

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

"MODELO DE ISING COM SPINS MISTOS EM UM CAMPO ALEATÓRIO"

Carlos Alberto Pereira da Silva

Orientador: Lindberg Lima Gonçalves

Tese apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Ciências.

Fevereiro de 1995.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S579m Silva, Carlos Alberto Pereira da.

Modelo de ising com spins mistos em um campo aleatório / Carlos Alberto Pereira da Silva. – 1995.

145 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 1995.

Orientação: Prof. Dr. Lindberg Lima Gonçalves.

1. Ising, Modelo de . 2. Física. I. Título.

CDD 530

MODELO DE ISING COM SPINS MISTOS EM UM CAMPO ALEATÓRIO

Carlos Alberto Pereira da Silva

Dissertação apresentada ao curso de Pós-graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Comissão Julgadora:

Lindberg Lima Gonçalves(UFC - Orientador)

Ivon Palmeira Fittipald' (UFPE)

Francisco Alcides Germano (UFC)

Aprovada em 15 de março de 1995.

DEDICATÓRIA

Às três mulheres de minha
vida. Nívia Maria, Iêda e
Maria do Socorro.

Aos Professores, Lindberg
e Pimentel.

AGRADECIMENTOS

. Ao Professor Lindberg Lima Gonçalves pela inesgotável paciência e consideração durante o desenvolvimento desse trabalho, além de sua sábia orientação.

Ao Professor Francisco Alcides Germano pelo apoio computacional.

. Aos Professores e amigos, José Pimentel de Lima e Miguel Arcanjo Costa, pela amizade, incentivo e dedicação a minha pessoa.

Aos demais Professores, que de forma direta ou indireta, contribuíram para a minha formação.

. A todos os demais colegas.

. Ao CNPq e a FADEP, que possibilitarão a realização deste mestrado através de seus Programas de Demanda Social.

RESUMO

Neste trabalho, considera-se o modelo de Ising ferromagnético em uma rede favo de mel com spins de magnitudes $\{1/2;1\}$, e $\{1/2;3/2\}$. Cada conjunto de spins ocupa uma das duas sub-redes equivalentes da rede favo de mel, e admite-se que o campo aleatório satisfaz uma distribuição recozida. O modelo é resolvido exatamente para distribuições simétricas de campo, transformando o sistema no modelo de Ising com spin $1/2$ na rede triangular. A solução é determinada para campo aleatório com vínculo e sem vínculo. Também considera-se o efeito da anisotropia uniaxial no comportamento crítico do sistema. O diagrama de fase é explicitamente apresentado para distribuições discretas de campo onde este admite os valores 0 , $\pm h$, com probabilidades p e $(1-p)/2$ respectivamente, e mostra-se que, para campo aleatório com vínculo, existem probabilidades críticas, p_c , não-universais.

ABSTRACT

In this work, the ferromagnetic Ising model on the honeycomb lattice with mixed spins of magnitudes $\{1/2;1\}$ and $\{1/2;3/2\}$ in a random field is considered. Each set of spins occupies one of the two equivalent sub-lattices of the honeycomb lattice, and the random field is assumed to satisfy an annealed distribution. The model is exactly solved for symmetric field distributions by mapping the system onto the spin $1/2$ Ising model on the triangular lattice. The solution is determined for constrained and unconstrained random field. It is also considered the effect of the uniaxial anisotropy in the critical behaviour of the system. The phase diagram is explicitly presented for the discrete field distributions where the field assumes the values $0, \pm h$, with probabilities p and $(1-p)/2$ respectively, and it is shown that, for the constrained random field, there are non-universal critical probabilities p_c .

ÍNDICE

| | página |
|---|------------|
| INTRODUÇÃO GERAL | 01 |
| CAPÍTULO 1 - MODELO DE ISING COM SPINS MISTOS EM UM CAMPO ALEATÓRIO SEM VÍNCULO. | |
| 1.1 - INTRODUÇÃO | 06 |
| 1.2 - MODELO COM SPINS MISTOS DE MAGNITUDES $1/2$ E 1 . | 07 |
| 1.3 - MODELO COM SPINS MISTOS DE MAGNITUDES $1/2$ E $3/2$. | 17 |
| CAPÍTULO 2 - MODELO DE ISING COM SPINS MISTOS EM UM CAMPO ALEATÓRIO COM VÍNCULO. | |
| 2.1 - INTRODUÇÃO | 59 |
| 2.2 - MODELO COM SPINS MISTOS DE MAGNITUDES $1/2$ E 1 . | 59 |
| 1.3 - MODELO COM SPINS MISTOS DE MAGNITUDES $1/2$ E $3/2$. | 68 |
| CONCLUSÕES | 115 |
| APÊNDICE A | 118 |
| APÊNDICE B | 129 |
| REFERÊNCIAS | 144 |

INTRODUÇÃO

Muitos sistemas físicos podem ser modelados através do arranjo espacial em rede, de entidades que interagem com vizinhos próximos (curto alcance). Como exemplo disto, e de interesse neste trabalho, cita-se o modelo resolvido por Ernest Ising em 1925, sugerido por seu orientador Wilhelm Lenz em 1920, com o objetivo de descrever o comportamento macroscópico de materiais ferromagnéticos. Em seu trabalho (Ising, 1925), calculou, exatamente, a função de partição para o modelo em uma dimensão, e mostrou que ela era uma função analítica da temperatura, exceto em $T=0$, determinando que não existe transição de fase no estado ordenado ferromagnético, neste caso. Este resultado foi generalizado, e atualmente sabe-se, que na ausência de interações de longo alcance, nenhum sistema unidimensional pode apresentar transição de fase (Huang, 1987). A solução exata do modelo sobre uma rede quadrada na ausência de campo externo (Onsager, 1944) mostrou a existência de transição de fase em duas dimensões, isto é, que abaixo de uma dada temperatura T_c (ponto de Curie), o sistema apresentava uma magnetização espontânea não nula. Após este trabalho, muitos cálculos foram executados com o objetivo de determinar, a magnetização espontânea e as funções de correlação, considerando outras redes.

Embora este modelo seja simplificado e distante de um sistema ferromagnético real, ele continua importante no estudo das propriedades de sistemas cooperativos, principalmente no ponto crítico, onde os detalhes das interações intermoleculares são irrelevantes, pois é possível conhecer através dele, com precisão, informações sobre o mecanismo de propagação de ordem de longo alcance. Além dos sistemas magnéticos, o modelo de

Ising pode descrever vários tipos de sistemas (Temperley, 1972), tais como ligas binárias, gás na rede, vidros de spins, etc.

Um grande passo em direção à utilização do modelo Ising na descrição de sistemas reais, levando em conta alguns tipos de desordem, é dado quando considera-se o mesmo em redes de spins decoradas, onde entende-se por decoração, o acréscimo de um ou mais sítios, entre dois sítios da rede original. Considera-se a interação entre os sítios que decoram, quando existir mais de um, e entre estes e os sítios da rede. Isto permite o estudo de fenômenos tais como diluição (Syozzi, 1965), o efeito de interações competitivas e reentrâncias (Horiguchi e Gonçalves, 1983; Gonçalves e Horiguchi, 1984; dos Santos e Coutinho, 1987), e supercondutividade em altas temperaturas (dos Santos et al., 1989).

O modelo de Ising decorado foi introduzido por Syozzi (1951), com o objetivo de determinar as relações entre as funções de partição da rede Kagomé e sua dual, a rede favo de mel. O cálculo utilizado na obtenção de tal relação, pode ser feito utilizando-se a técnica transformação-decoração (Syozzi, 1972), que consiste em efetuar o traço sobre as variáveis que decoram uma dada rede, transformando sua função de partição na função de partição de sua dual, com interações efetivas que dependem da temperatura e, conforme seja o caso, podem depender também do campo externo aplicado.

A estatística dos modelos com impurezas, pode ser vista de dois modos distintos, de acordo com a forma de distribuição das mesmas no sistema em estudo a uma dada temperatura (Brout, 1959). Isto é percebido quando se efetua o cálculo da energia livre, onde é necessário levar-se em conta, a forma como o sistema foi resfriado até atingir a temperatura de interesse. Caso o resfriamento tenha se dado rapidamente, de tal modo que as impurezas ficaram presas em uma configuração fora do equilíbrio, a distribuição é dita temperada (caso "quenched"), e a energia livre é proporcional a $\langle \ln \langle Z \rangle \rangle$, onde

s denota média estatística e c , a média configuracional sobre a distribuição das impurezas. Quando o sistema é resfriado de forma lenta, de tal modo que permite as impurezas se acomodarem em uma configuração de equilíbrio a distribuição é dita recozida (caso "annealed"), e a energia livre é proporcional a $\ln\langle Z \rangle_{s,c}$. Falk (1976) mostrou que um sistema "annealed" corresponde a um sistema "quenched" com uma distribuição de impurezas correlacionadas.

Mizumo (1974), introduziu o modelo com campo aleatório (RFM), proposto por Harris et al (1973), para simular a ação de um campo magnético local e aleatório atuando sobre cada spin do modelo de Ising. Imry e Ma (1975), estudaram o modelo de Ising com campo aleatório (RFIM), com o objetivo de determinar a influência da dimensionalidade do sistema no estado ordenado, quando o parâmetro de ordem possui simetria contínua ou discreta. Daí o surgimento do termo dimensionalidade crítica, que pode ser entendida como, a menor dimensão do sistema, acima da qual ocorre fase ordenada a baixa temperatura. O interesse neste modelo aumentou consideravelmente quando Fishman e Aharony (1979) propuseram a equivalência entre o modelo de Ising antiferromagnético diluído em um campo uniforme e o modelo de Ising ferromagnético em um campo aleatório para distribuições temperadas. Esta proposição permitiu a materialização do modelo com campo aleatório, como por exemplo o $\text{Fe}_x\text{Zn}_{1-x}\text{F}_2$ (King e Belanger, 1986). Isto serviu como motivação para a investigação desta equivalência no modelo unidimensional com impurezas recozidas, já que, neste caso, é possível uma solução exata. Nos últimos anos, sistemas RFIM têm sido estudados usando várias técnicas, como por exemplo, teoria de campo efetivo (Borges e Silva, 1984; Bobák et al 1989; Mielnicki et al 1989), grupo de renormalização (Aharony, 1978 e simulação de Monte Carlo (Landau et al 1978; Reed, 1985). Em particular Bricmont e Kupiainen (1987) mostraram de forma rigorosa ser igual a 2 a dimensionalidade crítica, resultado

obtido por Imry e Ma (1975) usando argumentos heurísticos. Para campos aleatórios correlacionados Horiguchi e Gonçalves (1988), mostraram ser este resultado igual a 1.

A aleatoriedade substitucional em sistemas desordenados pode ser implementada de duas maneiras: por sítios ou por ligações. No caso de sistemas magnéticos a aleatoriedade por sítios consiste em trocar os constituintes magnéticos localizados nos sítios da rede, por outros, magnéticos ou não, obedecendo a uma dada distribuição. Na aleatoriedade por ligações, a constante de troca associada a cada ligação da rede pode assumir um conjunto de valores, distribuídos também, de modo probabilístico. Thorpe e Beeman(1976) resolveram exatamente, o modelo de Ising com constante de troca aleatoriamente distribuídas, em redes uni- e bidimensionais, determinando todas as propriedades termodinâmicas, para distribuições recozidas.

Neste trabalho estuda-se o modelo de Ising com spins mistos em um campo aleatório sobre uma rede favo de mel, que corresponde a uma extensão do modelo introduzido por Gonçalves e Stinchcombe (1986), e Gonçalves e Horiguchi (1990) em uma rede quadrada. Este campo aleatório foi gerado para cada sítio, decorando-se ligações, sempre em uma mesma direção na rede. Nestes trabalhos são obtidas soluções exatas para uma distribuição de campo aleatório recozida e simétrica.

O modelo também corresponde a uma generalização do modelo uniforme resolvido exatamente por Gonçalves (1985), que trata dos efeitos da anisotropia uniaxial no modelo de Ising em uma rede favo de mel com spins mistos.

No modelo apresentado aqui, considera-se uma rede favo de mel, composta por duas subredes ocupadas com spins de magnitudes diferentes. É considerada a ação de um campo aleatório, sujeito a uma distribuição discreta, recozida e simétrica. O campo que atua nos sítios da rede é gerado por uma decoração de campo aleatório, introduzida entre sítios

pertencentes a subredes distintas. Considera-se, ainda, o efeito da anisotropia sobre o modelo.

O método e os resultados deste trabalho foram divididos em dois Capítulos. No primeiro, estuda-se o modelo descrito acima, em duas situações com campo aleatório sem vínculo, uma com spins de magnitude $1/2$ e 1 , e a outra, com $1/2$ e $3/2$. No segundo Capítulo, resolve-se o mesmo problema, impondo-se uma condição de vínculo ao campo. Os resultados são apresentados no final de cada Capítulo, e são obtidos utilizando o método numérico de Newton-Raphson(ver por ex. J. Villadsen, 1970).

CAPÍTULO 01

MODELO DE ISING COM SPINS MISTOS EM UM CAMPO ALEATÓRIO SEM VÍNCULO.

1.1. INTRODUÇÃO.

Neste capítulo, estuda-se o modelo de Ising com spins mistos sobre uma rede favo de mel onde as duas subredes são ocupadas com spins de Ising de magnitudes diferentes. É considerada a ação de um campo aleatório, atendendo a uma distribuição discreta e recozida, sem vínculo, nas situações com e sem anisotropia uniaxial. O modelo é resolvido exatamente, seguindo a técnica desenvolvida por Gonçalves & Horiguchi(1990), nos casos em que as subredes Λ_A e Λ_B , como mostra a figura (1.1), são ocupadas, respectivamente, com spins $1/2$ e 1 , e, $1/2$ e $3/2$.

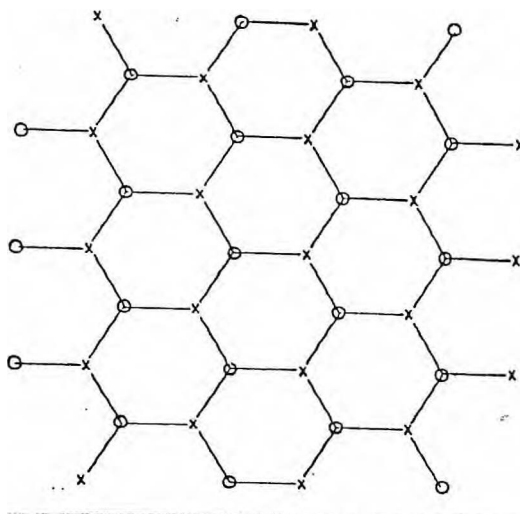


figura (1.1)(Λ_A com sítios marcados com "x" e Λ_B com sítios marcados com "o").

1.2. MODELO COM SPINS DE MAGNITUDES 1/2 e 1.

O campo aleatório é obtido decorando-se todas as ligações da rede, e usando-se o mesmo procedimento introduzido por (Gonçalves & Horiguchi, 1990), a Hamiltoniana pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 H = & - \sum_{(ijk)} J \sigma_j \tau_k (P_{jk}^i + \bar{P}_{jk}^i) - \sum_{(ijk)} \frac{h_i}{3} (\sigma_j + \tau_k) (P_{jk}^i - \bar{P}_{jk}^i) \\
 & - \sum_{(ijk)} \mu_i (P_{jk}^i + \bar{P}_{jk}^i) - \sum_{(ijk)} D \tau_k^2 (P_{jk}^i + \bar{P}_{jk}^i) \quad (1.2.1)
 \end{aligned}$$

onde, os sítios j e k são os vizinhos mais próximos pertencentes a subredes diferentes, μ_i são os pseudo potenciais químicos que controlam as distribuições do parâmetro aleatório h_i , D é a anisotropia uniaxial, P_{jk}^i e \bar{P}_{jk}^i são operadores projetores num subespaço de $2n$ dimensões (i variando de 1 a n) associados com a ligação jk , σ 's e τ 's são spins de Ising de magnitudes 1/2 e 1. O fator (1/3) que aparece no segundo termo da Eq.(1.2.1) é colocado para se fazer o valor do campo aleatório, em um dado spin, igual a h_i . Para uma dada ligação jk , os projetores satisfazem as relações:

$$P_{jk}^i P_{jk}^i = \delta_{i1} P_{jk}^i, \quad (1.2.1a)$$

$$\bar{P}_{jk}^i \bar{P}_{jk}^i = \delta_{i1} \bar{P}_{jk}^i, \quad (1.2.1b)$$

$$P_{jk}^i \bar{P}_{jk}^i = 0, \quad (1.2.1c)$$

$$\sum_i (\bar{P}_{jk}^i + P_{jk}^i) = I_{jk}, \quad (1.2.1d)$$

onde, I_{jk} é o operador identidade para o subespaço de $2n$

dimensões associado a ligação jk .

A função de partição é dada por:

$$Z = \text{Tr} \left[e^{-\beta H} \right] \quad (1.2.2)$$

onde $\beta = (k_B T)^{-1}$, k_B é a constante de Boltzmann, T é a temperatura absoluta e Tr significa a soma sobre todas as configurações permitidas pelo conjunto das variáveis $\{ P_{jk}^i, \bar{P}_{jk}^i, \sigma_j, \tau_k \}$.

O campo aleatório h_k que atua sobre o spin τ_k é dado por:

$$h_k = \sum_{(j \in \Lambda_{kk})} \sum_{i=1}^n h_i (P_{jk}^i - \bar{P}_{jk}^i) \quad (1.2.3)$$

onde $\Lambda_{kk} (\Lambda_{kk} \subset \Lambda_k)$ é o conjunto de sítios da rede, vizinhos mais próximos do sítio k . Uma expressão similar pode ser definida para o campo atuando sobre o spin σ_j , que dará o mesmo resultado para o valor médio do campo.

A função de partição é obtida considerando-se o traço parcial sobre as variáveis que decoram uma dada ligação conectando os sítios j e k , obtendo-se (Gonçalves & Horiguchi, 1990):

$$\text{Tr}_{\{P_{jk}^i, \bar{P}_{jk}^i\}} \left[e^{-\beta H_{jk}} \right] = e^{\beta J \sigma_j \tau_k + \beta D \tau_k^2} (\{ z_{jk} h_i, \mu_i \}) \quad (1.2.4)$$

onde H_{jk} é dado por:

$$H_{jk} = - \sum \left\{ J\sigma_j\tau_k(P_{jk}^i + \bar{P}_{jk}^i) + h_1 z_{jk}(P_{jk}^i - \bar{P}_{jk}^i) + \mu_1(P_{jk}^i + \bar{P}_{jk}^i) + D\tau_k^2(P_{jk}^i + \bar{P}_{jk}^i) \right\} , \quad (1.2.5)$$

com,

$$z_{jk} = (\sigma_j + \tau_k) / 3 , \quad (1.2.6)$$

e $f(\{zh_1, \mu_1\})$ dado por:

$$f(\{zh_1, \mu_1\}) = \sum_{i=1}^n 2e^{\beta\mu_1} \cosh(\beta zh_1) . \quad (1.2.7)$$

Da equação anterior pode-se definir $f(\{z_{jk}h_1, \mu_1\})$ como sendo:

$$f(\{z_{jk}h_1, \mu_1\}) = r_1 e^{\beta J\sigma_j\tau_k + \beta D'\tau_k^2} , \quad (1.2.8)$$

e daí, obtém-se:

$$J = \frac{k_B T}{2} \ln \left[\frac{f(\{2h_1/3, \mu_1\})}{f(\{0, \mu_1\})} \right] , \quad (1.2.9)$$

$$D' = \frac{k_B T}{2} \ln \left[\frac{f(\{0, \mu_1\})f(\{2h_1/3, \mu_1\})}{(f(\{h_1/3, \mu_1\}))^2} \right] , \quad (1.2.10)$$

$$r_1 = f(\{h_1/3, \mu_1\}) . \quad (1.2.11)$$

Dos resultados obtidos pelas Eqs.(1.2.8) a (1.2.11), pode-se reescrever a Eq.(1.2.4) como:

$$\text{Tr}_{\left\{ \begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ P_{jk} & \bar{P}_{jk} \end{smallmatrix} \right\}} \left[e^{-\beta H_{jk}} \right] = r_1 e^{\beta(J+J)\sigma_j\tau_k + \beta(D+D')\tau_k^2} . \quad (1.2.12)$$

A função de partição pode então ser reescrita a partir da Eq.(1.2.12) na forma:

$$Z = r_1^{2N} \sum_{\{\sigma, \tau\}} \exp(-\beta H) . \quad (1.2.13)$$

onde N é o número de sítios de cada subrede e H é a Hamiltoniana do modelo de Ising efetivo dada por:

$$H = \sum_{(j \in \Lambda_A, k \in \Lambda_B)} (J+J') \sigma_j \tau_k - \sum_{(k \in \Lambda_B)} (D+D') \tau_k^2 \quad (1.2.14)$$

O valor médio do campo aplicado no sítio k é obtido, como no cálculo anterior, considerando-se o traço parcial sobre os operadores P_{jk}^i e \bar{P}_{jk}^i . Desta forma obtém-se:

$$\text{Tr}_{\{P_{jk}^i, \bar{P}_{jk}^i\}} \left[e^{-\beta H_{jk} P_{jk}^i} \right] = e^{\beta J \sigma_j \tau_k + \beta D \tau_k^2 + \beta h_1 z_{jk} + \beta \mu_1} . \quad (1.2.15)$$

$$\text{Tr}_{\{P_{jk}^i, \bar{P}_{jk}^i\}} \left[e^{-\beta H_{jk} \bar{P}_{jk}^i} \right] = e^{\beta J \sigma_j \tau_k + \beta D \tau_k^2 - \beta h_1 z_{jk} + \beta \mu_1} , \quad (1.2.16)$$

as quais podem ser escritas na forma:

$$\text{Tr}_{\{P_{jk}^i, \bar{P}_{jk}^i\}} \left[e^{-\beta H_{jk} P_{jk}^i} \right] = r_1 e^{\beta (J+J') \sigma_j \tau_k + \beta (D+D') \tau_k^2} X(X_1 \sigma_j \tau_k + X_2 \sigma_j + X_3 \tau_k + X_4 \tau_k^2 + X_5) , \quad (1.2.17)$$

$$\text{Tr}_{\{P_{jk}^1, \bar{P}_{jk}^1\}} \left[e^{-\beta H_{jk} \bar{P}_{jk}^1} \right] \equiv r_1 e^{\beta (J+J') \sigma_j \tau_k + \beta (D+D') \tau_k^2} X(\bar{x}_1 \sigma_j \tau_k + \bar{x}_2 \sigma_1 + \bar{x}_3 \tau_k + \bar{x}_4 \tau_k^2 + \bar{x}_5) \quad (1.2.18)$$

onde x 's e \bar{x} 's são dados por:

$$x_1 = \bar{x}_1 = \frac{e^{\beta \mu_1}}{2} \left[-\frac{1}{f(\{0, \mu_1\})} + \frac{\cosh(2\beta h_1/3)}{f(\{2h_1/3, \mu_1\})} \right], \quad (1.2.19)$$

$$x_2 = x_3 = -\bar{x}_2 = -\bar{x}_3 = \frac{e^{\beta \mu_1} \sinh(\beta h_1/3)}{f(\{h_1/3, \mu_1\})} \quad (1.2.20)$$

$$x_4 = \bar{x}_4 = \frac{e^{\beta \mu_1}}{2} \left[-\frac{2 \cosh(\beta h_1/3)}{f(\{h_1/3, \mu_1\})} + \left[\frac{1}{f(\{0, \mu_1\})} + \frac{\cosh(2\beta h_1/3)}{f(\{2h_1/3, \mu_1\})} \right] \right], \quad (1.2.21)$$

$$x_5 = \bar{x}_5 = \frac{e^{\beta \mu_1} \cosh(\beta h_1/3)}{f(\{h_1/3, \mu_1\})} \quad (1.2.22)$$

Usando-se os resultados anteriores pode-se escrever as médias dos operadores P_{jk}^1 e \bar{P}_{jk}^1 , como:

$$\langle P_{jk}^1 \rangle = \varepsilon x_1 + x_2 (\langle \sigma_j \rangle + \langle \tau_k \rangle) + x_4 \langle \tau_k^2 \rangle + x_5, \quad (1.2.23)$$

e,

$$\langle \bar{P}_{jk}^1 \rangle = \varepsilon x_1 - x_2 (\langle \sigma_j \rangle + \langle \tau_k \rangle) + x_4 \langle \tau_k^2 \rangle + x_5, \quad (1.2.24)$$

onde, ε é a função de correlação entre os vizinhos mais próximos da rede favo de mel ($\varepsilon \equiv \langle \sigma_j \tau_k \rangle$).

Destes resultados, impondo-se a condição que a distribuição de campo é simétrica, ou seja $\langle P_{jk}^1 \rangle = \langle \bar{P}_{jk}^1 \rangle$, pode-se escrever o valor médio do campo aplicado no sítio k como:

$$\langle h_k \rangle = \sum_{i=1}^{2n} h_i \left\{ x_i \varepsilon + x_4 \langle \tau_k^2 \rangle + x_5 \right\} , \quad (1.2.25)$$

onde na expressão anterior, o campo aleatório foi admitido explicitamente variando de $-h$ a h . A condição de simetria da distribuição do campo aleatório somente é satisfeita para temperaturas maiores ou iguais a temperatura crítica, uma vez que apenas neste intervalo de temperatura, tem-se (Gonçalves, 1985):

$$\langle \sigma_j \rangle = \langle \tau_k \rangle = 0 . \quad (1.2.26)$$

Deve ainda ser notado que a temperatura crítica é determinada impondo-se a condição acima.

A partir dos valores obtidos para as variáveis x 's, nas Eqs.(1.2.19) a (1.2.22), obtem-se:

$$\begin{aligned} \langle h_k \rangle = & \sum_{i=1}^{2n} h_i e^{\beta \mu_i} \left\{ \frac{\varepsilon}{2} \left[- \frac{1}{f(\{0, \mu_i\})} + \frac{\cosh(2\beta h_i/3)}{f(\{2h_i/3, \mu_i\})} \right] + \right. \\ & + \frac{\langle \tau_k^2 \rangle}{2} \left[- \frac{2 \cosh(\beta h_i/3)}{f(\{h_i/3, \mu_i\})} + \left[\frac{1}{f(\{0, \mu_i\})} + \frac{\cosh(2\beta h_i/3)}{f(\{2h_i/3, \mu_i\})} \right] \right] + \\ & \left. + \frac{e^{\beta \mu_i} \cosh(\beta h_i/3)}{f(\{h_i/3, \mu_i\})} \right\} . \quad (1.2.27) \end{aligned}$$

Este resultado pode ser reescrito na forma análoga a obtida por

Gonçalves & Horiguchi (1990),

$$\langle h_k \rangle \equiv \sum_{i=1}^{2n} h_i p(h_i) \equiv \int \left\{ \sum_{i=1}^{2n} h p(h) \delta(h-h_i) \right\} dh, \quad (1.2.28)$$

onde a distribuição de campo $p(h)$ é simétrica e satisfaz a seguinte condição de normalização,

$$\int \mathcal{P}(h) dh \equiv \int \left\{ \sum_{i=1}^{2n} h p(h) \delta(h-h_i) \right\} dh = 1. \quad (1.2.29)$$

Das Eqs.(1.2.27) e (1.2.28), obtem-se para o valor de $p(h_i)$, o seguinte resultado:

$$p(h_i) = e^{\beta\mu_1} \left\{ \frac{\langle \tau_k^2 \rangle - \varepsilon}{f(\{0, \mu_1\})} + \frac{\cosh(2\beta h_i/3)}{f(\{2h_i/3, \mu_1\})} (\langle \tau_k^2 \rangle + \varepsilon) + \frac{2\cosh(\beta h_i/3)}{f(\{h_i/3, \mu_1\})} (1 - \langle \tau_k^2 \rangle) \right\}. \quad (1.2.30)$$

Usando-se as Eqs.(1.2.9) e (1.2.10) na expressão anterior, tem-se:

$$p(h_i) \left\{ (\langle \tau_k^2 \rangle - \varepsilon) + (\langle \tau_k^2 \rangle + \varepsilon) e^{-2\beta J} \cosh(2\beta h_i/3) + 2(1 - \langle \tau_k^2 \rangle) e^{\beta J - \beta D'} \cosh(\beta h_i/3) \right\}^{-1} = \frac{e^{\beta\mu_1}}{f(\{0, \mu_1\})}, \quad (1.2.31)$$

e,

$$p(h_i) \left\{ e^{2\beta J} (\langle \tau_k^2 \rangle - \varepsilon) + (\langle \tau_k^2 \rangle + \varepsilon) \cosh(2\beta h_i/3) + 2(1 - \langle \tau_k^2 \rangle) e^{\beta J + \beta D'} \cosh(\beta h_i/3) \right\}^{-1} = \frac{e^{\beta\mu_1}}{f(\{2h_i/3, \mu_1\})}. \quad (1.2.32)$$

Os potenciais químicos são eliminados das Eqs.(1.2.31) e (1.2.32) usando-se a Eq.(1.2.7), e levando-se em consideração a condição de normalização, estas equações podem ser reescritas na forma:

$$\int \mathcal{P}(h) dh \left\{ \frac{2(1-Y_1)+Y_2\varepsilon-Y_3\langle\tau_k^2\rangle}{2Y_1-Y_2\varepsilon+Y_3\langle\tau_k^2\rangle} \right\} = 0 , \quad (1.2.33)$$

e,

$$\int \mathcal{P}(h) dh \left\{ \frac{2(1-Y_1-Y_2)+Y_2\varepsilon-Y_3\langle\tau_k^2\rangle}{2Y_1-Y_2\varepsilon+Y_3\langle\tau_k^2\rangle} \right\} = 0 , \quad (1.2.34)$$

com,

$$Y_1 = e^{\beta D' - \beta J} \cosh(\beta h/3) , \quad (1.2.35)$$

$$Y_2 = 1 + e^{-2\beta J} - 2e^{-2\beta D'} Y_1^2 , \quad (1.2.36)$$

$$Y_3 = 2 - 2Y_1 - Y_2 . \quad (1.2.37)$$

A correlação ε e $\langle\tau_k^2\rangle$ são expressas em termos da correlação entre os vizinhos mais próximos $\langle\sigma_i\sigma_j\rangle_{ef}$ e da magnetização do modelo de Ising com spin 1/2 numa rede triangular, cuja constante efetiva de troca é dada por (Gonçalves, 1985):

$$J_{ef} = \frac{k_B T}{4} \ln \left\{ \frac{2e^{\beta(D+D')} \cosh(3\beta(J+J')) + 1}{2e^{\beta(D+D')} \cosh(\beta(J+J')) + 1} \right\} , \quad (1.2.38)$$

e neste caso, o sistema somente apresenta ordem ferromagnética. Resultados explícitos para ε e $\langle \tau_k^2 \rangle$ são mostrados no Apêndice A.

A temperatura crítica T_c , é obtida introduzindo-se o valor crítico exato para βJ_{ef} na rede triangular, $\exp(4\beta J_{ef}^c) = 3$, e a correlação crítica entre os vizinhos mais próximos, $\langle \sigma_1 \sigma_3 \rangle_{ef}^c = 2/3$ (Stephenson, 1964). Para essa temperatura, substituindo-se estes valores nas Eqs.(A13) e (A19) conclui-se que ε e $\langle \tau_k^2 \rangle$ são dados por:

$$\varepsilon = \frac{3\sinh(3\beta(J+J')) + \sinh(\beta(J+J'))}{6(\cosh(3\beta(J+J')) - \cosh(\beta(J+J')))} , \quad (1.2.39)$$

e,

$$\langle \tau_k^2 \rangle = \frac{\cosh(3\beta(J+J')) + \cosh(\beta(J+J'))}{2(\cosh(3\beta(J+J')) - \cosh(\beta(J+J')))} \quad (1.2.40)$$

Substituindo os resultados das Eqs.(1.2.39) e (1.2.40), nas Eqs.(1.2.33) e (1.2.34), a temperatura crítica é então obtida numericamente, resolvendo-se o sistema formado por essas equações mais a Eq.(1.2.38), para uma dada distribuição de campo aleatório.

Para a distribuição trimodal

$$\mathcal{P}(h') = \frac{(1-p)}{2} [\delta(h'-h) + \delta(h'+h)] + p\delta(h') , \quad (1.2.41)$$

o sistema a ser resolvido é explicitamente dado pelas equações:

$$(1-p) \left\{ \frac{2(1-y_1) + y_2\varepsilon - y_3\langle \tau_k^2 \rangle}{2y_1 - y_2\varepsilon + y_3\langle \tau_k^2 \rangle} \right\} + p \left\{ \frac{2(1-y_1') + y_2\varepsilon - y_3\langle \tau_k^2 \rangle}{2y_1' - y_2\varepsilon + y_3\langle \tau_k^2 \rangle} \right\} = 0, \quad (1.2.42)$$

$$(1-p) \left\{ \frac{2(1-Y_1-Y_2)+Y_2\varepsilon-Y_3\langle\tau_k^2\rangle}{2Y_1-Y_2\varepsilon+Y_3\langle\tau_k^2\rangle} \right\} + p \left\{ \frac{2(1-Y_1'-Y_2)+Y_2\varepsilon-Y_3\langle\tau_k^2\rangle}{2Y_1'-Y_2\varepsilon+Y_3\langle\tau_k^2\rangle} \right\} = 0, \quad (1.2.43)$$

onde $Y_1' = e^{\beta D' - \beta J}$.

As equações acima reproduzem os resultados obtidos por Gonçalves(1985), para $p=1.0$, ou $\alpha(\alpha \equiv 2h/3J)=0$ com p qualquer, onde a temperatura de transição como função da anisotropia($\gamma \equiv D/J$) é escrita na forma:

$$\frac{1 + z^6 + z^{3+\gamma}}{z^2 + z^4 + z^{3+\gamma}} = 3, \quad (1.2.44)$$

onde

$$z = \exp(- \beta J) . \quad (1.2.45)$$

A solução numérica do sistema formado pelas Eqs.(1.2.42), (1.2.43) e (1.2.38), é mostrado nas Figs. 1.1 a 1.18. Os resultados apresentados nas Figs. 1.1, 1.3, 1.5 foram recentemente considerados por Pereira & Gonçalves, (1995).

Nas Figs. 1.1-1.7 é mostrada a temperatura de transição $T_c(T_c \equiv k_B T_c / J)$ como função de p para vários valores de $\alpha(\alpha \equiv 2h/3J)$ e diferentes valores de $\gamma(\gamma \equiv D/J)$. Conclui-se dos resultados apresentados, que independente do sinal de γ o campo aleatório favorece o ordenamento do sistema, com um comportamento semelhante ao apresentado pelo modelo para spin 1/2 (Gonçalves & Horiguchi, 1990). Como esperado, a temperatura de transição, para um dado p , aumenta para $\gamma > 0$ e diminui para $\gamma < 0$.

Nas Figs. 1.8-1.18 é mostrada a temperatura de transição como função de γ para vários valores de α e

diferentes valores de p . Observa-se que existe um γ crítico, γ_c , abaixo do qual o sistema deixa de ter ordem, dependente de α e de p . Pode-se mostrar que γ_c é explicitamente dado pelas expressões:

$$\gamma_c = -3 - \frac{3\alpha}{2} \quad \text{para } p = 0 \quad (1.2.46)$$

$$\gamma_c = -3 - \alpha \quad \text{para } 0 < p < \frac{1}{2}, \quad (1.2.47)$$

$$\gamma_c = -3 - \frac{\alpha}{2} \quad \text{para } p = \frac{1}{2}, \quad (1.2.48)$$

$$\gamma_c = -3 \quad \text{para } p > \frac{1}{2}, \quad (1.2.49)$$

sendo os detalhes do cálculo apresentados no apêndice B. Deve ser notado que para campo nulo, $p=1$ ou $\alpha=0$, $\gamma_c=-3$ que é o resultado obtido por Gonçalves(1985). Os valores de γ_c mostrados nas Figs. 1.8 a 1.14, satisfazem as equações acima. Em particular deve também ser notado que para $p>1/2$, γ_c é independente de α , sendo este resultado mostrado nas Figs. 1.15 a 1.18. Além disso, como esperado, quando $p \rightarrow 1$ as curvas tendem ao resultado sem campo (Gonçalves, 1985).

1.3. MODELO COM SPINS MISTOS DE MAGNITUDES 1/2 e 3/2.

Os resultados para este caso são obtidos seguindo os mesmos procedimentos adotados na seção anterior. Assim considerando-se spins de Ising de magnitudes 1/2 e 3/2, obtém-se para o traço parcial dos operadores P_{jk}^1 e $P_{jk}^{3/2}$ o resultado:

$$\text{Tr}_{\substack{1 \\ (P_{jk}^1, P_{jk}^{3/2})}} \left[e^{-\beta H_{jk}} \right] = e^{\beta J \sigma_j \tau_k + \beta D \tau_k^2} (\{ z_{jk} h_1, \mu_1 \}) , \quad (1.3.1)$$

onde H_{jk} é dado por:

$$H_{jk} = - \sum \left\{ J\sigma_j\tau_k(P_{jk}^i + \bar{P}_{jk}^i) + h_1 z_{jk}(P_{jk}^i - \bar{P}_{jk}^i) + \mu_1(P_{jk}^i + \bar{P}_{jk}^i) + D\tau_k^2(P_{jk}^i + \bar{P}_{jk}^i) \right\}, \quad (1.3.2)$$

com,

$$z_{jk} = (\sigma_j + \tau_k) / 3, \quad (1.3.3)$$

e $f(\{zh_1, \mu_1\})$ dado pela Eq. (1.2.7).

Deste, pode-se escrever:

$$f(\{z_{jk}h_1, \mu_1\}) \cong r_2 e^{\beta J' \sigma_j \tau_k + \beta D'' \tau_k^2 + \beta D_1 \sigma_j \tau_k^3}, \quad (1.3.4)$$

e daí, obtem-se:

$$J' = 2D'' - \frac{13}{4} D_1, \quad (1.3.5)$$

$$D'' = \frac{k_B T}{4} \ln \left[\frac{f(\{5h_1/6, \mu_1\})}{f(\{h_1/2, \mu_1\})} \right], \quad (1.3.6)$$

$$D_1 = \frac{k_B T}{3} \ln \left[f(\{h_1/6, \mu_1\}) \left(\frac{f(\{5h_1/6, \mu_1\})}{(f(\{h_1/2, \mu_1\}))^3} \right)^{1/2} \right], \quad (1.3.7)$$

$$r_2 = \left[f(\{h_1/6, \mu_1\}) \left(\frac{(f(\{h_1/2, \mu_1\}))^9}{f(\{5h_1/6, \mu_1\})} \right)^{1/8} \right]^{1/2}. \quad (1.3.8)$$

Substituindo-se estes resultados na Eq.(1.2.4), obtém-se:

$$\text{Tr}_{\left(\begin{smallmatrix} i \\ P_{jk} \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} -i \\ \bar{P}_{jk} \end{smallmatrix}\right)} \left[e^{-\beta H_{jk}} \right] = r_2 e^{\beta(J+J'')\sigma_j\tau_k + \beta(D+D'')\tau_k^2 + \beta D_1\sigma_j\tau_k^3}. \quad (1.3.9)$$

A função de partição, dada pela equação (1.2.13), é reescrita como:

$$Z = r_2^{2N} \sum_{\{\sigma, \tau\}} \exp(-\beta H'). \quad (1.3.10)$$

onde, N é o número de sítios de cada sub-rede e H' é a Hamiltoniana do modelo de Ising efetivo, dada por:

$$H' = \sum_{(j \in \Lambda_A, k \in \Lambda_B)} (J+J'')\sigma_j\tau_k - \sum_{(k \in \Lambda_B)} (D+D'')\tau_k^2 + \sum_{(j \in \Lambda_A, k \in \Lambda_B)} D_1\sigma_j\tau_k^3 \quad (1.3.11)$$

O valor médio do campo aplicado no sítio k é obtido, como no caso anterior, considerando-se o traço parcial sobre os operadores P_{jk}^i e \bar{P}_{jk}^i . Desta forma, as Eqs.(1.2.15) e (1.2.16) são dadas por:

$$\text{Tr}_{\left(\begin{smallmatrix} i \\ P_{jk} \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} -i \\ \bar{P}_{jk} \end{smallmatrix}\right)} \left[e^{-\beta H_{jk} P_{jk}^i} \right] \equiv r_2 e^{\beta(J+J'')\sigma_j\tau_k + \beta D''\tau_k^2 + \beta D_1\sigma_j\tau_k^3} X$$

$$X(X'_1\sigma_j\tau_k + X'_2\sigma_j + X'_3\tau_k + X'_4\tau_k^2 + X'_5\sigma_j\tau_k^2 + X'_6\tau_k^3 + X'_7\sigma_j\tau_k^3 + X'_8) , \quad (1.3.12)$$

$$\text{Tr}_{\substack{i \\ (P_{jk}, P_{jk}^{-i})}} \left[e^{-\beta H_{jk} \bar{P}_{jk}^i} \right] \equiv r_2 e^{\beta (J+J') \sigma_j \tau_k + \beta D'' \tau_k^2 + \beta D_1 \sigma_j \tau_k^3} X$$

$$X(\bar{x}'_1 \sigma_j \tau_k + \bar{x}'_2 \sigma_j + \bar{x}'_3 \tau_k + \bar{x}'_4 \tau_k^2 + \bar{x}'_5 \sigma_j \tau_k^2 + \bar{x}'_6 \tau_k^3 + \bar{x}'_7 \sigma_j \tau_k^3 + \bar{x}'_8) , \quad (1.3.13)$$

onde x' 's e \bar{x}' 's, são dados por:

$$x'_1 = \bar{x}'_1 = \frac{e^{\beta \mu_1}}{12} \left[-13 A_1 + \frac{27}{2} A_2 - \frac{A_3}{2} \right] \quad (1.3.14)$$

$$x'_2 = -\bar{x}'_2 = \frac{e^{\beta \mu_1}}{16} \left[10 B_1 + 9 B_2 - B_3 \right] , \quad (1.3.15)$$

$$x'_3 = -\bar{x}'_3 = \frac{e^{\beta \mu_1}}{12} \left[-14 B_1 + \frac{27}{2} B_2 - \frac{B_3}{2} \right] \quad (1.3.16)$$

$$x'_4 = \bar{x}'_4 = \frac{e^{\beta \mu_1}}{4} \left[-A_2 + A_3 \right] , \quad (1.3.17)$$

$$x'_5 = \bar{x}'_5 = \frac{e^{\beta \mu_1}}{4} \left[-2 B_1 - B_2 + B_3 \right] \quad (1.3.18)$$

$$x'_6 = -\bar{x}'_6 = \frac{e^{\beta \mu_1}}{6} \left[4 B_1 - 3 B_2 + B_3 \right] \quad (1.3.19)$$

$$x'_7 = \bar{x}'_7 = \frac{e^{\beta \mu_1}}{6} \left[4 A_1 - 3 A_2 + A_3 \right] \quad (1.3.20)$$

$$x'_8 = \bar{x}'_8 = \frac{e^{\beta \mu_1}}{16} \left[8 A_1 + 9 A_2 - A_3 \right] \quad (1.3.21)$$

com,

$$A_1 = \frac{\cosh(\beta h_1/6)}{f(\{h_1/6, \mu_1\})} \quad , \quad (1.3.22)$$

$$A_2 = \frac{\cosh(\beta h_1/2)}{f(\{h_1/2, \mu_1\})} \quad , \quad (1.3.23)$$

$$A_3 = \frac{\cosh(5\beta h_1/6)}{f(\{5h_1/6, \mu_1\})} \quad , \quad (1.3.24)$$

e onde parâmetros B's são obtidos dos parâmetros A's, fazendo-se a troca da função cosh por sinh.

Usando-se os resultados anteriores, pode-se escrever as médias dos operadores P_{jk}^i e \bar{P}_{jk}^i , como:

$$\begin{aligned} \langle P_{jk}^i \rangle = & \varepsilon' x'_1 + x'_2 \langle \sigma_j \rangle + x'_3 \langle \tau_k \rangle + x'_4 \langle \tau_k^2 \rangle + x'_5 \langle \sigma_j \tau_k^2 \rangle + \\ & + x'_6 \langle \tau_k^3 \rangle + x'_7 \langle \sigma_j \tau_k^3 \rangle + x'_8 \quad , \end{aligned} \quad (1.3.25)$$

$$\begin{aligned} e, \\ \langle \bar{P}_{jk}^i \rangle = & \varepsilon' x'_1 - x'_2 \langle \sigma_j \rangle - x'_3 \langle \tau_k \rangle + x'_4 \langle \tau_k^2 \rangle - x'_5 \langle \sigma_j \tau_k^2 \rangle + \\ & - x'_6 \langle \tau_k^3 \rangle + x'_7 \langle \sigma_j \tau_k^3 \rangle + x'_8 \quad , \end{aligned} \quad (1.3.26)$$

onde, ε' é a função de correlação entre os vizinhos mais próximos da rede favo de mel.

Destes resultados, impondo-se a condição que a distribuição de campo é simétrica, como no caso descrito na seção 1.2, mostra-se que o valor médio do campo aplicado no sítio k, é dado por:

$$\langle h_k \rangle = \sum_{(j \in \Lambda_{kk})} \sum_{i=1}^{2n} h_i \left\{ x'_1 \varepsilon' + x'_4 \langle \tau_k^2 \rangle + x'_7 \langle \sigma_j \tau_k^3 \rangle + x'_8 \right\} \quad , \quad (1.3.27)$$

onde o campo aleatório foi admitido explicitamente, variando de $-h$ a h . Também neste caso, a condição de simetria da distribuição de campo aleatório, somente é satisfeita para temperaturas maiores ou iguais a temperatura crítica, pois somente neste intervalo de temperatura, tem-se:

$$\langle \sigma_j \rangle' = \langle \tau_k \rangle' = \langle \sigma_j \tau_k^2 \rangle' = \langle \tau_k^3 \rangle' = 0 , \quad (1.3.28)$$

uma vez que pode ser mostrado que $\langle \sigma_j \tau_k^2 \rangle'$ e $\langle \tau_k^3 \rangle'$ também são proporcionais a $\langle \sigma_j \rangle'$ (Gonçalves, 1985).

Dos resultados obtidos para as variáveis x 's o valor médio do campo aleatório será por:

$$\langle h_k \rangle = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{n=1}^3 h_i e^{\beta \mu_i} C_n A_n , \quad (1.3.29)$$

onde os C 's são dados por:

$$C_1 = - \frac{13}{6} \varepsilon' + \frac{2}{3} \langle \sigma_j \tau_k^3 \rangle' + 1 , \quad (1.3.30)$$

$$C_2 = \frac{9}{4} \varepsilon' - \frac{1}{2} \langle \tau_k^2 \rangle' - \langle \sigma_j \tau_k^3 \rangle' + \frac{9}{8} , \quad (1.3.31)$$

$$C_3 = - \frac{1}{12} \varepsilon' + \frac{1}{2} \langle \tau_k^2 \rangle' + \frac{1}{3} \langle \sigma_j \tau_k^3 \rangle' - \frac{1}{8} . \quad (1.3.32)$$

Seguindo o mesmo procedimento adotado na seção 1.2, considerando a distribuição de campo $\mathcal{P}(h)$ simétrica, mostra-se que esta satisfaz a condição de normalização, Eq.(1.2.29), e pode-se escrever que:

$$p(h_1) = \sum_{n=1}^3 e^{\beta\mu_1} C_n A_n . \quad (1.3.33)$$

Das Eqs.(1.3.6) e (1.3.7), e seguindo o mesmo procedimento adotado na seção (1.2) para eliminar os potenciais químicos, e levando em consideração a condição de normalização descrita anteriormente, tem-se:

$$\int \mathcal{P}(h) dh \left\{ 1 - \frac{2 y_2' \cosh(\beta h/2)}{V} \right\} = 0 , \quad (1.3.34)$$

e,

$$\int \tilde{\mathcal{P}}(h) dh \left\{ 1 - \frac{2 \cosh(5\beta h/6)}{V} \right\} = 0 , \quad (1.3.35)$$

com,

$$V = C_1 y_1' \cosh(\beta h/6) + C_2 y_2' \cosh(\beta h/2) + C_3 \cosh(5\beta h/6) , \quad (1.3.36)$$

$$y_1' = e^{3\beta J' + 27\beta D_1/4} , \quad (1.3.37)$$

$$y_2' = e^{2\beta J' + 13\beta D_1/2} . \quad (1.3.38)$$

ε' , $\langle \tau_k^2 \rangle'$ e $\langle \sigma_j \tau_k^3 \rangle'$ podem ser expressas em termos da correlação entre os vizinhos mais próximos $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\varepsilon'}$ e da magnetização do modelo de Ising com spin 1/2 numa rede triangular, com constante efetiva de troca dada por (Gonçalves, 1985):

$$J_{\varepsilon'} = \frac{k_B T}{4} \ln(Z_1) , \quad (1.3.39)$$

$$Z_1 = \frac{Z_2 \cosh(9\beta J_2/2) + \cosh(3\beta J_1/2)}{Z_2 \cosh(3\beta J_2/2) + \cosh(\beta J_1/2)} , \quad (1.3.40)$$

onde,

$$Z_2 = e^{\beta(2D+J'+13D_1/4)} , \quad (1.3.41)$$

$$J_1 = J+J'+D_1/4 , \quad (1.3.42)$$

$$J_2 = J+J'+9D_1/4 , \quad (1.3.43)$$

e neste caso, o sistema também só apresenta ordem ferromagnética. Resultados explícitos para ε' , $\langle \tau_k^2 \rangle'$ e $\langle \sigma_j \tau_k^3 \rangle'$, são mostrados no apêndice A.

A temperatura crítica T_c , é obtida introduzindo-se os valores críticos exatos de βJ_{ef}^c e $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\text{ef}}^c$ para a rede triangular (Stephenson, 1964). Substituindo-se esses valores nas equações descritas na seção A.2 do Apêndice A. Tem-se que ε' , $\langle \tau_k^2 \rangle'$ e $\langle \sigma_j \tau_k^3 \rangle'$ são dados por:

$$\varepsilon' = \frac{1}{8} \left\{ \frac{9Z_2 \sinh(9\beta J_2/2) + 3\sinh(3\beta J_1/2)}{Z_2 \cosh(9\beta J_2/2) + \cosh(3\beta J_1/2)} + \frac{1}{3} \frac{3Z_2 \sinh(3\beta J_2/2) + \sinh(\beta J_1/2)}{Z_2 \cosh(3\beta J_2/2) + \cosh(\beta J_1/2)} \right\} , \quad (1.3.44)$$

$$\langle \tau_k^2 \rangle' = \frac{1}{16} \left\{ \frac{27Z_2 \cosh(9\beta J_2/2) + 3\cosh(3\beta J_1/2)}{Z_2 \cosh(9\beta J_2/2) + \cosh(3\beta J_1/2)} + \frac{9Z_2 \cosh(3\beta J_2/2) + \cosh(\beta J_1/2)}{Z_2 \cosh(3\beta J_2/2) + \cosh(\beta J_1/2)} \right\} , \quad (1.3.45)$$

$$\langle \sigma_j \tau_k^3 \rangle = \frac{1}{32} \left\{ \begin{aligned} & 81Z_2 \sinh(9\beta J_2/2) + 3\sinh(3\beta J_1/2) \\ & Z_2 \cosh(9\beta J_2/2) + \cosh(3\beta J_1/2) \end{aligned} \right. + \\ \left. + \frac{1}{3} \frac{27Z_2 \sinh(3\beta J_2/2) + \sinh(\beta J_1/2)}{Z_2 \cosh(3\beta J_2/2) + \cosh(\beta J_1/2)} \right\}. \quad (1.3.46)$$

A temperatura crítica T_c , é obtida substituindo as Eqs.(1.3.44) a (1.3.46), nas Eqs.(1.3.34) e (1.3.35), e as soluções são numericamente obtidas, resolvendo-se o sistema de equações formado por essas Eqs. mais a Eq.(1.3.39).

O sistema a ser resolvido numericamente, considerando-se a distribuição de campo dada pela Eq.(1.2.41), é explicitamente dado por:

$$(1-p) \left\{ 1 - \frac{2 y_2' \cosh(\beta h/2)}{v} \right\} + p \left\{ 1 - \frac{2 y_2'}{c_1 y_1' + c_2 y_2' + c_3} \right\} = 0 \quad (1.3.47)$$

e,

$$(1-p) \left\{ 1 - \frac{2 \cosh(5\beta h/6)}{v} \right\} + p \left\{ 1 - \frac{2}{c_1 y_1' + c_2 y_2' + c_3} \right\} = 0 \quad (1.3.48)$$

Para campo nulo, $\alpha'(\alpha' \equiv h/6J)=0$ ou $p=1$, a curva crítica é obtida resolvendo-se a equação dada por:

$$\frac{1+z^9+z^{2\gamma+3}(1+z^3)}{z^3+z^6+z^{2\gamma+4}(1+z)} = 3, \quad (1.3.49)$$

onde z é dado pela Eq.(1.2.45), que é idêntico ao resultado obtido por Gonçalves, (1985).

Nas Figs. 1.19 a 1.25 é mostrado a temperatura

crítica $T_c (T_c \equiv k_B T_c / J)$ em função da concentração p para varios valores de α e diferentes valores de γ . Conclui-se dos resultados que, como no caso de spin 1, o campo aleatório favorece a ordem do sistema, para qualquer valor de p e γ . Além disso, a temperatura crítica para um dado p , também aumenta para $\gamma > 0$ e diminui para $\gamma < 0$.

A temperatura crítica T_c como função de γ para diferentes valores de p e α' , é mostrado nas Figs. 1.26 a 1.31. Neste caso não existe γ_c , como no caso em que é nulo o campo aleatório (Gonçalves, 1985), uma vez que não existe para spin semi-inteiro o estado $m=0$, diferentemente do caso de spin 1. T_c varia entre valores mínimos ($\gamma \rightarrow -\infty$) e máximos ($\gamma \rightarrow \infty$), que são dependentes de p e α' , nos quais o sistema permanece ordenado. A seguir apresenta-se um resumo dos valores de T_c , que são explicitamente obtidos no Apêndice B.

Para $p=0$, o valor mínimo de T_c , como função de α' , é obtido através da resolução da equação dada por:

$$e^{6\kappa\alpha'} - (2+\sqrt{3})(e^{2\kappa\alpha'} + 1)e^{\kappa(2\alpha'-1)} + 1 = 0, \quad (1.3.50)$$

e T_c máxima por:

$$e^{10\kappa\alpha'} - (2+\sqrt{3})(e^{3\kappa\alpha'} + e^{\kappa\alpha'})e^{\kappa(3\alpha'-3)} + 1 = 0. \quad (1.3.51)$$

Em particular, para $\alpha'=0$, a solução destas equações é dada por $T_c=0.75932571\dots$ e $T_c=2.27797715\dots$, enquanto para $\alpha'=1/2$ por $T_c=1.24907378\dots$ e $T_c=2.96618769\dots$ respectivamente, e correspondem aos valores mostrados na Fig. 1.26.

Para valores de $p \neq 0$, os resultados podem ser obtidos resolvendo-se as Eqs.(B7), (B9) e (B11) apresentadas no

Apêndice B.

Finalmente, deve ser notado, como mostrado nas Figs.1.26 a 1.31, que as curvas críticas tendem no limite $p \rightarrow 1$ ao resultado sem campo.

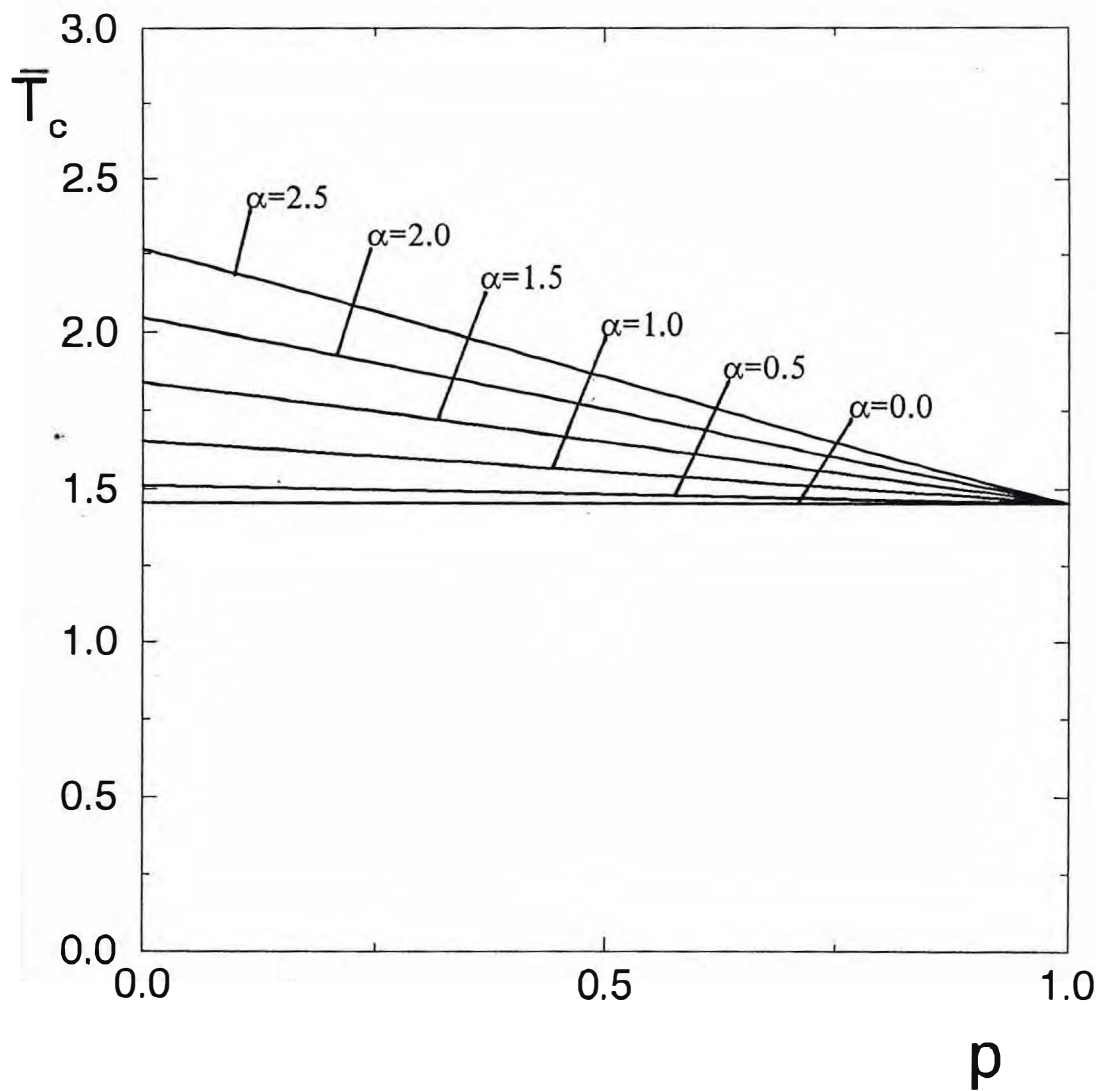


Fig. 1.1 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_b T_c / J$) como função de p (probabilidades de ligações decoradas) para vários α ($\alpha \equiv 2h/3J$), $\gamma=2$ e $s=1$. (caso ferromagnético sem vínculo)

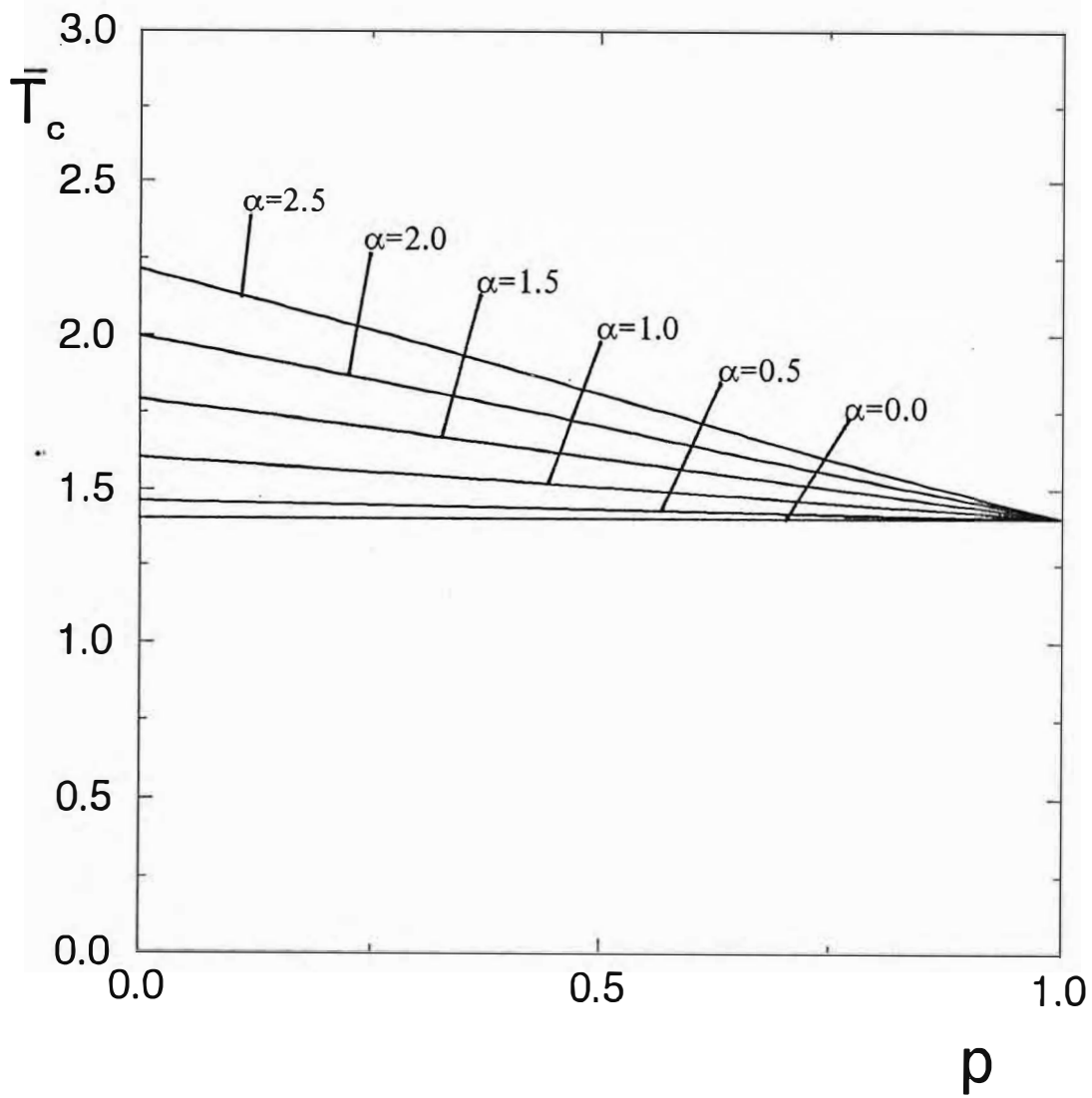


Fig. 1.2 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de p (probabilidades de ligações decoradas) para vários α ($\alpha \equiv 2h/3J$), $\gamma=1$ e $s=1$. (caso ferromagnético sem vínculo)

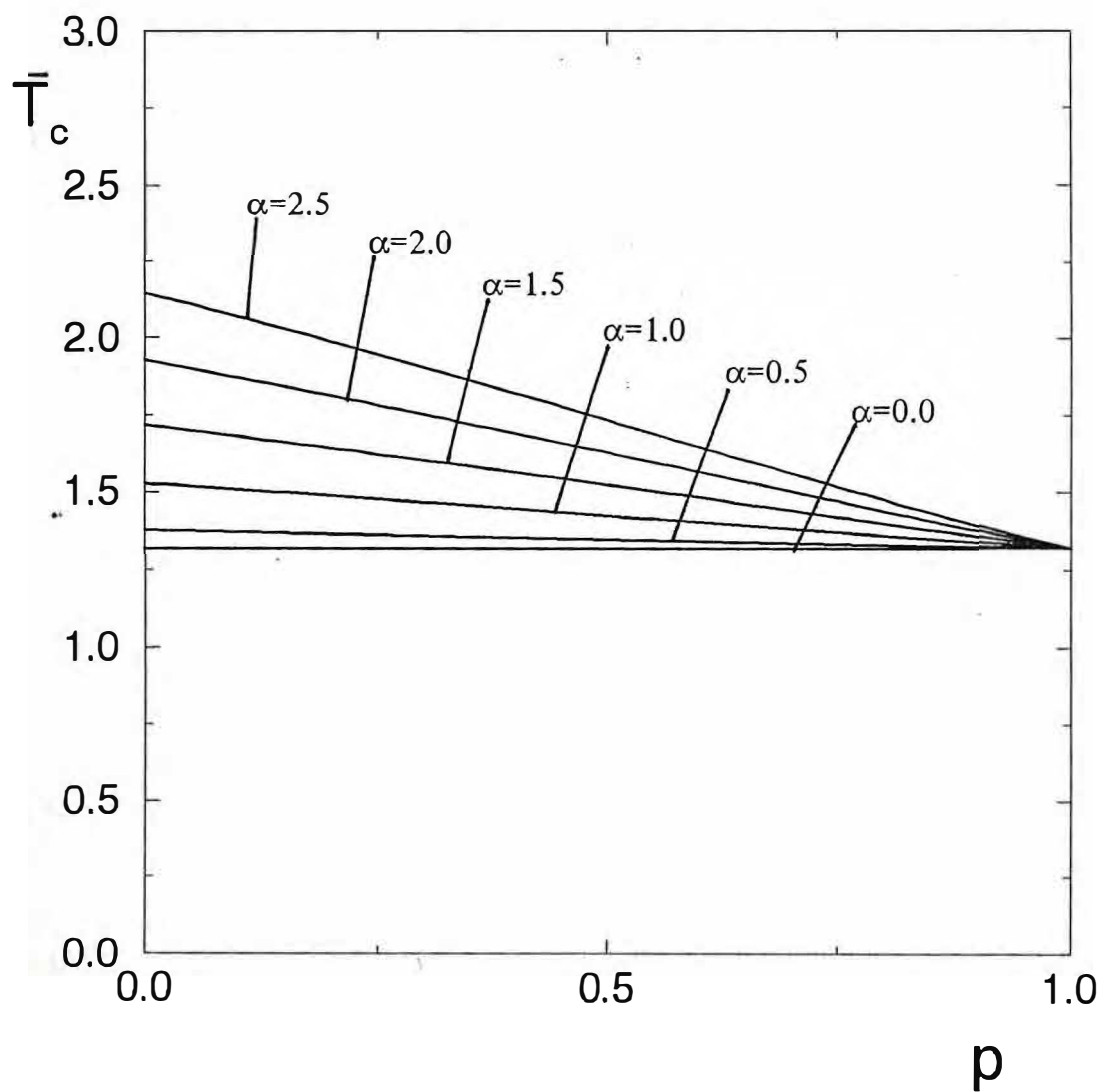


Fig. 1.3 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de p (probabilidades de ligações decoradas) para vários α ($\alpha \equiv 2h/3J$), $\gamma=0$ e $s=1$. (caso ferromagnético sem vínculo)

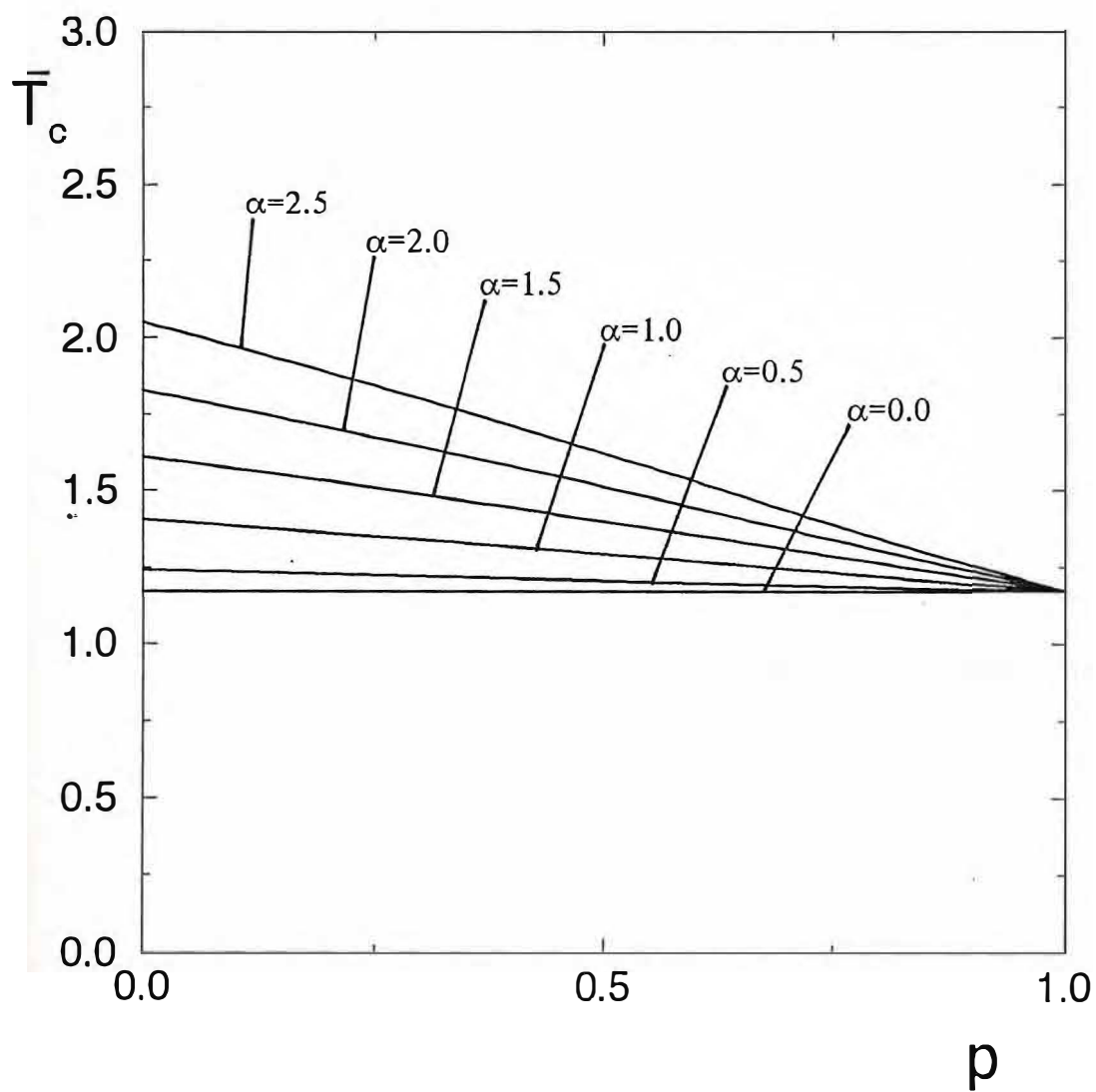


Fig. 1.4 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de p (probabilidades de ligações decoradas) para vários α ($\alpha \equiv 2h/3J$), $\gamma = -1$ e $s = 1$. (caso ferromagnético sem vínculo)

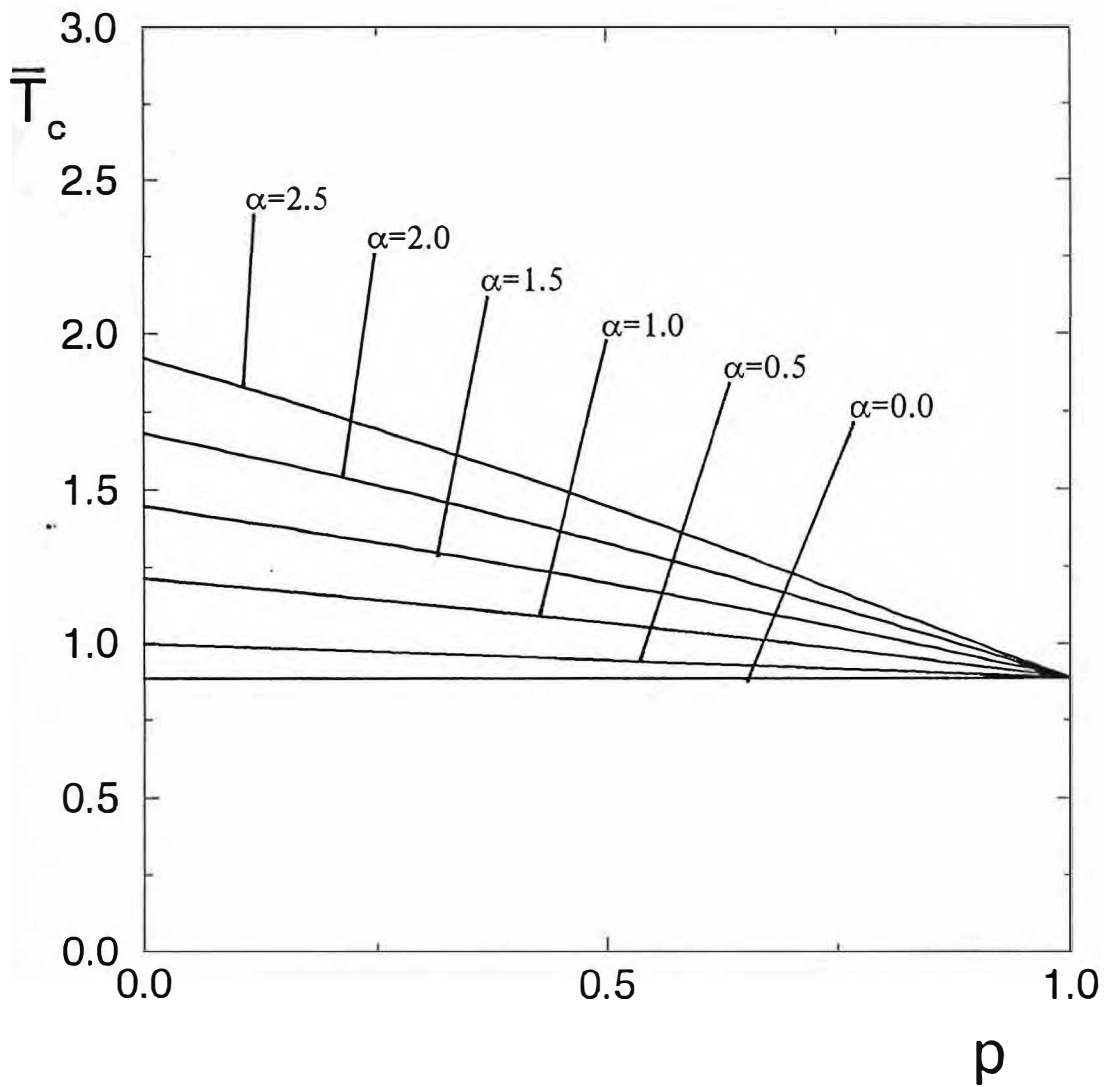


Fig. 1.5 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de p (probabilidades de ligações decoradas) para vários α ($\alpha \equiv 2h/3J$), $\gamma = -2$ e $s=1$. (caso ferromagnético sem vínculo)

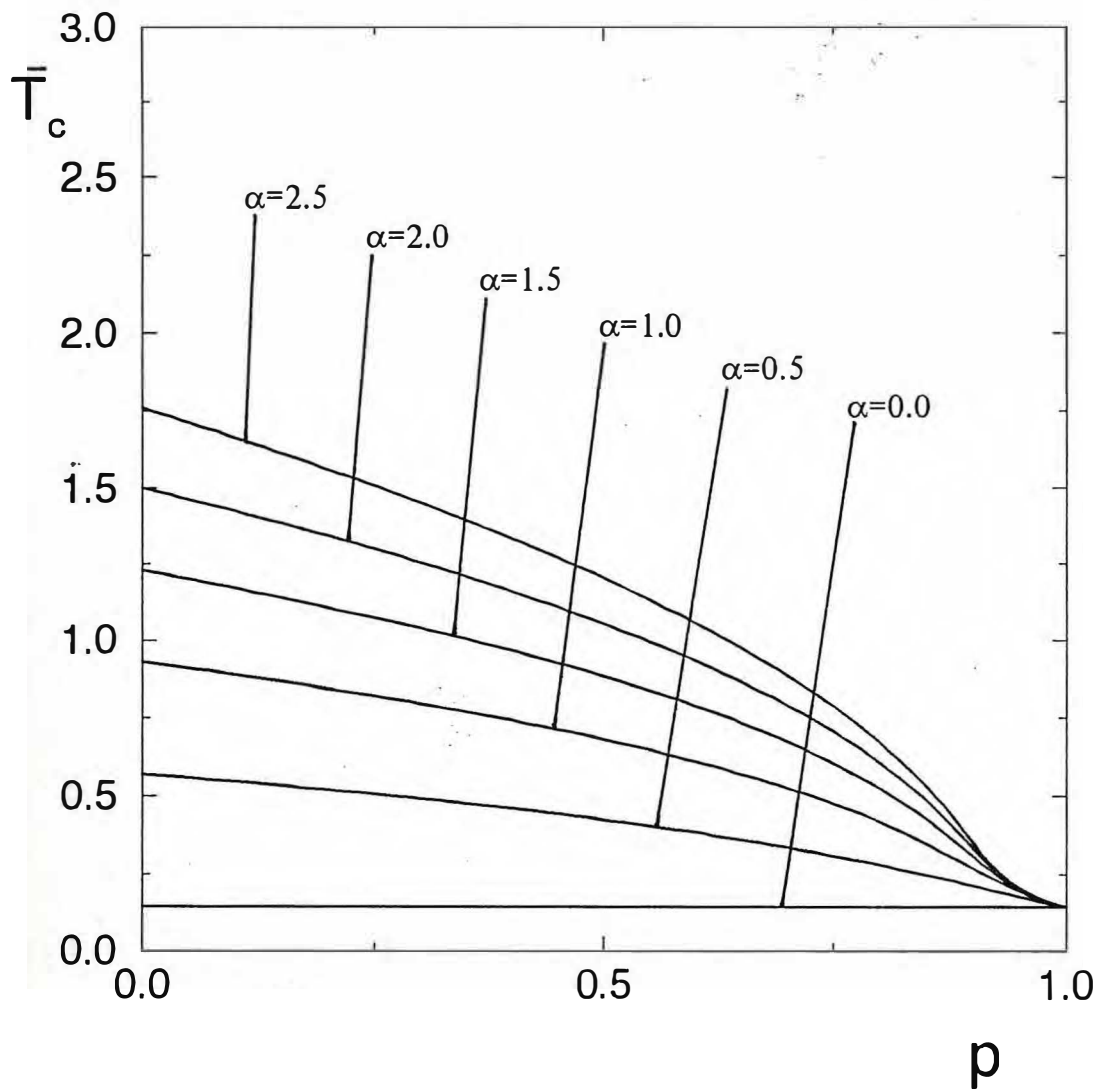


Fig. 1.6 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de p (probabilidades de ligações decoradas) para vários α ($\alpha \equiv 2h/3J$), $\gamma = -2.9$ e $s = 1$. (caso ferromagnético sem vínculo)

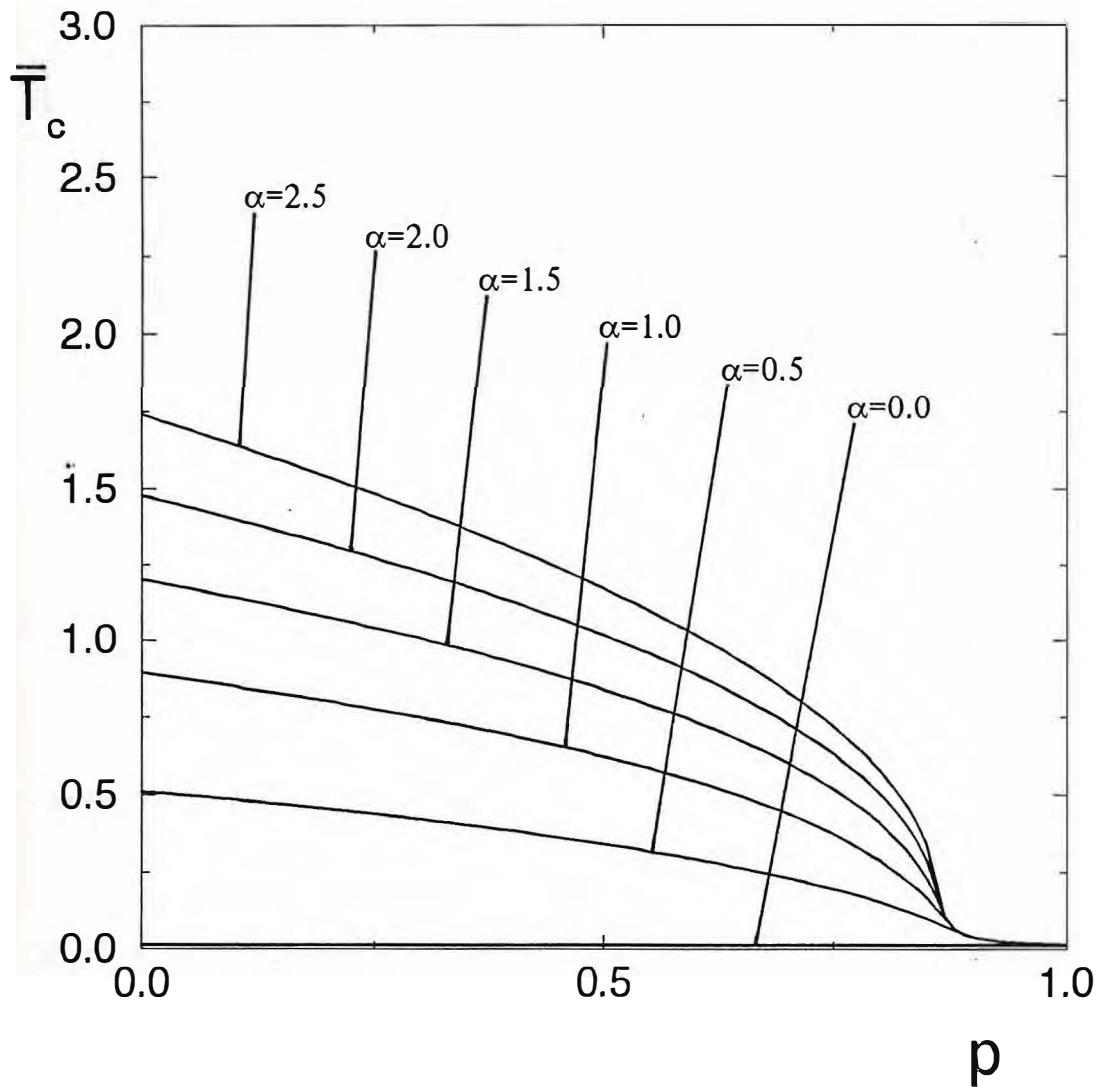


Fig. 1.7 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c = k_B T_c / J$) como função de p (probabilidades de ligações decoradas) para vários α ($\alpha = 2h/3J$), $\gamma = -2.99$ e $s = 1$. (caso ferromagnético sem vínculo)

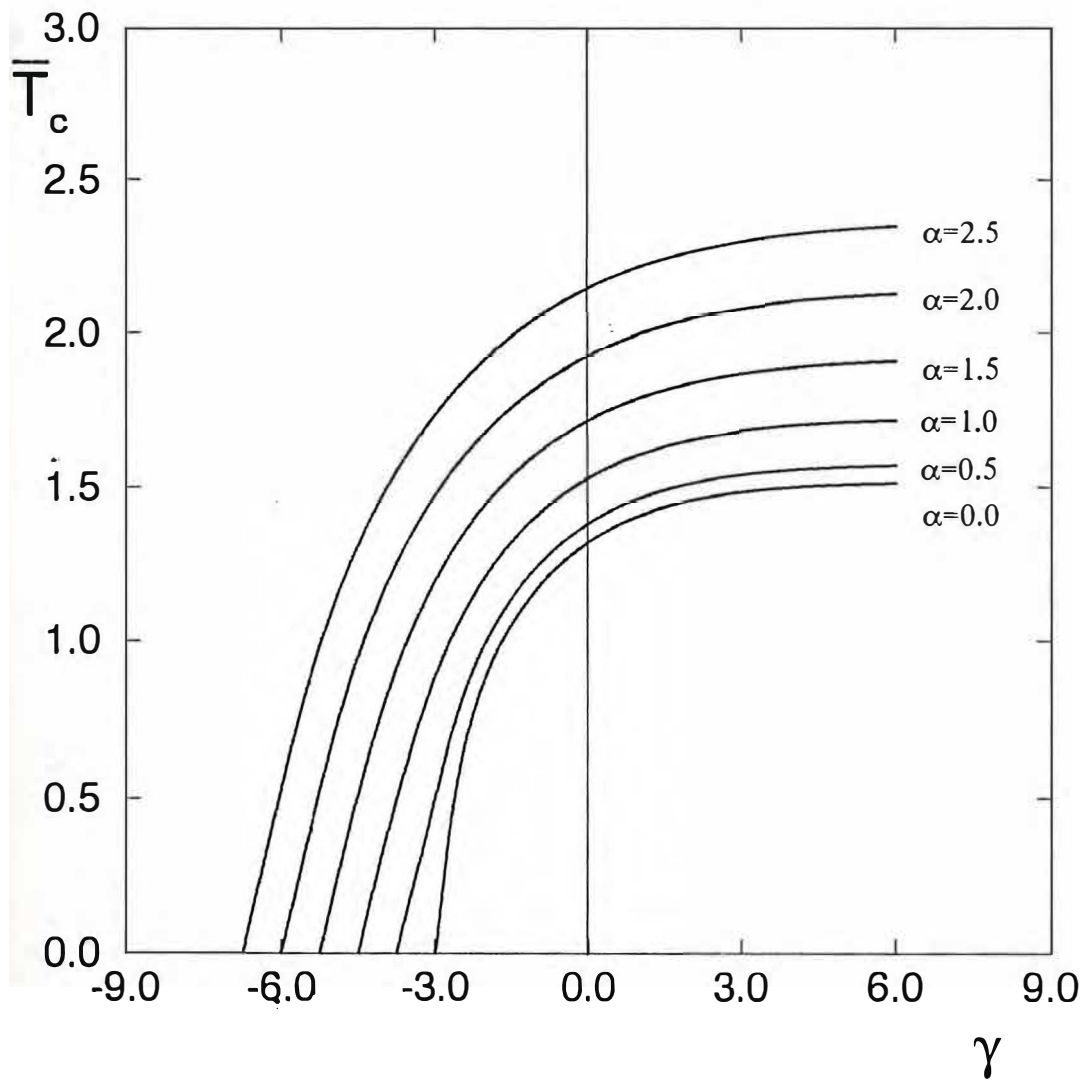


Fig. 1.8 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv 2h/3J$), $p=0$ e $s=1$. (caso ferromagnético sem vínculo)

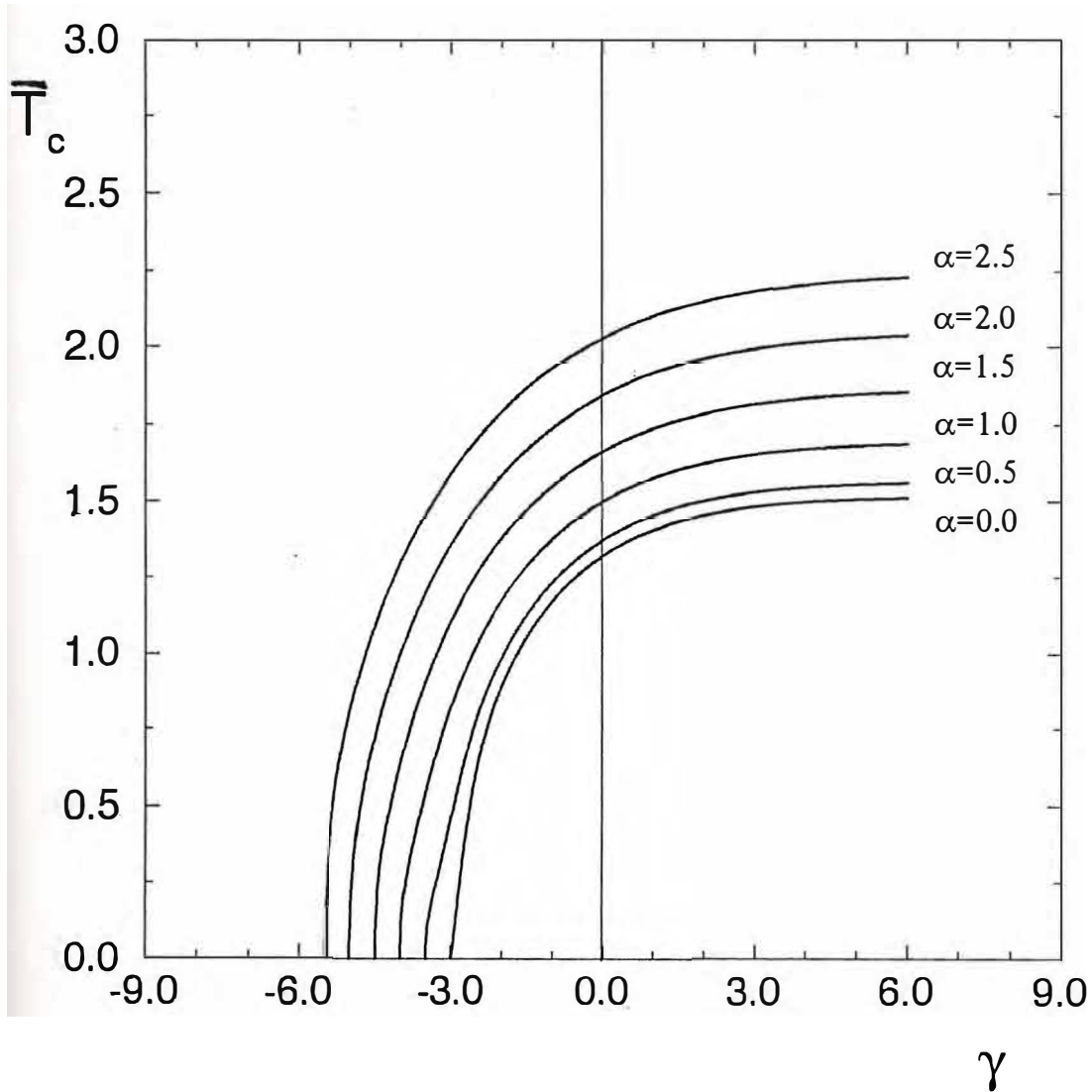


Fig. 1.9 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv 2h/3J$), $p=0.15$ e $s=1$. (caso ferromagnético sem vínculo)

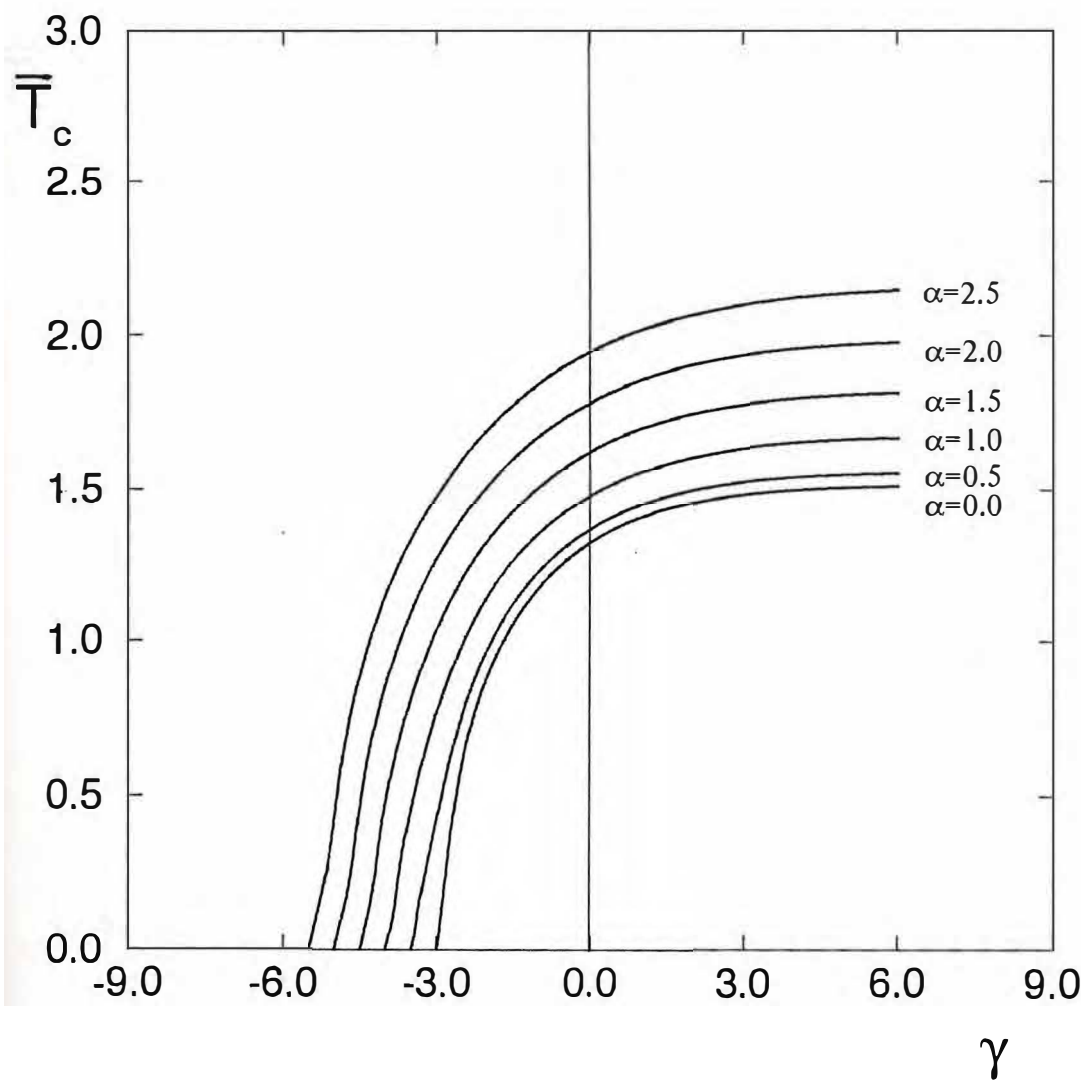


Fig. 1.10 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv 2h/3J$), $p=0.25$ e $s=1$. (caso ferromagnético sem vínculo)

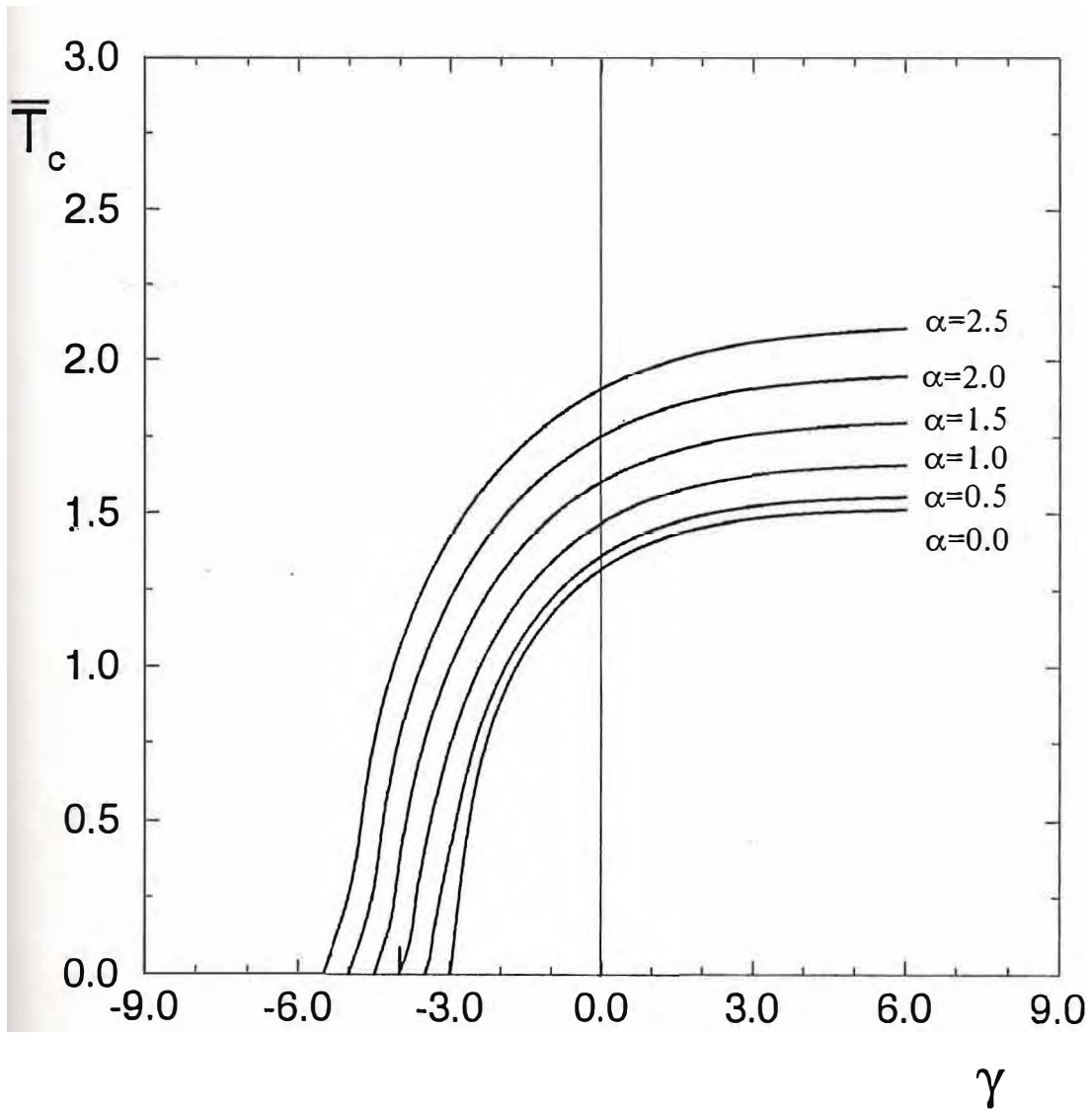


Fig. 1.11 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv 2h/3J$), $p=0.30$ e $s=1$. (caso ferromagnético sem vínculo)

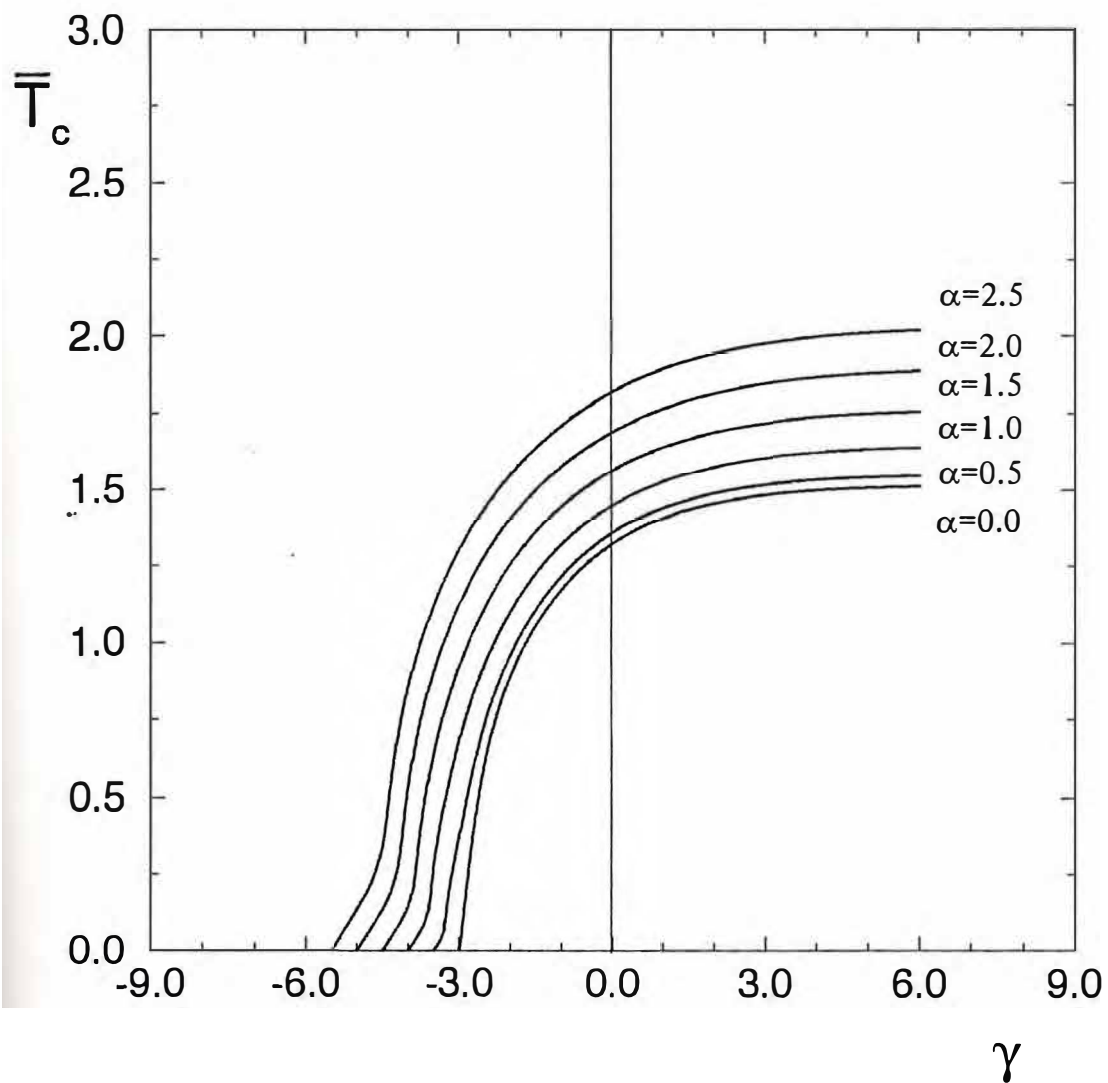


Fig. 1.12 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv 2h/3J$), $p=0.40$ e $s=1$. (caso ferromagnético sem vínculo)

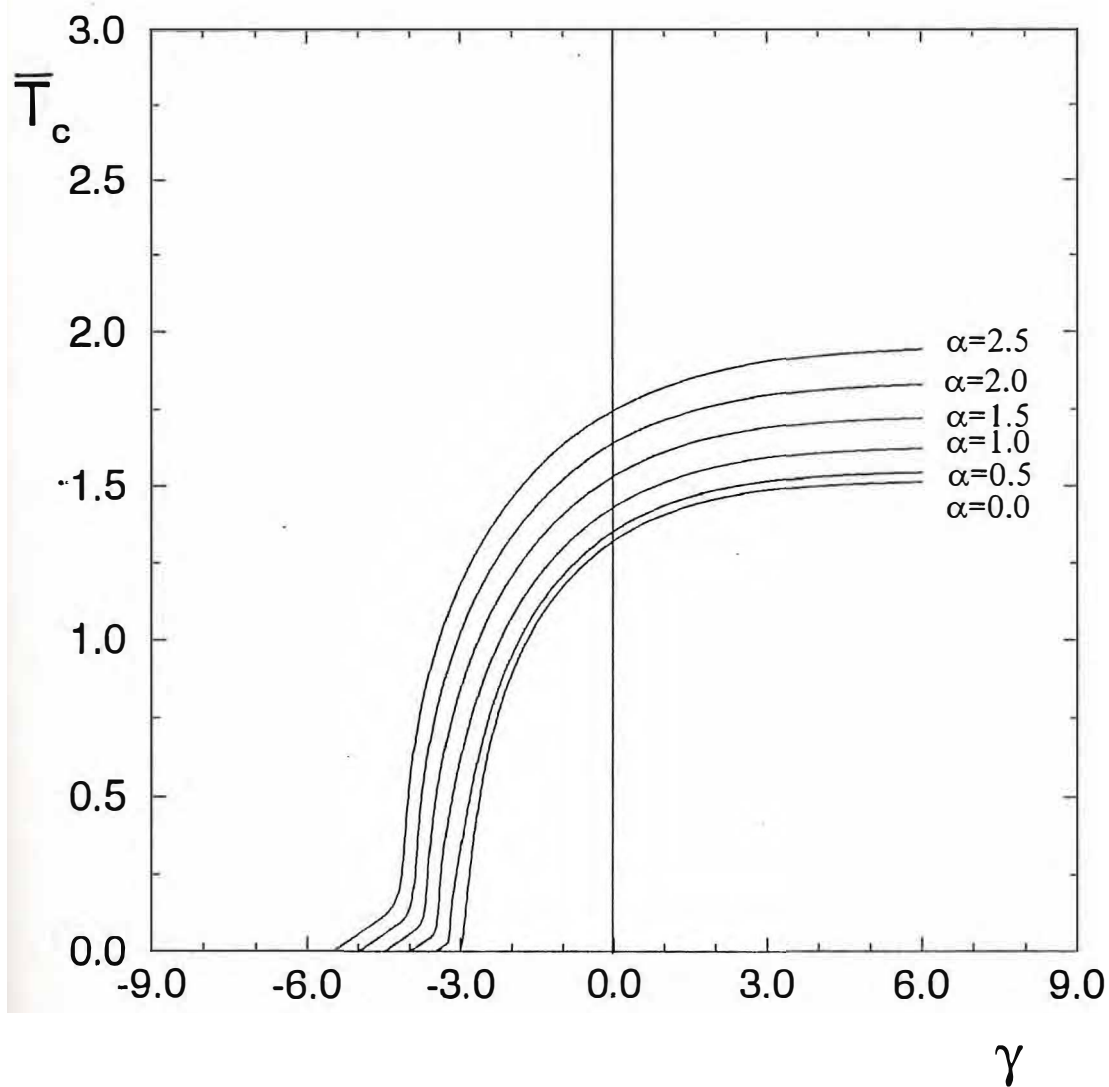


Fig. 1.13 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv 2h/3J$), $p=0.49$ e $s=1$. (caso ferromagnético sem vínculo)

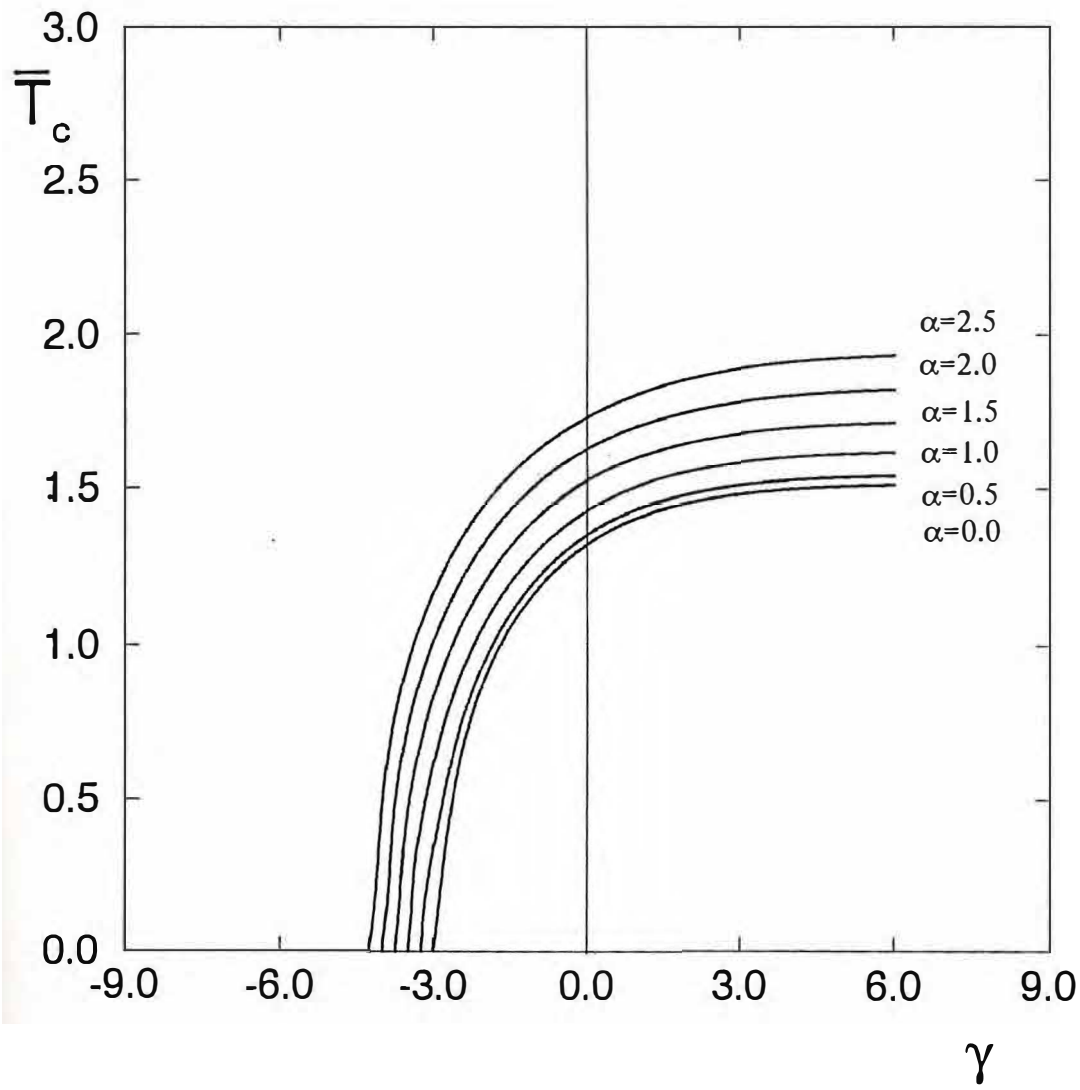


Fig. 1.14 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv 2h/3J$), $p=0.5$ e $s=1$. (caso ferromagnético sem vínculo)

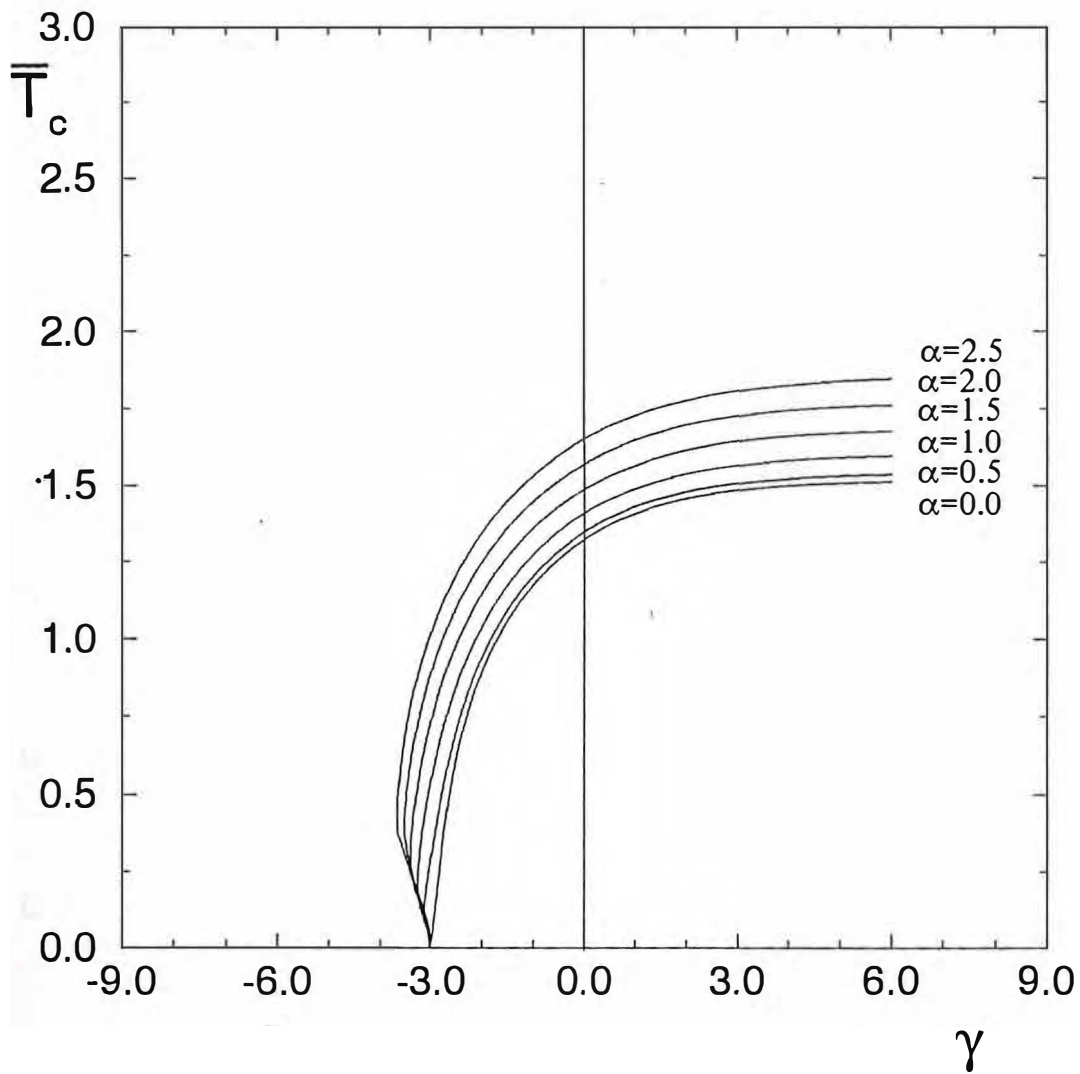


Fig. 1.15 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv 2h/3J$), $p=0.60$ e $s=1$. (caso ferromagnético sem vínculo)

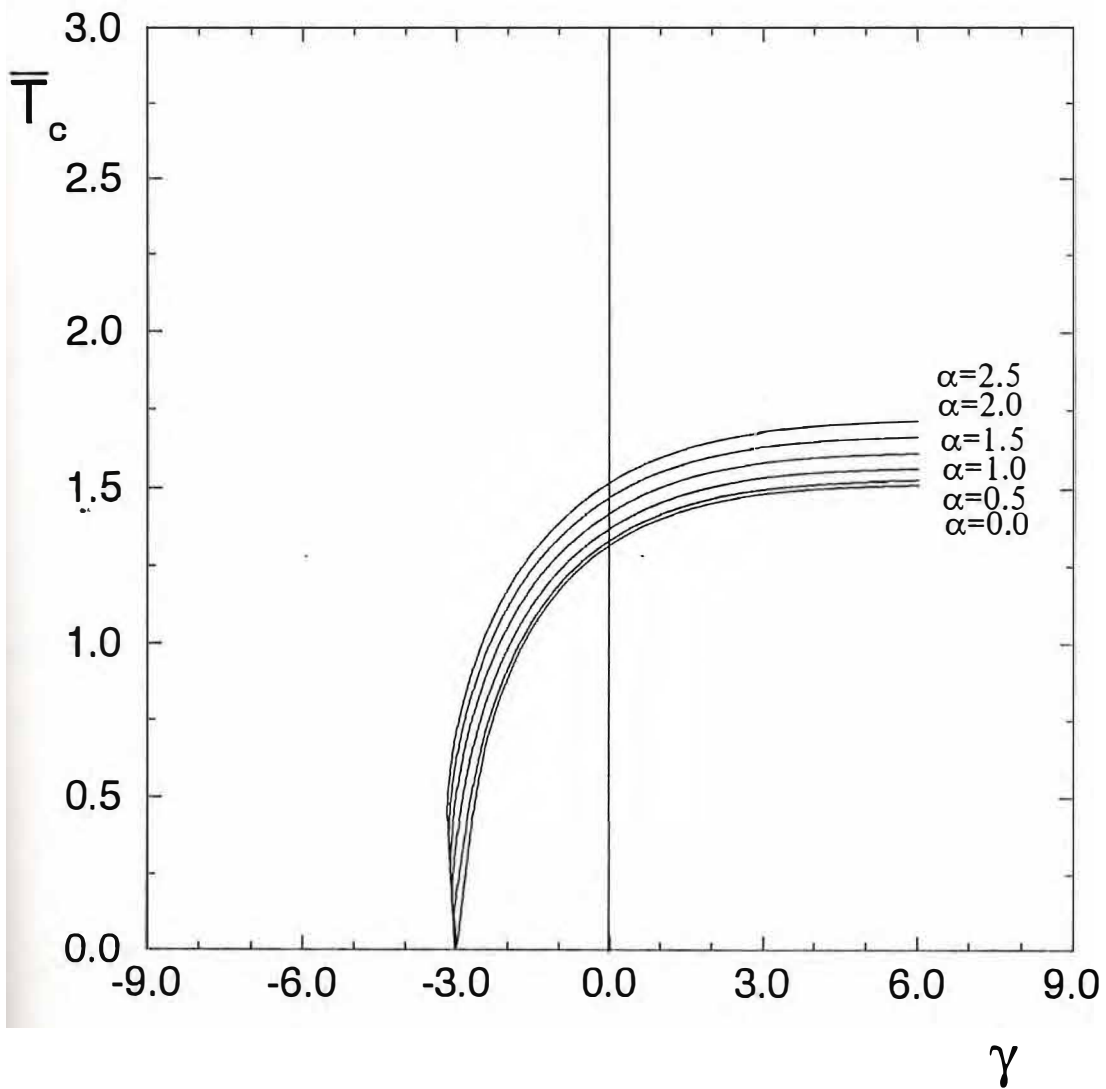


Fig. 1.16 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_b T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv 2h/3J$), $p=0.75$ e $s=1$. (caso ferromagnético sem vínculo)

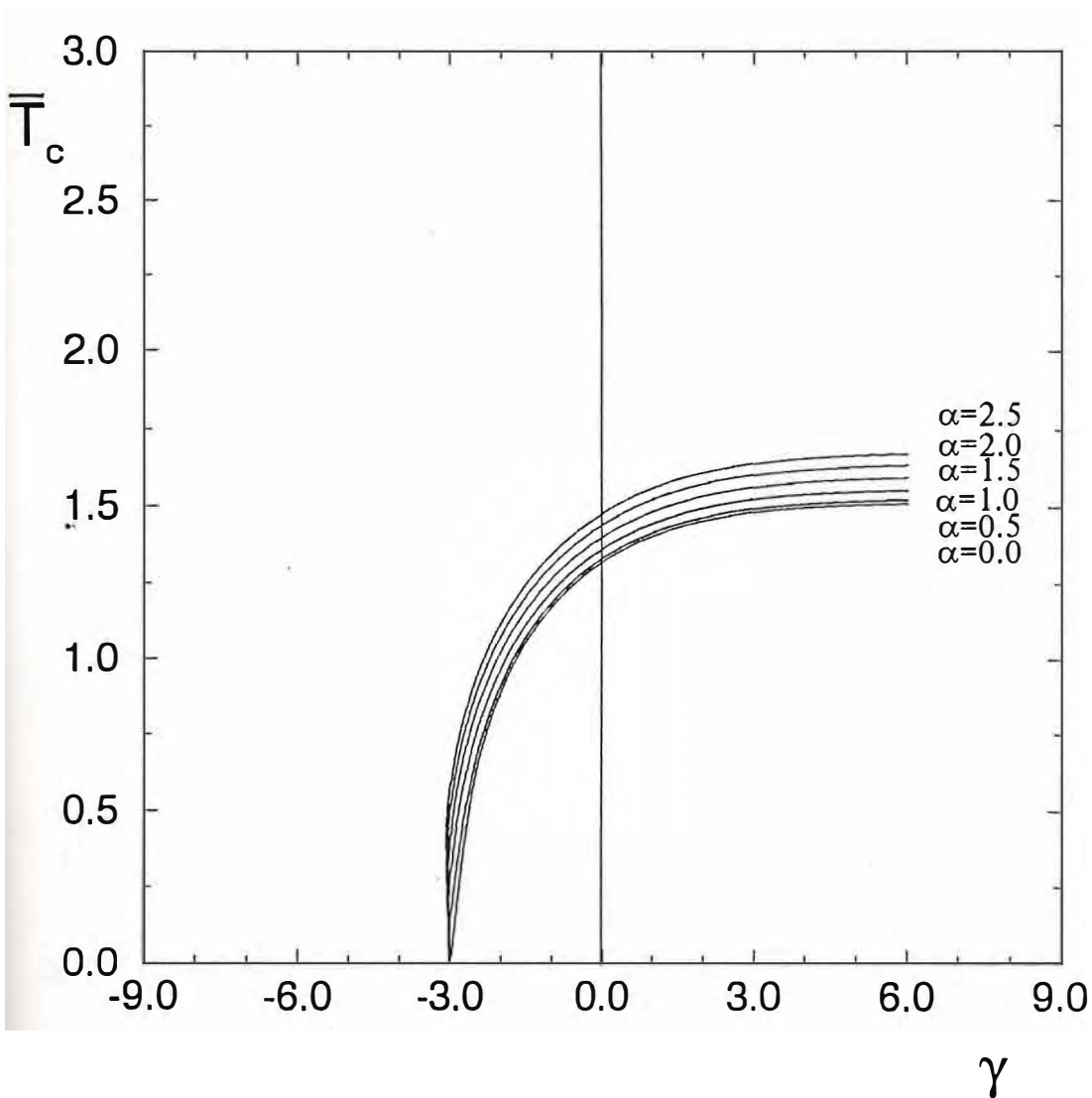


Fig. 1.17 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_b T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv 2h/3J$), $p=0.8$ e $s=1$. (caso ferromagnético sem vínculo)

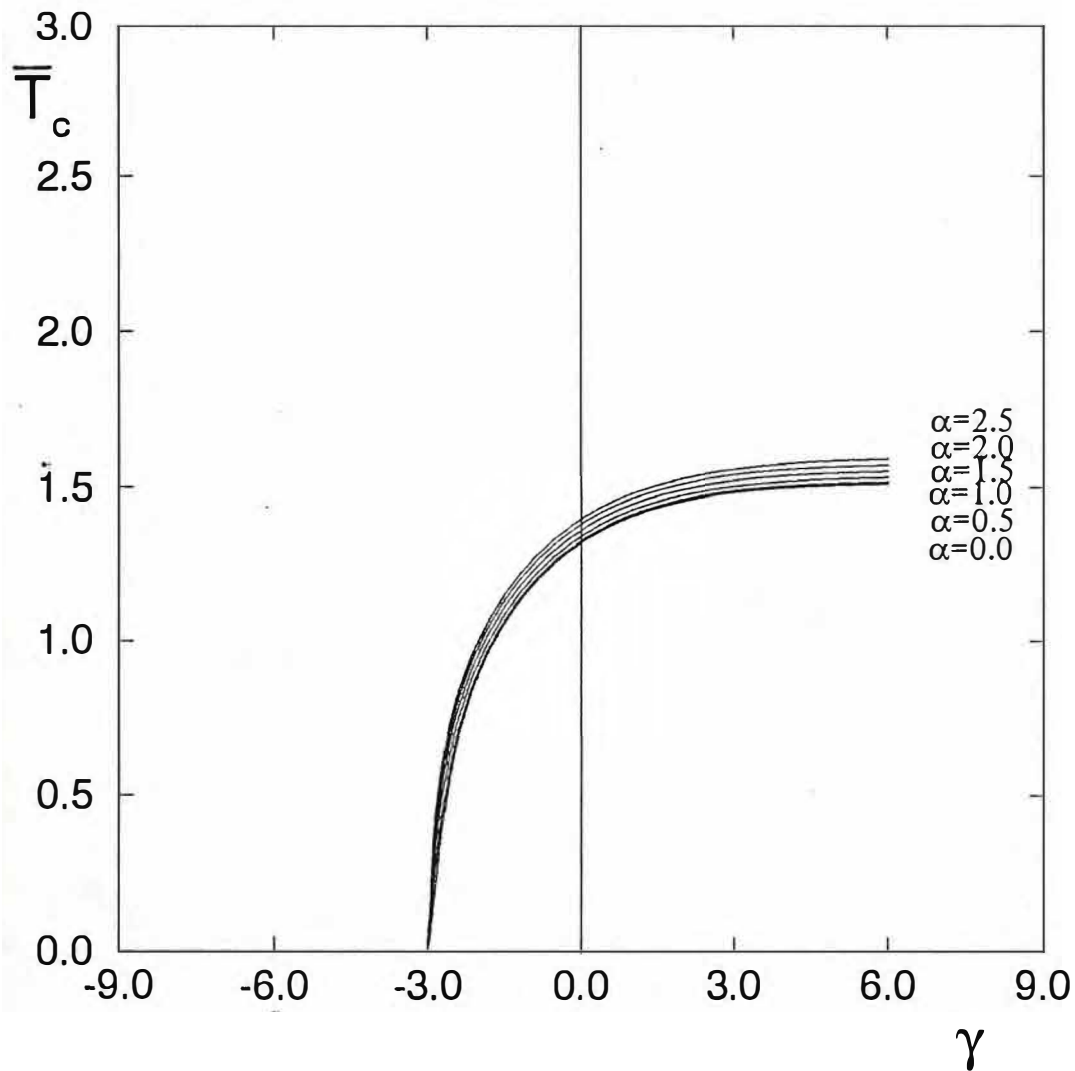


Fig. 1.18 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv 2h/3J$), $p=0.9$ e $s=1$. (caso ferromagnético sem vínculo)

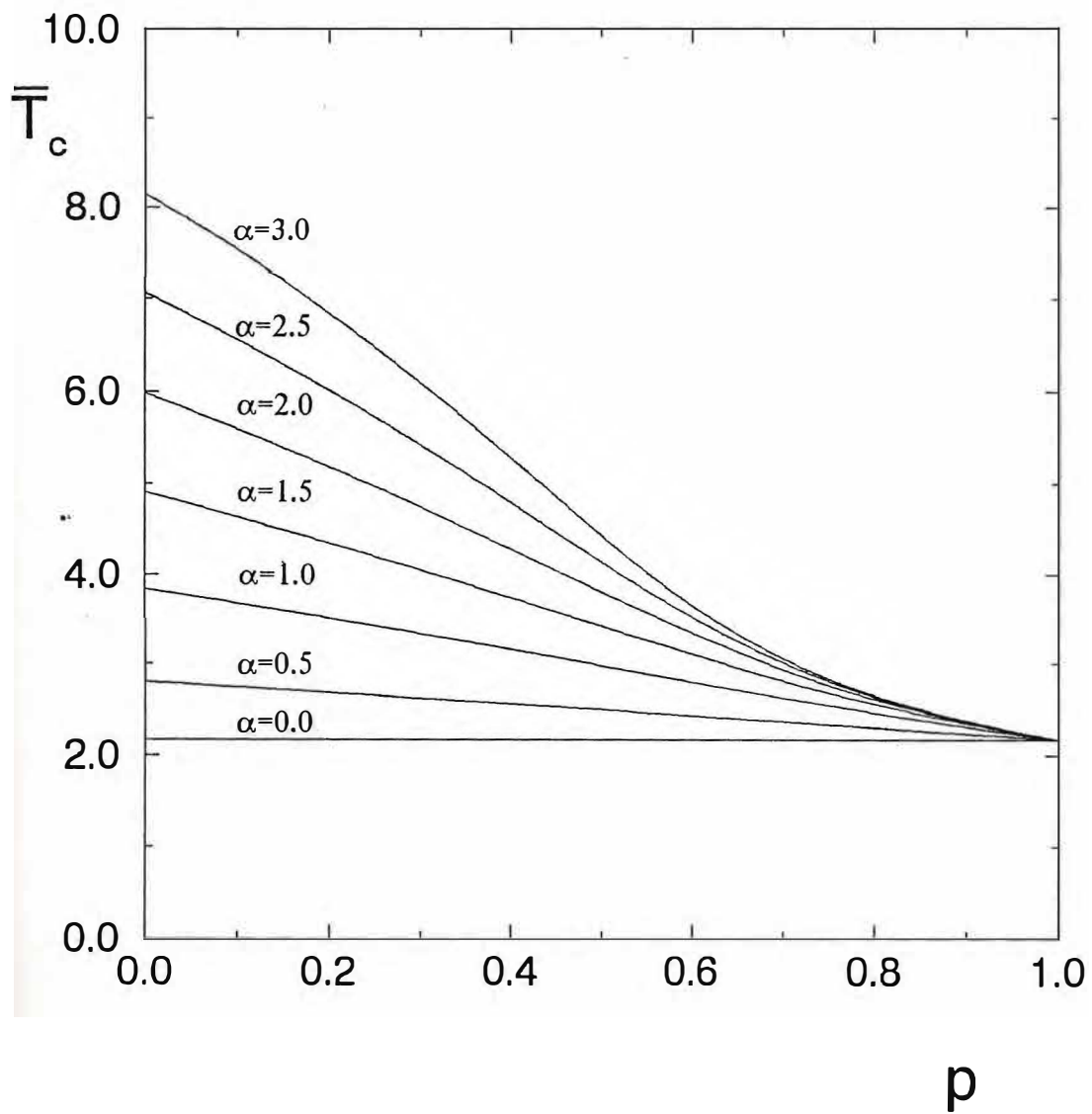


Fig. 1.19 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de p (probabilidades de ligações decoradas) para vários α ($\alpha \equiv h/6J$), $\gamma=2$ e $s=3/2$. (caso ferromagnético sem vínculo)

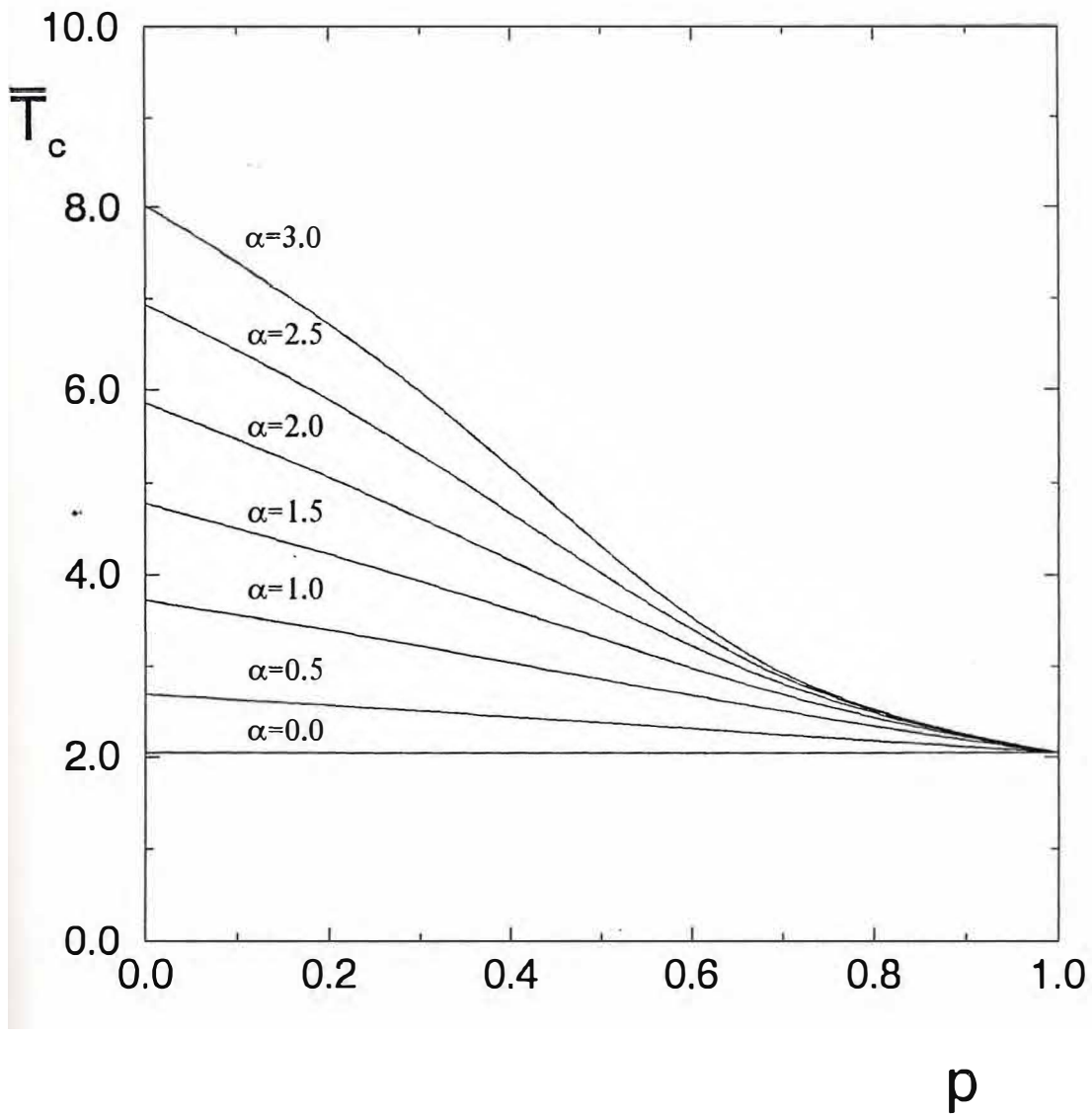


Fig. 1.20 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de p (probabilidades de ligações decoradas) para vários α ($\alpha \equiv h/6J$), $\gamma=1$ e $s=3/2$. (caso ferromagnético sem vínculo)

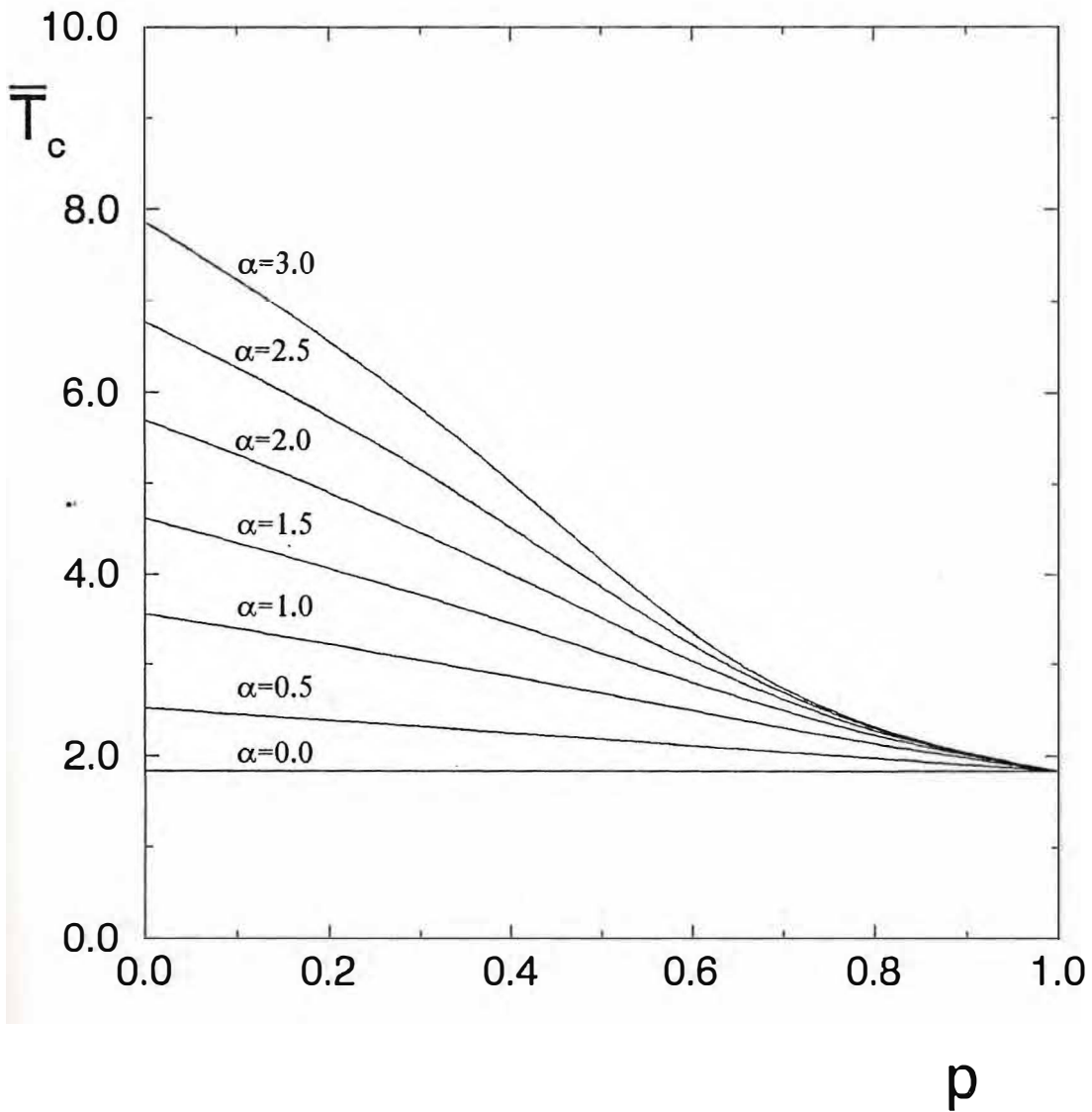


Fig. 1.21 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de p (probabilidades de ligações decoradas) para vários α ($\alpha \equiv h/6J$), $\gamma=0$ e $s=3/2$. (caso ferromagnético sem vínculo)

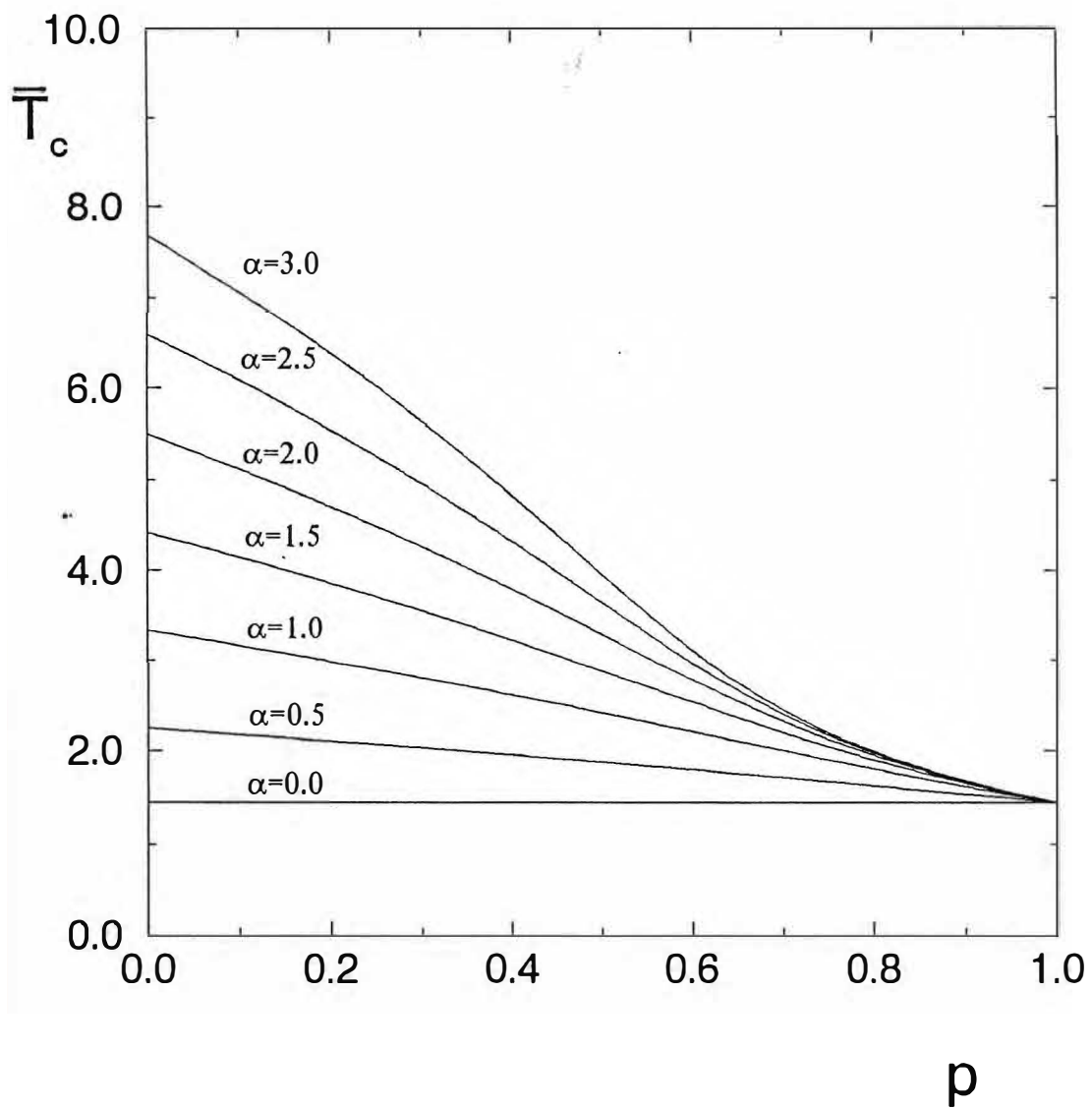


Fig. 1.22 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de p (probabilidades de ligações decoradas) para vários α ($\alpha \equiv h/6J$), $\gamma = -1$ e $s = 3/2$. (caso ferromagnético sem vínculo)

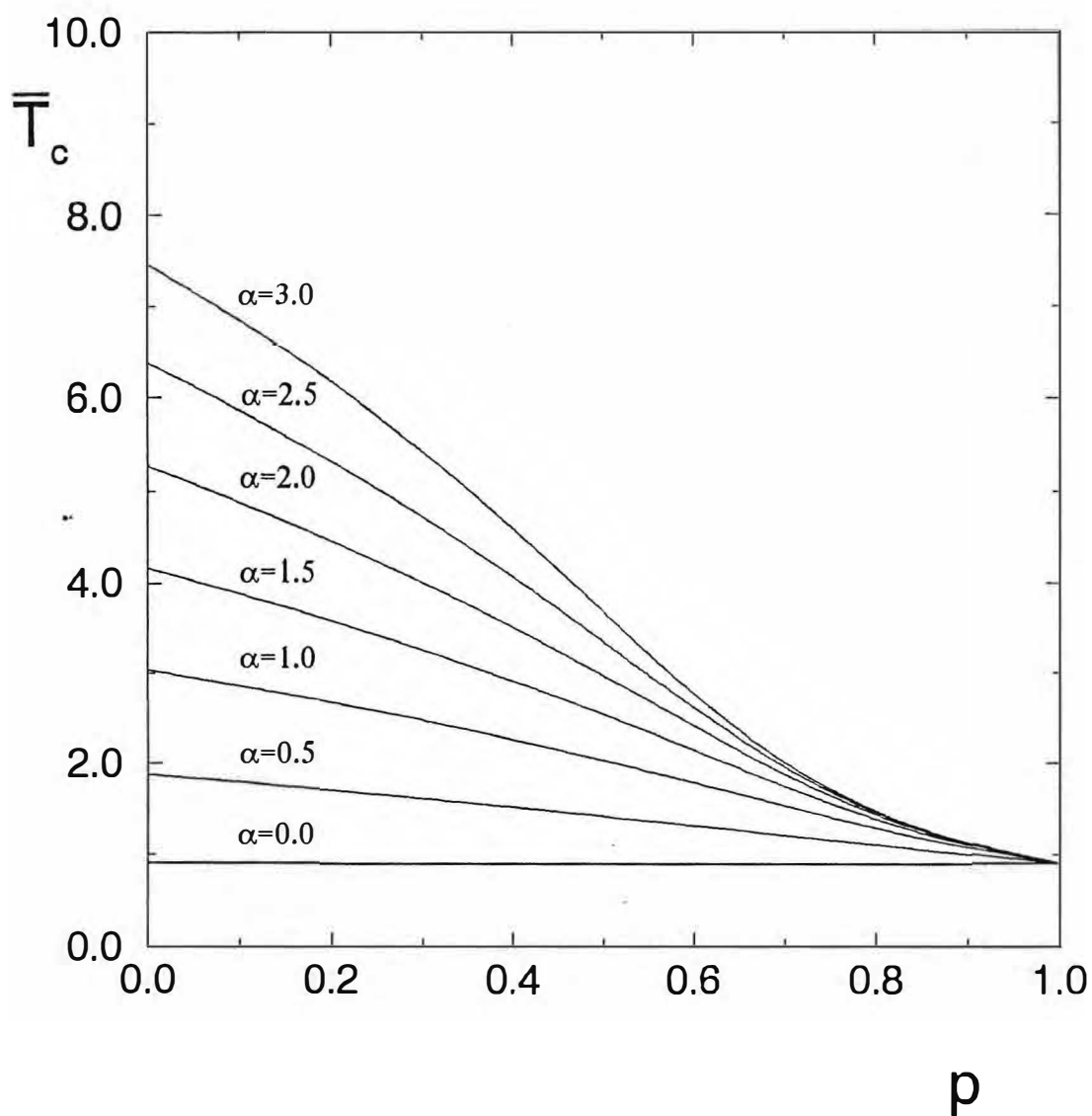


Fig. 1.23 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de p (probabilidades de ligações decoradas) para vários α ($\alpha \equiv h/6J$), $\gamma = -2$ e $s = 3/2$. (caso ferromagnético sem vínculo)

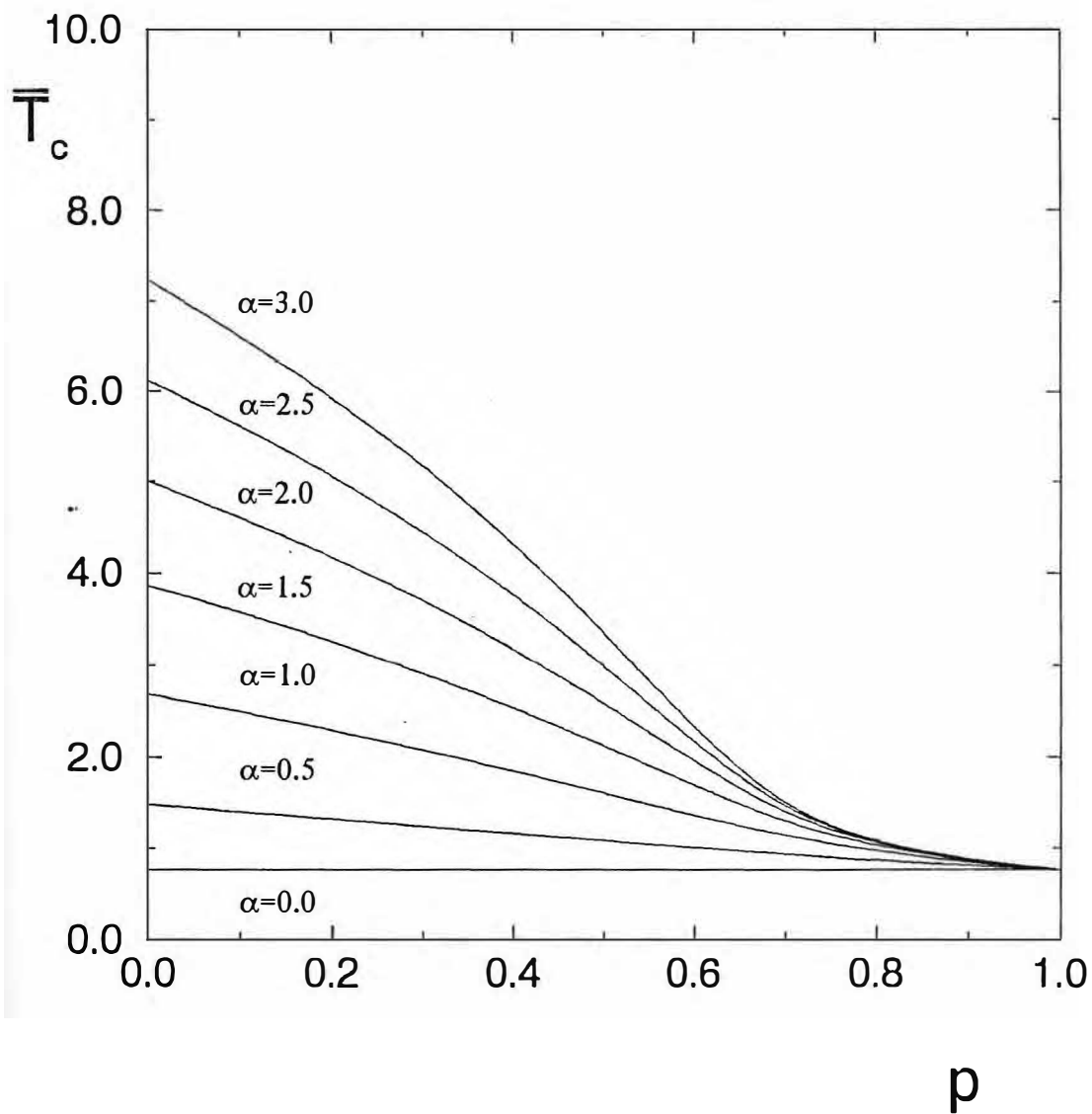


Fig. 1.24 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de p (probabilidades de ligações decoradas) para vários α ($\alpha \equiv h/6J$), $\gamma = -3$ e $s = 3/2$. (caso ferromagnético sem vínculo)

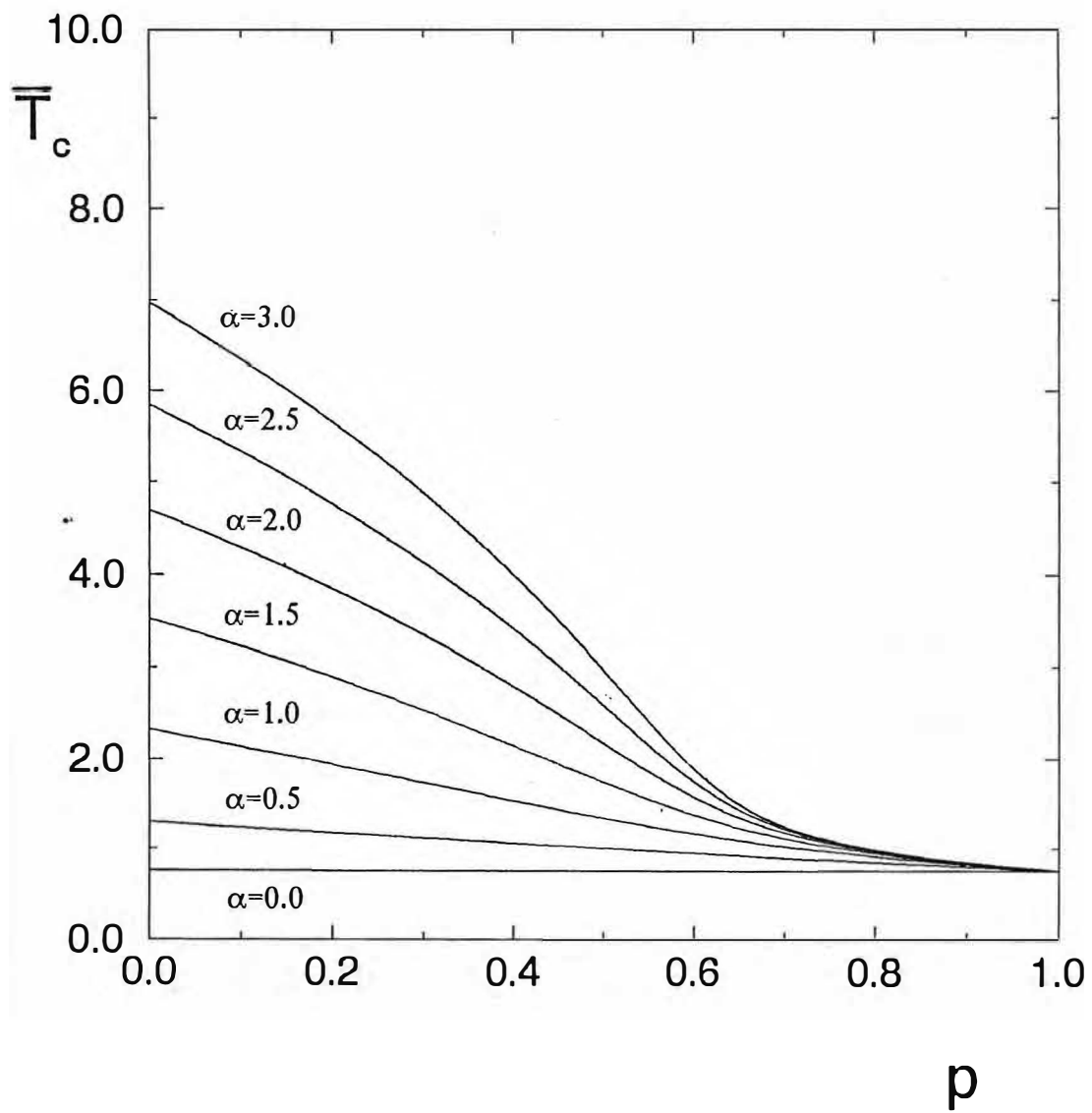


Fig. 1.25 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de p (probabilidades de ligações decoradas) para vários α ($\alpha \equiv h/6J$), $\gamma = -4$ e $s = 3/2$. (caso ferromagnético sem vínculo)

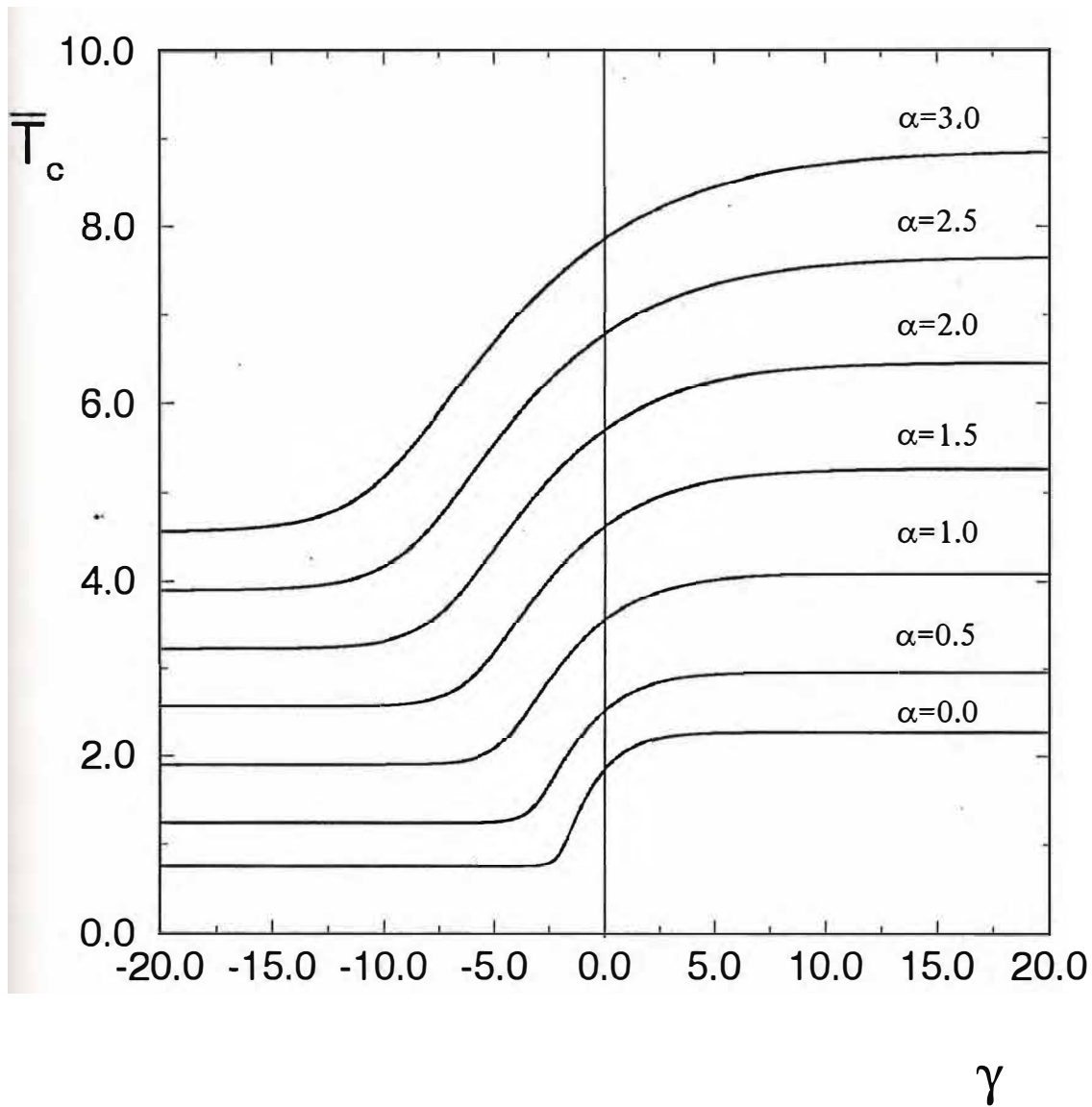


Fig. 1.26 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \cong k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma \cong D/J$) para vários α ($\alpha \cong h/6J$), $p=0$ e $s=3/2$. (caso ferromagnético sem vínculo)

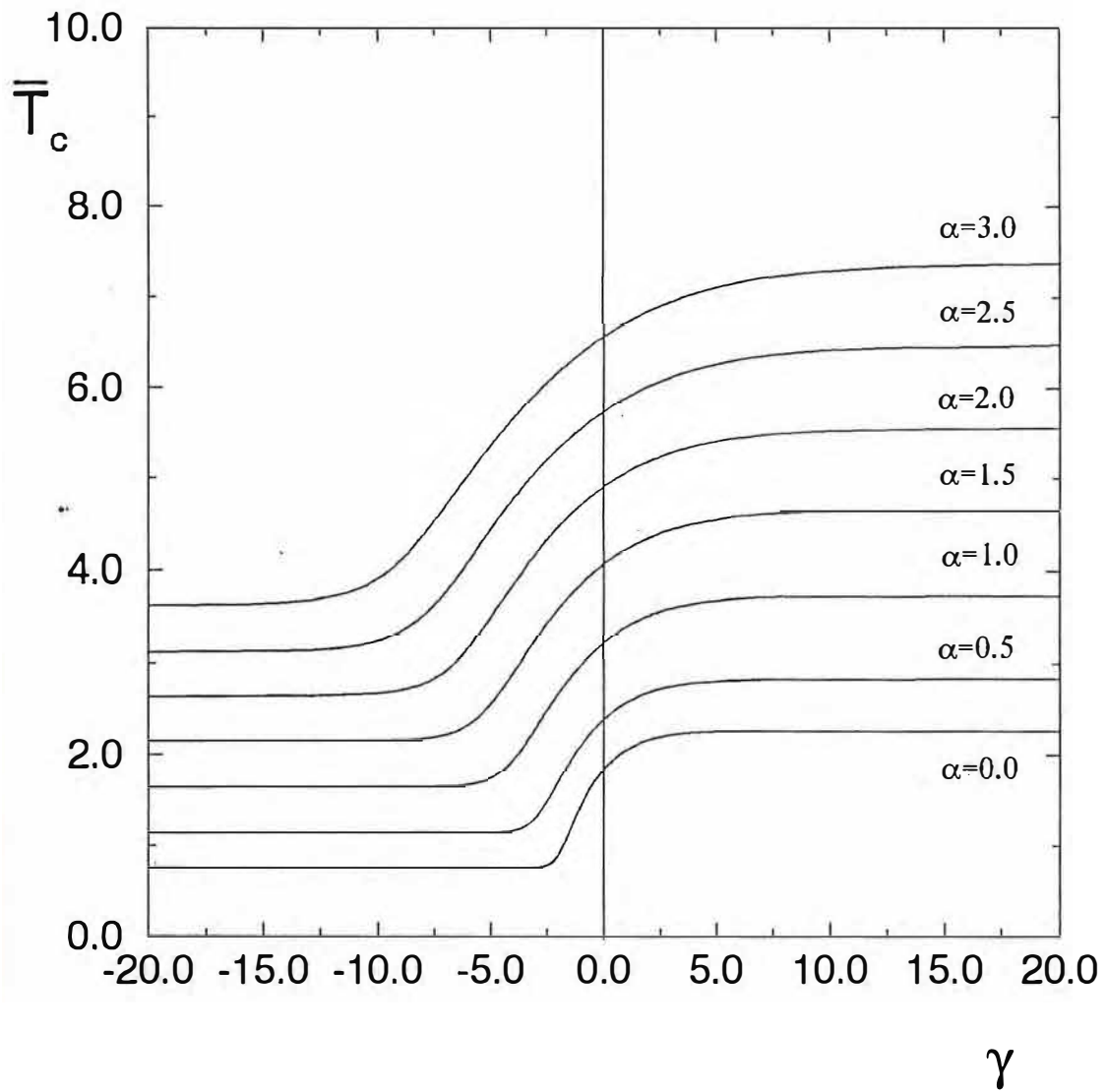


Fig. 1.27 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv h/6J$), $p=0.2$ e $s=3/2$. (caso ferromagnético sem vínculo)

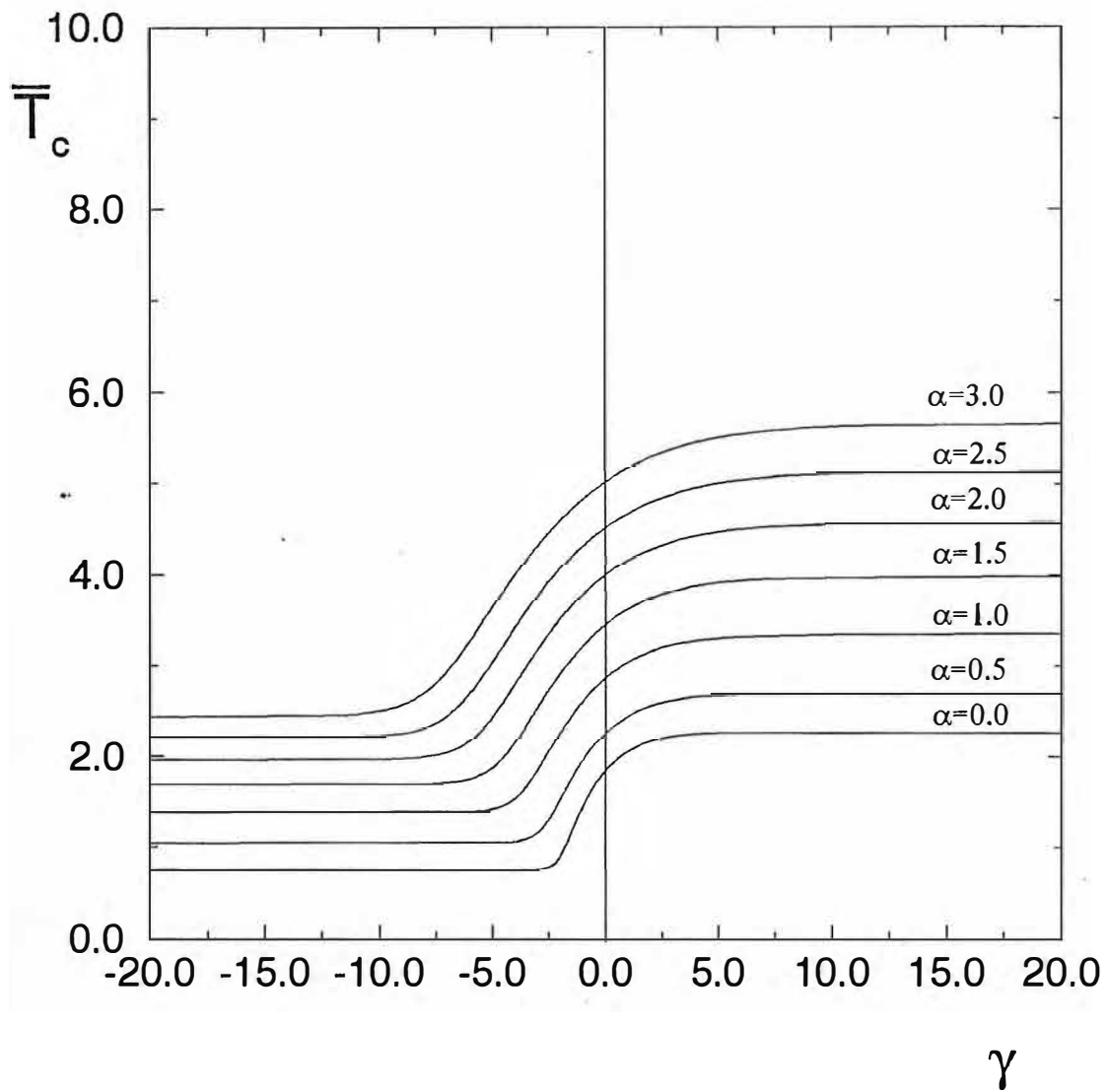


Fig. 1.28 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv h/6J$), $p=0.4$ e $s=3/2$. (caso ferromagnético sem vínculo)

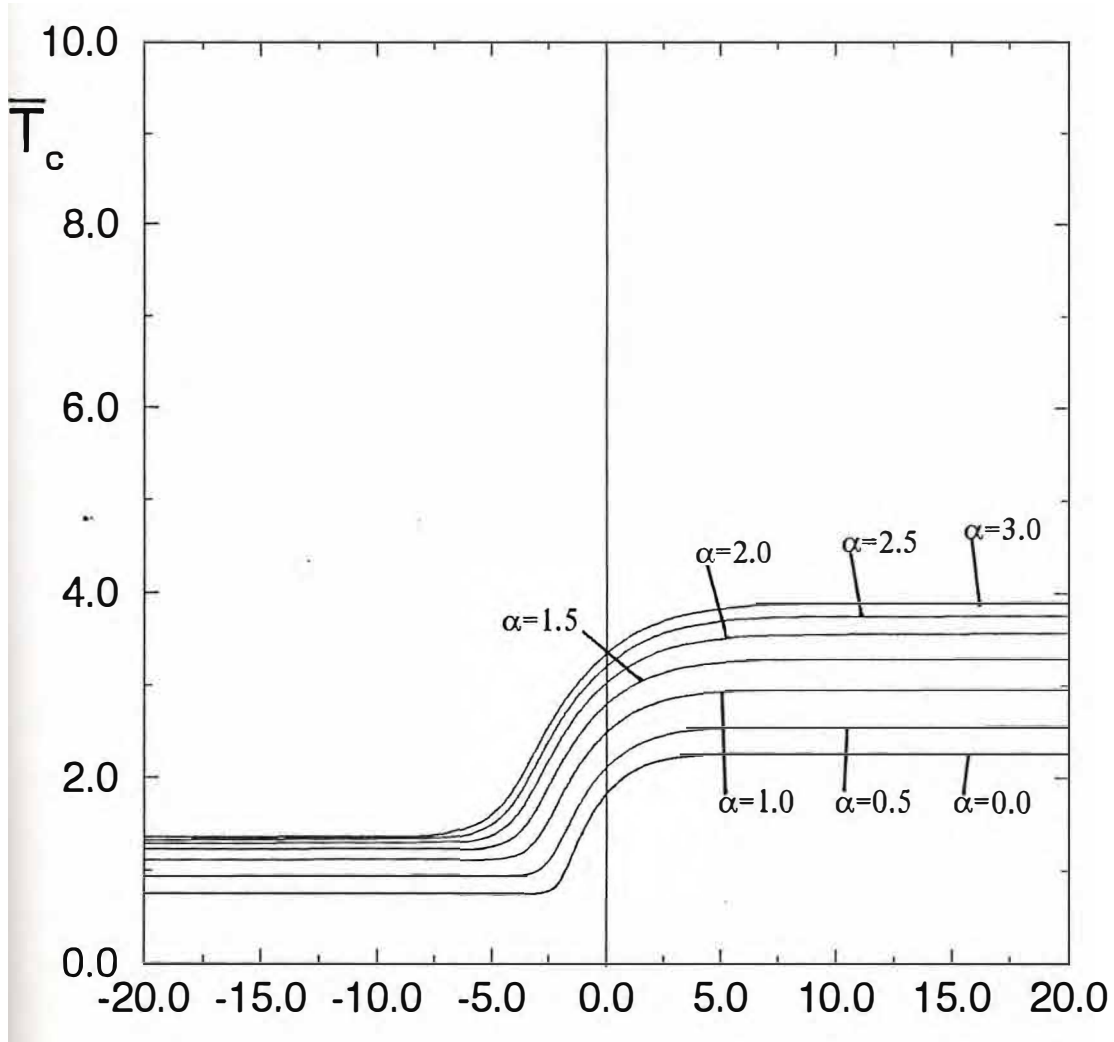


Fig. 1.29 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv h/6J$), $p=0.6$ e $s=3/2$. (caso ferromagnético sem vínculo)

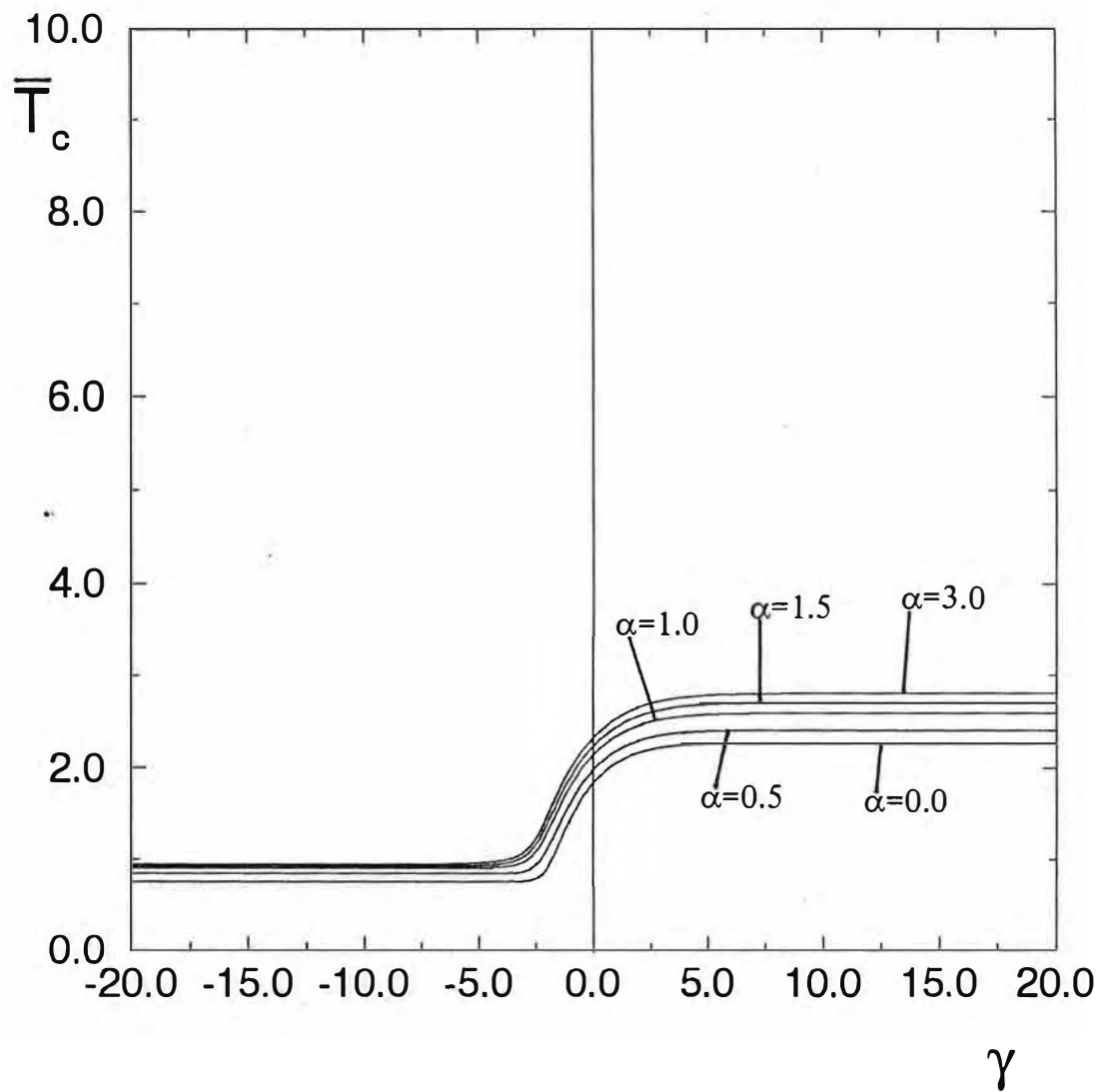


Fig. 1.30 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv h/6J$), $p=0.8$ e $s=3/2$. (caso ferromagnético sem vínculo)

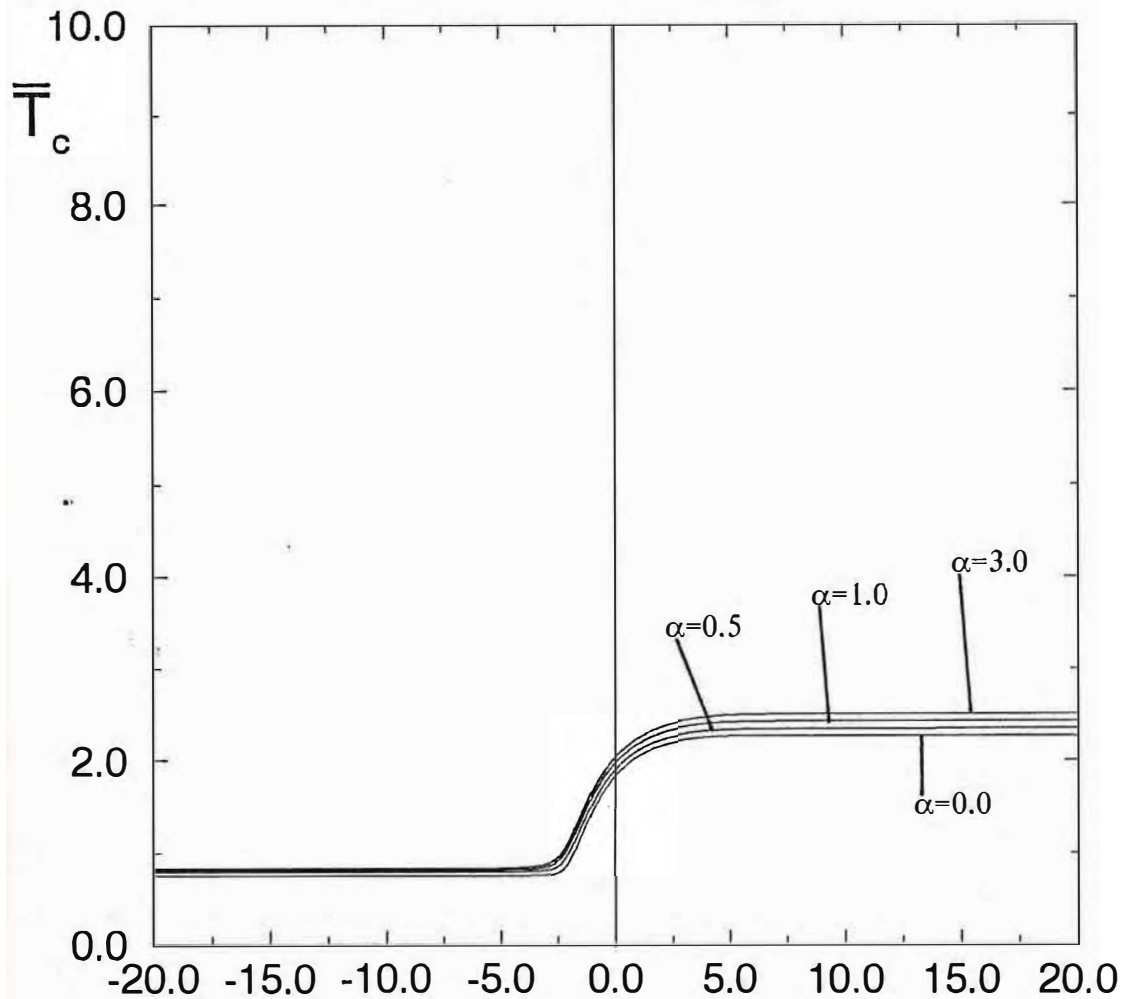


Fig. 1.31 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv h/6J$), $p=0.9$ e $s=3/2$. (caso ferromagnético sem vínculo)

CAPÍTULO 02

MODELO DE ISING COM SPINS MISTOS EM UM CAMPO ALEATÓRIO COM VÍNCULO.

2.1. INTRODUÇÃO.

Neste capítulo, considera-se o modelo de Ising com spins mistos, também sobre a rede favo de mel, sob a ação de um campo aleatório recozido que satisfaz a uma equação de vínculo. Como será mostrado, o efeito do vínculo corresponde a introduzir a transformação $\tau_k \rightarrow -\tau_k$ e $J \rightarrow -J$ nos resultados obtidos no capítulo anterior. Consequentemente, o modelo é resolvido exatamente, seguindo as mesmas técnicas citadas no capítulo 01, nos casos em que as sub-redes Λ_A e Λ_B , como mostra a Fig. 1.1, são ocupadas, respectivamente, com spins $1/2$ e 1 , e, $1/2$ e $3/2$.

2.2. MODELO COM SPINS DE MAGNITUDES $1/2$ E 1 .

Considerando-se as seguintes transformações: $\tau_k \rightarrow -\tau_k$ e $J \rightarrow -J$, na Hamiltoniana descrita no Capítulo 01, pela Eq.(1.2.1) pode-se reescrevê-la como:

$$\begin{aligned}
 H = & - \sum_{(ijk)} J \sigma_j \tau_k (P_{jk}^i + \bar{P}_{jk}^i) - \sum_{(ijk)} \frac{h_i}{3} (\sigma_j - \tau_k) (P_{jk}^i - \bar{P}_{jk}^i) \\
 & - \sum_{(ijk)} \mu_i (P_{jk}^i + \bar{P}_{jk}^i) - \sum_{(ijk)} D \tau_k^2 (P_{jk}^i + \bar{P}_{jk}^i) \qquad (2.2.1)
 \end{aligned}$$

onde os parâmetros acima são descritos no Capítulo anterior.

O campo aleatório h_k que atua sobre o spin τ_k é dado por:

$$h_k = \sum_{(j \in \Lambda_{\lambda k})} \sum_{i=1}^n h_i (P_{jk}^i - \bar{P}_{jk}^i) , \quad (2.2.2)$$

onde $\Lambda_{\lambda k} (\Lambda_{\lambda k} \subset \Lambda_{\lambda})$ é o conjunto de sítios da rede, vizinhos mais próximos do sítio k . Uma expressão similar, mas de sinal oposto, pode ser definida para o campo atuando sobre o spin σ_j , desta forma o campo aleatório satisfará o vínculo dado por:

$$\sum_{j \in (\Lambda_A \cup \Lambda_B)} h_j = 0 . \quad (2.2.3)$$

O vínculo acima descrito modifica o valor da constante de troca, do mesmo modo como foi visto no Capítulo anterior, pois passa a ser negativa. Isto implica que o sistema pode ter ordem antiferromagnética, o que difere do caso sem vínculo, em que a ordem era sempre ferromagnética (Horiguchi & Gonçalves, 1988; Gonçalves & Horiguchi, 1990).

Os resultados para este caso, são obtidos seguindo o mesmo procedimento adotado na seção 1.2 do Capítulo anterior. Assim, considerando-se spins de Ising de magnitudes 1/2 e 1, obtém-se para o traço parcial sobre os operadores P_{jk}^i e \bar{P}_{jk}^i , o resultado:

$$\text{Tr}_{\{P_{jk}^i, \bar{P}_{jk}^i\}} \left[e^{-\beta H'_{jk}} \right] = \text{Tr}_1 e^{\beta (J + \bar{J}) \sigma_j \tau_k + \beta (D + \bar{D}) \tau_k^2} , \quad (2.2.4)$$

onde H'_{jk} é dado por:

$$H'_{jk} = - \sum_i \left\{ J \sigma_j \tau_k (P_{jk}^i + \bar{P}_{jk}^i) + \frac{h_i}{3} (\sigma_j - \tau_k) (P_{jk}^i - \bar{P}_{jk}^i) + \mu_i (P_{jk}^i + \bar{P}_{jk}^i) + D \tau_k^2 (P_{jk}^i + \bar{P}_{jk}^i) \right\} , e \quad (2.2.5)$$

$$\bar{J} = \frac{k_B T}{2} \ln \left[\frac{f(\{0, \mu_1\})}{f(\{2h_1/3, \mu_1\})} \right], \quad (2.2.6)$$

onde $f(\{zh_1, \mu_1\})$ e D' estão definidos nas Eqs. (1.2.7) e (1.2.10), e, como mencionado inicialmente $\bar{J} = -J' < 0$.

A função de partição dada pela Eq.(1.2.2) pode ser reescrita na forma:

$$Z = r_1^{2N} \sum_{\{\sigma, \tau\}} \exp(-\beta H'), \quad (2.2.7)$$

onde N é o número de sítios de cada sub-rede e H' é a Hamiltoniana do modelo de Ising efetivo dada por:

$$\sum_{(j \in \Lambda_A, k \in \Lambda_B)} (J + \bar{J}) \sigma_j \tau_k - \sum_{(k \in \Lambda_B)} (D + D') \tau_k^2. \quad (2.2.8)$$

O valor médio do campo aplicado no sítio k é obtido, como no cálculo realizado no capítulo anterior, considerando-se o traço parcial sobre os operadores P_{jk}^i e \bar{P}_{jk}^i . Desta forma, as Eqs. (1.2.15) e (1.2.16) são dadas por:

$$\text{Tr}_{(P_{jk}^i, \bar{P}_{jk}^i)} \left[e^{-\beta H'_{jk} P_{jk}^i} \right] \equiv r_1 e^{\beta (J + \bar{J}) \sigma_j \tau_k + \beta (D + D') \tau_k^2} X(t_1 \sigma_j \tau_k + t_2 \sigma_1 + t_3 \tau_k + t_4 \tau_k^2 + t_5) \quad (2.2.9)$$

$$\text{Tr}_{(P_{jk}^i, \bar{P}_{jk}^i)} \left[e^{-\beta H'_{jk} \bar{P}_{jk}^i} \right] \equiv r_1 e^{\beta (J + \bar{J}) \sigma_j \tau_k + \beta (D + D') \tau_k^2} X(\bar{t}_1 \sigma_j \tau_k + \bar{t}_2 \sigma_1 + \bar{t}_3 \tau_k + \bar{t}_4 \tau_k^2 + \bar{t}_5), \quad (2.2.10)$$

onde t 's e \bar{t} 's são dados por:

$$t_1 = t_1 = -x_1, \quad (2.2.11)$$

$$t_2 = -t_3 = -\bar{t}_2 = \bar{t}_3 = -x_2, \quad (2.2.12)$$

$$t_4 = \bar{t}_4 = x_4, \quad (2.2.13)$$

$$t_5 = t_5 = x_5. \quad (2.2.14)$$

onde os x 's são dados pelas Eqs. (1.2.19-1.2.22).

Usando-se os resultados anteriores pode-se escrever as médias dos operadores P_{jk}^i e \bar{P}_{jk}^i , como:

$$\langle P_{jk}^i \rangle = \varepsilon_v t_1 + t_2 (\langle \sigma_j \rangle_v + \langle \tau_k \rangle_v) + t_4 \langle \tau_k^2 \rangle_v + t_5, \quad (2.2.15)$$

e,

$$\langle \bar{P}_{jk}^i \rangle = \varepsilon_v t_1 - t_2 (\langle \sigma_j \rangle_v + \langle \tau_k \rangle_v) + t_4 \langle \tau_k^2 \rangle_v + t_5. \quad (2.2.16)$$

onde, ε_v é a função de correlação entre os vizinhos mais próximos da rede favo de mel ($\varepsilon_v \equiv \langle \sigma_j \tau_k \rangle_v$).

Destes resultados, impondo-se a condição que a distribuição de campo é simétrica, ou seja $\langle P_{jk}^i \rangle = \langle \bar{P}_{jk}^i \rangle$, pode-se escrever o valor médio do campo aplicado no sítio k , como:

$$\langle h_k \rangle = \sum_{i=1}^{2n} h_i \left\{ t_i \varepsilon_v + t_4 \langle \tau_k^2 \rangle_v + t_5 \right\}, \quad (2.2.17)$$

onde, na expressão anterior, o campo aleatório foi admitido explicitamente, variando de $-h$ a h . Como para o caso sem vínculo, a condição de simetria da distribuição do campo aleatório somente é satisfeita para temperaturas maiores ou

iguais a temperatura crítica.

A partir dos valores obtidos para as variáveis t 's, nas Eqs.(2.2.11) a (2.2.14), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \langle h_k \rangle = & \sum_{i=1}^{2n} h_i e^{\beta \mu_i} \left\{ \frac{\epsilon_v}{2} \left[\frac{1}{f(\{0, \mu_i\})} - \frac{\cosh(2\beta h_i/3)}{f(\{2h_i/3, \mu_i\})} \right] + \right. \\
 & + \frac{\langle \tau_k^2 \rangle_v}{2} \left[- \frac{2\cosh(\beta h_i/3)}{f(\{h_i/3, \mu_i\})} + \left[\frac{1}{f(\{0, \mu_i\})} + \frac{\cosh(2\beta h_i/3)}{f(\{2h_i/3, \mu_i\})} \right] \right] + \\
 & \left. + \frac{e^{\beta \mu_i} \cosh(\beta h_i/3)}{f(\{h_i/3, \mu_i\})} \right\} . \tag{2.2.18}
 \end{aligned}$$

Este resultado também pode ser reescrito na forma análoga à obtida por Gonçalves & Horiguchi (1990),

$$\langle h_k \rangle \equiv \sum_{i=1}^{2n} h_i p(h_i) \equiv \int \left\{ \sum_{i=1}^{2n} h p(h) \delta(h-h_i) \right\} dh , \tag{2.2.19}$$

onde a distribuição de campo $\mathcal{P}(h)$ é simétrica e normalizada.

Seguindo os mesmos passos descritos na seção 1.2. do capítulo 01, usando-se as Eqs. (2.2.18) e (2.2.19), obtém-se:

$$\int \mathcal{P}(h) dh \left\{ \frac{2(1-\bar{Y}_1) + \bar{Y}_2 \epsilon_v - \bar{Y}_3 \langle \tau_k^2 \rangle_v}{2\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 \epsilon_v + \bar{Y}_3 \langle \tau_k^2 \rangle_v} \right\} = 0 , \tag{2.2.20}$$

e,

$$\int \mathcal{P}(h) dh \left\{ \frac{2(1-\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)+\bar{Y}_2\varepsilon_v-\bar{Y}_3\langle\tau_k^2\rangle_v}{2\bar{Y}_1-\bar{Y}_2\varepsilon_v+\bar{Y}_3\langle\tau_k^2\rangle_v} \right\} = 0 , \quad (2.2.21)$$

com,

$$\bar{Y}_1 = e^{\beta D' - \beta \bar{J}} \cosh(\beta h/3) , \quad (2.2.22)$$

$$\bar{Y}_2 = 1 + e^{-\beta \bar{J}} - 2e^{-2\beta D' - \beta \bar{J}} , \quad (2.2.23)$$

$$Y_3 = 2 - 2Y_1 - Y_2 . \quad (2.2.24)$$

A correlação ε_v e $\langle\tau_k^2\rangle_v$ são expressas em termos da correlação entre os vizinhos mais próximos $\langle\sigma_i\sigma_j\rangle_{ef}$ e da magnetização do modelo de Ising com spin 1/2 numa rede triangular, cuja constante efetiva de troca é dada por (Gonçalves, 1985):

$$\bar{J}_{ef} = \frac{k_B T}{4} \ln \left\{ \frac{2e^{\beta(D+D')} \cosh(3\beta(J+\bar{J})) + 1}{2e^{\beta(D+D')} \cosh(\beta(J+\bar{J})) + 1} \right\} . \quad (2.2.25)$$

Na temperatura crítica ($T=T_c$), os valores de ε_v e $\langle\tau_k^2\rangle_v$ são dados por (vide Apêndice A):

$$\varepsilon_v = \frac{3\sinh(3\beta(J+\bar{J})) + \sinh(\beta(J+\bar{J}))}{6(\cosh(3\beta(J+\bar{J})) - \cosh(\beta(J+\bar{J})))} \quad (2.2.26)$$

e,

$$\langle \tau_k^2 \rangle_v = \frac{\cosh(3\beta(J+\bar{J})) + \cosh(\beta(J+\bar{J}))}{2(\cosh(3\beta(J+\bar{J})) - \cosh(\beta(J+\bar{J})))} \quad (2.2.27)$$

Substituindo estes resultados nas Eqs.(2.2.20) e (2.2.21), e considerando a distribuição trimodal,

$$\mathcal{P}(h') = \frac{(1-p)}{2} [\delta(h'-h) + \delta(h'+h)] + p\delta(h') , \quad (2.2.28)$$

obtém-se o sistema de equações:

$$(1-p) \left\{ \frac{2(1-\bar{Y}_1) + \bar{Y}_2 \varepsilon_v - \bar{Y}_3 \langle \tau_k^2 \rangle_v}{2\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 \varepsilon_v + \bar{Y}_3 \langle \tau_k^2 \rangle_v} \right\} + p \left\{ \frac{2(1-\bar{Y}'_1) + \bar{Y}_2 \varepsilon_v - \bar{Y}_3 \langle \tau_k^2 \rangle_v}{2\bar{Y}'_1 - \bar{Y}_2 \varepsilon_v + \bar{Y}_3 \langle \tau_k^2 \rangle_v} \right\} = 0, \quad (2.2.29)$$

$$(1-p) \left\{ \frac{2(1-\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) + \bar{Y}_2 \varepsilon_v - \bar{Y}_3 \langle \tau_k^2 \rangle_v}{2\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 \varepsilon_v + \bar{Y}_3 \langle \tau_k^2 \rangle_v} \right\} + \\ + p \left\{ \frac{2(1-\bar{Y}'_1 - \bar{Y}_2) + \bar{Y}_2 \varepsilon_v - \bar{Y}_3 \langle \tau_k^2 \rangle_v}{2\bar{Y}'_1 - \bar{Y}_2 \varepsilon_v + \bar{Y}_3 \langle \tau_k^2 \rangle_v} \right\} = 0, \quad (2.2.30)$$

onde $y'_1 = e^{\beta D + \beta \bar{J}}$, cuja solução fornece a temperatura crítica em função dos parâmetros que definem o modelo.

A solução numérica do sistema formado pelas Eqs.(2.2.25), (2.2.29) e (2.2.30), é mostrado nas Figs. 2.1 a 2.15.

Nas Figs. 2.1 a 2.6 é mostrado a temperatura de transição T_c ($T_c \equiv k_B T_c / J$) como função de p para vários valores de α ($\alpha \equiv 2h/3J$) e diferentes valores de γ ($\gamma \equiv D/J$). Como pode ser visto para α maior que α crítico, α_c (Gonçalves & Horiguchi, 1990; Pereira & Gonçalves, 1995), o sistema apresenta

ordem antiferromagnética e ferromagnética. Conclui-se também que, independente do sinal de γ , o campo aleatório favorece apenas a ordem antiferromagnética.

α_c pode ser obtido analiticamente, e é dado pelas expressões:

$$\alpha_c = 2 \quad \text{para } \gamma \geq 0, \quad (2.2.31)$$

$$\alpha_c = \frac{2}{3}(3-\gamma) \quad \text{para } \gamma < 0, \quad (2.2.32)$$

que são satisfeitas para os valores apresentados nas Figs. 2.1-2.6, e são obtidas no Apêndice B.

Nota-se também, que para certos valores dos parâmetros que definem o modelo, as duas fases, ferro e antiferro exibem o fenômeno de reentrância e que existem probabilidades críticas, p_c , acima (abaixo) das quais o estado fundamental antiferromagnético(ferromagnético) torna-se instável.

As probabilidades críticas, p_c , são obtidas usando-se o limite $T_c \rightarrow 0$ (Syozí, 1972) nas Eqs.(2.2.29) e (2.2.30). Estas probabilidades, que são valores não universais, pois dependem de α e γ , são determinadas numericamente e dadas na tabela B-1(vide Apêndice B)

Nas Figs. 2.7 a 2.12 e 2.13 a 2.15 é mostrado a temperatura de transição como função de γ , para vários valores de α e diferentes valores de p , respectivamente, para as fases ferro e antiferromagnética. Conclui-se dos resultados apresentados que existe um γ crítico, γ_c , abaixo do qual o sistema deixa de ter ordem, dependente de α e de p . Pode-se mostrar que γ_c é explicitamente dado pelas expressões:

$$\gamma_c^F = -3 + \frac{3\alpha}{2} \quad \text{para} \quad p < \frac{1}{2} , \quad (2.2.33)$$

$$\gamma_c^F = -3 + \alpha \quad \text{para} \quad p = \frac{1}{2} , \quad (2.2.34)$$

$$\gamma_c^F = -3 + \frac{\alpha}{2} \quad \text{para} \quad \frac{1}{2} < p < 1 , \quad (2.2.35)$$

$$\gamma_c^F = -3 \quad \text{para} \quad p = 1 , \quad (2.2.36)$$

$$\gamma_c^A = 3 - \frac{3\alpha}{2} \quad \text{para} \quad p = 0 , \quad (2.2.37)$$

$$\gamma_c^A = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \text{para} \quad p \neq 0 , \quad (2.2.38)$$

onde γ_c^F e γ_c^A referem-se aos casos ferromagnético e antiferromagnético, respectivamente. Os valores dos mostrados nas Figs. 2.7 a 2.15 são consistentes com as equações acima. Em particular, deve ser notado a discontinuidade apresentada por estes parâmetros, no caso ferromagnético, quando $p \rightarrow 1$. Finalmente deve ser notado, Figs. 2.13 a 2.15, que consistentemente com o resultado obtido para α_c , a temperatura crítica tende a zero quando $\alpha \rightarrow \alpha_c$ independentemente de γ .

2.3. MODELO COM SPINS DE MAGNITUDES 1/2 E 3/2.

Os resultados para este caso são obtidos considerando-se o mesmo procedimento adotado na seção anterior, com spins de magnitudes 1/2 e 3/2 e com o campo aleatório sujeito a mesma condição de vínculo descrita anteriormente. Assim, obtém-se para o traço parcial sobre os operadores P_{jk}^i e \bar{P}_{jk}^i , o resultado:

$$\text{Tr}_{\{P_{jk}^i, \bar{P}_{jk}^i\}} \left[e^{-\beta H'_{jk}} \right] = r_2 e^{\beta(J+\bar{J}'')\sigma_j \tau_k + \beta(D+D'')\tau_k^2 + \beta D'_1 \sigma_j \tau_k^3}. \quad (2.3.1)$$

onde H'_{jk} é dado por:

$$H'_{jk} = - \sum_i \left\{ J \sigma_j \tau_k (P_{jk}^i + \bar{P}_{jk}^i) + \frac{h_1}{3} (\sigma_j - \tau_k) (P_{jk}^i - \bar{P}_{jk}^i) + \mu_1 (P_{jk}^i + \bar{P}_{jk}^i) + D \tau_k^2 (P_{jk}^i + \bar{P}_{jk}^i) \right\}, \quad (2.3.2)$$

$$J'' = - 2D'' - \frac{13}{4} D'_1, \quad (2.3.3)$$

$$D'_1 = \frac{k_B T}{6} \ln \left[\frac{(f(\{h_1/2, \mu_1\}))^3}{(f(\{h_1/6, \mu_1\}))^2 f(\{5h_1/6, \mu_1\})} \right], \quad (2.3.4)$$

onde $f(\{zh_1, \mu_1\})$ e D'' estão definidos nas Eqs. (1.2.7) e (1.3.6), e $\bar{J}'' = -J'' < 0$ como no caso para spin 1. A função de partição pode ser reescrita como:

$$Z = r_2^{2N} \sum_{\{\sigma, \tau\}} \exp(-\beta H'), \quad (2.3.5)$$

onde, N é o número de sítios de cada sub-rede e H' é a Hamiltoniana do modelo de Ising efetivo, dada por:

$$H' = \sum_{(j \in \Lambda_A, k \in \Lambda_B)} (J + \bar{J}') \sigma_j \tau_k - \sum_{(k \in \Lambda_B)} (D + D'') \tau_k^2 + \sum_{(j \in \Lambda_A, k \in \Lambda_B)} D'_1 \sigma_j \tau_k^3 \quad (2.3.6)$$

O valor médio do campo aplicado no sítio k é obtido, como no caso anterior, considerando-se o traço parcial sobre os operadores P_{jk}^i e \bar{P}_{jk}^i . Desta forma, as Eqs.(1.2.15) e (1.2.16) são dadas por:

$$\text{Tr}_{\{P_{jk}^i, \bar{P}_{jk}^i\}} \left[e^{-\beta H_{jk} P_{jk}^i} \right] \equiv r_2 e^{\beta (J + \bar{J}') \sigma_j \tau_k + \beta D'' \tau_k^2 + \beta D'_1 \sigma_j \tau_k^3} X$$

$$X(t'_1 \sigma_j \tau_k + t'_2 \sigma_j + t'_3 \tau_k + t'_4 \tau_k^2 + t'_5 \sigma_j \tau_k^2 + t'_6 \tau_k^3 + t'_7 \sigma_j \tau_k^3 + t'_8) , \quad (2.3.7)$$

$$\text{Tr}_{\{P_{jk}^i, \bar{P}_{jk}^i\}} \left[e^{-\beta H_{jk} \bar{P}_{jk}^i} \right] \equiv r_2 e^{\beta (J + \bar{J}') \sigma_j \tau_k + \beta D'' \tau_k^2 + \beta D'_1 \sigma_j \tau_k^3} X$$

$$X(\bar{t}'_1 \sigma_j \tau_k + \bar{t}'_2 \sigma_j + \bar{t}'_3 \tau_k + \bar{t}'_4 \tau_k^2 + \bar{t}'_5 \sigma_j \tau_k^2 + \bar{t}'_6 \tau_k^3 + \bar{t}'_7 \sigma_j \tau_k^3 + \bar{t}'_8) , \quad (2.3.8)$$

onde t' 's e \bar{t}' 's são, dados por:

$$t'_1 = \bar{t}'_1 = -x'_1, \quad (2.3.9)$$

$$t'_2 = -\bar{t}'_2 = x'_2, \quad (2.3.10)$$

$$t'_3 = -\bar{t}'_3 = -x'_3, \quad (2.3.11)$$

$$t'_4 = \bar{t}'_4 = x'_4, \quad (2.3.12)$$

$$t'_5 = -\bar{t}'_5 = x'_5, \quad (2.3.13)$$

$$t'_6 = -\bar{t}'_6 = -x'_6, \quad (2.3.14)$$

$$t'_7 = \bar{t}'_7 = -x'_7, \quad (2.3.15)$$

$$t'_8 = \bar{t}'_8 = x'_8, \quad (2.3.16)$$

e os parâmetros x' 's são definidos nas Eqs. (1.3.14-1.3.21).

Usando-se os resultados anteriores, pode-se escrever as médias dos operadores P_{jk}^1 e \bar{P}_{jk}^1 , como:

$$\begin{aligned} \langle P_{jk}^1 \rangle = \varepsilon'_v t'_1 + t'_2 \langle \sigma_j \rangle'_v + t'_3 \langle \tau_k \rangle'_v + t'_4 \langle \tau_k^2 \rangle'_v + t'_5 \langle \sigma_j \tau_k^2 \rangle'_v + \\ + t'_6 \langle \tau_k^3 \rangle'_v + t'_7 \langle \sigma_j \tau_k^3 \rangle'_v + t'_8, \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

e,

$$\begin{aligned} \langle \bar{P}_{jk}^1 \rangle = \varepsilon'_v t'_1 - t'_2 \langle \sigma_j \rangle'_v - t'_3 \langle \tau_k \rangle'_v + t'_4 \langle \tau_k^2 \rangle'_v - t'_5 \langle \sigma_j \tau_k^2 \rangle'_v + \\ - t'_6 \langle \tau_k^3 \rangle'_v + t'_7 \langle \sigma_j \tau_k^3 \rangle'_v + t'_8. \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

onde, ε'_v é a função de correlação entre os vizinhos mais próximos da rede favo de mel.

Destes resultados, impondo-se a condição que a distribuição de campo é simétrica, como no caso descrito na seção 1.2, o valor médio do campo aplicado no sítio k é dado como:

$$\langle h_k \rangle = \sum_{i=1}^{2n} h_i \left\{ t'_1 \varepsilon'_v + t'_4 \langle \tau_k^2 \rangle'_v + t'_7 \langle \sigma_j \tau_k^3 \rangle'_v + t'_8 \right\} , \quad (2.3.19)$$

onde o campo aleatório foi admitido explicitamente, variando de $-h$ a h . Como nos casos anteriores, a condição de simetria da distribuição de campo aleatório somente é satisfeita para temperaturas maiores ou iguais a temperatura crítica.

Substituindo-se os resultados obtidos para as variáveis t 's na expressão anterior, obtém-se:

$$\langle h_k \rangle = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{n=1}^3 h_i e^{\beta \mu_i} C_n A_n , \quad (2.3.20)$$

onde os A 's são definidos nas Eqs. (1.3.22-1.3.24), e os C 's são dados por:

$$C_1 = - \frac{13}{6} \varepsilon'_v + \frac{2}{3} \langle \sigma_j \tau_k^3 \rangle'_v + 1 , \quad (2.3.21)$$

$$C_2 = \frac{9}{4} \varepsilon'_v - \frac{1}{2} \langle \tau_k^2 \rangle'_v - \langle \sigma_j \tau_k^3 \rangle'_v + \frac{9}{8} , \quad (2.3.22)$$

$$C_3 = - \frac{1}{12} \varepsilon'_v + \frac{1}{2} \langle \tau_k^2 \rangle'_v + \frac{1}{3} \langle \sigma_j \tau_k^3 \rangle'_v - \frac{1}{8} . \quad (2.3.23)$$

Seguindo o mesmo procedimento adotado na seção 1.3, e considerando que a distribuição de campo $\mathcal{P}(h)$ é simétrica e satisfaz a condição de normalização dada pela Eq.(1.2.29), pode-se escrever que:

$$p(h_1) = \sum_{n=1}^3 e^{\beta\mu_1} C_n A_n . \quad (2.3.24)$$

Das Eqs. (1.3.6) e (2.3.4), seguindo o mesmo procedimento adotado na seção 1.3 para eliminar os potenciais químicos, e levando em consideração a condição de normalização mencionada anteriormente, tem-se:

$$\int \mathcal{P}(h) dh \left\{ 1 - \frac{2 y_2'' \cosh(\beta h/2)}{V} \right\} = 0 , \quad (2.3.25)$$

e,

$$\int \mathcal{P}(h) dh \left\{ 1 - \frac{2 \cosh(5\beta h/6)}{V} \right\} = 0 , \quad (2.3.26)$$

com,

$$V = C_1 y_1'' \cosh(\beta h/6) + C_2 y_2'' \cosh(\beta h/2) + C_3 \cosh(5\beta h/6) , \quad (2.3.27)$$

$$y_1'' = e^{-3\beta\bar{J}' - 27\beta D_1'/4} , \quad (2.3.28)$$

$$y_2'' = e^{-2\beta\bar{J}' - 13\beta D_1'/2} . \quad (2.3.29)$$

A correlação ε'_v e as médias $\langle \tau_k^2 \rangle'_v$ e $\langle \sigma_j \tau_k^3 \rangle'_v$ são expressas em termos da correlação entre os vizinhos mais próximos $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\text{ef}}$ do modelo de Ising com spin 1/2 na rede triangular, com constante efetiva de troca dada por:

$$\bar{J}'_{\text{ef}} = \frac{k_B T}{4} \ln(Z_1) , \quad (2.3.30)$$

$$\frac{Z'_2 \cosh(9\beta J'_2/2) + \cosh(3\beta J'_1/2)}{Z'_2 \cosh(3\beta J'_2/2) + \cosh(\beta J'_1/2)} \quad (2.3.31)$$

onde,

$$Z'_2 = e^{\beta(2D - \bar{J}'' - 13D'_1/4)} \quad (2.3.32)$$

$$J'_1 = J + \bar{J}'' + D'_1/4 \quad (2.3.33)$$

$$J'_2 = J + \bar{J}'' + 9D'_1/4 . \quad (2.3.34)$$

Na temperatura crítica ($T=T_c$), são obtidos os valores críticos exatos de ε'_v , $\langle \tau_k^2 \rangle'_v$ e $\langle \sigma_j \tau_k^3 \rangle'_v$, mapeando o modelo na rede triangular (Stephenson, 1964; Baxter, 1982). Para essa temperatura ε'_v , $\langle \tau_k^2 \rangle'_v$ e $\langle \sigma_j \tau_k^3 \rangle'_v$ são dados por (vide Apêndice A):

$$\varepsilon'_v = \frac{1}{8} \left\{ \frac{9Z'_2 \sinh(9\beta J'_2/2) + 3\sinh(3\beta J'_1/2)}{Z'_2 \cosh(9\beta J'_2/2) + \cosh(3\beta J'_1/2)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \frac{3Z'_2 \sinh(3\beta J'_2/2) + \sinh(\beta J'_1/2)}{Z'_2 \cosh(3\beta J'_2/2) + \cosh(\beta J'_1/2)} \right\} , \quad (2.3.35)$$

$$\langle \tau_k^2 \rangle'_v = \frac{1}{16} \left\{ \frac{27Z'_2 \cosh(9\beta J'_2/2) + 3\cosh(3\beta J'_1/2)}{Z'_2 \cosh(9\beta J'_2/2) + \cosh(3\beta J'_1/2)} + \frac{9Z'_2 \cosh(3\beta J'_2/2) + \cosh(\beta J'_1/2)}{Z'_2 \cosh(3\beta J'_2/2) + \cosh(\beta J'_1/2)} \right\}, \quad (2.3.36)$$

$$\langle \sigma_j \tau_k^3 \rangle'_v = \frac{1}{32} \left\{ \frac{81Z'_2 \sinh(9\beta J'_2/2) + 3\sinh(3\beta J'_1/2)}{Z'_2 \cosh(9\beta J'_2/2) + \cosh(3\beta J'_1/2)} + \frac{1}{3} \frac{27Z'_2 \sinh(3\beta J'_2/2) + \sinh(\beta J'_1/2)}{Z'_2 \cosh(3\beta J'_2/2) + \cosh(\beta J'_1/2)} \right\}. \quad (2.3.37)$$

A temperatura crítica T_c , é obtida substituindo as Eqs.(2.3.35) a (2.3.37) nas Eqs.(2.3.25) e (2.3.26), e as soluções são numericamente obtidas, resolvendo-se o sistema de formado por essas equações mais a Eq.(2.3.30)

O sistema a ser solucionado numericamente, considerando a distribuição de campo trimodal definida na Eq.(2.2.28), é explicitamente dado por:

$$(1-p) \left\{ 1 - \frac{2 Y_2'' \cosh(\beta h/2)}{V} \right\} + p \left\{ 1 - \frac{2 Y_2''}{C_1 Y_1'' + C_2 Y_2'' + C_3} \right\} = 0 \quad (2.3.38)$$

e,

$$(1-p) \left\{ 1 - \frac{2 \cosh(5\beta h/6)}{V} \right\} + p \left\{ 1 - \frac{2}{C_1 Y_1'' + C_2 Y_2'' + C_3} \right\} = 0 \quad (2.3.39)$$

Os resultados numéricos do sistema formado pelas Eqs.(2.3.30), (2.3.38) e (2.3.39), é mostrado nas Figs. 2.16 a 2.37.

Nas Figs. 2.16 a 2.21 é mostrado a temperatura de transição renormalizada como função de p , para vários valores de α' ($\alpha' \equiv h/6J$) e diferentes valores de γ ($\gamma \equiv D/J$). Como no caso de spin 1, o campo aleatório com vínculo descrito pela Eq. (2.2.3) favorece o ordenamento antiferromagnético independentemente do sinal de γ , o qual somente aparece para α' maior que α'_c crítico, α'_c (Gonçalves & Horiguchi, 1990). No Apêndice B, é mostrado que para $\gamma=0$, $\alpha'_c=3/4$. Os resultados mostrados nas Figs. 2.16-2.21 permitem conjecturar-se que, para $\gamma>0$, α'_c também é igual a $3/4$, e para $\gamma<0$, $\alpha'_c=1/2$. Nota-se também que, para certos valores dos parâmetros que definem o modelo, as duas fases, ferromagnética e antiferromagnética, exibem o fenômeno de reentrância.

Como no caso anterior, não existe parâmetro crítico p_c para $\alpha'<\alpha'_c$. Para $\alpha'>\alpha'_c$ os valores mostrados nas Figs. 2.16-2.21 são obtidos através de extrapolação numérica dados por:

a) $\gamma=0$

$$p_c^F=0.632620\dots \quad \text{para } \alpha'_c=3/4, \quad (2.3.40)$$

$$p_c^F=0.884900\dots \quad \text{para } \alpha'>3/4. \quad (2.3.41)$$

$$p_c^A=0.173504\dots$$

b) $\gamma=1$ e $\gamma=2$

$$p_c^A=0.163600\dots \quad \text{para } \alpha'>3/4, \quad (2.3.42)$$

sendo os valores de p_c^F , iguais aos obtidos para $\gamma=0$.

c) $\gamma=-1$.

$$p_c^F=0.4803116\dots \quad \text{para } \alpha'_c=1/2, \quad (2.3.43)$$

$$p_c^F=0.916500\dots \quad \text{para } \alpha'_c>1/2. \quad (2.3.44)$$

$$p_c^\lambda=0.093153\dots$$

d) $\gamma=-3/2$.

$$p_c^F=0.6711200\dots \quad \text{para } \alpha'_c=1/2, \quad (2.3.45)$$

$$p_c^F=0.916500\dots \quad \text{para } \alpha'_c>1/2. \quad (2.3.46)$$

$$p_c^\lambda=0.083360\dots$$

e) $\gamma=-2$.

$$p_c^F=0.6711200\dots \quad \text{para } \alpha'_c=1/2, \quad (2.3.47)$$

$$p_c^F=0.916500\dots \quad \text{para } \alpha'_c>1/2. \quad (2.3.48)$$

$$p_c^\lambda=0.083360\dots$$

Estes resultados sugerem que p_c , mesmo não sendo uma grandeza universal, é independente de γ para $\gamma>0$, o que não acontece para $\gamma<0$.

Nas Figs. 2.22 a 2.32 e 2.33 a 2.37 é mostrado a temperatura de transição como função de γ para vários valores de α' e diferentes valores de p , respectivamente, para as fases ferromagnética e antiferromagnética. Neste caso, como no caso do campo sem vínculo, não existe γ_c , uma vez que para spin semi-inteiro não é acessível o estado de spin zero. Deve finalmente ser notado que no limite $|\gamma| \rightarrow \infty$, a temperatura crítica para ambas as fases, tende a um valor assintótico que depende de p e α , apresentando portanto, um comportamento também análogo ao caso do campo sem vínculo.

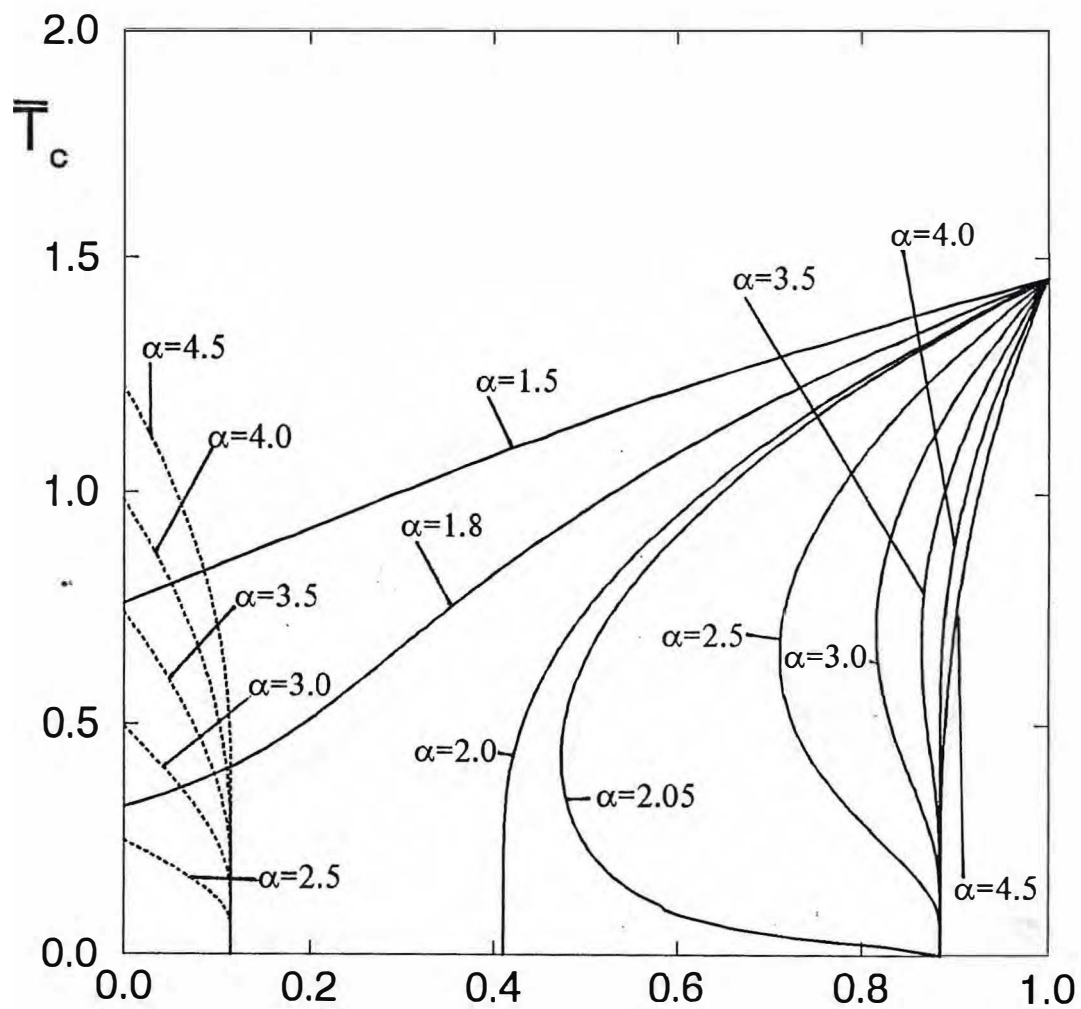


Fig. 2.1 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de p (probabilidades de ligações decoradas) para vários α ($\alpha \equiv 2h/3J$), $\gamma=2$ e $s=1$ (caso com vínculo). As linhas contínuas definem as fronteiras ferromagnéticas e as linhas tracejadas, as fronteiras antiferromagnéticas.

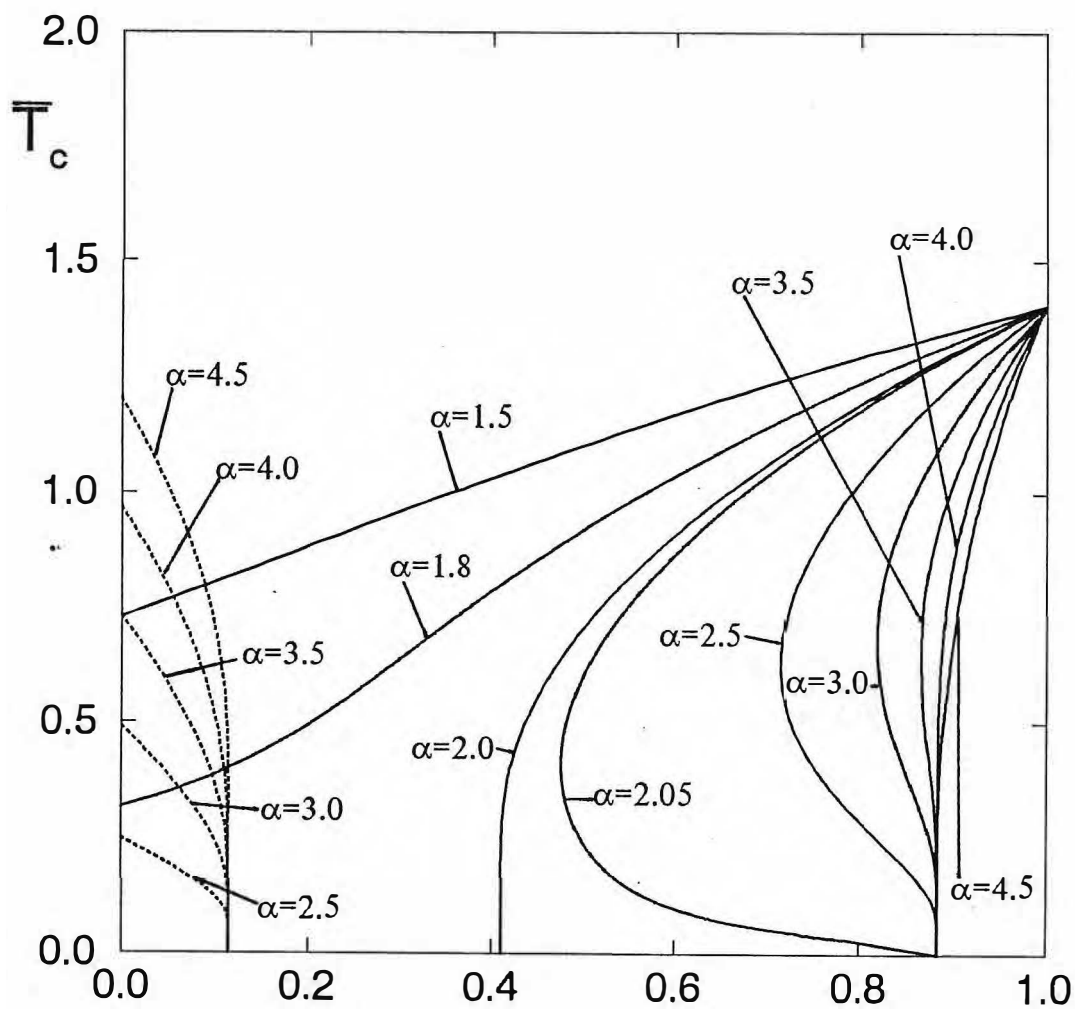


Fig. 2.2 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de p (probabilidades de ligações decoradas) para vários α ($\alpha \equiv 2h/3J$), $\gamma=1$ e $s=1$ (caso com vínculo). As linhas contínuas definem as fronteiras ferromagnéticas e as linhas tracejadas, as fronteiras antiferromagnéticas.

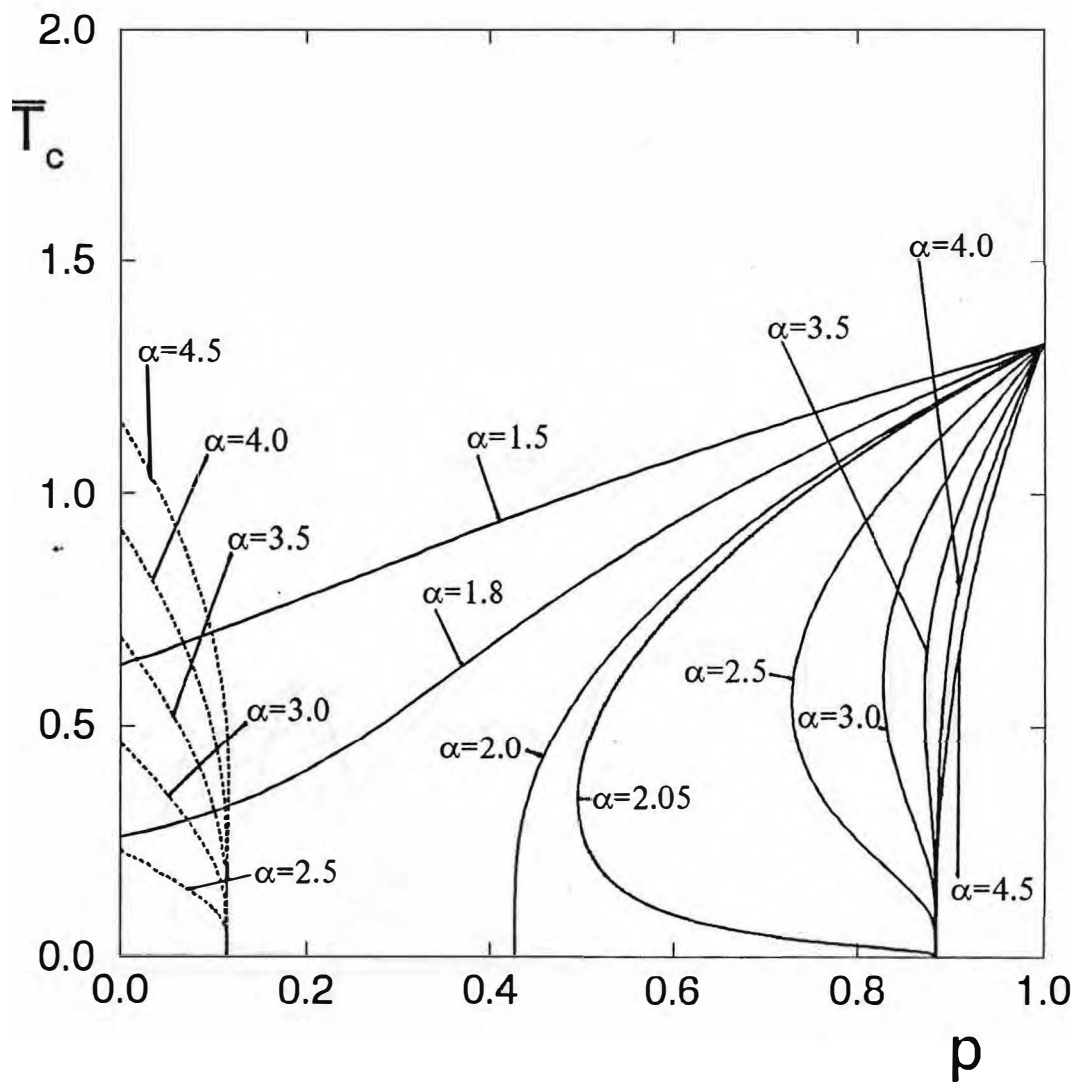


Fig. 2.3 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de p (probabilidades de ligações decoradas) para vários α ($\alpha \equiv 2h/3J$), $\gamma=0$ e $s=1$ (caso com vínculo). As linhas contínuas definem as fronteiras ferromagnéticas e as linhas tracejadas, as fronteiras antiferromagnéticas.

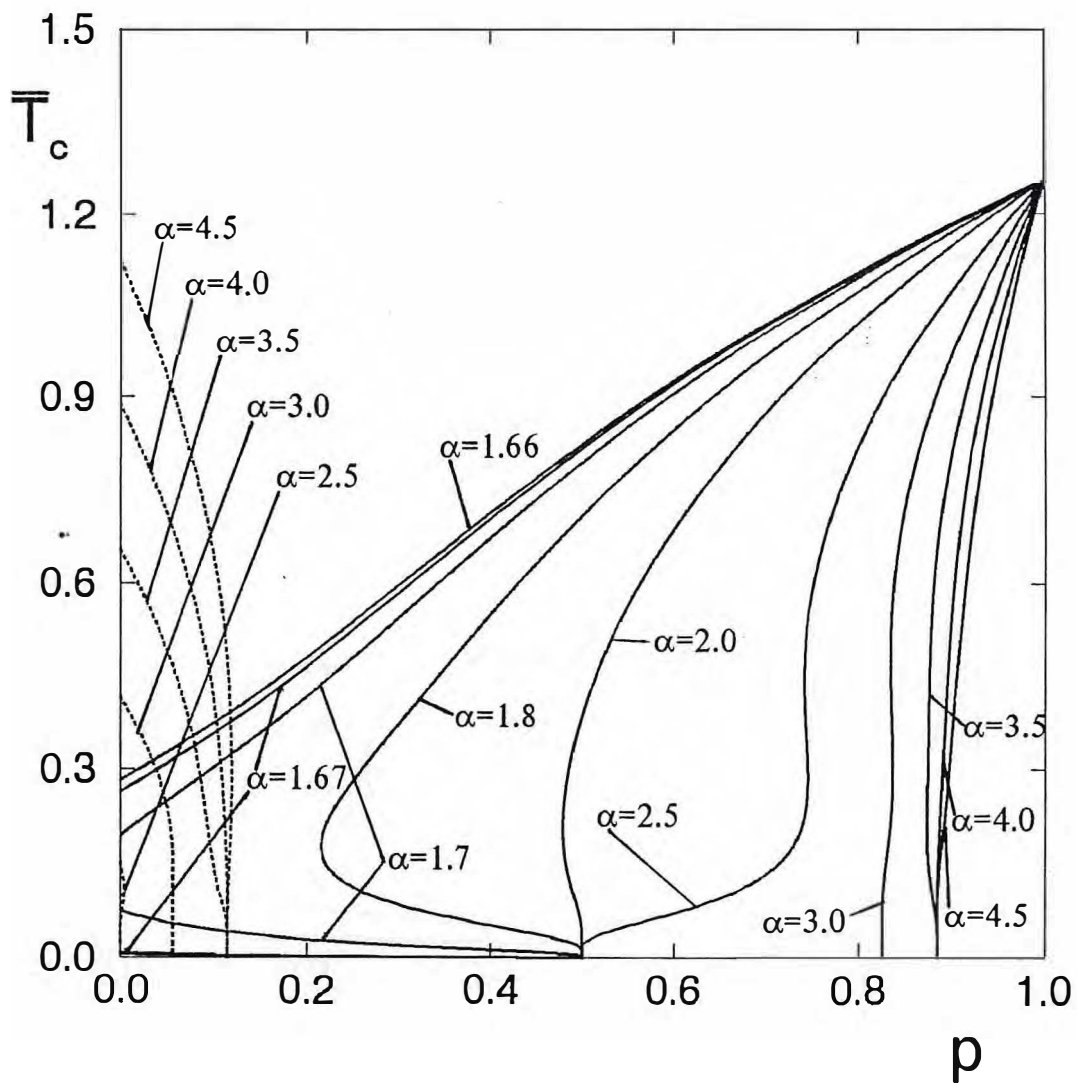


Fig. 2.4 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de p (probabilidades de ligações decoradas) para vários α ($\alpha \equiv 2h/3J$), $\gamma = -0.5$ e $s=1$ (caso com vínculo). As linhas contínuas definem as fronteiras ferromagnéticas e as linhas tracejadas, as fronteiras antiferromagnéticas.

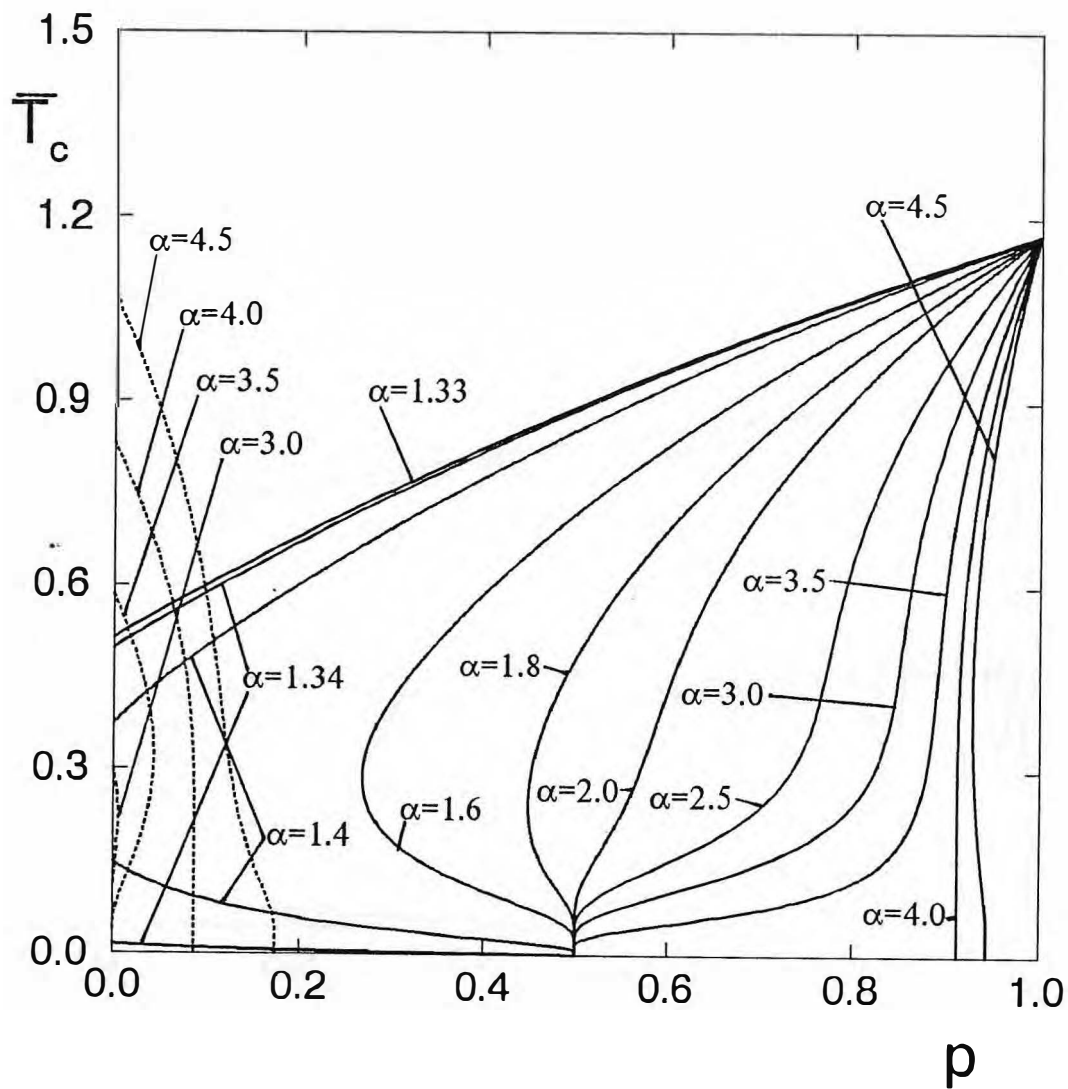


Fig. 2.5 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de p (probabilidades de ligações decoradas) para vários α ($\alpha \equiv 2h/3J$), $\gamma = -1$ e $s = 1$ (caso com vínculo). As linhas contínuas definem as fronteiras ferromagnéticas e as linhas tracejadas, as fronteiras antiferromagnéticas.

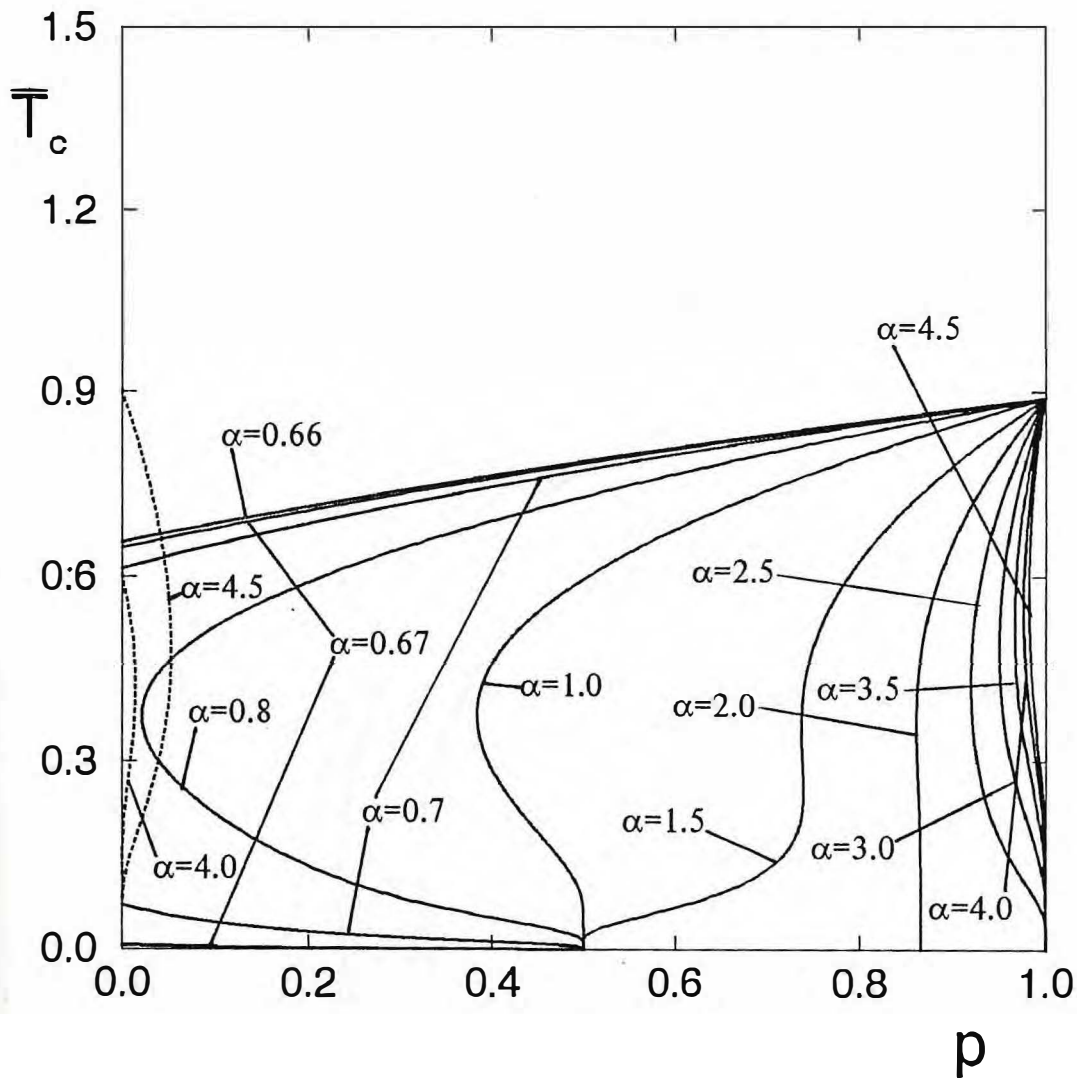


Fig. 2.6 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de p (probabilidades de ligações decoradas) para vários α ($\alpha \equiv 2h/3J$), $\gamma = -2$ e $s = 1$ (caso com vínculo). As linhas contínuas definem as fronteiras ferromagnéticas e as linhas tracejadas, as fronteiras antiferromagnéticas.

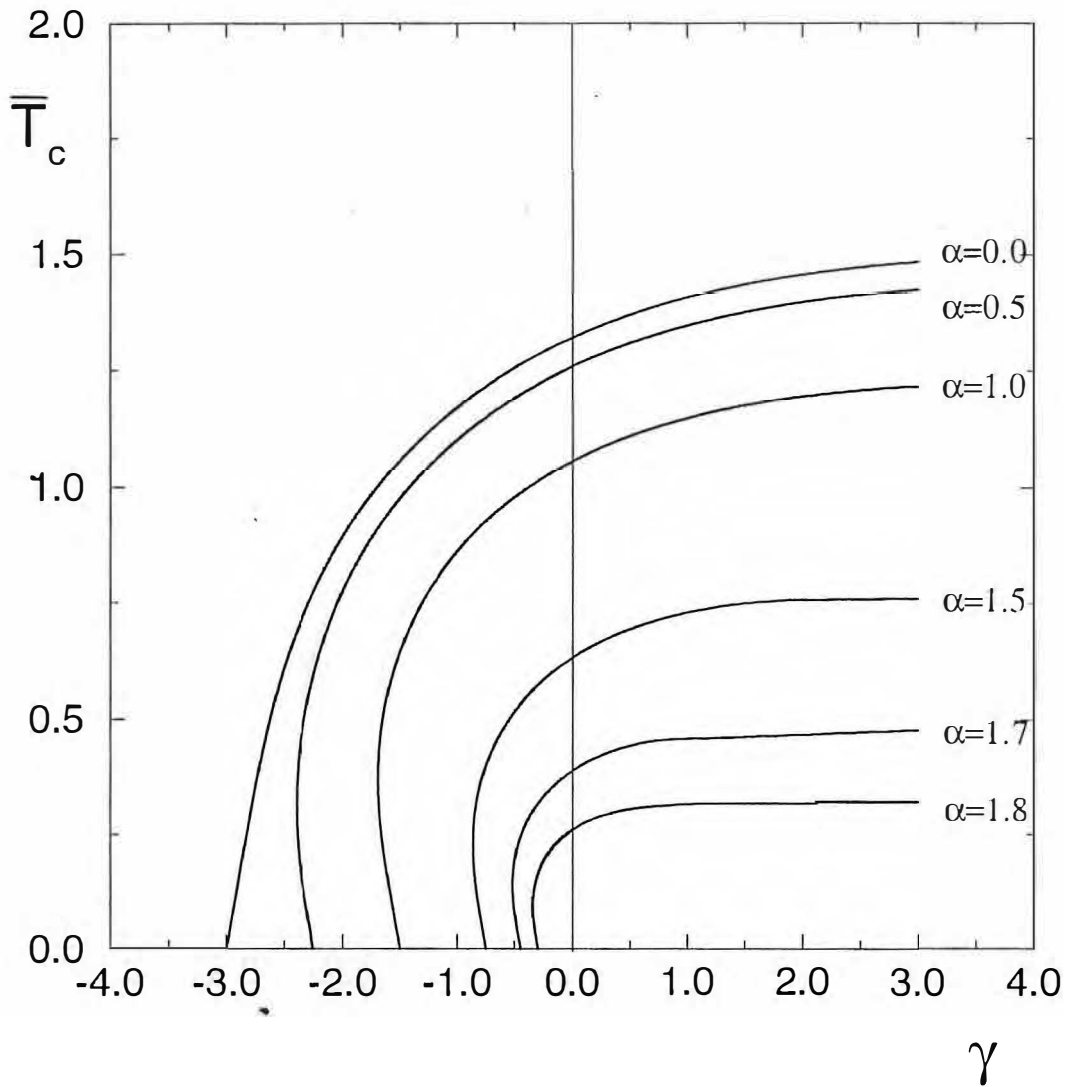


Fig. 2.7 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv 2h/3J$), $p=0$ e $s=1$. (caso ferromagnético com vínculo)

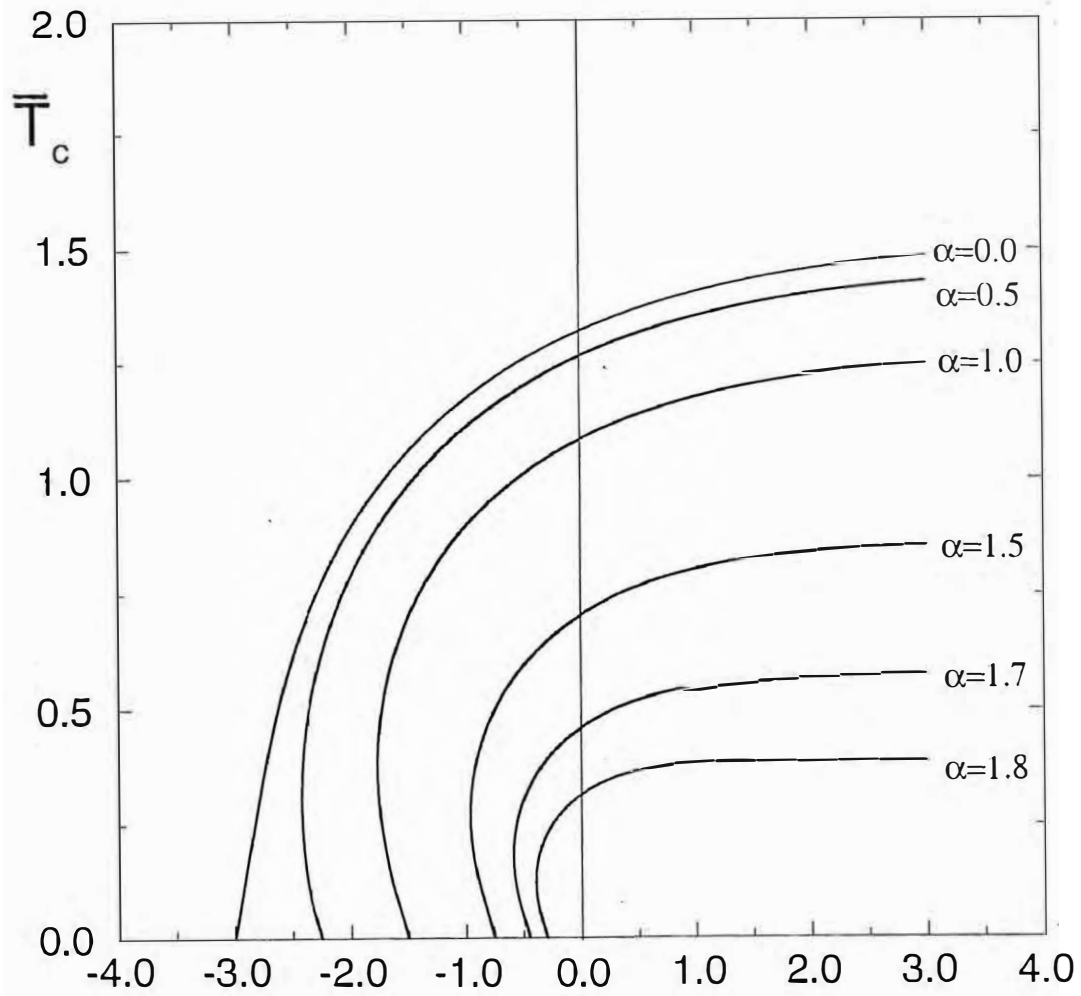


Fig. 2.8 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv 2h/3J$), $p=0.1$ e $s=1$. (caso ferromagnético com vínculo)

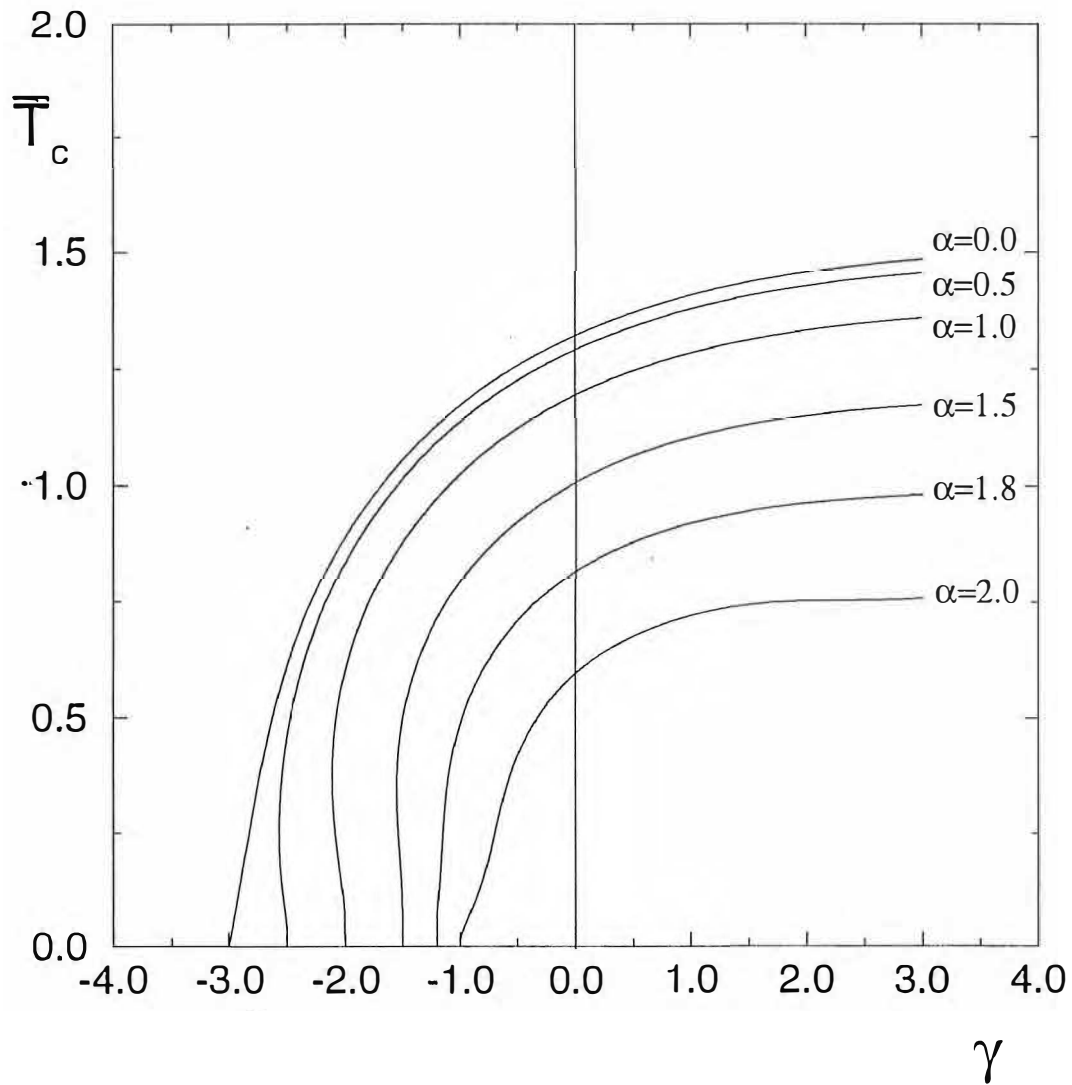


Fig. 2.9 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv 2h/3J$), $p=0.5$ e $s=1$. (caso ferromagnético com vínculo)

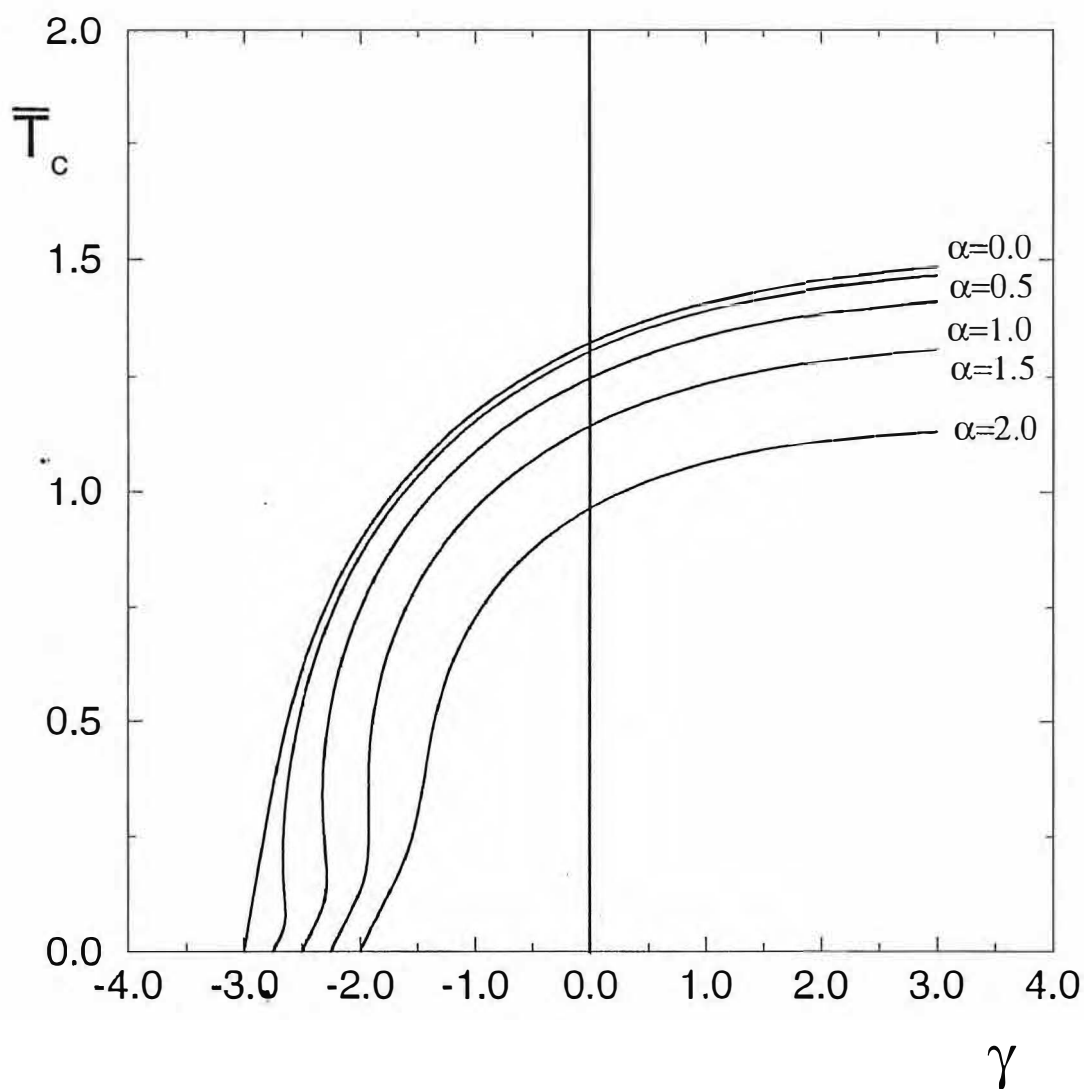


Fig. 2.10 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_b T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv 2h/3J$), $p=0.7$ e $s=1$. (caso ferromagnético com vínculo)

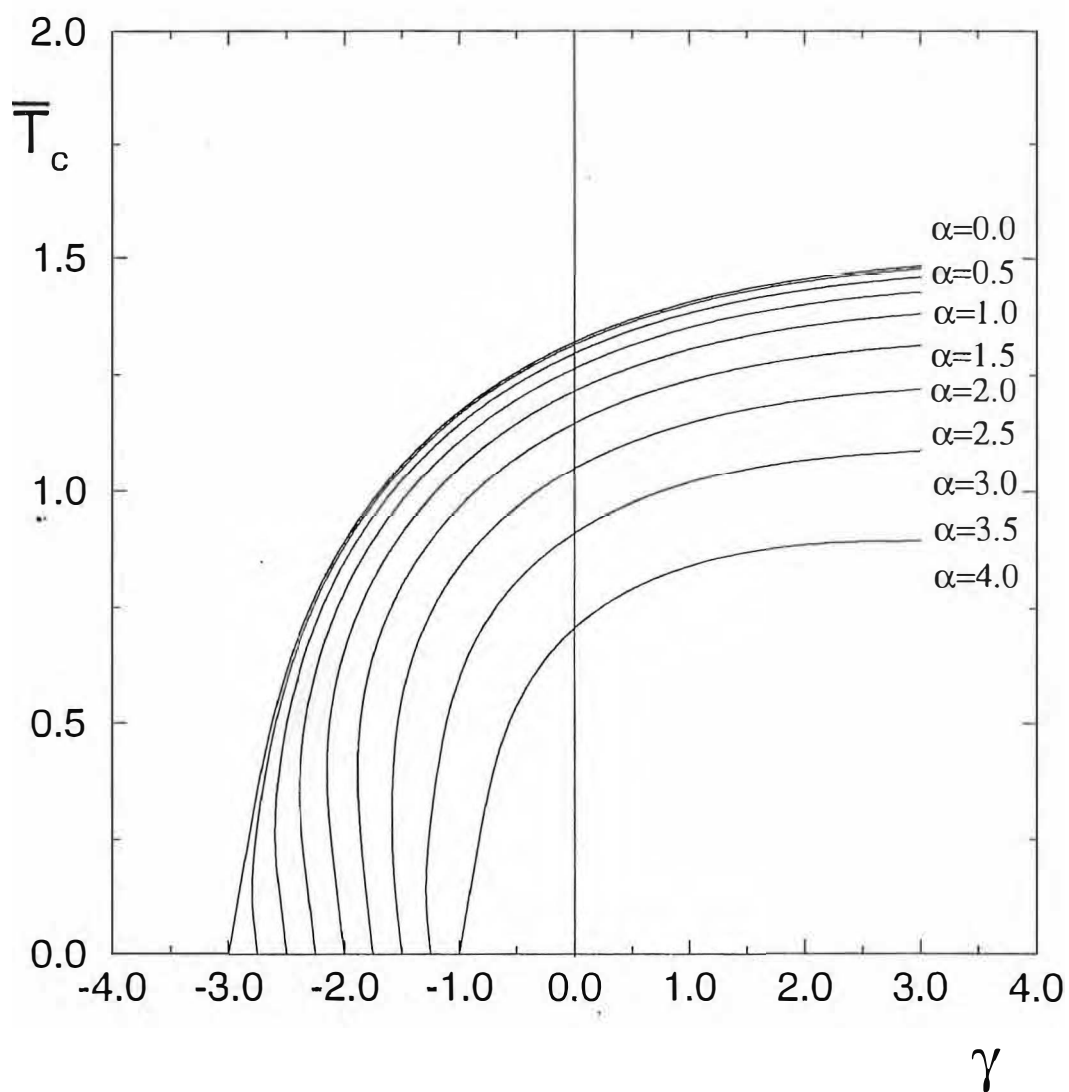


Fig. 2.11 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_b T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv 2h/3J$), $p=0.9$ e $s=1$. (caso ferromagnético com vínculo)

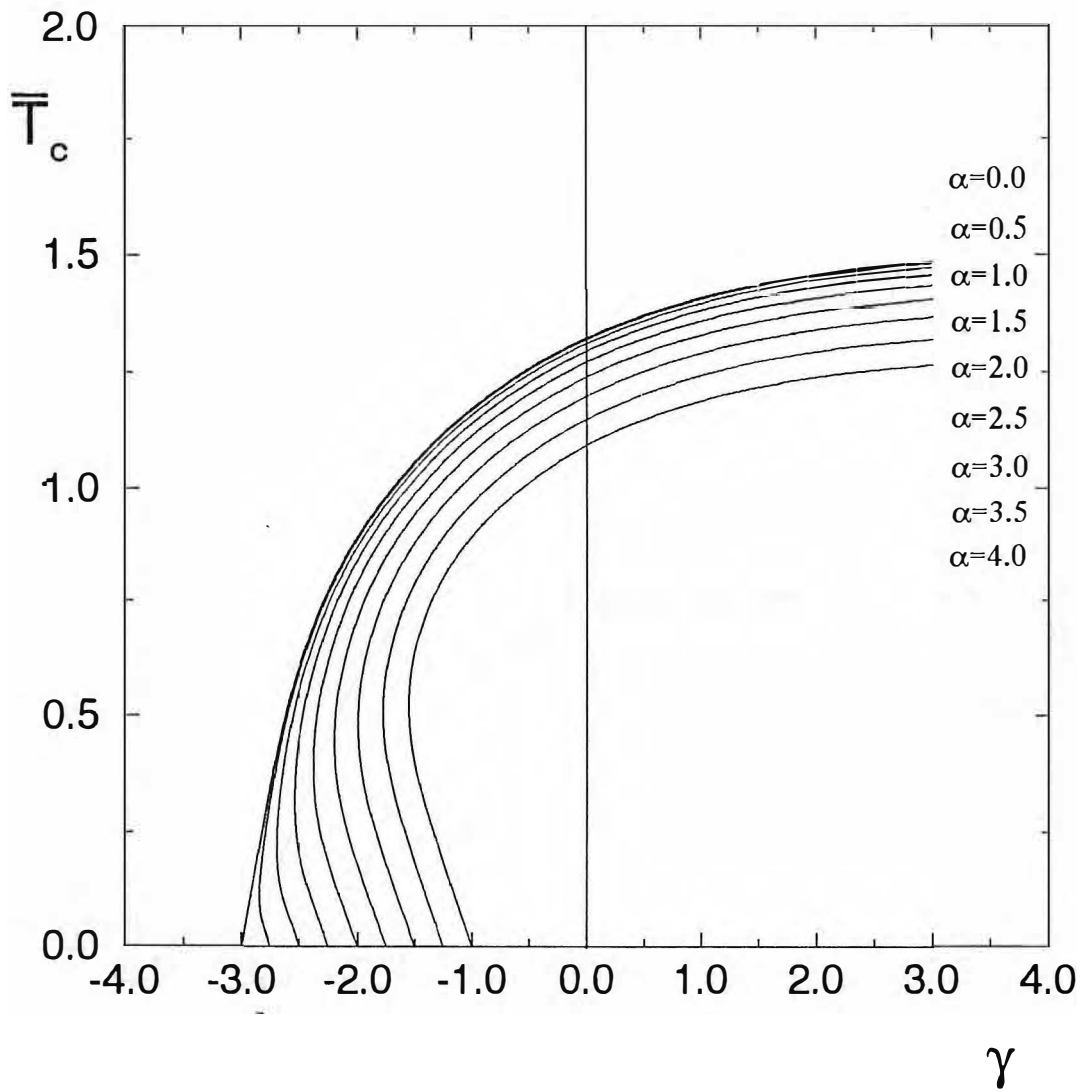


Fig. 2.12 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv 2h/3J$), $p=0.95$ e $s=1$. (caso ferromagnético com vínculo)

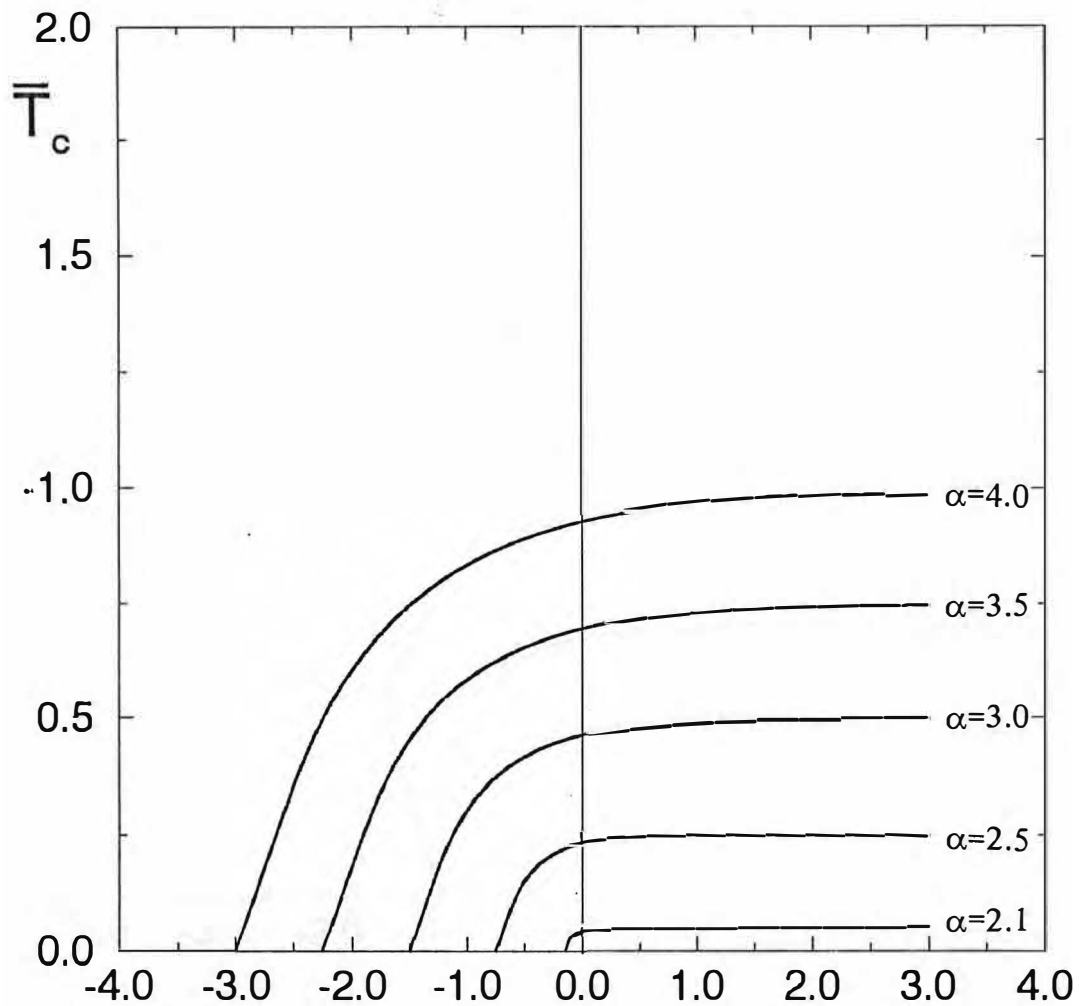


Fig. 2.13 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv 2h/3J$), $p=0$ e $s=1$. (caso antiferromagnético com vínculo)

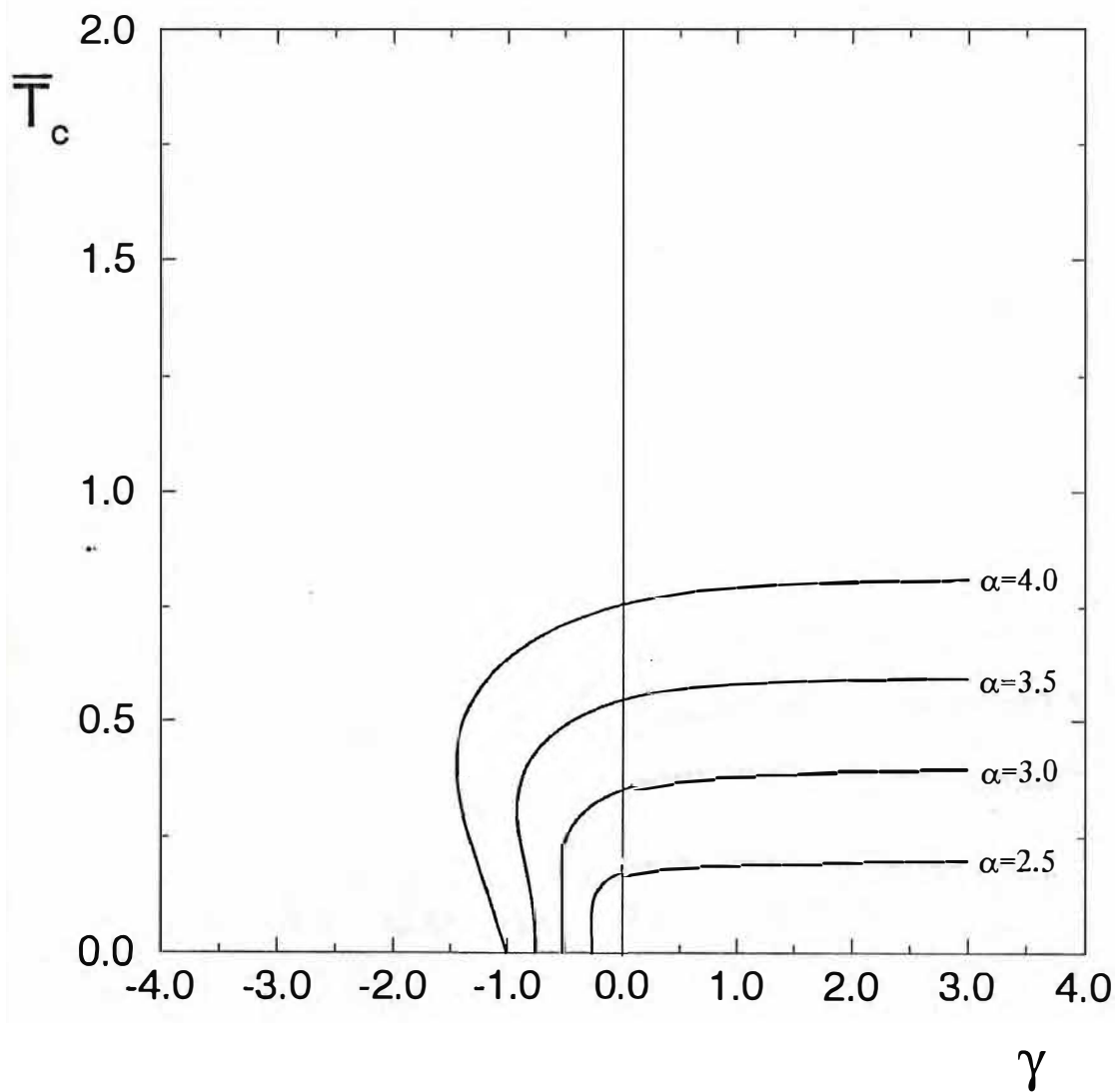


Fig. 2.14 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv 2h/3J$), $p=0.05$ e $s=1$. (caso antiferromagnético com vínculo)

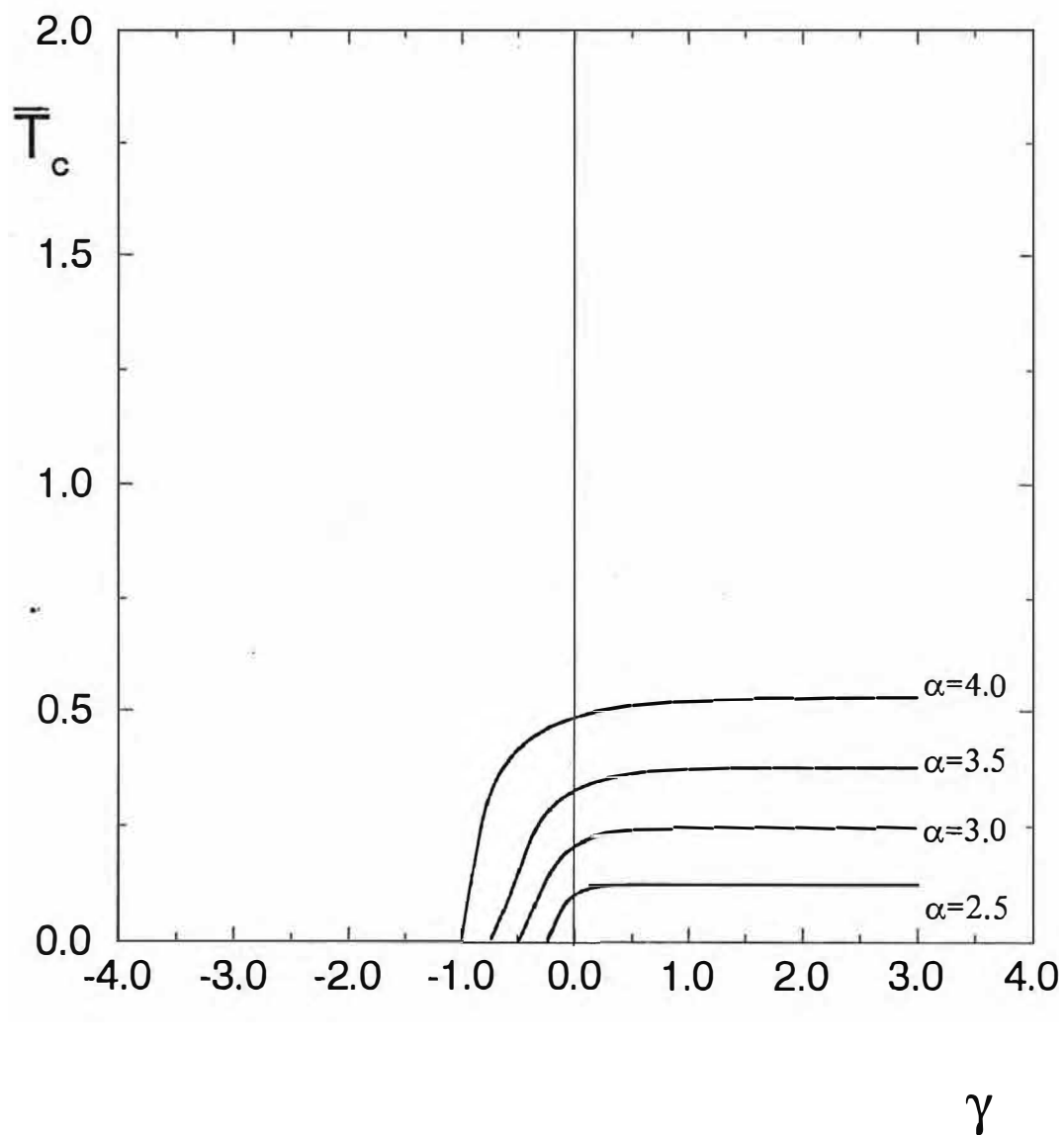


Fig. 2.15 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv 2h/3J$), $p=0.1$ e $s=1$. (caso antiferromagnético com vínculo)

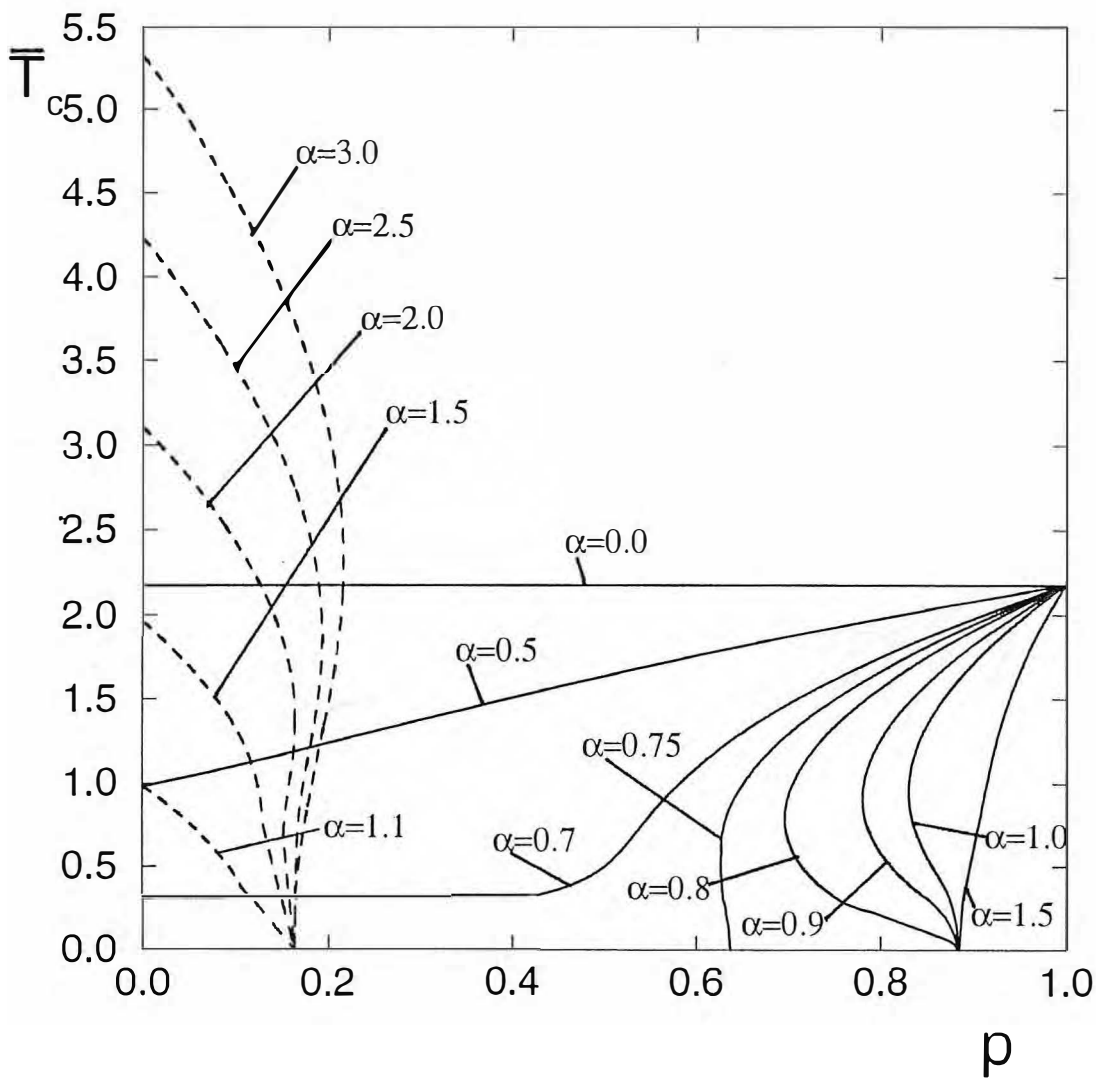


Fig. 2.16 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de p (probabilidades de ligações decoradas) para vários α ($\alpha \equiv h/6J$), $\gamma=2$ e $s=3/2$ (caso com vínculo). As linhas contínuas definem as fronteiras ferromagnéticas e as linhas tracejadas, as fronteiras antiferromagnéticas.

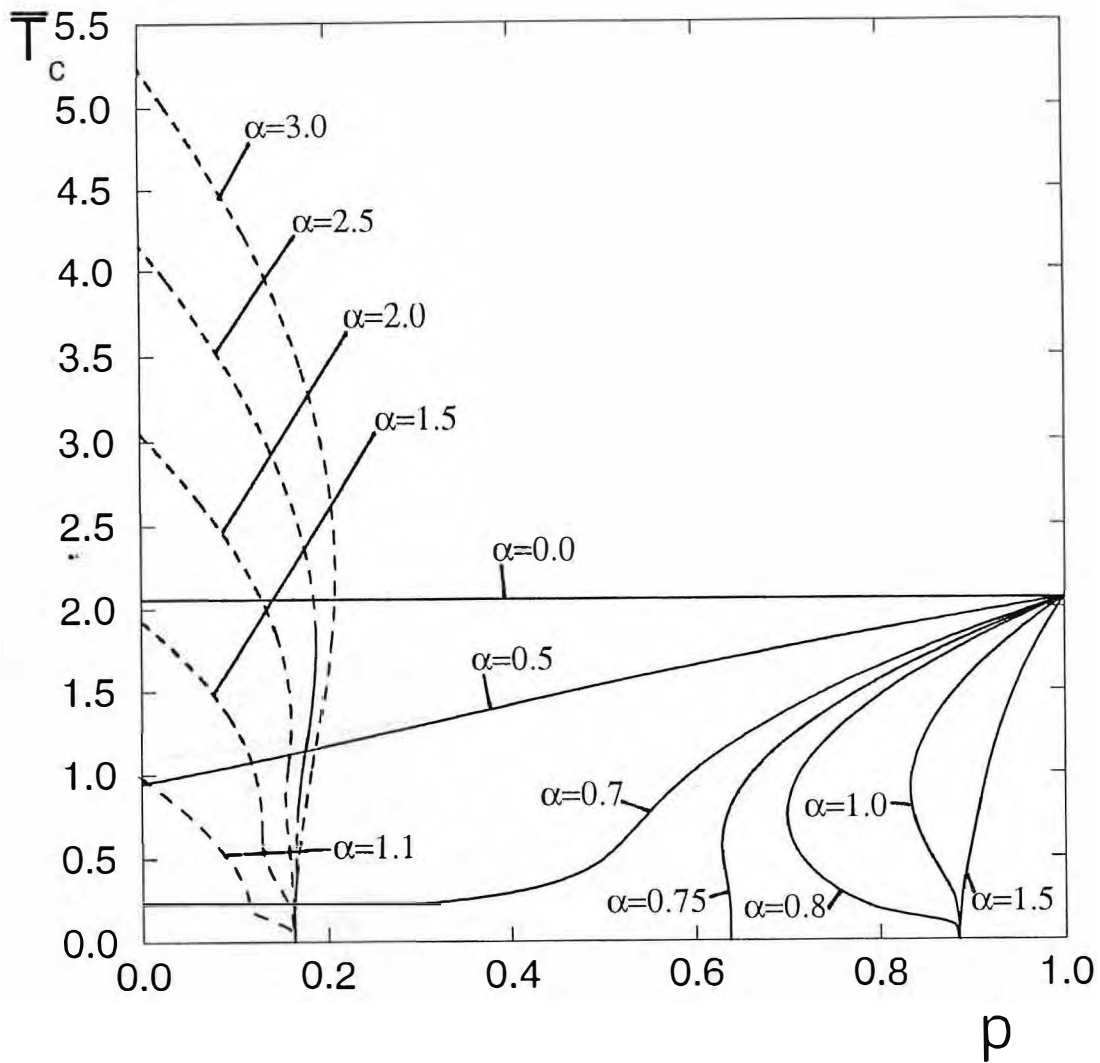


Fig. 2.17 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de p (probabilidades de ligações decoradas) para vários α ($\alpha \equiv h/6J$), $\gamma=1$ e $s=3/2$ (caso com vínculo). As linhas contínuas definem as fronteiras ferromagnéticas e as linhas tracejadas, as fronteiras antiferromagnéticas.

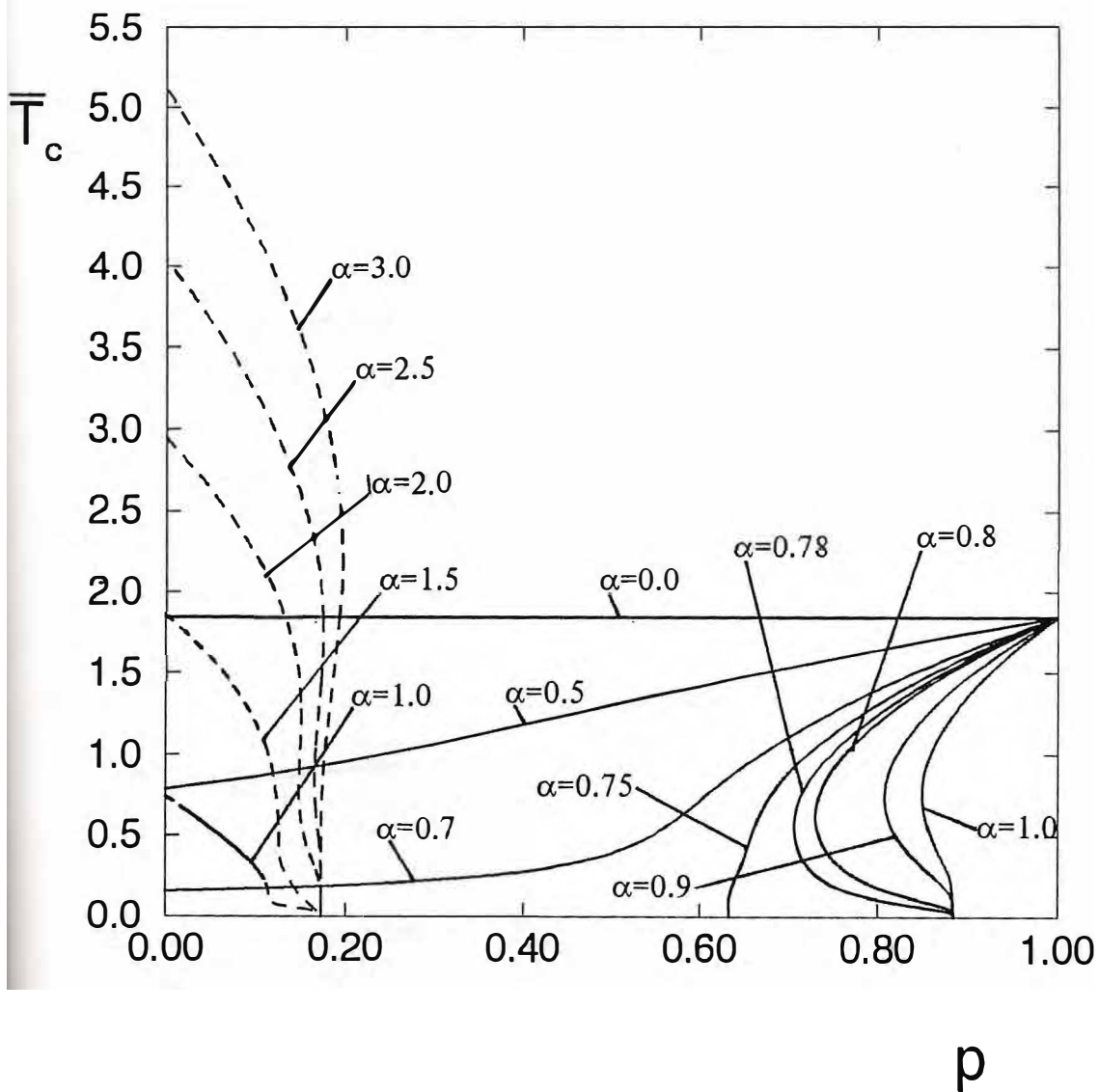


Fig. 2.18 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_b T_c / J$) como função de p (probabilidades de ligações decoradas) para vários α ($\alpha \equiv h/6J$), $\gamma=0$ e $s=3/2$ (caso com vínculo). As linhas contínuas definem as fronteiras ferromagnéticas e as linhas tracejadas, as fronteiras antiferromagnéticas.

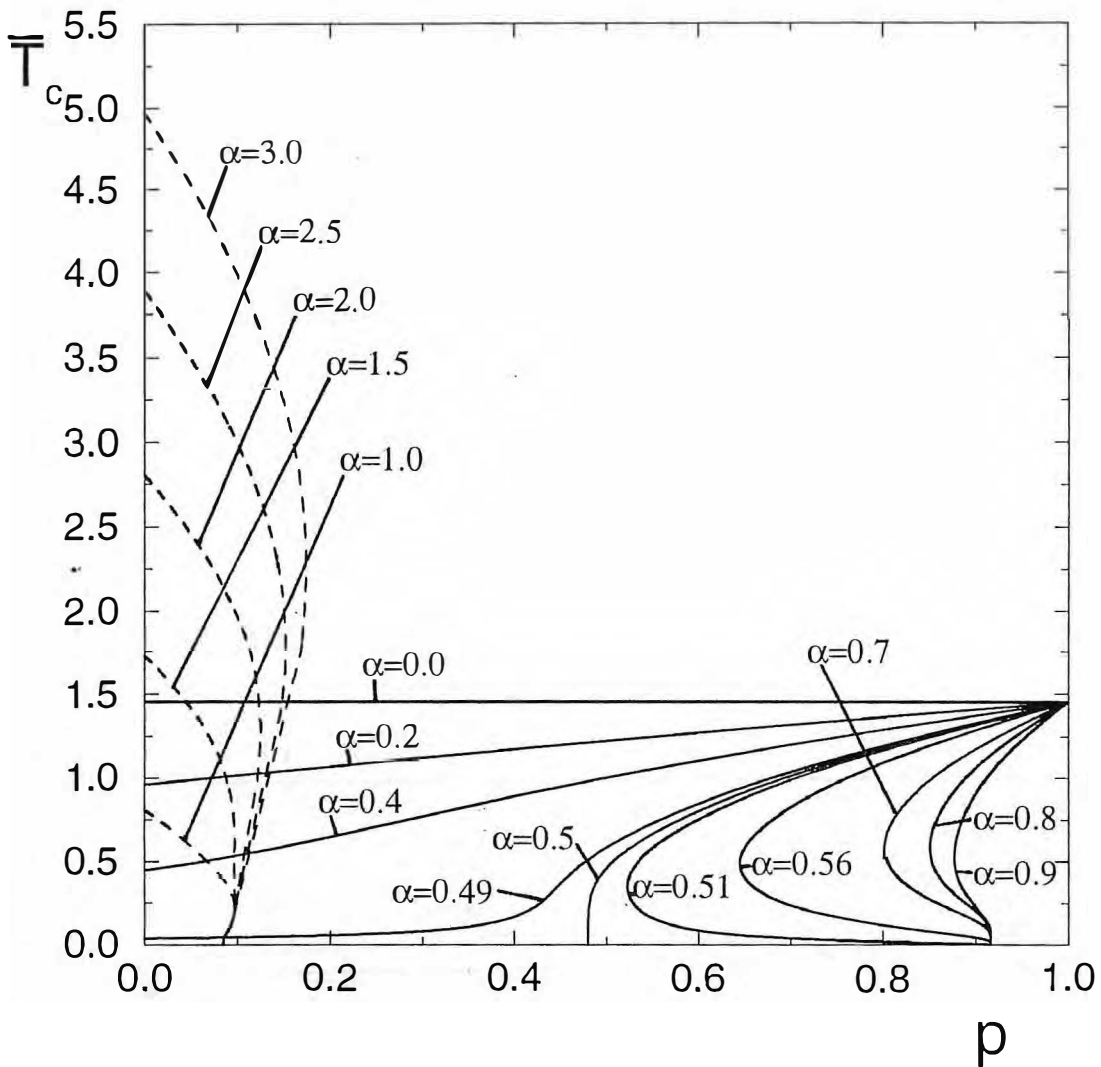


Fig. 2.19 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de p (probabilidades de ligações decoradas) para vários α ($\alpha \equiv h/6J$), $\gamma = -1$ e $s = 3/2$ (caso com vínculo). As linhas contínuas definem as fronteiras ferromagnéticas e as linhas tracejadas, as fronteiras antiferromagnéticas.

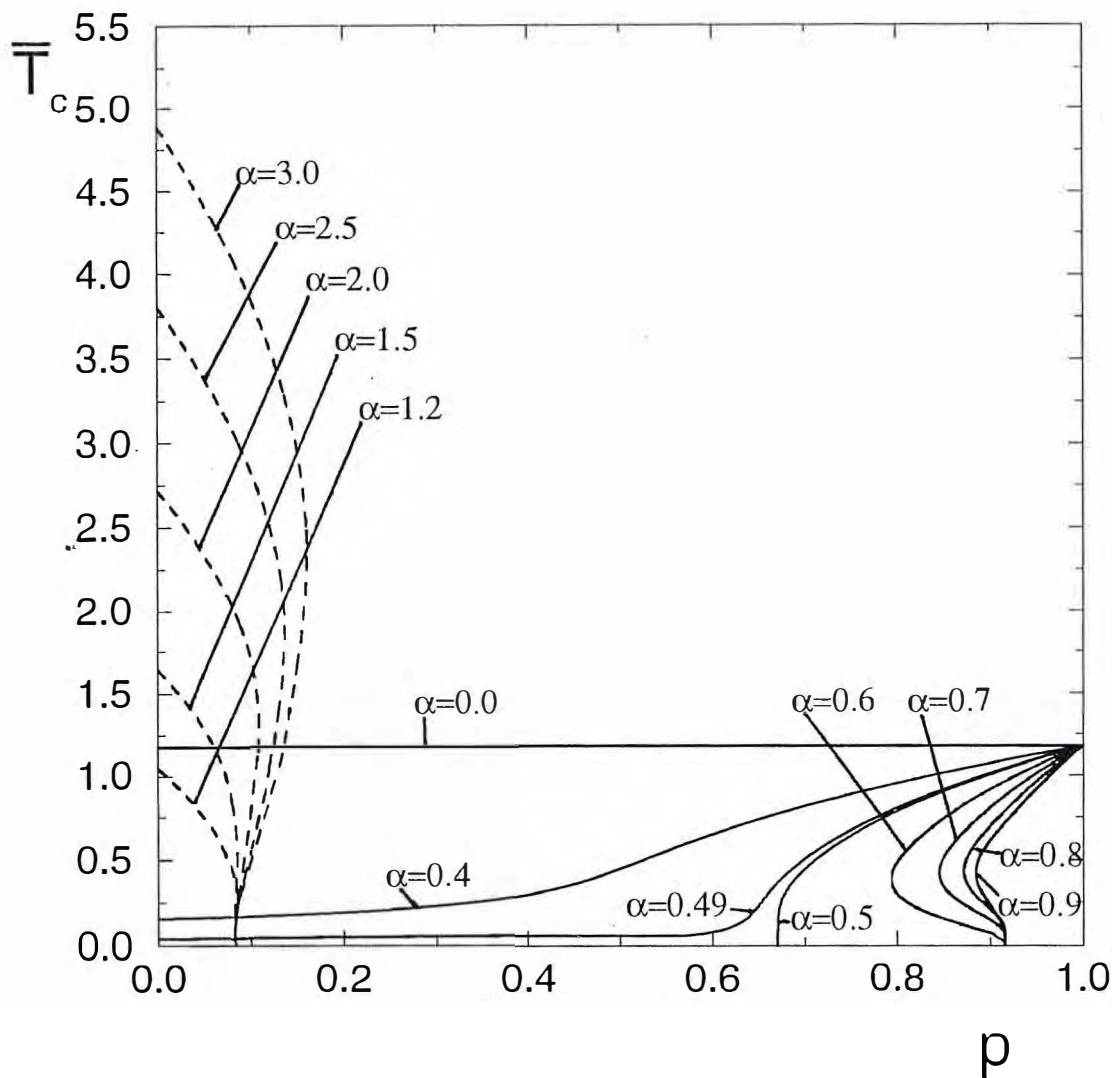


Fig. 2.20 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_b T_c / J$) como função de p (probabilidades de ligações decoradas) para vários α ($\alpha \equiv h/6J$), $\gamma = -1.5$ e $s = 3/2$ (caso com vínculo). As linhas contínuas definem as fronteiras ferromagnéticas e as linhas tracejadas, as fronteiras antiferromagnéticas.

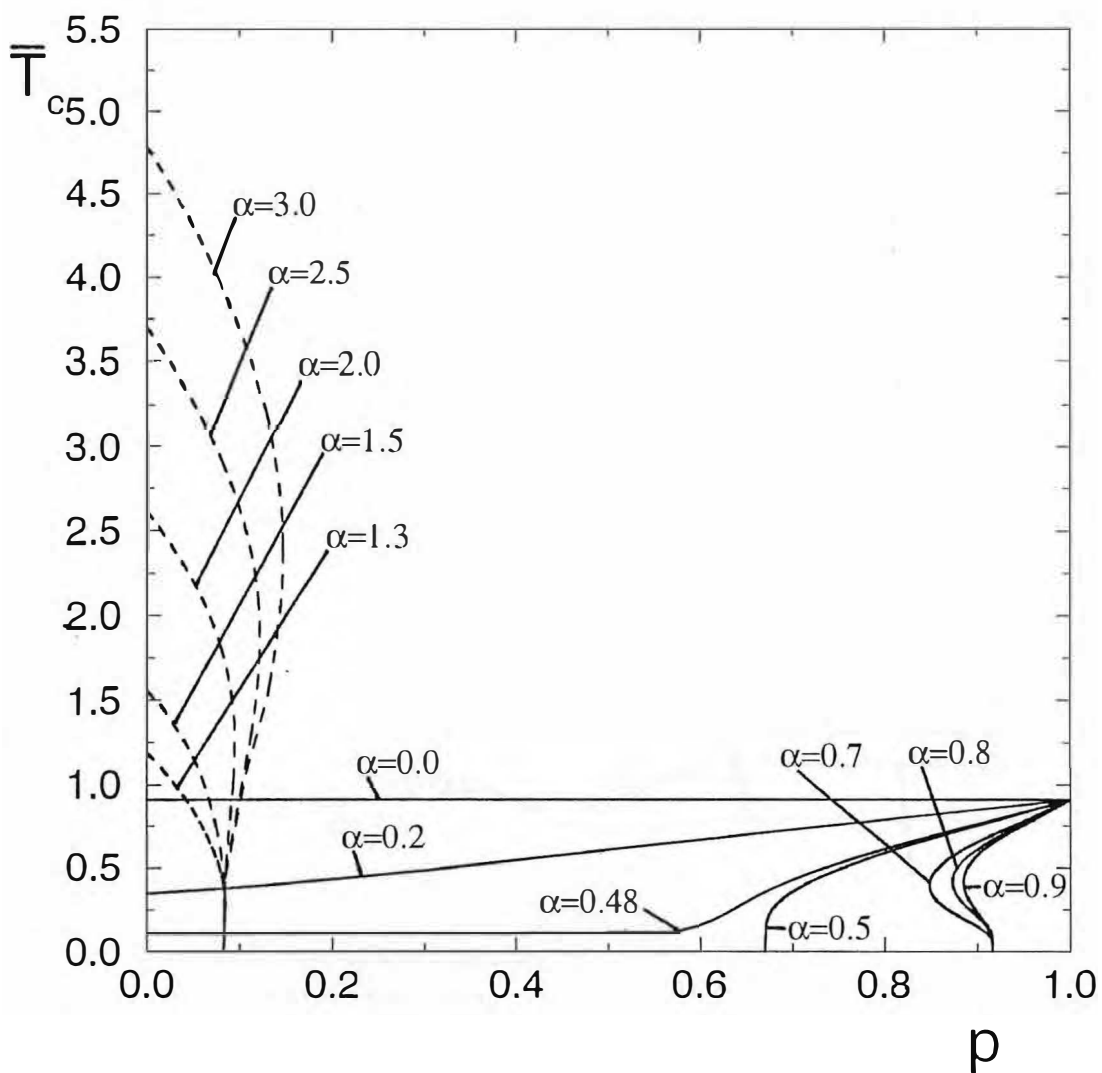


Fig. 2.21 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de p (probabilidades de ligações decoradas) para vários α ($\alpha \equiv h/6J$), $\gamma = -2$ e $s = 3/2$ (caso com vínculo). As linhas contínuas definem as fronteiras ferromagnéticas e as linhas tracejadas, as fronteiras antiferromagnéticas.

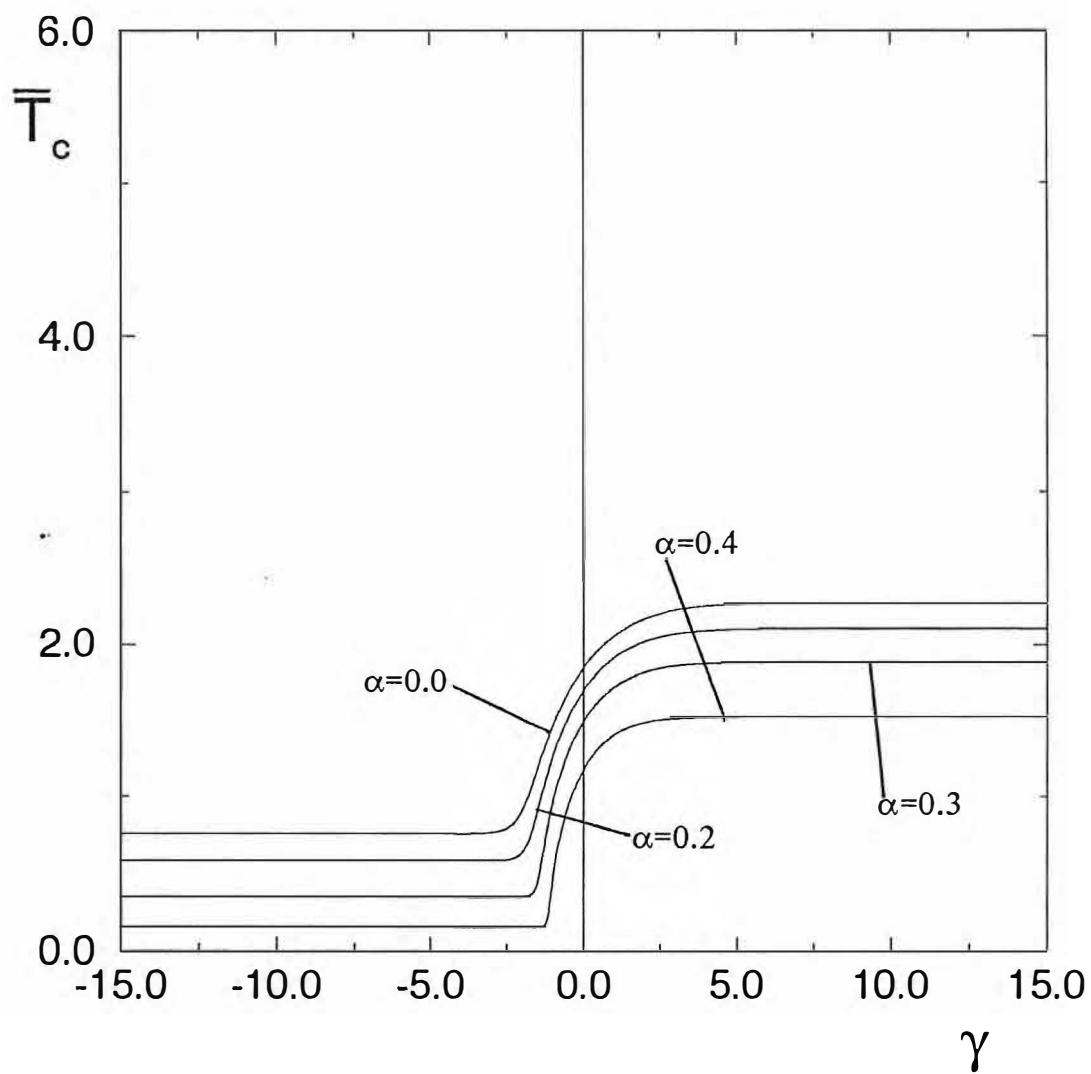


Fig. 2.22 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv h/6J$), $p=0$ e $s=3/2$. (caso ferromagnético com vínculo)

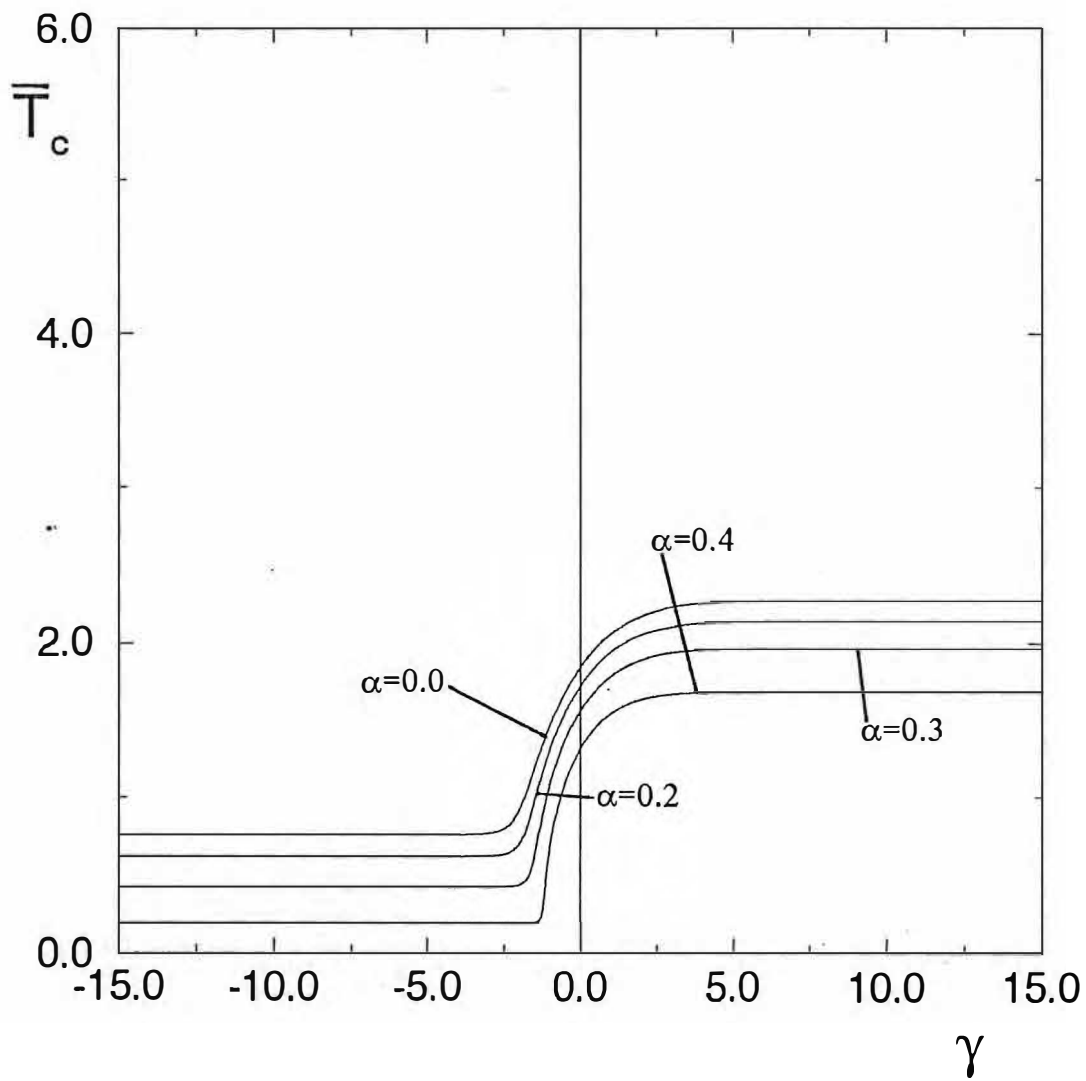


Fig. 2.23 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv h/6J$), $p=0.2$ e $s=3/2$. (caso ferromagnético com vínculo)

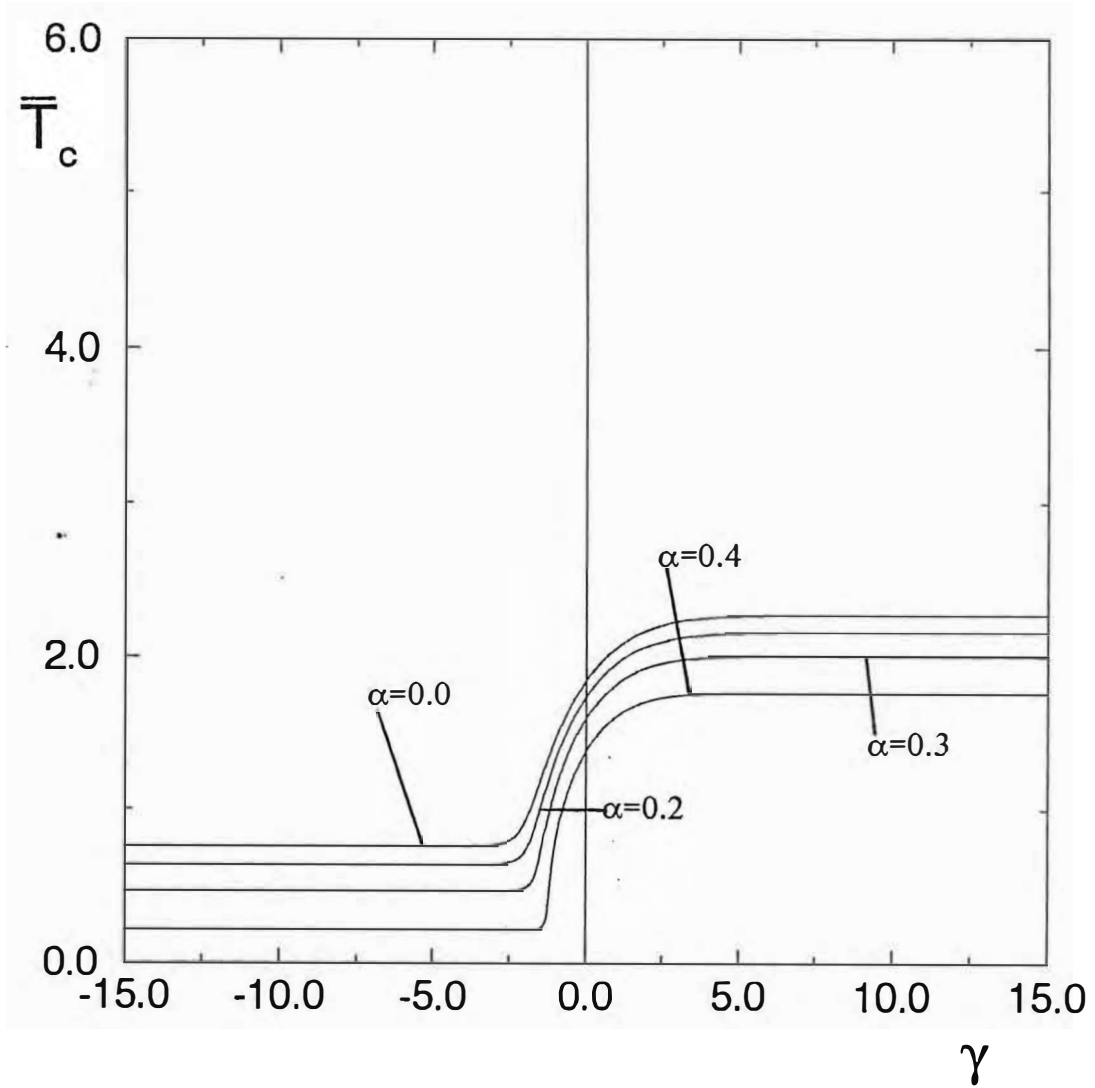


Fig. 2.24 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv h/6J$), $p=0.3$ e $s=3/2$. (caso ferromagnético com vínculo)

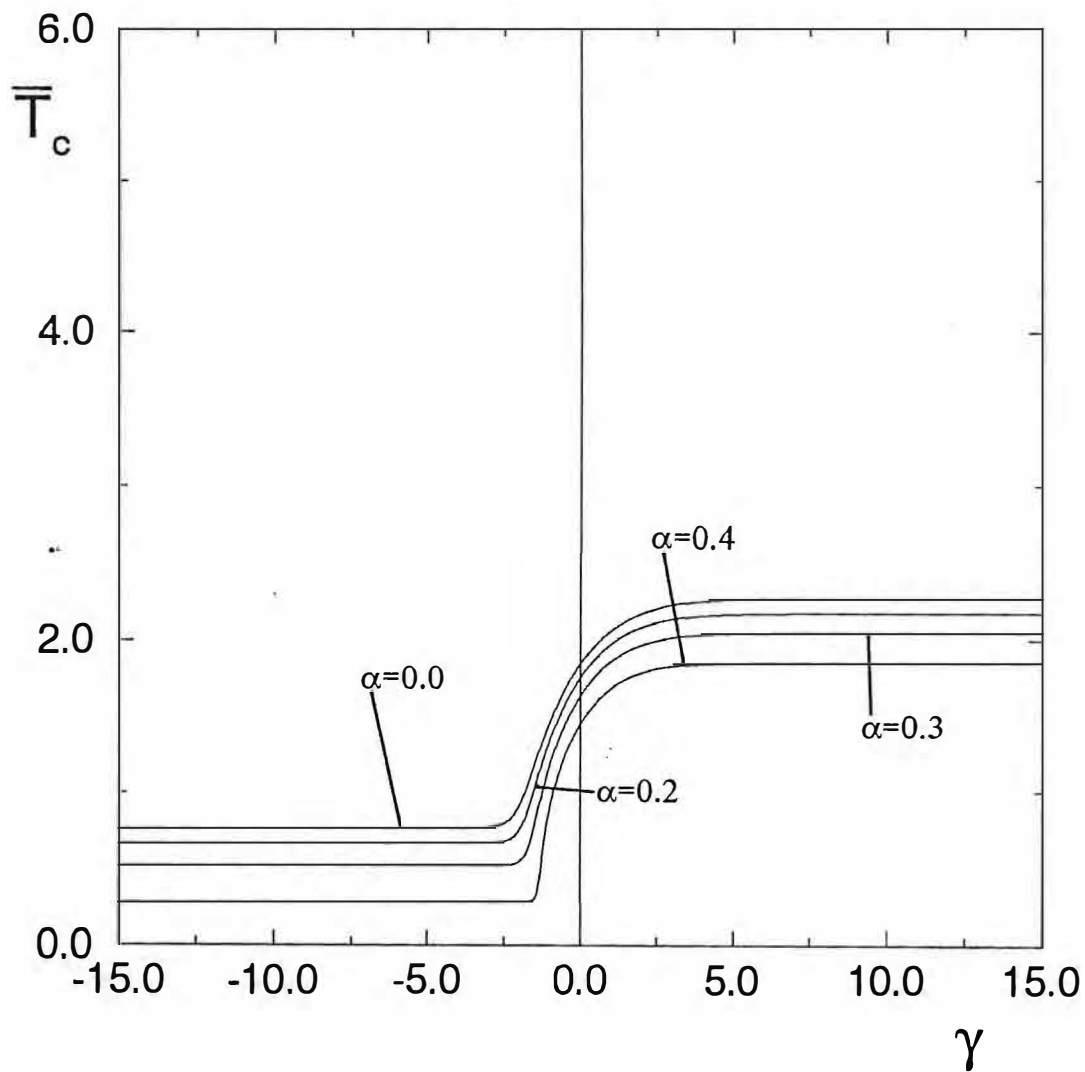


Fig. 2.25 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv h/6J$), $p=0.4$ e $s=3/2$. (caso ferromagnético com vínculo)

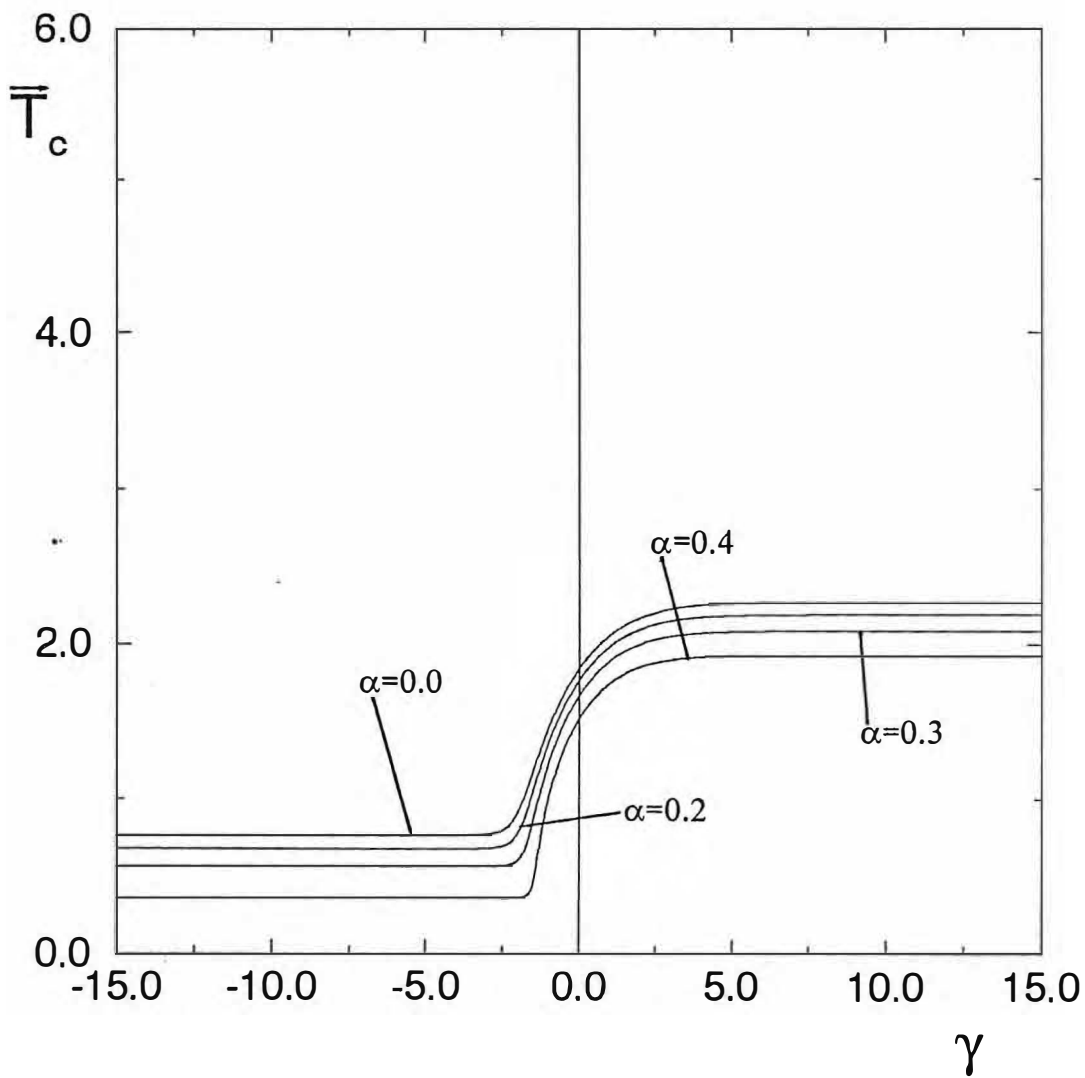


Fig. 2.26 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_b T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv h/6J$), $p=0.5$ e $s=3/2$. (caso ferromagnético com vínculo)

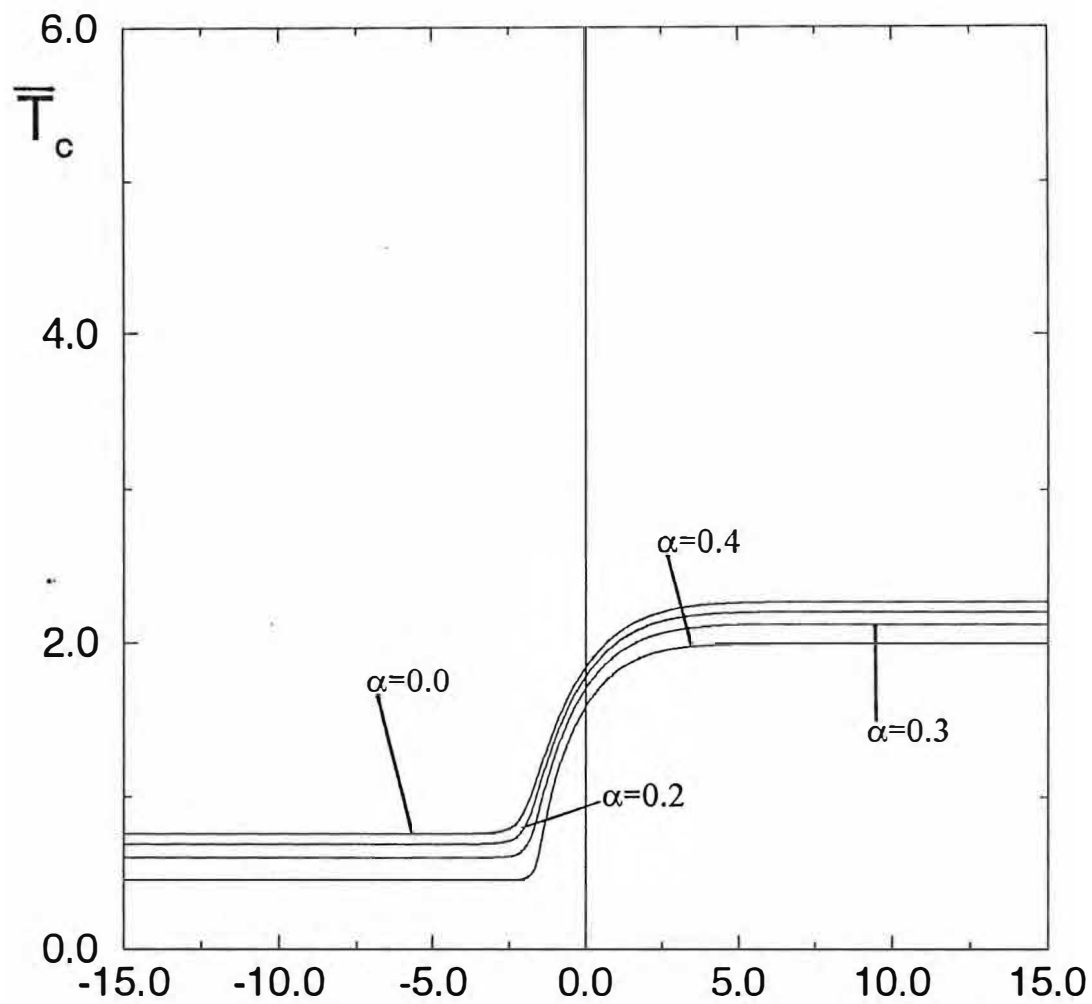


Fig. 2.27 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_b T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv h/6J$), $p=0.6$ e $s=3/2$. (caso ferromagnético com vínculo)

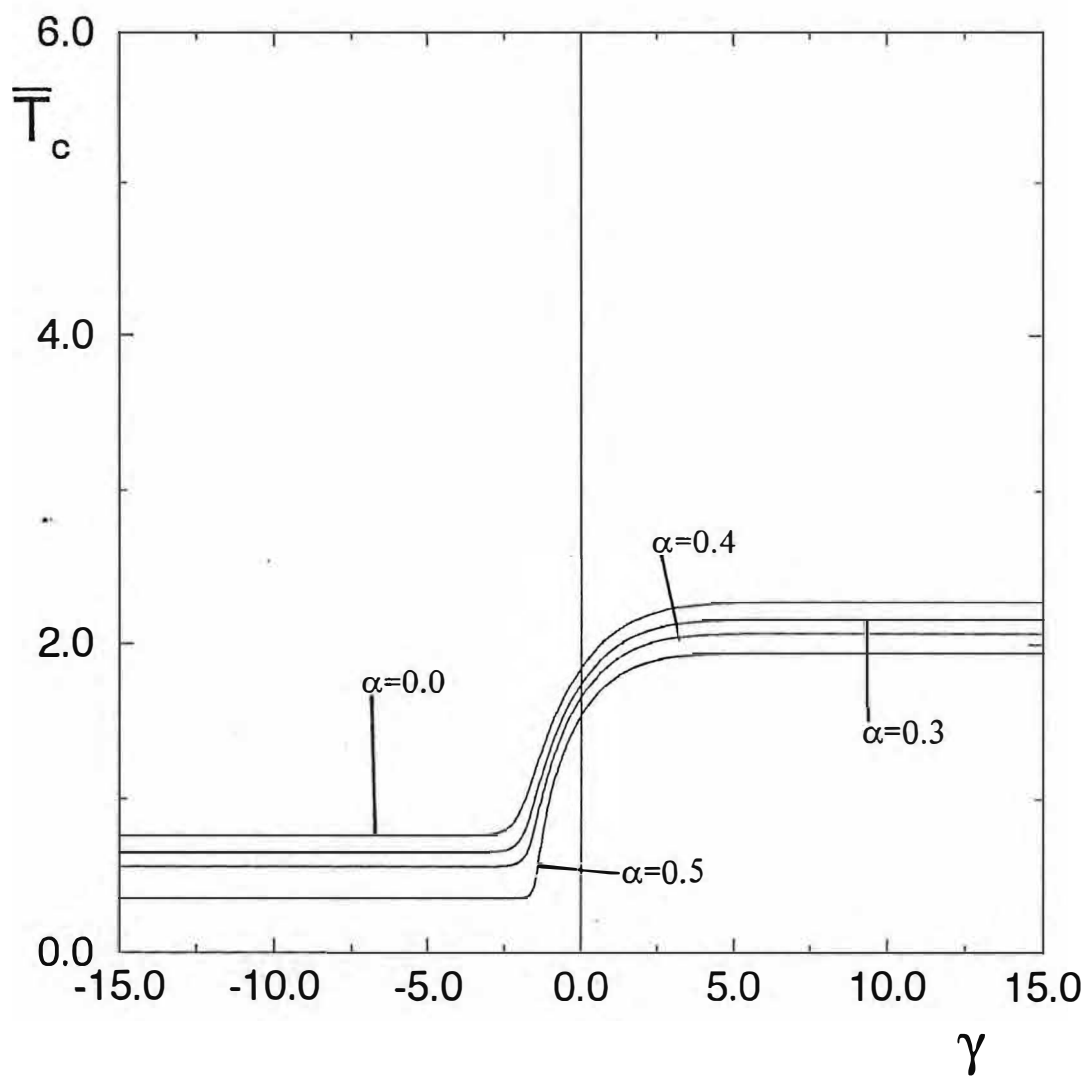


Fig. 2.28 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv h/6J$), $p=0.7$ e $s=3/2$. (caso ferromagnético com vínculo)

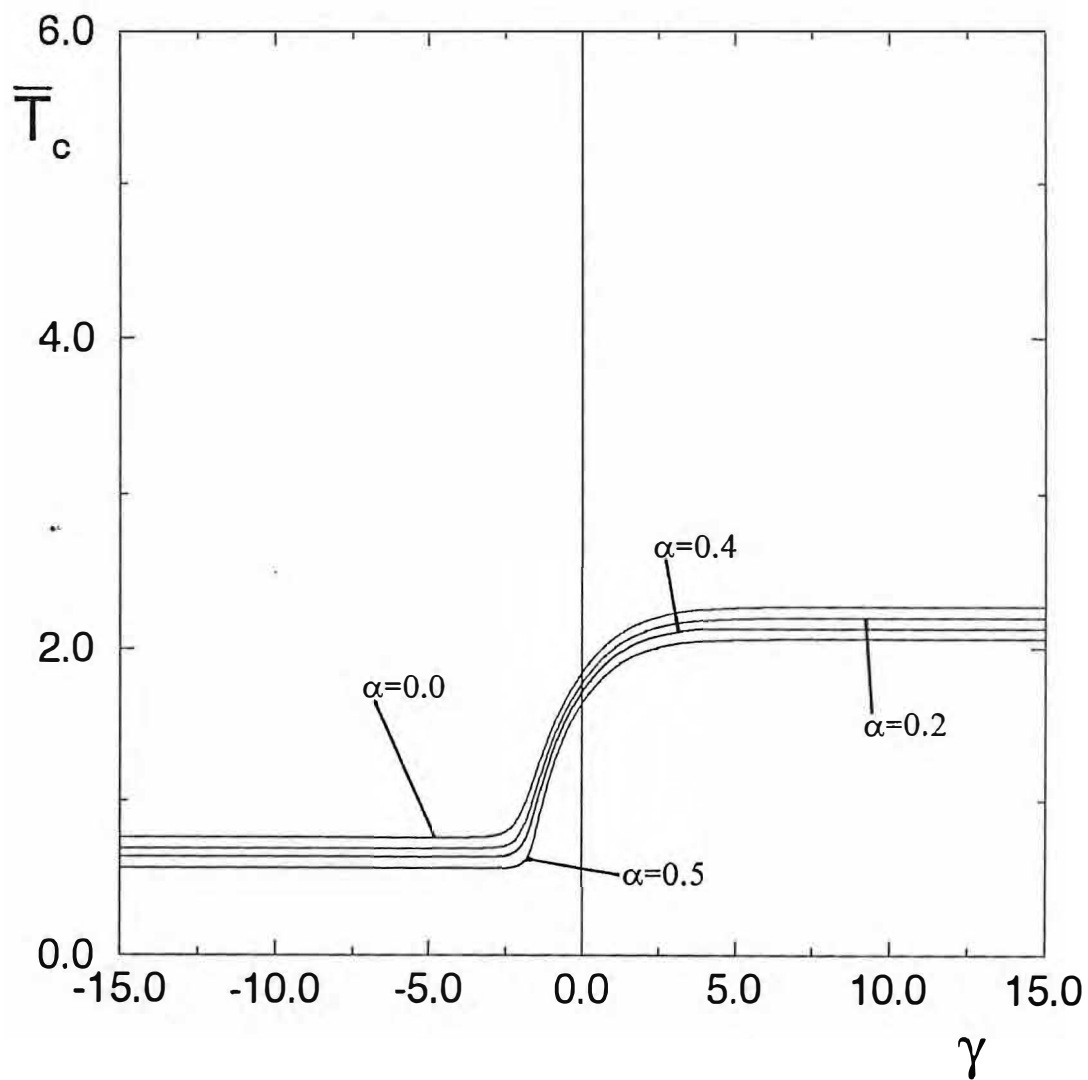


Fig. 2.29 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c = k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma = D/J$) para vários α ($\alpha = h/6J$), $p=0.8$ e $s=3/2$. (caso ferromagnético com vínculo)

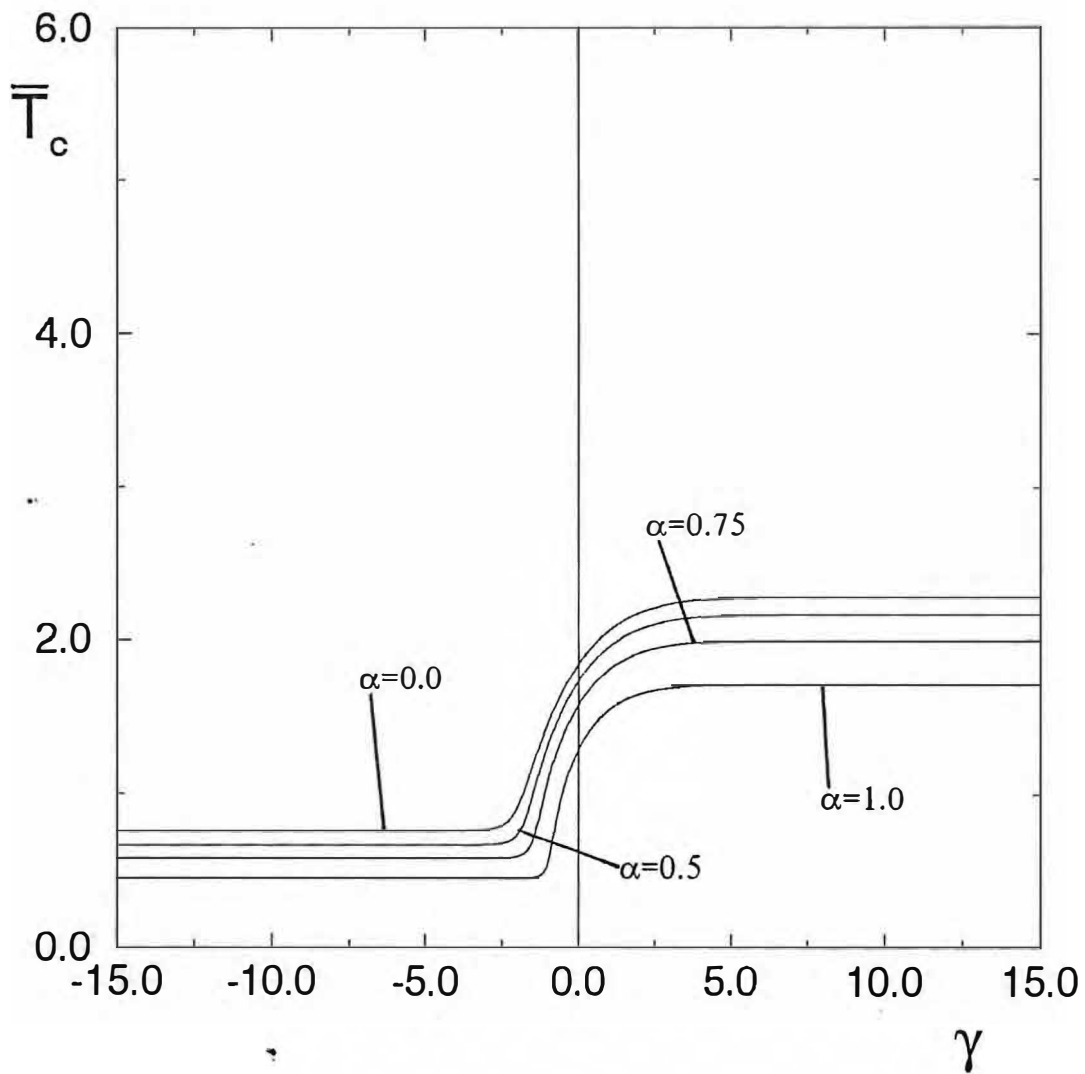


Fig. 2.30 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv h/6J$), $p=0.89$ e $s=3/2$. (caso ferromagnético com vínculo)

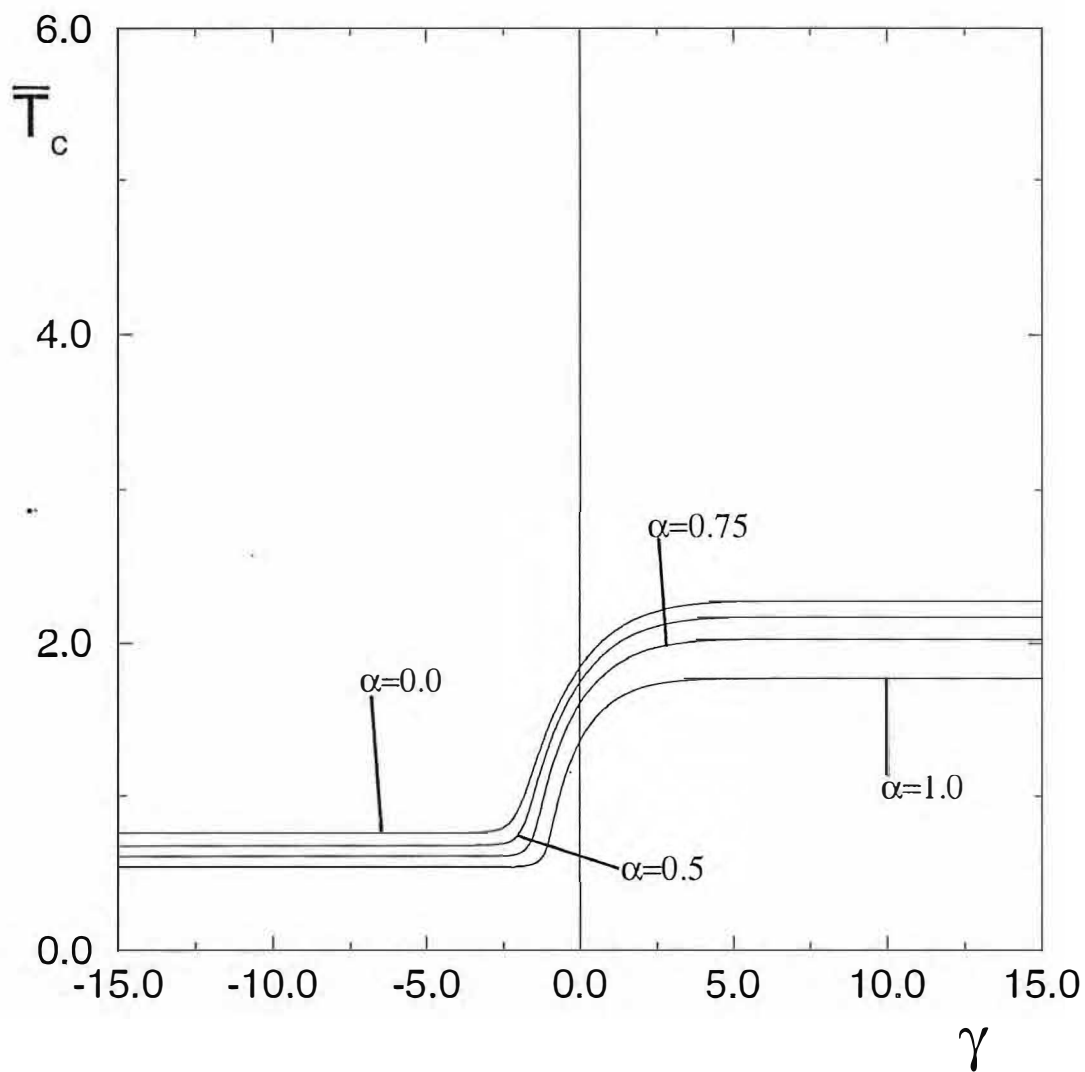


Fig. 2.31 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv h/6J$), $p=0.9$ e $s=3/2$. (caso ferromagnético com vínculo)

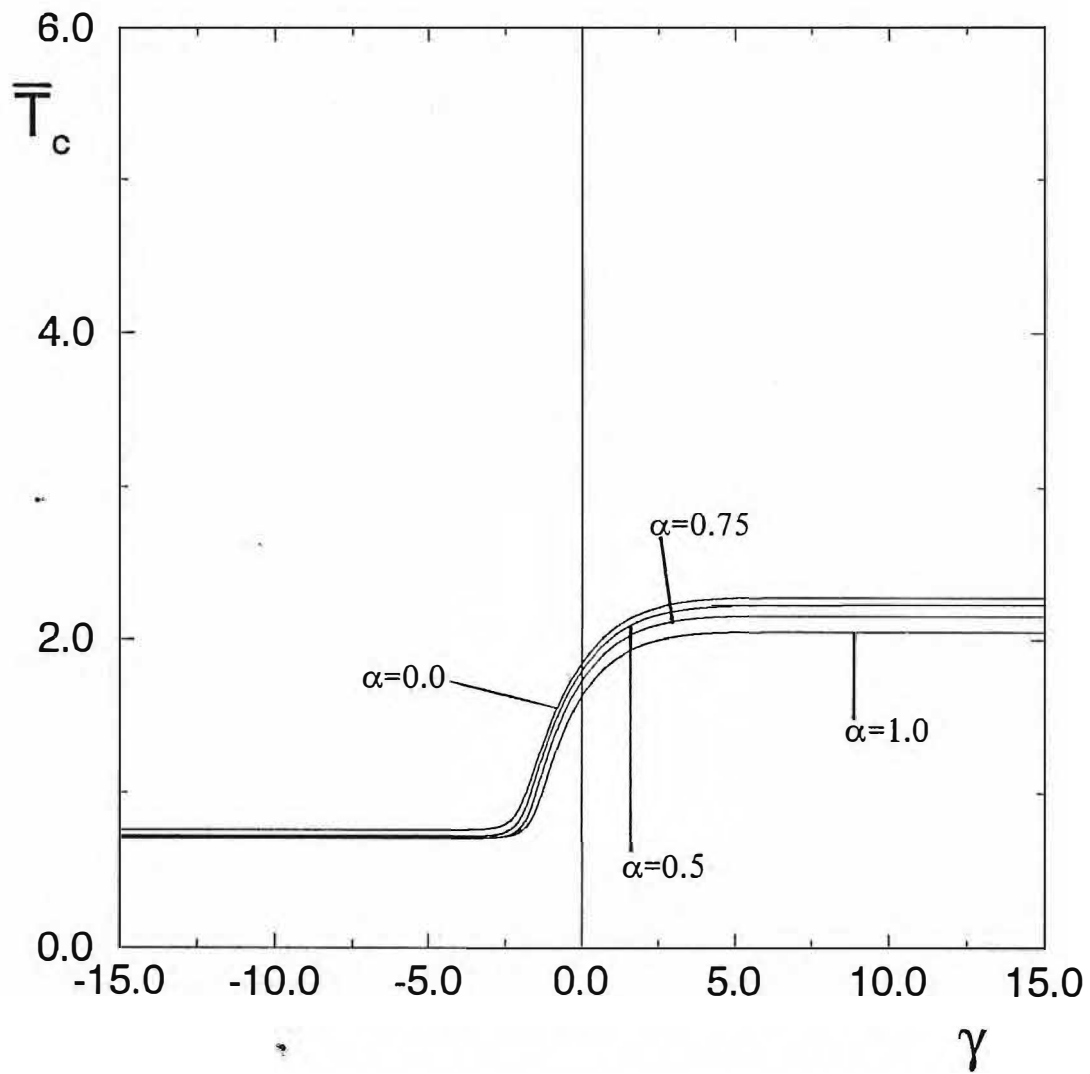


Fig. 2.32 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv h/6J$), $p=0.95$ e $s=3/2$. (caso ferromagnético com vínculo)

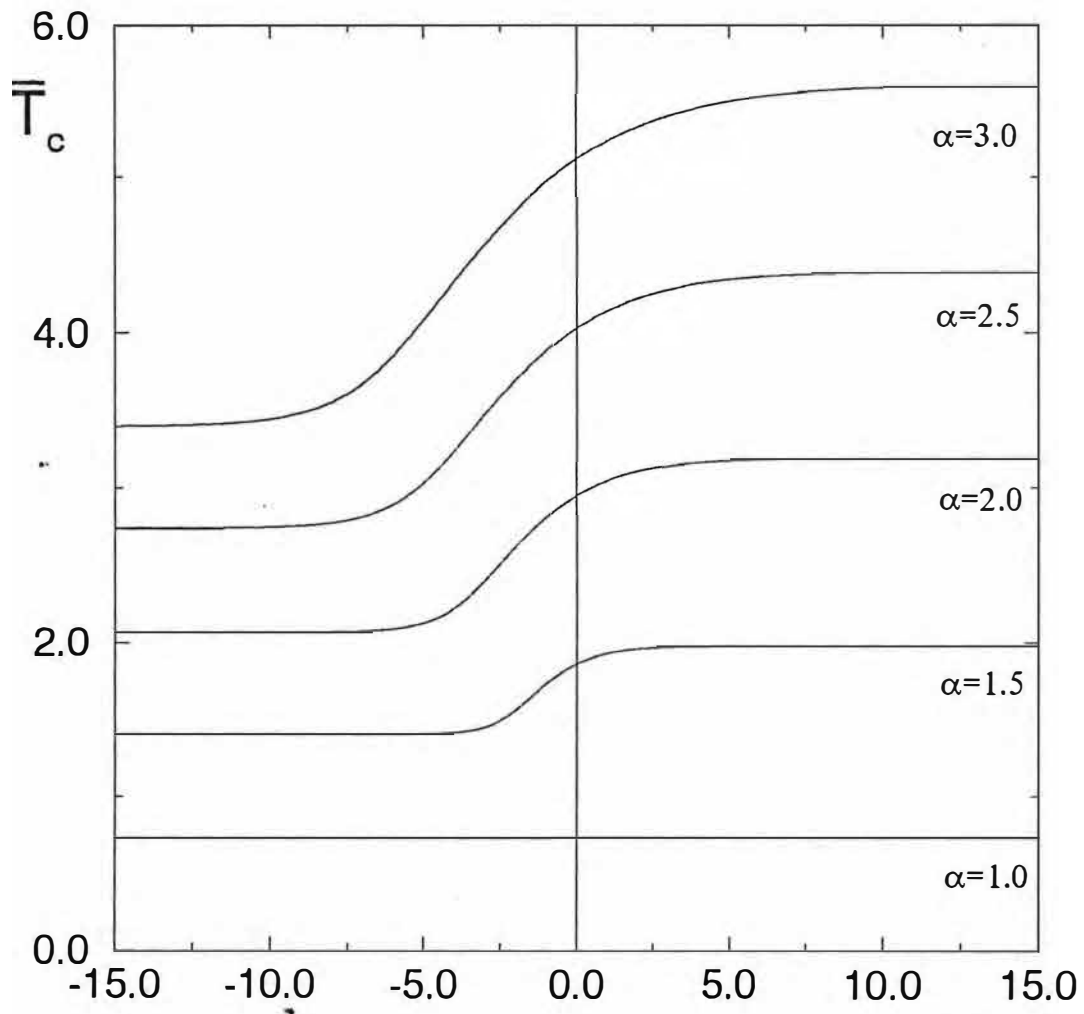


Fig. 2.33 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_b T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv h/6J$), $p=0$ e $s=3/2$. (caso antiferromagnético com vínculo)

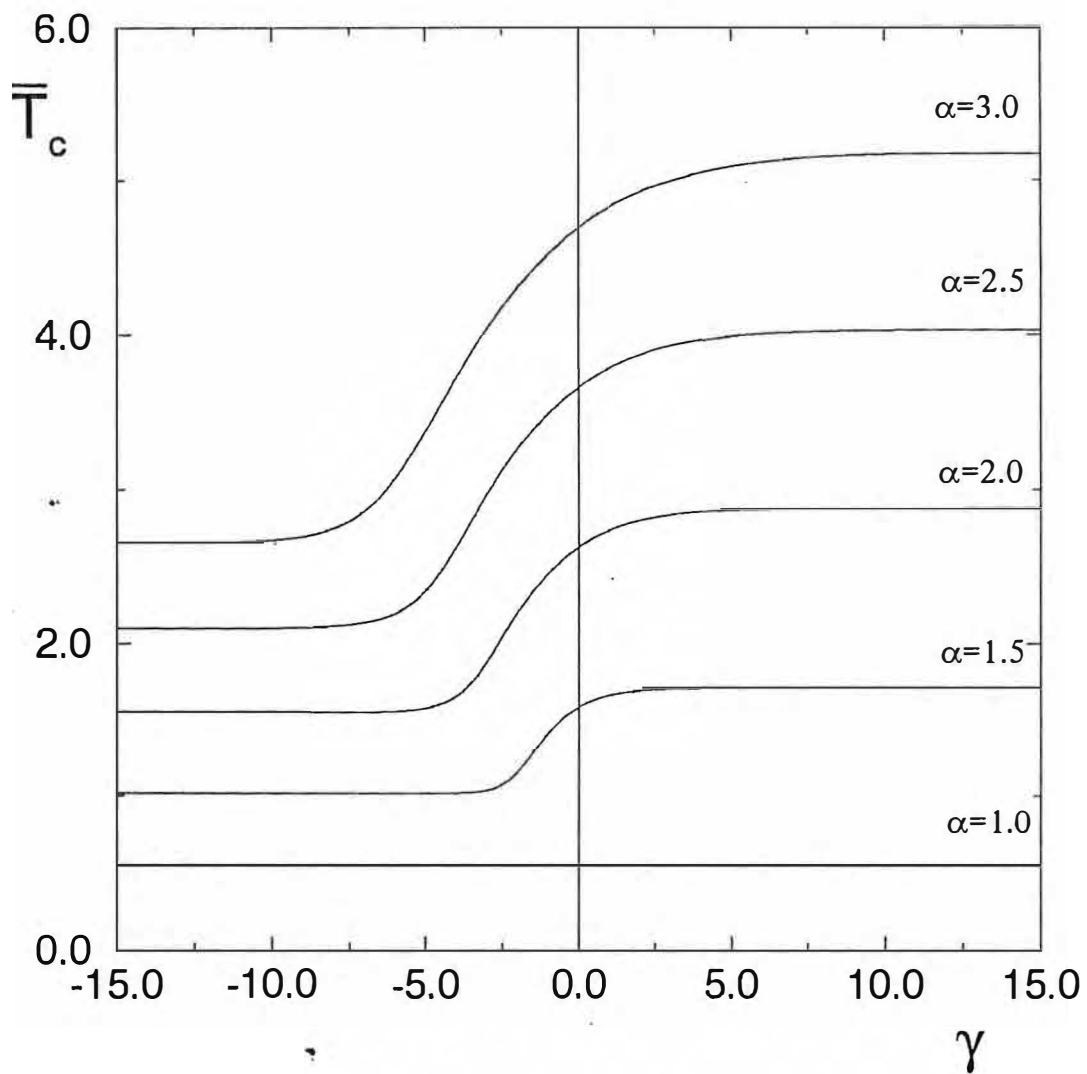


Fig. 2.34 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c = k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma = D/J$) para vários α ($\alpha = h/6J$), $p=0.05$ e $s=3/2$. (caso antiferromagnético com vínculo)

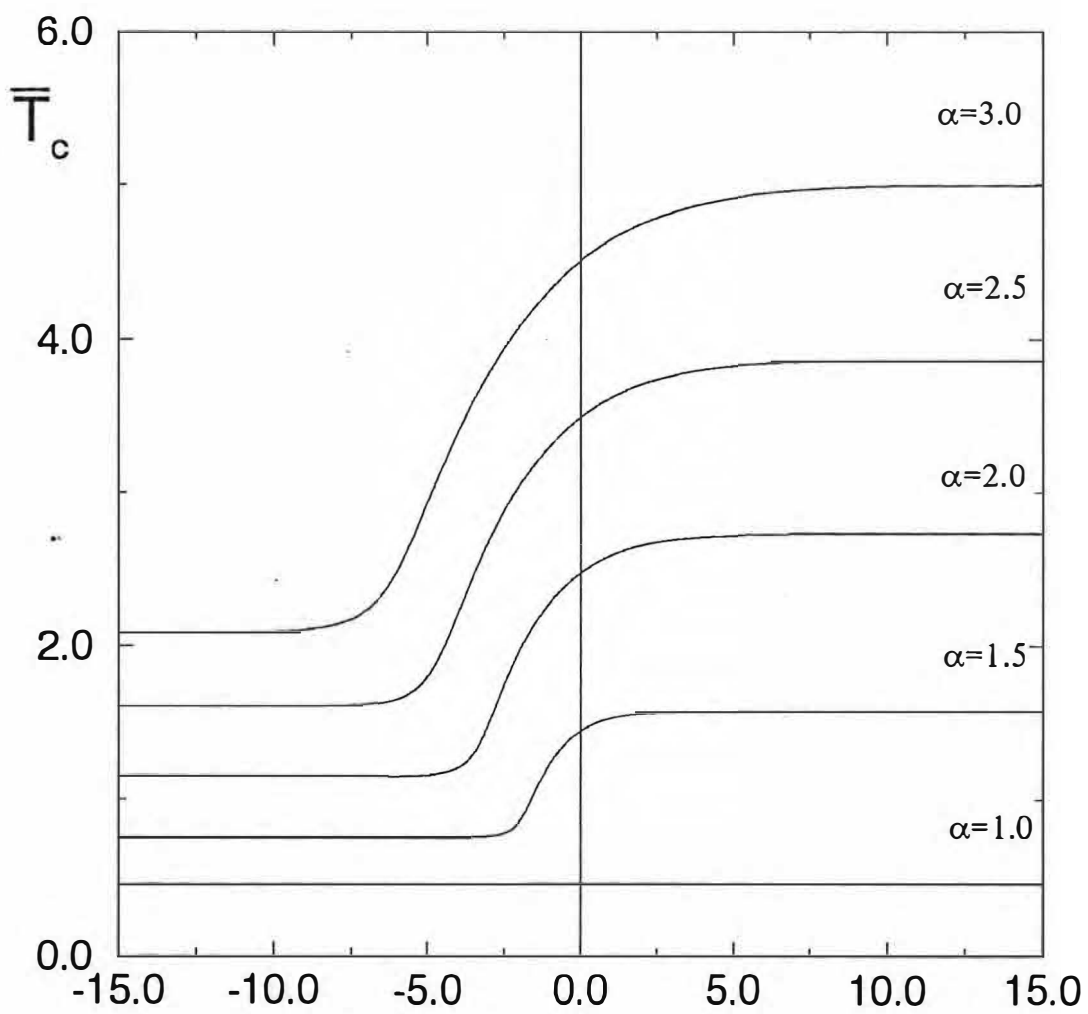


Fig. 2.35 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv h/6J$), $p=0.07$ e $s=3/2$. (caso antiferromagnético com vínculo)

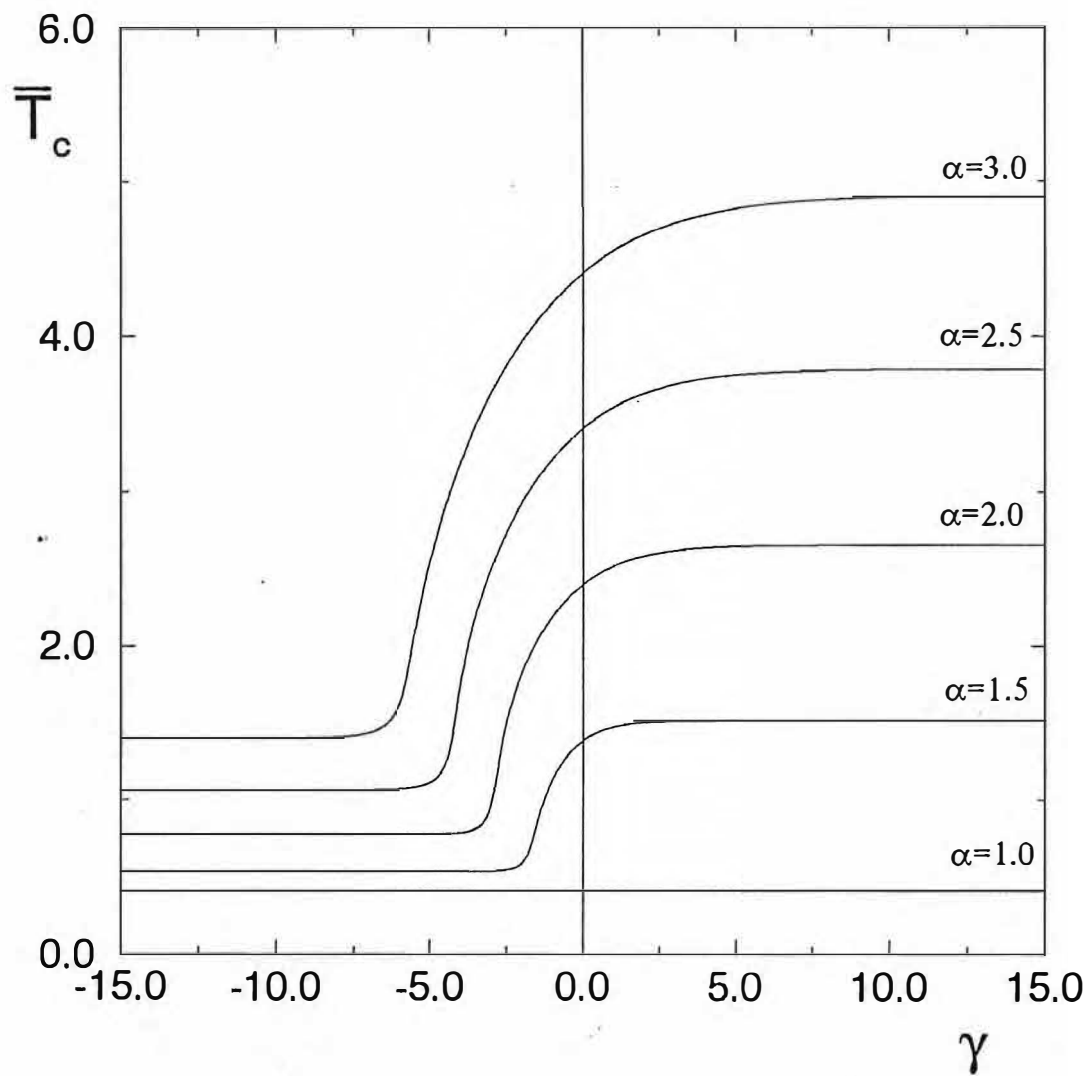


Fig. 2.36 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_B T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv h/6J$), $p=0.08$ e $s=3/2$. (caso antiferromagnético com vínculo)

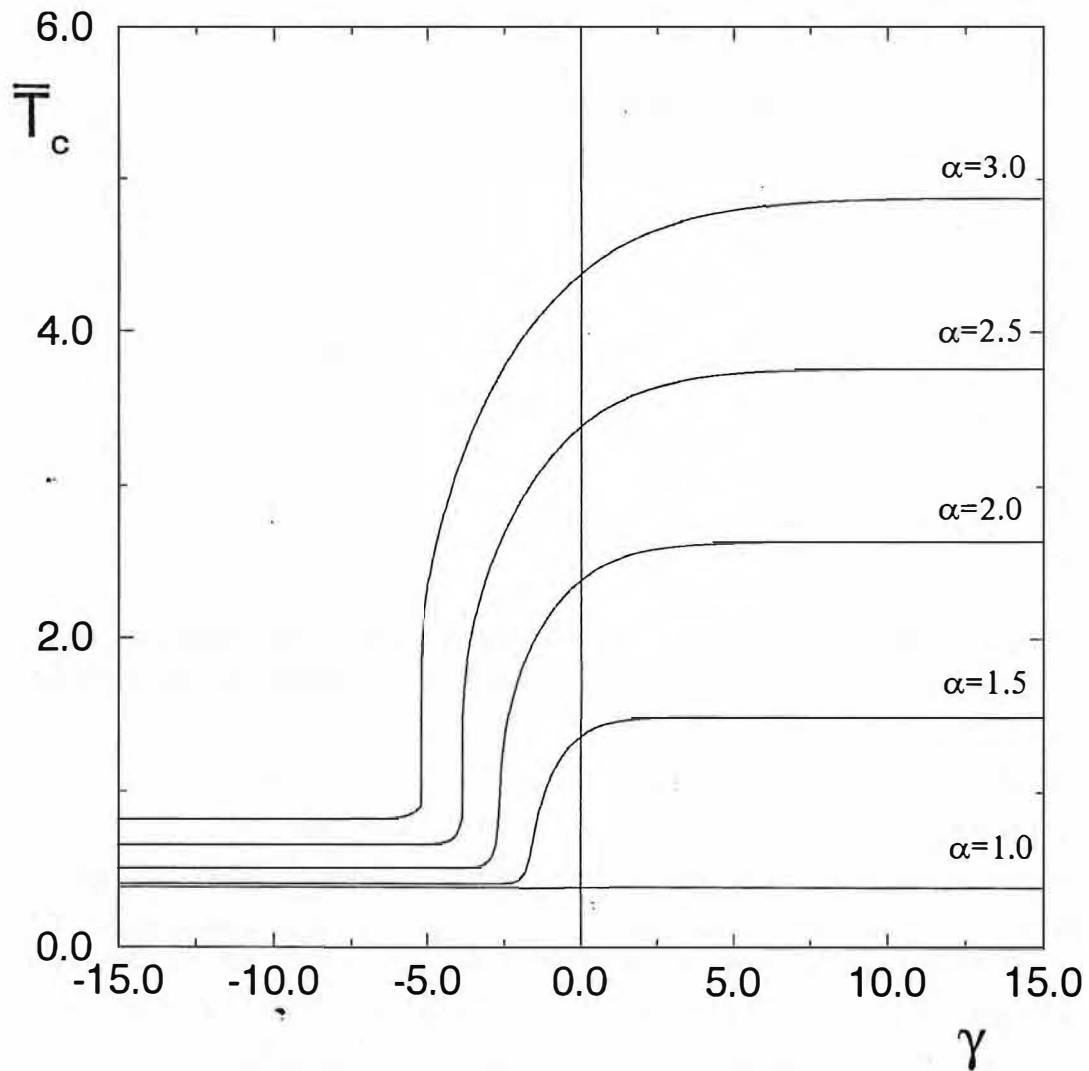


Fig. 2.37 - Temperatura crítica \bar{T}_c ($\bar{T}_c \equiv k_b T_c / J$) como função de γ ($\gamma \equiv D/J$) para vários α ($\alpha \equiv h/6J$), $p=0.083$ e $s=3/2$. (caso antiferromagnético com vínculo)

CONCLUSÕES

Foi estudado o comportamento crítico do modelo de Ising com spins mistos em um campo aleatório sobre uma rede favo de mel, com o campo aleatório satisfazendo ou não uma condição de vínculo, considerando-se ainda o efeito da anisotropia uniaxial. A rede favo de mel é subdividida em duas subredes equivalentes que são ocupadas por dois tipos de spins diferentes. O campo aleatório que atua em cada um dos spins é gerado pela decoração das ligações da rede, tendo sido considerado distribuições simétricas e recozidas. A solução exata para o modelo foi obtida transformando-se o modelo, no modelo de Ising efetivo com spin 1/2 na rede triangular. Resultados explícitos foram obtidos para a distribuição discreta $\mathcal{P}(h') = ((1-p)/2)[\delta(h'-h) + \delta(h'+h)] + p\delta(h')$.

Para o caso em que o campo aleatório não satisfaz a condição de vínculo, o sistema apresenta somente ordem ferromagnética, independentemente das magnitudes dos spins e da anisotropia uniaxial. Quando a rede é preenchida com spins 1/2 e 1, o campo aleatório favorece este ordenamento ferromagnético, independentemente da anisotropia uniaxial, apresentando um comportamento análogo ao apresentado para o caso em que temos o modelo apenas com spin 1/2 (Gonçalves e Stinchcombe, 1986; Gonçalves e Horiguchi, 1990). Observa-se nos diagramas de fase referentes a este caso, que para $\gamma (\gamma \equiv D/J) > 0$ a temperatura crítica aumenta e para $\gamma < 0$, a temperatura crítica diminui, atingindo a zero para um dado valor de $\gamma = \gamma_c$. Desse modo, para valores de $\gamma < \gamma_c$ o estado ordenado torna-se instável, ou seja, o sistema deixa de ter ordem. Os valores de γ_c foram obtidos analiticamente, e mostrou-se que são dependentes dos parâmetros $\alpha (\alpha \equiv 2h/3J)$ apenas para valores da probabilidade $p \leq 1/2$.

Quando a rede é preenchida com spins de magnitudes $1/2$ e $3/2$, ainda no caso sem vínculo, a ordem do sistema também sempre é favorecida pelo campo aleatório, independente de γ , e como no caso anterior, a temperatura crítica aumenta para valores de $\gamma > 0$ e diminui para valores de $\gamma < 0$. Neste caso, no entanto, não existe γ_c , uma vez que para spin semi-inteiro não existe o estado de spin zero. No limite $\gamma \rightarrow \pm\infty$ a temperatura crítica tende a valores assintóticos finitos que são dependentes de p e α . Estes valores são obtidos numericamente, resolvendo-se uma equação transcendental.

Para o caso em que o campo aleatório satisfaz à condição de vínculo, além da fase ferromagnética, o modelo também apresenta fase antiferromagnética para $\alpha \geq \alpha_c$ (α crítico). α_c depende de γ , tendo sido determinado analiticamente para o caso em que os spins tem magnitudes $1/2$ e 1 . Neste caso, para $\gamma > 0$, $\alpha_c = 2$ e para $\gamma < 0$, $\alpha_c = 2(3-\gamma)/3$, observa-se que apenas a ordem antiferromagnética é favorecida pelo campo aleatório, com um comportamento também análogo ao apresentado pelo modelo para o caso em que temos apenas spin $1/2$ (Gonçalves e Stinchcombe, 1986; Gonçalves e Horiguchi, 1990). Para valores de $\gamma > 0$ a temperatura crítica aumenta, e para $\gamma < 0$ a temperatura crítica diminui, existindo desta forma também, um valor de γ ($\gamma = \gamma_c$) abaixo do qual, a ordem do sistema deixa de existir. Estes valores de γ_c , que como no caso sem vínculo dependem de α , são diferentes para as fases ferromagnética e antiferromagnética, e foram determinados analiticamente. Tem-se ainda o aparecimento de probabilidades críticas, p_c , tais que, para valores de p acima (abaixo) de p_c o estado fundamental antiferromagnético (ferromagnético) torna-se instável. Estas probabilidades críticas dependem dos valores dos parâmetros α e γ que caracterizam o sistema, não sendo portanto, valores universais. O fenômeno de reentrância é observado nas duas fases do sistema, dependendo dos valores de α e p .

No caso em que a rede é preenchida com spins de

magnitudes $1/2$ e $3/2$, com o campo também satisfazendo à condição de vínculo, analogamente ao caso anterior, o campo aleatório favorece apenas o ordenamento antiferromagnético. Neste caso $\alpha' (\alpha' \equiv h/6J)$ crítico, α'_c , foi determinado analiticamente apenas para $\gamma=0$, sendo igual a $3/4$. Para outros valores da anisotropia uniaxial, a partir dos resultados numéricos obtidos, é possível conjecturar-se que, para $\gamma>0$, $\alpha'_c=3/4$ e para $\gamma<0$, $\alpha'_c=1/2$. Pode-se também concluir a partir destes resultados numéricos que as probabilidades críticas também dependem de α' e γ , não sendo portanto um valor universal. Neste caso, do mesmo modo que no caso em que o campo não satisfaz à condição de vínculo, o sistema não admite γ_c , uma que vez que os spins tem magnitudes $1/2$ e $3/2$. Existe também o fenômeno de reentrância para determinados valores de p e α' .

Em todos os casos apresentados, no limite $p \rightarrow 1$ ou $\alpha=0$, o comportamento do sistema, como esperado, é idêntico ao obtido por Gonçalves (1985) para o caso sem campo.

Finalmente deve ser notado que a não universalidade apresentada por p_c é um dos importantes aspectos do modelo, não apresentado para o caso em que temos apenas spin $1/2$ (Gonçalves e Horiguchi, 1990).

APÊNDICE A

CÁLCULO DE ε , $\langle \tau_k^2 \rangle$, $\langle \sigma_j \tau_k^3 \rangle$

A.1 Modelo com campo aleatório sem vínculo

A.1.1 Spins 1/2 e 1.

A correlação ε , a média $\langle \tau_k^2 \rangle$ e a constante de troca $J_{\sigma\sigma}$, são obtidas através da função de partição, que é calculada realizando-se o traço parcial sobre as variáveis que decoram uma dada ligação, de modo que o modelo com spins mistos sobre uma rede favo de mel, pode ser mapeado no modelo de Ising com spin 1/2 sobre uma rede triangular. Isto pode ser realizado, considerando a decimação de um dado spin τ_0 pertencente a Λ_B , cujos vizinhos mais próximos são os σ_1 , σ_2 , e σ_3 pertencem a Λ_A (Gonçalves, 1985). A Hamiltoniana pode ser escrita na forma:

$$H = - \sum_{(j \in \Lambda_A, k \in \Lambda_B)} (J+J') \sigma_j \tau_k - \sum_{(k \in \Lambda_B)} (D+D') \tau_k^2 \quad (A1)$$

Da decimação em τ_0 , tem-se

$$\sum_{\tau_0} \exp \left[\bar{K} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \tau_0 + \bar{D} \tau_0^2 \right] \equiv r_1 \exp \left[K_{\sigma\sigma} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \right] , \quad (A2)$$

onde $\bar{K} = \beta(J+J')$ e $\bar{D} = \beta(D+D')$. Da equação anterior obtém-se:

$$K_{\text{ef}} = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{G(\bar{D}, 3\bar{K})}{G(\bar{D}, \bar{K})} \right) \quad (\text{A3})$$

e

$$r_1 = \left\{ G^3(\bar{D}, \bar{K}) G(\bar{D}, 3\bar{K}) \right\}^{1/4}, \quad (\text{A4})$$

com

$$G(\bar{D}, x) = \sum_{m=-1}^1 \exp(\bar{D}m^2) \cosh(mx) \quad (\text{A5})$$

onde $J_{\text{ef}} = K_{\text{ef}}/\beta$ é a constante de troca do modelo de Ising efetivo na rede triangular.

Das Eqs. (A-3) e (A-5), obtém-se:

$$\exp(4K_{\text{ef}}) = \frac{2\exp(\bar{D})\cos(3\bar{K})+1}{2\exp(\bar{D})\cos(\bar{K})+1} \quad (\text{A6})$$

Na temperatura crítica, $\exp(4K_{\text{ef}}^c) = 3$, (Stephenson, 1964), e usando-se este resultado a equação anterior é escrita como:

$$\frac{2\exp(\bar{D})\cos(3\bar{K})+1}{2\exp(\bar{D})\cos(\bar{K})+1} = 3 \quad (\text{A7})$$

O cálculo da correlação ε e da média $\langle \tau_k^2 \rangle$ é realizado através do mesmo procedimento adotado na obtenção da constante de troca. Deste modo obtém-se

$$\sum_{\tau_0} \exp\left[\bar{K}\bar{\sigma}\tau_0 + \bar{D}\tau_0^2\right] \bar{\sigma}\tau_0 \equiv G_1(\bar{D}, \bar{K}\bar{\sigma})$$

$$= G(\bar{D}, \bar{K}\bar{\sigma}) \left[Y_0(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) + Y_1 \right] , \quad (A8)$$

com $\bar{\sigma} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i$, e onde

$$Y_0 = \frac{1}{4} \left[F_1(\bar{D}, 3\bar{K}) - F_1(\bar{D}, \bar{K}) \right] , \quad (A9)$$

$$Y_1 = \frac{1}{4} \left[F_1(\bar{D}, 3\bar{K}) + 3F_1(\bar{D}, \bar{K}) \right] , \quad (A10)$$

com $F_1(\bar{D}, x) \equiv G_1(\bar{D}, x) / G(\bar{D}, x)$ e

$$G_1(\bar{D}, \bar{K}x) = \sum_{n=-1}^1 \exp(\bar{D}m^2) mx \sinh(\bar{K}xm) . \quad (A11)$$

Após isto, a Eq.(A8) pode ser reescrita como

$$\varepsilon \equiv \langle \sigma_1 \tau_0 \rangle = Y_0 \langle \sigma_1 \sigma_j \rangle_t + Y_1 / 3 , \quad (A12)$$

onde $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_t$ é a correlação entre os spins σ_i e σ_j , vizinhos mais próximos da rede triangular, e onde foi usado o fato que $\langle \sigma_1 \tau_o \rangle = \langle \sigma_2 \tau_o \rangle = \langle \sigma_3 \tau_o \rangle$.

Para $T=T_c$, $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_t^c$ é igual a $2/3$ (Stephenson, 1964). Substituindo-se este resultado na equação anterior, e usando-se as Eqs. (A9-A11), tem-se

$$\varepsilon = \frac{3 \sinh(3\bar{K}) + \sinh(\bar{K})}{6 [\cosh(3\bar{K}) - \cosh(\bar{K})]} \quad (A13)$$

Usando-se o mesmo procedimento para o cálculo de $\langle \tau_k^2 \rangle$, consegue-se

$$\begin{aligned} \sum_{\tau_o} \exp \left[\bar{K} \bar{\sigma} \tau_o + \bar{D} \tau_o^2 \right] \tau_o^2 &\equiv G_2(\bar{D}, \bar{K} \bar{\sigma}) = \\ &= G(\bar{D}, \bar{K} \bar{\sigma}) \left[z_o (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) + z_1 \right] \end{aligned} \quad (A14)$$

onde

$$z_o = \frac{1}{4} \left[F_2(\bar{D}, 3\bar{K}) - F_2(\bar{D}, \bar{K}) \right] \quad (A15)$$

$$z_1 = \frac{1}{4} \left[F_2(\bar{D}, 3\bar{K}) + 3F_3(\bar{D}, \bar{K}) \right] \quad (A16)$$

com $F_2(\bar{D}, x) \equiv G_2(\bar{D}, x) / G(\bar{D}, x)$ e

$$G_2(\bar{D}, x) = \sum_{m=-1} \exp(\bar{D}m^2) m^2 \cosh(xm). \quad (A17)$$

Após isto, a expressão (A14) pode ser reescrita como

$$\langle \tau_k^2 \rangle = z_0 \langle \sigma_1 \sigma_j \rangle_t + z_1. \quad (A18)$$

Para $T=T_c$, das Eqs.(A15) a (A17), pode-se então escrever

$$\langle \tau_k^2 \rangle = \frac{\cosh(3\bar{K}) + \cosh(\bar{K})}{2 \left[\cosh(3\bar{K}) - \cosh(\bar{K}) \right]} \quad (A19)$$

Å.1.2 Spins 1/2 e 3/2.

Para obter-se os valores da constante de troca, da correlação ε' , e das médias $\langle \tau_k^2 \rangle'$ e $\langle \sigma_j \tau_k^3 \rangle'$, segue-se os mesmos procedimentos adotados no caso anterior, ou seja, realiza-se uma decimação sobre um dado spin τ_0 pertencente a Λ_B , que interage com os spins σ_1 , σ_2 e σ_3 , vizinhos mais próximos pertencentes a τ_0 . A Hamiltoniana do modelo pode ser escrita na forma

$$\sum_{(j \in \Lambda_A, k \in \Lambda_B)} (J+J'') \sigma_j \tau_k - \sum_{(k \in \Lambda_B)} (D+D'') \tau_k^2 + \sum_{(j \in \Lambda_A, k \in \Lambda_B)} D_1 \sigma_j \tau_k^3 \quad (A20)$$

Da decimação em τ_0 , tem-se

$$\sum_{\tau_0} \exp \left[\bar{K} \bar{\sigma} \tau_0 + \bar{D} \tau_0^2 + \bar{D}_1 \bar{\sigma} \tau_0^3 \right]$$

$$\equiv r_1 \exp \left[K'_{\text{ef}} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \right] \quad (\text{A21})$$

onde $\bar{K} = \beta(J + J'')$, $\bar{D} = \beta(D + D'')$ e $\bar{D}_1 = \beta D_1$. Daí obtém-se:

$$K'_{\text{ef}} = \frac{1}{4} \ln \left[\frac{G'(\bar{D}', 3\bar{K}', 3\bar{D}_1)}{G'(\bar{D}', \bar{K}', \bar{D}_1)} \right] \equiv \beta J'_{\text{ef}} \quad (\text{A22})$$

$$r_1 = \left[G'(\bar{D}', \bar{K}', \bar{D}_1) G'(\bar{D}', 3\bar{K}', 3\bar{D}_1) \right] \quad (\text{A23})$$

com

$$G'(\bar{D}', x, y) = \sum_{n=-3/2}^{3/2} \exp(\bar{D}' m^2) \cosh(mx + m^3 y) \quad (\text{A24})$$

onde J'_{ef} é a constante de troca do modelo de Ising efetivo na rede triangular. Das expressões (A22) e (A24), obtém-se:

$$\exp(4K'_{\text{ef}}) = \frac{\exp(2\bar{D}') \cosh \left[\frac{9}{2} (\bar{K}' + \frac{9}{4} \bar{D}_1) \right] + \cosh \left[\frac{3}{2} (\bar{K}' + \frac{1}{4} \bar{D}_1) \right]}{\exp(2\bar{D}') \cosh \left[\frac{3}{2} (\bar{K}' + \frac{9}{4} \bar{D}_1) \right] + \cosh \left[\frac{1}{2} (\bar{K}' + \frac{1}{4} \bar{D}_1) \right]} \quad (\text{A25})$$

As correlações $\langle \sigma_1 \tau_o \rangle = \langle \sigma_2 \tau_o \rangle = \langle \sigma_3 \tau_o \rangle$, como no caso anterior, são obtidas a partir da equação:

$$\sum_{\tau_o} \exp \left[\bar{K} \bar{\sigma} \tau_o + \bar{D} \tau_o^2 + \bar{D}_1 \bar{\sigma} \tau_o^3 \right] \bar{\sigma} \tau_o \equiv G_2(\bar{D}, \bar{K} \bar{\sigma}, \bar{D}_1 \bar{\sigma}) =$$

$$= G(\bar{D}, \bar{K} \bar{\sigma}, \bar{D}_1 \bar{\sigma}) \left[Y_o (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) + Y_1 \right] \quad (A26)$$

onde

$$Y_o = \frac{1}{4} \left[F_2(\bar{D}, 3\bar{K}, 3\bar{D}_1) - F_2(\bar{D}, \bar{K}, \bar{D}_1) \right] \quad (A27)$$

$$Y_1 = \frac{1}{4} \left[F_2(\bar{D}, 3\bar{K}, 3\bar{D}_1) + 3F_2(\bar{D}, \bar{K}, \bar{D}_1) \right] \quad (A28)$$

com $F_2(\bar{D}, x, y) \equiv G_2(\bar{D}, x, y) / G(\bar{D}, x, y)$ e

$$G_2(\bar{D}, x, y) = \sum_{m=-3/2}^{3/2} \exp(\bar{D} m^2) m \bar{\sigma} \sinh(mx + ym^3), \quad (A29)$$

de modo que pode-se definir

$$\varepsilon' \equiv \langle \sigma_1 \tau_o \rangle' = Y_o \langle \sigma_1 \sigma_j \rangle_t + Y_1 / 3, \quad (A30)$$

onde $\langle \sigma_1 \sigma_j \rangle_t$ é a correlação entre os spins σ_1 e σ_j da rede triangular. Para $T=T_c$ pode-se então escrever a Eq.(A30) como:

$$\varepsilon' = \frac{1}{8} \left\{ \begin{aligned} & 9 \exp(2\bar{D}') \sinh \left[\frac{9}{2} (\bar{K} + \frac{9}{4} \bar{D}_1) \right] + 3 \sinh \left[\frac{3}{2} (\bar{K} + \frac{1}{4} \bar{D}_1) \right] \\ & \exp(2\bar{D}') \cosh \left[\frac{9}{2} (\bar{K} + \frac{9}{4} \bar{D}_1) \right] + \cosh \left[\frac{3}{2} (\bar{K} + \frac{1}{4} \bar{D}_1) \right] \end{aligned} \right. +$$

$$+ \frac{1}{3} \left[\frac{3 \exp(2\bar{D}') \sinh \left[\frac{3}{2} (\bar{K} + \frac{9}{4} \bar{D}_1) \right] + \sinh \left[\frac{1}{2} (\bar{K} + \frac{1}{4} \bar{D}_1) \right]}{\exp(2\bar{D}') \cosh \left[\frac{3}{2} (\bar{K} + \frac{9}{4} \bar{D}_1) \right] + \sinh \left[\frac{1}{2} (\bar{K} + \frac{1}{4} \bar{D}_1) \right]} \right] \quad (A31)$$

Usando-se o mesmo procedimento para o cálculo de $\langle \tau_k^2 \rangle'$, escreve-se

$$\int_{\tau_0} \tau_0^2 \exp \left[\bar{K} \bar{\sigma} \tau_0 + \bar{D} \tau_0^2 + \bar{D}_1 \bar{\sigma} \tau_0^3 \right] \equiv G_3(\bar{D}', \bar{K} \bar{\sigma}, \bar{D}_1 \bar{\sigma}) =$$

$$= G(\bar{D}', \bar{K} \bar{\sigma}, \bar{D}_1 \bar{\sigma}) \left[z_0 (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) + z_1 \right] \quad (A32)$$

onde

$$z_0 = \frac{1}{4} \left[F_3(\bar{D}', 3\bar{K}, 3\bar{D}_1) - F_3(\bar{D}', \bar{K}, \bar{D}_1) \right] \quad (A33)$$

$$z_1 = \frac{1}{4} \left[F_3(\bar{D}', 3\bar{K}, 3\bar{D}_1) + 3F_3(\bar{D}', \bar{K}, \bar{D}_1) \right] \quad (A34)$$

com $F_3(\bar{D}', x, y) \equiv G_3(\bar{D}', x, y) / G(\bar{D}', x, y)$ e

$$G_3(\bar{D}, x, y) = \sum_{n=-3/2}^{3/2} \exp(\bar{D}m^2) m^2 \bar{\sigma} \cosh(xm + ym^3), \quad (\text{A35})$$

de modo que

$$\langle \tau_k^2 \rangle' = 3z_0 \langle \sigma_1 \sigma_3 \rangle_t + z_1, \quad (\text{A36})$$

onde $\langle \sigma_1 \sigma_3 \rangle_t$ é a correlação entre os spins σ_1 e σ_3 da rede triangular. Em $T=T_c$ a Eq.(A36) é dada por:

$$\begin{aligned} \langle \tau_k^2 \rangle' = \frac{1}{16} \left\{ \frac{27 \exp(2\bar{D}') \cosh\left(\frac{9}{2}(\bar{K}' + \frac{9}{4}\bar{D}_1)\right) + 3 \cosh\left(\frac{3}{2}(\bar{K}' + \frac{1}{4}\bar{D}_1)\right)}{\exp(2\bar{D}') \cosh\left(\frac{9}{2}(\bar{K}' + \frac{9}{4}\bar{D}_1)\right) + \cosh\left(\frac{3}{2}(\bar{K}' + \frac{1}{4}\bar{D}_1)\right)} + \right. \\ \left. + \frac{9 \exp(2\bar{D}') \cosh\left(\frac{3}{2}(\bar{K}' + \frac{9}{4}\bar{D}_1)\right) + \cosh\left(\frac{1}{2}(\bar{K}' + \frac{1}{4}\bar{D}_1)\right)}{\exp(2\bar{D}') \cosh\left(\frac{3}{2}(\bar{K}' + \frac{9}{4}\bar{D}_1)\right) + \sinh\left(\frac{1}{2}(\bar{K}' + \frac{1}{4}\bar{D}_1)\right)} \right\}. \quad (\text{A37}) \end{aligned}$$

Repetindo o mesmo procedimento anterior para o cálculo de $\langle \sigma_3 \tau_0^3 \rangle'$, obtém-se

$$\begin{aligned} \sum_{\tau_0} \left[\bar{\sigma} \tau_0^3 \right] \exp\left[\bar{K} \bar{\sigma} \tau_0 + \bar{D}' \tau_0^2 + \bar{D}_1 \bar{\sigma} \tau_0^3 \right] &= G_4(\bar{D}', \bar{K} \bar{\sigma}, \bar{D}_1 \bar{\sigma}) = \\ &= G_4(\bar{D}', \bar{K} \bar{\sigma}, \bar{D}_1 \bar{\sigma}) \left[v_0 (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) + v_1 \right], \quad (\text{A38}) \end{aligned}$$

onde

$$v_0 = \frac{1}{4} \left[F_4(\bar{D}', 3\bar{K}', 3\bar{D}_1) - F_4(\bar{D}', \bar{K}', \bar{D}_1) \right] \quad (\text{A39})$$

$$v_1 = \frac{1}{4} \left[F_4(\bar{D}', 3\bar{K}', 3\bar{D}_1) + 3F_4(\bar{D}', \bar{K}', \bar{D}_1) \right] \quad (\text{A40})$$

com $F_4(\bar{D}', x, y) \equiv G_4(\bar{D}', x, y) / G(\bar{D}', x, y)$ e

$$G_4(\bar{D}', x, y) = \sum_{m=-3/2}^{3/2} \exp(\bar{D}' m^2) \left(\bar{\sigma}_m^3 \right) \sinh(xm + ym^3). \quad (\text{A41})$$

Agora, escrevendo-se

$$\langle \sigma_j \tau_0^3 \rangle' = v_0 \langle \sigma_1 \sigma_j \rangle_t + v_1 / 3 \quad (\text{A42})$$

e usando novamente os valores críticos em $T=T_c$, $\langle \sigma_1 \sigma_j \rangle_t = 2/3$ e $\exp(4\beta J_{ef}') = 3$ (Stephenson, 1964), obtém-se

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_j \tau_o^3 \rangle' = \frac{1}{32} \left\{ \right. & \frac{81 \exp(2\bar{D}') \sinh \left[\frac{9}{2} (\bar{K}' + \frac{9}{4} \bar{D}_1) \right] + 3 \sinh \left[\frac{3}{2} (\bar{K}' + \frac{1}{4} \bar{D}_1) \right]}{\exp(2\bar{D}') \cosh \left[\frac{9}{2} (\bar{K}' + \frac{9}{4} \bar{D}_1) \right] + \cosh \left[\frac{3}{2} (\bar{K}' + \frac{1}{4} \bar{D}_1) \right]} + \\
& \left. \left| \frac{27 \exp(2\bar{D}') \sinh \left[\frac{3}{2} (\bar{K}' + \frac{9}{4} \bar{D}_1) \right] + \sinh \left[\frac{1}{2} (\bar{K}' + \frac{1}{4} \bar{D}_1) \right]}{\exp(2\bar{D}') \cosh \left[\frac{3}{2} (\bar{K}' + \frac{9}{4} \bar{D}_1) \right] + \cosh \left[\frac{1}{2} (\bar{K}' + \frac{1}{4} \bar{D}_1) \right]} \right| \right\} \quad (\text{A43})
\end{aligned}$$

A.2 Modelo com campo aleatório com vínculo

As expressões para o caso do campo com vínculo são obtidas a partir dos resultados encontrados no caso anterior.

Para spin 1/2 e 1, ε e $\langle \tau_k^2 \rangle'$ são determinados substituindo-se nas Eqs. A13 e A19, $J \rightarrow \bar{J}$, $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_v$ e $\langle \tau_k^2 \rangle \rightarrow \langle \tau_k^2 \rangle_v$, e para spin 1/2 e 3/2, ε' , $\langle \tau_k^2 \rangle'$ e $\langle \sigma_j \tau_k^3 \rangle'$ são determinados substituindo-se nas Eqs. A31, A37, e A43, $J'' \rightarrow \bar{J}''$, $D_1 \rightarrow D_1'$, $\varepsilon' \rightarrow \varepsilon'_v$, $\langle \tau_k^2 \rangle' \rightarrow \langle \tau_k^2 \rangle'_v$ e $\langle \sigma_j \tau_k^3 \rangle' \rightarrow \langle \sigma_j \tau_k^3 \rangle'_v$.

APÊNDICE B

CÁLCULO DOS VALORES CRÍTICOS γ_c , α_c , p_c e T_c no $\lim \gamma \rightarrow \pm\infty$

B.1 Campo aleatório sem vínculo

B.1.1 Spins de magnitudes 1/2 e 1

Cálculo de γ_c .

γ_c é obtido das Eqs.(1.2.42) e (1.2.43), considerando o limite $T \rightarrow 0$, ou seja, $K \rightarrow \infty$. Assim, definindo $K \equiv \beta J$, $K' \equiv \beta J'$, $\gamma \equiv D/J$, $\alpha \equiv 2h/3J$, $A^2 \equiv \exp(K\alpha)$, $q \equiv \exp(2K')$, $\Gamma \equiv \exp(-K(\gamma+3))$, e considerando os termos dominantes para T pequeno, estas equações podem ser escritas como:

$$(1-p) \left\{ \frac{4q^2 - A^2q - 2\Gamma A}{A^2q + 2\Gamma A} \right\} + p \left\{ \frac{2q^2 - 2\Gamma - q}{q + 2\Gamma} \right\} = 0 \quad , \quad (B1)$$

$$(1-p) \left\{ \frac{A^2q - 2\Gamma A}{A^2q + 2\Gamma A} \right\} + p \left\{ \frac{q - 2\Gamma}{q + 2\Gamma} \right\} = 0 \quad , \quad (B2)$$

onde foi admitido $\varepsilon = \langle \tau_k^2 \rangle = 1/2$, que é o valor obtido das Eqs.(1.2.39) e (1.2.40) limite $T \rightarrow 0$.

Da Eq.(B2), diretamente, vem

$$q^2 + 2\Gamma \left(1 - \frac{1}{A}\right) (1 - 2p)q - \frac{4\Gamma^2}{A} = 0 \quad , \quad (B3)$$

cujas raízes são:

$$q = -\Gamma\left(1 - \frac{1}{A}\right)(1 - 2p) \pm \Gamma\left[\left(1 - \frac{1}{A}\right)^2(1 - 2p)^2 + \frac{4}{A}\right] \quad (B4)$$

A solução com o sinal - é espúria, porque da forma como está definido, q é sempre positivo. Substituindo-se q na Eq.(B1), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \frac{4(1-p)}{2+(A-1)(2p-1)+\sqrt{(A-1)^2(2p-1)^2+4A}} + \\ & + \frac{2Ap}{2A+(A-1)(2p-1)+\sqrt{(A-1)^2(2p-1)^2+4A}} = \\ & = \frac{\frac{A^3}{\Gamma}}{\left[(A-1)(2p-1)+\sqrt{(A-1)^2(2p-1)^2+4A}\right]} \quad (B5) \end{aligned}$$

Da expressão acima, é fácil concluir que no limite $T \rightarrow 0$, tem-se para:

$$i) \gamma_c = -3 - 3\alpha/2, \text{ para } p=0; \quad (B6a)$$

$$ii) \gamma_c = -3 - \alpha, \text{ para } 0 < p < 0.5; \quad (B6b)$$

$$iii) \gamma_c = -3 - \alpha/2, \text{ para } p=0; \quad (B6c)$$

$$iv) \gamma_c = -3, \text{ para } p > 0.5. \quad (B6d)$$

B.1.2 Spins de magnitudes 1/2 e 3/2

Cálculo de T_c no limite $\gamma \rightarrow \pm\infty$

Nas Eqs.(1.3.44), (1.3.45) e (1.3.46), considerando-se o limite $\gamma \rightarrow \pm\infty$ obtém-se $\varepsilon' = 5/4$, $\langle \tau_k^2 \rangle' = 9/4$, $\langle \sigma_j \tau_k^3 \rangle' = 45/16$. Substituindo estes valores nas Eqs.(1.3.39), (1.3.47) e (1.3.48), e definindo $K \equiv \beta J$, $K'' \equiv \beta J''$, $\alpha' \equiv h/6J$, $\kappa \equiv K\alpha'$, $\bar{D}_1 \equiv \beta D_1$, pode-se escrever

$$(1-p) \left\{ \frac{\exp(K'' + \frac{\bar{D}_1}{4}) \cosh(\kappa) - 12 \cosh(3\kappa) + 11 \exp(-2K'' - \frac{13\bar{D}_1}{2}) \cosh(5\kappa)}{\exp(K'' + \frac{\bar{D}_1}{4}) \cosh(\kappa) + 11 \exp(-2K'' - \frac{13\bar{D}_1}{2}) \cosh(5\kappa)} \right\} +$$

$$+ p \left\{ \frac{\exp(K'' + \frac{\bar{D}_1}{4}) - 12 + 11 \exp(-2K'' - \frac{13\bar{D}_1}{2})}{\exp(K'' + \frac{\bar{D}_1}{4}) + 11 \exp(-2K'' - \frac{13\bar{D}_1}{2})} \right\} = 0, \quad (B7)$$

$$(1-p) \left\{ \frac{\exp(3K'' + \frac{27\bar{D}_1}{4}) \cosh(\kappa) - \cosh(5\kappa)}{\exp(3K'' + \frac{27\bar{D}_1}{4}) \cosh(\kappa) + 11 \cosh(5\kappa)} \right\} +$$

$$+ p \left\{ \frac{\exp(3K'' + \frac{27\bar{D}_1}{4}) - 1}{\exp(3K'' + \frac{27\bar{D}_1}{4}) + 11} \right\} = 0, \quad (B8)$$

$$\exp\left(K'' + \frac{13\bar{D}_1}{4}\right) = \frac{3\cosh\left(\frac{1}{2}(K+K'' + \frac{\bar{D}_1}{4})\right) + \cosh\left(\frac{3}{2}(K+K'' + \frac{\bar{D}_1}{4})\right)}{\exp(2K\gamma) \left[\cosh\left(\frac{9}{2}(K+K'' + \frac{9\bar{D}_1}{4})\right) - 3\cosh\left(\frac{3}{2}(K+K'' + \frac{9\bar{D}_1}{4})\right) \right]} \quad (B9)$$

Fazendo $A' \equiv \exp(27\bar{D}_1/4)$, a Eq.(B8) pode ser escrita como

$$\exp(6K'')A'^2 \cosh(\kappa) + \exp(3K'') \left\{ \cosh(\kappa)(11-12p) + \right. \\ \left. - \cosh(5\kappa)(1-12p) \right\} - 11\cosh(5\kappa) = 0 \quad , \quad (B10)$$

cujas raízes, considerando como variável $\exp(3K'')$, são dadas por:

$$\exp(3K'') = \frac{(1-12p)\cosh(5\kappa) - (11-12p)\cosh(\kappa)}{2A'\cosh(\kappa)} + \\ \pm \frac{\sqrt{\left[(11-12p)\cosh(\kappa) - (1-12p)\cosh(\kappa) \right]^2 + 44\cosh(\kappa)\cosh(5\kappa)}}{2A'\cosh(\kappa)} \quad , \quad (B11)$$

onde, a solução negativa é espúria pois $\exp(3K'') > 0$. A solução geral é determinada resolvendo-se numericamente o sistema formado pelas Eqs.(B7), (B9) e (B11). Para $p=0$ e $p=1$, é possível obter-se a solução em termos de uma única equação que é mostrada a seguir.

i) $p=0$.

Obtém-se da Eq.(B11)

$$\exp(3K) = \frac{\cosh(5\kappa)}{\exp\left(\frac{27\bar{D}_1}{4}\right)\cosh(\kappa)} \quad (B12)$$

da Eq.(B7),

$$\exp(2\bar{D}_1) = \frac{\cosh^{1/3}(5\kappa) \cosh^{2/3}(\kappa)}{\cosh(3\kappa)} \quad (B13)$$

No limite $\gamma \rightarrow -\infty$, substituindo-se as Eqs.(B12) e (B13) na Eq.(B9), obtém-se

$$\exp(6\kappa) + 1 - (2 + \sqrt{3})\exp(4\kappa - K) - (2 + \sqrt{3})\exp(2\kappa - K) = 0 \quad (B14)$$

e, no limite $\gamma \rightarrow \infty$, novamente, substituindo as Eqs.(B12) e (B13) na Eq.(B9), encontra-se

$$\exp(10\kappa) - (2 + \sqrt{3})\exp(6\kappa - 3K) - (2 + \sqrt{3})\exp(4\kappa - 3K) + 1 = 0 \quad (B15)$$

Das Eqs. (B14) e (B15) pode-se calcular o valor de T_c em função de α' .

ii) Para $p=1$.

Neste caso o resultado independe de α' , e corresponde ao modelo estudado por Gonçalves(1985). Assim para $p=1$ obtém-se das Eqs.(B7), (B9) e (B11)

$$\exp(3K'') = \exp(-27\bar{D}_1/4) , \quad (B16)$$

$$\bar{D}_1=0 , \quad (B17)$$

$$\frac{3\cosh(K/2)-\cosh(3K/2)}{\exp(K\gamma) \left[\cosh\left(\frac{9}{2} K\right)-3\cosh\left(\frac{3}{2} K\right) \right]} = 1 . \quad (B18)$$

No limite $\gamma \rightarrow -\infty$, a equação anterior pode ser escrita como

$$3\cosh(K/2)-\cosh(3K/2)=0 \quad (B19)$$

que fornece a solução $K=\ln(2+\sqrt{3})$, determinando $T_c \cong 0.7593257$, e no limite $\gamma \rightarrow \infty$, na forma

$$\cosh(9K/2)-3\cosh(3K/2)= 0 \quad (B20)$$

cuja solução é dada por $K=\ln(2+\sqrt{3})/3$, determinando $T_c \cong 2.2779771$.

B.2 Campo aleatório com vínculo

B.2.1 Spins de magnitudes 1/2 e 1

a) Cálculo de γ_c^f para fase ferromagnética.

Tomando-se o limite $T \rightarrow 0$ nas Eqs.(2.2.26) e (2.2.27), obtém-se também $\varepsilon_v = \langle \tau_k^2 \rangle_v = 1/2$ e, substituindo estes valores nas

Eqs.(2.2.25),(2.2.29) e (2.2.30), juntamente com as definições $\alpha \equiv 2h/3J$, $\bar{K} \equiv \beta \bar{J}$, $A^2 \equiv \exp(K\alpha)$, $q' \equiv \exp(2\bar{K})$ e $\Gamma \equiv \exp(-K(\gamma+3))$, encontra-se

$$(1-p) \left[\frac{q' - \Gamma A}{q' + \Gamma A} \right] + p \left[\frac{q' - 2\Gamma}{q' + 2\Gamma} \right] = 0 \quad , \quad (B21)$$

$$(1-p) \left[\frac{A^2 q'^2 - \Gamma A - q'}{q' + \Gamma A} \right] + p \left[\frac{2q'^2 - 2\Gamma - q'}{q' + 2\Gamma} \right] = 0 \quad . \quad (B22)$$

A Eq.(B21) apresenta as seguintes soluções em q' :

$$q' = \frac{\Gamma}{2} (A-2)(1-2p) \pm \frac{\Gamma}{2} \sqrt{(2-A)^2(1-2p)^2 + 8A} \quad . \quad (B23)$$

A solução correspondente ao sinal negativo é espúria, pois q' , por definição, é maior que zero. Das Eqs.(B22) e (B23), explicitando a dependência em α , γ e K , pode-se escrever

$$\begin{aligned} & \frac{(1-p)\exp(K\alpha)}{(3-2p)\exp(K\alpha/2) + \sqrt{(1-2p)^2\exp(K\alpha) + 8\exp(K\alpha/2)}} + \\ & \frac{2p}{(1-2p)\exp(K\alpha/2) + \sqrt{(1-2p)^2\exp(K\alpha) + 8\exp(K\alpha/2)}} = \\ & = \frac{2\exp(K(\gamma+3))}{\left[(3-2p)\exp(K\alpha/2) + \sqrt{(1-2p)^2\exp(K\alpha) + 8\exp(K\alpha/2)} \right]^2} \quad . \quad (B24) \end{aligned}$$

No limite $K \rightarrow \infty$, usando a equação acima obtém-se os resultados:

$$\gamma_c^F = -3 + 3\alpha/2 \text{ para } p < 1/2, \quad (\text{B25a})$$

$$\gamma_c^F = -3 + \alpha \text{ para } p = 1/2, \quad (\text{B25b})$$

$$\gamma_c^F = -3 + \alpha/2 \text{ para } 1/2 < p < 1, \quad (\text{B25c})$$

$$\gamma_c^F = -3 \text{ para } p = 1. \quad (\text{B25d})$$

b) Cálculo de γ_c^A e α_c para fase antiferromagnética.

i) α_c é obtido impondo-se a condição $T_c \rightarrow 0$ em $p=0$. Assim, tomando-se o limite $T \rightarrow 0$ nas Eqs.(2.2.26) e (2.2.27), obtém-se $\epsilon_v = -1/2$, $\langle \tau_k^z \rangle_v = 1/2$ e, usando-se estes valores e a definição $\bar{D} \equiv \beta D'$, nas Eqs.(2.2.25), (2.2.29) e (2.2.30), e considerando-se os termos dominantes no limite de baixas temperaturas, encontra-se

$$(1-p) \left[\frac{2 - \exp(\bar{K} + \bar{D}) \cosh(K\alpha/2) - \exp(2\bar{K}) \cosh(K\alpha)}{\exp(\bar{K} + \bar{D}) \cosh(K\alpha/2) + \exp(2\bar{K}) \cosh(K\alpha)} \right] +$$

$$+ p \left[\frac{2 - \exp(\bar{K} + \bar{D}) - \exp(2\bar{K})}{\exp(\bar{K} + \bar{D}) + \exp(2\bar{K})} \right] = 0 \quad (\text{B26})$$

$$(1-p) \left[\frac{-\exp(\bar{K}+\bar{D}) \cosh(K\alpha/2) + \exp(2\bar{K}') \cosh(K\alpha)}{\exp(\bar{K}+\bar{D}') \cosh(K\alpha/2) + \exp(2\bar{K}') \cosh(K\alpha)} \right] +$$

$$+ p \left[\frac{-\exp(\bar{K}+\bar{D}') + \exp(2\bar{K}')}{\exp(\bar{K}+\bar{D}') + \exp(2\bar{K}')} \right] = 0 \quad , \quad (B27)$$

$$\exp(\bar{D}') = \frac{2}{\exp(K\gamma - 3(K+\bar{K}'))} \quad , \quad (B28)$$

respectivamente. Fazendo $p=0$ e subtraindo-se, membro a membro as Eqs.(B26) e (B27), obtém-se:

$$2 - 2\exp(2\bar{K}') \cosh(K\alpha) = 0 \quad , \quad (B29)$$

Somando-se, membro a membro, estas equações, encontra-se:

$$2 - 4\exp(4\bar{K}' - K\gamma + 3K) \cosh(K\alpha/2) = 0 \quad . \quad (B30)$$

Para a fase antiferromagnética, $\bar{K}'+K<0$, isto implica que α_c é obtido impondo-se a condição $\bar{K}'+K=0$.

No limite $T \rightarrow 0$ das Eqs.(B29) e (B30) obtemos:

$$\bar{K}' = -\frac{K\alpha}{2} \quad , \quad . \quad (B31)$$

$$\bar{K}' = \frac{K}{4}(\gamma - 3 - \frac{\alpha}{2}) \quad , \quad (B32)$$

que fornecem duas expressões para α_c , que são:

$$\alpha_c = 2 \quad , \quad (B33)$$

$$\alpha_c = \frac{2}{3} (3 - \gamma) \quad . \quad (B34)$$

Para $\gamma=0$, as duas equações fornecem o mesmo resultado $\alpha_c=2$. Para $\gamma \neq 0$, α_c corresponde ao maior valor obtido e então, é dado pela Eq.(B33) para $\gamma > 0$, e pela Eq.(B34) para $\gamma < 0$.

ii) γ_c^* é obtido substituindo-se a Eq.(B28) nas Eqs.(B26) e (B27). Tomando o limite $T \rightarrow 0$, e a substituição das definições $A^2 \equiv \exp(K\alpha)$, $q' \equiv \exp(2\bar{K})$ e $\Gamma \equiv \exp((K(3-\gamma)))$, após algumas simplificações encontra-se:

$$(1-p) \left(\frac{1-A\Gamma q'^2}{1+A\Gamma q'^2} \right) + p \left(\frac{1-\Gamma q'^2}{1+\Gamma q'^2} \right) = 0 \quad , \quad (B35)$$

$$(1-p) \left(\frac{A^2 q' - A\Gamma q'^2 - 1}{1+A\Gamma q'^2} \right) + p \left(\frac{2q' - 2\Gamma q'^2 - 1}{1+2\Gamma q'^2} \right) = 0 \quad , \quad (B36)$$

Resolvendo-se a Eq.(B35) em q' , obtém-se as soluções

$$q' = \pm \left(\frac{(2-A)(1-2p) \pm \sqrt{(2-A)^2(1-2p)^2 + 8A}}{4\Gamma A} \right)^{1/2} \quad , \quad (B37)$$

onde deve-se considerar a solução positiva. Substituindo-se este valor de q' na Eq.(B36), determina-se γ_c^* , tomando-se o limite $K \rightarrow \infty$, que conduz aos os seguintes resultados:

$$\gamma_c^\lambda = 3 - 3\alpha/2 \text{ para } p=0 \quad , \quad (\text{B38a})$$

$$\gamma_c^\lambda = 1 - \alpha/2 \text{ para } p \neq 0. \quad (\text{B38b})$$

c) Cálculo de p_c .

p_c é determinada considerando-se também o limite em que $T_c \rightarrow 0$. Neste limite, considerando-se a situação em que $K + \bar{K} \gg 1$, que corresponde à fase ferromagnética apenas, pode-se concluir da Eq.(2.2.25), que

$$\exp(\beta D') = \exp(-K(\gamma+3) - 3\bar{K}) \quad . \quad (\text{B39})$$

Substituindo-se a equação anterior juntamente com $\varepsilon_v = \langle \tau_k^2 \rangle_v = 1/2$, nas Eqs.(2.2.29) e (2.2.30), encontra-se:

$$(p-1) \left[\frac{1 - \exp(2\bar{K} - K(\gamma+3 - \frac{\alpha}{2}))}{1 + \exp(2\bar{K} - K(\gamma+3 - \frac{\alpha}{2}))} \right] = p \left[\frac{1 - 2\exp(2\bar{K} - K(\gamma+3))}{1 + 2\exp(2\bar{K} - K(\gamma+3))} \right] \quad , \quad (\text{B40})$$

$$(p-1) \left[\frac{1 - \exp(-2\bar{K} - K(\gamma+3 - \frac{\alpha}{2}))}{1 + \exp(-2\bar{K} - K(\gamma+3 - \frac{\alpha}{2}))} \right] = p \left[\frac{1 - 2\exp(-2\bar{K} - K(\gamma+3))}{1 + 2\exp(-2\bar{K} - K(\gamma+3))} \right] \quad . \quad (\text{B41})$$

Destas equações, obtém-se:

$$\exp(2\bar{K}) = \sqrt{2} \exp(-\frac{K}{2}(\gamma+3 + \frac{\alpha}{2})) \quad , \quad (\text{B42})$$

e usando-se este resultado, pode-se escrever a Eq.(B40) na forma:

$$(p-1) \left[\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{K}{2}(\gamma+3-\frac{\alpha}{2})\right)}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{K}{2}(\gamma+3-\frac{\alpha}{2})\right)} \right] = p \left[\frac{1 - \frac{2}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{K}{2}(\gamma+3+\frac{\alpha}{2})\right)}{1 + \frac{2}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{K}{2}(\gamma+3+\frac{\alpha}{2})\right)} \right] \quad (B43)$$

a qual, somente apresenta solução para p_c na região $\gamma < 0$, que é dada por:

$$p_c^F = 1/2 \begin{cases} \text{para } -1 < \gamma < 0, & \text{com } \frac{2\gamma}{3} + 2 < \alpha < 2 - 2\gamma \\ & \text{ou} \\ \text{para } -3 < \gamma \leq -1, & \text{com } \frac{2\gamma}{3} + 2 < \alpha < 2\gamma + 6 \end{cases} \quad (B44)$$

Para $\gamma \leq -3$ não existe p_c .

Considerando-se agora, uma outra condição, na qual K e $-K$ são de mesma ordem, de tal forma que

$$\exp(K+\bar{K}) \equiv y \approx \text{cte.} \quad (B45)$$

e substituindo as Eqs.(2.2.25), (2.2.26) e (2.2.27), nas Eqs.(2.2.29) e (2.2.30), obtém-se

$$\begin{aligned}
& (p-1) \left[\frac{2(3y^6-8y^4-7y^2+6)-6y^4 \exp(K(\frac{\alpha}{2}-1-\gamma))-y^2(y^4+2y^2+3) \exp(K(\alpha-2))}{2(3y^6+2y^4+y^2)+6y^4 \exp(K(\frac{\alpha}{2}-1-\gamma))+y^2(y^4+2y^2+3) \exp(K(\alpha-2)))} \right] = \\
& = p \left[\frac{3y^6-8y^4-7y^2+6-6y^4 \exp(-K(\gamma+1))}{3y^6+2y^4+y^2+6y^4 \exp(-K(\gamma+1))} \right] \quad , \quad (B46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (p-1) \left[\frac{(6y^6-7y^4-8y^2+3) \exp(K(\alpha-2))-6y^2 \exp(K(\frac{\alpha}{2}-1-\gamma))+2(y^4+2y^2+1)}{(y^4+2y^2+3) \exp(K(\alpha-2))+6y^2 \exp(K(\frac{\alpha}{2}-1-\gamma))+2(3y^4+2y^2+1))} \right] = \\
& = p \left[\frac{3y^4+2y^2+1-6y^2 \exp(-K(\gamma+1))}{3y^4+2y^2+1+6y^2 \exp(-K(\gamma+1))} \right] \quad . \quad (B47)
\end{aligned}$$

Com este sistema de equações é possível calcular numericamente os valores críticos de p em função dos parâmetros α e γ . A seguir, apresenta-se uma tabela mostrando os resultados deste cálculo para diversos valores dos parâmetros citados, correspondentes aos diagramas $T_x p$. Em todos os casos, os resultados foram obtidos considerando nas Eqs.(B46) e (B47) o limite $K \rightarrow \infty$, e a partir do resultado encontrado, determinada uma equação polinomial em y^2 cujas raízes permitem o cálculo direto de p crítico. Utilizou-se o software Derive (Rich et al., 1989) na manipulação algébrica das equações.

Tabela B-1

| α | γ | y^2 | p_c^r | p_c^a |
|----------|----------|--|-------------------------------------|--------------------------|
| 2 | 0 | 4.14743... 0.18144... | 0.42743... | 0.11509... |
| 2 | >0 | $2 + \sqrt{3}$ | $\frac{-39 + 23\sqrt{3}}{2}$ | |
| >2 | >0 | $2 + \sqrt{3}$ | $\frac{2\sqrt{3}}{9} + \frac{1}{2}$ | |
| | | $2 - \sqrt{3}$ | | 0.11509... |
| 3 | -0.5 | 4.14742... 0.18144... | 0.82552... | 0.05583... |
| 4 | -1 | 2.21206... 5.48499... 0.47004... 0.49103... | 0.91247... 0.94411... | 0.08752... 0.17447... |
| 2 | -2 | 0.47004... | 0.86602... | |

B.2.4 Spins de magnitudes 1/2 e 3/2

Cálculo de α_c para $\gamma=0$ e $p=0$.

Considerando o limite $T \rightarrow 0$ nas as Eqs.(2.3.35), (2.3.36) e (2.3.37), transformam-se em $\epsilon'_v = 5/4$, $\langle \tau_k^2 \rangle'_v = 9/4$ e $\langle \sigma_j \tau_k^3 \rangle'_v = 45/16$. Usando estes valores, e as definições $\bar{D}'_1 \equiv \beta D'_1$ e $\bar{K}' \equiv \beta \bar{J}'$, nas Eqs.(2.3.38) e (2.3.39), obtém-se

$$\begin{aligned} & \exp(-\bar{K}' - \frac{\bar{D}'_1}{4}) \cosh(K\alpha) - 12 \cosh(3K\alpha) + \\ & + 11 \exp(2\bar{K}' + \frac{13\bar{D}'_1}{2}) \cosh(5K\alpha) = 0 \end{aligned} \quad (B48)$$

$$\exp(-3\bar{K}'' - \frac{27\bar{D}'_1}{4}) \cosh(K\alpha) - \cosh(5K\alpha) = 0 \quad (B49)$$

Resolvendo-se este sistema de equações no limite $K \rightarrow \infty$ encontra-se

$$\bar{K}'' = -\frac{25K\alpha}{12} \quad \text{e} \quad \bar{D}'_1 = \frac{K\alpha}{3} \quad (B50)$$

Fazendo $\gamma=0$ na Eq.(2.3.30), obtém-se

$$\exp(-\bar{K}'' - \frac{13\bar{D}'_1}{4}) = \frac{3 \cosh\left[\frac{1}{2}(K + \bar{K}'' + \frac{\bar{D}'_1}{4})\right] - \cosh\left[\frac{3}{2}(K + \bar{K}'' + \frac{\bar{D}'_1}{4})\right]}{\cosh\left[\frac{9}{2}(K + \bar{K}'' + \frac{9\bar{D}'_1}{4})\right] - 3 \cosh\left[\frac{3}{2}(K + \bar{K}'' + \frac{9\bar{D}'_1}{4})\right]} \quad (B51)$$

Das Eqs.(B50) e (B51), obtém-se:

$$\exp(K\alpha') = \frac{3 \cosh\left[\frac{1}{2}K(1-2\alpha')\right] - \cosh\left[\frac{3}{2}K(1-2\alpha')\right]}{\cosh\left[\frac{9}{2}K(1-\frac{4\alpha'}{3})\right] - 3 \cosh\left[\frac{3}{2}K(1-\frac{4\alpha'}{3})\right]} \quad (B52)$$

a qual no limite $T \rightarrow 0$ fornece apenas a solução $\alpha_c = 3/4$.

REFERÊNCIAS

- Aharony, A., *Phys. Rev. B* 18(1978)3318.
- Baxter, R. J., *Exactly Solved models in Statistical Mechanics*, Academic Press, London(1982).
- Bobák, A. e Jascur, M., *J. Phys.:Condens. Matter* 3(1991)6613.
- Borges, H. E. e Silva, P. R., *Phys. State Solidi* b121(1984)K19.
- Bricmont, J., Kupiainen, A., *Phys. Rev. Lett.* 59(1987)1829.
- Brout, R., *Phys. Rev.* 115(1959)824.
- Brush, S. G., *Rev. Mod. Phys.* 39(1967)883.
- Falk, H., *J. Phys. C* 9(1976)L213.
- Fishman, S., Aharony, A., *J. Phys. C* 12(1979)1729.
- Gonçalves, L.L., *Physica Scripta* 32(1985)248; *Physica Scripta* 33(1986)192.
- Gonçalves, L. L. e Horiguchi, T., *Physica* 127A(1984)587.
- Gonçalves, L. L., *Physica Scripta* 35(1987)105.
- Gonçalves, L. L. e Horiguchi, T., *Physica* 150A(1988)672.
- Gonçalves, L. L. e Horiguchi, T. *Int. J. Mod. Phys. B4* (1990)1693.
- Gonçalves, L. L. e Stinchombe, R.B., *Phys. Rev. B* 33(1986)4762.
- Harris, R., Plischke, M. e Zuckermann, M. J., *Phys. Rev. Lett.* 31(1973)160-2.
- Horiguchi, T. e Gonçalves, L. L., *Mod. Phys. Lett. B* 2 (1988)1137.
- Horiguchi, T. e Gonçalves, L. L., *Physica A* 120(1983)600.
- Horiguchi, T. e Gonçalves, L. L., *Physica A* 150(1988)672.
- Huang, K., *Statistical Mechanics* (John Wiley & Sons, 1987)
- Imry, Y., *J. Stat. Phys.* 34(1984)849.
- Imry, Y. and Ma, S.K., *Phys. Rev. Lett.* 35(1975)1399.
- Ising, E., *Z. Phys.* 31(1925)253.
- King, A. R. e Belanger, D. P., *J. Magn. Magn. Mater.* 54-57 (1986)19.
- Landau, D. P., Lee, H. H. e Kao, W., *J. Appl. Phys.* 49(1978)1356.

- Mielnicki, J., Balcerzak, T. e Wiatrowski, G., *Phys. Status Solidi b* 156(1989)355.
- Mizumo, J., *J. Phys. C* 7(1974)3755.
- Onsager, L., *Phys. Rev.* 65(1944)117.
- Pereira, C. A., Gonçalves, L. L., *J. Magn. Magn. Mate.* 140-144(1995).
- Reed, P., *J. Phys. C: Solid State Phys.* 18(1985)L615.
- Rich, A., Rich, J., Stoutemyer, D., *A Mathematical Assistant Program* (Softwarehouse, Hawaii, 1989).
- dos Santos, R. J. V., Coutinho, S., *J. Phys. A* 20(1987)5667.
- dos Santos, R. J. V., Fittipaldi, I. P., Alstrom, P. e Stanley, H. E., *Phys. Rev. B* 40(1989)4527.
- Stephenson, J., *J. Math. Phys.* 5(1964)1009.
- Syozzi, I., *Prog. Theor. Phys.* 6(1951)306.
- Syozzi, I., *Prog. Theor. Phys.* 34(1965)189.
- Syozzi, I., *Phase Transitions and Critical Phenomena* (Editado por C. Domb e M. S. Green), Vol.1, Academic Press, London (1972).
- Temperley, H. N. V. , *Phase Transitions and Critical Phenomena* Vol. 1, Editado por Domb e M. S. Green (Academic Press, London, 1972), pag 227.
- Thorpe, M. F. e Beeman, D., *Phys. Rev. B* 4(1976)188.
- Villadsen, J., *Selected Approximation Methods For Chemical Engineering Problems*, Lyngby, Denmark: Institutttet For Kemiteknik(1970).