Universidade Federal do Ceará
Centro de Ciências
Departamento de Física

INFLUÊNCIA DO TERMO DE PAULI NO CARÁTER ANIÔNICO DA TEORIA DE CHERN-SIMONS ACOPLADA A CAMPOS DE MATÉRIA

Francisco Augusto Silva Nobre

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto S. de Almeida

Tese apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Dezembro de 1995

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

N672i Nobre, Francisco Augusto Silva.
Influência do termo de Pauli no caráter aniônico da teoria de Chern-Simons acoplada a campos de matéria / Francisco Augusto Silva Nobre. – 1995.
74 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 1995.
Orientação: Prof. Dr. Carlos Alberto S. de Almeida .

1. Teoria de Chern-Simons. 2. Dirac, Equação de . I. Título.

CDD 530

INFLUÊNCIA DO TERMO DE PAULI NO CARÁTER ANIÔNICO DA TEORIA DE CHERN-SIMONS ACOPLADA À CAMPOS DE MATÉRIA

Francisco Augusto Silva Nobre

Tese apresentada ao Departamento de Física da
Universidade Federal do Ceará, como parte dos
requisitos para a obtenção do título de
Mestre em Ciências

Comissão Julgadora:

Prof.. Dr. Carlos Alberto S. de Almeida - UFC
Orientador

Prof. Dr. ionisio Bazeia Filho- UFPB

Prof. Dr. Júlio Auto Neto - UFC

Aprovada em 7 de dezembro de 1995

À Ivanisa, que amo, e ao filho que acaba de chegar.

Aos meus pais e irmãos que sempre me estimularam a estudar.

AGRADECIMENTOS

À Carlos Alberto, orientador e amigo.

Ao amigo Marcony, com o qual convivi estes últimos anos compartilhando os mesmos ideais.

Ao colega Eduardo, pela discussões sobre física e filosofia.

Ao Professor Dionísio Bazeia pelas discussões, pelo apoio e amizade.

A todos que fazem o Departamento de Física, que direta ou indiretamente contribuíram para minha formação. Em especial à professora Hélade†, aos professores Cleuton, Homero, Newton Teófilo, Siqueira e ao amigo Carlos Alberto (estudante).

Aos funcionários, em especial a Rejane, Valéria e Creusa pela atenção e ajuda durante esta fase.

Ao chefe do Departamento de Física, professor José Carlos Parente de Oliveira e ao coordenador do curso de Pós-Graduação, professor Josué Mendes Filho, pelas condições oferecidas ao desenvolvimento deste trabalho.

À Universidade Regional do Cariri e todos os amigos desta nova fase.

Ao CNPQ e a FUNCAP, pelo suporte financeiro.

RESUMO

Neste trabalho consideramos o modelo de Chern-Simons acoplado à campos de matéria modificado pela introdução, a nível de árvore, de um termo do tipo Pauli, ou seja um acoplamento de momento magnético anômalo. A introdução deste termo é efetuada pela inclusão de uma contribuição adicional na derivada covariante de gauge, a qual acopla diretamente o campo de matéria ao tensor do campo eletromagnético.

Apresentamos uma revisão do formalismo de Dirac para sistemas vinculados e utilizamos este método para tratar a estrutura de vínculos do modelo.

Escolhemos o gauge de Lorentz como condição de fixação de gauge e construímos as transformações de BRST para o modelo, assim como a corrente e carga de BRST correspondentes.

O modelo é posteriormente quantizado usando os parênteses de Dirac e mostramos o aparecimento de uma contribuição extra para as propriedades rotacionais do campo de matéria.

Toda esta formulação é então refeita para um gauge não-covariante e observamos novamente a mesma modificação na estatística anômala do modelo.

Concluímos então que a introdução de um termo de momento de dipolo anômalo leva a uma modificação na chamada estatística fracionária e discutimos a possibilidade do aparecimento de anions mesmo na ausência de termo de Chern-Simons.

ABSTRACT

In this work we consider the Chern-Simons model coupled to matter fields, in which we add an Pauli-type coupling. The added term can be interpreted as an anomalous magnetic moment coupling. The introduction of this term is achieved by adding to the gauge covariant derivative an extra nonminimal contribution, which couples the matter field directly to the field strenght.

We present a review of the Dirac formalism for constrained systems and this method is used to treat the constraints of the model properly.

As gauge fixing condition we choose the Lorentz gauge and we construct the BRST transformations to the model, as well as the BRST current and charge.

Using the Dirac bracket method the model is quantized and it is shown that appears an extra contribution to the rotational property of the matter field.

Then this formulation is rebuilt for a noncovariant gauge and we note that the same modification arises in the anomalous statistic of the model.

So we conclude that the inclusion of the anomalous magnetic moment leads to a change in the so called fractional statistics and we discuss an open possibility of the presence of anyons even in the absence Chern-Simons term.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Modelos em (2+1) dimensões têm sido muito estudados nos últimos anos. A possibilidade de soluções tipo sólitons desperta muito interesse, especialmente na direção de aplicações em Física da Matéria Condensada (Supercondutividade em altas temperaturas, efeito Hall quântico, etc.) [1-3]. Por exemplo, o modelo de Ginzburg-Landau para a supercondutividade apresenta soluções topológicas tipo vórtice [4], e o modelo de Higgs abeliano [5] admite vórtices que carregam fluxo magnético, mas que são eletricamente neutros.

O grande uso do termo de Chern-Simons, de maneira geral, deve-se ao fato deste revelar propriedades topológicas importantes aos modelos em (2+1) dimensões espaço temporais. No contexto que mais nos interessa, o termo de Chern-Simons leva ao aparecimento dos chamados anions, os quais apresentam estatística fracionária [6,7], na qual se permite a existência de autovalores fracionários para o operador de spin. Esta propriedade está relacionada com as características topológicas da teoria.

Em duas dimensões espaciais, existe esta nova possibilidade para estatística quântica, que interpola continuamente entre bosons e fermions. Esta chamada estatística fracionária, segundo Wilczek [6], concretiza-se em partículas denominadas anions, as quais possuem spin fracionário.

Este efeito pode ser obtido com um modelo dinâmico simples, em que campos de gauge fictícios assumem uma dinâmica, a qual não pode ser identificado como um Eletromagnetismo ordinário. Em Teoria Quântica de Campos se implementa em (2+1) dimensões um modelo simples que apresenta estas anomalias. Este modelo possui a construção de Chern-Simons.

Podemos mencionar inicialmente o trabalho de Leynas [8], mas quem primeiro fez um estudo mais sistemático sobre os chamados anions, no inicio da década de 80, foi Wilczek [9-12], realizando até mesmo um esforço mais efetivo no sentido de aplicar estes objetos para o entendimento de fenômenos tais como supercondutividade em altas temperaturas e efeito Hall quântico.

Basicamente Wilczek associava aos anions estas anomalias na propriedade rotacional de campos escalares. No entanto, a idéia de modificar o espaço-tempo tridimensional em teorias de campos através de uma Lagrangiana composta basicamente por uma corrente conservada acoplada aos campos de gauge e o termo de Chern-Simons, foi originalmente proposta por Hagen [1] em 1985. Analisando um modelo em (2+1) dimensões com dinâmica não ordinária para um campo de gauge fictício, Hagen verificou o aparecimento de estatística fracionária mas não interpolação entre bosons e fermions. Isto significa que para seu modelo, as propriedades anômalas não se traduziam em anions. Semenoff em 1988 [13] obteve resultados semelhantes utilizando explicitamente o termo de Chern-Simons, considerando um gauge não-covariante. Esta relação entre estatística fracionária e anions ainda não é clara o bastante, porém se usa comumente o termo "característica aniônica", quando se refere à estatística fracionária. Vale lembrar que a definição de anions esta intimamente relacionada à estatística fracionária.

O spin fracionário é medido através do cálculo de um termo extra na álgebra do momentum angular. Nas referências [13-15] o termo extra resultante é proporcional ao inverso do coeficiente de Chern-Simons. Este resultado foi obtido utilizando-se o gauge de Coulomb. No entanto, como é de esperar, uma vez que a Física não pode depender da escolha de gauge, o spin fracionário não é privilégio de gauges não-covariantes. Realmente, em 1992, H. Shin, W. Kim e J.Kim [16], analisaram uma teoria de gauge Abeliana com o termo de Chern-Simons, sendo introduzido na derivada covariante o acoplamento dos campos de gauge com o campo de matéria. Diferente de Semenoff, introduzem a simetria de BRST e mostram que o spin fracionário também é obtido em um gauge covariante.

A característica de anions, como já dito, vem do termo de Chern-Simons, porém, vale salientar que existe uma controvérsia, pois acredita-se que esta característica seja perdida com a introdução do termo de Maxwell [17]. No entanto, alguns autores consideram irrealista um modelo para anions que não contenha um termo de propagação do tipo Maxwell. Uma solução para esse impasse foi proposta inicialmente por J. Stern [18] e desenvolvida por M. Torres [19]. A proposta consiste em introduzir um acoplamento não-mínimo em um modelo Maxwell-Chern-Simons. Este acoplamento é basicamente aquele conhecido como termo de Pauli e pode ser interpretado como uma introdução de um momento magnético anômalo a nível de árvore. É interessante assinalar que devido às peculiaridades da álgebra SO(2,1), característica do espaço-tempo (2+1) dimensional, o acoplamento tipo Pauli existe, mesmo na ausência de graus de liberdade de spin [18,20].

O ponto central da proposta mencionada acima é que obtém-se uma lei de Gauss como uma equação de primeira ordem, mesmo na presença do termo de Maxwell (para um valor particular da constante de acoplamento de Pauli). E como sabemos, uma lei de Gauss de primeira ordem é essencial para o comportamento aniônico.

Neste trabalho, estudamos o modelo de Chern-Simons Abeliano com o termo de Pauli acoplado à campos de matéria. A introdução deste termo extra é obtida, definindo a derivada covariante com um termo que acopla os campos de gauge com o campo escalar complexo (acoplamento mínimo), e um outro que acopla diretamente o mesmo campo de matéria ao tensor campo eletromagnético, sendo este último conhecido como termo de momento de dipolo anômalo (acoplamento não-mínimo). Uma vez que este sistema possui invariância de BRST, utilizamos o chamado formalismo de BRST para obter mais informações sobre o sistema, além deste formalismo possibilitar uma análise mais limpa da questão dos vínculos.

É necessária uma análise de BRST quando se trabalha com fixação de gauge. Escolhemos inicialmente um gauge covariante, o gauge de Lorentz. Como é sabido, as teorias de gauge apresentam vínculos. Portanto, inicialmente, estudamos a estrutura de vínculos do modelo e realizamos sua quantização utilizando o formalismo de Dirac para sistemas vinculados [21,22]. Posteriormente, utilizamos a simetria de BRST [23,24] do modelo para finalmente obtermos as propriedades rotacionais do campo escalar.

Basicamente nosso interesse prende-se a duas questões: 1) realizar a quantização deste modelo com acoplamento não mínimo tanto em um gauge covariante quanto em um gauge não covariante; 2) verificar o que ocorre com a estatística fracionária em teorias de Chern-Simons pura com momento de dipolo anômalo.

Esta segunda questão foi de certa forma levantada, muito recentemente, no trabalho de Carrington e Kunstatter [25]. Estes autores especulam que interações devidas ao momento de dipolo anômalo, provocam anomalias estatísticas. Ou ainda, que o termo anômalo seria capaz de levar à estatística fracionária independentemente do termo de Chern-Simons.

Isto parece estar de acordo com o que encontramos no nosso modelo, pois como mostraremos no decorrer deste trabalho, surge um termo adicional para a propriedade rotacional do campo de matéria, o qual se apresenta como uma variação à estatística fracionária, vindo diretamente do termo anômalo.

Este trabalho é desenvolvido da seguinte forma:

O capítulo 1 apresenta uma revisão sobre sistemas vinculados, onde fazemos uma análise sobre dinâmica de vínculos através do método desenvolvido por Dirac, o qual consiste basicamente em passar de uma teoria vinculada para uma teoria sem vínculos efetivos. Para efeito de ilustração, neste capítulo fazemos também uma análise do exemplo clássico do campo eletromagnético.

O capítulo 2 aborda três assuntos importantes para o desenvolvimento do trabalho. Primeiro, faz-se uma análise do termo de Chern-Simons do ponto vista de físico, aplicando em seguida o método de análise Hamiltoniana desenvolvido no capítulo 1, na quantização da teoria de Chern-Simons Abeliana pura. Em seguida, introduzimos as transformações de BRST, discutimos a questão da fixação de gauge e mostramos a invariância BRST do modelo com gauge fixado.

A última parte do capítulo 2 ressalta a motivação da introdução do termo de momento de dipolo anômalo em teorias de gauge, diretamente na ação clássica, realizando uma breve análise de aspectos importantes do que acontece com uma teoria de Maxwell-Chern-Simons quando da sua introdução.

O capítulo 3 usa todos os conceitos e técnicas desenvolvidas nos capítulos 1 e 2 para analisar o modelo de Chern-Simons Abeliano no gauge covariante de Lorentz com simetria BRST e momento de dipolo anômalo. Quantizamos a teoria utilizando o formalismo de Dirac e em seguida construímos a corrente e a carga de BRST. Logo após, analisando o operador de momentum angular do campo de matéria, mostramos que surge uma contribuição adicional para a estatística fracionária quando da introdução de interações de momento de dipolo anômalo. Em seguida, no contexto de um modelo similar ao descrito acima, utilizamos o gauge não-covariante de Coulomb e novamente observamos as propriedades rotacionais anômalas de campos do modelo.

Finalmente, apresentamos as conclusões sobre o trabalho desenvolvido, e algumas perspectivas abertas para a continuação desta linha de trabalho.

Um apêndice é ainda introduzido para apresentar nossas convenções.

CAPÍTULO 1

DINÂMICA DE VÍNCULOS E FORMULAÇÃO DE DIRAC.

INTRODUÇÃO

Este capítulo propõe-se ao estudo de sistemas vinculados, através da introdução de um método de análise Hamiltoniana, investigando também a conexão entre vínculos e simetrias. Faremos o exemplo clássico do Campo Eletromagnético, que evidencia a aplicação do método de análise Hamiltoniana para o estudo de sistema vinculados.

Um método consistente para tratar sistemas vinculados foi proposto há mais de quarenta anos por Dirac. O método é conhecido por "Formalismo de Dirac para Sistemas Vinculados" [21,22], que tem como objetivo transformar um modelo vinculado em um modelo sem vínculos efetivos, através da redefinição dos "Parênteses de Poisson", passando para os chamados "Parênteses de Dirac", e da obtenção das tranformações de Gauge.

Depois de determinados os "Parênteses de Dirac" e as simetrias do sistema, passamos a uma teoria sem vínculos efetivos.

1.1 LAGRANGIANAS SINGULARES.

Nesta seção consideraremos somente sistemas nos quais a dinâmica pode ser derivada do princípio estacionário, Lagrangianas que sejam funções de coordenadas e de suas derivadas primeira. Para sistemas com N graus de liberdade temos,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i, \dot{q}_i) \tag{1.01}$$

Aqui q_i e $\dot{q}_i$; $i = 1,\ldots,N$, são coordenadas locais sobre o espaço de configurações. A condição necessária para a ação (1.01) ser estacionária são as equações de Euler-Lagrange:

$$E_i \equiv -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{1.02}$$

Desenvolvendo a derivada total em relação ao tempo na expressão acima e lembrando que a Lagrangiana L não depende explicitamente do tempo, obtemos:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{1.03}$$

Ou,

$$-W_{ij}\ddot{q}_j + V_i = 0 \tag{1.04}$$

Onde W é chamada de matriz Hessiana com seus elementos dados por

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_i \partial\dot{q}_j} \tag{1.05}$$

e

$$V_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_i \partial q_j}\dot{q}_j \tag{1.06}$$

Pela equação de movimento (1.04), vemos que se a matriz Hessiana for inversível, a aceleração pode ser dada por

$$\ddot{q}_j = W_{ij}^{-1} V_i \tag{1.07}$$

Estes sistemas são chamados de regulares.

Se, porém, $det\, W = 0$, W não admite inversa, logo a aceleração, e assim a evolução temporal do sistema não será completamente fixada pela condições iniciais $(q_i, \dot{q}_i)_{t=0}$. Tais sistemas são então chamados singulares. Vê-se então que em sistemas singulares diferentes configurações de campos exprimem uma mesma configuração inicial. Isto está ligado ao fato de termos restrições ao sistema, ou seja, termos um sistema vinculado.

Por simplicidade assumiremos que o "rank" de W é uma constante dada por R, sendo $R < N$, onde N é o número de graus de liberdade da teoria. Existem então $M = N - R$ autovalores zero da matriz Hessiana dados por $\mu^{(\alpha)}, \alpha = 1,\ldots, M$. Assim:

$$\mu_i^{(\alpha)} W_{ij} = 0 \qquad \alpha = 1,\ldots,M; \quad i,j = 1,\ldots,N \tag{1.08}$$

Isso implica que

$$\mu_i^{(\alpha)} E_i = 0 \tag{1.09}$$

ou

$$0 = \mu_i^{(\alpha)} V_i = \Phi^{(\alpha)}(q, \dot{q}) \tag{1.10}$$

as quais são condições a serem satisfeitas pelas variáveis dinâmicas. Portanto, algumas destas M condições podem desaparecer identicamente, e assumimos que M', onde $M' < M$, são condições funcionalmente independentes do restante, consolidando-se como restrições ao sistema.

Estas relações (1.10) dependentes das coordenadas e das velocidades, são chamadas de vínculos Lagrangianos. Estes impõem restrições ao movimento das variáveis dinâmicas.

1.2 VÍNCULOS PRIMÁRIOS.

Trataremos agora com um formalismo Hamiltoniano consistente para Lagrangianas singulares, ou seja, Lagrangianas em que

$$\det W = 0 \tag{1.11}$$

E Lagrangianas bem construídas, com ação

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i, \dot{q}_i)$$

Com os momenta definidos por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{1.12}$$

Diretamente dos momenta definidos acima podemos escrever funções do tipo

$$\Phi_m(q,p) = 0 \qquad m=1,\ldots,M \tag{1.13}$$

Estas são as funções de vínculo, que são pura consequência da definição (1.12). Dirac chamou estes vínculos de "Vínculos Primários". Mas estes não são os únicos vínculos da teoria, já que podem existir outros vínculos vindos de outras condições. Estes vínculos definem uma sub-região no espaço de fase *(q,p)*, onde o sistema efetivamente evoluirá.

1.3 HAMILTONIANO TOTAL.

Começamos por escrever o conhecido Hamiltoniano canônico H_c como abaixo

$$H_c = p_i \dot{q}^i - L \tag{1.14}$$

Se o sistema não tem vínculos, o princípio de Hamilton pode ser expresso como

$$\delta \int d\lambda (p_i \dot{q}^i - H_c) = 0$$

Se existem vínculos primários, as condições de vínculo devem ser incorporadas ao princípio de Hamilton. Isto pode ser feito através dos multiplicadores de Lagrange $v^m(t)$. Escrevemos então

$$\delta \int dt(p_i \dot{q}^i - H_c - v^m \Phi_m) = 0 \qquad (1.15)$$

Se fizermos $H_c \rightarrow H_c + v^m \Phi_m$, podemos escrever as equações de Hamilton como

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + v^m \frac{\partial \Phi_m}{\partial p_i} \qquad (1.16)$$

$$\dot{p}^i = -\frac{\partial H_c}{\partial q^i} - v^m \frac{\partial \Phi_m}{\partial q^i} \qquad (1.17)$$

Sendo $v^m = v^m(t)$ funções arbitrárias.

A equação (1.15) nos leva a reescrever o Hamiltoniano do sistema como

$$H = H_c + v^m \Phi_m \qquad (1.18)$$

Neste ponto, torna-se necessário introduzir os "Parênteses de Poisson".

Considere duas funções $A(q,p)$ e $B(q,p)$. Os parênteses de Poisson entre A e B são definidos como

$$\{A,B\} \doteq \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i} \qquad (1.19)$$

Possuindo as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}&\{A,B\}=-\{A,B\}\\&\{A+B,C\}=\{A,C\}+\{B,C\}\\&\{AB,C\}=A\{B,C\}+\{A,C\}B\end{aligned} \tag{1.20}$$

$$\{A,\{B,C\}\}+\{B,\{C,A\}\}+\{C,\{A,B\}\}=0 \tag{1.21}$$

A equação (1.21) é conhecida por "Identidade de Jacobi".

Vamos calcular agora a evolução temporal de uma variável $X(q,p)$.

$$\dot{X}=\{X,H\}=\{X,H_c\}+\{X,v^m\}\Phi_m+v^m\{X,\Phi_m\} \tag{1.22}$$

O segundo termo à esquerda da expressão (1.22) não contribui para evolução temporal de X, pois $v^m(t)$ não depende de q nem de p. No terceiro termo, se fizermos $\Phi_m=0$ antes de calcular os parênteses de Poisson, esse termo também se anula. Assim a dinâmica do sistema será gerada pelo Hamiltoniano canônico H_c, e todas informações sobre os vínculos desaparecem das equações de movimento obtidas via princípio de Hamilton. Para resolver esta situação, vamos pôr como regra que todos os parênteses devem ser calculados antes de se usar as equações de vínculos. Dirac, para sintetizar esta regra, introduziu o conceito de igualdade fraca.

Sabemos, a priori, que se um vínculo Φ_m é igual a zero, a evolução temporal não deveria nem ser calculada, mas para obtermos mais informações sobre os vínculos fazemos uso desta condição de consistência e escrevemos

$$\dot{\Phi}_m(q,p)\approx 0 \tag{1.23}$$

Este é o símbolo ($\approx$) de igualdade fraca, e indica que não devemos fazer logo os vínculos iguais a zero.

Definimos então o Hamiltoniano total como

$$H_t = H_c + v^m \Phi_m \tag{1.24}$$

A equação (1.22) fica então

$$\dot{X} \approx \{X, H_t\} \tag{1.25}$$

1.4 VÍNCULOS SECUNDÁRIOS.

Já sabemos que os vínculos primários definem uma sub-região do espaço de fase em que ocorre a evolução do sistema. É dado então que a evolução do sistema deve ser tal que preserve os vínculos primários (1.23). Isto é explicitado pela condição de consistência

$$\dot{\Phi}_m(q,p) \approx 0$$

Na verdade, essa é uma restrição adicional sobre o espaço de fase disponível ao sistema. Estes novos vínculos são chamados secundários e são obtidos calculando a evolução temporal dos vínculos primários. Uma vez encontrado um certo número de vínculos secundários, deve-se repetir o processo até verificar que não ocorre mais vínculos.

Assim, no final do processo, teremos M vínculos no sistema físico, onde este M agora é o número total de vínculos, primários e secundários, pois esta distinção é irrelevante no final do processo. Escrevemos então

$$\Phi_m(q,p) \approx 0 \qquad\qquad m=1,\ldots,M \tag{1.26}$$

Supondo que foi encontrado um conjunto completo de vínculos independentes e considerando a evolução temporal de um determinado vínculo Φ_i, vejamos então o que pode acontecer com os multiplicadores de Lagrange $v^m(t)$.

$$\dot{\Phi}_i = \{\Phi_i, H_c\} + v^m \{\Phi_i, \Phi_j\} \approx 0 \qquad (1.27)$$

Podemos considerar (1.27) como um sistema de M equações lineares homogêneas para os $v_m(t)$. As equações têm soluções da forma

$$v^m = U^m + V^m \qquad (1.28)$$

Onde $U^m = U^m(q,p)$ é a solução particular e $V^m = V^m(q,p)$ é a solução geral do sistema homogêneo. Para solução geral podemos escrever

$$\{\Phi_i, H_c\} + V^m \{\Phi_i, \Phi_j\} \approx 0 \qquad (1.29)$$

O sistema homogêneo (1.29) pode ter certo número A de soluções, de modo que sua solução geral pode ser escrita como

$$V^m = v^a V_a^m \qquad a=1,\dots,A \qquad (1.30)$$

Assim

$$v^m = U^m + v^a V_a^m \qquad (1.31)$$

Podendo escrever o Hamiltoniano total como

$$H_t = H_c + U^m \Phi_m + v^a V_a^m \Phi_m$$
$$H_t = H' + v^a \Phi_a \qquad (1.32)$$

Onde

$$H' = H_c + U^m \Phi_m \tag{1.33}$$

$$\Phi_a = \Phi_a(q,p) = V_a^m \Phi_m \tag{1.34}$$

Assim, a evolução temporal de uma variável X é dada por

$$\dot{X} \approx \{X, H' + v^a \Phi_a\} \tag{1.35}$$

O termo $v^a \Phi_a$ da expressão (1.35) será de grande importância para a análise das transformações de gauge.

1.5 TRANSFORMAÇÕES DE GAUGE.

A presença nas equações de movimento (1.35) de A funções arbitrárias v^a tem como consequência que um mesmo estado físico corresponde a mais de um conjunto de variáveis canônicas (q,p). Podemos dizer ainda que o conjunto de q's e p's definem univocamente o estado do sistema, mas o recíproco não é verdade.

Para entender isto, suponhamos que em um instante inicial t_1 temos um conjunto de variáveis canônicas (q,p). É de se esperar que as equações de movimento (1.35) determinem completamente o estado físico do sistema em qualquer instante posterior t_2. Assim, qualquer ambiguidade nas variáveis canônicas no instante $t_2 \neq t_1$ deve ser fisicamente irrelevante.

Os coeficientes v^a são funções arbitrárias do tempo, logo o valor das variáveis canônicas em t_2 depende da variação destas funções no intervalo de tempo $t_1 \leq t \leq t_2$. Vejamos:

$$q_i(t_2)=q_i(t_1)+\{q_i,H'\}_{t_1}\delta t+v^a(t_1)\{q_i,\Phi_a\}_{t_1}\delta t \qquad (1.36)$$

$$p_i(t_2)=p_i(t_1)+\{p_i,H'\}_{t_1}\delta t+v^a(t_1)\{p_i,\Phi_a\}_{t_1}\delta t \qquad (1.37)$$

Assim, a troca das variáveis canônicas *q's* e *p's* geradas por $v^a\Phi_a$ é

$$\delta q_i=\varepsilon_a\{q_i,\Phi_a\} \qquad (1.38)$$

$$\delta p_i=\varepsilon_a\{p_i,\Phi_a\} \qquad (1.39)$$

Onde

$$\varepsilon_a=\varepsilon_a(t)=\delta t\, v^a(t) \qquad (1.40)$$

Em teoria de campos se diz que (1.31) representa as transformações de gauge da teoria, e os vínculos Φ_a são geradores das transformações de gauge.

1.6 FUNÇÕES DE PRIMEIRA E DE SEGUNDA CLASSE. HAMILTONIANO ESTENDIDO.

Vimos que a classificação dos vínculos como primários e secundários não é essencial depois que estes são encontrados. Mas a classificação das funções, como de primeira e segunda classe, é de essencial importância para a formulação de Dirac.

Uma função $f(q,p)$ é dita de primeira classe se o parêntese de Poisson com os vínculos Φ_j se anulam fracamente. Ou seja

$$\{f, \Phi_j\} \approx 0 \qquad j=1,\ldots,M \tag{1.41}$$

Uma função é de segunda classe se não obedece à expressão (1.41), ou seja, uma função é de segunda se, e somente se, não é de primeira classe.

Teorema: *Se duas funções f e g são de primeira classe, o parêntese de Poisson entre estas funções também é de primeira classe.*

Prova: *Admita f e g de primeira classe e Φ_j os vínculos do sistema. Assim*

$$\{f, \Phi_j\} = \alpha_i \Phi_i \approx 0$$

$$\{g, \Phi_j\} = \beta_i \Phi_i \approx 0$$

Isto vem diretamente da expressão (1.41) e do fato que os Φ_j são as únicas quantidades independentes que se anulam fracamente no espaço de fase.

Usando a identidade de Jacobi

$$\{A,\{B,C\}\}+\{B,\{C,A\}\}+\{C,\{A,B\}\}=0$$

Temos

$$\{\{f,g\}, \Phi_j\} = \{f, \{g, \Phi_j\}\} - \{g, \{f, \Phi_j\}\} =$$
$$= \alpha_i \{f, \Phi_i\} - \beta_i \{g, \Phi_i\} = 0$$

Logo

$$\{\{f,g\}, \Phi_j\} \approx 0$$

Temos então a expressão

$$\{\{f,g\},\Phi_j\}\approx 0 \qquad (1.42)$$

Para f e g sendo funções de primeira classe.

O resultado a seguir evidencia que os geradores de gauge Φ_a são funções de primeira classe.

$$\begin{aligned}\{\Phi_a,\Phi_j\}&=\{V_a^m\Phi_m,\Phi_j\}=\\&=V_a^m\{\Phi_m,\Phi_j\}+\{V_a^m,\Phi_j\}\Phi_m\approx 0\end{aligned} \qquad (1.43)$$

Vimos que as funções que geram as transformações de gauge são de primeira classe. Mas podemos garantir que todos os vínculos de primeira classe geram transformação de gauge? Não parece possível chegarmos a uma conclusão pelo que foi exposto aqui.

Geralmente, o que se faz é admitir como um postulado que todos os vínculos de primeira classe geram transformações de gauge.

O que se postula é consistente porque:

i) A transformação gerada por um vínculo de primeira classe conserva todos os vínculos, e, portanto, conserva estados permitidos em outros estados permitidos;

ii) Ao ser os parênteses de Poisson dos vínculos de primeira classe, outro vínculo de primeira classe, segundo o teorema já exposto, os parênteses de Poisson dos geradores de gauge também serão geradores de transformações de gauge.

De acordo com o postulado de que todos os vínculos de primeira classe geram transformações de gauge, estendemos as equações de movimento da forma

$$\dot{X}\approx\{X,H'\}+v^a\{X,\Phi_a\} \qquad (1.44)$$

E se define o Hamiltoniano estendido H_e como

$$H_e = H' + v^a \Phi_a \tag{1.45}$$

Passando a escrever

$$\dot{X} \approx \{X, H_e\} \tag{1.46}$$

Temos mais uma redefinição da evolução temporal de uma variável X.

1.7 ELIMINAÇÃO DOS VÍNCULOS DE SEGUNDA CLASSE.

Com os vínculos de segunda classe se deve ter um cuidado adicional, quando se considera um conjunto deles. A razão é que pode haver combinações lineares de vínculos de segunda classe que sejam de primeira classe. Assim se dirá com precisão que um conjunto de vínculos é de segunda classe se nenhuma combinação linear deles é de primeira classe.

Um critério para caracterizar conjunto de vínculos de segunda classe é:

Um conjunto $\{\Phi_i / i=1,\ldots,M\}$ de vínculos é de segunda classe se, e somente se, a matriz

$$C_{ij} = \{\Phi_i, \Phi_j\} \tag{1.47}$$

for inversível.

Note que os parênteses de Poisson são antissimétricos, logo C_{ij} é antissimétrico. Assim, o número de vínculos de segunda classe é sempre par, já que o determinante de uma matriz antissimétrica de dimensão ímpar é zero.

Os vínculos de segunda classe não são geradores de transformações de gauge. As transformações que geram não são de interesse físico, pois ao ser de segunda classe não conservam os vínculos.

Em um sistema, pode ocorrer que todos os vínculos sejam de primeira classe, ou que alguns sejam de primeira classe e outros de segunda classe. De uma forma geral, convém identificar o conjunto de vínculos de segunda classe e eliminar estes da teoria. Para isso utiliza-se os parênteses de Dirac, $\{\,,\,\}_d$ definidos como

$$\{f,g\}_d=\{f,g\}-\{f,\Phi_i\}C_{ij}^{-1}\{\Phi_j,g\} \tag{1.48}$$

Onde C_{ij}^{-1} é a matriz inversa de C_{ij}.

Os Parênteses de Dirac possuem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}
&\{F,G\}_d=-\{F,G\}_d\\
&\{F,GR\}_d=\{F,G\}_dR+G\{F,R\}_d\\
&\{F,G\}_d\approx\{F,G\},\ \text{ para } G \text{ de primeira classe e } F \text{ arbitrário.}
\end{aligned} \tag{1.49}$$

$$\{\Phi_k,F\}_d\approx 0,\ \text{ para F de primeira classe.} \tag{1.50}$$

1.8 CONDIÇÕES DE GAUGE.

Na seção anterior, solucionamos a questão dos vínculos de segunda classe. Agora, trataremos dos vínculos de primeira classe.

A presença de vínculos de primeira classe leva associado uma liberdade de gauge. Temos interpretado esta liberdade no sentido que um mesmo estado corresponde a mais de um conjunto de variáveis canônicas *(q,p)*. Ou seja conjunto de variáveis canônicas *(q,p)* e o conjunto $(q+dq,p+dp)$, descrevem um mesmo estado físico. Isto implica que temos graus de liberdade espúrios. Logo, estes têm que ser eliminados da teoria.

É conveniente eliminar esta ambiguidade impondo restrições adicionais, chamadas de "Condições de Gauge". Ou seja, as condições de gauge eliminam os graus de liberdade espúrios evidenciados pelos vínculos de primeira classe. As expressões acima revelam as transformações nas variáveis canônicas, ou ainda, revelam as transformações de gauge.

As condições de gauge são funções do tipo

$$C_i(q,p)\approx 0 \tag{1.51}$$

que devem satisfazer os seguintes pontos:

i) Dado um conjunto qualquer de variáveis canônicas (q,p), deve existir uma transformação de gauge que passe de (q,p) a outro conjunto (q',p') que satisfaçam as condições de gauge (1.51);

ii) As condições de gauge (1.51) devem fixar completamente o gauge. Ou seja, não pode existir nenhuma outra transformação de gauge, fora a identidade, que conserve as condições de gauge (1.51).

1.9 O EXEMPLO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO.

Este exemplo tem por objetivo ilustrar os conceitos teóricos introduzidos anteriormente. Passaremos agora a tratar com campos e não mais com coordenadas. O caso do campo eletromagnético é muito interessante, em particular porque é mais ligado à nossa experiência cotidiana. Iremos encontrar os vínculos presentes na teoria do campo eletromagnético e em seguida classificá-los em vínculos de primeira e segunda classe, com o propósito de determinar os parênteses corretos da teoria, e, se necessário, encontrar as condições de gauge do sistema.

A Lagrangiana do campo eletromagnético é dada por

$$\int d^4x\left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) \tag{1.52}$$

As variáveis canônicas são correspondentemente, o campo $A_\mu = A_\mu(x,t)$ e seu momentum canonicamente conjugado $p^\mu = \pi^\mu = \pi^\mu(x,t)$, definido como

$$p^\mu = \pi^\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_\mu} \tag{1.53}$$

Sabendo que $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, podemos encontrar

$$\pi^\mu = F^{\mu 0} \tag{1.54}$$

Separando o momentum canonicamente conjugado π^μ em suas partes temporal e espacial podemos escrever:

$$\begin{aligned} \pi^0 &= 0 \\ \pi^i &= F^{i0} = \partial^i A_0 - \dot{A}^i \end{aligned} \tag{1.55}$$

Pela expressão (1.03), da definição de vínculos primários, pode-se dizer que $\pi^0=0$ é o único vínculo primário existente nesta teoria.

O passo seguinte é verificarmos se existem vínculos secundários na teoria, contruindo o Hamiltoniano total e exigindo que os vínculos primários se conservem durante a evolução temporal Primeiro, escrevemos o Hamiltoniano canônico, considerando a expressão (1.54).

$$H_c = \int d^3x(\dot{A}_\mu \pi^\mu - \mathcal{L}) = \int d^3x\{\dot{A}_\mu F^{\mu 0} + \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\} \qquad (1.56)$$

Manipulando a expressão (1.56), podemos escrever o Hamiltoniano canônico como

$$H_c = \int d^3x\{\frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) - A_0 \nabla\cdot\vec{\pi}\} \qquad (1.57)$$

Onde fica explícito o campo elétrico e o campo magnético.

Agora, implementando o vínculo primário através do multiplicador de Lagrange v_o, podemos escrever o Hamiltoniano total como

$$H_t = \int d^3x\{\frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) - A_0 \nabla\cdot\vec{\pi} + v_0 \pi^0\} \qquad (1.58)$$

Podemos agora usar a condição de consistência, escrevendo

$$\dot{\pi}^0 = \{\pi^0, H_t\} \approx 0 \qquad (1.59)$$

Fazendo uso dos parênteses de Poisson para as variáveis canônicas A_ν e π^μ, abaixo

$$\{A_\mu, \pi^\nu\} = \delta^\mu{}_\nu \delta(x-y)$$

$$\{A^\mu, A^\nu\} = \{\pi^\mu, \pi^\nu\} = 0 \qquad (1.60)$$

temos

$$\{\pi^0, H_t\} = \partial_i \pi^i = \nabla\cdot\vec{\pi} \approx 0 \qquad (1.61)$$

Lembrando que

$$\pi^i = F^{i0} = -E^i \tag{1.62}$$

Daí

$$\nabla \cdot \vec{\pi} = \nabla \cdot \vec{E} \approx 0 \tag{1.63}$$

Onde a expressão acima representa o vínculo da Lei de Gauss .

Pode-se verificar que não há mais vínculos na teoria. Para isto, aplica-se novamente a condição de consistência para o vínculo da Lei de Gauss. Em resumo, temos dois vínculos em nossa teoria os quais são

$$\Phi_1 = \pi^0 \approx 0 \tag{1.64}$$

$$\Phi_2 = \partial_i \pi^i \approx 0 \tag{1.65}$$

Verificando os parênteses de Poisson entres os vínculos acima, podemos constatar que são nulos. Logo os vínculos são de primeira classe, ou seja, C_{ij} não é inversível.

Sendo os vínculos de primeira classe, estes geram transformações de gauge, o que nos levará a impor as chamadas condições de gauge. Usando (1.38) e (1.39) vejamos quais as transformações geradas nas variáveis canônicas pelos vínculos Φ_1 e Φ_2. Temos:

$$\begin{aligned} \delta A_0 &= \{A_0(x), \int d^3 y \varepsilon(y) \pi^0\} = \\ &= \int \varepsilon(y) \{A_0(x), \pi^0\} d^3 y = \varepsilon(x) \end{aligned} \tag{1.66}$$

Então

$$\delta A_i(x) = 0$$

$$\delta \pi^i(x) = 0 \tag{1.67}$$

As transformações geradas por $\pi^o \approx 0$, se reduzem a uma troca arbitrária em A_o. Portanto, é válido eliminar a variação de A_o impondo, por exemplo, a condição de gauge

$$A_o(x) = 0 \tag{1.68}$$

Este é o chamado gauge temporal.

Para o vínculo da lei de Gauss encontramos então

$$\delta \pi^i(x) = 0 \tag{1.69}$$

$$\delta A_i(x) = \partial_i \varepsilon(x) \tag{1.70}$$

Da expressão (1.70), vemos a transformação de gauge usual do eletromagnetismo. Devido a liberdade existente em ε, podemos impor o gauge de Coulomb

$$\partial_i A^i = 0 \tag{1.71}$$

Note que não precisamos fazer uso dos Parênteses de Dirac, pois ficamos com uma teoria que possui dois vínculos de primeira classe e duas condições de gauge. No capítulo seguinte faremos a análise de vínculos para a teoria de Chern-Simons.

CAPÍTULO 2

CONSTRUÇÃO DE CHERN-SIMONS, FORMULAÇÃO DE BRST E MOMENTO DE DIPOLO ANOMALO.

INTRODUÇÃO

Veremos como o termo de Chern-Simons pode ser implementado por uma simples e elegante construção. A teoria de Chern-Simons surge como uma possibilidade de explicar fenômenos da física em (2+1) dimensões, por possuir intrinsicamente ligada a ela, uma estatística fracionária que pode levar aos chamados *anions*, os quais são partículas que possuem spin fracionário. Esta ligação entre o termo de Chern-Simons e a estatística fracionária será vista com mais clareza no próximo capítulo.

O termo de momento de dipolo anômalo surge neste contexto da teoria de Chern-Simons, de uma certa forma, com o intuito de assegurar a característica fracionária, visto que a princípio, tal característica está diretamente associada ao termo de Chern-Simons e a mesma é perdida, segundo alguns autores [17], quando da introdução do termo de Maxwell.

Na seção 2.1 mostramos que o termo de Chern-Simons leva à uma corrente e uma carga, as quais são conservadas sem necessidade de recorrer à equações de movimento, o que caracteriza o chamado termo topológico. Na seção seguinte, aplicamos o método de Dirac para caracterizar os vínculos de uma teoria de Chern-Simons e na seção 2.3 revemos as transformações de BRST. Por fim, na seção 2.4 introduzimos o momento de dipolo anômalo e discutimos o seu papel numa teoria de Maxwell-Chern-Simons.

2.1 CONSTRUÇÃO DE CHERN-SIMONS.

Sabemos que podemos associar a uma simetria contínua uma lei de conservação. Esta lei de conservação é evidenciada pelo que chamamos de corrente conservada, J^{μ} que obedece a

$$\partial_{\mu} J^{\mu} = 0 \qquad (2.01)$$

onde (2.01) expressa a lei de conservação da corrente J^{μ}.

Veremos agora que a esta corrente conservada podemos associar uma carga conservada Q.

Da expressão (2.01), podemos escrever

$$\partial_0 J^0 + \partial_i J^i = \frac{\partial J^0}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \qquad (2.02)$$

Onde J_0 é exatamente a densidade de carga. Assim, iremos verificar se a carga Q associada à corrente conservada é também conservada.

Integrando a expressão (3.02) em todo o volume, temos

$$\int_V dv \frac{\partial J^0}{\partial t} + \int_V dv(\nabla \cdot \vec{J}) = 0 \qquad (2.03)$$

Usando o teorema de Gauss, teremos

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V dv J^0 + \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a} = 0 \qquad (2.04)$$

Como no infinito as correntes se anulam, ficamos então com

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \qquad (2.05)$$

onde a carga Q é dada por

$$Q = \int J^0 dv \qquad (2.06)$$

A expressão (2.05) garante a conservação da carga mediante a construção de uma corrente que obedeça à lei de conservação (2.01)

Vejamos agora uma forma de obter correntes identicamente conservadas. Consideremos uma corrente J^μ, em 1+1 dimensões, dada por

$$J^\mu = \varepsilon^{\mu\nu}\partial_\nu \varphi \qquad (2.07)$$

onde φ é um campo escalar.

Para verificar se ela se conserva, aplicamos a derivada ∂_μ

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^\mu = \partial_\mu(\varepsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi) = \varepsilon^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\varphi = \\ = \partial_0\partial_1\varphi - \partial_1\partial_0\varphi = 0 \end{aligned} \tag{2.08}$$

Seguindo a mesma idéia, vamos escrever agora uma corrente em 2+1 dimensões, por exemplo;

$$J^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda \tag{2.09}$$

onde A_λ é um campo vetorial. Logo para que esta corrente tenha significado físico é necessário que seja invariante de gauge. Passemos primeiro a verificar isto. Assim, pela transformação de gauge

$$A_\lambda \rightarrow A'_\lambda = A_\lambda + \partial_\lambda \Lambda$$

implica que

$$J^\mu \rightarrow J'^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu A'_\lambda$$

Logo

$$\begin{aligned} J'^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu(A_\lambda + \partial_\lambda \Lambda) = \\ = \varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda + \varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu\partial_\lambda \Lambda = \varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda \end{aligned} \tag{2.10}$$

Portanto, J^μ é invariante de gauge.

Vemos agora que a corrente J^{μ} em (2+1) dimensões é conservada.

$$\partial_{\mu}J^{\mu}=\partial_{\mu}(\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_{\nu}A_{\lambda})=\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_{\mu}\partial_{\nu}A_{\lambda}=0 \tag{2.11}$$

As expressões (2.10) e (2.11) foram obtidas devido ao fato do tensor $\varepsilon^{\mu\nu\lambda}$ ser antissimétrico e o operador $\partial_{\mu}\partial_{\nu}$ ser simétrico quando atua nas funcões Λ e A_{λ}. Desta forma, pode-se escrever os resultados

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_{\nu}\partial_{\lambda}\Lambda=0$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_{\mu}\partial_{\nu}A_{\lambda}=0$$

Construída então uma corrente conservada J^{μ} em 1+2 dimensões, logo podemos associar uma carga conservada dada por (2.06).

A carga conservada Q, quando J^{0} é integrada em todo o espaço ($Q=\int_{-\infty}^{\infty}J_{0}d^{2}x$), chama-se carga topológica [26] se tiver solução diferente de zero

Como veremos a seguir, esta forma de escrever uma corrente conservada leva-nos a construção de Lagrangianas com o chamado termo de Chern-Simons, cuja equação de campo envolve esta corrente conservada.

Faremos uma teoria em 2+1 dimensões ser governada por uma determinada Lagrangiana e suporemos que existe nesta teoria uma corrente conservada. Então, consideraremos o efeito da modificação da teoria pela adição de termos na Lagrangiana, como abaixo:

$$\Delta\mathcal{L}=-qJ^{\mu}A_{\mu}+\frac{k}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}A_{\mu}\partial_{\nu}A_{\rho} \tag{2.11}$$

A equação de movimento para o campo A_μ é

$$qJ^\mu = k\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu A_\rho \tag{2.12}$$

a qual dá uma expressão para a corrente conservada, semelhante à proposta em (2.09).

Da forma como está escrito o termo de Chern-Simons, vê-se que este não é invariante de gauge, pois aparece uma contribuição adicional na forma de uma divergência. No entanto a ação correspondente é invariante de gauge e o sistema faz, então, sentido físico.

Quantidade do tipo do último termo da equação (2.11) foi primeiro considerado por Chern e Simons de uma forma completamente diferente do exposto aqui, num contexto de pura geometria diferencial e são conhecidos como termo de Chern-Simons.

Este termo têm sido bastante usado na literatura por esta intimamente ligado a anomalias rotacionais e também pela possibilidade da presença de vórtices [27,28,19].

2.2 FORMULAÇÃO DE DIRAC PARA A TEORIA DE CHERN-SIMONS.

Como uma aplicação do método desenvolvido por Dirac, faremos a análise de vínculos para uma teoria, cuja Lagrangiana é composta basicamente pela termo de Chern-Simons em 2+1 dimensões, sendo esta escrita na forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{k}{4}A^\mu\varepsilon_{\mu\nu\lambda}F^{\mu\nu} + A^\mu J_\mu = \\ &= \frac{k}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda}A^\mu\partial^\nu A^\lambda + A^\mu J_\mu\end{aligned} \tag{2.13}$$

Como já mencionado, sabemos que este sistema possui sentido físico, e seguindo a análise da seção 1.1, temos que esta Lagragiana é singular.

Partindo da definição de momentum canonicamente conjugado aos campos, obtemos

$$\pi_{\mu} = \frac{k}{2} A^{\nu} \varepsilon_{\mu\nu 0} \tag{2.14}$$

Uma análise mais detalhada mostra que

$$V_0 = \pi_0 \approx 0$$

$$V_1 = \pi_1 - \frac{k}{2} A_2 \approx 0$$

$$V_2 = \pi_2 + \frac{k}{2} A_1 \approx 0$$

são vinculos primários.

Podemos escrever a Lagrangiana (2.13) na forma

$$\mathcal{L} = (\frac{k}{2} \varepsilon_{km} A_m) \dot{A}_k - k\varepsilon_{mk} A_0 \partial_k A_m + A^0 J_0 + A^i J_i \tag{2.15}$$

e obter o Hamiltoniano canônico como

$$\mathcal{H} = k\varepsilon_{km} A_0 \partial_k A_m - A^0 J_0 - A^i J_i \tag{2.16}$$

e chegarmos a forma abaixo para o Hamiltoniano total

$$H_t = \int d^3x\mathcal{H} + \int d^3x\{\lambda_0\pi_0 + \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2\} \qquad (2.17)$$

O próximo passo é verificar se existem vínculos secundários, analisando a condição de consistência dos vínculos primários, escritas como:

$$\dot{V}_0 \approx 0$$
$$\dot{V}_i \approx 0$$

Utilizando os parênteses de Poisson usuais, obtemos

$$\dot{V}_0 \approx \{\pi_0, H_p\} \approx J_0 + k\varepsilon_{mk}\partial_k A_m \approx 0$$

As condições de consistência $\dot{V}_1 \approx 0$ e $\dot{V}_2 \approx 0$ simplesmente nos dão os valores dos multiplicadores de Lagrange λ_1 e λ_2. Ficamos assim com o conjunto de vínculos de primeira classe

$$V_0 = \pi_0 \approx 0 \qquad (2.18)$$

$$V_4 = J_0 + k\varepsilon_{mk}\partial_k A_m \approx 0 \qquad (2.19)$$

e o conjunto de vínculos de segunda classe

$$V_1 = \pi_1 - \frac{k}{2}A_2 \approx 0 \qquad (2.20)$$

$$V_2 = \pi_2 + \frac{k}{2}A_1 \approx 0 \qquad (2.21)$$

Sabemos que os vínculos de primeira classe são geradores das transformações de gauge. Já os de segunda classe, que trataremos inicialmente, serão eliminados da teoria através da definição dos parênteses de Dirac, pois os mesmos não geram transformações de interesse físico.

A fim de obtermos os parênteses de Dirac, encontramos a matriz $C_{ij} = \{V_i, V_j\}$:

$$C_{ij} = \delta^2(x-y)\begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$$

e sua inversa

$$C^{-1}{}_{ij} = \delta^2(x-y)\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} & 0 \end{vmatrix} \tag{2.22}$$

A definição dos parênteses de Dirac, é dada por

$$\{\Theta,\theta\}_D = \{\Theta,\theta\} - \{\Theta,V_i\}C_{ij}^{-1}\{V_j,\theta\}$$

onde Θ e θ, podem representar π_0, A_0, π_1, A_1, π_2 e A_2. Vale evidenciar que V_i e V_j representam os vínculos de segunda classe.

Encontramos os seguintes parênteses de Dirac diferentes de zero:

$$\{\pi_0, A_0\}_D = \delta^2(x-y) \tag{2.23}$$

$$\{A_1, A_2\}_D = \frac{1}{k}\delta^2(x-y) \tag{2.24}$$

Já encontramos os parênteses corretos da teoria e passaremos agora a tratar do vínculos de primeira classe, impondo condições de gauge que tornam a teoria consistente. Usando a expressão abaixo, semelhante à escrita no capítulo 1:

$$\delta\Theta = \{\Theta, \varepsilon V_i\} \tag{2.25}$$

onde $\Theta = \pi_0, A_0, \pi_i, A_i$ e V_i representa os vínculos de primeira classe. Mas por outro lado, podemos definir uma função $G(\varepsilon)$, a qual é função dos parâmetros arbitrários ε que levam aos vínculos de primeira classe.

$$G(\varepsilon) = \int d^2x[\varepsilon\pi_0 + \varepsilon(J_0 + k\varepsilon_{km}\partial_m A_k)] \tag{2.26}$$

Rescrevendo (2.25) como

$$\delta\Theta = \{\Theta, G(\varepsilon)\} \tag{2.27}$$

encontramos

$$\delta A^0 = \{A^0, G(\varepsilon)\} = \varepsilon \tag{2.28}$$

$$\delta A^i = \{A^i, G(\varepsilon)\} = k\partial^i\varepsilon \tag{2.29}$$

Nas expressões acima, constatamos arbitrariedade na variação do campo A^μ, precisamos então escolher um gauge que contorne tal situação. Podemos escolher o gauge covariante de Lorentz:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{2.30}$$

É também comum ser usado o gauge de Coulomb (não-covariante),

$$\partial_i A^i = 0 \tag{2.31}$$

e o gauge temporal

$$A^0 = 0 \tag{2.32}$$

Este modelo nos dá a possibilidade de trabalharmos com vínculos de primeira classe e vínculos de segunda classe. Vale salientar que ao impormos as condições de gauge, poderíamos avaliar um novo conjunto de vínculos, composto pelos vínculos primários e as condições de gauge estabelecidas.

2.3 FORMULAÇÃO DE BRST

Na eletrodinâmica quântica, devido à liberdade que temos com as transformações de gauge, encontramos dificuldades em obter o propagador desta teoria [24]. Vale salientar que esta dificuldade surge tanto no formalismo canônico como no formalismo por integral de trajetória.

Iremos diretamente para o método por integral de trajetória, considerando simplesmente o funcional gerador para a teoria de Maxwell.

$$Z = \int DA_\mu e^{i\int \mathcal{L} dx} \tag{2.33}$$

onde

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{2.34}$$

Sabemos que a Lagrangiana acima é invariante sob uma transformação de gauge $A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} + \partial_{\mu}\Lambda$, e que a integração é tomada para todos A_{μ} incluindo estes que são escritos pela transformação de gauge. Isto dá uma contribuição infinita para a integral funcional Z e, portanto, para as funções de Green obtidas pela diferenciação do funcional Z. O que devemos fazer então para termos um valor finito para Z? O que implica, em obtermos um propagador para o campo de gauge. Podemos resolver esta questão impondo a condição de Lorentz $\partial_{\mu}A^{\mu} = 0$. A Lagrangiana pode ser então escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_{\mu}A^{\mu})^2 = \mathcal{L}_o + \mathcal{L}_{gf} \tag{2.35}$$

onde

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2}(\partial_{\mu}A^{\mu})^2 \tag{2.36}$$

é conhecido como termo de fixação de gauge. Isto dá a Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A^{\mu} g_{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial^{\mu} A^{\nu} \tag{2.37}$$

onde o operador $g_{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial^{\mu}$ tem um inverso, o que leva ao propagador de Feynman.

Com o intuito de ter regras gerais para encontrar o propagador do campo de gauge, faremos uma análise do caso não-abeliano. Baseado na formulação finita para o funcional Z, foi desenvolvido um método por Faddeev-Popov [23], que tem por resultado final uma Lagrangiana efetiva escrita na forma geral abaixo.

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L} - \frac{1}{2\alpha}F^2 - \overline{\eta}M\eta \equiv \mathcal{L} + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{fpg} \qquad (2.38)$$

Onde

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\alpha}F^2 \qquad e \qquad \mathcal{L}_{fpg} = -\overline{\eta}M\eta$$

F depende da fixação de gauge, M é o operador diferencial

$$M = \frac{\partial F}{\partial \Lambda}$$

η é um campo escalar com estatística de Fermi e $\mathcal{L}_{fpg}$ é o termo de *ghost* de Faddeev-Popov, ou de compensação da escolha de gauge.

A Lagrangiana escrita na forma acima está com a simetria de gauge quebrada, ou como se costuma dizer, com o gauge fixado. No entanto esta Lagrangiana é ainda invariante sob outra simetria, como veremos mais adiante. E tal simetria é conhecida como simetria de BRST. Esta formulação foi desenvolvida por Becchi, Rouet, Stora e separadamente por Tyutin [23].

Façamos agora uma análise para o caso não-Abeliano , onde escrevemos a integral funcional

$$Z = N\int DA_\mu D\eta D\overline{\eta} e^{\int \mathcal{L}_{eff}} \qquad (2.39)$$

onde N é o fator de normalização e

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu a} + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{fpg} \tag{2.40}$$

Para o termo de fixação de gauge escolhemos o gauge de Lorentz, e o termo de ghost de Faddeev-Popov pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{fpg} &= -\eta^a (\delta^{ab} \partial_\mu \partial^\mu - g f^{abc} \partial^\mu A^c_\mu - g f^{abc} A^c_\mu \partial^\mu) \eta^b \\ &= \partial^\mu \eta^a (\partial_\mu \eta^a + g f^{abc} A^b_\mu \eta^c) + '\,derivada \;\; total' \\ &= \partial^\mu \eta^a D_\mu \eta^a = -\eta^a \partial^\mu D_\mu \eta^a + '\,derivada \;\; total' \end{aligned} \tag{2.41}$$

onde g é a constante de acoplamento e f^{abc} é um tensor antissimétrico chamado de constante de estrutura, que obedece à identidade de Jacobi

$$f^{abc} f^{cmn} = -f^{amc} f^{cnb} - f^{anc} f^{cbm}$$

Faremos então uma investigação do comportamento de $\mathcal{L}_{eff}$ sobre uma transformação de gauge, a qual para o caso não-Abeliano é dada por

$$\delta A^a_\mu = \frac{1}{g} (D_\mu \Lambda)^a \tag{2.42}$$

A idéia de Becchi, Rouet, Stora e ainda Tyutin foi escrever o parâmetro da transformação de gauge como:

$$\Lambda^a = -\eta^a \lambda \tag{2.43}$$

sendo portanto uma reparametrização da transformação de gauge, onde λ (uma constante) e η^a são quantidades de Grassmann ($\lambda^2 = 0$). Escrevemos abaixo as transformações dos campos que tornam a Lagrangiana efetiva invariante:

$$\delta A_\mu^a = -\frac{1}{g}(D_\mu \eta^a)\lambda \tag{2.44}$$

$$\delta \eta^a = -\frac{1}{2} f^{abc} \eta^b \eta^c \lambda \tag{2.45}$$

$$\delta \overline{\eta}^a = -\frac{1}{g}(\partial^\mu A_\mu^a)\lambda \tag{2.46}$$

As três equações acima constituem as transformações de BRST. Para o caso de uma teoria abeliana as transformações nos campos tomam uma forma mais simples, como poderá ser verificado no capítulo seguinte.

2.4 MOMENTO DE DIPOLO ANÔMALO

O estudo de teorias com a introdução do termo de Pauli ou de interações de momento de dipolo anômalo a nível de árvore, tem recentemente despertado grande interesse na literatura, que busca novos modelos para fenômenos em 2+1 dimensões [18,20,19,29,30]. Sabe-se que tais teorias são não-renormalizáveis, mas tem-se considerado estas teorias como efetivas, motivados pelo interesse em descrever melhor as interações entre partículas em um plano. Neste sentido duas possibilidades de interpretação surgem: por um lado a ação não-mínima pode ser vista como uma ferramenta fenomenológica, que envolve um parâmetro extra g, o qual pode ser convenientemente ajustado com a carga e e a massa topológica k, tal que a ação possa modelar um comportamento aniônico na ausência do termo de Maxwell. Por outro lado, um valor crítico para a constante g talvez possa ser entendido a partir de uma teoria fundamental, que leva, em determinado limite, à ação não-mínima. As interações de momento de dipolo anômalo são obtidas com a introdução, diretamente na derivada covariante, de um termo que envolve o tensor campo eletromagnético, como se segue.

$$\nabla_\mu = [\partial_\mu - ieA_\mu - i(g/4)\varepsilon_{\mu\lambda\sigma}F^{\lambda\sigma}]$$

É interessante mencionar que alguns autores consideraram recentemente uma forma alternativa de introduzir o momento de dipolo anômalo [31,32,33,35]. Em particular, Carrington e Kunstatter, considerando um acoplamento de corrente com o tensor intensidade de campo dual, mostraram que a teoria é renormalizável a *1-loop* [33].

Vamos mostrar agora como é que a contribuição do momento de dipolo anômalo pode gerar a possibilidade de termos uma teoria Maxwell-Chern-Simons com caráter aniônico em um determinado limite $g = g_c$ [19], onde g_c é um valor crítico para a constante de acoplamento.

Considera-se a teoria que generaliza o modelo Abeliano Chern-Simons-Higgs com interações de momento de dipolo anômalo, sendo descrita pela densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{k}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}A_\mu F_{\nu\alpha} + \frac{1}{2}|\nabla_\mu\phi|^2 - V(|\phi|) \qquad (2.47)$$

onde o potencial $V(|\phi|)$ tem a forma

$$V(|\phi|) = a_1|\phi|^2 + a_2|\phi|^4 + a_3|\phi|^6$$

e $\nabla_\mu\phi$ faz o acoplamento entre o campo de matéria e o campo de gauge.

As equações de movimento para a Lagrangiana (2.47) são

$$\frac{1}{2}\nabla_{\mu}\nabla^{\mu}\phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi} \tag{2.48}$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha}\partial^{\mu}[F^{\alpha} + \frac{g}{2e}J^{\alpha}] = J_{\nu} - kF_{\nu} \tag{2.49}$$

A equação acima foi escrita em termos do tensor intensidade do campo dual, definido como

$$F_{\mu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha}F^{\nu\alpha}$$

e a corrente conservada é dada por

$$J_{\mu} = -i\frac{e}{2}[\phi^{*}\nabla_{\mu}\phi - \phi(\nabla_{\mu}\phi)^{*}]$$

A solução da equação (2.49), são equações de primeira ordem, dadas por

$$F_{\mu} = \frac{1}{k}J_{\mu} \tag{2.50}$$

quando a relação abaixo é considerada.

$$k = -2\frac{e}{g} \tag{2.51}$$

A equação (2.50), coincide com as equações de movimento que têm sido consideradas por uma teoria Chern-Simons sem o termo de Maxwell [13], a menos da redefinição da corrente. Esta solução representa soluções tipo vórtice, a qual tem sido considerada em vários outros artigos [27,28,34]. Porém em trabalhos anteriores ao de Torres [19], a contribuição do momento de dipolo anômalo e o termo de Maxwell não estão explicitamente incluídos na Lagrangiana.

Podemos ainda citar, como consequências interessantes da introdução do momento de dipolo anômalo, no quadro de uma quebra espontânea da simetria de gauge, a geração de um termo de Maxwell e de um termo de Chern-Simons, mesmo na ausência destes termos na Lagrangeana inicial [35]. Este aspecto, conjugado com o aparecimento de um *fotino* dinâmico, foi também demonstrado na referência [36].

Esta seção, de uma certa forma, tenta mostrar a importância de se analisar teorias utilizando o momento de dipolo anômalo, pois como visto, este pode trazer novas resultados com relação a estatística fracionária.

CAPÍTULO 3

TEORIA DE CHERN-SIMONS ABELIANA COM INTERAÇÕES DE MOMENTO DE DIPOLO ANOMALO.

INTRODUÇÃO

Nos capítulos anteriores usamos o método de Dirac para tratar os vínculos, construímos as transformações de BRST para uma teoria de Chern-Simons e introduzimos o acoplamento não-mínimo no contexto de um modelo de Maxwell-Chern-Simons-Higgs. Neste capítulo introduziremos o modelo de Chern-Simons acoplado à campos de matéria com um termo de momento magnético anômalo, objeto central deste trabalho, e aplicaremos as análises introduzidas nos capítulos anteriores. Na seção 3.1 apresentamos o modelo. Fixamos o gauge diretamente na Lagrangiana, sendo este o gauge covariante de Lorentz

$\partial_{\mu}A^{\mu} = 0$ e, consequentemente, temos um termo com os chamados campos de *ghost* de Faddeev-Popov [24]. Logo após, realizamos sua quantização através do formalismo de Dirac e na seção 3.3 analisamos sua simetria de BRST. Na seção 3.4 construímos a corrente e a carga de BRST. As propriedades rotacionais do campo de matéria são estudadas na seção 3.5 onde mostramos, através da relação de comutação entre o operador momentum angular e o campo escalar complexo (campo de matéria), que com a introdução do momento de dipolo anômalo diretamente na derivada covariante, surge o spin-fracionário e um termo adicional ainda não encontrado na literatura. Este é dado por $i(g/2)\vec{y} \bullet \vec{E}\phi$, o qual pode representar uma alteração na estatística fracionária. Por fim, na seção 3.6 reanalisamos o problema, agora considerando um gauge não-covariante, e novamente obtemos a mesma contribuição adicional para a estatística fracionária.

3.1 TEORIA DE CHERN-SIMONS COM ACOPLAMENTO NÃO-MÍNIMO EM UM GAUGE COVARIANTE.

Começaremos por considerar a densidade Lagrangiana abaixo.

$$\mathcal{L} = \left|\nabla_{\mu}\phi\right|^{2} + \frac{\kappa}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}A_{\mu}\partial_{\nu}A_{\lambda} - A_{\mu}\partial^{\mu}b + \frac{\alpha}{2}b^{2} + \\ -i\partial^{\mu}\bar{c}\,\partial_{\mu}c \tag{3.01}$$

Sendo $\nabla_{\mu} = [\partial_{\mu} - ieA_{\mu} - i(g/4)\varepsilon_{\mu\lambda\sigma}F^{\lambda\sigma}]$, o operador que introduz o termo anômalo na Lagrangiana, acoplando o campo de matéria com o campo de gauge; b é um campo multiplicador de Lagrange que implementa o gauge covariante de Lorentz $\partial_\mu A^\mu$; c é o campo de *ghost* de Faddeev-Popov e $\bar{c}$ o *anti-ghost*.

O primeiro termo de (3.01) é responsável pelo acoplamento entre o campo A^μ e o campo escalar complexo ϕ, o segundo é o termo de Chern-Simons e os três últimos termos surgem da necessidade de se obter um propagador para os campos [24].Sendo

$$-A_\mu \partial^\mu b + \frac{\alpha}{2} b^2 = -\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2 \tag{3.02}$$

onde

$$b = -\frac{1}{\alpha}\partial_\mu A^\mu \tag{3.03}$$

o qual implementa o gauge covariante de Lorentz. E por último o termo de *ghosts*. Podemos adiantar que, embora no gauge escolhido os *ghosts* desacoplam, podendo ser descartados da ação, eles são mantidos porque são necessários no formalismo de BRST.

Desenvolvendo a Lagrangiana (3.01) temos

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu + ieA^\mu + i\frac{g}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho})\phi^*(\partial^\mu - ieA^\mu - i\frac{g}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho})\phi +$$
$$+\frac{k}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda - A_\mu\partial^\mu b + \frac{\alpha}{2}b^2 - i\partial^\mu\bar{c}\partial_\mu c$$

ou

$$\mathcal{L} = \left|D_\mu\phi\right|^2 + i\frac{g}{4}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}F_{\nu\lambda}[\phi^*(D_\mu\phi) - \phi(D_\mu\phi)^*] +$$
$$+\frac{g^2}{8}F_{\nu\rho}F^{\nu\rho}|\phi|^2 + \frac{k}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda +$$

$$-A_\mu \partial^\mu b + \frac{\alpha}{2} b^2 - i\partial^\mu \bar{c}\, \partial_\mu c \qquad (3.04)$$

Onde $D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu$, faz o chamado acoplamento mínimo entre os campos ϕ e A_μ sem o termo anômalo.

O segundo e terceiro termos da expressão (3.04) surgem devido a introdução do termo anômalo $-ig\varepsilon_{\mu\nu\sigma}F^{\lambda\sigma}$ no operador que implementa o acoplamento não-mínimo.

3.2 QUANTIZANDO A TEORIA.

Em uma teoria vinculada, podemos fazer a análise de vínculos utilizando o formalismo de Dirac [21,22], como já exposto nos capítulos anteriores. Utilizando este formalismo, podemos constatar que nem sempre as relações de comutação e anti-comutação entre as variáveis canônicas vêm diretamente dos parênteses de Poisson, precisando, portanto, antes de quantizarmos a teoria, obter, se necessário, os parênteses de Dirac entre as variáveis canônicas.

Vamos inicialmente abrir a Lagrangiana (3.03) em suas partes temporal e espacial. Lembrando que estamos em 2+1 dimensões, obtemos a Lagragiana na forma abaixo.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -|D\phi|^2 + \dot{\phi}\phi^* + ieA_0(\dot{\phi}\phi^* - \dot{\phi}^*) + k\varepsilon^{ij}A_0\partial_i A_j + \\ & -\frac{k}{2}\varepsilon^{ij}A_i\dot{A}_j - A_0\dot{b} - A_i\partial^i b + \frac{\alpha}{2}b^2 - i\dot{\bar{c}}\dot{c} - i\partial^i\bar{c}\partial_i c + \\ & +e^2A_0|\phi|^2 + i\frac{g}{4}\varepsilon^{ij}F_{ij}[\phi^*(D_0\phi) - \phi(D_0\phi)^*] + \end{aligned}$$

$$+\frac{g}{2}\varepsilon^{ij}F_{j0}[\phi^*(D_i\phi)-\phi(D_i\phi)^*]+$$
$$+\frac{g^2}{8}F_{i0}F^{i0}|\phi|^2+\frac{g^2}{8}F_{ij}F^{ij}|\phi|^2 \tag{3.05}$$

A partir da Lagrangiana escrita da forma (3.05), passamos a obter os momenta canonicamente conjugados aos campos A_0, A_j, b, ϕ, ϕ^*, $\bar{c}$, e c, respectivamente:

$$\pi_0=0 \tag{3.06.a}$$

$$\pi^J=-\frac{k}{2}\varepsilon^{ij}A_i-i\frac{g}{2}\varepsilon^{ij}[\phi^*(D_i\phi)-\phi(D^i\phi)^*]+$$
$$-\frac{g^2}{2}\partial^j A_0|\phi|^2+\frac{g^2}{4}\dot{A}^J|\phi|^2 \tag{3.06.b}$$

$$\pi_b=-A_0 \tag{3.06.c}$$

$$\pi=\dot{\phi}^*+ieA_0\phi^*+i\frac{g}{4}\phi^*\varepsilon^{ij}F_{ij} \tag{3.06.d}$$

$$\pi^*=\dot{\phi}-ieA_0\phi-i\frac{g}{4}\phi\varepsilon^{ij}F_{ij} \tag{3.06.e}$$

$$\pi_{\bar{c}}=-i\dot{c} \tag{3.06.f}$$

$$\pi_c=-i\dot{\bar{c}} \tag{3.06.g}$$

Sabemos que os momentos canonicamente conjugados que não possuem derivadas nos campos, são classificados de vínculos primários segundo a formulação de Dirac para sistemas vinculados.

Assim podemos destacar os dois vínculos primários de nossa teoria:

$$\pi_0 \approx 0 \tag{3.07.a}$$

$$\pi_b + A_0 \approx 0 \tag{3.07.b}$$

Obtidos os vínculos primários, o passo seguinte é verificarmos se existem mais vínculos na teoria. Utilizando a condição de consistência

$$\dot{V}_i \approx 0$$

com V_i sendo um vínculo primário, podemos verificar se existem vínculos secundários.

Inicialmente, obtemos o Hamiltoniano canônico, o qual é dado por

$$\mathcal{H}_c = \pi^0 \dot{A}_0 + \pi_j \dot{A}_j + \pi\dot{\phi} + \pi^* \dot{\phi}^* + \pi_c \dot{c} + \pi_{\bar{c}} \dot{\bar{c}} + \pi_b b - \mathcal{L}$$

Utilizando as expressões (3.06) e a Lagrangiana na forma (3.05) podemos chegar à seguinte forma para o Hamiltoniano canônico:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_c = {} & |D\phi|^2 + A_i \partial^i b - \frac{\alpha}{2} b^2 + \pi\pi^* - ieA_0(\pi^*\phi - \pi\phi) + \\ & + k\varepsilon^{ij} A_0 \partial_i A_j + i\pi_c \pi_{\bar{c}} + \partial_i \bar{c} \partial_i c + \\ & - i\frac{g}{2}\varepsilon^{ij} \partial_j A_0 [\phi^*(D_i\phi) - \phi(D_i\phi)^*] +\end{aligned}$$

$$
-\frac{g^2}{4}\partial_i A_0 \partial^i A_0 |\phi|^2 +
$$

$$
-i\frac{g}{4}\varepsilon^{ij}F_{ij}[\phi^*(D_0\phi)-\phi(D_0\phi)^*]-\frac{g^2}{8}F_{ij}F^{ij}|\phi|^2 \tag{3.08}
$$

É necessário agora implementar os vínculos primários na teoria, e faremos isto usando os campos multiplicadores de Lagrange λ_0 e λ_1, com os quais escrevemos o Hamiltoniano primário.

$$
\mathcal{H}_p = \mathcal{H}_c + \lambda_0 \pi + \lambda_1(\pi_b + A_0) \tag{3.09}
$$

Torna-se necessário neste ponto escrevermos os parênteses de Poisson entre as variáveis canônicas de nossa teoria. Vejamos então.

$$
\begin{aligned}
&\{A_0,\pi_0\} = \delta^2(x-y)\\
&\{A_i,\pi_j\} = \delta^i_j\delta^2(x-y)\\
&\{\phi,\pi\} = \{\phi^*,\pi^*\} = \delta^2(x-y)\\
&\{b,\pi_b\} = \delta^2(x-y)\\
&\{c,\pi_c\} = \{\bar{c},\pi_{\bar{c}}\} = \delta^2(x-y)
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

Agora, podemos verificar se existem vínculos secundários, calculando a evolução temporal dos vínculos primários e usando o fato de a evolução temporal dos vínculos primários ser fracamente nula. Assim teremos

$$
\{\pi_0,\int d^2x\mathcal{H}_p\} = \{\pi_0,\int d^2x\mathcal{H}_c\} - \lambda_1 \approx 0 \tag{3.11.a}
$$

$$\{\pi_b + A_0, \int d^2x\mathcal{H}_p\} = \{\pi_b + A_0, \int d^2x\mathcal{H}_c\} + \lambda_0 \approx 0 \qquad (3.11.b)$$

Utilizando o Hamiltoniano canônico (3.08), podemos determinar os campos multiplicadores de Lagrange λ_0 e λ_1. Logo, não existem mais vínculos na teoria, assim teremos somente dois vínculos, os quais são

$$V_1 = \pi_0 \approx 0 \qquad (3.12.a)$$

$$V_2 = \pi_b + A_0 \approx 0 \qquad (3.12.b)$$

Sabemos da grande importância para a formulação de Dirac, quanto da classificação dos vínculos em primeira classe e segunda classe. Podemos, então, constatar facilmente que os vínculos (3.12) são de segunda classe, pois

$$\{V_1, V_2\} = -\delta^2(x-y) \qquad (3.13)$$

Como não existem vínculos de primeira classe, não existem condições de gauge a serem determinadas na teoria. Isto era esperado, pois estamos trabalhando com uma Lagrangiana onde foi fixado o gauge. Sabemos que os vínculos de segunda classe devem ser eliminados, pois não geram transformações de interesse físico. Encontraremos agora os parênteses de Dirac para, em seguida, quantizarmos a teoria.

Encontramos então a matriz $C_{ij}(x,y)$, definida como $C_{ij}(x,y) = \{V_i(x), V_j(y)\}$.

$$C_{ij}(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \delta^2(x-y)$$

e sua inversa

$$C_{ij}^{-1}(x,y)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\delta^2(x-y) \tag{3.14}$$

Sendo os parênteses de Dirac definidos como

$$\{A(x),B(y)\}_d=\{A(x),B(y)\}+$$
$$-\{A(x),V_i(x')\}C_{ij}^{-1}\{V_j(y'),B(y)\}$$

Utilizando os resultados acima e calculando todos os parênteses de Dirac entre as variáveis canônicas, encontramos os seguintes parênteses de Dirac abaixo:

$$\begin{aligned}
&\{A_0,b\}_d=\delta^2(x-y)\\
&\{A_i,\pi_j\}_d=\delta^i_j\delta^2(x-y)\\
&\{\phi,\pi\}_d=\{\phi^*,\pi^*\}_d=\delta^2(x-y)\\
&\{c,\pi_c\}_d=\{\bar{c},\pi_{\bar{c}}\}_d=\delta^2(x-y)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Com o intuito de quantizarmos a teoria, faremos a seguinte transformação: $\{,\}_d \rightarrow i\{,\}\equiv[,]$, obtendo as relações de comutação, como se segue:

$$\begin{aligned}
&[A_0,b]=i\delta^2(x-y)\\
&[A_i,\pi_j]_d=i\delta^i_j\delta^2(x-y)\\
&[\phi,\pi]_d=[\phi^*,\pi^*]_d=i\delta^2(x-y)\\
&[c,\pi_c]_d=[\bar{c},\pi_{\bar{c}}]_d=i\delta^2(x-y)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Encontradas então as relações de comutação corretas para a teoria, podemos agora dizer que estamos com uma teoria sem vínculos efetivos, pois estes foram ocultados pelos parênteses de Dirac.

3.3 SIMETRIA DE BRST

Como já comentamos, a Lagrangiana escrita na forma (3.01) está com a simetria de gauge quebrada, mas existe uma simetria remanescente, a simetria de BRST, dada pelas transformações nos campos:

$$
\begin{aligned}
&\delta_B A_\mu = \lambda \partial_\mu c \\
&\delta_B \phi = ie\lambda c\phi \\
&\delta_B \phi^* = -ie\lambda c\phi^* \\
&\delta_B b = 0 \\
&\delta_B c = 0 \\
&\delta_B \bar{c} = i\lambda b
\end{aligned}
\qquad (3.17)
$$

Onde δ_B denota a transformação de BRST e λ, parâmetro global da transformação, é uma quantidade de Grassmann constante.

Levando os campos A_μ, ϕ, b, c e $\bar{c}$, respectivamente para

$$
\begin{aligned}
&A_\mu \to A_\mu + \lambda \partial_\mu c \\
&\phi \to \phi + ie\lambda c\phi \\
&\phi^* \to \phi^* - ie\lambda c\phi^* \\
&b \to b
\end{aligned}
$$

$$c \rightarrow c$$
$$\bar{c} \rightarrow c + i\lambda b$$

e considerando o fato que $\lambda^2 = 0$, pois λ é um número de Grassmann, e aplicando estas tranformações na Lagrangiana (3.01), podemos constatar que esta é realmente invariante sob esta tranformação nos campos.

O termo de acoplamento e o termo de Chern-Simons separadamente são invariantes sob uma transformação de gauge a menos de uma derivada total, é de se esperar que estes termos continuassem invariantes sob uma transformação de BRST, pois esta transformação é apenas uma reparametrização da transformação de gauge $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$, fazendo o gerador Λ ir para $\chi \rightarrow \lambda c$, onde c é o campo de *ghost.*

O termo de fixação de gauge,

$$-A_\mu \partial^\mu b + \frac{\alpha}{2} b^2$$

juntamente com o termo de ghost

$$-i\partial^\mu \bar{c}\, \partial_\mu c$$

ficam invariantes sob estas transformações nos campos. Logo, a Lagrangiana é realmente invariante de BRST.

3.4 CARGA CONSERVADA DE BRST.

Vamos construir agora a corrente conservada de BRST, a qual possibilitará encontrarmos uma expressão para o campo A_i, que será de grande importância para análise da propriedade rotacional do campo ϕ.

A corrente conservada de Noether para a transformação de BRST é dada como

$$J_B^{\mu} = \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \Theta_a} \delta_B \Theta_a$$

Onde Θ_a pode representar os campos A_{μ}, ϕ, ϕ^*, b, c e $\bar{c}$. Assim, usando a Lagrangiana na forma da expressão (3.04) e as transformações (3.17), encontramos a corrente conservada de BRST na forma exposta abaixo.

$$\begin{aligned} J_B^{\mu} &= k\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_{\nu} c A_{\lambda} + iec(\partial^{\mu}\phi^*\phi - \phi^*\partial^{\mu}\phi + 2ieA^{\mu}|\phi|^2) + \\ &+ b\partial^{\mu} b - \frac{g}{2} ec|\phi|^2 \varepsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} + \frac{g^2}{2}|\phi|^2 F^{\mu\nu}\partial_{\nu} c + \\ &+ i\frac{g}{2} ec\varepsilon^{\mu\nu\rho}[\phi^*(D_{\rho}\phi) - \phi(D_{\rho}\phi)^*]\partial_{\nu} c \end{aligned} \qquad (3.18)$$

A componente $\mu = 0$ da corrente conservada de BRST será

$$\begin{aligned} J_B^{0} &= k\varepsilon^{ij}\partial_i c A_j + iec(\dot{\phi}^*\phi - \phi^*\dot{\phi} + 2ieA^{0}|\phi|^2) + \\ &+ b\partial^{0} b - \frac{g}{2} ec|\phi|^2 \varepsilon^{ij} F_{ij} + \frac{g^2}{2}|\phi|^2 F^{0i}\partial_i c + \\ &+ i\frac{g}{2}\varepsilon^{ij}[\phi^*(D_j\phi) - \phi(D_j\phi)^*]\partial_i c \end{aligned}$$

Usando as expressões (3.06) escritas para $\dot{\phi}^*$ e $\dot{\phi}$, podemos reescrever a expressão acima como:

$$J_B^0 = c[ie(\phi\pi - \phi^*\pi^* - \frac{g}{2e}\varepsilon^{ij}\partial_i(\phi^*(D_j\phi) - \phi(D_j\phi)^*) +$$

$$+ i\frac{g}{2e}\partial_i(|\phi|^2 F^{0i})) - k\varepsilon^{ij}\partial_i A_j] + b\partial^0 c \qquad (3.19)$$

As transformações de BRST (3.17), são geradas pela carga conservada de BRST Q_B, definida como

$$Q_B = \int d^2x J_B^0$$

a qual pode ser escrita na forma

$$Q_B = \int d^2x\{c[ie(\phi\pi - \phi^*\pi^* +$$

$$- \frac{g}{2e}\varepsilon^{ij}\partial_i(\phi^*(D_j\phi) - \phi(D_j\phi)^*) +$$

$$+ i\frac{g^2}{2e}\partial_i(|\phi|^2 F^{0i})) - k\varepsilon^{ij}\partial_i A_j] + b\partial^0 c\} \qquad (3.20)$$

Um resultado a ser verificado é a nilpotência de Q_B, isto é, verificar se

$$Q_B^2 = 0$$

Para isso reescrevemosa carga conservada Q_B como

$$Q_B = \int d^2x(\alpha)$$

onde

$$\alpha = \{c[ie(\phi\pi - \phi^*\pi^* - \frac{g}{2e}\varepsilon^{ij}\partial_i(\phi^*(D_j\phi) - \phi(D_j\phi)^*) + $$
$$+ i\frac{g^2}{2e}\partial_i(|\phi|^2 F^{0i})) - k\varepsilon^{ij}\partial_i A_j] + b\partial^0 c\}$$

sendo α uma quantidade de Grassman. Podemos escrever

$$Q_B^2 = \frac{1}{2}\iint d^2x d^2x'(\alpha\alpha' + \alpha'\alpha)$$

Usando então o fato de α e α' serem quantidades anti-comutantes concluimos então que

$$Q_B^2 = 0 \tag{3.21}$$

Logo, fica comprovado que a carga Q_B é realmente nilpotente.

Voltemos agora à expressão (3.20) e reescrevamos a carga de BRST na forma,

$$Q_B = \int d^2x[c(eJ_0 - k\varepsilon^{ij}\partial_i A_j) + b\partial^0 c] \tag{3.22}$$

onde

$$J_0 = i[\phi\pi - \phi^*\pi^* - \frac{g}{2e}\varepsilon^{ij}\partial_i(\phi^*(D_j\phi) - \phi(D_j\phi)^*) +$$

$$+ i\frac{g^2}{2e}\partial_i(|\phi|^2 F^{0i})] \qquad (3.23)$$

Como nossa teoria é invariante sobre a transformação de BRST (3.17), logo é exigido que um estado físico também seja invariante sobre esta transformação gerada pela carga Q_B. Concluimos que

$$Q_B|est.fis.\rangle = 0 \qquad (3.24)$$

onde $|est.fis.\rangle$, representa o estado físico, sendo (3.24) a condição que deve ser satisfeita.

Usando o resultado da expressão (3.06), em que

$$\pi_{\bar{c}} = -i\partial^0 c$$

e usando as relações de comutação (3.16), podemos reescrever a carga conservada de BRST como

$$Q_B = \int d^2xc(iJ_0 - k\varepsilon^{ij}\partial_i A_j) + [Q_B, \int d^2x\bar{c}\partial^0 c] \qquad (3.25)$$

Usando Q_B na forma acima e fazendo esta carga atuar em um estado físico, teremos que o estado resultante terá norma zero e é ortogonal a algum estado físico, devido a nilpotência de Q_B e a condição (3.24). Podemos portanto considerar somente a primeira parte da equação (3.25), passando a escrever a condição (3.24) na forma

$$[\int d^2xc(iJ_0 - k\varepsilon^{ij}\partial_i A_j)]\,|est.fis.\rangle = 0 \qquad (3.26)$$

O que significa que podemos escrever o espaço total de Fock como o produto direto abaixo

$$V = V_0 \otimes V_{gh} \tag{3.27}$$

Pois estamos com uma teoria em que os campos de *ghost* c e $\bar{c}$ são completamente desacoplados dos outros campos. Onde V_0 é o espaço de Fock para os campos físicos da teoria e V_{gh} é o espaço de Fock para os campos de *ghost*

Assim, um estado $|v\rangle \in V$ é um estado físico, logo não possui nenhuma dependência com os campos de *ghost*, isto é,

$$|v\rangle = |est.fis.\rangle \otimes |0\rangle_{gh} \tag{3.28}$$

Onde $|0\rangle_{gh}$ é o estado de vácuo de *ghost.*

Escreveremos então a condição (3.26) como se segue:

$$[eJ_0 - k\varepsilon^{ij}\partial_i A_j]|est.fis.\rangle \otimes c|0\rangle_{gh} = 0 \tag{3.29}$$

Como temos um produto direto, a condição abaixo também deve ser satisfeita.

$$[eJ_0 - k\varepsilon^{ij}\partial_i A_j]|est.fis.\rangle = 0 \tag{3.30}$$

Veremos na seção 3.6 que esta condição é exatamente o vínculo da Lei de Gauss, no caso de trabalharmos no gauge não-covariante de Coulomb. Isto já nos garante a existência de estatística fracionária [13], porém não mostra se haverá alguma modificação devido ao termo de Pauli. Pode ser comprovado que a solução para a condição (3.30) é dada por

(3.31)

Onde J_0 é dado por (3.23) e $G(x-x')$ é a função de Green que em duas dimensões[37] é escrita como

$$G(x-x') = -\frac{1}{2\pi} ln|x-x'| + Const. \tag{3.32}$$

3.5 PROPRIEDADE ROTACIONAL DO CAMPO DE MATÉRIA.

Nosso objetivo final, nesta seção, é obter uma expressão para a relação de comutação entre o operador momento angular e o campo de matéria ϕ, a qual evidencie resultados sobre a estatística fracionária.

Obtemos inicialmente o tensor simétrico energia-momentum [38,39,24], o qual é dado pela expressão

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}} - \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial g^{\mu\nu}}$$

e escrevendo $\mathcal{L}$ [38] em termos da métrica encontramos então

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = (\nabla_\mu\phi)^*\nabla_\nu\phi + (\nabla_\nu\phi)^*\nabla_\mu\phi - A_\mu\partial_\nu b + \\ - A_\nu\partial_\mu b - g_{\mu\nu}(|\nabla_\alpha\phi|^2 - A^\alpha\partial^\alpha b) + T^{gh}_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{3.33}$$

Onde $T^{gh}_{\mu\nu}$ é o tensor simétrico de energia-momentum para os campos de *ghost*, escrito como

$$T^{gh}_{\mu\nu} = i(\partial_\mu \bar{c} \partial_\nu c + \partial_\nu \bar{c} \partial_\mu c)$$

A componente T_{0j} do tensor $T_{\mu\nu}$ é

$$\begin{aligned} T_{0j} &= (\nabla_0 \phi)^* \nabla_j \phi + (\nabla_j \phi)^* \nabla_0 \phi - A_0 \partial_j b + \\ &- A_j \partial_0 b + T^{gh}_{0j} \end{aligned} \tag{3.34}$$

Abrindo a expressão acima e utilizando os momenta (3.06.d) e (3.06.e), encontramos

$$\begin{aligned} T_{0j} &= (\pi \partial_j \phi + \pi^* \partial_j \phi^*) - ieA_j(\phi\pi - \phi^* \pi^*) + \\ &- i\frac{g}{2}\varepsilon_{jl} F^{l0}(\phi\pi - \phi^*\pi^*) - A_0 \partial_j b - A_j \partial_0 b + \\ &+ T^{gh}_{0j} \end{aligned} \tag{3.35}$$

Completando a expressão acima, podemos escrevê-la em termo da corrente J_0, ficando da forma:

$$\begin{aligned} T_{0j} &= (\pi \partial_j \phi + \pi^* \partial_j \phi^*) - ieA_j J_0 + \\ &- i\frac{g}{}\varepsilon_{jl} F^{l0}(\phi\pi - \phi^*\pi^*) - A_0 \partial_j b - A_j \partial_0 b + \\ &- i\frac{g}{2} A_j \varepsilon^{ij} \partial_i [\phi^* D_j \phi - \phi (D_j \phi)^*] + \\ &+ i\frac{g^2}{2} A_j \varepsilon^{ij} \partial_i (|\phi|^2 F^{0i}) + T^{gh}_{0j} \end{aligned} \tag{3.36}$$

Podemos passar agora ao operador momentum angular, sendo este em *2+1* dimensões definido por

$$L_a = \int d^2 x \varepsilon^{ij} x_i T_{0j} \tag{3.37}$$

Logo

$$\begin{aligned} L_a = \int d^2 x \varepsilon^{ij} x_i \{ & (\pi \partial_j \phi + \pi^* \partial_j \phi^*) - ieA_j J_0 + \\ & - i\frac{g}{2} \varepsilon_{jl} F^{l0} (\phi\pi - \phi^* \pi^*) - A_0 \partial_j b - A_j \partial_0 b + \\ & - i\frac{g}{2} A_j \varepsilon^{ij} \partial_i [\phi^* D_j \phi - \phi (D_j \phi)^*] + \\ & + i\frac{g^2}{2} A_j \varepsilon^{ij} \partial_i (|\phi|^2 F^{0i}) + T^{gh}_{0j} \} \end{aligned} \tag{3.38}$$

A propriedade rotacional do campo ϕ é obtida pela verificação da relação de comutação $[L_a, \phi(y)]$.

Utilizando a relação de comutação

$$[\phi, \pi] = i\delta^2 (x - y)$$

encontramos

$$[\phi, J_0] = -\phi \delta^2 (x - y) \tag{3.39}$$

A partir das duas relações de comutação acima, obtemos

$$[L_a,\phi]=\varepsilon^{ij}y_i\partial_j\phi-[e\int d^2x\varepsilon^{ij}x_iA_jJ_0,\phi]+ \\ +i\frac{g}{2}\varepsilon_{jl}\varepsilon^{ij}y_iF^{l0}\phi \tag{3.40}$$

Antes de prosseguirmos, vamos desenvolver o termo

$$e\int d^2x\varepsilon^{ij}x_iA_jJ_0$$

Usando a expressão (3.31) para A_j, teremos

$$e\int d^2x\varepsilon^{ij}x_iA_jJ_0=-\frac{e^2}{k}\iint d^2xd^2x'\varepsilon^{ij}x_i\varepsilon_{kl}\times \\ \times\partial_kG(x-x')J_0(x)J_0(x') \tag{3.41}$$

podendo ainda apresentar-se como

$$e\int d^2x\varepsilon^{ij}x_iA_jJ_0=-\frac{e^2}{k}\iint d^2xd^2x'\times \\ \times\vec{x}\cdot\nabla G(x-x')J_0(x)J_0(x') \tag{3.42}$$

Pode ser visto que,

$$\vec{x}\cdot\nabla G(x-x')=-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\vec{x}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}{|x-x'|^2}\right) \tag{3.43}$$

Voltando, temos,

$$e\int d^2x\varepsilon^{ij}x_iA_jJ_0=\frac{e^2}{2\pi k}\iint d^2xd^2x'\frac{\vec{x}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}{|x-x'|^2}\times$$
$$\times J_0(x)J_0(x')=\frac{e^2}{4\pi k}Q^2 \tag{3.44}$$

pois

$$\frac{\vec{x}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}{|x-x'|^2}=\frac{1}{2} \tag{3.45}$$

para $\vec{x}=\vec{x}'$. Na expressão (3.44) Q é o operador carga eletromagnética, o qual é definido como

$$Q=\int d^2xJ_0(x) \tag{3.46}$$

Reescrevemos (3.40) como

$$[L_a,\phi]=\varepsilon^{ij}y_i\partial_j\phi-\frac{e^2}{4\pi k}[Q^2,\phi(y)]+$$
$$+i\frac{g}{2}\varepsilon_{jl}\varepsilon^{ij}y_iF^{l0}\phi \tag{3.47}$$

Temos também que

$$[Q(x),\phi(y)]=\phi\delta^2(x-y) \tag{3.48}$$

Usando este último resultado e manipulando o último termo de (3.47) chegamos finalmente à expressão para a relação de comutação entre o operador momentum angular e o campo de matéria, dada por

$$
\begin{aligned}
[L_a, \phi(y)] = i(\vec{y} \times \nabla)\phi(y) - \frac{e^2}{2\pi k} Q(y)\phi(y) + \\
+ i\frac{g}{2}\vec{y} \cdot \vec{E}\phi(y)
\end{aligned}
\tag{3.49}
$$

Para $g = -2e/k$, a equação acima torna-se

$$
\begin{aligned}
[L_a, \phi(y)] = i(\vec{y} \times \nabla)\phi(y) - \frac{e^2}{2\pi k} Q(y)\phi(y) + \\
- i\frac{e}{k}\vec{y} \cdot \vec{E}\phi(y)
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

Os dois primeiros termos deste resultado são semelhantes ao que tem sido encontrado na literatura para teorias sem a presença do termo anômalo. O primeiro termo, já esperado, é o termo que evidencia a propriedade rotacional essencial para campos de matéria. O segundo é devido à presença do termo de Chern-Simons e, basicamente, está relacionado com o campo magnético B, pois $B = \varepsilon^{ij}\partial_i A_j$. O último termo de (3.51) está relacionado com o campo elétrico $\vec{E}$ e surgiu com a introdução do termo anômalo na Lagrangiana, introduzido com a redefinição do operador D_μ para o ∇_μ. Este resultado nos parece bastante interessante. Primeiro porque confirma as especulações da referência [25] sobre a contribuição do momento de dipolo anômalo para a estatística fracionária e, por outro lado, abre a possibilidade da existência de uma estatística anômala sem a presença do termo de Chern-Simons, o que poderia levar a um novo conceito para os anions. É interessante notar que, ao contrário do termo de Chern-Simons, que está ligado ao campo magnético, o termo extra está relacionado com o campo elétrico.

3.6 TEORIA DE CHERN-SIMONS EM UM GAUGE NÃO-COVARIANTE

Nosso objetivo é verificar a influência do termo de Pauli, para a estatística fracionária em um gauge não-covariante.

Analisaremos agora nosso modelo em um formalismo onde a quebra da simetria de gauge é implementada apenas a nível de vínculos. Consideremos a densidade Lagrangiana escrita na forma abaixo:

$$\mathcal{L} = \left|\nabla_\mu \phi\right|^2 + \frac{\kappa}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda \tag{3.50}$$

Obtendo os seguintes momenta canonicamente conjugados:

$$\begin{aligned}
&\pi_0 = 0 \\
&\pi^J = -\frac{k}{2}\varepsilon^{ij} A_i - i\frac{g}{2}\varepsilon^{ij}[\phi^*(D_i\phi) - \phi(D^i\phi)^*] + \\
&-\frac{g^2}{2}\partial^j A_0|\phi|^2 + \frac{g^2}{4}\dot{A}^J|\phi|^2
\end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\pi = \dot{\phi}^* + ieA_0\phi^* + i\frac{g}{4}\phi^*\varepsilon^{ij}F_{ij}$$

$$\pi^* = \dot{\phi} - ieA_0\phi - i\frac{g}{4}\phi\varepsilon^{ij}F_{ij}$$

Identificamos somente um vínculo primário das expressões acima, o qual é:

$$\pi_0 \approx 0$$

E usando o fato que $\dot{\pi}_0 \approx 0$, encontramos o vínculo secundário abaixo:

$$eJ_0 - \kappa\varepsilon^{ij}\partial_i A_j \approx 0$$

onde

$$J_B^0 = c[ie(\phi\pi - \phi^*\pi^* - \frac{g}{2e}\varepsilon^{ij}\partial_i(\phi^*(D_j\phi) - \phi(D_j\phi)^*) +$$

$$+ i\frac{g}{2e}\partial_i(|\phi|^2 F^{0i})) - k\varepsilon^{ij}\partial_i A_j] + b\partial^0 c$$

Podemos contatar que não existem mais vínculos na teoria. Ficamos então com dois vínculos de primeira classe, os quais são:

$$V_1 = \pi_0 \approx 0 \tag{3.52}$$

$$V_2 = eJ_0 - \kappa\varepsilon^{ij}\partial_i A_j \approx 0 \tag{3.53}$$

Sendo os vínculos acima de primeira classe (a expressão 3.53 é o vínculo da Lei de Gauss), estes são geradores de transformações de gauge. Assim podemos impor as chamadas condições de gauge, com o intuito de eliminar qualquer ambiguidade na variações dos campos. Impomos então o gauge de Coulomb[54]:

$$\partial^i A_i = 0 \tag{3.54}$$

Vemos que o vínculo (3.53), é a mesma expressão que o campo A^i deveria satisfazer na condição (3.30). Mas A^i, devido à condição de gauge imposta, deve também satisfazer o gauge de Coulomb. Temos então que:

o qual satisfaz o vínculo V_2 e o gauge de Coulomb.

Podemos encontrar o tensor simétrico energia-momentum, como:

$$T_{\mu\nu} = (\nabla_\mu \phi)^* \nabla_\nu \phi + (\nabla_\nu \phi)^* \nabla_\mu \phi - g_{\mu\nu}(|\nabla_\alpha \phi|^2) \tag{3.55}$$

Usando os parênteses de Poisson usuais e calculando a propriedade rotacional do campo escalar complexo ϕ, encontraremos o mesmo resultado obtido na expressão (3.49). Concluimos então que mesmo em um gauge não-covariante como o gauge de Coulomb aparece o termo $i(g/4)\vec{y} \bullet \vec{E}\phi$. Este resultado está dentro do previsto pois a escolha de gauge não deve alterar os resultados de uma teoria fisica.

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

A estrutura formal deste trabalho foi baseada em dois formalismos que se mostraram extremamente úteis tanto do ponto de vista de formação acadêmica quanto do ponto de vista da solução dos problemas práticos abordados.

O método de Dirac para análise de sistemas vinculados mostrou-se ser tecnicamente objetivo quanto a obtenção de resultados e rico em informações quanto a natureza fisica do sistema. Em sistemas em que os vínculos não são todos de segunda classe, os vínculos de primeira classe possibilitam a implementação de "condições de gauge", as quais podem ser interpretadas como restrições adicionais que a teoria deve satisfazer ou podem sem incorporadas aos vínculos da teoria, e a partir disto faz-se uma nova análise dos vínculos efetivos, verificando se os mesmos são de primeira ou segunda classe para em seguida obter os parênteses de Dirac.

Por outro lado, o formalismo de BRST para teorias de gauge, utilizando-se das idéias de Faddev-Popov, permite que se trabalhe com uma simetria manifesta, mesmo com a simetria de gauge fixada, o que leva a facilidades técnicas, e ainda torna mais transparente a análise dos estados fisicos da teoria. Especialmente quando se trabalha com a fixação de gauge explícita na Lagrangiana, a utilização do formalismo de BRST mostra-se mandatória.

O aparecimento do spin fracionário deve-se basicamente ao termo de Chern-Simons, como já mostrado em vários artigos. Surgem porém alguns questionamentos, tais como:

i. Alguns autores acreditam que em uma teoria Maxwell-Chern-Simons, o termo de Maxwell inibe o caráter aniônico. Assim, seria possível de alguma forma recuperar o caráter aniônico para esta teoria?

ii. A estatística fracionária poderia ser obtida ou pelo menos modificada devido a interações implementadas em uma teoria Maxwell pura ou Maxwell-Chern-Simons ou Chern-Simons pura?

A resposta à primeira questão tem sido dada em parte com a introdução do termo de Pauli diretamente na Lagrangiana. Por exemplo, no modelo Maxwell-Chern-Simons-Higgs com momento de dipolo anômalo, para um certo valor da constante de acoplamento g se recupera o caráter aniônico.

A análise que desenvolvemos neste trabalho, que trata basicamente a teoria de Chern-Simons pura, nos leva a crer que, se não respondemos, pelo menos demos um encaminhamento novo à segunda questão. O termo adicional obtido quando calculamos a propriedade rotacional do campo escalar complexo, não foi ainda mostrado na Literatura. Acreditamos que esta modificação, devido ao termo de Pauli, pode ser considerada como uma alteração na estatística fracionária. Ficamos induzidos a pensar que este termo extra surge mesmo na ausência do termo de Chern-Simons. Se esta propriedade anômala da estatística pode levar a um novo conceito de anions, é uma especulação interessante e que necessita de esclarecimentos adicionais.

Os principais resultados deste trabalho podem ser resumidos como:

- Construímos a corrente e a carga de BRST para o modelo de Chern-Simons com acoplamento não-mínimo.

- Ao utilizarmos a formulação BRST obtemos a forma para o campo A_j, através da análise da atuação da carga topológica de BRST (Q_b) em um estado físico, da qual obtemos uma expressão que se apresenta basicamente como o vínculo da Lei de Gauss. Quando a fixação de gauge não é explicitada no Lagrangiano encontramos a mesma forma para o campo A_j, porém este vem agora diretamente da análise de vínculos da teoria, onde temos o vínculo da Lei de Gauss novamente.

- O spin fracionário é obtido quando trabalhamos no gauge covariante de Lorentz, como também no gauge não-covariante de Coulomb, mesmo com a introdução do termo de Pauli.

- A introdução do momento de dipolo anômalo leva ao aparecimento de uma contribuição adicional ao momentum angular do campo de matéria. Desta forma, mostramos que o termo de Pauli não destrói o caráter aniônico, apenas o modifica. Abre-se a possibilidade de objetos exibirem a estatística anômala sem recorrer ao termo de Chern-Simons

As perspectivas de continuação desta linha de trabalho residem em:

- Realizar os mesmos procedimentos deste trabalho para o caso do campo espinorial.

- Verificar a possibilidade da existência da chamada interpolação entre bosons e fermions, característica de anions, num quadro de ausência do termo de Chern-Simons.

- Verificar qual o efeito do termo de Maxwell sobre todos estes modelos com o termo de Pauli e, em particular, se para um valor crítico da constante de acoplamento g o termo extra no momentum angular permanece.

APENDICE

A.1 Convenções.

Utilizamos neste trabalho o sistema natural de unidades:

$$\hbar = c = 1 \qquad \text{A.1.1}$$

Derivadas covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu \qquad \text{A.1.2}$$

$$\nabla_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu - i\frac{g}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho} \qquad \text{A.1.3}$$

Trabalhamos em 1+2 dimensões, onde utilizamos:

Métrica: $$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{A.1.4}$$

Tensor de Levi-Civita:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho} = \begin{cases} 1 & (\textit{permutações pares}) \\ -1 & (\textit{permutações impares}) \\ 0 & (\textit{índices repetidos}) \end{cases} \qquad \text{A.1.5}$$

BIBLIOGRAFIA

[01] C. R. Hagen, Ann. Phys. (N.Y) 157, 342 (1984); Phys. Rev. **D31**, 2135 (1985)

[02] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **49**, 957 (1982)

[03] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton. Ann. Phys. (N.Y.) **140**, 372 (1982).

[04] A. A. Abrikosov, Sov. Phys. JETP **5,** 1174 (1957).

[05] H. B. Nielsen e P. Olensen, Nucl. Phys. **B 61,** 45 (1973).

[06] Frank Wilczek, 'Fractional Statistics and Anyon Superconductivity', Word Scientific, Singapore, 1990..

[07] F. Wilczek and A. Zee, Phys. Rev. Lett. **51**, 2250 (1983).

[08] J. M. Leinaas and J. Mirheim, Nuovo Cimento **37**, 1 (1977)

[09] J. Goldstone and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett.**47**, 986 (1981).

[10] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **48**, 1144 (1982).

[11] J. Fröhlich and P. A. Marchetti, Lett. Math. Phys. **A3**, 347 (1988).

[12] Y. H. Chen and F. Wilczek, Int. J. Mod. Phys. **B3**, 117 (1989).

[13] G. W. Semenoff, Phys. Rev. Lett. **61**, 517 (1988).

[14] T. Matsuyama, Phys. Lett. **B228,** 99 (1989).

[15] P. K. Panigrahi, S. Roy and W. Scherer, Phys. Rev. Lett **61**, 2827 (1988).

[16] H. Shin, W. Kim and J. Kim, Phys. Rev. **D46**, 2730 (1992).

[17] A. Foerster, H. Girotti, Phys. Lett. **B230**, 83 (1989).

[18] J. Stern, Phys. Lett. **B 265**, 119 (1991).

[19] M. Torres, Phys. Rev. **D46**, 2295 (1992).

[20] I. I. Kogan, Phys. Lett. **B262**, 83 (1991).

[21] P. A. M. Dirac, LECTURES ON QUANTUM MECHANICS, Yeshivo University Press, New York, 1964.

[22] H. Girotti, Classical and Quantum Dynamics of Constrained Systems, Vth Summer School Jorge Andre Swieca, Campos do Jordão, 1989.

[23] C. Becchi, A. Rouet and R.Stora, Ann. Phys. **98**, 287 (1976); I. Tyutin, Lebedev Preprint 39 (1975).

[24] Lewis H. Ryder, 'QUANTUM FIELD THEORY', Cambridg University Press, Cambridg, 1985.

[25] M. E. Carrington and G. Kunstatter, Phys. Rev. **D51**, 1903 (1995).

[26] R. Rajaraman, 'Solitons and Instantons', North-Holland, Amsterdam, 1982.

[27] J. Hong, Y. kim, and P. Y. Pac, Phys. Rev. Lett. **64**, 2230 (1990).

[28] R. Jackiw and E. J. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **64**, 2234 (1990).

[29] Y. Georgelin and J. Wallet, Mod. Phys. Lett. **A7**, 1149 (1992)

[30] Y. Georgelin and J. Wallet, Phys. Rev. **D50**, 6610 (1994)

[31] S. Paul and A. Khare, Phys. Lett. **B193**, 253 (1987)

[32] P: K. Ghosh, Phys. Rev. **D49**, 5458 (1994)

[33] M. E. Carrington and G. Kunstatter, Phys. Rev. **D50**, 2830 (1994).

[34] R. Jackiw, K. Lee and E. J. Weinberg, Phys. Rev. **D42**, 3488 (1990).

[35] S. Latinskii and D. Sorokin, JETP Lett. **53**, 87 (1991)

[36] Marcony Silva Cunha, "Supersimetrização do Modelo Maxwell-Chern-Simons-Higgs com Interações de Momento Magnético Anômalo", Tese de Mestrado, UFC, 1995.

[37] Jakson, 'ELETRODINÂMICA CLÁSSICA', Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1983.

[38] L. Landau e E. Lifchitz, 'Teoria do Campo', Hemus, São Paulo.

[39] F. Mandl and G. Shaw, 'Quantum Field Theory', John Wiley & Sons, New Work, 1984.

[40] Patrício Alfredo Gaete Durán, 'Quantização de Teorias de Gauge e os Gauges de Fock-Schwinger e Poincaré', Tese de Doutorado, CBPF, 1993.