. 28, 2022.
- BAEZ, J. C.; MUNIAIN, J. P. **Gauge fields, knots and gravity**. [S. l.]: World Scientific Publishing Company, 1994. v. 4.
- BERRY, M. V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. **Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences**, The Royal Society London, v. 392, n. 1802, p. 45–57, 1984.
- BRAVYI, S.; KITAEV, A. Universal quantum computation with ideal clifford gates and noisy ancillas. **Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics**, APS, v. 71, n. 2, p. 022316, 2005.
- DALZELL, A. M.; MCARDLE, S.; BERTA, M.; BIENIAS, P.; CHEN, C.-F.; GILYÉN, A.; HANN, C. T.; KASTORYANO, M. J.; KHABIBOULLINE, E. T.; KUBICA, A. *et al.* **Quantum algorithms**: A survey of applications and end-to-end complexities. [S.l.:s.n], [2023].
- DEVITT, S. J.; MUNRO, W. J.; NEMOTO, K. Quantum error correction for beginners. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, v. 76, n. 7, p. 076001, 2013.
- FADELL, E.; NEUWIRTH, L. Configuration spaces. **Mathematica Scandinavica**, JSTOR, v. 10, p. 111–118, 1962.
- FREEDMAN, M. H.; LARSEN, M.; WANG, Z. A modular functor which is universal¶ for quantum computation. **Communications in Mathematical Physics**, Springer, v. 227, n. 3, p. 605–622, 2002.
- FRENSLEY, W. R. **Heterostructure and quantum well physics**. In: EINSPRUCH, N. G.; FRENSLEY, W. R. (ed.). Heterostructure and quantum devices. San Diego: Academic Press, 1994. (VLSI Electronic Microstructure Science, 24) p. 1–24.
- GIDNEY, C.; EKERÅ, M. How to factor 2048 bit rsa integers in 8 hours using 20 million noisy qubits. **Quantum**, Verein zur Förderung des Open Access Publizierens in den Quantenwissenschaften, v. 5, p. 433, 2021.
- GILMORE, R. **Lie groups, Lie algebras, and some of their applications**. [S. l.]: Courier Corporation, 2006.
- GOUZIEN, É.; SANGOUARD, N. Factoring 2048-bit rsa integers in 177 days with 13 436 qubits and a multimode memory. **Physical review letters**, APS, v. 127, n. 14, p. 140503, 2021.

- HALÁSZ, G. B. **Gate-controlled anyon generation and detection in Kitaev spin liquids.** 2023. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2308.05154>. Acesso em: 25 ago. 2025.
- HATCHER, A. **Algebraic Topology.** [S. l.]: Cambridge University Press, 2002.
- IBM Quantum. **IBM Quantum roadmap to 2033.** 2024. IBM Blog. Acessado em: 9 de abril de 2025. Disponível em: <https://www.ibm.com/quantum/blog/quantum-roadmap-2033>. Acesso em: 25 ago. 2025.
- IULIANELLI, F.; KIM, S.; SUSSAN, J.; LAUDA, A. D. Universal quantum computation using ising anyons from a non-semisimple topological quantum field theory. **Nature Communications**, Nature Publishing Group UK London, v. 16, n. 1, p. 6408, 2025.
- JOHANSEN, E. G.; SIMULA, T. Fibonacci anyons versus majorana fermions: A monte carlo approach to the compilation of braid circuits in su (2) k anyon models. **PRX Quantum**, APS, v. 2, n. 1, p. 010334, 2021.
- KALLIN, C. Chiral p-wave order in sr2ruo4. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, v. 75, n. 4, p. 042501, mar. 2012. ISSN 1361-6633. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/75/4/042501>. Acesso em: 25 ago. 2025.
- LAIDLAW, M. G.; DEWITT, C. M. Feynman functional integrals for systems of indistinguishable particles. **Physical Review D**, APS, v. 3, n. 6, p. 1375, 1971.
- LEINAAS, J.; MYRHEIM, J. On the theory of identical particles. **Il nuovo cimento**, v. 37, p. 132, 1977.
- LONG, J.; HUANG, X.; ZHONG, J.; MENG, L. Genetic algorithm enhanced solovay-kitaev algorithm for quantum compiling. **arXiv preprint arXiv:2501.01746**, 2025.
- Microsoft. **Advancing science: Microsoft and Quantinuum demonstrate the most reliable logical qubits on record with an error rate 800x better than physical qubits.** 2024. Microsoft Blog. Acessado em: 9 de abril de 2025. Disponível em: <https://blogs.microsoft.com/blog/2024/04/03/advancing-science-microsoft-and-quantinuum-demonstrate-the-most-reliable-logical-qubits-on-record-with/>. Acesso em: 25 ago. 2025.
- Microsoft. **Microsoft's Majorana 1 chip carves new path for quantum computing.** 2025. Microsoft News Center. Accessed: 2025-04-09. Disponível em: <https://news.microsoft.com/source/features/innovation/microsofts-majorana-1-chip-carves-new-path-for-quantum-computing/>. Acesso em: 25 ago. 2025.
- MONG, R. S.; ZALETEL, M. P.; POLLMANN, F.; PAPIĆ, Z. Fibonacci anyons and charge density order in the 12/5 and 13/5 quantum hall plateaus. **Physical Review B**, APS, v. 95, n. 11, p. 115136, 2017.
- NAKAHARA, M. **Geometry, topology and physics.** [S. l.]: CRC press, 2018.
- NASH, C.; SEN, S. **Topology and geometry for physicists.** [S. l.]: Elsevier, 1988.
- NAYAK, C.; SIMON, S. H.; STERN, A.; FREEDMAN, M.; SARMA, S. D. Non-abelian anyons and topological quantum computation. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 80, n. 3, p. 1083–1159, 2008.

- NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. **Quantum computation and quantum information.** [S. l.]: Cambridge university press, 2010.
- OZOLS, M. The solovay-kitaev theorem. **Essay at University of Waterloo**, 2009.
- PACHOS, J. K. **Introduction to topological quantum computation.** [S. l.]: Cambridge University Press, 2012.
- PERAL-GARCÍA, D.; CRUZ-BENITO, J.; GARCÍA-PEÑALVO, F. J. Systematic literature review: Quantum machine learning and its applications. **Computer Science Review**, Elsevier, v. 51, p. 100619, 2024.
- ROTMAN, J. J. **First course in abstract algebra.** [S. l.]: Prentice Hall, 2005.
- SHOR, P. W. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. **SIAM review**, SIAM, v. 41, n. 2, p. 303–332, 1999.
- SIMON, S. H. **Topological quantum.** [S. l.]: Oxford University Press, 2023.
- STEANE, A. M. Error correcting codes in quantum theory. **Physical Review Letters**, APS, v. 77, n. 5, p. 793, 1996.
- TERHAL, B. M. Quantum error correction for quantum memories. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 87, n. 2, p. 307–346, 2015.
- XIAO, L.; QIU, D.; LUO, L.; MATEUS, P. Distributed shor's algorithm. **arXiv preprint arXiv:2207.05976**, 2022.