



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

ESTUDO E MODELAMENTO DE FIBRAS COAXIAIS

Cláudia Adriana de Sousa Melo

Orientador: Frederico Dias Nunes

Tese apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Ciências.

Dezembro de 1994.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M485e Melo, Cláudia Adriana de Sousa.

Estudo e modelamento de fibras coaxiais / Cláudia Adriana de Sousa Melo. – 1994.
130 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa
de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Frederico Dias Nunes.

1. Telecomunicações. 2. Refração. I. Título.

CDD 530

ESTUDO E MODELAMENTO DE FIBRAS COAXIAIS

CLÁUDIA ADRIANA DE SOUSA MELO

Dissertação apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Ciências.

Comissão Julgadora:

Frederico Dias Nunes (UFC)

Mário Pereira da Silva (UFRN)

José Evangelista de Carvalho Moreira (UFC)

Aprovado em 2 de dezembro de 1994.

Dedicatória

Ao meu filho
Pedro Bruno.
Aos meus pais.
Ao Carlos.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, pelo seu amor e compreensão.

Agradeço ao meu orientador Frederico Dias Nunes, pela inesgotável paciência para comigo, pela orientação deste trabalho e pelos sábios ensinamentos que foram a mim transmitidos.

Agradeço ao Carlos por sua dedicação e paciência.

Agradeço aos meus amigos Edina e Wellington.

Agradeço ao José Pimentel de Lima por seu incentivo e amizade

Agradeço ao amigo Humberto pelo auxílio na utilização dos computadores.

Os meus sinceros agradecimentos aos colegas contemporâneos de curso, por seu companheirismo. E aos colegas do Grupo de Física Aplicada meu agradecimento pelos bons momentos que passamos juntos.

Resumo

Neste trabalho é feita uma análise detalhada da fibra tipo coaxial, que é constituída de quatro regiões. Estuda-se quatro estruturas desse guia, particularmente denominadas de W e M, usando-se nos cálculos a aproximação L P. As equações transcendentais que possibilitam uma análise completa da fibra em estudo são obtidas e analisadas. Através da variação de alguns parâmetros, tais como índices de refração e da razão entre os raios das regiões existentes, são analisadas diversas características das fibras tais como: dispersão, perfis de campo e de intensidade e as condições de corte. O estudo das fibras coaxiais é importante em face do seu uso na fabricação de dispositivos a serem empregados em telecomunicações. Particularmente os filtros espectrais recentemente desenvolvido pelo CPqD-Telebrás, já em uso comercial.

Abstract

In this work we make a detailed analysis of coaxial fiber, which is composed of four regions with different refractive index values. We study four structures of this guide, which are nominated as W and M. L. P approximation was used in our calculations and transcendental equations were obtained leading to a numerical analysis of the fibers in question. Through the variation of some parameters like refractive index and rate between the radius of the existent regions, we are able to analyze various features of fibers like: dispersion relation, field profile and intensity and cut-off conditions. The study of coaxial fiber is important for the fabrication of telecommunications devices, particularly the spectral filter recently developed in the CPqD - Telebrás, which are already being commercially used.

ÍNDICE

Introdução.....	1
Capítulo I - Aproximação LP	
1.1 - Descrição da aproximação.....	6
1.2 - Estruturas básicas de fibras ópticas.....	8
1.3 - Resultados.....	18
Capítulo II - Análise teórica da fibra coaxial	
2.1 - Perfis de índices de refração da fibra coaxial.....	24
2.2 - Fibra coaxial W, estruturas I e II.....	25
2.3 - Fibra coaxial M, estruturas III e IV.....	35
Capítulo III - Curvas de dispersão para a fibra coaxial	
3.1 - Dispersão.....	41
3.2 - Variações em P, com Q constante.....	46
3.3 - Variações em Q, com P constante.....	52
3.4 - Variações no índice de refração N_4	58
3.5 - Conclusões.....	64

Capítulo IV - Perfis de campo e intensidade da fibra coaxial

4.1 - Fibra W.....	65
4.2 - Fibra M.....	79
4.3 - Conclusões.....	88

Capítulo V - Condições de corte

5.1 - Condições de corte.....	90
5.2 - Condições de corte, para fibra W.....	91
5.3 - Resultados, para a fibra W.....	96
5.4 - Condições de corte, para fibra M.....	99
5.5 - Resultados, para fibra M.....	101
5.6 - Conclusão.....	105

Conclusão.....	106
----------------	-----

Referências.....	109
------------------	-----

Programas.....	111
----------------	-----

Apêndice A - Aproximação LP

A-1 - Fibra Bastão.....	A1
A-2 - Aproximação LP.....	A9

Apêndice B - Fibra tubo

Fibra tubo.....B1

Apêndice C - Fibra coaxial

Fibra coaxial W.....C1

Fibra coaxial M.....C18

INTRODUÇÃO

- Motivação do trabalho.

Os anos setenta trouxeram uma inexorável mudança tecnológica na área das comunicações, quando ficou patenteado o uso de um novo componente, a *fibra óptica*. Este componente é, em resumo, um fio flexível de vidro à base de sílica (SiO_2), capaz de guiar a luz. Ou seja, sendo capaz de confinar luz, a partir de um princípio básico que é o fenômeno da reflexão interna total, a fibra permite que nela a radiação se propague sendo pois um guia de ondas eletromagnéticas. O transporte de informação, via o modulamento da luz que se propaga numa fibra, é uma consequência natural. Associada à existência dos lasers a semicondutor, a fibra óptica não demorou a se transformar numa das grandes bases da revolução tecnológica das comunicações ópticas.

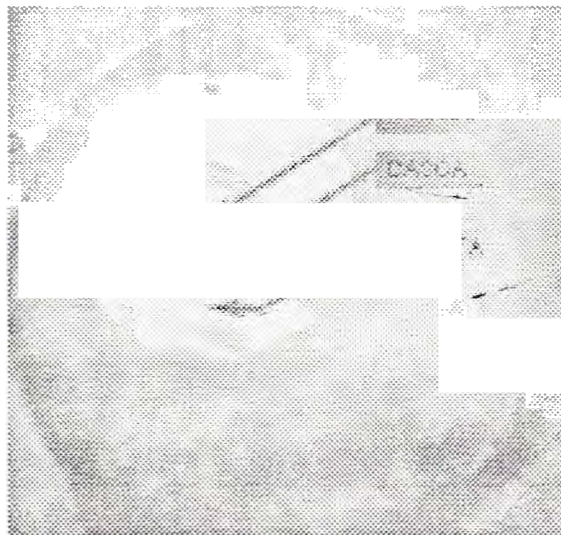


Fig. (I-1) Seção transversal da fibra bastão

A fibra óptica mais simples é composta de uma região central, o núcleo, uma intermediária, a casca, e uma região externa, a jaqueta. Na figura (I-1) mostra-se a seção transversal desta fibra, ref.[1], sendo indicadas as três regiões citadas anteriormente. Sendo observada a condição em que o índice de refração do núcleo seja maior do que o da casca, obtém-se o requisito de poder ocorrer reflexão interna total de luz, e, com isto, o guiamento da radiação eletromagnética.

Conquanto o fenômeno da reflexão interna total já fosse conhecido desde o século XIX e já a partir de 1920 já se fabricasse fibras ópticas sem casca, as fibras com casca só surgiram em 1950, quando foram usadas na transmissão de imagens. O grande problema no uso de fibras era o das perdas na intensidade de luz, que nessa época chegavam a 1000 dB/km, ref.[2]. Para se ter uma idéia do que isto significa, consideremos que uma perda de 3,0 dB/km implica numa atenuação de 50% do sinal transmitido a cada quilômetro. O crédito para a fabricação da primeira fibra para telecomunicações é dado à Corning Glass Works, nos Estados Unidos, com sua fibra de 20 dB/km produzida em 1970. Rapidamente, em 1973 e 1974, conseguiu-se reduzir as perdas das fibras a partir da técnica de oxidação de gases, obtendo-se fibras com atenuação em torno de 4,0 dB/km, ref.[3]. Com altos progressos na tecnologia de fabricação, em 1979 conseguiu-se confeccionar fibras com perdas da ordem de 0,2 dB/km, para comprimento de onda de $1,55 \mu\text{m}$. Patamares menores de perda são limitados por processos intrínsecos de espalhamento de luz, tais como o espalhamento Rayleigh ref.[2], afora o fenômeno da absorção da radiação eletromagnética pela própria sílica.

Dependendo das dimensões do núcleo, as fibras podem ser classificadas em monomodo e multimodo. Fibras do tipo monomodo apresentam núcleos cujo diâmetro é da ordem de $5,0 \mu\text{m}$, enquanto que fibras multimodo apresentam o núcleo com diâmetro da ordem de $50,0 \mu\text{m}$. Devido às dimensões do núcleo o processo de transmissão de luz em fibras multimodo podem ser analisadas mesmo na aproximação de Óptica Geométrica, enquanto nas fibras monomodo o tratamento matemática deva ser o da Óptica Ondulatório.

Após o advento das fibras como meio de transmissão de sinal e informação, outros propósitos apareceram para o seu uso, vindo a ser insumo básico para diversos tipos de dispositivos. Entre estes destacamos: sensores, acopladores ópticos, divisores de luz, chaveadores e filtros espectrais. Destaca-se aqui o aparecimento de fibras dopadas com materiais Terra-raras, levando a fibra a ser um meio opticamente ativo e advindo o seu uso como amplificadores de luz e mesmo lasers.

Vários tipos de fibras surgiram com o passar dos anos, como por exemplo as fibras W ref.[4], as Graduais ref.[3] e outras, cada uma apresentando características diferentes e adequadas a determinados fins. Entre as fibras que surgiram nos últimos anos temos as coaxiais. Elas são compostas de quatro regiões, com dimensões e índices de refração distintos ou não. O interesse nesta fibra se iniciou com Boucouvalas ref.[5], na sua tentativa de fazer um filtro espectral destinado ao mundo das telecomunicações. Entretanto, entre os seus trabalhos publicados encontra-se uma atenção especial a apenas uma dada estrutura de fibra coaxial. Além disto, os filtros espectrais por ele desenvolvidos não atingiram os restritos índices de desempenho exigidos para os fins das telecomunicações. O uso das fibras coaxiais na manufatura de filtros espectrais foi reativado com os resultados obtidos por

Celaschi e outros no CPqD-Telebrás ref.[6]. Tais autores conseguiram manufacturar filtros espectrais usando as técnicas de *tapering* com as seguintes características:

Comprimento de onda de operação - 1,3 e 1,55
FSR (Free Spectral Range) - 0,55 nm (a 1,55 μm)
Perdas por Inserção - 0,5 dB

Tais filtros, então, passaram a ter aplicação prática factível.

- Objetivo do trabalho.

Este trabalho é dedicado ao estudo de diferentes estruturas de fibras coaxiais, procurando-se como objetivo principal o de se obter os elementos básicos para o estudo das suas características principais. Entre os elementos fundamentais está a solução da equação de ondas para cada estrutura da fibra coaxial. Isto é feito por meio de uma equação transcendental, característica de cada estrutura. Dado à complicada forma das equações transcendentais, envolvendo muitos termos constituídos de combinações de funções de Bessel, cuidados foram tomados no método numérico usado com o fim de garantir uma precisão adequada das soluções obtidas. Em face do elevado número de parâmetros ligados a uma fibra coaxial, o estudo detalhado de cada estrutura é deixado para a continuidade dos trabalhos iniciados nesta tese. Entretanto é feito um estudo inicial de algumas características importantes dos quatro tipos de fibras coaxiais consideradas, como por exemplo: curva de dispersão, distribuição de campo e intensidade, e condições de corte. O trabalho está dividido conforme está exposto a seguir.

No capítulo I é apresentado o método usado neste trabalho para a solução do guia de ondas. É usada a aproximação LP (Linearly Polarized), aplicando-a a duas estruturas, a saber: bastão e tubo. A análise de tais estruturas é importante porque elas servem de base para o modelamento dos filtros manufaturados com as fibras coaxiais. Isto porque as fibras coaxiais, com as quais se manufatura filtros espectrais, podem ser entendidas como um sistema de fibras bastão e tubo acopladas ref.[7].

No capítulo II é feito o modelamento da fibra coaxial, sendo estudado quatro estruturas diferentes. É dada ênfase à estrutura usada na confecção de filtros espectrais, conforme foi feito por Celaschi e outros.

No capítulo III são apresentados os resultados para a dispersão, obtidos através de métodos numéricos, onde são variados alguns parâmetros tais como: os índices de refração e as razões entre os raios das diversas regiões das fibras coaxiais.

No capítulo IV é apresentado o estudo do perfil de campo e intensidade de luz dos modos propagantes na fibra coaxial e no capítulo V são apresentados os resultados sobre as condições de corte das fibras coaxiais.

Para melhor manuseio e entendimento do trabalho, suprimiu-se da parte principal do texto os extensos cálculos desenvolvidos, deixando-os à disposição do leitor nos apêndices que se encontram no final.

CAPÍTULO I

APROXIMAÇÃO LP

Neste capítulo é apresentado o método usado para analisar a fibra coaxial, no caso a aproximação para guiamento fraco ou LP (“Linearly Polarized”). É feito um breve comentário sobre tal aproximação, aplicando-a a duas estruturas simples, a fibra bastão e a fibra tubo. O entendimento do comportamento das fibras coaxiais pode ser facilitado com o uso destas estruturas básicas.

1 - Aproximação de guiamento fraco ou LP

Na aproximação LP, considera-se que os campos propagantes são linearmente polarizados, sendo a condição indispensável à validade do seu uso a de que todas as variações de índice de refração sejam muito menores do que qualquer valor de índice de refração das regiões que compõem a fibra. A aproximação LP é muito interessante no estudo das fibras em geral, por permitir uma expressiva redução na complexidade e extensão dos cálculos realizados.

1.1 - Descrição da aproximação

Para o guiamento fraco têm-se, de acordo com a ref[8]:

$$\Delta = \frac{N_1 - N_2}{N_1} \ll 1$$

onde Δ é a diferença relativa entre os índices de refração de um guia de ondas, no caso o guia bastão que será tratado na seção 1.2. Com essa aproximação pode-se considerar que as constantes de propagação dos modos transversais magnéticos TM são aproximadamente degeneradas com relação ao modo transversal elétrico TE. Nestas condições, pode-se construir modos cujo campo transversal é polarizado em uma direção. Pode-se assim postular as componentes do campo da seguinte forma:

$$E_y = H_x \begin{Bmatrix} Z_0 / N_1 \\ Z_0 / N \end{Bmatrix}.$$

onde Z_0 são funções de Bessel. Em particular, essa condição aparece em fibras que apresentam “modos linearmente polarizados”, daí o nome da aproximação. Esses modos são degenerados, sendo denominados de pseudo-modos. Eles apresentam uma correspondência com os modos híbridos, que são os modos propagantes na fibra em estudo. Nos modos híbridos as soluções são combinações lineares dos modos puros TE e TM, não sendo possível separá-los, como mostradas na figura abaixo:

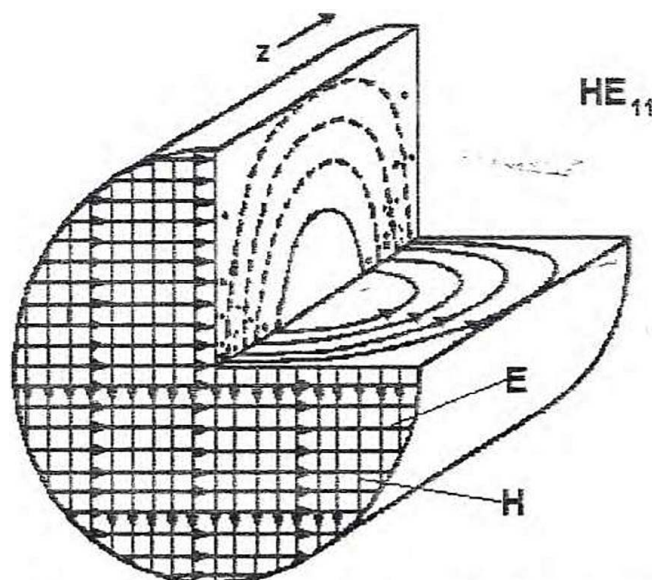


Fig. (1.1-1) Ilustração de modos híbridos na fibra bastão

Nas seções (1.2) e (1.3) serão analisados exemplos que utilizam esta aproximação, ref.[9].

Os detalhes matemáticos sobre a mesma estão no apêndice A.

1 . 2 - Estruturas básicas de fibras ópticas

1 . 2 - 1 - Fibra bastão

A fibra bastão é um guia de ondas que apresenta simetria cilíndrica, sendo composta de uma região interna, o núcleo, e uma externa, a casca, ref.[10]. Tais regiões apresentam, respectivamente, índices de refração N_1 e N_2 , e a é o raio do núcleo, como está indicado na figura (1.2-1).

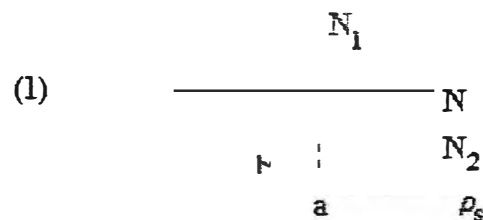


Fig.(1.2-1) Perfil do índice de refração do guia bastão.

Para haver guiamento de ondas eletromagnéticas faz-se necessário que o índice de refração do núcleo seja maior que o da casca. Desta forma é assegurado um dos pré-requisitos para haver reflexão interna total. Uma onda plana, propagando-se nessa fibra, é descrita pela equação de onda dada na eq.(1-3), encontrada diretamente das equações de Maxwell, ref.[11], como está demonstrado no apêndice A:

$$\nabla^2 \Psi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (1-1).$$

Nesta equação, Ψ poderá ser tanto o campo elétrico quanto o campo magnético, sendo uma função de θ , ρ , z e t . Fazendo-se o uso do método da separação de variáveis, escreve-se $\Psi = \Phi(\theta, \rho, z) T(t)$. Efetuando-se as devidas operações matemáticas, obtém-se as seguintes equações:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \xi \mu k^2 T = 0 \quad (1-2),$$

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = 0 \quad (1-3).$$

Usando-se $N^2 = \epsilon/\epsilon_0$ e $\omega = kc$, temos:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \quad (1-4)$$

$$\nabla^2 \Phi + N^2 k^2 \Phi = 0 \quad (1-5)$$

A equação (1-4) tem como solução: $T = T_0 e^{\pm i\omega t}$.

A equação (1-5) precisa ser resolvida usando-se, novamente, o método da separação das variáveis. Para isso usa-se a seguinte definição, $\Phi = \varphi(\theta, \rho) Z(z)$. Assim

$$Z(z) \nabla_t^2 [\varphi(\theta, \rho)] + N^2 k^2 \varphi(\theta, \rho) Z(z) + \varphi(\theta, \rho) \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0 \quad (1-6),$$

$$\text{onde } \nabla_t^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right] + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Dividindo a equação (1-6) por Φ , tem-se:

$$\frac{1}{\varphi} \nabla_t^2 \varphi(\theta, \rho) + N^2 k^2 + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0 \quad (1-7).$$

Como φ é função de $(\theta$ e $\rho)$ e Z é função apenas de z , a equação (1-7) deverá satisfazer à seguinte condição:

$$\frac{1}{\varphi} \nabla_t^2 \varphi(\theta, \rho) + N^2 k^2 = -\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \beta^2 \quad (1-8),$$

onde β , a constante de separação de variáveis, é a constante de propagação do modo. Logo, a equação (1-8) pode ser dada por:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \beta^2 Z = 0 \quad (1-9)$$

$$\nabla_t^2 \varphi + [N^2 k^2 - \beta^2] \varphi = 0 \quad (1-10).$$

A equação (1-9) tem como solução:

$$Z = Z_0 e^{-i\beta z} \quad (1-11).$$

Na equação (1-10) faz-se outra vez o uso do método da separação de variáveis, pois o índice de refração N depende apenas da variável ρ . Para isso usa-se a seguinte mudança, $\varphi = \Theta(\theta) R(\rho)$. Assim procedendo-se, chega-se à seguinte equação:

$$\frac{\Theta}{\rho} \left[\frac{dR}{d\rho} + \rho \frac{d^2 R}{d\rho^2} \right] + \frac{R}{\rho} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + [N^2 k^2 - \beta^2] \Theta R = 0 \quad (1-12).$$

Dividindo-se a equação (1-12) por $R \Theta$, obtém-se:

$$\frac{\rho^2}{R} \left\{ \left[\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} \right] + [N^2 k^2 - \beta^2] \right\} + \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = 0 \quad (1-13).$$

Como R e Θ são variáveis independentes, a eq.(1-13) leva às equações:

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} - \ell^2 \Theta = 0 \quad (1-14);$$

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left[N^2 k^2 - \beta^2 - \frac{\ell^2}{\rho^2} \right] R = 0 \quad (1-15);$$

onde ℓ é a constante do método de separação de variáveis. A equação (1-14) tem solução do tipo $\Theta = \Theta_0 e^{\pm i\ell\theta}$, que é uma solução oscilante do tipo $\sin(\ell\theta + \Theta_0)$ ou $\cos(\ell\theta + \Theta_0)$, sendo Θ_0 uma constante a ser determinada. Já a equação (1-15) é conhecida como equação diferencial de Bessel, cujas soluções gerais são dadas a seguir:

$$R(\rho) = \begin{cases} AJ_\ell\left(\frac{U_1\rho}{a}\right) + A^* Y_\ell\left(\frac{U_1\rho}{a}\right), & 0 < \rho < a \\ BK_\ell\left(\frac{W_2\rho}{a}\right) + B^* I_\ell\left(\frac{W_2\rho}{a}\right), & \rho > a \end{cases} \quad (1-16).$$

Então, a solução para a equação (1-1) será:

$$\Psi = R(\rho) \begin{cases} \cos(\ell\theta) \\ \sin(\ell\theta) \end{cases} \quad (1-17).$$

As constantes A^* e B^* são igualadas a zero, porque as funções de Bessel Y e I apresentam problemas de convergência. A função de Bessel, ref.[12] de segunda espécie diverge quando seu argumento tende a zero, enquanto a função modificada de Bessel de segunda espécie diverge para argumentos que tendam para infinito. Então, a solução será reduzida a:

$$\varphi(\theta, \rho) = \begin{cases} AJ_\ell\left(\frac{U_1\rho}{a}\right) \cos(\ell\theta), & 0 < \rho < a \\ BK_\ell\left(\frac{W_2\rho}{a}\right) \cos(\ell\theta), & \rho > a \end{cases} \quad (1-18).$$

Para que as funções apresentadas sejam soluções da eq.(1-15) os argumentos das funções de Bessel deverão ser:

$$U_1 = \left[k_o^2 N_1^2 - \beta^2 \right]^{1/2} a \quad \text{e} \quad W_2 = \left[\beta^2 - k_o^2 N_1^2 \right]^{1/2} a \quad (1-19),$$

sendo β a constante de propagação transversal do modo e $k_0 = \omega/c$, onde c é a velocidade da luz no vácuo. Seguindo a aproximação L P os campos existentes são considerados como polarizados linearmente da seguinte forma:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(0, E_y, E_z) \text{ e } \mathbf{H} = \mathbf{H}(H_x, 0, H_z) \quad (1-20);$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(E_x, 0, E_z) \text{ e } \mathbf{H} = \mathbf{H}(0, H_y, H_z) \quad (1-21).$$

Neste trabalho usa-se a primeira polarização, desta forma a solução para o campo elétrico é dada por:

$$E_y = \begin{cases} AJ_l \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \cos(l\theta) & \rho < a \\ BK_l \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \cos(l\theta) & \rho > a \end{cases} \quad (1-22).$$

Os argumentos das funções de Bessel serão escritos na forma:

$$U_1 = [N_1^2 - N^2]^{1/2} k_0 a \quad \text{e} \quad W_2 = [N^2 - N_2^2]^{1/2} k_0 a \quad (1-23);$$

onde N é o índice de refração efetivo, $N = \frac{\beta}{k}$, associado ao modo correspondente a β . A definição de N como índice de refração efetivo, indica que o modo propagante “vê”, não o índice de refração do meio mas N , que não poderá ser imaginário puro, pois a solução perderá sua característica de onda propagante. Logo o índice de refração efetivo indica o número de modos suportados pelo guia de ondas. Usando-se as equações de Maxwell, pode-se encontrar as outras componentes do campo elétrico que são E_z e E_θ , visto que $E_\rho = E_y$, como é demonstrado no apêndice B. As expressões para as demais componentes serão:

$$E_{\theta} = \begin{cases} AJ_{\ell}\left(\frac{U_1\rho}{a}\right)\cos(\ell\theta)\cos\theta ; & \rho < a \\ BK_{\ell}\left(\frac{W_2\rho}{a}\right)\cos(\ell\theta)\cos\theta ; & \rho > a \end{cases} \quad (1-24);$$

$$E_z = \begin{cases} -\frac{i}{k_0 N} \frac{U_1}{2a} A \left[J_{\ell-1}\left(\frac{U_1\rho}{a}\right)\sin(\ell-1)\theta + J_{\ell+1}\left(\frac{U_1\rho}{a}\right)\sin(\ell+1)\theta \right] ; & \rho < a \\ \frac{i}{k_0 N} \frac{W_2}{2a} B \left[K_{\ell-1}\left(\frac{W_2\rho}{a}\right)\sin(\ell-1)\theta + K_{\ell+1}\left(\frac{W_2\rho}{a}\right)\sin(\ell+1)\theta \right] ; & \rho > a \end{cases} \quad (1-25);$$

Impondo-se, às soluções encontradas, as condições de continuidade dos campos nas interfaces de separação de regiões de índices de refração diferentes, chega-se à seguinte equação transcendental:

$$\frac{J_{\ell}(U_1)}{U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1)} = \frac{K_{\ell}(W_2)}{W_2 K_{\ell\pm 1}(W_2)} \quad (1-26);$$

onde os argumentos U_1 e W_2 serão dados em função da frequência normalizada “ v ” e da constante normalizada de propagação “ B ” ref.[8], definidas a seguir;

$$v = [N_1^2 - N_2^2]^{1/2} k_0 a \quad \text{e} \quad B = \frac{N^2 - N_2^2}{N_1^2 - N_2^2} \quad (1-27).$$

Com elas a eq.(1-23), torna-se:

$$U_1 = [1 - B]^{1/2} v; \quad W_2 = B^{1/2} v \quad (1-28).$$

1 . 2 - 2 - Fibra tubo

A segunda estrutura a ser analisada será a da fibra tubo ref.[13], cuja distribuição de índice de refração é descrita na figura (1.2-2). A fibra tubo apresenta três índices de refração N_1 , N_2 , N_3 e duas dimensões a considerar, os raios a e b das duas regiões internas. As

soluções a serem encontradas, dependerão do intervalo de valores do índice de refração efetivo N . Como se vê na figura abaixo, há duas situações possíveis, indicadas por 1 e 2. Os cálculos para essa estrutura estão apresentados no apêndice B. Esta fibra possui outras estruturas, as quais não serão analisadas.

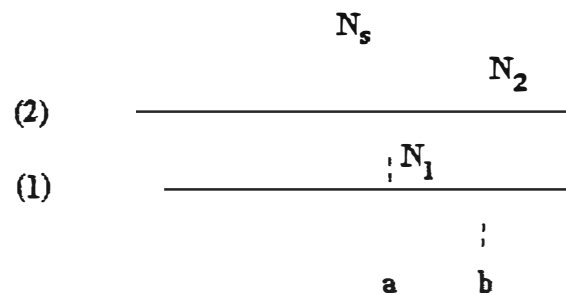


Fig. (1.2-2) Perfil do índice de refração para o guia tubo.

Para a situação (1), $N_3 < N < N_1$, as equações para as componentes do campo elétrico serão as seguintes:

$$E_y = \begin{cases} AJ_z \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \cos(\ell \theta); \\ \left[BJ_z \left(\frac{W_2 \rho}{b} \right) + CY_z \left(\frac{W_2 \rho}{b} \right) \right] \cos(\ell \theta); & a < \rho < b \\ DK_z \left(\frac{W_4 \rho}{b} \right) \cos(\ell \theta); & \rho > a \end{cases} \quad (1-29);$$

$$E_z = \begin{cases} -\frac{i}{kN} \frac{U_1}{2a} A \left[J_{\ell-1}\left(\frac{U_1\rho}{a}\right) \text{sen}(\ell-1)\theta + J_{\ell+1}\left(\frac{U_1\rho}{a}\right) \text{sen}(\ell+1)\theta \right]; & \rho < a \\ -\frac{i}{kN} \frac{W_2}{2b} \left\{ \left[BJ_{\ell-1}\left(\frac{W_2\rho}{b}\right) + CY_{\ell-1}\left(\frac{W_2\rho}{b}\right) \right] \text{sen}(\ell-1)\theta + \right. \\ \left. + \left[BJ_{\ell+1}\left(\frac{W_2\rho}{b}\right) + CY_{\ell+1}\left(\frac{W_2\rho}{b}\right) \right] \text{sen}(\ell+1)\theta \right\}; & a < \rho < b \\ -\frac{i}{kN} \frac{W_4}{2a} D \left[K_{\ell-1}\left(\frac{W_4\rho}{b}\right) \text{sen}(\ell-1)\theta - K_{\ell+1}\left(\frac{W_4\rho}{b}\right) \text{sen}(\ell+1)\theta \right]; & \rho > a \end{cases} \quad (1-30);$$

$$E_\theta = \begin{cases} AJ_\ell\left(\frac{U_1\rho}{a}\right) \cos(\ell\theta) \cos\theta; & \rho < a \\ \left[BJ_\ell\left(\frac{W_2\rho}{b}\right) + CY_\ell\left(\frac{W_2\rho}{b}\right) \right] \cos(\ell\theta) \cos\theta; & a < \rho < b \\ DK_\ell\left(\frac{W_4\rho}{b}\right) \cos(\ell\theta) \cos\theta; & \rho > a \end{cases} \quad (1-31).$$

Exigindo-se que as soluções, expressas nas equações (1-30) e (1-31), satisfaçam às condições de continuidade dos campos nas interfaces do guia, encontra-se a seguinte equação transcendental; confira apêndice B.

$$\frac{J_{\ell\pm 1}(W_3) \left[\frac{J_\ell(W_3)}{W_3 J_{\ell\pm 1}(W_3)} - \frac{J_\ell(U_1)}{U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1)} \right]}{Y_{\ell\pm 1}(W_3) \left[\frac{Y_\ell(W_3)}{W_3 Y_{\ell\pm 1}(W_3)} + \frac{J_\ell(U_1)}{U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1)} \right]} = \frac{J_{\ell\pm 1}(W_2) \left[\frac{K_\ell(W_4)}{W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)} \mp \frac{J_\ell(W_2)}{W_2 J_{\ell\pm 1}(W_2)} \right]}{Y_{\ell\pm 1}(W_2) \left[\frac{K_\ell(W_4)}{W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)} \mp \frac{Y_\ell(W_2)}{W_2 Y_{\ell\pm 1}(W_2)} \right]} \quad (1-32).$$

Os argumentos das funções de Bessel serão dados em função da frequência normalizada “v” e da constante de propagação normalizada “B”, definidas a seguir;

$$v = \left[N_2^2 - N_3^2 \right]^{\frac{1}{2}} k_c b \quad \text{e} \quad B = \frac{N^2 - N_3^2}{N_2^2 - N_3^2} \quad (1-33).$$

Então os argumentos U_i e W_i serão os seguintes:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \left[\frac{N_1^2 - N_3^2}{N_2^2 - N_3^2} - B \right]^{1/2} v \frac{a}{b}; & W_3 &= [1 - B]^{1/2} v \frac{a}{b}; \\
 W_2 &= [1 - B]^{1/2} v; & W_4 &= B^{1/2} v.
 \end{aligned} \tag{1-34}.$$

Fazendo-se o mesmo procedimento para a situação(2), $N_1 < N < N_2$, as equações para as componentes do campo elétrico serão as seguintes:

$$E_y = \begin{cases} AI_\ell \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \cos(\ell\theta); & \rho < a \\ \left[BJ_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{b} \right) + CY_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{b} \right) \right] \cos(\ell\theta); & a < \rho < b \\ DK_\ell \left(\frac{W_4 \rho}{b} \right) \cos(\ell\theta); & \rho > a \end{cases} \tag{1-35};$$

$$E_z = \begin{cases} -\frac{1}{kN} \frac{U_1}{2a} A \left[I_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \text{sen}(\ell-1)\theta - I_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \text{sen}(\ell+1)\theta \right]; & \rho < a \\ -\frac{1}{kN} \frac{W_2}{2b} \left\{ \left[BJ_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{b} \right) + CY_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{b} \right) \right] \text{sen}(\ell-1)\theta + \right. \\ \left. + \left[BJ_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{b} \right) + CY_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{b} \right) \right] \text{sen}(\ell+1)\theta \right\}; & a < \rho < b \\ \frac{1}{kN} \frac{W_4}{2a} D \left[K_{\ell-1} \left(\frac{W_4 \rho}{b} \right) \text{sen}(\ell-1)\theta - K_{\ell+1} \left(\frac{W_4 \rho}{b} \right) \text{sen}(\ell+1)\theta \right]; & \rho > a \end{cases} \tag{1-36};$$

$$E_\theta = \begin{cases} AI_\ell \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \cos(\ell\theta) \cos\theta; & \rho < a \\ \left[BJ_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{b} \right) + CY_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{b} \right) \right] \cos(\ell\theta) \cos\theta; & a < \rho < b \\ DK_\ell \left(\frac{W_4 \rho}{b} \right) \cos(\ell\theta) \cos\theta; & \rho > a \end{cases} \tag{1-37}.$$

Submetendo-se as soluções dadas nas equações (1-36) e (1-37) às condições de continuidade dos campos nas interfaces do guia, encontra-se a seguinte equação transcendental, conforme é mostrado no apêndice B.

$$\frac{J_{\ell\pm 1}(W_3) \left[\frac{J_{\ell}(W_3)}{W_3 J_{\ell\pm 1}(W_3)} \pm \frac{I_{\ell}(U_1)}{U_1 I_{\ell\pm 1}(U_1)} \right]}{Y_{\ell\pm 1}(W_3) \left[\frac{Y_{\ell}(W_3)}{W_3 Y_{\ell\pm 1}(W_3)} \pm \frac{I_{\ell}(U_1)}{U_1 I_{\ell\pm 1}(U_1)} \right]} = \frac{J_{\ell\pm 1}(W_2) \left[\frac{K_{\ell}(W_4)}{W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)} \mp \frac{J_{\ell}(W_2)}{W_2 J_{\ell\pm 1}(W_2)} \right]}{Y_{\ell\pm 1}(W_2) \left[\frac{K_{\ell}(W_4)}{W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)} \mp \frac{Y_{\ell}(W_2)}{W_2 Y_{\ell\pm 1}(W_2)} \right]} \quad (1-38).$$

Neste caso, os argumentos das funções de Bessel serão dadas em função da frequência normalizada “v” e da constante de propagação normalizada “B”, que são definidas a seguir;

$$v = [N_2^2 - N_3^2]^{\frac{1}{2}} k_0 b \quad \text{e} \quad B = \frac{N^2 - N_3^2}{N_2^2 - N_3^2} \quad (1-39).$$

Com isto, os argumentos U_i e W_i são dados pelas expressões:

$$\begin{aligned} U_1 &= \left[B - \frac{N_1^2 - N_3^2}{N_2^2 - N_3^2} \right]^{1/2} v \frac{a}{b}; & W_3 &= [1 - B]^{1/2} v \frac{a}{b}; \\ W_2 &= [1 - B]^{1/2} v; & W_4 &= B^{1/2} v. \end{aligned} \quad (1-40).$$

Para solucionar às equações (1-26), (1-32) e (1-38), são usados métodos numéricos com os quais pode-se calcular a dispersão característica e os perfis de campo e de intensidade dessas estruturas. Tais resultados serão apresentados a seguir.

1.3 - Resultados.

1.3 - 1 - Fibra bastão.

Mostra-se, a seguir, os resultados obtidos através de solução numérica.

A figura (1.3-1), é um diagrama de B versus v , ref.[8], para a fibra bastão.

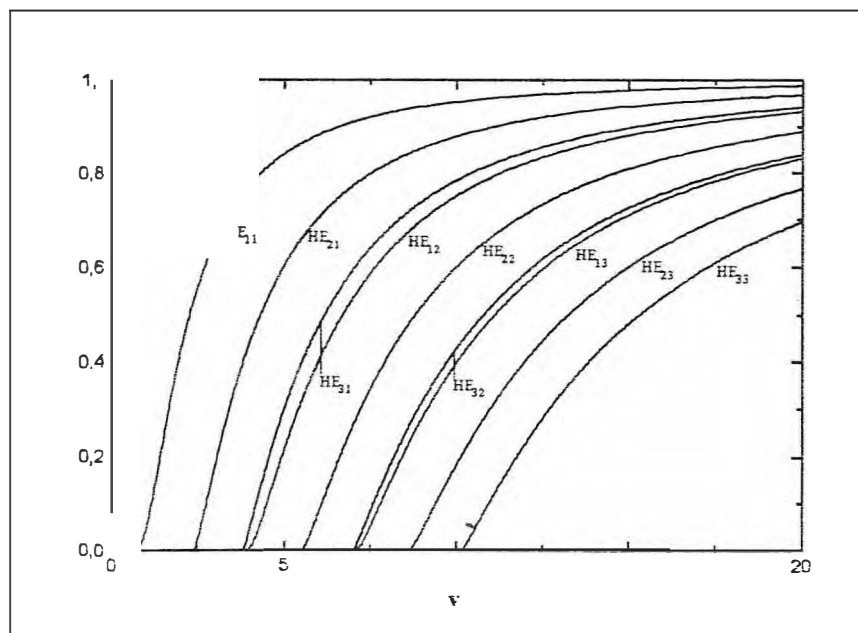


Fig. (1.3-1) Diagrama de B versus v , que mostra as curvas de dispersão.

As figuras (1.3-2) e (1.3-3) são os perfis de campo e de intensidade para o modo HE_{11} . Observa-se, neste caso, que o campo sofre uma deformação a medida ele percebe a diferença dos índices de refração. As figuras (1.3-4) e (1.3-5) são os perfis de campo e de intensidade para o modo HE_{12} .

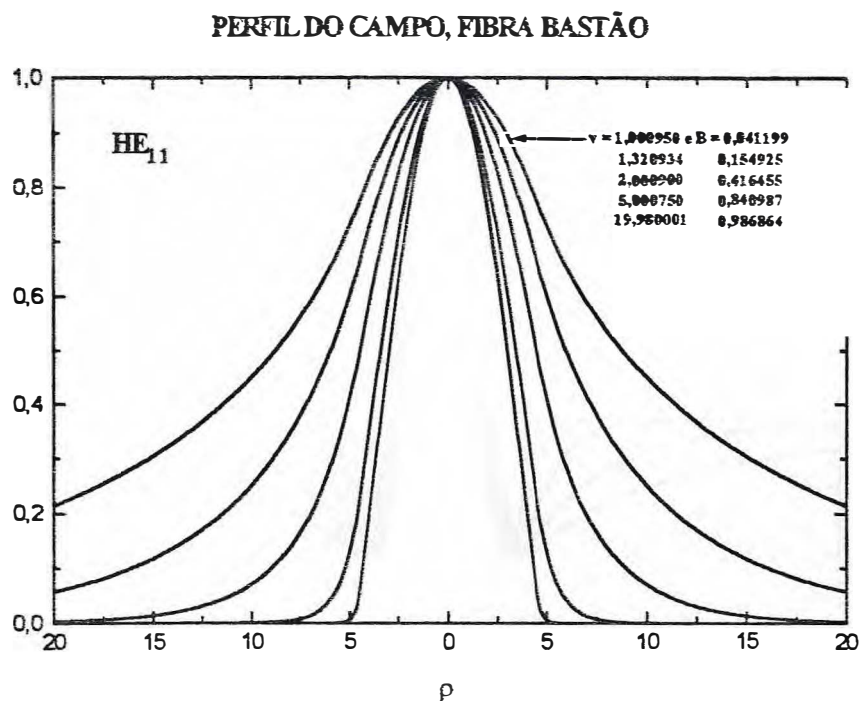


Fig. (1.3-2) Mostra o perfil do campo elétrico para o modo HE_{11}

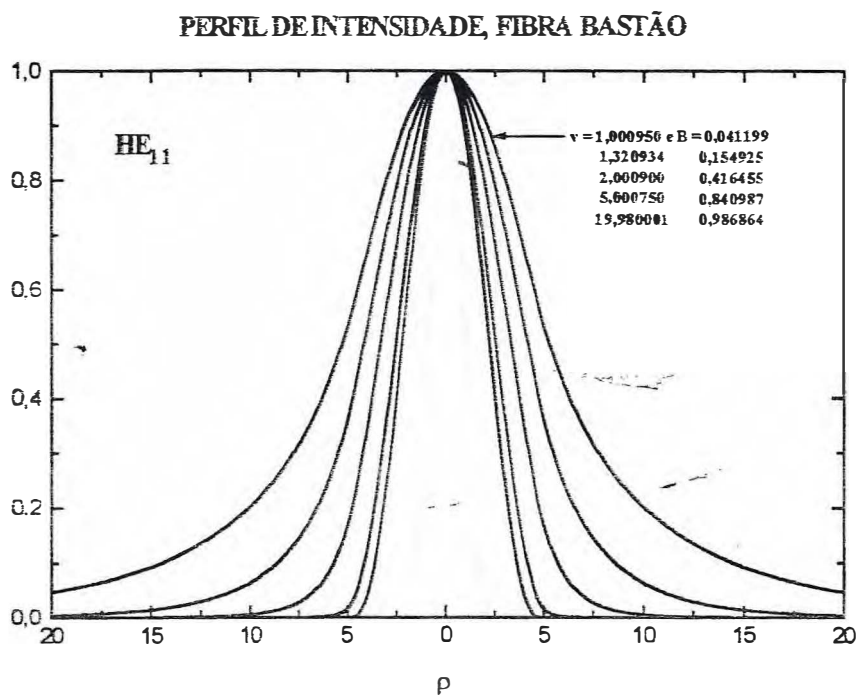


Fig. (1.3-3) Perfil de intensidade para o modo HE_{11}

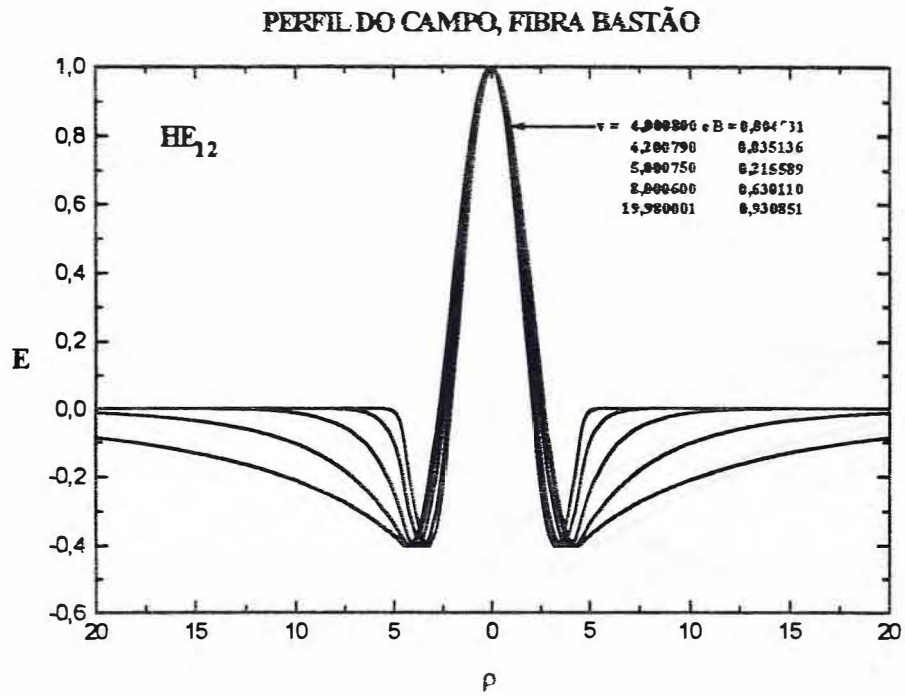


Fig. (1.3-4) Mostra o perfil do campo modo HE_{12}

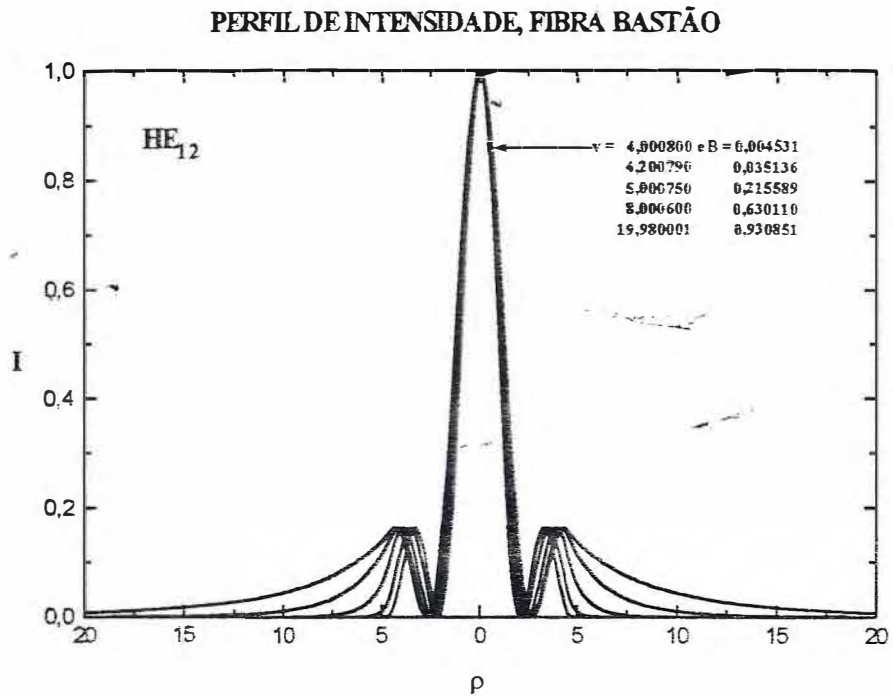


Fig. (1.3-5) Perfil de intensidade para o modo HE_{12}

1.3 - 2 - Fibra tubo

Os resultados apresentados a seguir foram obtidos através de resolução numérica das equações (1-32) e (1-38). A figura (1.3-6) mostra a curva de dispersão de B versus v .

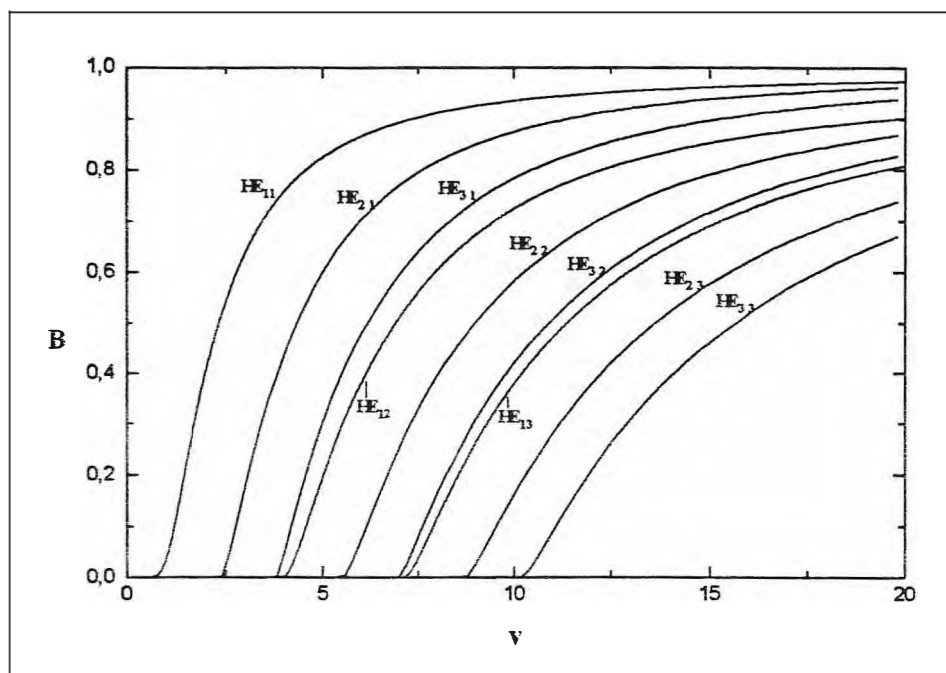


Fig.(1.3-6) Diagrama de B versus v .

As figuras (1.3-7) e (1.3-8) são os perfis de campo e intensidade para o modo HE_{11} , enquanto as figuras (1.3-9) e (1.3-10) apresentam os perfis de campo e intensidade para o modo HE_{12} . Analisando o comportamento do campo nessa estrutura, observa-se que para o modo HE_{11} a intensidade do campo está confinada na região onde o índice de refração é maior. Já o modo HE_{12} apresenta-se, em sua maior parte, fora desta região de confinamento.

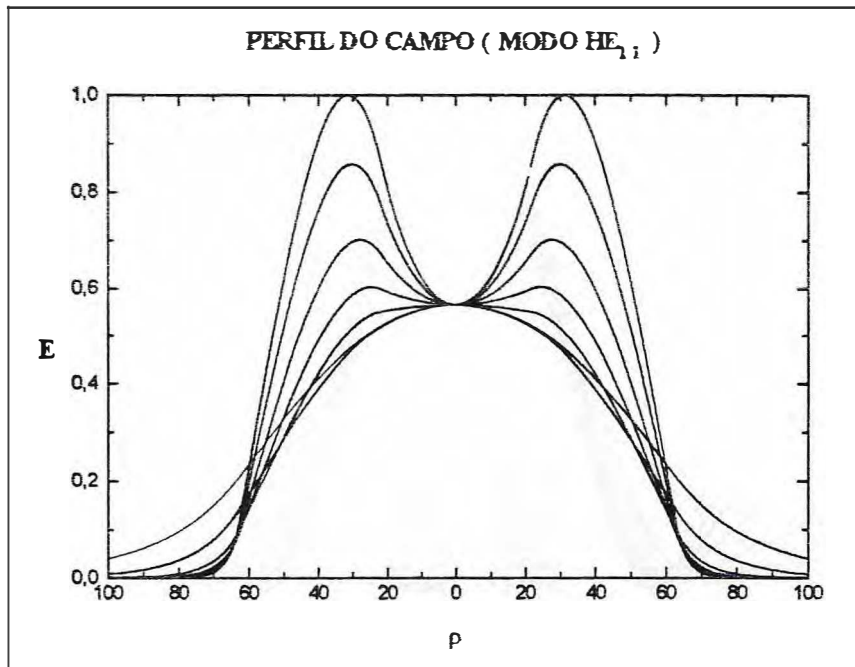


Fig. (1.3-7) Perfil de campo para o modo HE₁₁

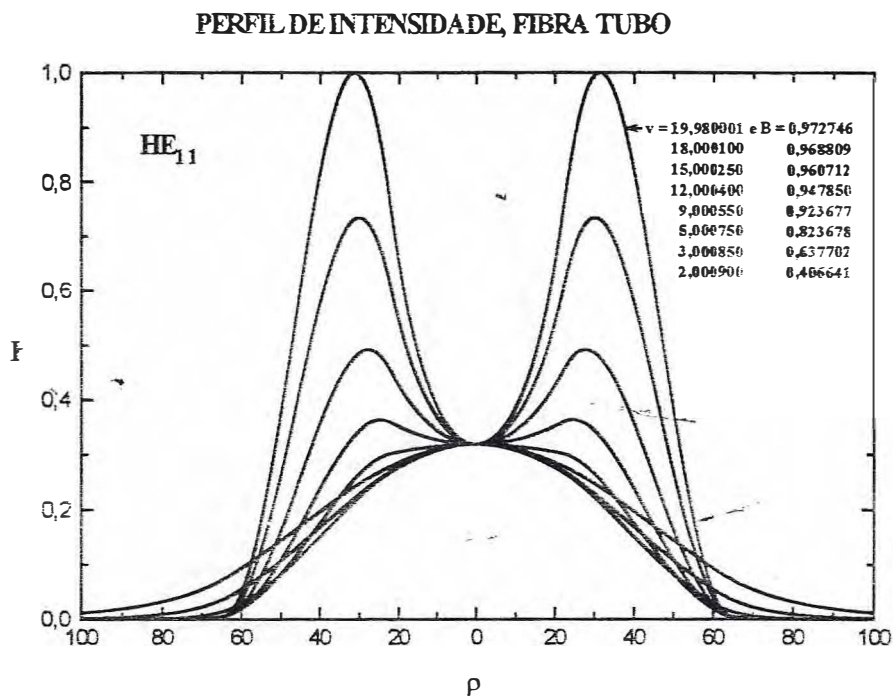


Fig. (1.3-8) Perfil de intensidade para o modo HE₁₁

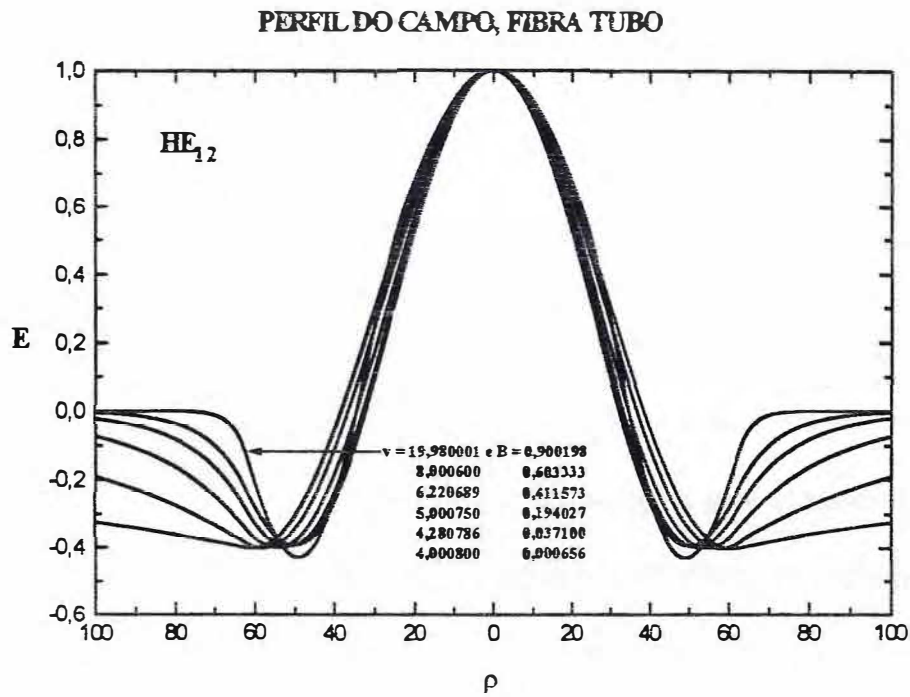


Fig.(1.3-9) Perfil de campo para o modo HE_{12} .

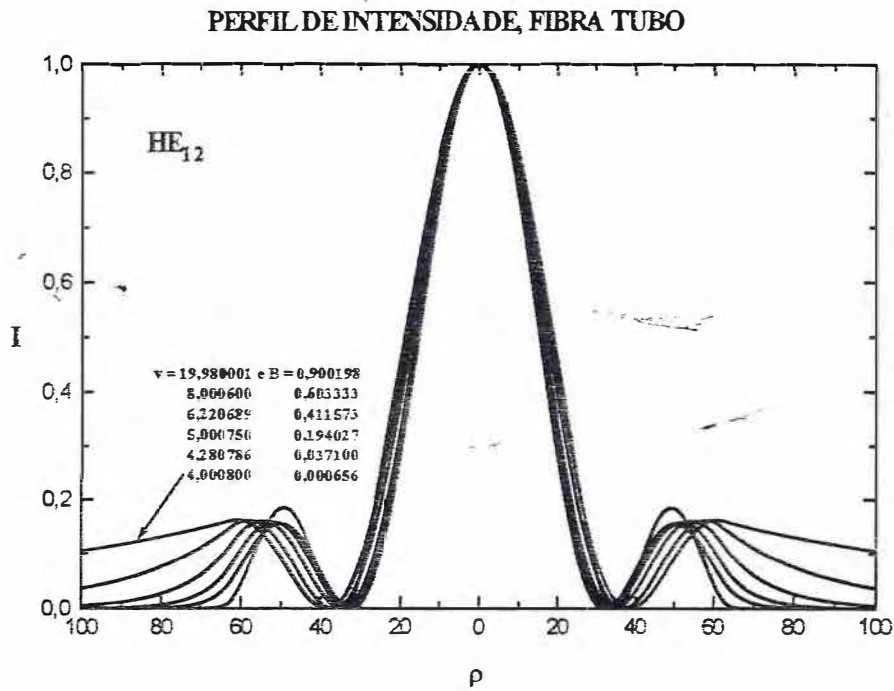


Fig.(1.3-10) Perfil de intensidade para o modo HE_{12} .

CAPÍTULO II

ANÁLISE TEÓRICA DA FIBRA COAXIAL

Neste capítulo analisa-se a fibra coaxial e seus diversos perfis de índices de refração, que definem várias estruturas. O método usado para analisar a fibra é a aproximação L P, ref.[9], vista no capítulo I e usado para a obtenção das soluções para as fibras bastão e tubo. Usando-se a condição de continuidade dos campos nas interfaces de separação entre as regiões de índices de refração diferentes do guia e realizando-se algumas operações matemáticas, o apêndice C, obtêm-se as equações transcendentais para a fibra coaxial. Para solucionar esta equação usa-se métodos numéricos, ref.[14], que conduzem à obtenção de alguns parâmetros, como a constante de propagação dos modos, que possibilita encontrar a dispersão característica.

2.1 - Perfis de índices de refração da fibra coaxial.

A fibra coaxial é composta de quatro regiões de índices de refração diferentes. No centro existe uma região chamada de **núcleo**, uma região intermediária chamada de **poço**, a região da **barreira** e a **casca**, ref.[5]. As diversas combinações de índices de refração leva a vários tipos de estruturas, como se observa na figura(2.1-1) abaixo.

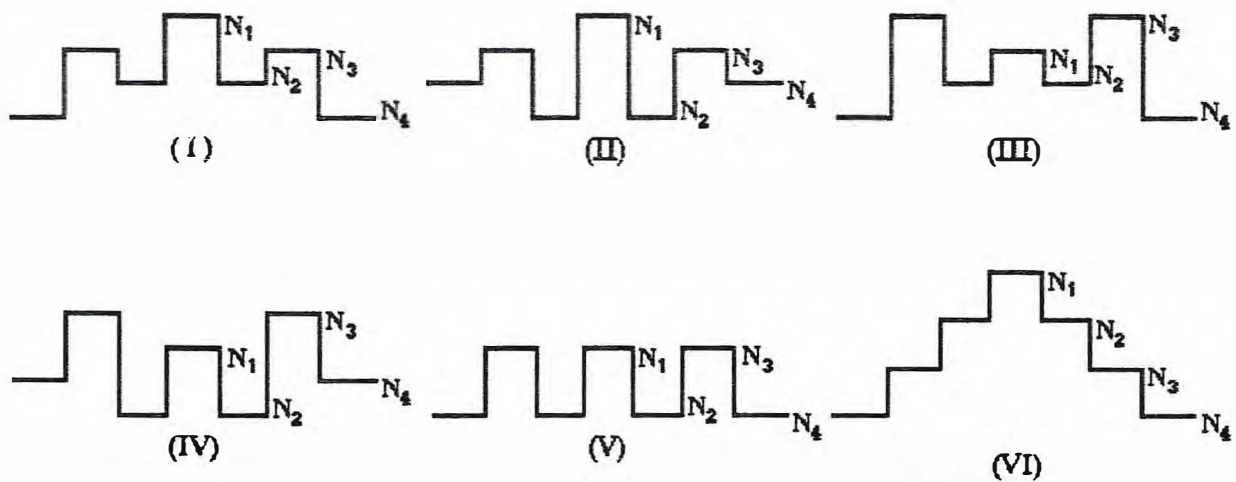


Fig.(2.1-1) Mostra dos perfis de índices de refração das diversas estruturas da fibra coaxial.

Serão estudadas as estruturas I, II, III e IV, enfatizando-se as estruturas I e III, pois suas soluções são as mais gerais. As demais estruturas serão casos particulares destas duas. A estrutura V foi estudada por Boucouvalas, ref.[5], com o método usado neste trabalho pode-se reproduzir os seus resultados. Já a estrutura VI, ref.[15], também pode ser analisada usando-se um procedimento semelhante ao anteriormente descrito.

2.2 - Fibra coaxial W, estruturas I e II

As estruturas I e II apresentam uma característica comum, a relação entre os índices de refração N_1 , N_2 e N_3 . Elas recebem a denominação de fibra coaxial W, ref.[4], devido à aparência do perfil dos índices. A figura (2.2-1) retrata alguns outros detalhes dessas estruturas.

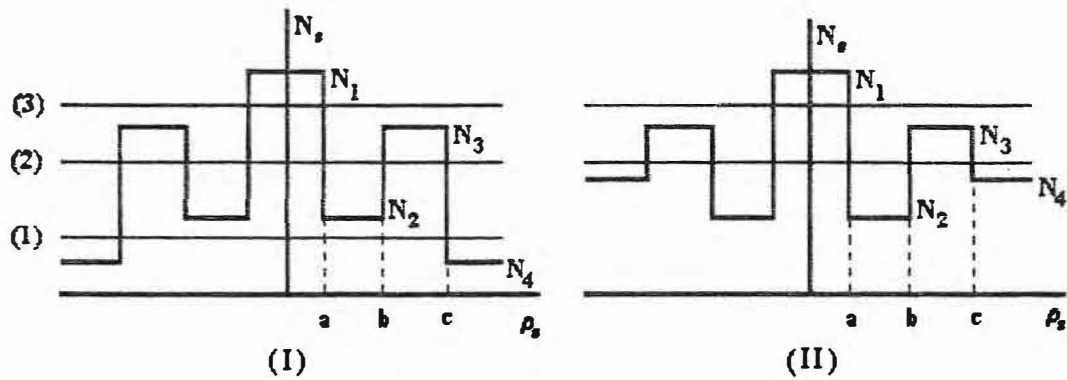


Fig. (2.2-1) Perfil das estruturas I e II, com seus respectivos situações.

2.2 - 1 - Estrutura W - I

Inicia-se a análise da fibra W pela estrutura I, pois as demais terão algumas de suas equações transcendentais iguais àquelas obtidas para esta estrutura, diferindo quanto aos argumentos das funções de Bessel. Na figura (2.2-1) observa-se que essa estrutura apresenta três situações a serem analisados quanto ao índice de refração efetivo. As soluções para a equação de onda neste caso é dada pelas componentes do campo elétrico a seguir:

Situação(1) $N_4 < N < N_2$

Eliminando-se as funções de Bessel que não satisfazem às condições de convergência nas quatro regiões da fibra, a componente do campo na direção y será dada por:

$$E_y = \begin{cases} AJ_{\ell} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \cos \ell \theta & ; 0 < \rho < a \\ \left[BJ_{\ell} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + CY_{\ell} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \cos \ell \theta & ; a < \rho < b \\ \left[DJ_{\ell} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EY_{\ell} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \cos \ell \theta & ; b < \rho < c \\ FK_{\ell} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \cos \ell \theta & ; c < \rho \end{cases} \quad (2-1).$$

A componente do campo elétrico na direção z, obtido pela expressão:

$$E_z \cong \frac{1}{kn} \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{1}{kn} \left[\operatorname{sen} \theta \frac{\partial E_y}{\partial \rho} + \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial E_y}{\partial \theta} \right] \quad (2-2);$$

será:

$$E_z = \begin{cases} -A \frac{iU_1}{2kan} \left\{ J_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \operatorname{sen}(\ell-1)\theta + J_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \operatorname{sen}(\ell+1)\theta \right\} \\ -\frac{iW_2}{2kan} \left\{ \left[BJ_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + CY_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \operatorname{sen}(\ell-1)\theta + \left[BJ_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + CY_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \operatorname{sen}(\ell+1)\theta \right\} \\ -\frac{iU_3}{2kbn} \left\{ \left[DJ_{\ell-1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EY_{\ell-1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \operatorname{sen}(\ell-1)\theta + \left[DJ_{\ell+1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EY_{\ell+1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \operatorname{sen}(\ell+1)\theta \right\} \\ F \frac{iW_4}{2kcn} \left\{ K_{\ell-1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \operatorname{sen}(\ell-1)\theta - K_{\ell+1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \operatorname{sen}(\ell+1)\theta \right\}. \end{cases} \quad (2-3).$$

A componente do campo na direção θ , por sua vez, é dada pela expressão:

$$E_{\theta} \cong E_y \cos \theta \quad (2-4)$$

$$E_{\theta} = \begin{cases} AJ_{\ell}\left(\frac{U_1\rho}{a}\right) \cos \ell\theta \cos \theta & ; 0 < \rho < a \\ \left[BJ_{\ell}\left(\frac{W_2\rho}{a}\right) + CY_{\ell}\left(\frac{W_2\rho}{a}\right) \right] \cos \ell\theta \cos \theta & ; a < \rho < b \\ \left[DJ_{\ell}\left(\frac{U_3\rho}{b}\right) + EY_{\ell}\left(\frac{U_3\rho}{b}\right) \right] \cos \ell\theta \cos \theta & ; b < \rho < c \\ FK_{\ell}\left(\frac{W_4\rho}{c}\right) \cos \ell\theta \cos \theta & ; c < \rho. \end{cases} \quad (2-5)$$

Os detalhes de cálculos das componentes E_z e E_{θ} são apresentados nos apêndice C. Os argumentos das funções de Bessel usados nas eqs. (2-1), (2-3) e (2-5) são dados a seguir:

$$\begin{aligned} U_1 &= [k_0^2 N_1^2 - \beta^2]^{1/2} a; & W_2 &= [k_0^2 N_2^2 - \beta^2]^{1/2} a; \\ U_3 &= [k_0^2 N_3^2 - \beta^2]^{1/2} b; & W_3 &= [k_0^2 N_2^2 - \beta^2]^{1/2} b; \\ U_4 &= [k_0^2 N_3^2 - \beta^2]^{1/2} c; & W_4 &= [\beta^2 - k_0^2 N_4^2]^{1/2} c. \end{aligned} \quad (2-6).$$

Impondo-se a condição de continuidade dos campos nas interfaces do guia, obtêm-se a seguinte equação transcendental:

$$\begin{aligned} \frac{J_{\ell\pm 1}(U_4)}{Y_{\ell\pm 1}(U_4)} \left| \frac{J_{\ell}(U_4)}{U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4)} \mp \frac{K_{\ell}(W_4)}{W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)} \right| & \frac{Y_{\ell\pm 1}(W_3)}{Y_{\ell\pm 1}(W_2)} \left| \frac{Y_{\ell}(U_3)}{U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3)} - \frac{Y_{\ell}(W_3)}{W_3 Y_{\ell\pm 1}(W_3)} \right| + \\ & \frac{Y_{\ell\pm 1}(W_3)}{Y_{\ell\pm 1}(W_2)} \left| \frac{J_{\ell}(U_1)}{U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1)} - \frac{Y_{\ell}(W_2)}{W_2 Y_{\ell\pm 1}(W_2)} \right| + \\ \frac{J_{\ell\pm 1}(U_4)}{Y_{\ell\pm 1}(U_4)} \left| \frac{Y_{\ell}(U_4)}{U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4)} \mp \frac{K_{\ell}(W_4)}{W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)} \right| & \frac{J_{\ell\pm 1}(W_3)}{J_{\ell\pm 1}(W_2)} \left| \frac{Y_{\ell}(U_3)}{U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3)} - \frac{J_{\ell}(W_3)}{W_3 J_{\ell\pm 1}(W_3)} \right| = \\ & \frac{J_{\ell\pm 1}(W_3)}{J_{\ell\pm 1}(W_2)} \left| \frac{J_{\ell}(U_1)}{U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1)} - \frac{J_{\ell}(W_2)}{W_2 J_{\ell\pm 1}(W_2)} \right| \end{aligned} \quad (2-7).$$

$$- \frac{J_{\ell\pm 1}(U_3)}{Y_{\ell\pm 1}(U_3)} \left| \frac{Y_{\ell\pm 1}(W_3)}{Y_{\ell\pm 1}(W_2)} \left| \frac{J_{\ell}(U_3)}{U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3)} - \frac{Y_{\ell}(W_3)}{W_3 Y_{\ell\pm 1}(W_3)} \right| - \frac{J_{\ell\pm 1}(W_3)}{J_{\ell\pm 1}(W_2)} \left| \frac{J_{\ell}(U_1)}{U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1)} - \frac{J_{\ell}(W_2)}{W_2 J_{\ell\pm 1}(W_2)} \right| \right|$$

Os detalhes de cálculo podem ser encontrados no apêndice C.

A frequência normalizada v e da constante normalizada de propagação B , são definidas por:

$$v = (N_1^2 - N_4^2)^{1/2} k_0 c \quad \text{e} \quad B = \frac{N^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \quad (2-8).$$

onde $N = \frac{\beta}{k}$ é o índice de refração efetivo, como foi definido no capítulo I, A partir disto, os

parâmetros U_i e W_i podem ser escritos na forma:

$$\begin{aligned} W_2 &= \left[\left(\frac{N_2^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} - B \right)^{1/2} v \frac{a}{c} \right]; & U_3 &= \left[\left(\frac{N_3^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} - B \right)^{1/2} v \frac{b}{c} \right]; \\ W_3 &= \left[\left(\frac{N_2^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} - B \right)^{1/2} v \frac{b}{c} \right]; & U_4 &= \left[\left(\frac{N_3^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} - B \right)^{1/2} v \right]; \\ W_4 &= B^{1/2} v; & U_1 &= [1 - B]^{1/2} v \frac{a}{c}. \end{aligned} \quad (2-9).$$

Situação(2) $N_2 < N < N_3$

Para este caso a componente do campo elétrico na direção y será:

$$\begin{aligned} & A J_0 \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \cos \ell \theta & ; & 0 < \rho < a \\ E_y &= \left[B I_0 \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + C K_0 \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \cos \ell \theta & ; & a < \rho < b \\ & \left[D J_0 \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + E Y_0 \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \cos \ell \theta & ; & b < \rho < c \\ & F K_0 \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \cos \ell \theta & ; & c < \rho \end{aligned} \quad (2-10).$$

A partir de E_y obtêm-se as componentes do campo elétrico nas direções z e θ . Os detalhes de cálculos estão no apêndice C. Têm-se:

$$E_z = \begin{cases} -A \frac{iU_1}{kn2a} \left\{ J_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \text{sen}(\ell-1)\theta + J_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \text{sen}(\ell+1)\theta \right\} \\ - \frac{iW_2}{kn2a} \left\{ \left[\text{BI}_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) - \text{CK}_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \text{sen}(\ell-1)\theta - \left[\text{BI}_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) - \text{CK}_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \text{sen}(\ell+1)\theta \right\} \\ - \frac{iU_3}{kn2b} \left\{ \left[\text{DJ}_{\ell-1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + \text{EY}_{\ell-1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \text{sen}(\ell-1)\theta + \left[\text{DJ}_{\ell+1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + \text{EY}_{\ell+1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \text{sen}(\ell+1)\theta \right\} \\ F \frac{iW_4}{kn2c} \left\{ \text{K}_{\ell-1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \text{sen}(\ell-1)\theta - \text{K}_{\ell+1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \text{sen}(\ell+1)\theta \right\}. \end{cases} \quad (2-11).$$

A componente do campo na direção θ é dada por:

$$E_\theta = \begin{cases} \text{AJ}_\ell \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \cos \ell \theta \cos \theta & ; 0 < \rho < a \\ \left[\text{BI}_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + \text{CK}_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \cos \ell \theta \cos \theta & ; a < \rho < b \\ \left[\text{DJ}_\ell \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + \text{EY}_\ell \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \cos \ell \theta \cos \theta & ; b < \rho < c \\ \text{FK}_\ell \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \cos \ell \theta \cos \theta & ; c < \rho. \end{cases} \quad (2-12).$$

Onde os argumentos das funções de Bessel são:

$$\begin{aligned} W_2 &= [\beta^2 - k_o^2 N_2^2]^{1/2} a; & U_1 &= [k_o^2 N_1^2 - \beta^2]^{1/2} a; \\ W_3 &= [\beta^2 - k_o^2 N_3^2]^{1/2} b; & U_3 &= [k_o^2 N_3^2 - \beta^2]^{1/2} b; \\ W_4 &= [\beta^2 - k_o^2 N_4^2]^{1/2} c; & U_4 &= [k_o^2 N_3^2 - \beta^2]^{1/2} c. \end{aligned} \quad (2-13).$$

Novamente, impondo-se a condição de continuidade dos campos nas interfaces de índices de refração diferentes da fibra coaxial, obtém-se a equação transcendental dada abaixo:

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{J_{t\pm 1}(U_4)}{Y_{t\pm 1}(U_4)} \left[\frac{J_t(U_4)}{U_4 J_{t\pm 1}(U_4)} \mp \frac{K_t(W_4)}{W_4 K_{t\pm 1}(W_4)} \right] \right\} \left[\frac{K_{t\pm 1}(W_3)}{K_{t\pm 1}(W_2)} \left[\frac{Y_t(U_3)}{U_3 Y_{t\pm 1}(U_3)} - \frac{K_t(W_3)}{W_3 K_{t\pm 1}(W_3)} \right] \mp \frac{J_t(U_1)}{U_1 J_{t\pm 1}(U_1)} + \frac{K_t(W_2)}{W_2 K_{t\pm 1}(W_2)} \right] + \\
 & \left. \frac{Y_t(U_4)}{U_4 Y_{t\pm 1}(U_4)} \mp \frac{K_t(W_4)}{W_4 K_{t\pm 1}(W_4)} \right\} \left[\frac{I_{t\pm 1}(W_3)}{I_{t\pm 1}(W_2)} \left[\frac{Y_t(U_3)}{U_3 Y_{t\pm 1}(U_3)} \pm \frac{I_t(W_3)}{W_3 I_{t\pm 1}(W_3)} \right] \mp \frac{J_t(U_1)}{U_1 J_{t\pm 1}(U_1)} \pm \frac{I_t(W_2)}{W_2 I_{t\pm 1}(W_2)} \right] = \\
 & = \frac{J_{t\pm 1}(U_3)}{Y_{t\pm 1}(U_3)} \left[\frac{K_{t\pm 1}(W_3)}{K_{t\pm 1}(W_2)} \left[\frac{J_t(U_3)}{U_3 J_{t\pm 1}(U_3)} - \frac{K_t(W_3)}{W_3 K_{t\pm 1}(W_3)} \right] - \frac{I_{t\pm 1}(W_3)}{I_{t\pm 1}(W_2)} \left[\frac{J_t(U_3)}{U_3 J_{t\pm 1}(U_3)} \pm \frac{I_t(W_3)}{W_3 I_{t\pm 1}(W_3)} \right] \right] \\
 & \left. \left[\frac{K_{t\pm 1}(W_2)}{K_{t\pm 1}(W_2)} \mp \frac{J_t(U_1)}{U_1 J_{t\pm 1}(U_1)} + \frac{K_t(W_2)}{W_2 K_{t\pm 1}(W_2)} \right] - \frac{I_{t\pm 1}(W_2)}{I_{t\pm 1}(W_2)} \left[\frac{J_t(U_1)}{U_1 J_{t\pm 1}(U_1)} \pm \frac{I_t(W_2)}{W_2 I_{t\pm 1}(W_2)} \right] \right\} =
 \end{aligned} \tag{2-14}$$

Substituindo-se a eq.(2-8) na eq.(2-13), encontra-se as seguintes expressões para os argumentos U_i e W_i :

$$\begin{aligned}
 W_2 &= \left[B - \left(\frac{N_2^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{a}{c}, & U_3 &= \left[\left(\frac{N_3^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right) - B \right]^{1/2} v \frac{b}{c}, \\
 W_3 &= \left[B - \left(\frac{N_2^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{b}{c}, & U_4 &= \left[\left(\frac{N_3^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right) - B \right]^{1/2} v, \\
 W_4 &= B^{1/2} v, & U_1 &= [1 - B]^{1/2} v \frac{a}{c}.
 \end{aligned} \tag{2-15}$$

Situação(3) $N_3 < N < N_1$

A componente E_y será dada a seguir:

$$E_y = \begin{cases} AJ_\ell \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \cos \ell \theta & ; 0 < \rho < a \\ \left[BI_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + CK_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \cos \ell \theta & ; a < \rho < b \\ \left[DI_\ell \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EK_\ell \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \cos \ell \theta & ; b < \rho < c \\ FK_\ell \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \cos \ell \theta & ; c < \rho \end{cases} \quad (2-16).$$

Com a componente E_y e as expressões (2-2) e (2-4), obtêm-se as seguintes expressões para as componentes E_z e E_θ .

$$E_z = \begin{cases} -A \frac{iU_1}{kn2a} \left\{ J_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \operatorname{sen}(\ell-1)\theta + J_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \operatorname{sen}(\ell+1)\theta \right\} \\ - \frac{iW_2}{kn2a} \left\{ \left[BI_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) - CK_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \operatorname{sen}(\ell-1)\theta - \left[BI_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) - CK_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \operatorname{sen}(\ell+1)\theta \right\} \\ - \frac{iU_3}{kn2b} \left\{ \left[DI_{\ell-1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) - EK_{\ell-1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \operatorname{sen}(\ell-1)\theta - \left[DI_{\ell+1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) - EK_{\ell+1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \operatorname{sen}(\ell+1)\theta \right\} \\ F \frac{iW_4}{kn2c} \left\{ K_{\ell-1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \operatorname{sen}(\ell-1)\theta - K_{\ell+1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \operatorname{sen}(\ell+1)\theta \right\}. \end{cases} \quad (2-17),$$

$$E_\theta = \begin{cases} AJ_\ell \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \cos \ell \theta \cos \theta & ; 0 < \rho < a \\ \left[BI_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + CK_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \cos \ell \theta \cos \theta & ; a < \rho < b \\ \left[DI_\ell \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EK_\ell \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \cos \ell \theta \cos \theta & ; b < \rho < c \\ FK_\ell \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \cos \ell \theta \cos \theta & ; c < \rho. \end{cases} \quad (2-18).$$

Os argumentos das funções de Bessel serão os seguintes:

$$\begin{aligned}
 W_2 &= [\beta^2 - k_0^2 N_2^2]^{1/2} a; & U_1 &= [k_0^2 N_1^2 - \beta^2]^{1/2} a; \\
 W_3 &= [\beta^2 - k_0^2 N_3^2]^{1/2} b; & U_3 &= [\beta^2 - k_0^2 N_3^2]^{1/2} b; \\
 W_4 &= [\beta^2 - k_0^2 N_4^2]^{1/2} c; & U_4 &= [\beta^2 - k_0^2 N_4^2]^{1/2} c.
 \end{aligned} \tag{2-19}$$

Fazendo-se a mesma imposição de continuidade dos campos chega-se à seguinte equação transcendental:

$$\begin{aligned}
 & \left. \left[\frac{I_{\ell+1}(U_4)}{K_{\ell+1}(U_4)} \left[\frac{I_\ell(U_4)}{U_4 I_{\ell+1}(U_4)} + \frac{K_\ell(W_4)}{W_4 K_{\ell+1}(W_4)} \right] \right] \right\} + \left. \left[\frac{K_{\ell+1}(W_3)}{K_{\ell+1}(W_2)} \left[\frac{K_\ell(W_3)}{W_3 K_{\ell+1}(W_3)} - \frac{K_\ell(U_3)}{U_3 K_{\ell+1}(U_3)} \right] \right] \right\} + \\
 & \left. \left[\frac{I_{\ell+1}(U_3)}{K_{\ell+1}(U_3)} \left[\frac{I_\ell(U_3)}{U_3 I_{\ell+1}(U_3)} - \frac{K_\ell(W_4)}{W_4 K_{\ell+1}(W_4)} \right] \right] \right\} + \left. \left[\frac{I_{\ell+1}(W_3)}{I_{\ell+1}(W_2)} \left[\frac{I_\ell(W_3)}{W_3 I_{\ell+1}(W_3)} - \frac{K_\ell(U_3)}{U_3 K_{\ell+1}(U_3)} \right] \right] \right\} = \\
 & = \left. \left[\frac{I_{\ell+1}(U_3)}{K_{\ell+1}(U_3)} \left[\frac{K_{\ell+1}(W_3)}{K_{\ell+1}(W_2)} \left[\frac{K_\ell(W_3)}{W_3 K_{\ell+1}(W_3)} - \frac{I_\ell(U_3)}{U_3 I_{\ell+1}(U_3)} \right] \right] \right] \right\} + \left. \left[\frac{I_{\ell+1}(W_3)}{I_{\ell+1}(W_2)} \left[\frac{I_\ell(W_3)}{W_3 I_{\ell+1}(W_3)} - \frac{I_\ell(U_3)}{U_3 I_{\ell+1}(U_3)} \right] \right] \right\} \\
 & = \left. \left[\frac{I_{\ell+1}(U_3)}{K_{\ell+1}(U_3)} \left[\frac{K_{\ell+1}(W_3)}{K_{\ell+1}(W_2)} \left[\frac{K_\ell(W_3)}{W_3 K_{\ell+1}(W_3)} \pm \frac{J_\ell(U_1)}{U_1 J_{\ell+1}(U_1)} \right] \right] \right] \right\} + \left. \left[\frac{I_{\ell+1}(W_3)}{I_{\ell+1}(W_2)} \left[\frac{I_\ell(W_3)}{W_3 I_{\ell+1}(W_3)} \pm \frac{J_\ell(U_1)}{U_1 J_{\ell+1}(U_1)} \right] \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{2-20}$$

As funções de Bessel têm os seguintes argumentos:

$$\begin{aligned}
 w_2 &= \left[B - \left(\frac{N_2^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{a}{c}, & U_3 &= \left[B - \left(\frac{N_3^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{b}{c}, \\
 w_3 &= \left[B - \left(\frac{N_2^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{b}{c}, & U_4 &= \left[B - \left(\frac{N_3^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v, \\
 w_4 &= B^{1/2} v, & U_1 &= [1 - B]^{1/2} v \frac{a}{c},
 \end{aligned} \tag{2-21}$$

Todos os detalhes de cálculos deste tópico estão no apêndice C.

2.2.2 - Estrutura W - II

A estrutura II é um caso particular da estrutura I. A diferença está na relação entre os índices de refração N_2 e N_4 pois, na estrutura II têm-se $N_2 < N_4$, enquanto na estrutura I a relação é $N_2 > N_4$. Essa condição implica em uma modificação nos argumentos das funções de Bessel. Logo, para esta estrutura, têm-se duas situações:

Situação(1) $N_4 < N < N_3$

Neste caso a equação transcendental é igual à eq.(2-14). A diferença fundamental está nos parâmetros U_i e W_i , os quais em função da constante de propagação normalizada B e da frequência normalizada v , dadas pela eq.(2-8), são definidos a seguir:

$$\begin{aligned}
 W_2 &= B + \left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_1^2 - N_4^2} \right)^{1/2} v \frac{a}{c}, & U_3 &= \left[\left(\frac{N_3^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right) - B \right]^{1/2} v \frac{b}{c}, \\
 W_3 &= B + \left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_1^2 - N_4^2} \right)^{1/2} v \frac{b}{c}, & U_4 &= \left[\left(\frac{N_3^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right) - B \right]^{1/2} v, \\
 W_4 &= B^{1/2} v, & U_1 &= [1 - B]^{1/2} v \frac{b}{c}.
 \end{aligned} \tag{2-22}$$

Situação(2) $N_3 < N < N_1$

Para esta situação a equação transcendental é idêntica à eq.(2-20), diferindo apenas quanto aos argumentos das funções de Bessel que são:

$$\begin{aligned}
 W_2 &= \left[B + \left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_1^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{a}{c}, & U_3 &= \left[B - \left(\frac{N_3^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{b}{c}, \\
 W_3 &= \left[B + \left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_1^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{b}{c}, & U_4 &= \left[B - \left(\frac{N_3^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v, \\
 W_4 &= B^{1/2} v, & U_1 &= [1 - B]^{1/2} v \frac{b}{c}.
 \end{aligned}
 \tag{2-23}$$

Obtidas as equações transcendentais para este tipo de estrutura W, se está em condições de obter os parâmetros desejados: dispersão, distribuição de campo e intensidade.

2.3 - Fibra coaxial M, estruturas III e IV

Essas estruturas, III e IV, apresentam uma característica comum, pois a relação entre os índices N_1 e N_3 , é tal $N_1 < N_3$. Devido a essa condição, vamos denominá-la de fibra coaxial de fibra tipo M. As fibras W e M coincidem em alguns aspectos, tais como as equações transcendentais das situações (1) e (2).

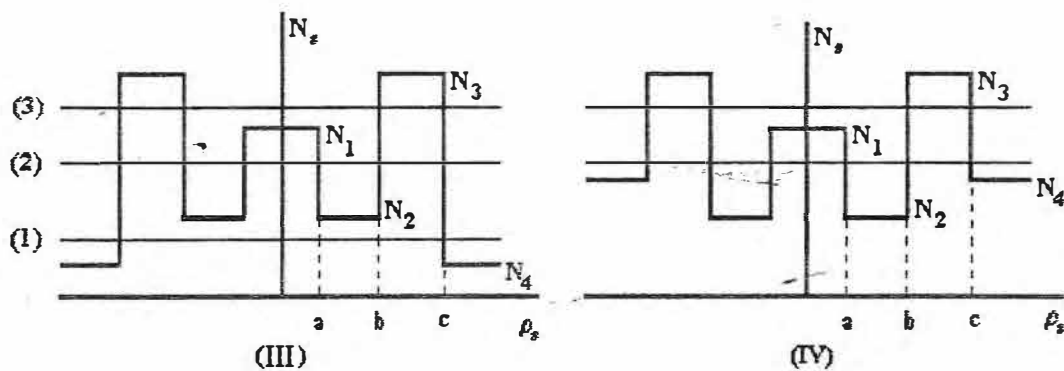


Fig.(2.1-3) Perfil das estruturas III e IV, com suas respectivas situações quanto ao índice de refração efetivo

Já a frequência normalizada v e a constante de propagação normalizada B são diferentes.

Suas novas definições são dadas logo abaixo.

$$v = (N_3^2 - N_4^2)^{1/2} k_0 c \quad \text{e} \quad B = \frac{N^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \quad (2-24).$$

2.3 - 1 - Estrutura M - III

A seguir são analisadas as situações dessa estrutura.

Situação(1) $N_4 < N < N_2$

Nesta situação a equação transcendental é idêntica à eq.(2-7), diferindo pelos parâmetros U_i e W_i os quais são mostrados abaixo;

$$\begin{aligned} W_2 &= \left[\left(\frac{N_2^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right) - B \right]^{1/2} v \frac{a}{c}, & U_1 &= \left[\left(\frac{N_1^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right) - B \right]^{1/2} v \frac{a}{c}, \\ W_3 &= \left[\left(\frac{N_2^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right) - B \right]^{1/2} v \frac{b}{c}, & U_3 &= [1 - B]^{1/2} v \frac{b}{c}, \\ W_4 &= B^{1/2} v, & U_4 &= [1 - B]^{1/2} v. \end{aligned} \quad (2-25).$$

Situação(2) $N_2 < N < N_1$

Para esta situação a equação (2-14) e os argumentos das funções de Bessel, definidos abaixo, descrevem as características desse caso.

$$\begin{aligned}
 W_2 &= \left[B - \left(\frac{N_2^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{a}{c}, & U_1 &= \left[\left(\frac{N_1^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right) - B \right]^{1/2} v \frac{a}{c}, \\
 W_3 &= \left[B - \left(\frac{N_2^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{b}{c}, & U_3 &= [1 - B]^{1/2} v \frac{b}{c}, \\
 W_4 &= B^{1/2} v, & U_4 &= [1 - B]^{1/2} v.
 \end{aligned} \tag{2-26}.$$

Situação(3) $N_1 < N < N_3$

A componente do campo elétrico na direção y será

$$E_y = \begin{cases} AI_\ell \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \cos \ell \theta & ; 0 < \rho < a \\ \left[BI_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + CK_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \cos \ell \theta & ; a < \rho < b \\ \left[DJ_\ell \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EY_\ell \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \cos \ell \theta & ; b < \rho < c \\ FK_\ell \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \cos \ell \theta & ; c < \rho \end{cases} \tag{2-27}.$$

As componentes E_z e E_θ , obtidas no apêndice C, serão as seguintes:

$$E_z = \begin{cases} -A \frac{iU_1}{kn2a} \left\{ I_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \operatorname{sen}(\ell-1)\theta - I_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \operatorname{sen}(\ell+1)\theta \right\} \\ -\frac{iW_2}{kn2a} \left\{ \left[BI_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) - CK_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \operatorname{sen}(\ell-1)\theta - \left[BI_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) - CK_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \operatorname{sen}(\ell+1)\theta \right\} \\ -\frac{iU_3}{kn2b} \left\{ \left[DJ_{\ell-1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EY_{\ell-1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \operatorname{sen}(\ell-1)\theta + \left[DJ_{\ell+1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EY_{\ell+1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \operatorname{sen}(\ell+1)\theta \right\} \\ F \frac{iW_4}{kn2c} \left\{ K_{\ell-1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \operatorname{sen}(\ell-1)\theta - K_{\ell+1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \operatorname{sen}(\ell+1)\theta \right\}. \end{cases} \tag{2-28}.$$

$$E_\theta = \begin{cases} AI_\ell\left(\frac{U_1\rho}{a}\right)\cos\ell\theta\cos\theta & ; 0 < \rho < a \\ \left[BI_\ell\left(\frac{W_2\rho}{a}\right) + CK_\ell\left(\frac{W_2\rho}{a}\right)\right]\cos\ell\theta\cos\theta & ; a < \rho < b \\ \left[DJ_\ell\left(\frac{U_3\rho}{b}\right) + EY_\ell\left(\frac{U_3\rho}{b}\right)\right]\cos\ell\theta\cos\theta & ; b < \rho < c \\ FK_\ell\left(\frac{W_4\rho}{c}\right)\cos\ell\theta\cos\theta & ; c < \rho. \end{cases} \quad (2-29).$$

Da mesma forma que as estruturas anteriores, têm-se os argumentos U_i e W_i , dados por:

$$\begin{aligned} W_2 &= [\beta^2 - k_o^2 N_2^2]^{1/2} a; & U_1 &= [\beta^2 - k_o^2 N_1^2]^{1/2} a; \\ W_3 &= [\beta^2 - k_o^2 N_2^2]^{1/2} b; & U_3 &= [k_o^2 N_3^2 - \beta^2]^{1/2} b; \\ W_4 &= [\beta^2 - k_o^2 N_4^2]^{1/2} c; & U_4 &= [k_o^2 N_3^2 - \beta^2]^{1/2} c. \end{aligned} \quad (2-30).$$

De posse das componentes do campo elétrico, e usando-se o mesmo processo feito para as situações anteriores, a continuidade das componentes tangenciais nas interfaces do guia, obtêm-se a seguinte equação transcendental:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{J_{\ell\pm 1}(U_4)}{Y_{\ell\pm 1}(U_4)} \left[\frac{J_\ell(U_4)}{U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4)} \mp \frac{K_\ell(W_4)}{W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)} \right] \right. \\ & \left. \frac{K_{\ell\pm 1}(W_3)}{K_{\ell\pm 1}(W_2)} \left[\frac{Y_\ell(U_3)}{U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3)} - \frac{K_\ell(W_3)}{W_3 K_{\ell\pm 1}(W_3)} \right] \right. \\ & \left. \frac{I_{\ell\pm 1}(W_3)}{I_{\ell\pm 1}(W_2)} \left[\frac{Y_\ell(U_3)}{U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3)} + \frac{I_\ell(W_3)}{W_3 I_{\ell\pm 1}(W_3)} \right] \right. \\ & \left. \frac{I_{\ell\pm 1}(W_3)}{I_{\ell\pm 1}(W_2)} \left[\frac{I_\ell(U_1)}{U_1 I_{\ell\pm 1}(U_1)} - \frac{I_\ell(W_2)}{W_2 I_{\ell\pm 1}(W_2)} \right] \right\} = \\ & \frac{J_{\ell\pm 1}(U_3)}{Y_{\ell\pm 1}(U_3)} \left\{ \frac{K_{\ell\pm 1}(W_3)}{K_{\ell\pm 1}(W_2)} \left[\frac{J_\ell(U_3)}{U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3)} - \frac{K_\ell(W_3)}{W_3 K_{\ell\pm 1}(W_3)} \right] \right. \\ & \left. \frac{I_{\ell\pm 1}(W_3)}{I_{\ell\pm 1}(W_2)} \left[\frac{J_\ell(U_3)}{U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3)} + \frac{I_\ell(W_3)}{W_3 I_{\ell\pm 1}(W_3)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2-31).$$

Os argumentos dessa expressão são:

$$\begin{aligned}
W_2 &= \left[B - \left(\frac{N_2^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right) \right]^{1/2} v \frac{a}{c}, & U_1 &= \left[B - \left(\frac{N_1^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right) \right]^{1/2} v \frac{a}{c}, \\
W_3 &= \left[B - \left(\frac{N_2^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right) \right]^{1/2} v \frac{b}{c}, & U_3 &= [1 - B]^{1/2} v \frac{b}{c}, \\
W_4 &= B^{1/2} v, & U_4 &= [1 - B]^{1/2} v.
\end{aligned} \tag{2-31}$$

Os detalhes de cálculos são encontrados no apêndice C.

2.3 - 2 - Estrutura M - IV

A estrutura IV é um caso particular da anterior, diferindo pela relação $N_2 < N_4$. Com essa condição, têm-se apenas duas situações a serem solucionados, cujas equações transcendentais são iguais às situações correspondentes da estrutura III. Novamente, a diferença está nos argumentos das funções de Bessel.

Situação(1) $N_4 < N < N_1$

Tal situação é idêntico à situação(1) da estrutura anterior e a solução para a equação de onda é dada pela eq.(2-20) com os parâmetros U_i e W_i dados por:

$$\begin{aligned}
W_2 &= \left[B + \left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_3^2 - N_4^2} \right) \right]^{1/2} v \frac{a}{c}, & U_1 &= \left[\left(\frac{N_1^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right) - B \right]^{1/2} v \frac{a}{c}, \\
W_3 &= \left[B + \left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_3^2 - N_4^2} \right) \right]^{1/2} v \frac{b}{c}, & U_3 &= [1 - B]^{1/2} v \frac{b}{c}, \\
W_4 &= B^{1/2} v, & U_4 &= [1 - B]^{1/2} v.
\end{aligned} \tag{2-33}$$

Situação(2) $N_1 < N < N_3$

A equação transcendental desse caso é igual a eq.(2-31) onde os argumentos das funções de Bessel serão:

$$\begin{aligned}
 W_2 &= \left[B + \left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_3^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{a}{c}, & U_1 &= \left[B - \left(\frac{N_1^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{a}{c}, \\
 W_3 &= \left[B + \left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_3^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{b}{c}, & U_3 &= [1 - B]^{1/2} v \frac{b}{c}, \\
 W_4 &= B^{1/2} v, & U_4 &= [1 - B]^{1/2} v.
 \end{aligned} \tag{2-34}.$$

A solução das equações (2-7), (2-14), (2-20) e (2-28) não é analítica por isso usa-se métodos numéricos para solucioná-las, que levam a obtenção de diferentes características da onda propagante tais como a dispersão, perfis de campo e de intensidade, condições de corte e outros. No próximo capítulo são apresentados os resultados para essas equações, obtidos através de métodos numéricos.

CAPÍTULO III

CURVA DE DISPERSÃO PARA A FIBRA COAXIAL

Neste capítulo são apresentados os resultados quanto a curva de dispersão característica para as quatro estruturas da fibra coaxial estudadas no capítulo II. Tais resultados são obtidos a partir da solução das equações transcendentais referentes às estruturas de fibras coaxiais analisadas neste trabalho. O método numérico usado na solução das equações transcendentais foi constituído da junção de dois outros: o método da Bissecção, para a localização dos intervalos onde existem raízes, e o método de Van Wijngaarden, ref.[14], para o cálculo das raízes. As equações transcendentais, foram resolvidas em estações de trabalho Sun-Sparc 12 do Departamento de Física da UFC.

3 . 1 - Dispersão

Nesta seção são mostrados os resultados obtidos para as curvas de dispersão característica das estruturas W-I, W-II, M-III e M-IV. Como as fibras coaxiais têm três raios (a,b,c), com o intuito de diminuir o número de parâmetros envolvidos nos cálculos, usa-se dois parâmetros definidos a partir de razões entre os raios. Eles serão:

$$P = \frac{b}{c} \text{ e } Q = \frac{a}{c} \quad (3-1)$$

As figuras (3.1-1) e (3.1-2) mostram, respectivamente, as curvas de dispersão para modos de diversas ordens, das estrutura W-I e W-II, estudadas no capítulo II.

FIBRAS W-I e W-II

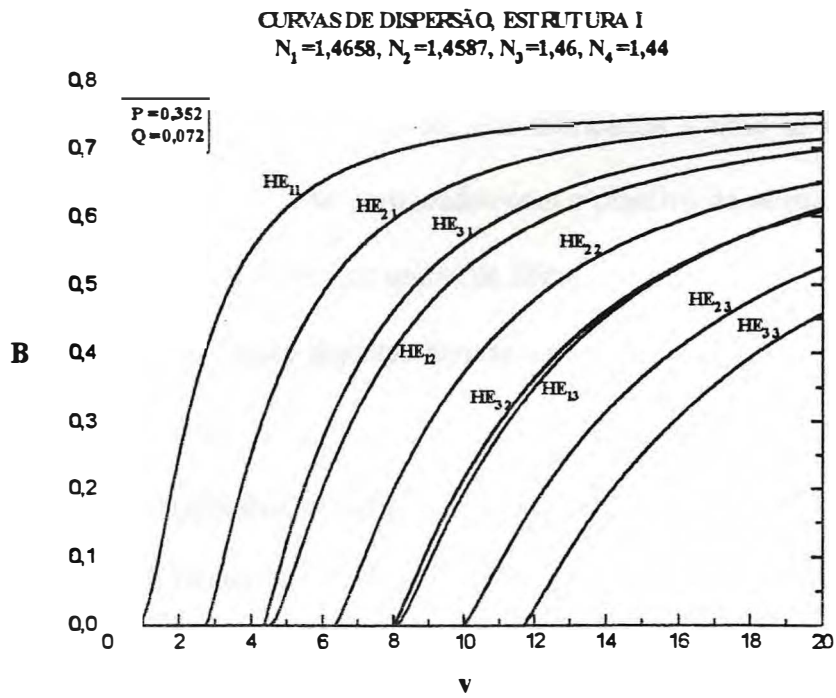


Fig. (3.1-1) Diagrama de B versus v, para a estrutura W-I

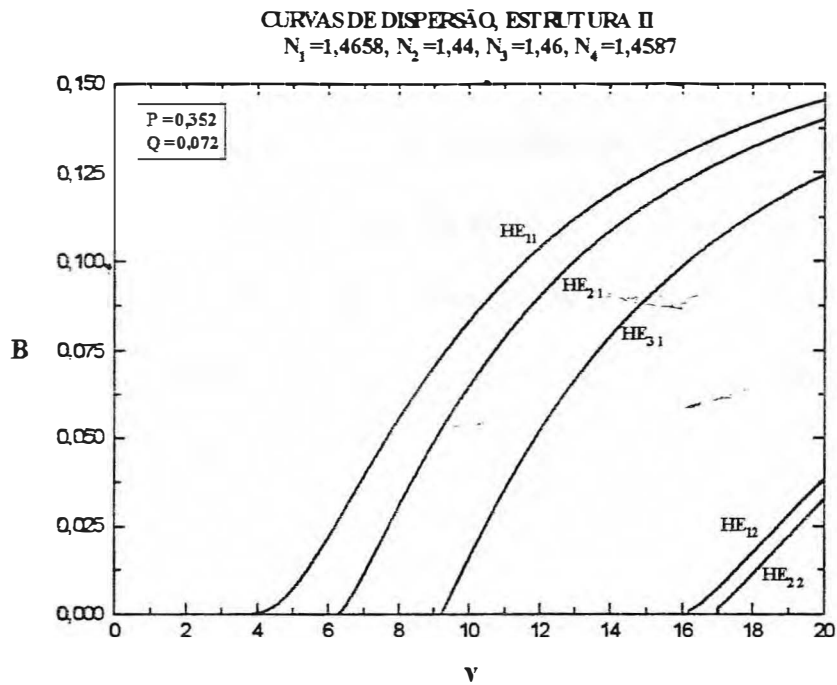


Fig. (3.1-2) Curvas de dispersão, diagrama de B versus v, para a estrutura W-II

As fibras possuem os mesmos valores para os parâmetros P e Q bem como os demais envolvidos nos cálculos, com exceção dos índices de refração N_2 e N_4 . Os valores dos parâmetros a , b , c , N_1 , N_2 , N_3 e N_4 , da estrutura W-I foram fornecidos pelo CPqD-Telebrás, que são usados nos dispositivos por eles fabricados. Como se vê indicado nas figuras, os valores destes índices estão permutados com o objetivo de satisfazer aos tipos de perfis de índice de refração das outras estruturas da fibra.

A estrutura W-I apresenta algumas características de dispersão que a distinguem fortemente da estrutura W-II.

Em primeiro, claramente, se percebe que as fibras de estrutura W-I admitem a propagação de um maior número de modos dentro do mesmo intervalo (0,20) de valores de v . Também é fácil de ser percebido o sensível aumento das frequências de corte v_c dos modos da estrutura W-II em relação aos da fibra W-I. Além disto, para os modos que têm condição de propagação na fibra W-II, os valores de B são bastante inferiores aos que estão em mesma condição na estrutura W-I.

Outra diferença marcante entre as curvas de dispersão das duas fibras está na taxa de crescimento dos valores B em função de v . Na estrutura W-I a derivada $\partial B/\partial v$ é maior do que na estrutura W-II. Isto leva a que a estrutura W-I imponha maior contribuição de *dispersão do guia* [8] à dispersão total a que está sujeito cada modo propagante. A menos, é claro, que v seja tão grande que este efeito seja absolutamente anulado pelo fato de que $\partial B/\partial v$ tende para zero quando v tende para infinito.

É possível se perceber, também, que na fibra W-I há a tendência de degenerescência entre os modos HE_{13} e HE_{32} , sendo degenerados em torno de $v=17$. Isto, desaparece por completo no caso da fibra W-II. Outras tendências de degenerescência devem aparecer,

como sugere a aproximação das curvas de dispersão dos modos HE_{12} e HE_{22} , no caso da estrutura W-II. Observando-se o comportamento dos mesmos modos na estrutura W-I, observa-se que estes modos, no intervalo de análise de v , não apresentam a mesma tendência.

As características de dispersão das fibras W-I e W-II apresentadas neste capítulo poderão sofrer marcantes alterações caso haja mudança no valor dos parâmetros das fibras. Considerando-se o número de parâmetros das fibras coaxiais, três dimensões e quatro índices de refração, um número elevado de detalhes poderá ser explorado. Entretanto, como o objetivo do trabalho é criar a base de cálculo para o modelamento das fibras coaxiais, não serão realizadas maiores análises do que as feitas aqui. Isto será objetivo de trabalhos subsequentes. Particularmente, será importante o estudo dos modos HE_{11} e HE_{12} , uma vez que com estes modos se pode descrever o comportamento de dispositivos como os filtros espectrais, motivação deste estudo.

FIBRAS M-III e M-IV

Agora, serão analisados os casos das estruturas M-III e M-IV, cujas curvas de dispersão estão apresentadas nas figuras (3.1-3) e (3.1-4). Nos cálculos realizados para estas fibras foram considerados para P e Q os mesmos valores usados para as fibras W-I e W-II. Quanto aos valores de índices de refração, houve a permuta entre os valores de N_1 e N_3 , usados para as fibras W-I e W-II. Quanto aos valores para N_2 e N_4 , para a fibra M-III na qual $N_2 < N_4$ foram usados os mesmos valores da fibra W-I; para a fibra M-IV, na qual $N_2 > N_4$, foram usados os mesmos valores da fibra W-II. Espera-se com isto facilitar a comparação dos dados entre os diferentes tipos de fibras coaxiais em análise.

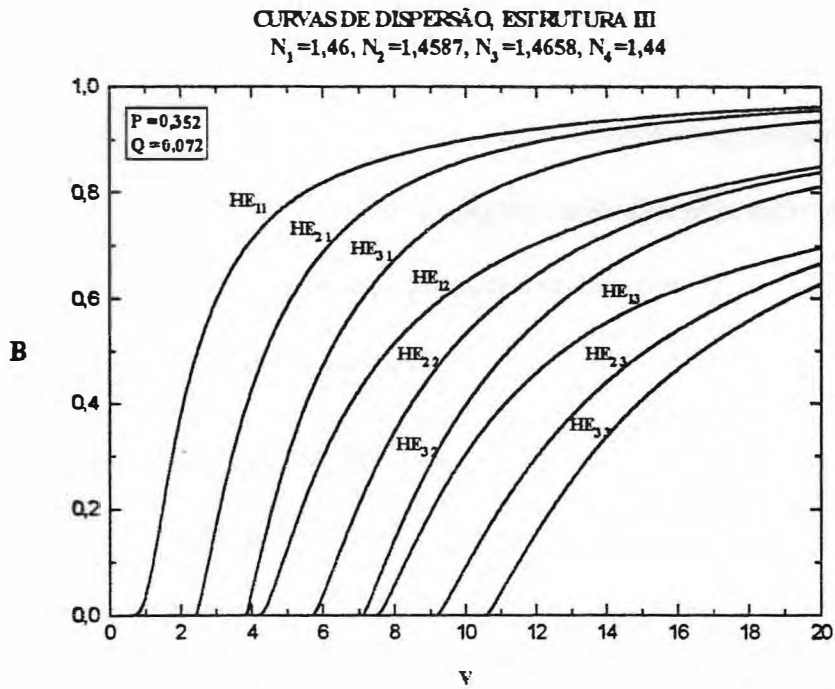


Fig.(3.1-3) Curvas de dispersão, estrutura M-III

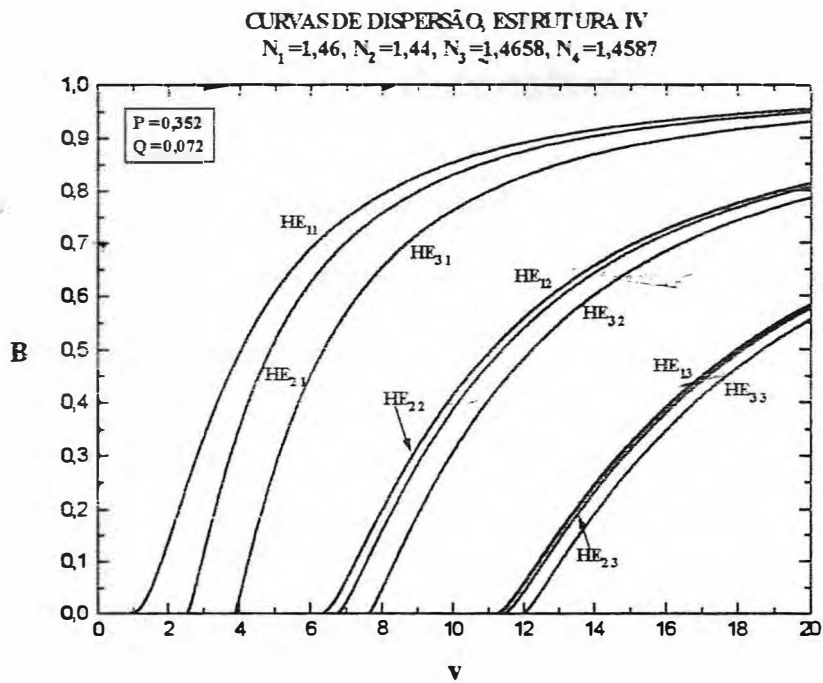


Fig.(3.1-4) Curvas de dispersão, estrutura M-IV

Ao contrário das estruturas W-I e W-II, as estruturas M-III e M-IV não apresentam diferenças tão marcantes entre si quanto as primeiras.

Em primeiro lugar percebe-se que o número de modos propagantes, no mesmo intervalo de v (0-20) é o mesmo, não havendo significativa diferença entre os valores de B para ambas as estruturas. Isto indica que as fibras coaxiais do tipo M são menos susceptíveis às variações do índice de refração da casca, N_4 .

Observa-se, também, que, na fibra M-IV, as curvas de dispersão dos modos He_{ij} possuindo um mesmo valor de j (1,2,3) tendem a se tornar mais próximas quando comparadas às curvas equivalentes na fibra W-III. Esta tendência se mostra maior quanto maior é a ordem dos modos. Com isto denota-se, para as condições aqui usadas, uma maior tendência à degenerescência de modos na fibra M-IV do que na fibra M-III.

3 . 2 - Variações em P, com Q constante

Nesta seção serão analisadas as influências dos parâmetros P e Q sobre a dispersão das fibras W e M. A análise é feita apenas para os modos HE_{11} e HE_{12} , em face da sua importância na descrição do comportamento dos filtros espectrais.

3 . 2 - 1 - Modo HE_{11}

Para o modo HE_{11} a variação de P, mantendo-se o valor de Q constante e igual a 0.072 leva aos resultados apresentados a seguir nas figuras (3.2-1) e (3.2-2), estruturas W-I e W-II, e nas fig.(3.2-3) e (3.2-4) para as estruturas M-III e M-IV, respectivamente.

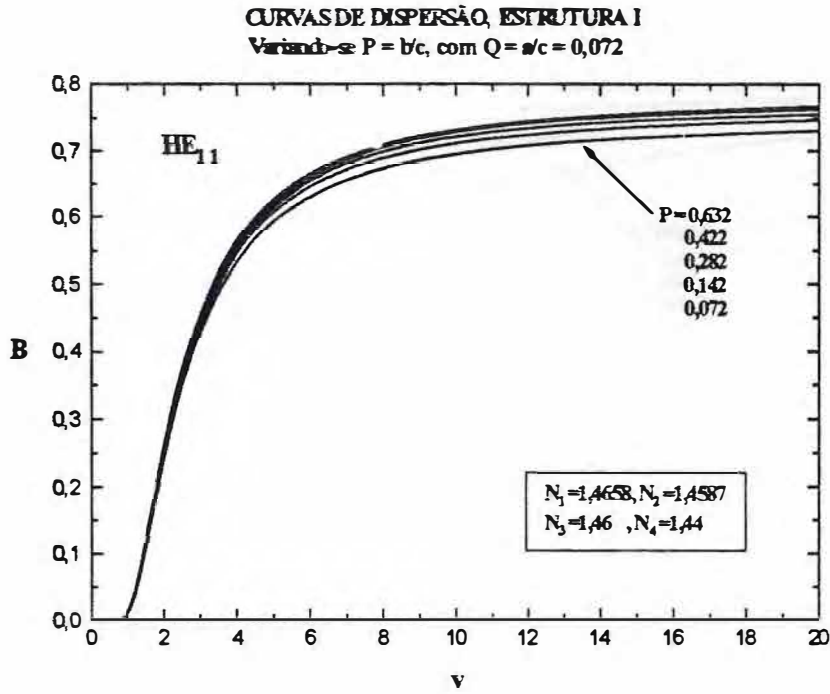


Fig. (3.2-1) Diagrama de v versus B , para a estrutura W-I, com $Q = 0.072$

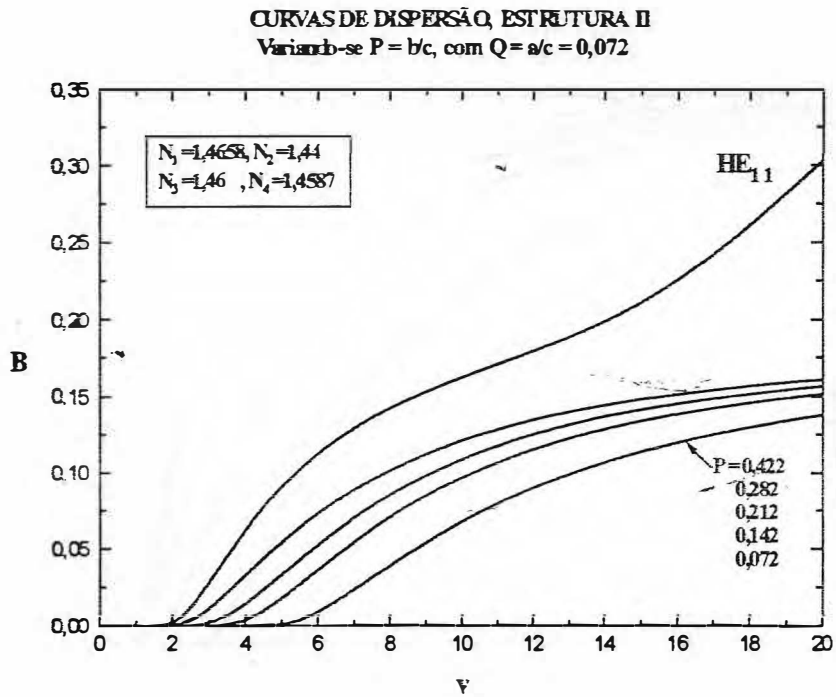


Fig. (3.2-2) Diagrama de B versus v , estrutura W-II, modo HE_{11}

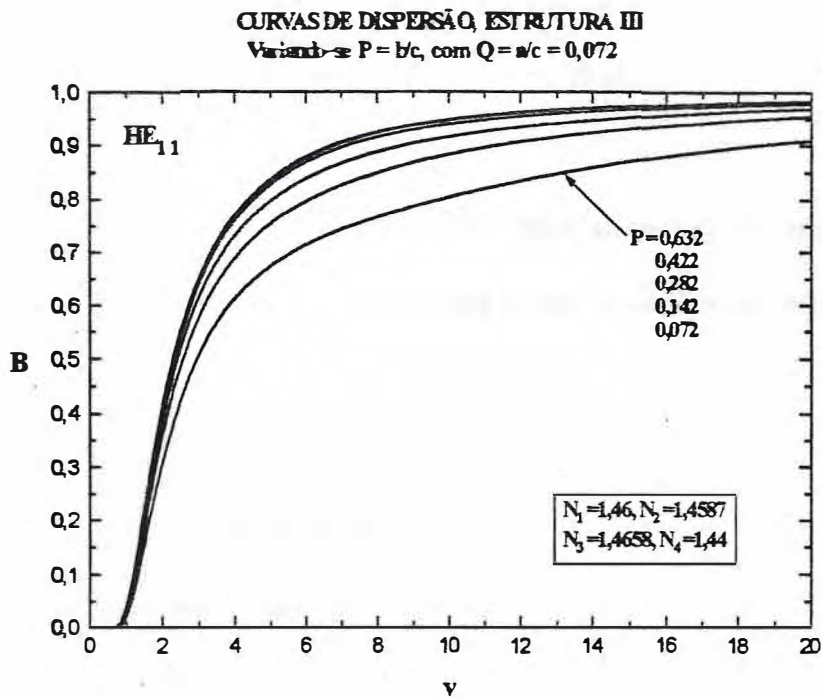


Fig. (3.2-3) Diagrama de B versus v , para estrutura M-III, modo HE_{11}

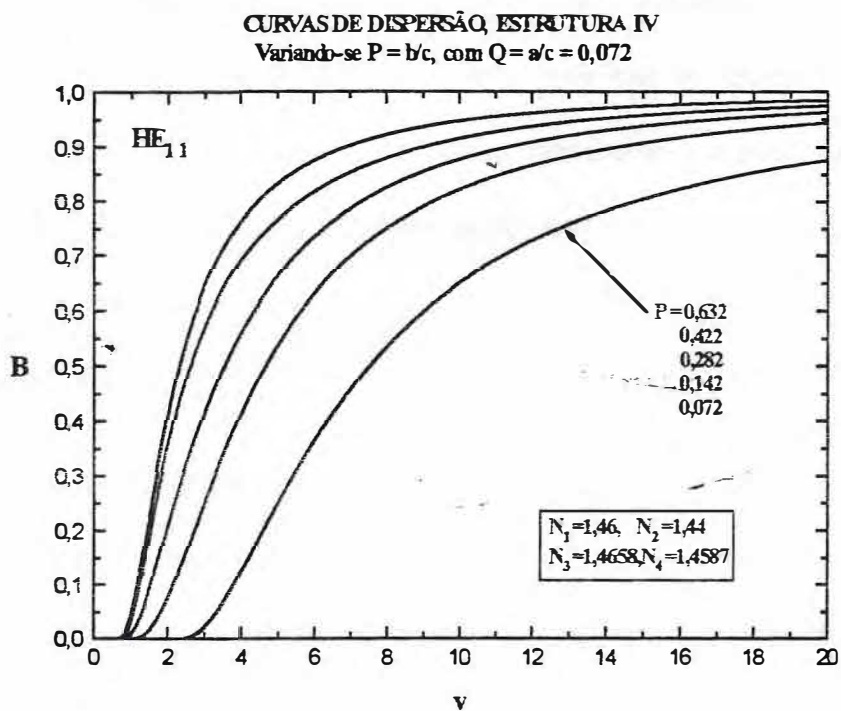


Fig. (3.2-4) Variação das curvas de dispersão do modo HE_{11} , para a estrutura M-IV

Uma conclusão a que se chega, com os resultados obtidos, é que o *aumento no parâmetro P reduz o valor de B em função de v*. Este resultado será comentado na seção de conclusões deste capítulo.

Outro ponto interessante é que a fibra W-I, entre as quatro, é a menos sensível às variações de P. A mais sensível é a fibra W-II, para a qual se verifica um inusitado aumento na dispersão do modo HE_{11} em torno de $v=14$. Tal comportamento já foi verificado em outros tipos de fibras.

A fibra W-II tem uma estrutura comparável ao da fibra W de três camadas, estudada por Monerie [15]. Estudando o efeito da variação das dimensões das diferentes regiões das fibras, bem como dos seus índices de refração, sobre o comportamento da curva de dispersão dos modos HE_{11} , Monerie mostra que as fibras W de três camadas possuem este mesmo tipo de comportamento encontrado na fibra W-II aqui estudada.

Quanto às fibras M-III e M-IV, percebe-se que elas se situam como um caso intermediário entre as duas já discutidas. Entretanto, percebe-se uma maior sensibilidade da fibra M-IV a mudanças no parâmetro P, se comparada à fibra M-III.

3 . 2 - 2 - Modo HE_{12}

A seguir, são apresentados os resultados obtidos para o modo HE_{12} nas mesmas condições do que foi feito para os modos HE_{11} . Nas figuras (3.2-5) e (3.2-6) são apresentadas as variações que sofre o modo HE_{12} para as estruturas W-I e W-II. O mesmo observa-se nas estruturas M-III e M-IV, que são mostradas nas fig.(3.2-7) e (3.2-8).

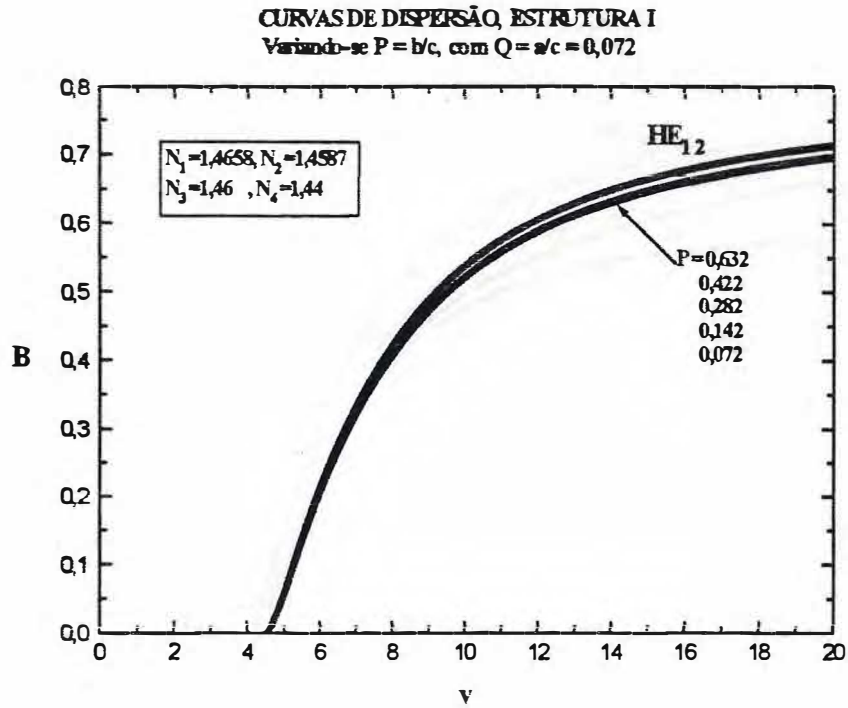


Fig. (3.2-5) Comportamento do modo HE_{12} , para alguns valores de P

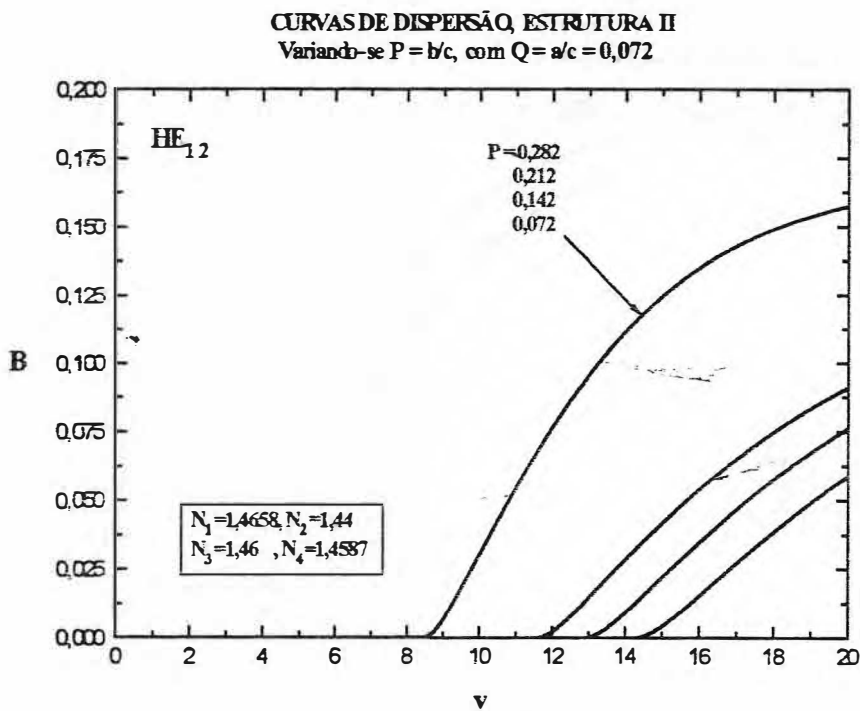


Fig. (3.2-6) Variação das curvas de dispersão do modo HE_{12} , para a estrutura W-II

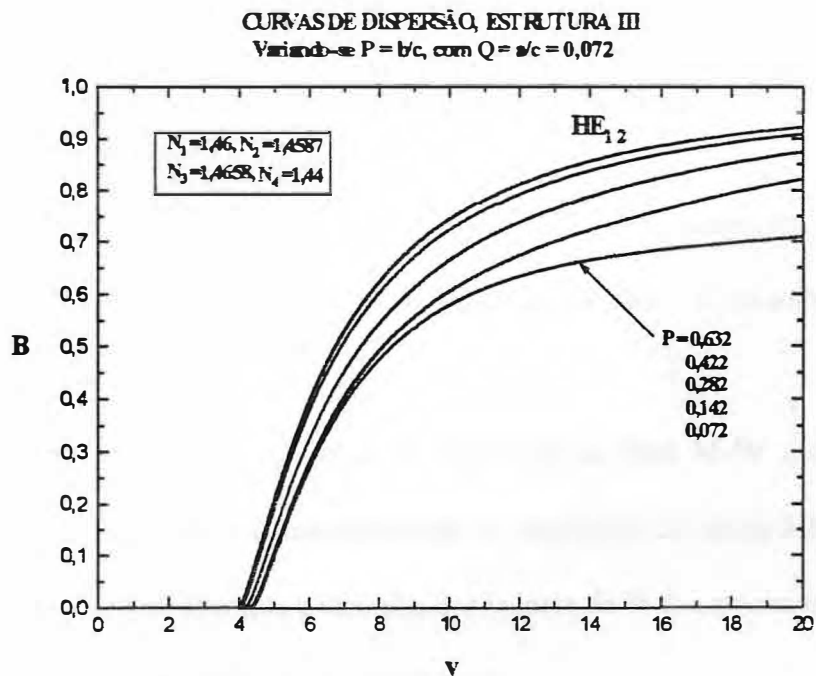


Fig. (3.2-7) Variação das curvas de dispersão do modo $HE_{1,2}$, para a estrutura M-III

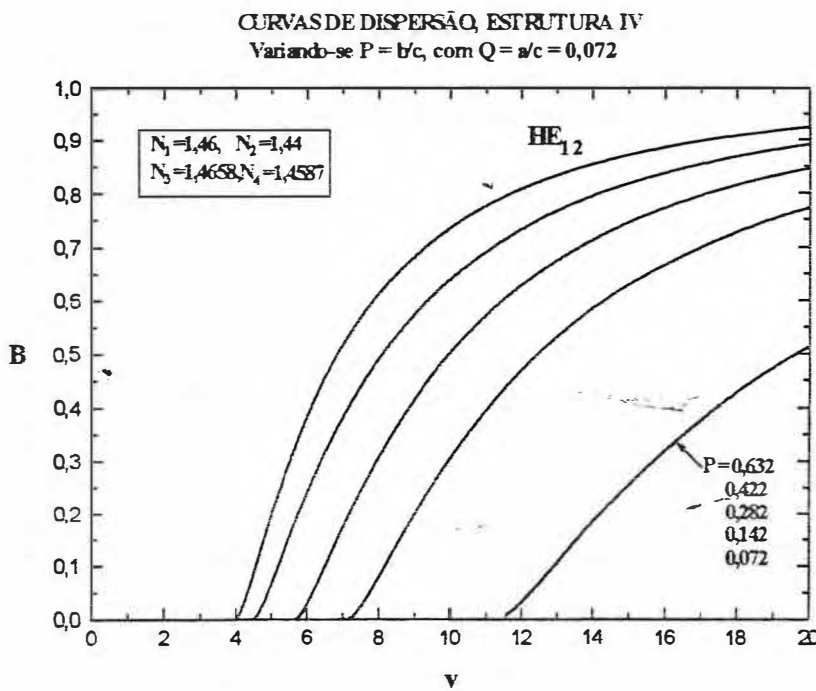


Fig. (3.2-8) Variação das curvas de dispersão do modo $HE_{1,2}$, para a estrutura M-IV

Como se viu, os modos HE_{12} têm comportamento análogo aos modos HE_{11} , ou seja, a redução de P aumenta os valores de B em função de v . Aqui, alguns pontos são destacados.

Em primeiro lugar há um forte deslocamento da curva de dispersão da estrutura W-II, para menores valores de v com a diminuição de P . O mesmo não se verifica para o caso da estrutura W-I.

Também se verifica que a relação de dispersão da fibra M-IV é mais sensível às variações de P do que a M-III. Considerando-se os resultados do modo HE_{12} e aqueles do modo HE_{11} , é fácil se perceber que a variação dos valores de B dos primeiros é mais intensa do que aquela referente ao último modo mencionado.

3 . 3 - Variações em Q , com P constante

Nesta seção serão investigados o comportamento da dispersão dos modos HE_{11} e HE_{12} das fibras em estudo, ao se variar a razão Q .

3 . 3 - 1 - Modo HE_{11}

Agora, serão mostrados os resultados para a dispersão do modo HE_{11} , ao se variar $Q = a/c$, mantendo-se P constante e igual a 0,352. Nas figuras (3.3-1) e (3.3-2) são apresentadas as variações deste modo, respectivamente para as estruturas W-I e W-II. As figuras (3.3-3) e (3.3-4) apresentam dados análogos para as estruturas M-III e M-IV.

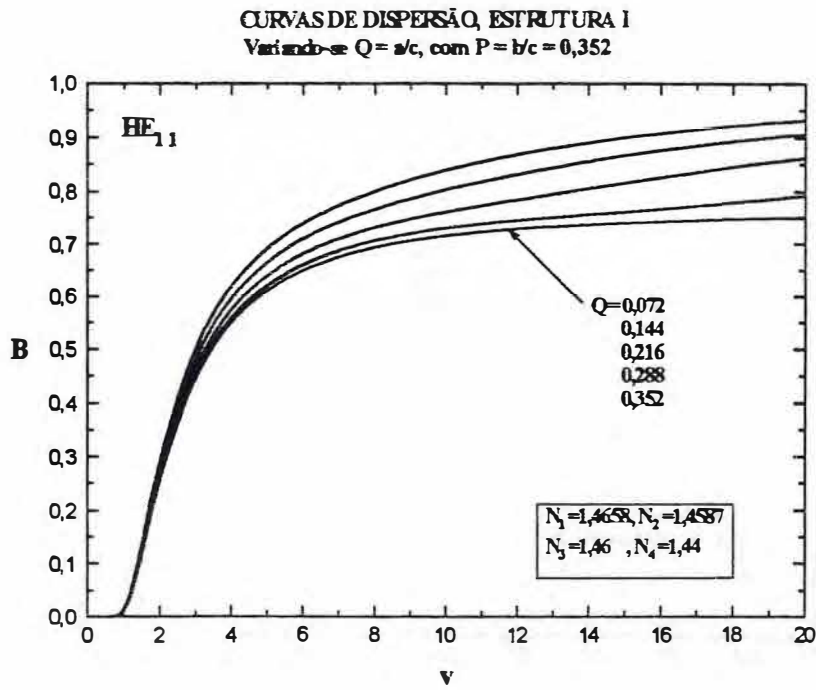


Fig. (3.3-1) Variações do modo HE_{11} , estrutura W-I

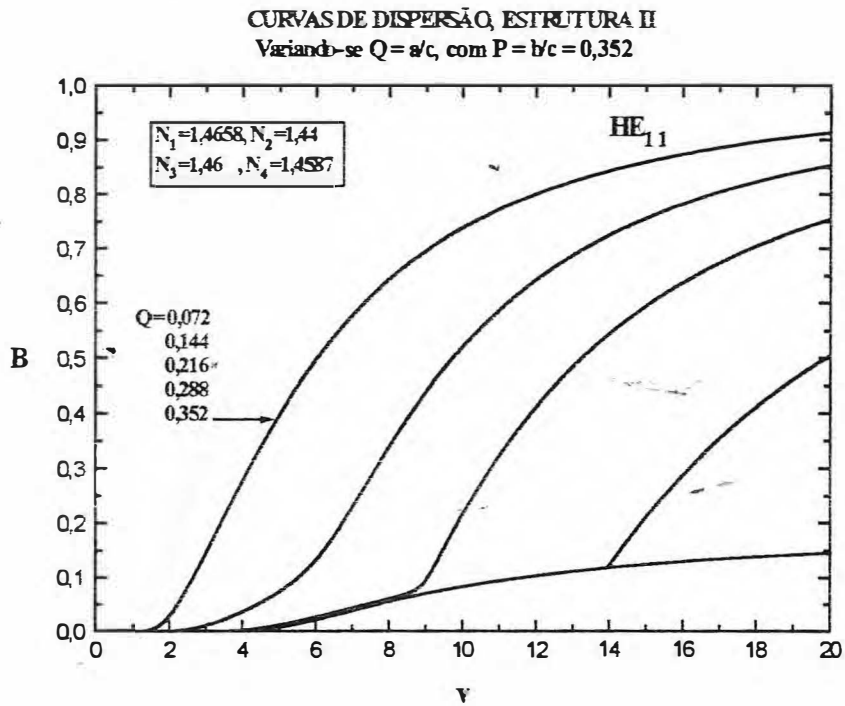


Fig. (3.3-2) Variação do modo HE_{11} , estrutura W-II

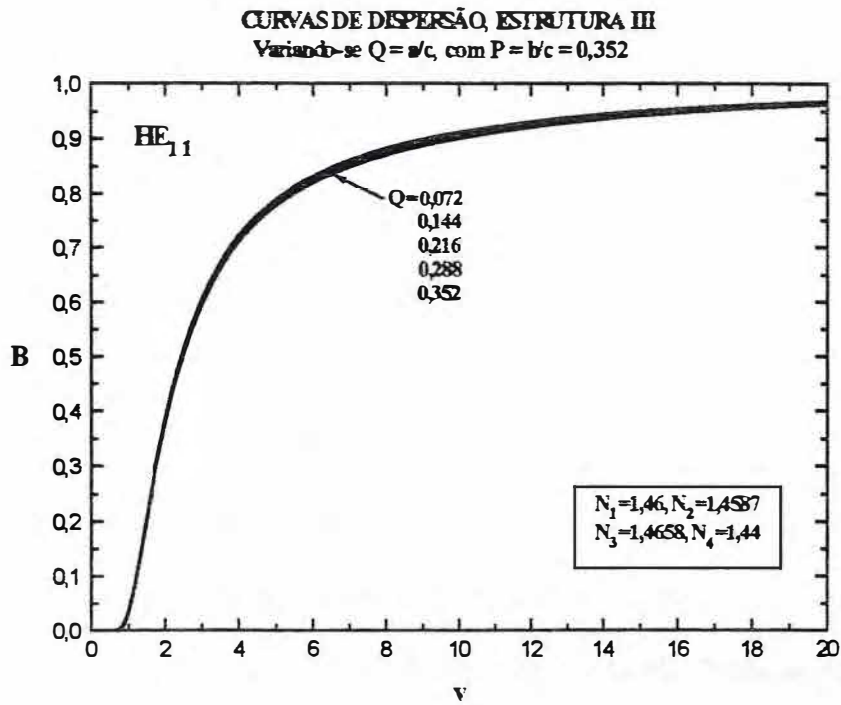


Fig.(3.3-3) Modificação no modo HE_{11} , estrutura M-III

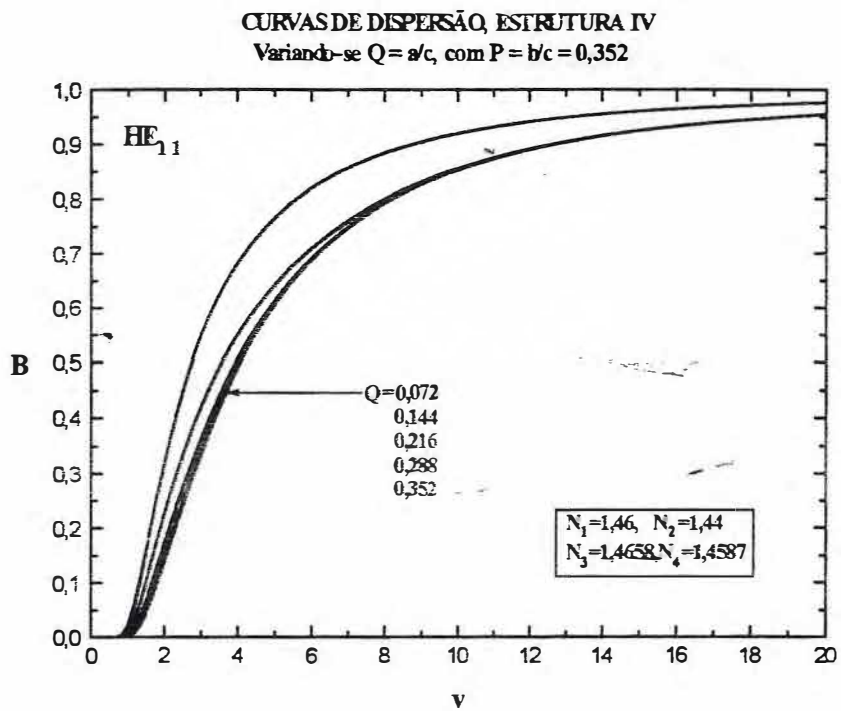


Fig.(3.3-4) Variação do modo HE_{11} , estrutura M-IV

O efeito da variação do parâmetro Q , sobre os modos HE_{11} e HE_{12} , vai na direção oposta ao que foi observado para o parâmetro P . Ou seja, o aumento de Q provoca o aumento de B em função de v .

Deve-se destacar também que, dentro das condições de cálculo utilizadas, as estruturas W-I e W-II têm os seus valores de B , mais fortemente alterados pela variação de Q do que os mesmos valores referentes às fibras M-III e M-IV. Basta se observar as curvas de dispersão referentes ao modo HE_{11} para que isto seja comprovado. Particularmente a estrutura W-II se mostra extremamente sensível às mudanças provocadas nos valores de Q .

Embora as estruturas M sejam menos susceptíveis às mudanças de Q , observa-se que a M-IV é um pouco mais sensível a tais mudanças do que a M-III. Pode-se dizer então, que os dados indicam que as fibras possuindo a região de casca com um índice de refração menor do que o índice de refração da região de barreira, são mais sujeitos a alterações de dispersão quando os parâmetros dimensionais das fibras, aqui representados pelas relações P e Q , são modificados.

3 . 3 - 2 - Modo HE_{12}

Nesta seção serão analisados o comportamento ~~das quatro~~ estruturas em estudo quanto a variações na razão Q , para o modo HE_{12} . Nas figuras-(3.3-5) e (3.3-6) são observadas as estruturas W-I e W-II. As fig.(3.3-7) e (3.3-8) observa-se o comportamento da dispersão deste modo para as estruturas M-III e M-IV.

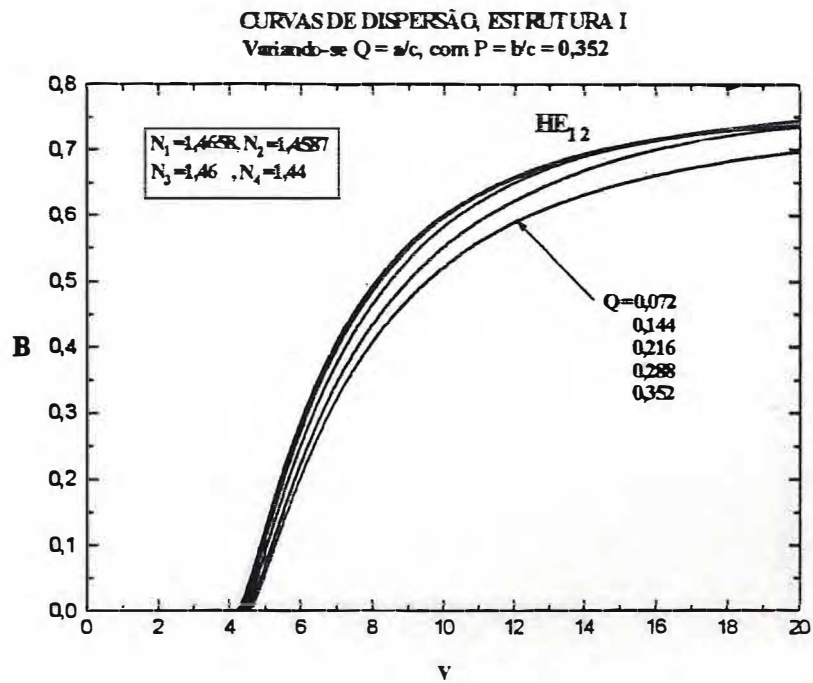


Fig. (3.3-5) Observa-se as alterações deste modo para alguns valores de Q

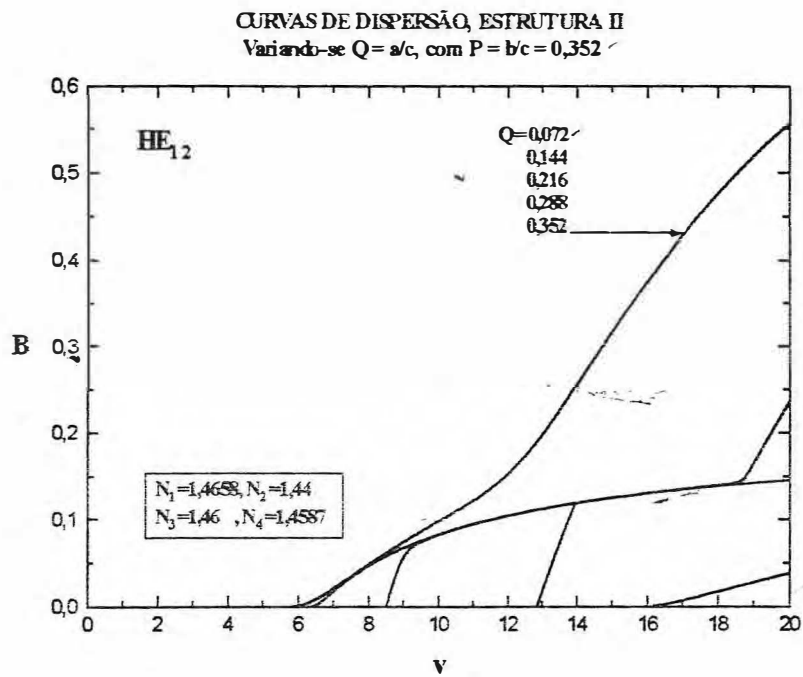


Fig. (3.3-6) Variações do modo HE_{12} para alguns valores de Q

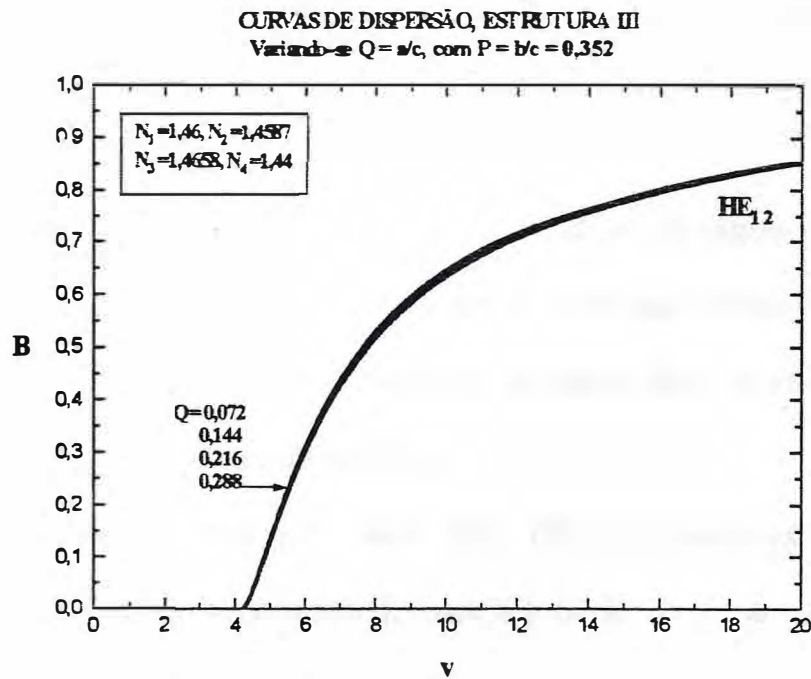


Fig. (3.3-7) Variações do modo HE₁₂ para alguns valores de Q, estrutura W-III

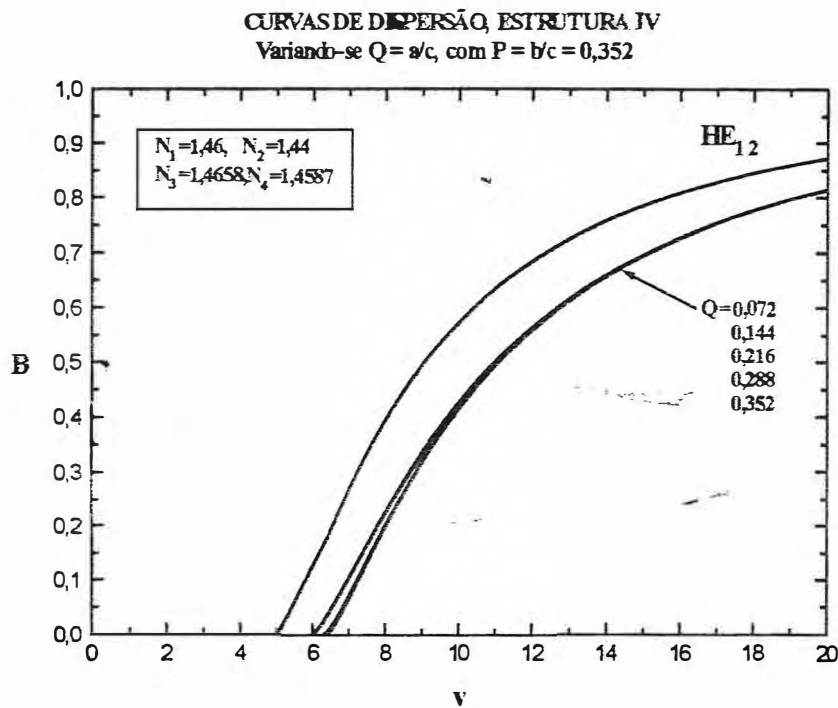


Fig. (3.3-8) Alterações do modo HE₁₂, ao se variar Q

Também para os modos HE_{12} , se verifica um comportamento análogo das suas curvas de dispersão quando comparados àqueles dos modos HE_{11} , qual seja: o aumento de Q aumenta os valores de B em função de v .

Aqui são destacados alguns fatos. Dentro das condições de cálculo usadas, o modo HE_{12} na estrutura W-I é menos sensível às variações de Q do que o modo HE_{11} da mesma estrutura. Também se verifica a alta sensibilidade do modo HE_{12} da estrutura W-II às variações dos parâmetros dimensionais das fibras.

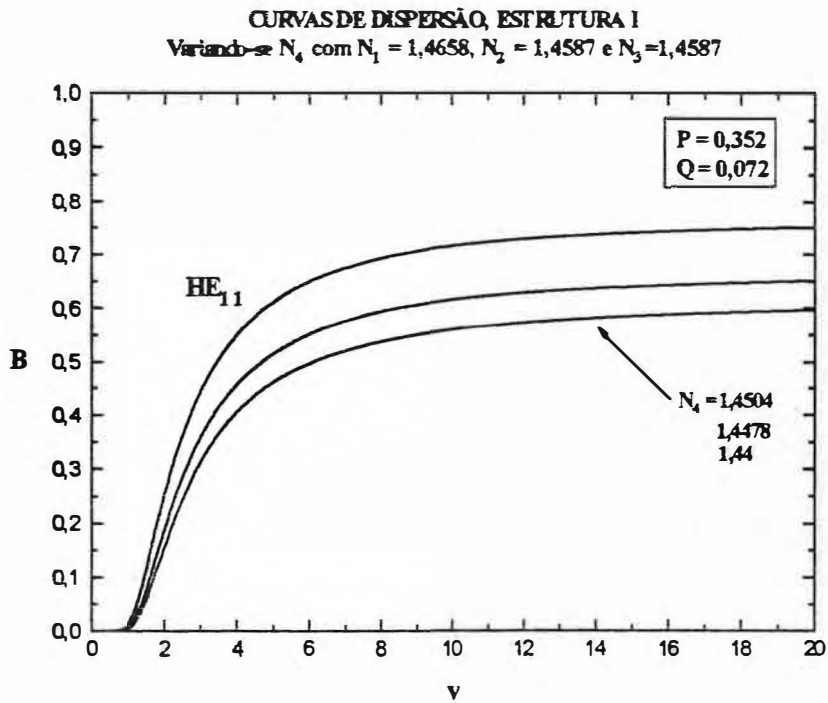
É interessante se observar que o modo HE_{12} , referente à estrutura M-III, é muito pouco sensível às alterações do parâmetro Q , o que já se havia notado para o caso do modo HE_{11} . Também no caso do modo HE_{12} , a estrutura M-IV sofre variações maiores de dispersão quando comparadas à estrutura M-III.

3 . 4 - Variações no índices de refração N_4

Nesta seção serão analisados o comportamento dos modos HE_{11} e HE_{12} ao se variar o índice de refração da casca N_4 , para todas as estruturas estudadas.

3 . 4 - 1 - Modo HE_{11}

As figuras (3.4-1) e (3.4-2) mostram as modificações que sofre este modo para as estruturas W-I e W-II. Já nas figuras (3.4-3) e (3.4-4) pode-se observar as variações que ocorrem neste modo das estruturas M-III e M-IV.



Fig(3.4-1) Modificações nos modos HE_{11} , ao se variar N_4

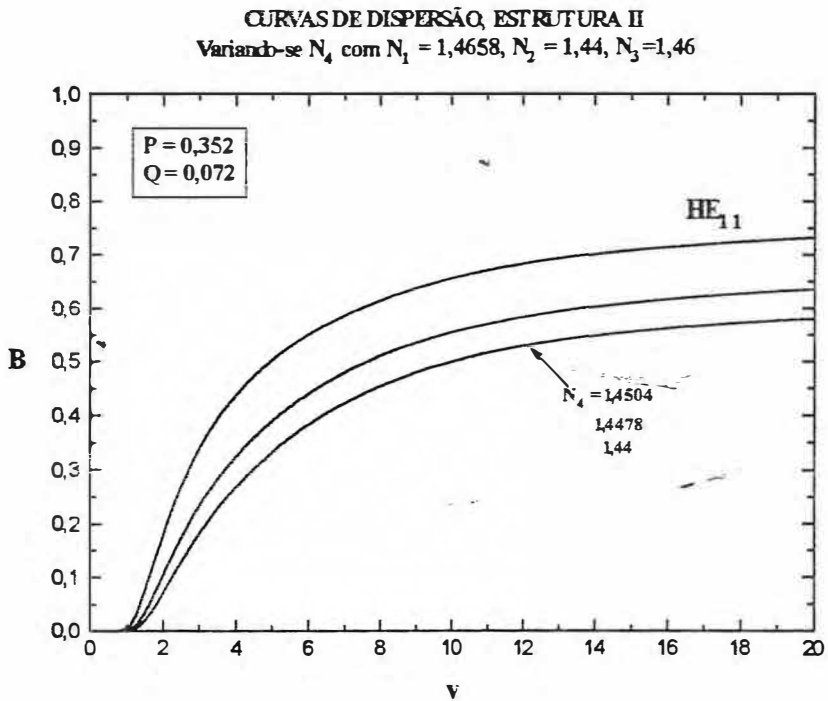


Fig. (3.4-2) Comportamento deste modo ao variar-se N_4

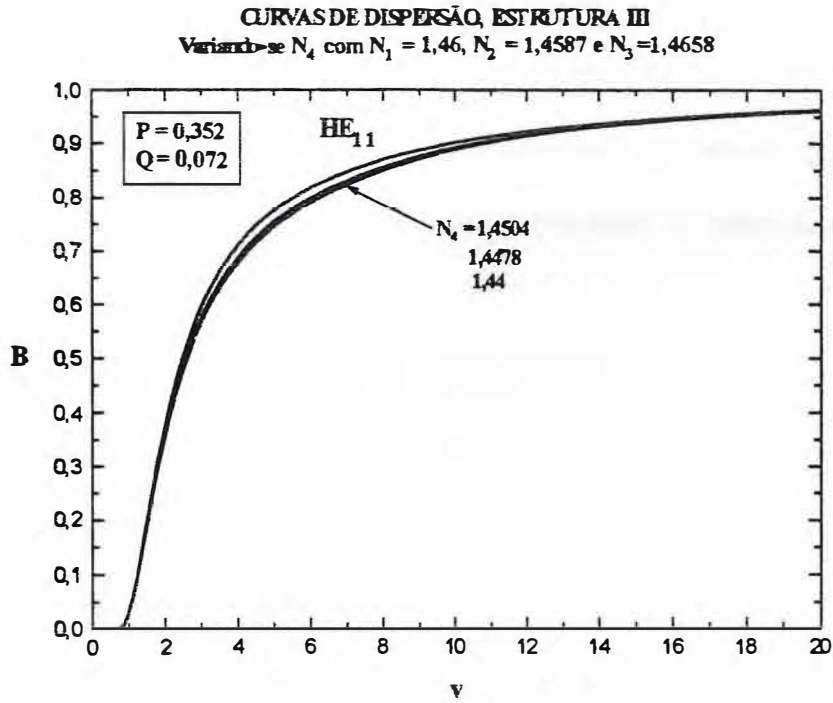


Fig. (3.4-3) Variações no modo HE_{11} para alguns valores de N_4

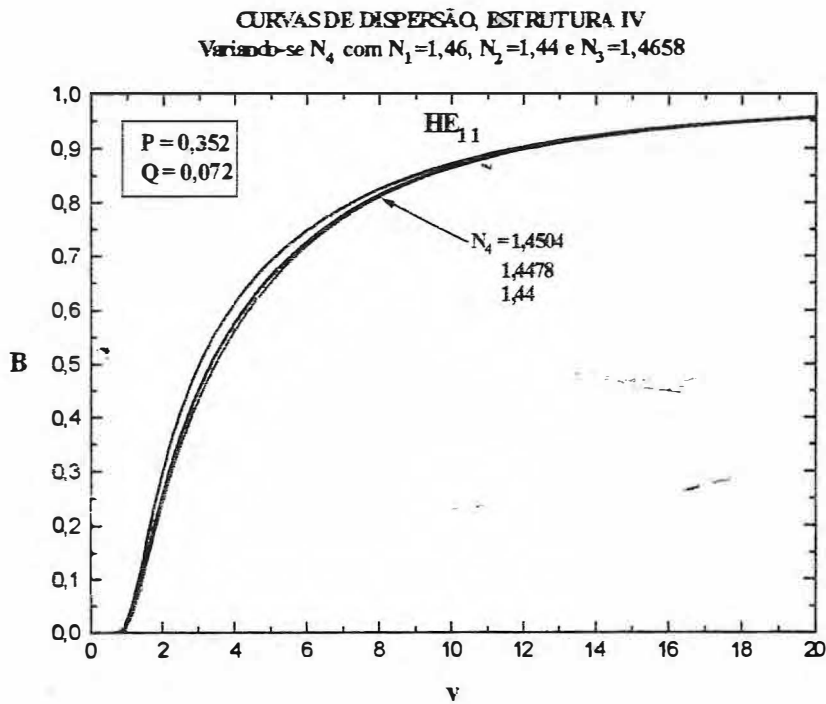


Fig. (3.4-4) Variações no modo HE_{11} , para alguns valores de N_4 , estrutura M-IV

Os resultados obtidos evidenciam que a diminuição do índice de refração da casca (N_4), de todas as estruturas de fibras, provoca o aumento da constante normalizada de propagação B . Este resultado é facilmente entendido quando percebe-se que a redução do índice do valor de N_4 leva a um maior efeito de confinamento da radiação em propagação dentro da fibra.

Deve ser notificado que as fibras de estrutura W são bem mais sensíveis às variações de N_4 do que as de estrutura M . Particularmente é chamada a atenção do comportamento da dispersão dos modos HE_{11} das estruturas W , que apresentam marcantes diferenças quando da variação dos parâmetros dimensionais P e Q . No caso de N_4 eles apresentam praticamente o mesmo comportamento.

Por outro lado, tomando-se a curva de dispersão referente ao modo HE_{11} , para $N_4=1.4587$, e já apresentado na figura (3.1-1), e comparando-se àquelas apresentadas na figura (3.4-2). Verifica-se que os valores de B nesta última são de quatro a cinco vezes maior do que os da figura do capítulo III. Isto mostra a intensa variação nos valores de B quando o índice de refração da casca varia, indicando a sensibilidade da dispersão da estrutura W -II com o valor deste índice de refração.

3 . 4 - 2 - Modo HE_{12}

As figuras (3.4-5) e (3.4-6) mostram as modificações que sofre este modo para as estruturas W -I e W -II. Já nas figuras (3.4-7) e (3.4-8) pode-se observar as variações que ocorrem neste modo das estruturas M -III e M -IV.

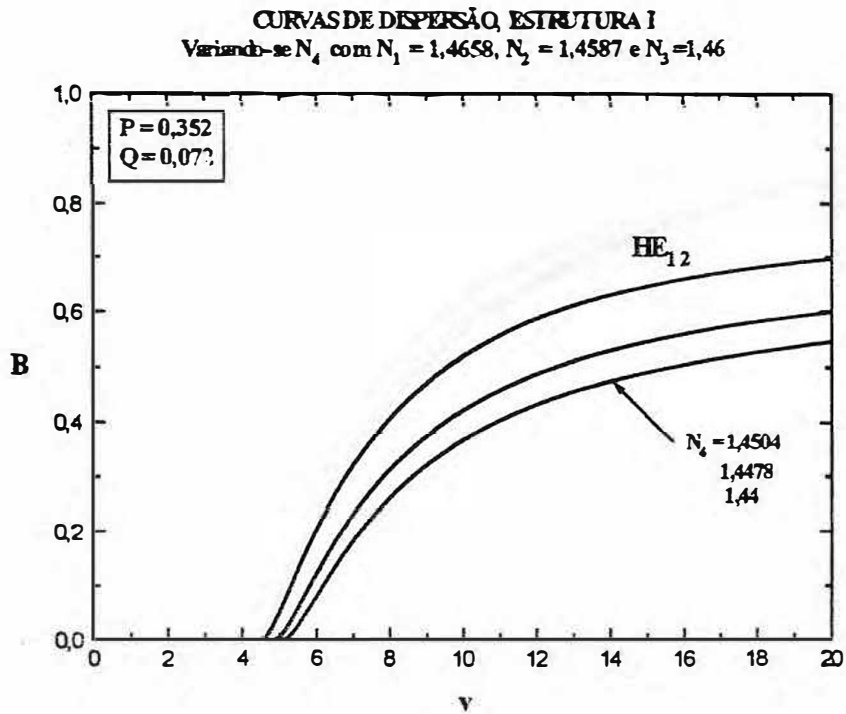


Fig.(3.4-5) Variações no modo HE_{12} , para alguns valores de N_4 , estrutura W-I

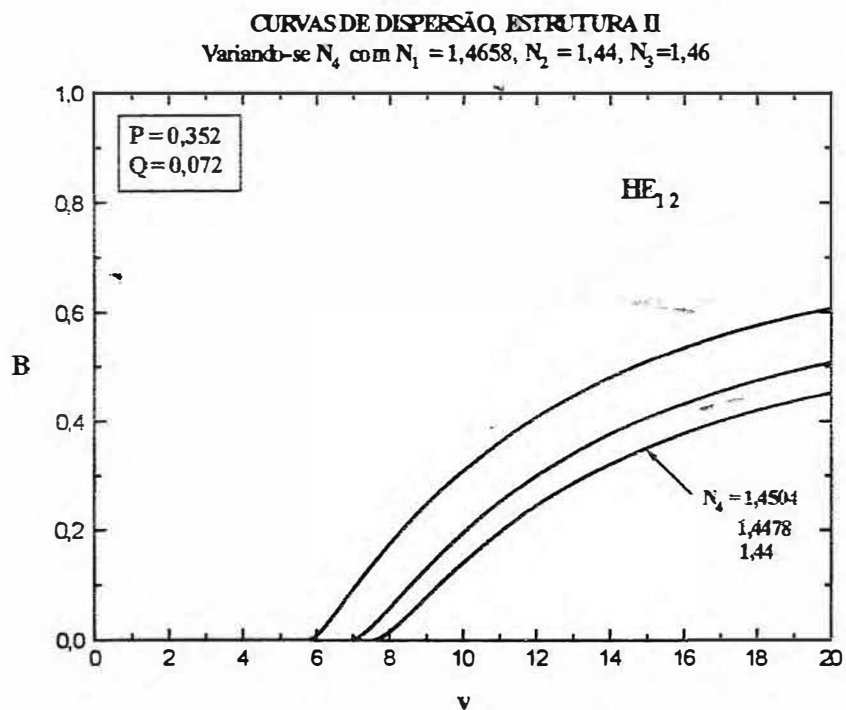


Fig.(3.4-6) Variações no modo HE_{12} , para alguns valores de N_4 , estrutura W-II

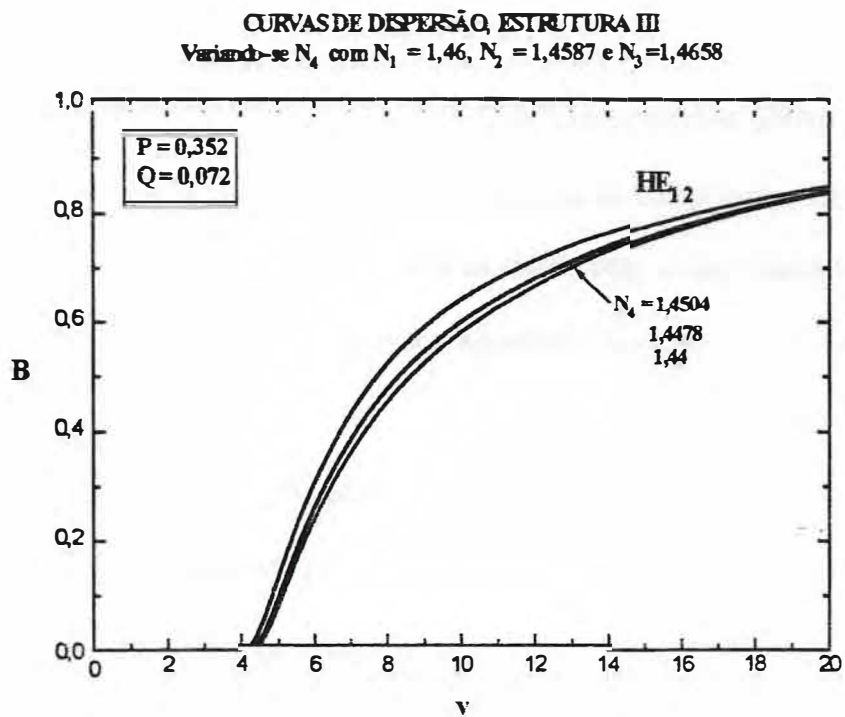


Fig. (3.4-7) Variações no modo HE_{12} , para alguns valores de N_4 , estrutura M-III

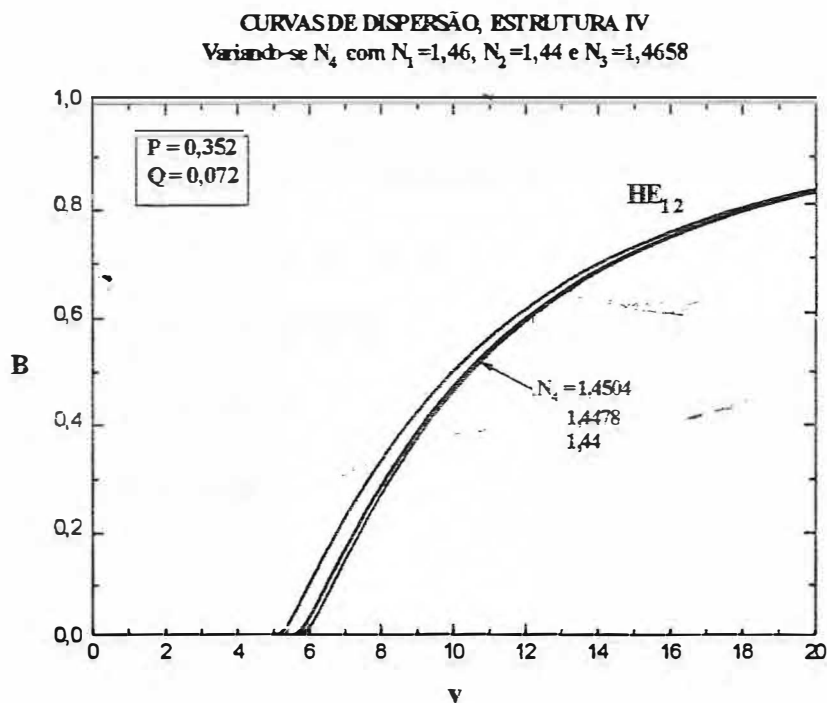


Fig. (3.4-8) Variações no modo HE_{12} , para alguns valores de N_4 , estrutura M-IV

3 . 5 - CONCLUSÕES

Para encerrar este capítulo vai-se tecer algumas considerações quanto aos resultados obtidos. Em primeiro lugar, fica patente a clara diferença de comportamento entre as fibras de estrutura W e M. Isto denuncia que a troca da região com o valor máximo de índice de refração entre o núcleo e a barreira provoca acentuada variação no comportamento das fibras.

Considerando-se as fibras W, percebe-se uma diferença acentuada entre as estruturas I e II, ao contrário das fibras M, cujo comportamento das estruturas III e IV não é tão diferenciado.

Quanto à influência dos parâmetros dimensionais P e Q, percebe-se que a influência deles sobre a dispersão das fibras coaxiais é distinto. Enquanto o aumento no parâmetro P provoca a redução de valor da constante normalizada de propagação B, o inverso se dá com o parâmetro Q.

Quanto ao índice de refração N_4 , a influência definida que fica deste parâmetro é o aumento da constante normalizada de propagação B com a redução do seu valor. Esta influência é facilmente entendida na medida em que a redução de N_4 aumenta o confinamento da luz na fibra, em decorrência do aumento da *barreira* óptica que provoca.

O estudo detalhado das influências dos parâmetros das fibras coaxiais, quanto ao comportamento da sua dispersão, ficará para um trabalho posterior.

CAPÍTULO IV

PERFIS DE CAMPO E INTENSIDADE DA FIBRA COAXIAL

Neste capítulo são analisados os perfis dos campos elétricos para cada estrutura estudada anteriormente. Para isto, são determinados os coeficientes A, B, C, D, E e F, que compõe as soluções das equações de onda das fibras em estudo, para todos os intervalos de valor do índice de refração efetivo de cada uma delas. Serão analisadas apenas as quatro situações que caracterizam as fibras W e M. A importância deste tópico está na geração de informações quanto a transmissão de luz em uma fibra, ref[5] e porque o estudo desses perfis é usado na caracterização dos perfis de índices de refração das fibras, ref.[16], [17].

4 . 1 - Fibra W

A fibra coaxial W apresenta duas estruturas, I e II. A estrutura W-I possui três situações para o índice de refração efetivo, cujas soluções abrangem as demais estruturas.

4 . 1 - 1 - Estrutura W-I

Situação(1) $N_4 < N < N_2$

A expressão para o campo, neste caso, será dado pela eq.(3-1) e para comodidade do leitor será re-escrita a seguir:

$$E_y = \begin{cases} AJ_\ell\left(\frac{U_1\rho}{a}\right)\cos\ell\theta & ; 0 < \rho < a \\ \left[BJ_\ell\left(\frac{W_2\rho}{a}\right) + CY_\ell\left(\frac{W_2\rho}{a}\right) \right] \cos\ell\theta & ; a < \rho < b \\ \left[DJ_\ell\left(\frac{U_3\rho}{b}\right) + EY_\ell\left(\frac{U_3\rho}{b}\right) \right] \cos\ell\theta & ; b < \rho < c \\ FK_\ell\left(\frac{W_4\rho}{c}\right)\cos\ell\theta & ; c < \rho \end{cases} \quad (4-1).$$

A situação (1) possui o seguinte sistema de equações, obtidos no apêndice C, quando estudou-se as dispersões:

$$J_\ell(U_1)A - J_\ell(W_2)B - Y_\ell(W_2)C = 0$$

$$U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1)A - W_2 J_{\ell\pm 1}(W_2)B - W_2 Y_{\ell\pm 1}(W_2)C = 0$$

$$J_\ell(W_3)B + Y_\ell(W_3)C - J_\ell(U_3)D - Y_\ell(U_3)E = 0$$

$$W_3 J_{\ell\pm 1}(W_3)B + W_3 Y_{\ell\pm 1}(W_3)C - U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3)D - U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3)E = 0$$

$$J_\ell(U_4)D + Y_\ell(U_4)E - K_\ell(W_4)F = 0$$

$$\pm U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4)D \pm U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4)E - W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)F = 0$$

Como foi visto no capítulo III este é um sistema homogêneo, compatível e determinado, de seis equações e seis incógnitas. Por conveniência usa-se, sem perder a generalidade, a condição $A=1$. Então, fica-se com o seguinte sistema:

$$J_\ell(W_2)B + Y_\ell(W_2)C = J_\ell(U_1) \quad (4-2);$$

$$W_2 J_{\ell\pm 1}(W_2)B + W_2 Y_{\ell\pm 1}(W_2)C = U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1) \quad (4-3);$$

$$J_\ell(W_3)B + Y_\ell(W_3)C - J_\ell(U_3)D - Y_\ell(U_3)E = 0 \quad (4-4);$$

$$W_3 J_{\ell\pm 1}(W_3)B + W_3 Y_{\ell\pm 1}(W_3)C - U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3)D - U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3)E = 0 \quad (4-5);$$

$$J_\ell(U_4)D + Y_\ell(U_4)E - K_\ell(W_4)F = 0 \quad (4-6);$$

$$\pm U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4)D \pm U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4)E - W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)F = 0 \quad (4-7).$$

Para obter-se as constantes B e C faz-se as seguintes operações com as equações (4-1) e (4-2). Multiplica-se a eq.(4-2) por $W_2 Y_{\ell\pm 1}(W_2)$ e a eq.(4-3) $-Y_\ell(W_2)$, então adiciona-se as equações obtidas; com isto encontra-se B. Faz-se as mesmas operações para obter-se C, só que agora multiplica-se respectivamente as equações (4-2) e (4-3) por $W_2 J_{\ell\pm 1}(W_2)$ e $-J_\ell(W_2)$ adicionando-se então as novas equações. As expressões encontradas para B e C são as seguintes:

$$B = \frac{W_2 Y_{\ell\pm 1}(W_2) J_\ell(U_1) - U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1) Y_\ell(W_2)}{W_2 [Y_{\ell\pm 1}(W_2) J_\ell(W_2) - J_{\ell\pm 1}(W_2) Y_\ell(W_2)]} \quad (4-8);$$

$$C = \frac{W_2 J_{\ell\pm 1}(W_2) J_\ell(U_1) - U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1) J_\ell(W_2)}{W_2 [J_{\ell\pm 1}(W_2) Y_\ell(W_2) - Y_{\ell\pm 1}(W_2) J_\ell(W_2)]} \quad (4-9);$$

Na obtenção das constantes D e E faz-se um processo semelhante ao anterior. Ao multiplicar-se a eq.(4-4) por $U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3)$ e a eq.(4-5) $-Y_\ell(U_3)$ adicionando-se então as equações obtidas encontra-se D. Agora multiplicando-se as mesmas equações respectivamente por $U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3)$ e $-J_\ell(U_3)$ obtêm-se a constante E. A seguir têm-se as expressões para D e E.

$$D = \frac{[U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3) J_\ell(W_3) - W_3 J_{\ell\pm 1}(W_3) Y_\ell(U_3)] B + [U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3) Y_\ell(W_3) - W_3 Y_{\ell\pm 1}(W_3) Y_\ell(U_3)] C}{U_3 [Y_{\ell\pm 1}(U_3) J_\ell(U_3) - J_{\ell\pm 1}(U_3) Y_\ell(U_3)]} \quad (4-10);$$

$$E = \frac{[U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3) J_\ell(W_3) - W_3 J_{\ell\pm 1}(W_3) J_\ell(U_3)] B + [U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3) Y_\ell(W_3) - W_3 Y_{\ell\pm 1}(W_3) J_\ell(U_3)] C}{U_3 [J_{\ell\pm 1}(U_3) Y_\ell(U_3) - Y_{\ell\pm 1}(U_3) J_\ell(U_3)]} \quad (4-11);$$

Para encontrar a constante F basta adicionar as equações (4-6) e (4-7), resultando na expressão.

$$F = \frac{[J_\ell(U_4) \pm U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4)]D + [Y_\ell(U_4) \pm U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4)]E}{[K_\ell(W_4) + W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)]} \quad (4-12).$$

Substituindo-se estes coeficientes na eq.(4-1), obtêm-se o perfil do campo o qual elevado ao quadrado fornece a intensidade do modo.

Situação (2) $N_2 < N < N_3$

Para este caso o perfil do campo elétrico é dada a seguir:

$$E_y = \begin{cases} AJ_\ell\left(\frac{U_1\rho}{a}\right) \cos \ell\theta & ; 0 < \rho < a \\ \left[BI_\ell\left(\frac{W_2\rho}{a}\right) + CK_\ell\left(\frac{W_2\rho}{a}\right) \right] \cos \ell\theta & ; a < \rho < b \\ \left[DJ_\ell\left(\frac{U_3\rho}{b}\right) + EY_\ell\left(\frac{U_3\rho}{b}\right) \right] \cos \ell\theta & ; b < \rho \leq c \\ FK_\ell\left(\frac{W_4\rho}{c}\right) \cos \ell\theta & ; c < \rho \end{cases} \quad (4-13).$$

Para a situação (2) desta estrutura, tem-se o seguinte sistema:

$$J_\ell(U_1)A - I_\ell(W_2)B - K_\ell(W_2)C = 0$$

$$U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1)A \pm W_2 I_{\ell\pm 1}(W_2)B \mp W_2 K_{\ell\pm 1}(W_2)C = 0$$

$$I_\ell(W_3)B + K_\ell(W_3)C - J_\ell(U_3)D - Y_\ell(U_3)E = 0$$

$$\mp W_3 I_{\ell\pm 1}(W_3)B \pm W_3 K_{\ell\pm 1}(W_3)C - U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3)D - U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3)E = 0$$

$$J_{\ell}(U_4)D + Y_{\ell}(U_4)E - K_{\ell}(W_4)F = 0$$

$$\pm U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4)D \pm U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4)E - W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)F = 0$$

Também aqui, sem perder a generalidade, usa-se a condição $A=1$. Com ela fica-se com o seguinte sistema:

$$I_{\ell}(W_2)B + K_{\ell}(W_2)C = J_{\ell}(U_1) \tag{4-14};$$

$$\mp W_2 I_{\ell\pm 1}(W_2)B \pm W_2 K_{\ell\pm 1}(W_2)C = U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1) \tag{4-15};$$

$$I_{\ell}(W_3)B + K_{\ell}(W_3)C - J_{\ell}(U_3)D - Y_{\ell}(U_3)E = 0 \tag{4-16};$$

$$\mp W_3 I_{\ell\pm 1}(W_3)B \pm W_3 K_{\ell\pm 1}(W_3)C - U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3)D - U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3)E = 0 \tag{4-17};$$

$$J_{\ell}(U_4)D + Y_{\ell}(U_4)E - K_{\ell}(W_4)F = 0 \tag{4-18};$$

$$\pm U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4)D \pm U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4)E - W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)F = 0 \tag{4-19}.$$

Fazendo-se o mesmo procedimento feito na situação(1) para a obtenção das constantes, encontra-se então as seguintes expressões para cada constante do sistema anterior:

$$B = \frac{W_2 K_{\ell\pm 1}(W_2) J_{\ell}(U_1) \mp U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1) K_{\ell}(W_2)}{W_2 [K_{\ell\pm 1}(W_2) I_{\ell}(W_2) + I_{\ell\pm 1}(W_2) K_{\ell}(W_2)]} \tag{4-20};$$

$$C = \frac{W_2 I_{\ell\pm 1}(W_2) J_{\ell}(U_1) \pm U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1) I_{\ell}(W_2)}{W_2 [I_{\ell\pm 1}(W_2) K_{\ell}(W_2) + K_{\ell\pm 1}(W_2) I_{\ell}(W_2)]} \tag{4-21};$$

$$D = \frac{[U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3) I_{\ell}(W_3) \pm W_3 I_{\ell\pm 1}(W_3) Y_{\ell}(U_3)] B + [U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3) K_{\ell}(W_3) \mp W_3 K_{\ell\pm 1}(W_3) Y_{\ell}(U_3)] C}{U_3 [Y_{\ell\pm 1}(U_3) J_{\ell}(U_3) - J_{\ell\pm 1}(U_3) Y_{\ell}(U_3)]} \tag{4-22};$$

$$E = \frac{[U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3) I_{\ell}(W_3) \pm W_3 I_{\ell\pm 1}(W_3) J_{\ell}(U_3)] B + [U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3) K_{\ell}(W_3) \mp W_3 K_{\ell\pm 1}(W_3) J_{\ell}(U_3)] C}{U_3 [J_{\ell\pm 1}(U_3) Y_{\ell}(U_3) - Y_{\ell\pm 1}(U_3) J_{\ell}(U_3)]} \tag{4-23};$$

$$F = \frac{[J_\ell(U_4) + U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4)]D + [Y_\ell(U_4) + U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4)]E}{[K_\ell(W_4) \pm W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)]} \quad (4-24).$$

Substituindo-se essas expressões na eq.(5-13), encontra-se o perfil do campo e conseqüentemente sua intensidade.

Situação(3) $N_3 < N < N_1$

Com o propósito de encontrar uma solução para a situação (3) faz-se o mesmo procedimento feito para os outros casos. A componente transversal do campo elétrico neste caso é dado a seguir:

$$E_y = \begin{cases} AJ_\ell\left(\frac{U_1\rho}{a}\right) \cos \ell\theta & ; 0 < \rho < a \\ \left[BI_\ell\left(\frac{W_2\rho}{a}\right) + CK_\ell\left(\frac{W_2\rho}{a}\right) \right] \cos \ell\theta & ; a < \rho < b \\ \left[DI_\ell\left(\frac{U_3\rho}{b}\right) + EK_\ell\left(\frac{U_3\rho}{b}\right) \right] \cos \ell\theta & ; b < \rho < c \\ FK_\ell\left(\frac{W_4\rho}{c}\right) \cos \ell\theta & ; c < \rho \end{cases} \quad (4-25).$$

O sistema de equações correspondentes a este caso, que foi obtido no apêndice C, será:

$$J_\ell(U_1)A - I_\ell(W_2)B - K_\ell(W_2)C = 0$$

$$U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1)A \pm W_2 I_{\ell\pm 1}(W_2)B \mp W_2 K_{\ell\pm 1}(W_2)C = 0$$

$$I_\ell(W_3)B + K_\ell(W_3)C - I_\ell(U_3)D - K_\ell(U_3)E = 0$$

$$W_3 I_{\ell\pm 1}(W_3)B - W_3 K_{\ell\pm 1}(W_3)C - U_3 I_{\ell\pm 1}(U_3)D + U_3 K_{\ell\pm 1}(U_3)E = 0$$

$$I_\ell(U_4)D + K_\ell(U_4)E - K_\ell(W_4)F = 0$$

$$U_4 I_{\ell\pm 1}(U_4)D - U_4 K_{\ell\pm 1}(U_4)E + W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)F = 0$$

Por conveniência usa-se na solução deste sistema homogêneo, sem perder a generalidade, a condição $A=1$. Com isto, fica-se com o seguinte sistema:

$$I_\ell(W_2)B + K_\ell(W_2)C = J_\ell(U_1) \quad (4-26);$$

$$\mp W_2 I_{\ell\pm 1}(W_2)B \pm W_2 K_{\ell\pm 1}(W_2)C = U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1) \quad (4-27);$$

$$I_\ell(W_3)B + K_\ell(W_3)C - I_\ell(U_3)D - K_\ell(U_3)E = 0 \quad (4-28);$$

$$W_3 I_{\ell\pm 1}(W_3)B - W_3 K_{\ell\pm 1}(W_3)C - U_3 I_{\ell\pm 1}(U_3)D + U_3 K_{\ell\pm 1}(U_3)E = 0 \quad (4-29);$$

$$I_\ell(U_4)D + K_\ell(U_4)E - K_\ell(W_4)F = 0 \quad (4-30);$$

$$U_4 I_{\ell\pm 1}(U_4)D - U_4 K_{\ell\pm 1}(U_4)E + W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)F = 0 \quad (4-31).$$

Usando-se o mesmo procedimento da situação(1), encontra-se as expressões para cada constante do sistema:

$$B = \frac{W_2 K_{\ell\pm 1}(W_2) J_\ell(U_1) \mp U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1) K_\ell(W_2)}{W_2 [K_{\ell\pm 1}(W_2) I_\ell(W_2) + I_{\ell\pm 1}(W_2) K_\ell(W_2)]} \quad (4-32);$$

$$C = \frac{W_2 I_{\ell\pm 1}(W_2) J_\ell(U_1) \pm U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1) I_\ell(W_2)}{W_2 [I_{\ell\pm 1}(W_2) K_\ell(W_2) + K_{\ell\pm 1}(W_2) I_\ell(W_2)]} \quad (4-33);$$

$$D = \frac{[U_3 K_{\ell\pm 1}(U_3) I_\ell(W_3) + W_3 I_{\ell\pm 1}(W_3) K_\ell(U_3)] B + [U_3 K_{\ell\pm 1}(U_3) K_\ell(W_3) - W_3 K_{\ell\pm 1}(W_3) K_\ell(U_3)] C}{U_3 [K_{\ell\pm 1}(U_3) I_\ell(U_3) + I_{\ell\pm 1}(U_3) K_\ell(U_3)]} \quad (4-34);$$

$$E = \frac{[U_3 I_{\ell\pm 1}(U_3) I_\ell(W_3) - W_3 I_{\ell\pm 1}(W_3) I_\ell(U_3)] B + [U_3 I_{\ell\pm 1}(U_3) K_\ell(W_3) + W_3 K_{\ell\pm 1}(W_3) I_\ell(U_3)] C}{U_3 [K_{\ell\pm 1}(U_3) I_\ell(U_3) + I_{\ell\pm 1}(U_3) K_\ell(U_3)]} \quad (4-35);$$

$$F = \frac{[I_0(U_4) + U_4 I_{2n}(U_4)]D + [K_0(U_4) - U_4 K_{2n}(U_4)]E}{[K_0(W_4) - W_4 K_{2n}(W_4)]} \quad (4-36).$$

Ao substituir-se essas expressões na eq.(4-25), encontra-se o perfil do campo e sua intensidade nesta região. Por conseguinte obtêm-se o perfil do campo e a intensidade para todas as regiões da estrutura W-I.

4 . 1 - 2 - Estrutura II

A estrutura W-II é um caso particular da W-I, tendo apenas duas regiões de índice de refração efetivo para os quais pode ocorrer guiamento (2) e a (3). Elas coincidem às da estrutura W-I, diferindo pelos argumentos das funções de Bessel. Logo, encontra-se os perfis de campo e intensidade dos modos desta estrutura mudando-se esses argumentos nas equações (4-13) e (4-25). A seguir serão dados os argumentos das funções de Bessel.

Situação(1), $N_4 < N < N_3$.

Neste caso a diferença fundamental está nos parâmetros U_i e W_i que são definidos a seguir:

$$\begin{aligned} W_2 &= \left[B + \left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_1^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{a}{c}, & U_3 &= \left[\left(\frac{N_3^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right) - B \right]^{1/2} v \frac{b}{c}, \\ W_3 &= \left[B + \left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_1^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{b}{c}, & U_4 &= \left[\left(\frac{N_3^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right) - B \right]^{1/2} v, \\ W_4 &= B^{1/2} v, & U_1 &= [1 - B]^{1/2} v \frac{b}{c}. \end{aligned} \quad (4-37).$$

Substituindo-se esses argumentos na eq.(4-13), obtêm-se os perfis de campo e de intensidade para esta situação da estrutura W-II.

Situação(2) $N_3 < N < N_1$

Para esta situação os argumentos das funções de Bessel que são:

$$\begin{aligned}
 W_2 &= \left[B + \left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_1^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{a}{c}, & U_3 &= \left[B - \left(\frac{N_3^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{b}{c}, \\
 W_3 &= \left[B + \left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_1^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{b}{c}, & U_4 &= \left[B - \left(\frac{N_3^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v, \\
 W_4 &= B^{1/2} v, & U_1 &= [1 - B]^{1/2} v \frac{b}{c}.
 \end{aligned} \tag{4-38}$$

Com esses argumentos substituídos na eq.(4-25) obtêm-se os perfis de campo e por conseqüência a intensidade dos modos.

4 . 1 - 3 - Perfis de campo e intensidade, modo HE_{11}

Nesta seção são apresentados os resultados para os perfis de campo e intensidade, obtidos através de métodos numéricos. As figuras (4.1-1) e (4.1-2) mostram os perfis dos campos e das intensidade para os modos HE_{11} da estrutura W-I e W-II.

Quanto ao modo HE_{11} da estrutura W-I, observa-se no seu perfil uma alteração de forma na medida em que há a variação da frequência normalizada, e por conseqüência a constante normalizada de propagação B. Pode-se explicar esta modificação através do índice de refração efetivo N.

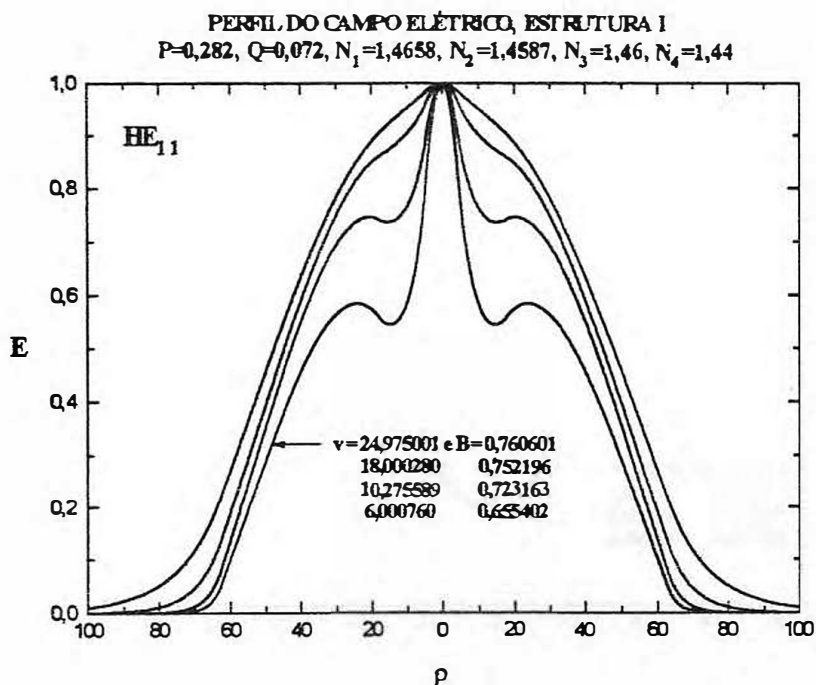


Fig. (4.1-1) Perfil do campo para a estrutura W-I

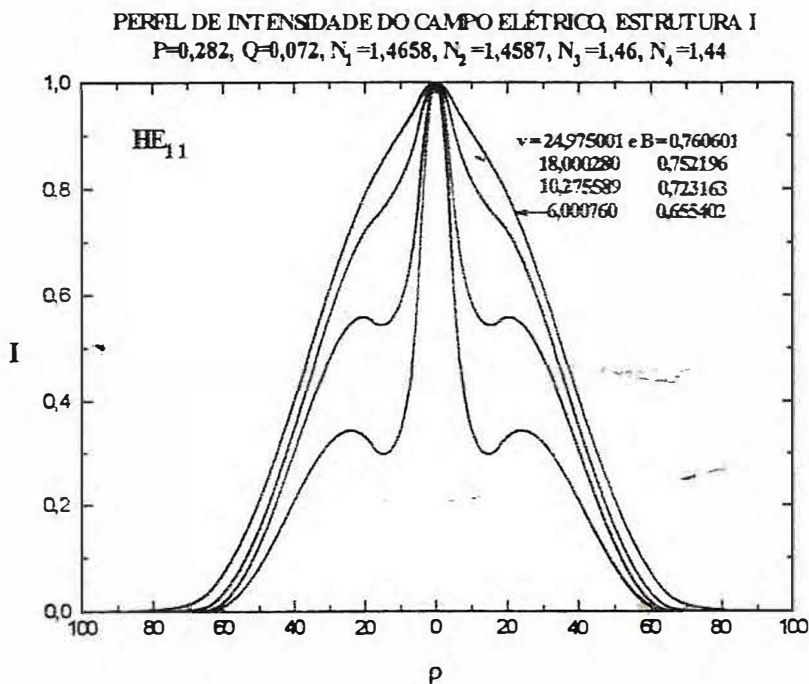


Fig. (4.1-2) Perfil da intensidade do campo elétrico para a estrutura W-I

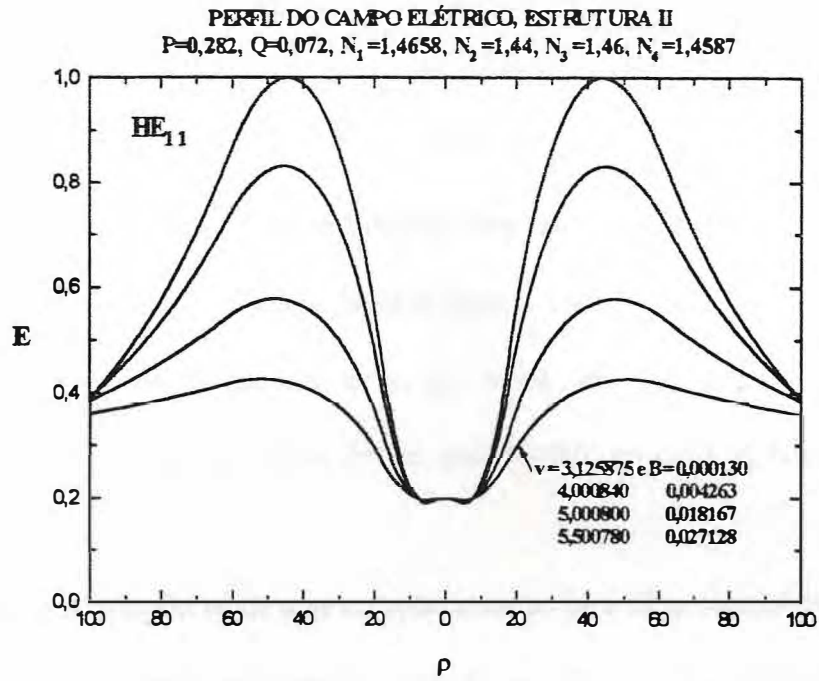


Fig. (4.1-3) Perfil de campo para o modo HE_{11} , estrutura W-II

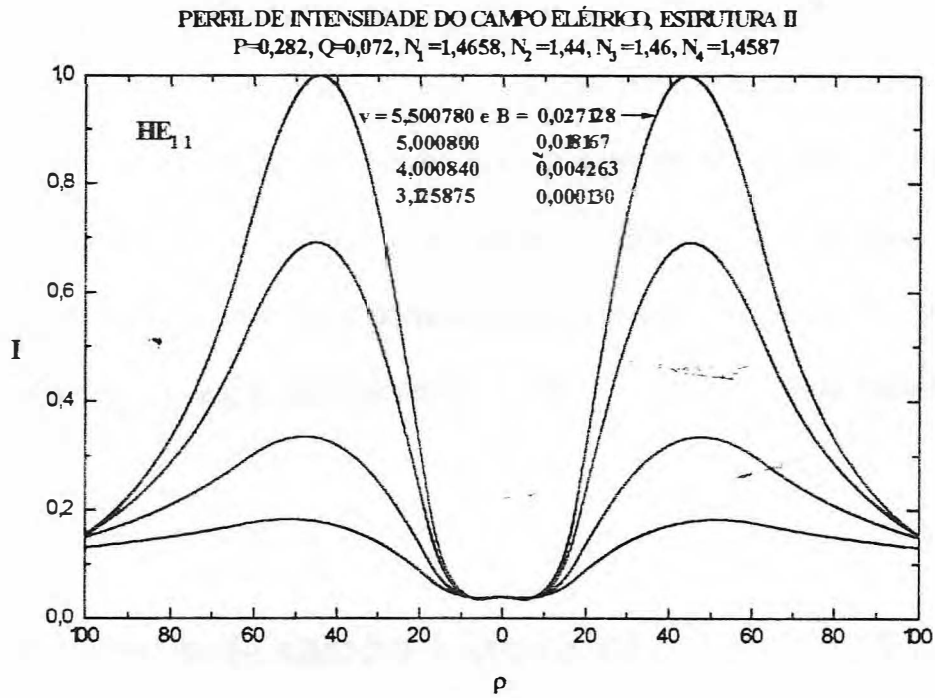


Fig. (4.1-4) Perfil de intensidade do campo, estrutura W-II

Para pequenos valores de v , portanto de B e N , o modo HE_{11} da estrutura W-I se comporta como se o guia fosse do tipo bastão. Desta forma, o perfil do modo tende a ser o do tipo HE_{11} de uma fibra bastão. Observa-se distorções próximo ao máximo de intensidade, em $\rho = 0$, em face da influência da parte tubo da fibra coaxial. O aumento do índice de refração efetivo N leva à maior influência da parte tubo, e o modo passa a ter alças na sua distribuição. Para valores ainda maiores de v , por volta de 100, o modo volta a se comportar como um modo do tipo HE_{11} de um guia bastão; no caso, o núcleo da fibra coaxial.

Observa-se que o modo tende a se comportar como se a fibra coaxial fosse do tipo tubo. Apenas para valores muito grandes de v (acima de 100) é que a influência da parte central começa a ser percebida. Com isto, o modo tende a ser mais largo do que o modo análogo da estrutura W-I e até mesmo das estruturas M , como pode ser visto nas figuras (4.1-1), (4.2-2) e (4.2-4). Com isto, a curva de dispersão dos modos da estrutura W-II mostram uma maior sensibilidade às mudanças dos parâmetros dimensionais P e Q , e do índice de refração da casca, já vistas no capítulo II. A explicação para a maior largura dos modos HE_{11} , pode estar no processo de interação entre as partes bastão e tubo, que tenderia a afastar o modo do centro em face de N_1 ser maior do que N_3 . Esta análise será feita futuramente.

4 . 1 - 4 - Perfis de campo e intensidade, modo HE_{12}

Vejamos agora, os resultados obtidos para os modos HE_{12} , calculados nas mesmas condições usadas para os modos HE_{11} .

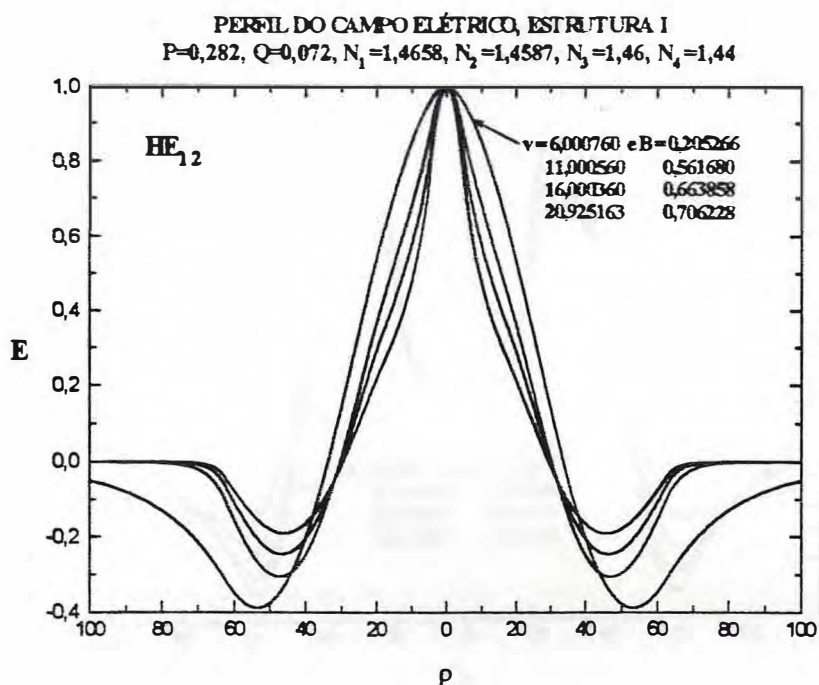


Fig. (4.1-5) Perfil do campo para o modo HE_{12} , estrutura W-I

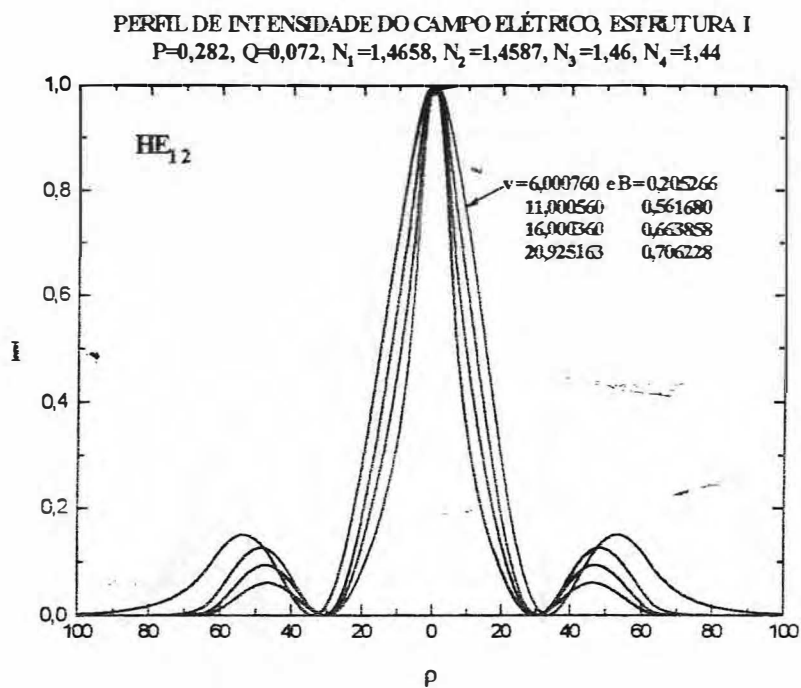


Fig. (4.1-6) Perfil de intensidade para o modo HE_{12} , estrutura W-I

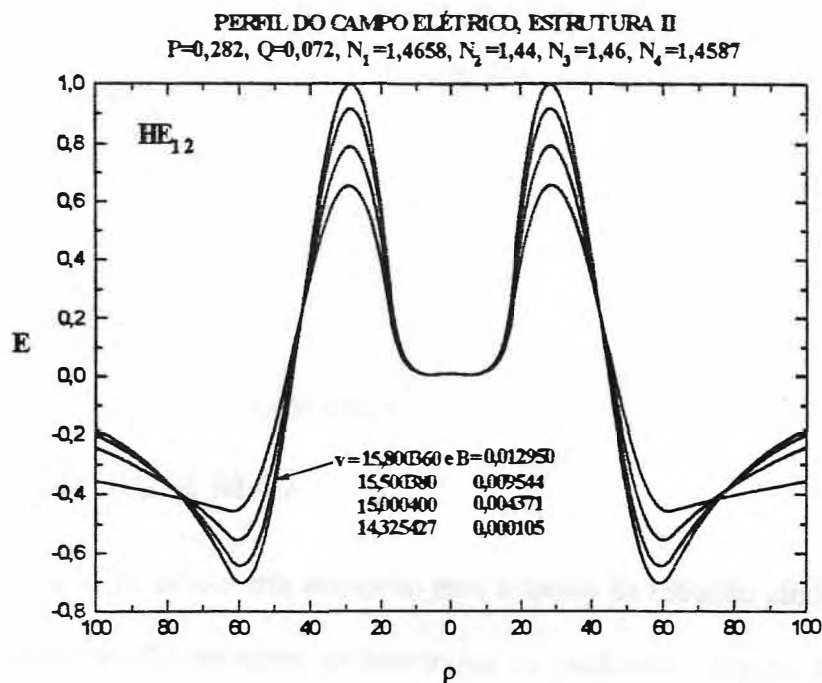


Fig. (4.1-7) Perfil de campo, estrutura W-II

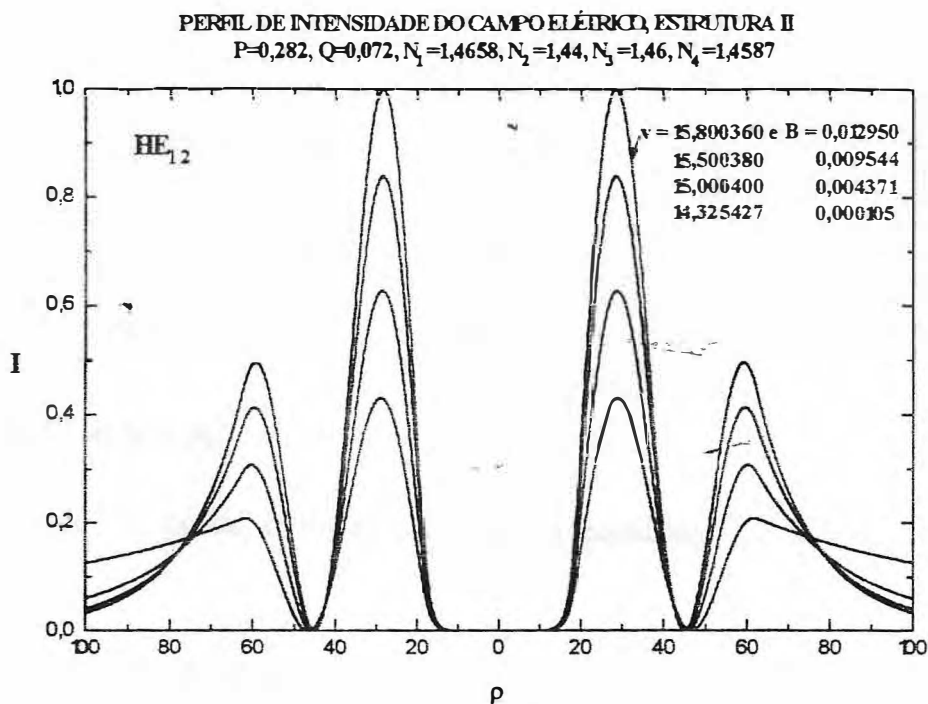


Fig. (4.1-8) Perfil de intensidade para o modo HE_{12} , estrutura W-II

Comentários análogos aos feitos para os modos HE_{11} são válidos para os modos HE_{12} . Enfatizando-se apenas o fato da estrutura W-II continuar a apresentar pouca dependência da parte central da fibra.

4 . 2 - Fibra M

Esta fibra apresenta duas estruturas a M-III e M-IV.

4 . 2 - 1 - Estrutura M-III

A estrutura M-III possui três situações para o índice de refração efetivo, sendo que apenas para a situação (3) necessita se determinar os parâmetros requeridos. As outras situações já foram obtidas quando estudou-se a fibra W. A expressão para a componente transversal do campo elétrico, neste caso, será dado pela eq.(4-39), a seguir.

$$E_y = \begin{cases} AI_\ell \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \cos \ell \theta & ; 0 < \rho < a \\ \left[BI_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + CK_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \cos \ell \theta & ; a < \rho < b \\ \left[DJ_\ell \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EY_\ell \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \cos \ell \theta & ; b < \rho < c \\ FK_\ell \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \cos \ell \theta & ; c < \rho \end{cases} \quad (4-39).$$

Situação(3) $N_1 < N < N_3$

A situação (3) possui o seguinte sistema de equações, que são mostrados no apêndice C:

$$J_\ell(U_1)A - I_\ell(W_2)B - K_\ell(W_2)C = 0$$

$$U_1 J_{\ell \pm 1}(U_1)A - W_2 I_{\ell \pm 1}(W_2)B - W_2 K_{\ell \pm 1}(W_2)C = 0$$

$$I_\ell(W_3)B + K_\ell(W_3)C - I_\ell(U_3)D - K_\ell(U_3)E = 0$$

$$W_3 I_{\ell\pm 1}(W_3)B - W_3 K_{\ell\pm 1}(W_3)C - U_3 I_{\ell\pm 1}(U_3)D + U_3 K_{\ell\pm 1}(U_3)E = 0$$

$$I_\ell(U_4)D + K_\ell(U_4)E - K_\ell(W_4)F = 0$$

$$U_4 I_{\ell\pm 1}(U_4)D - U_4 K_{\ell\pm 1}(U_4)E + W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)F = 0$$

Os argumentos das funções de Bessel deste sistema são:

$$\begin{aligned} W_2 &= \left[B - \left(\frac{N_2^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{a}{c}, & U_1 &= \left[B - \left(\frac{N_1^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{a}{c}, \\ W_3 &= \left[B - \left(\frac{N_2^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{b}{c}, & U_3 &= [1 - B]^{1/2} v \frac{b}{c}, \\ W_4 &= B^{1/2} v, & U_4 &= [1 - B]^{1/2} v. \end{aligned} \quad (4-40)$$

O procedimento será o mesmo realizado nos casos anteriores para a solução de um sistema homogêneo compatível e determinado, de seis equações e seis incógnitas. Sem perder a generalidade usa-se a condição $A=1$. Então, encontra-se com o seguinte sistema:

$$I_\ell(W_2)B + K_\ell(W_2)C = J_\ell(U_1) \quad (4-41);$$

$$\mp W_2 I_{\ell\pm 1}(W_2)B \pm W_2 K_{\ell\pm 1}(W_2)C = U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1) \quad (4-42);$$

$$I_\ell(W_3)B + K_\ell(W_3)C - I_\ell(U_3)D - K_\ell(U_3)E = 0 \quad (4-43);$$

$$W_3 I_{\ell\pm 1}(W_3)B - W_3 K_{\ell\pm 1}(W_3)C - U_3 I_{\ell\pm 1}(U_3)D + U_3 K_{\ell\pm 1}(U_3)E = 0 \quad (4-44);$$

$$I_\ell(U_4)D + K_\ell(U_4)E - K_\ell(W_4)F = 0 \quad (4-45);$$

$$U_4 I_{\ell\pm 1}(U_4)D - U_4 K_{\ell\pm 1}(U_4)E + W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)F = 0 \quad (4-46).$$

Com o mesmo procedimento para a situação(1) da fibra W , encontra-se as expressões para cada constante do sistema que são as seguintes:

$$B = \frac{W_2 K_{\ell\pm 1}(W_2) J_{\ell}(U_1) \mp U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1) K_{\ell}(W_2)}{W_2 [K_{\ell\pm 1}(W_2) I_{\ell}(W_2) + I_{\ell\pm 1}(W_2) K_{\ell}(W_2)]} \quad (4-47);$$

$$C = \frac{W_2 I_{\ell\pm 1}(W_2) J_{\ell}(U_1) \pm U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1) I_{\ell}(W_2)}{W_2 [K_{\ell\pm 1}(W_2) I_{\ell}(W_2) + I_{\ell\pm 1}(W_2) K_{\ell}(W_2)]} \quad (4-48);$$

$$D = \frac{[U_3 K_{\ell\pm 1}(U_3) I_{\ell}(W_3) + W_3 I_{\ell\pm 1}(W_3) K_{\ell}(U_3)] B + [U_3 K_{\ell\pm 1}(U_3) K_{\ell}(W_3) - W_3 K_{\ell\pm 1}(W_3) K_{\ell}(U_3)] C}{U_3 [K_{\ell\pm 1}(U_3) I_{\ell}(U_3) + I_{\ell\pm 1}(U_3) K_{\ell}(U_3)]} \quad (4-49);$$

$$E = \frac{[U_3 I_{\ell\pm 1}(U_3) I_{\ell}(W_3) - W_3 I_{\ell\pm 1}(W_3) I_{\ell}(U_3)] B + [U_3 I_{\ell\pm 1}(U_3) K_{\ell}(W_3) + W_3 K_{\ell\pm 1}(W_3) I_{\ell}(U_3)] C}{U_3 [I_{\ell\pm 1}(U_3) K_{\ell}(U_3) + K_{\ell\pm 1}(U_3) I_{\ell}(U_3)]} \quad (4-50);$$

$$F = \frac{[I_{\ell}(U_4) + U_4 I_{\ell\pm 1}(U_4)] D + [K_{\ell}(U_4) - U_4 K_{\ell\pm 1}(U_4)] E}{[K_{\ell}(W_4) - W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)]} \quad (4-51).$$

Substituindo-se estes coeficientes na eq.(4-39) obtêm-se o perfil do campo e em conseqüência a intensidade, para esta região da estrutura III da fibra M. As demais regiões desta estrutura são dadas pelas expressões obtidas para as situações (2) e (3) da fibra W, diferindo apenas pelos argumentos das funções de Bessel que serão dados a seguir:

Situação(1) $N_4 < N < N_1$

Tal situação é idêntica à situação(1) da estrutura I da fibra W e a solução para o perfil do campo difere pelos parâmetros U_i e W_i dados por:

$$\begin{aligned} W_2 &= \left[B + \left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_3^2 - N_4^2} \right)^{1/2} v \frac{a}{c} \right], & U_1 &= \left[\left(\frac{N_1^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right) - B \right]^{1/2} v \frac{a}{c}, \\ W_3 &= \left[B + \left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_3^2 - N_4^2} \right)^{1/2} v \frac{b}{c} \right], & U_3 &= [1 - B]^{1/2} v \frac{b}{c}, \\ W_4 &= B^{1/2} v, & U_4 &= [1 - B]^{1/2} v. \end{aligned} \quad (4-52).$$

Situação(2) $N_1 < N < N_3$

O perfil do campo neste caso é semelhante ao da situação (2) da estrutura I da fibra W sendo diferente apenas pelos argumentos das funções de Bessel, que serão:

$$\begin{aligned}
 W_2 &= \left[B + \left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_3^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{a}{c}, & U_1 &= \left[B - \left(\frac{N_1^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{a}{c}, \\
 W_3 &= \left[B + \left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_3^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{b}{c}, & U_3 &= [1 - B]^{1/2} v \frac{b}{c}, \\
 W_4 &= B^{1/2} v, & U_4 &= [1 - B]^{1/2} v.
 \end{aligned} \tag{4-53}.$$

4 . 2 - 2 - Estrutura M-IV**Situação(1) $N_4 < N < N_1$**

Tal situação é idêntica à situação(1) da estrutura anterior diferindo apenas pelos parâmetros U_i e W_i que são dados por:

$$\begin{aligned}
 W_2 &= \left[B + \left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_3^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{a}{c}, & U_1 &= \left[\left(\frac{N_1^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right)^{1/2} - B \right] v \frac{a}{c}, \\
 W_3 &= \left[B + \left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_3^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{b}{c}, & U_3 &= [1 - B]^{1/2} v \frac{b}{c}, \\
 W_4 &= B^{1/2} v, & U_4 &= [1 - B]^{1/2} v.
 \end{aligned} \tag{4-53}.$$

Situação(2) $N_1 < N < N_3$

O perfil do campo é elétrico é dado pela eq.(4-39) onde os argumentos das funções de Bessel serão:

$$\begin{aligned}
W_2 &= \left[B + \left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_3^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{a}{c}, & U_1 &= \left[B - \left(\frac{N_1^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{a}{c}, \\
W_3 &= \left[B + \left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_3^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{b}{c}, & U_3 &= [1 - B]^{1/2} v \frac{b}{c}, \\
W_4 &= B^{1/2} v, & U_4 &= [1 - B]^{1/2} v.
\end{aligned} \tag{4-54}$$

Ao substituir as constantes encontradas na situação (3) da fibra M e esses parâmetros na eq.(4-39) obtêm-se o campo para essa estrutura.

4 . 2 - 3 - Perfis de campo e de intensidade, modo HE₁₁

Serão, agora, verificados o comportamento dos modos HE₁₁ de uma fibra do tipo M. As figuras (4.2-1) e (4.2-2) apresentam, respectivamente, os perfis de campo e intensidade referente à estrutura M-III. Neles, verifica-se que a distribuição de campo ou intensidade só apresenta um comportamento do tipo bastão para pequenos valores de N (ou B). O aumento de N leva ao aparecimento da influência da parte tubo da fibra (região barreira) e os modos apresentam um comportamento de características de uma fibra tubo. Não há, no intervalo de B apresentados nas figuras, nenhuma aparente influência da parte bastão das fibras.

Quanto à estrutura M-IV, o mesmo comportamento se repete. Apenas é perceptível um maior espaçamento entre os lóbulos de máximo dos modos HE₁₁ e uma maior largura destes modos, quando comparados aos mesmos modos da estrutura M-III. Observa-se, também, que os modos da estrutura M-IV, com a diminuição do valor de N (ou B), não se comportam como o da fibra bastão, como os da fibra M-III. O elevado alargamento do modo deve levá-lo à condição de corte. Este detalhe será examinado futuramente.

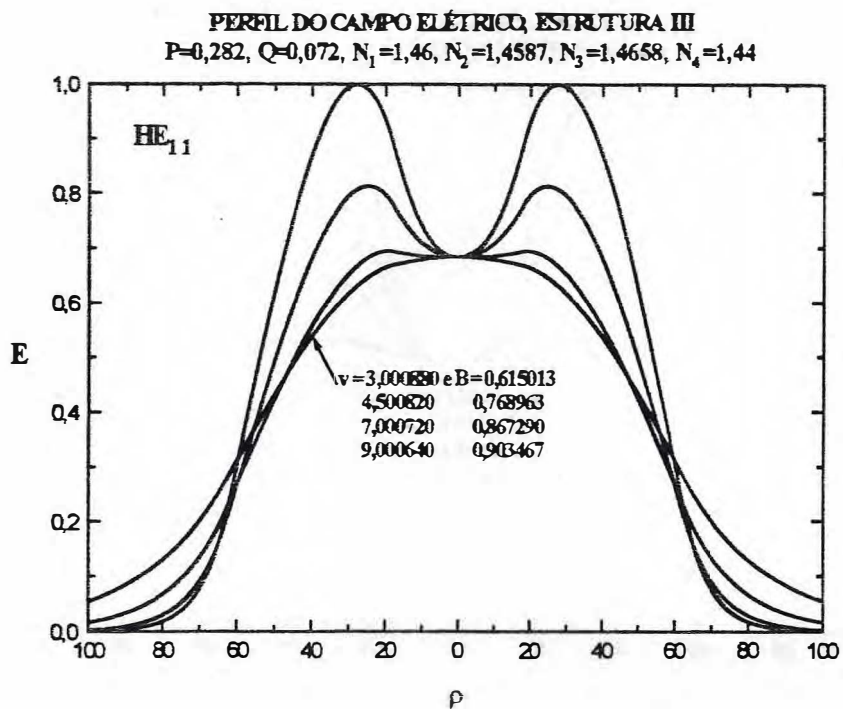


Fig. (4.2-1) Perfil de campo para o modo HE_{11} , estrutura M-III

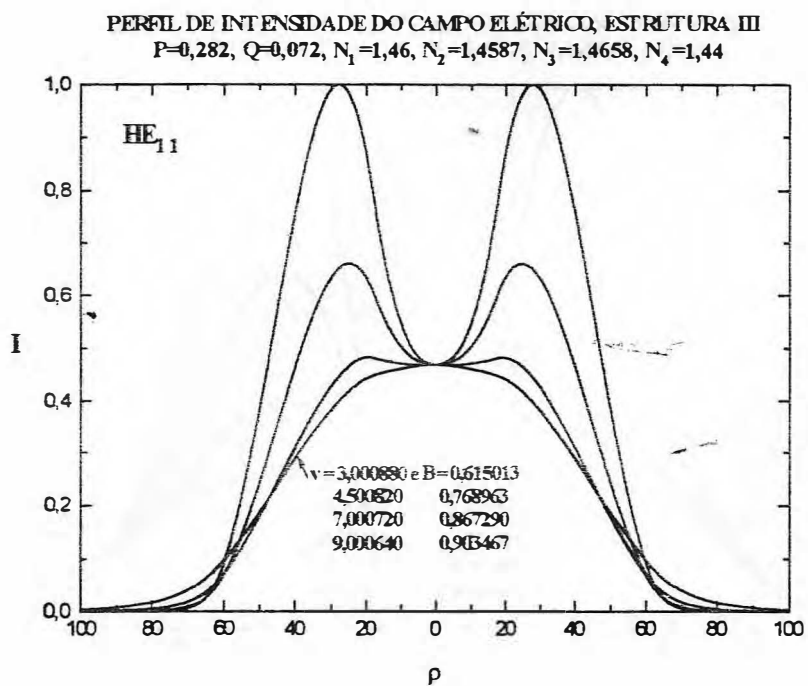


Fig. (4.2-2) Perfil de intensidade para o modo HE_{11} , estrutura M-III

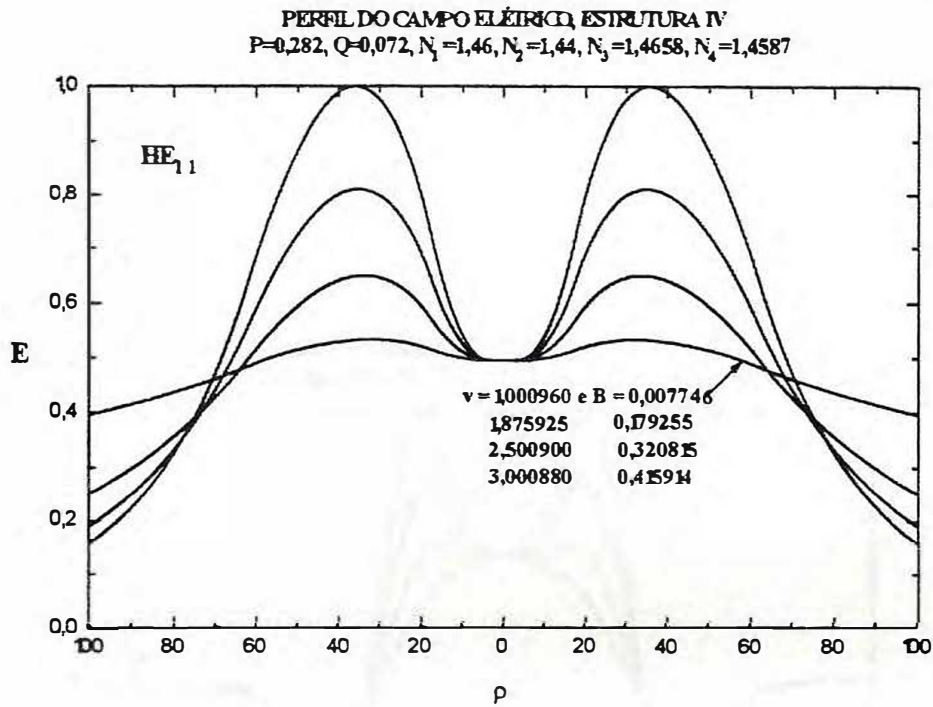


Fig. (4.2-3) Perfil de campo para o modo HE_{11} , estrutura M-IV

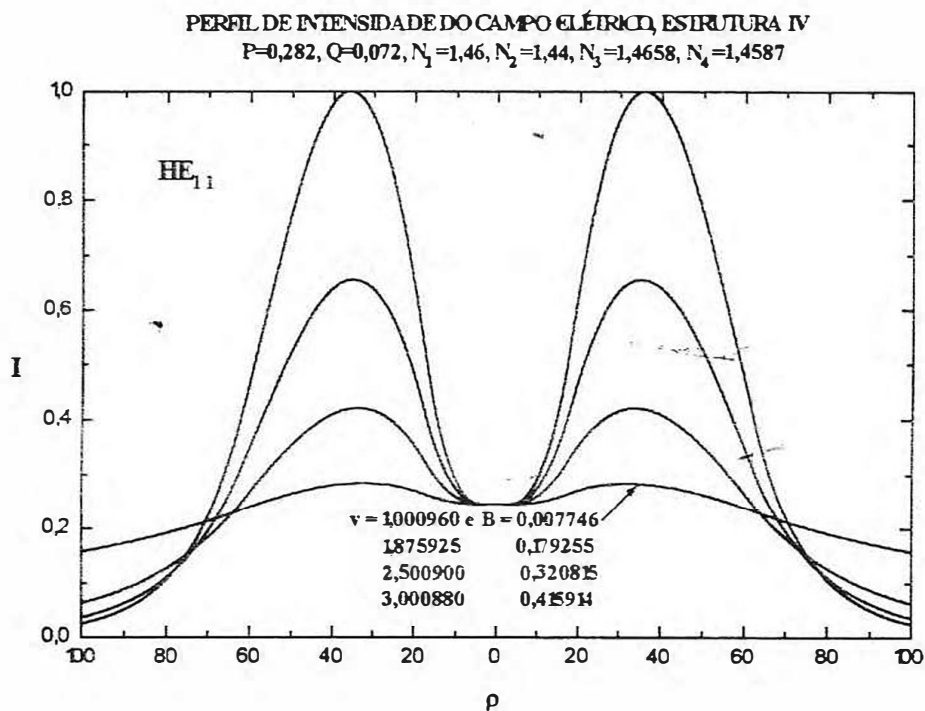


Fig. (4.2-4) Perfil de intensidade para o modo HE_{11} , estrutura M-IV

4 . 2 - 2 - Perfis de campo e de intensidade, modo HE₁₂

Quanto aos modos HE₁₂ das fibras M-III e M-IV, não têm-se nenhum comentário adicional aos já feitos para os modos HE₁₁.

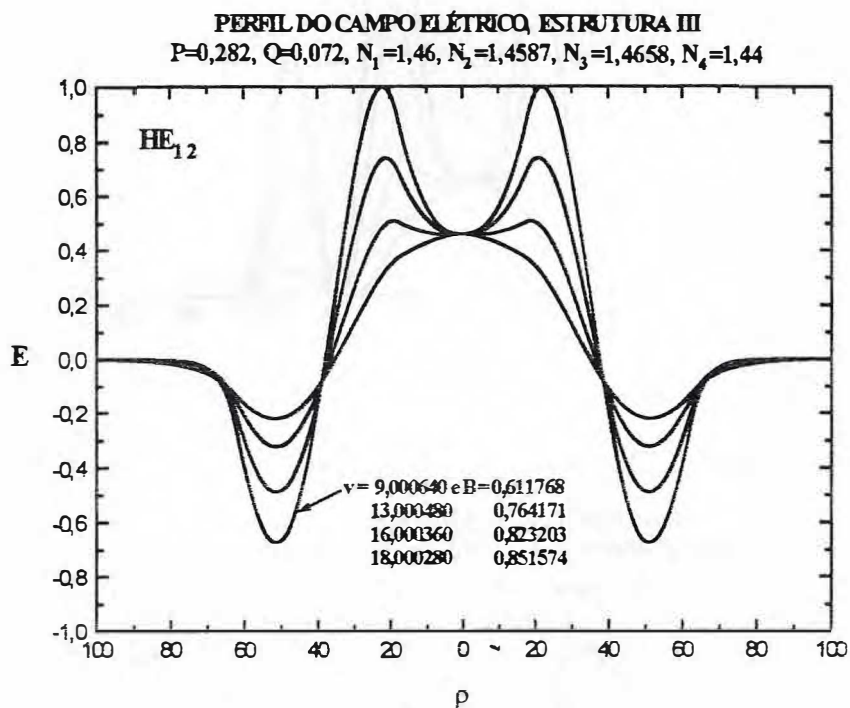


Fig. (4.2-5) Perfil de campo para o modo HE₁₂, estrutura M-III

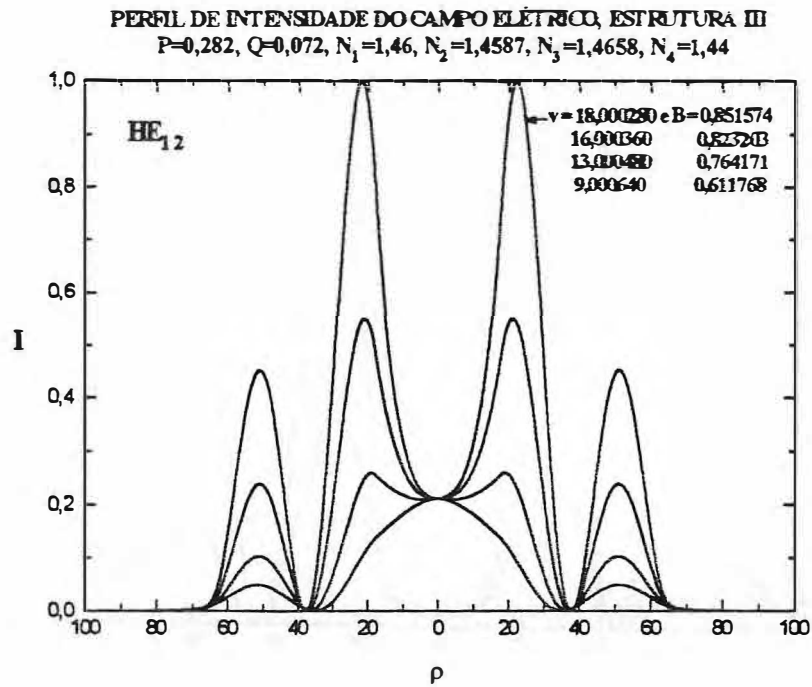


Fig. (4.2-6) Perfil de intensidade para o modo HE_{12} , estrutura M-III

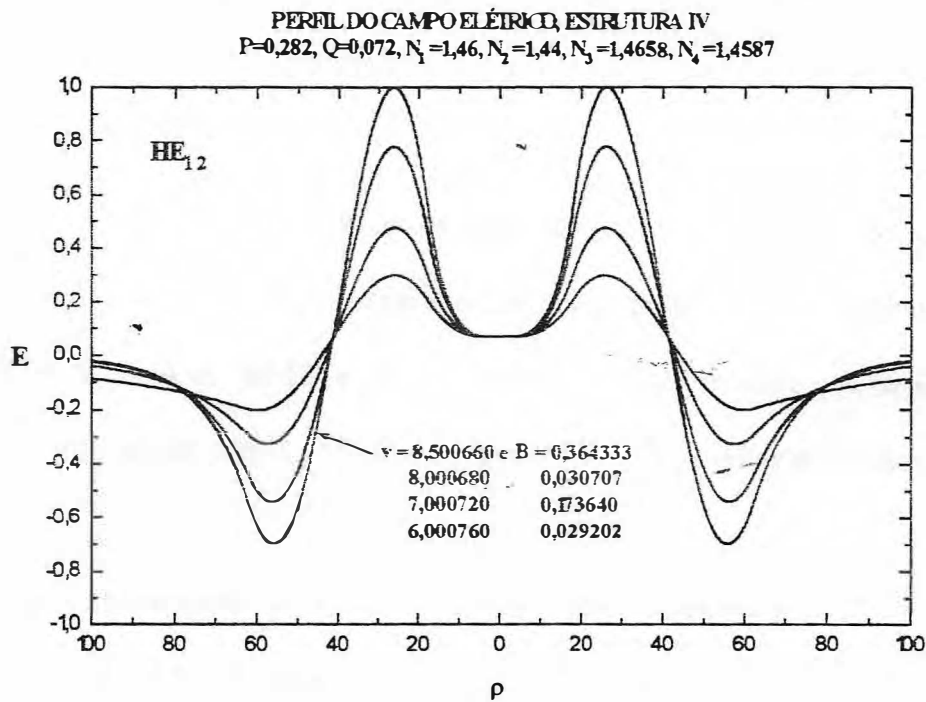


Fig. (4.2-7) Perfil de campo para o modo HE_{12} , estrutura M-IV

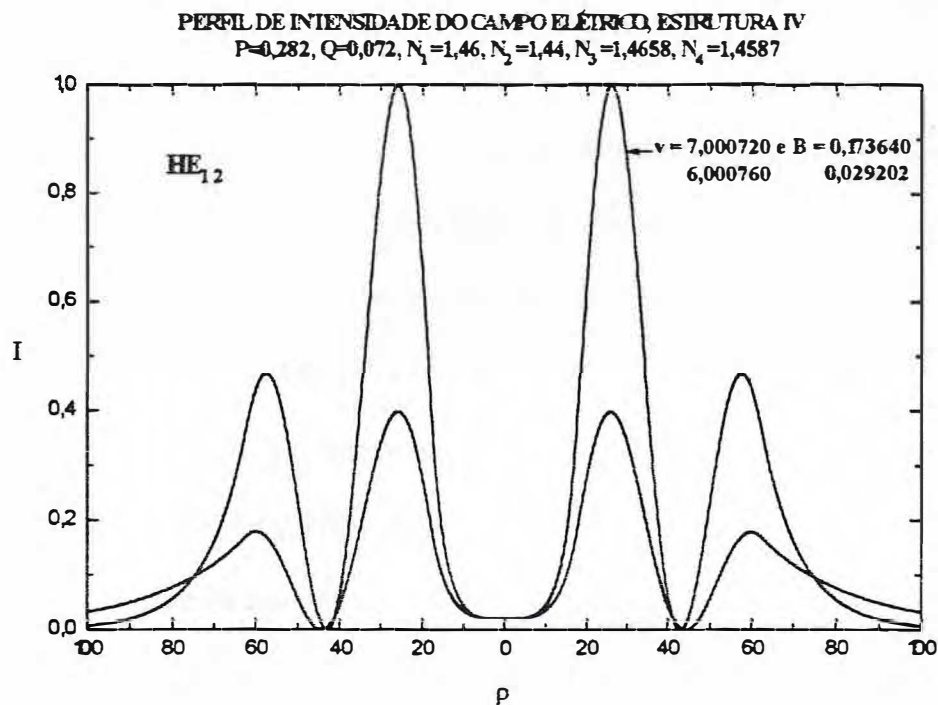


Fig. (4.2-8) Perfil de intensidade para o modo HE_{12} , estrutura M-IV

4.3 - Conclusões

Neste capítulo foram apresentadas as expressões obtidas para os coeficientes A, B, C, D, E e F com os quais se pode determinar as funções de onda referentes às soluções das fibras coaxiais W-I, W-II, M-III e M-IV, estudadas neste trabalho. A seguir foram apresentados os perfis de campo e intensidade dos modos propagantes nos quatro tipos de fibras estudadas.

Foi dada ênfase apenas ao estudo do comportamento dos modos HE_{11} e HE_{12} , em face da sua importância para o modelamento dos filtros espectrais em foco, bem como para

não se carregar demasiadamente o trabalho de informações que, quando necessária poderão ser obtidas com o uso dos programas desenvolvidos.

Nas análises realizadas, ficaram patentes os diferentes tipos de comportamento dos modos em função do tipo de estruturas estudadas. A observação dos mesmos podem ajudar no entendimento das características das curvas de dispersão já apresentadas no capítulo II. Em particular, se observa a tendência do comportamento da distribuição espacial dos modos em seguir os tipos básicos de estruturas que compõem as fibras coaxiais, a saber as estruturas bastão e tubo. Um perfeito entendimento do processo de interação destas duas estruturas básicas requererá estudos adicionais, envolvendo a influência dos parâmetros que determinam o comportamento das fibras coaxiais. Entretanto, para que o trabalho não fique ainda mais longo, deixa-se para que maiores análises sejam realizadas a partir das bases aqui implantadas.

CAPÍTULO V

CONDIÇÕES DE CORTE DA FIBRA COAXIAL

Neste capítulo são obtidas as informações referentes às condições de corte para a fibra coaxial. A condição de corte é uma característica importante para projetar uma fibra, pois informa em que circunstâncias há ou não guiamento para os modos que nela se propagam, ref.[18]. Assim são estudadas as modificações das condições de corte das fibras em estudo ao se variar alguns parâmetros tais como: P , Q e N_4 . Serão estudados os modos das estruturas W-I e M-III, uma vez que as outras duas irão requerer um maior desenvolvimento das rotinas de cálculo numérico, já que elas apresentam problemas de convergência que não foram atacados neste trabalho.

5.1 - Condição de Corte

Nesta seção são analisadas as condições de corte das fibras coaxiais determinando-se a frequência de corte v_c , característica de cada modo. Para valores de v menores que v_c não haverá guiamento do modo em consideração, ref.[19]. Na condição de corte, se tem $B = 0$ o que se obtém quando se verifica a condição $N = N_4$. Caso N seja menor do que N_4 , o argumento da função de onda na região da casca passa a ser complexo e a solução passa a ser oscilante ou divergente. Com isto, o modo não é mais confinado pelo guia de ondas.

Inicialmente, estuda-se a fibra W, pois as equações para a obtenção do corte da fibra M são as mesmas, diferindo apenas quanto aos argumentos das funções de Bessel. As

análises das fibras em estudo serão feitas com índices de refração distintos. O caso em que os índices são dados na forma $N_1 = N_3$ e $N_2 = N_4$, foi tratado por Boucouvalas, ref.[20]. O método usado para a obtenção das expressões para o corte da fibra coaxial W, foi testado com sucesso nas fibras bastão e tubo.

5.2 - Condição de corte, para fibra W

A fibra W possui duas estruturas, I e II, mostradas na fig.(5.1-1).

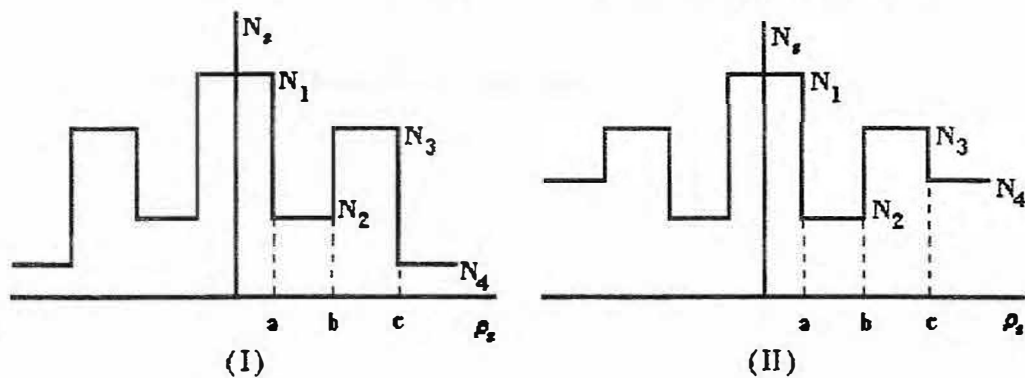


Fig.(5.1-1) Perfis de índices de refração das estruturas I e II, da fibra W

5.2 - 1 - Estrutura W-I

A estrutura I possui a seguinte equação característica:

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{J_{\ell \pm 1}(U_4)}{Y_{\ell \pm 1}(U_4)} \left[\frac{J_{\ell}(U_4)}{U_4 J_{\ell \pm 1}(U_4)} \mp \frac{K_{\ell}(W_4)}{W_4 K_{\ell \pm 1}(W_4)} \right] \right\} \left[\frac{Y_{\ell \pm 1}(W_3)}{Y_{\ell \pm 1}(W_2)} \left[\frac{Y_{\ell}(U_3)}{U_3 Y_{\ell \pm 1}(U_3)} - \frac{Y_{\ell}(W_3)}{W_3 Y_{\ell \pm 1}(W_3)} \right] + \right. \\
 & \left. - \frac{J_{\ell \pm 1}(W_3)}{J_{\ell \pm 1}(W_2)} \left[\frac{Y_{\ell}(U_3)}{U_3 Y_{\ell \pm 1}(U_3)} - \frac{J_{\ell}(W_3)}{W_3 J_{\ell \pm 1}(W_3)} \right] \right] = \\
 & = \frac{J_{\ell \pm 1}(U_3)}{Y_{\ell \pm 1}(U_3)} \left[\frac{Y_{\ell \pm 1}(W_3)}{Y_{\ell \pm 1}(W_2)} \left[\frac{J_{\ell}(U_3)}{U_3 J_{\ell \pm 1}(U_3)} - \frac{Y_{\ell}(W_3)}{W_3 Y_{\ell \pm 1}(W_3)} \right] - \frac{J_{\ell \pm 1}(W_3)}{J_{\ell \pm 1}(W_2)} \left[\frac{J_{\ell}(U_3)}{U_3 J_{\ell \pm 1}(U_3)} - \frac{J_{\ell}(W_3)}{W_3 J_{\ell \pm 1}(W_3)} \right] \right] \\
 & \left. - \frac{J_{\ell \pm 1}(W_3)}{J_{\ell \pm 1}(W_2)} \left[\frac{Y_{\ell}(U_3)}{U_3 Y_{\ell \pm 1}(U_3)} - \frac{Y_{\ell}(W_3)}{W_3 Y_{\ell \pm 1}(W_3)} \right] \right\} \left[\frac{J_{\ell}(U_1)}{U_1 J_{\ell \pm 1}(U_1)} - \frac{Y_{\ell}(W_2)}{W_2 Y_{\ell \pm 1}(W_2)} \right] \\
 & \left. - \frac{J_{\ell \pm 1}(W_3)}{J_{\ell \pm 1}(W_2)} \left[\frac{J_{\ell}(U_1)}{U_1 J_{\ell \pm 1}(U_1)} - \frac{J_{\ell}(W_2)}{W_2 J_{\ell \pm 1}(W_2)} \right] \right\} = \quad (5-1).
 \end{aligned}$$

Os argumentos das funções de Bessel são os seguintes:

$$\begin{aligned}
 W_2 &= \left[\left(\frac{N_2^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right) - B \right]^{1/2} v \frac{a}{c}; & U_3 &= \left[\left(\frac{N_3^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right) - B \right]^{1/2} v \frac{b}{c}; \\
 W_3 &= \left[\left(\frac{N_2^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right) - B \right]^{1/2} v \frac{b}{c}; & U_4 &= \left[\left(\frac{N_3^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right) - B \right]^{1/2} v; \\
 W_4 &= B^{1/2} v; & U_1 &= [1 - B]^{1/2} v \frac{a}{c}.
 \end{aligned} \quad (5-2).$$

Usando-se a condição de corte: $N = N_4$ e $B=0$, a equação (5-2) será re-escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 W_2 &= \left[\left(\frac{N_2^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right) \right]^{1/2} v \frac{a}{c} & U_3 &= \left[\left(\frac{N_3^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right) \right]^{1/2} v \frac{b}{c} \\
 W_3 &= \left[\left(\frac{N_2^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right) \right]^{1/2} v \frac{b}{c} & U_4 &= \left[\left(\frac{N_3^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right) \right]^{1/2} v \\
 W_4 &= 0 & U_1 &= v \frac{a}{c}
 \end{aligned} \quad (5-3).$$

Substituindo-se essas expressões na eq.(5-1), encontra-se alguns problemas, pois a função modificada de Bessel K_m diverge quando o argumento W_4 é muito pequeno. Para contornar esse problema usa-se o limite da função K_m para argumentos pequenos.

$$K_m(z) \cong \frac{(m-1)!}{2} \left(\frac{2}{z}\right)^m; (m \neq 0) \quad (5-4),$$

$$K_0(z) \cong -\ln(z) + (\ln 2 - \gamma) \quad (5-5),$$

onde $\gamma \cong 0,577$ é denominada constante de Euler's [12]. Fazendo-se essa substituição e reorganizando-se a equação (5-1), obtêm-se as equações de corte para cada um dos modos da fibra. Neste caso, os modos HE_{12} ($\ell = 0$) e HE_{21} ($\ell = 1$).

Para $\ell = 0$, caso do modo HE_{12} , têm-se;

$$\begin{aligned} & \left[U_1 J_1(U_1) J_0(W_2) - W_2 J_1(W_2) J_0(U_1) \right] \left\{ \begin{aligned} & \left[\pm J_1(U_4) [W_3 Y_1(W_3) Y_0(U_3) - U_3 Y_1(U_3) Y_0(W_3)] + \right. \\ & \left. \mp Y_1(U_4) [W_3 Y_1(W_3) J_0(U_3) - U_3 J_1(U_3) Y_0(W_3)] \right] \end{aligned} \right\} + \\ & - \left[U_1 J_1(U_1) Y_0(W_2) - W_2 Y_1(W_2) J_0(U_1) \right] \left\{ \begin{aligned} & \left[\pm J_1(U_4) [W_3 J_1(W_3) Y_0(U_3) - U_3 Y_1(U_3) J_0(W_3)] + \right. \\ & \left. \mp Y_1(U_4) [W_3 J_1(W_3) J_0(U_3) - U_3 J_1(U_3) J_0(W_3)] \right] \end{aligned} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (5-6).$$

Para $\ell = 1$, caso do modo HE_{21} , têm-se;

$$\begin{aligned} & \left[U_1 J_2(U_1) J_1(W_2) - W_2 J_2(W_2) J_1(U_1) \right] \left\{ \begin{aligned} & \left[\pm U_4 Y_2(U_4) - 2Y_1(U_4) [W_3 Y_2(W_3) J_1(U_3) - U_3 J_2(U_3) Y_1(W_3)] + \right. \\ & \left. - [\pm U_4 J_2(U_4) - 2J_1(U_4) [W_3 Y_2(W_3) Y_1(U_3) - U_3 Y_2(U_3) Y_1(W_3)]] \right] \end{aligned} \right\} + \\ & - \left[U_1 J_2(U_1) Y_1(W_2) - W_2 Y_2(W_2) J_1(U_1) \right] \left\{ \begin{aligned} & \left[\pm U_4 Y_2(U_4) - 2Y_1(U_4) [W_3 J_2(W_3) J_1(U_3) - U_3 J_2(U_3) J_1(W_3)] + \right. \\ & \left. - [\pm U_4 J_2(U_4) - 2J_1(U_4) [W_3 J_2(W_3) Y_1(U_3) - U_3 Y_2(U_3) J_1(W_3)]] \right] \end{aligned} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (5-7).$$

5.2.2 - Estrutura W-II

Para a estrutura II usa-se o mesmo procedimento anterior. A equação característica desta estrutura é dada a seguir:

$$\begin{aligned}
 & \left. \left\{ \frac{J_{t\pm 1}(U_4)}{Y_{t\pm 1}(U_4)} \left[\frac{J_t(U_4) \mp K_t(W_4)}{U_4 J_{t\pm 1}(U_4) \mp W_4 K_{t\pm 1}(W_4)} \right] \right\} \right\} + \left. \left\{ \frac{K_{t\pm 1}(W_3)}{K_{t\pm 1}(W_2)} \left[\frac{\pm \frac{Y_t(U_3)}{U_3 Y_{t\pm 1}(U_3)} - \frac{K_t(W_3)}{W_3 K_{t\pm 1}(W_3)}}{\mp \frac{J_t(U_1)}{U_1 J_{t\pm 1}(U_1)} + \frac{K_t(W_2)}{W_2 K_{t\pm 1}(W_2)}} \right] \right\} \right\} = \\
 & \left. \left\{ \frac{I_{t\pm 1}(W_3)}{I_{t\pm 1}(W_2)} \left[\frac{Y_t(U_3) \pm I_t(W_3)}{U_3 Y_{t\pm 1}(U_3) \pm W_3 I_{t\pm 1}(W_3)} \right] \right\} \right\} = \\
 & = \frac{J_{t\pm 1}(U_3)}{Y_{t\pm 1}(U_3)} \left\{ \frac{K_{t\pm 1}(W_3)}{K_{t\pm 1}(W_2)} \left[\frac{\pm \frac{J_t(U_3)}{U_3 J_{t\pm 1}(U_3)} - \frac{K_t(W_3)}{W_3 K_{t\pm 1}(W_3)}}{\mp \frac{J_t(U_1)}{U_1 J_{t\pm 1}(U_1)} + \frac{K_t(W_2)}{W_2 K_{t\pm 1}(W_2)}} \right] - \frac{I_{t\pm 1}(W_3)}{I_{t\pm 1}(W_2)} \left[\frac{\frac{J_t(U_3) \pm I_t(W_3)}{U_3 J_{t\pm 1}(U_3) \pm W_3 I_{t\pm 1}(W_3)}}{\frac{J_t(U_1) \pm I_t(W_2)}{U_1 J_{t\pm 1}(U_1) \pm W_2 I_{t\pm 1}(W_2)}} \right] \right\} \quad (5-8)
 \end{aligned}$$

Os argumentos U_i e W_i , são:

$$\begin{aligned}
 W_2 &= \left[B + \left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_1^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{a}{c}, & U_3 &= \left[\left(\frac{N_3^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right) - B \right]^{1/2} v \frac{b}{c} \\
 W_3 &= \left[B + \left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_1^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{b}{c}, & U_4 &= \left[\left(\frac{N_3^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right) - B \right]^{1/2} v \\
 W_4 &= B^{1/2} v, & U_1 &= [1 - B]^{1/2} v \frac{b}{c}
 \end{aligned} \quad (5-9)$$

Fazendo-se $B = 0$, os argumentos são re-escritos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 W_2 &= \left[\left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_1^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{a}{c}, & U_3 &= \left[\left(\frac{N_3^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{b}{c} \\
 W_3 &= \left[\left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_1^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{b}{c}, & U_4 &= \left[\left(\frac{N_3^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \\
 W_4 &= 0, & U_1 &= v \frac{b}{c}
 \end{aligned} \tag{5-10}$$

Após algumas operações matemáticas encontram-se as equações que levam a obtenção do corte para valores específicos de ℓ . Também aqui serão estudados os casos referentes aos modos HE_{12} e HE_{21} .

Para $\ell = 0$, caso do modo HE_{12} , encontra-se:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned} & J_1(U_4) \left[\pm W_3 K_1(W_3) Y_0(U_3) - U_3 Y_1(U_3) K_0(W_3) \right] + \\ & \left[U_1 J_1(U_1) I_0(W_2) \pm W_2 I_1(W_2) J_0(U_1) \right] \end{aligned} \right\} + \\
 & \left\{ \begin{aligned} & -Y_1(U_4) \left[\pm W_3 K_1(W_3) J_0(U_3) - U_3 J_1(U_3) K_0(W_3) \right] \\ & + \left[U_1 J_1(U_1) K_0(W_2) \mp W_2 K_1(W_2) J_0(U_1) \right] \end{aligned} \right\} = 0
 \end{aligned} \tag{5-11}$$

Para $\ell = 1$, caso do modo HE_{21} , têm-se:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned} & \left[U_4 Y_2(U_4) \mp 2Y_1(U_4) \right] \left[\pm W_3 K_2(W_3) J_1(U_3) - U_3 J_2(U_3) K_1(W_3) \right] + \\ & \left[U_1 J_2(U_1) I_1(W_2) \pm W_2 I_2(W_2) J_1(U_1) \right] \end{aligned} \right\} + \\
 & \left\{ \begin{aligned} & - \left[U_4 J_2(U_4) \mp 2J_1(U_4) \right] \left[\pm W_3 K_2(W_3) Y_1(U_3) - U_3 Y_2(U_3) K_1(W_3) \right] \\ & + \left[U_1 J_2(U_1) K_1(W_2) \mp W_2 K_2(W_2) J_1(U_1) \right] \end{aligned} \right\} = 0
 \end{aligned} \tag{5-12}$$

5 . 3 - Resultados para fibra W

Nesta seção são mostrados os resultados numéricos, obtidos para as frequências de corte das estruturas W-I.

5 . 3 - 1 - Estrutura W-I

A condição de corte para os modos HE_{11} da estrutura W-I é sempre $v_c=0$, à semelhança das fibras bastão. Em face disto, a análise deverá ser feita para os modos de mais alta ordem. Neste trabalho, será analisado apenas o modo HE_{12} , em face da sua importância prática.

O gráfico da figura (5.3-1) mostra a dependência da frequência normalizada de corte v_c com o parâmetro $Q=a/c$. No mesmo gráfico se pode observar tal dependência para vários valores do outro parâmetro dimensional $P=b/c$. Como se vê v_c é uma função decrescente de Q , diminuindo de modo pouco acentuado com o aumento do parâmetro P .

O gráfico da fig. (5.3-2) mostra que a frequência de corte em função do parâmetro P para diferentes valores de Q . Neste caso v_c se apresenta como uma função decrescente de Q e sofrendo redução acentuada de valor com o aumento de P .

Ambos os resultados encontrados vão ao encontro do que já se observou no caso do estudo das curvas de dispersão dos modos, feito no capítulo II. Segundo aqueles resultados, o aumento de P reduz a dispersão do guia, enquanto o inverso se dá para o parâmetro Q .

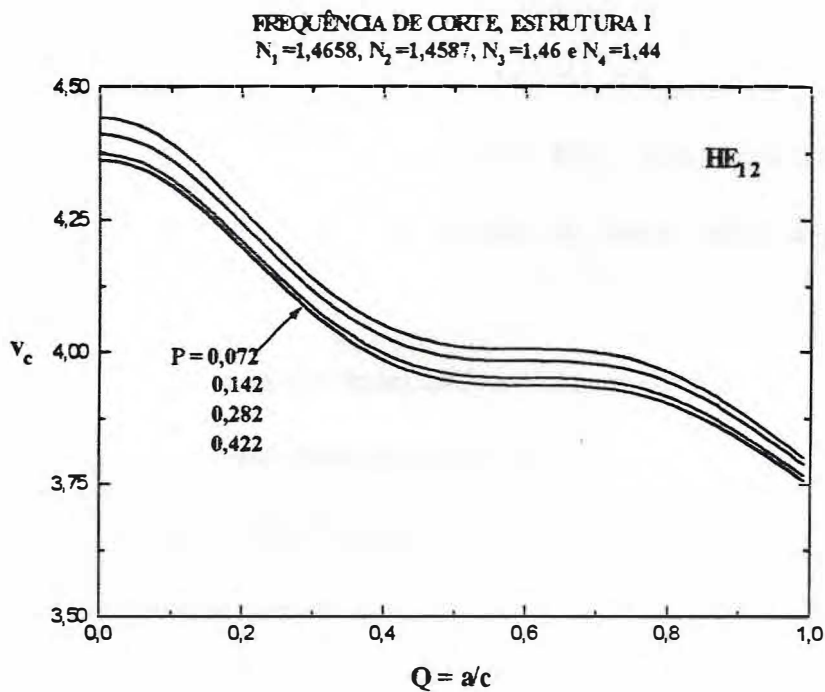


Fig. (5.3-1) Variações da frequência de corte ao variar-se a razão P

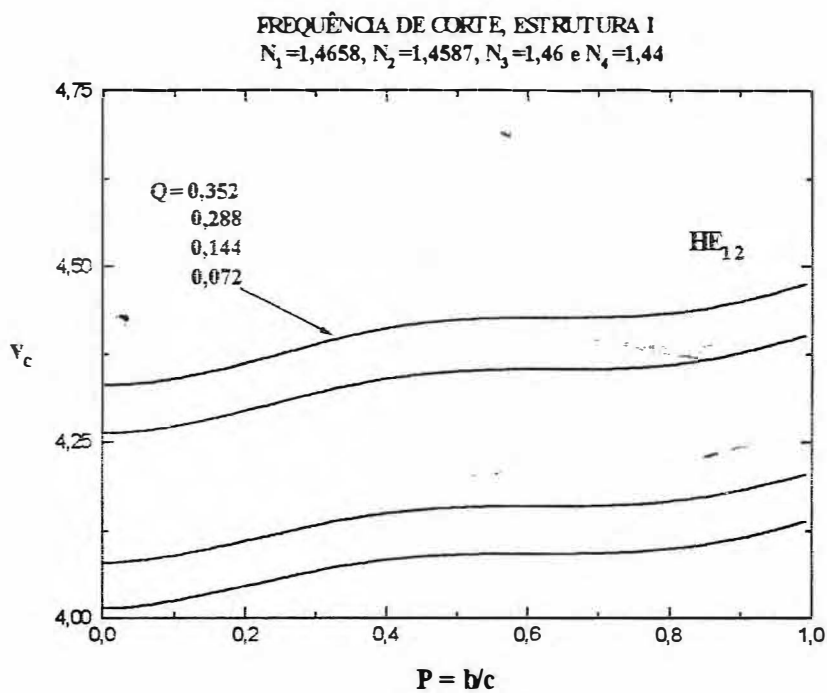


Fig. (5.3-2) Variação da frequência de corte ao variar-se Q

Na figura (5.3-3) é apresentado o comportamento de v_c em função de P para diferentes valores de N_4 . Observa-se que o aumento do índice de refração N_4 causa a redução do valor das frequências de corte do modo HE_{12} . Este é um fato esperado na medida em que a redução do índice de refração da casca reduz a capacidade de confinamento da fibra.

Na fig.(5.3-3) mostra-se as alterações na frequência de corte ao se variar N_4 quando P está variando e $Q = 0,072$. Neste caso observa-se que a frequência de corte sai de pontos distintos, oscila a medida que o fator P se aproxima de um, e decresce quando N_4 aumenta. Já na figura (5.3-4) observa-se que variações em N_4 , quando Q varia e $P = 0,352$, causam modificações na frequência de corte, onde observa-se que ela diminui a medida que Q se aproxima de um, e decresce quando N_4 é aumentado.

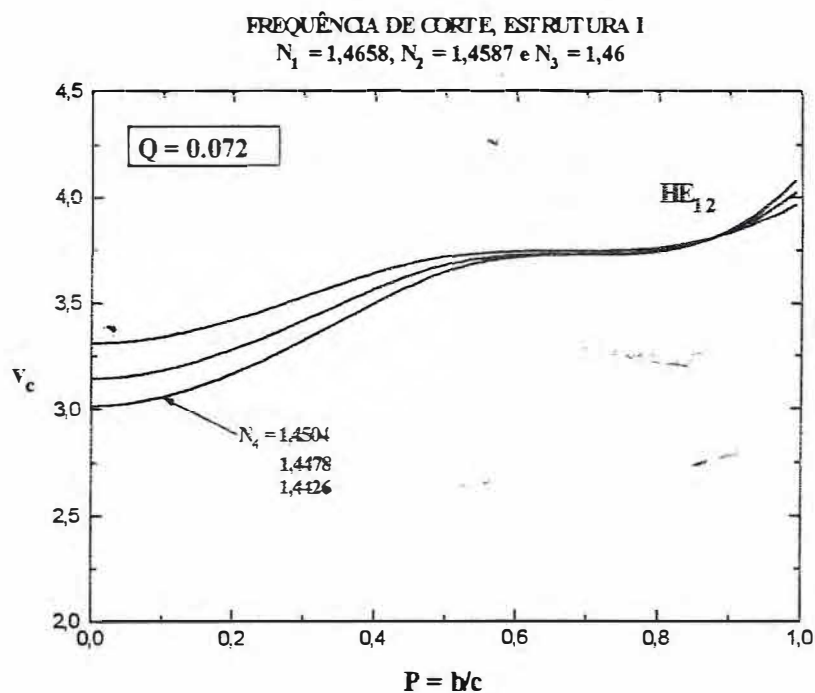


Fig. (5.3-3) Frequência de corte em função de P para diferentes valores de N_4

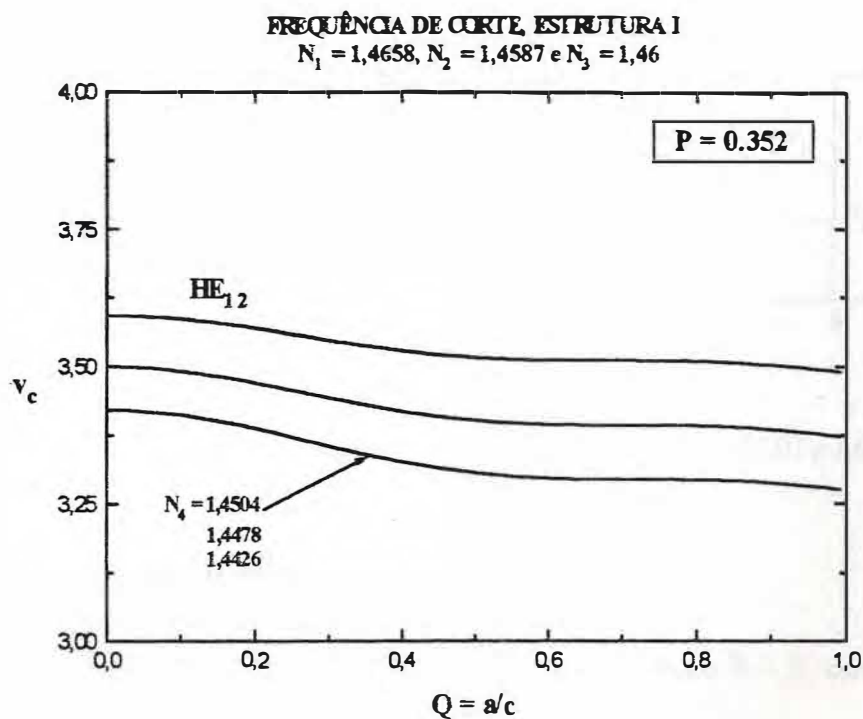


Fig. (5.3-4) Frequência de corte em função de Q para diferentes valores de N_4 .

5.4 - Condição de corte, para fibra M

A fibra M apresenta as estruturas III e IV, como indica a fig.(5.1-2). O estudo do corte para esta fibra utiliza as equações calculadas para a fibra W com as devida alterações nos argumentos das funções de Bessel.

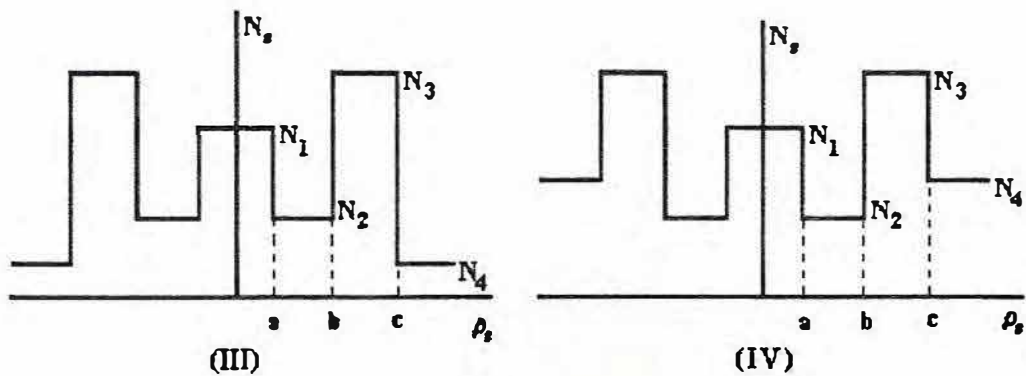


Fig. (5.1-2) Perfis de índices de refração das estruturas M-III e M-IV

5.4-1 - Estrutura M-III

Para estudar o corte desta estrutura observa-se a condição $B = 0$, ou seja $\beta = kN_4$. As equações (5-6) e (5-7) descrevem o comportamento da estrutura III, diferindo pelos argumentos das funções de Bessel, que na condição de corte são as seguintes:

$$\begin{aligned}
 W_2 &= \left[\left(\frac{N_2^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right)^{1/2} v \frac{a}{c}, \right. & U_1 &= \left[\left(\frac{N_1^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right)^{1/2} v \frac{a}{c}, \right. \\
 W_3 &= \left[\left(\frac{N_2^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right)^{1/2} v \frac{b}{c}, \right. & U_3 &= v \frac{b}{c}, \\
 W_4 &= 0, & U_4 &= v
 \end{aligned}
 \tag{5-13}$$

5.4-2 - Estrutura M-IV

Para essa estrutura, a condição de corte é descrita pelas equações (5-11) e (5-12). A principal diferença está nos argumentos das funções de Bessel que, para $B = 0$, serão os seguintes:

$$\begin{aligned}
 W_2 &= \left[\left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_3^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{a}{c}, & U_1 &= \left[\left(\frac{N_1^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{a}{c}, \\
 W_3 &= \left[\left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_3^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{b}{c}, & U_3 &= v \frac{b}{c}, \\
 W_4 &= 0, & U_4 &= v
 \end{aligned} \tag{5-14}$$

5 . 5 - Resultados, para fibra M

Nesta seção serão mostrados os resultados obtidos para a fibra M, onde são observados as modificações quando altera-se os parâmetros P, Q e N_4 .

5 . 5 - 1 - Estrutura M-III

Serão observadas as variações nas frequências de corte para o modo HE_{12} , da estrutura M-III. Na figura (5.5-1) é apresentada a frequência de corte v_c em função de Q para diferentes valores de P. Observa-se que v_c se apresenta como uma função decrescente de Q, aumentando de valor quando há o aumento de P. Comparado ao caso do mesmo modo na estrutura W-I, apresentado na figura (5.3-1), percebe-se que aqui v_c é uma função muito mais suave de Q.

Na figura (5.5-2) é dada a frequência normalizada de corte em função de P para diferentes valores de Q. No caso, v_c se mostra uma função crescente de P, apresentando uma variação mais intensa do que aquela observada para o caso da estrutura W-I. A influência de Q, neste caso também é menor do que a que foi observada no caso análogo da estrutura W-I

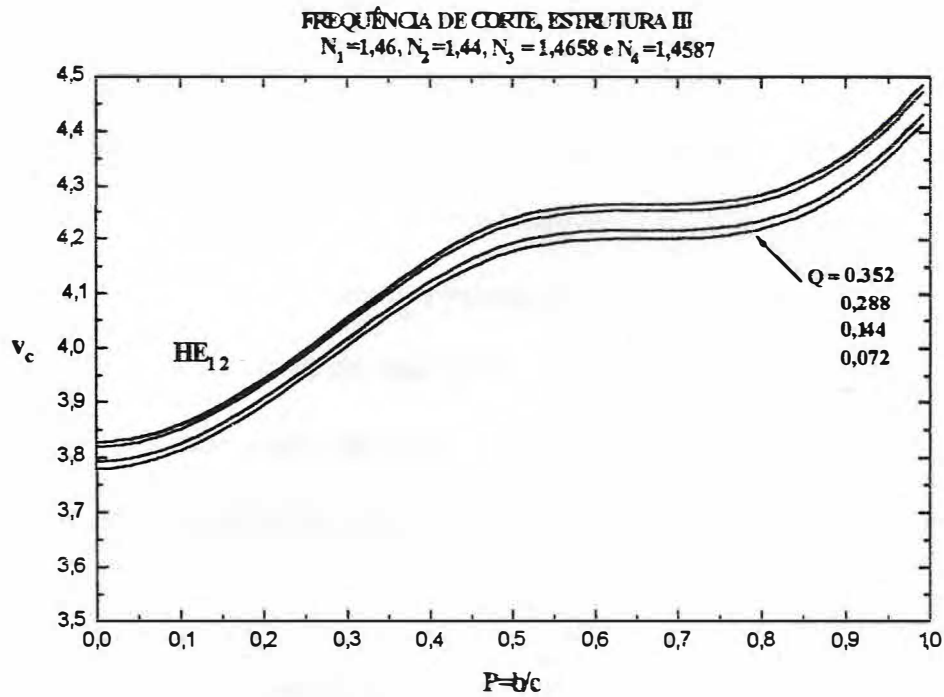


Fig. (5.5-1) Variação da frequência de corte para alguns valores de P

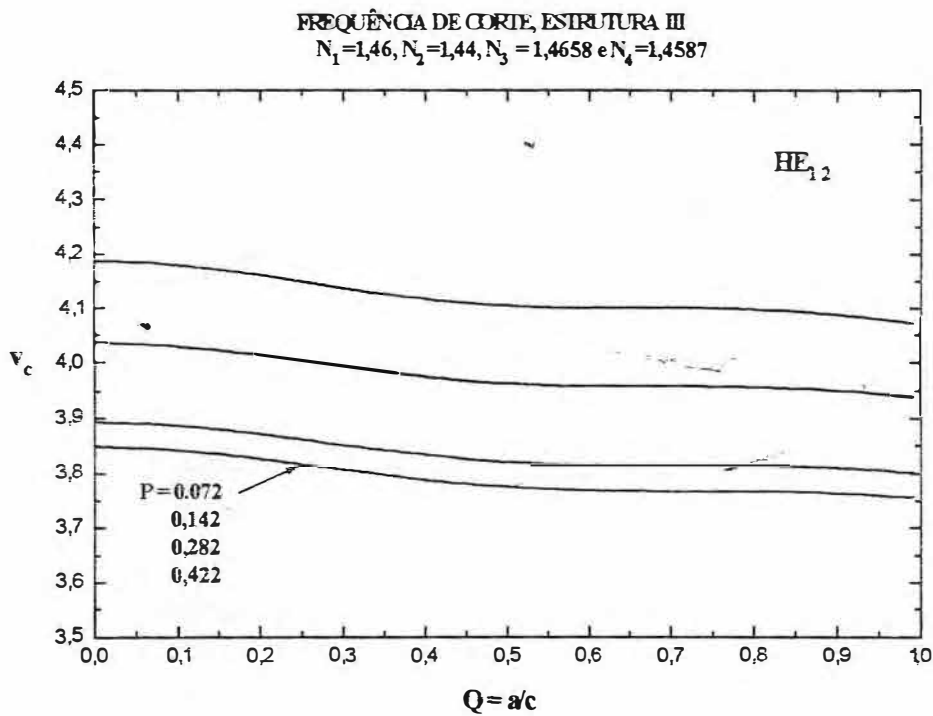


Fig. (5.5-2) Variação da frequência de corte para alguns valores de Q

Outro aspecto a ser observado é o comportamento do modo HE_{12} com P e Q , ao se variar o índice de refração N_4 . Na fig.(5.5-3) mostra-se as alterações na dependência da frequência de corte com P ao se variar N_4 e fazendo-se $Q = 0,072$. Neste caso observa-se que o aumento de N_4 causa o aumento dos valores de v_c . Nos dados apresentados, todos os valores de N_4 são todos menores do que aquele usado para os cálculos da figura (5.5-2) Neste caso, a frequência de corte, em $P=0$, possui um mesmo valor para os três valores de N_4 , e cresce oscilando à medida que o fator P se aproxima de um..

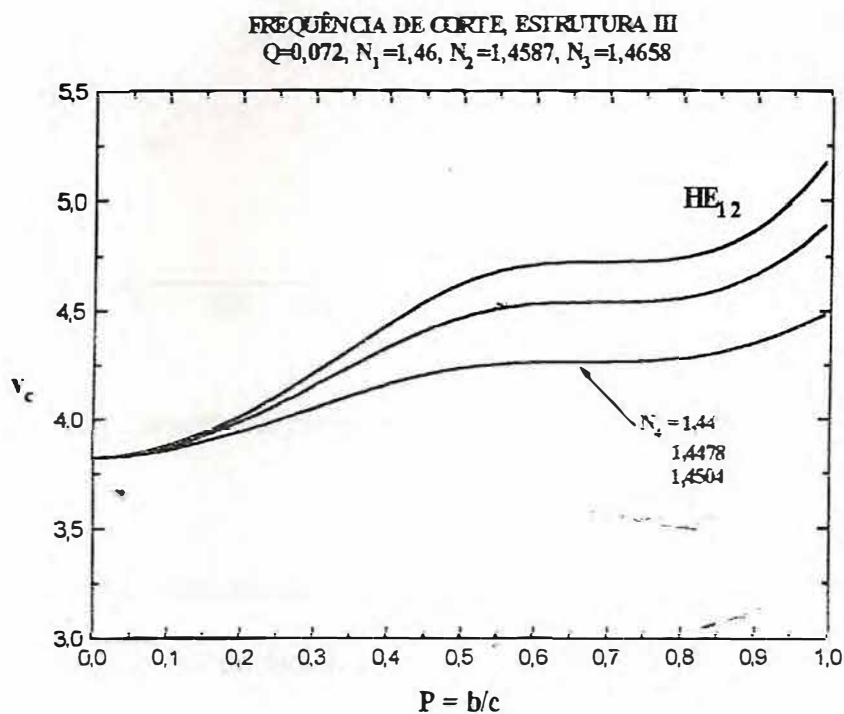


Fig. (5.5-3) Variação da frequência de corte ao variar-se N_4 , ao se variar P

Já na figura (5.5-4) observa-se o comportamento de v_c em função de Q para diferentes valores de N_4 e $P = 0,352$. Observa-se que o aumento de N_4 reduz a frequência normalizada de corte que é uma função decrescente de Q .

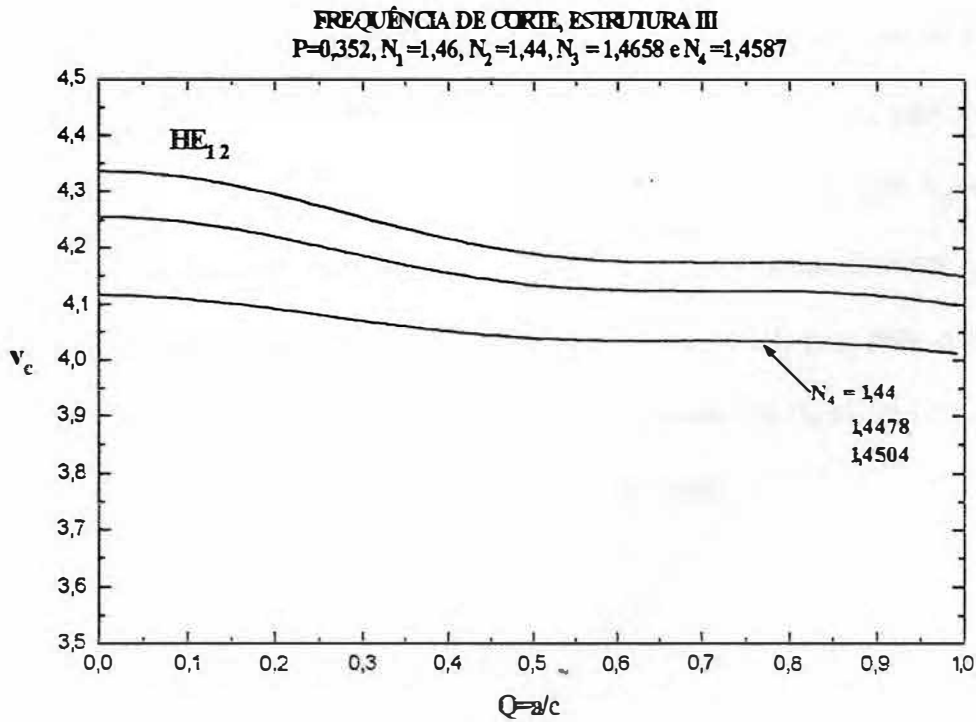


Fig. (5.5-4) Variação da frequência de corte ao variar-se N_4 , ao se variar Q

A compreensão dos resultados obtidos para N_4 são novamente entendidos usando-se o fato de que o aumento do índice de refração da casca da fibra provoca a redução de confinamento dos modos que nela se propagam.

5 . 6 - Conclusão

A partir dos dados apresentados neste capítulo, observou-se que o modo HE_{12} das fibras W-I e M-III têm comportamentos opostos quanto aos parâmetros P e Q. Observou-se também que a estrutura M-III é mais sensível a variações em Q, que a estrutura W-I. Já acontece o contrário quando se varia P. Ao variar N_4 nota-se que a estrutura W-I apresenta comportamento oposto ao da estrutura M-III, que se deve a diferença dos perfis de índices de refração. Visto que, para a estrutura W-I o aumento do índice de refração N_4 implica em uma queda na frequência de corte ν_c , pois neste caso o modo deixa de estar confinado apenas no núcleo. Já acontece o contrário para a estrutura M-III, pois nela o modo está praticamente confinado na região da barreira, logo um aumento de N_4 só irá contribuir para um maior confinamento, ou seja uma maior frequência de corte.

CONCLUSÃO

Neste trabalho foi feito um estudo da fibra coaxial e suas diferentes estruturas. Para isso, solucionou-se a equação de onda de cada estrutura da fibra coaxial, através da aproximação L P onde obteve-se as equações transcendentais, que foram solucionadas numericamente. Com isto, pode-se estudar as principais características, das quatro estruturas analisadas, como por exemplo: curvas de dispersão, perfis de campo e intensidade, e condições de corte.

Como foi visto o trabalho foi dividido em três etapas. Na primeira fez-se uma apresentação do método usado, a aproximação L P, onde foram descritos seus principais aspectos e fez-se duas aplicações, a saber; fibras bastão e tubo. Na segunda etapa usou-se a aproximação L P no modelamento da fibra coaxial, onde foram estudadas as quatro estruturas. Na terceira etapa foram apresentados os resultados obtidos através de métodos numéricos, os principais resultados obtidos foram as curvas de dispersão, os perfis de campo e intensidade, e as condições de corte.

Com relação as curvas de dispersão, observou-se através dos resultados obtidos que as estruturas W e M apresentam diferenças claras. Que eram esperadas devido a mudança da região de maior índice de refração, que neste caso foi permutado respectivamente entre o núcleo e a barreira. A fibra W, cuja região de maior índice de refração é o núcleo, apresenta diferenças acentuadas entre as suas estruturas W-I e W-II. Já a fibra M, cuja região de maior índice de refração é a barreira, a variação de comportamento entre as estruturas M-III e

M-IV não é tão diferenciado. Quanto a influência dos parâmetros P e Q, percebeu-se que eles agem de maneira distinta nas fibras coaxiais, em estudo, enquanto o aumento do parâmetro P provoca a redução do valor de B, ocorre o inverso ao aumentar-se o parâmetro Q. Quanto a influência do índice de refração N_4 fica patente que este parâmetro tem seu valor reduzido quando a constante normalizada de propagação B é aumentada. Esta influência é facilmente entendida, pois a medida que N_4 é reduzido aumenta o confinamento da luz na fibra, em decorrência do aumento da barreira óptica.

Outra característica analisada foi a distribuição de campo e intensidade na fibra coaxial. Foi enfatizado o estudo do comportamento dos modos HE_{11} e HE_{12} , em face da sua importância para o modelamento dos filtros espectrais. Neste estudo apenas constatou-se que as características observadas quando analisou-se as curvas de dispersão, foram confirmadas. Observou-se que a tendência do comportamento da distribuição espacial dos modos é seguir os tipos básicos de estruturas que compõem a fibra coaxial, a saber; as fibras bastão e tubo.

A partir dos dados apresentados no capítulo V, observou-se que o modo HE_{12} das fibras W-I e M-III têm comportamentos opostos quanto aos parâmetros P e Q. Observou-se também que a estrutura M-III é mais sensível a variações em Q, que a estrutura W-I. Já acontece o contrário quando se varia P. Ao variar N_4 nota-se que a estrutura W-I apresenta comportamento oposto ao da estrutura M-III, que se deve a diferença dos perfis de índices de refração. Visto que, para a estrutura W-I o aumento do índice de refração N_4 implica em uma queda na frequência de corte ν_c , pois neste caso o modo deixa de estar confinado apenas no núcleo. Já acontece o contrário para a estrutura M-III, pois nela o modo está

praticamente confinado na região da barreira, logo um aumento de N_4 só irá contribuir para um maior confinamento, ou seja uma maior frequência de corte.

Em face do elevado número de parâmetros ligados a fibra coaxial, o estudo detalhado de cada estrutura é deixado para a continuidade dos trabalhos iniciados nesta dissertação. Ficam ainda muitos aspectos a serem analisados, com respeito ao comportamento da dispersão, devido ao número de parâmetros visto que analisou apenas com três. No estudo da distribuição de campo ficou em aberto a análise detalhada sobre o processo de interação das duas estruturas básicas que compõem a fibra coaxial. E finalmente fica para trabalhos posteriores o estudo das condições de corte das estruturas M-II e W-IV, visto que neste trabalho não obteve-se resultados satisfatórios.

REFERÊNCIAS

- [1] - MacChesney J. B., Jaeger R. E., Pinnow D. A., Osterwayer F. W., Rich T. C., Low-loss silica core-borosilicate clad fiber optical waveguide, *Appl. Phys. Lett.*, 23, 340-341(1973).
- [2] - G. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*. New York: Springer-Verlag, 1990.
- [3] - Smolka F. M., Rêgo A. C. G. B., Graciosa H. M. M. e Violato C. A., *Comunicações ópticas: pesquisa e desenvolvimento no Brasil*, Telebrás(1981).
- [4] - Kawakami S. and Nishida S., Characteristica of a Doubly Clad Optical Fiber with a Low-Index Inner Cladding, *IEEE J. Quantum Electron.*, QE-10, 879-887(1974).
- [5] - Boucouvalas A. C., Coaxial Optical Fiber Coupling, *J. Lightwave Tech.*, LT-3, 1151-1158(1985).
- [6] - Celaschi S., Jesus J. T., Dini D., Juriollo A. and Arradi R., *Narrowband All-Fiber Spectral Fibers*, CPqD-Telebrás, Campinas.
- [7] - Cozens J. R. and Boucouvalas A. C., Coaxial Optical Coupler, *Electron. Lett.*, 18, 138-140(1982).
- [8] - Gloge D., Weakly Guiding Fibers, *Appl. Opt.*, 10, 2252 (1971).
- [9] - Adams M. J., *An Introduction to Optical Waveguides*, John Wiley & Sons Ltd, 1981, 228-233.
- [10] - MacChesney J. B., Jaeger R. E., Pinnow D. A., Ostermayer F. W., Rich T. C. and Van Uiter L. G., Low-Loss silica core-borosilicate clad fiber optical waveguide, *Appl. Phys. Lett.*, 23, 340 (1973).

- [11] - Snitzer E., Cylindrical Dielectric Waveguide Modes, *Opt. Soc. America*, 51, 491(1961).
- [12] - Abramowitz M., and I. A. Stegun (1964), *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York.
- [13] - Nunes F. D., *Tópicos de Eletromagnetismo para Óptica Integrada*, (1992), Engendra, Campinas.
- [14] - Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, 1986.
- [15] - Monerie M., Propagation in Doubly Clad Single-Mode Fibers, *IEEE J. Quantum Electron.*, QE-18, 535-542(1982).
- [16] - Matsumura H. and Suganuma T., Normalization of single-mode fibers having an arbitrary index profile, *Appl. Opt.*, 19, 3151-3158(1980).
- [17] - Belanov A. S., Dianov E. M., Ezhov G. I. and Prokhorov A. M., Propagation of normal modes in Multilayer optical waveguides I. Components fields and dispersion characteristics. *Sov. J. Quant. Electron.*, 6, 43, (1976).
- [18] - Ahmad Safaai-Jazi and Garlam Yip, Cutoff Conditions in Three-Layer Dielectric Waveguides, *IEEE Trans. MTT*, MTT-26, 898-903(1978).
- [19] - Okoshi Takanori, *Optical Fibers*, (1982), Academic Press, New York.
- [20] - Boucouvalas A. C., Mode-cutoff frequencies of coaxial optical couplers, *Opt. Lett.*, 10, 95-97(1985)

DE FISICA APLICADA

PARA MODELAMENTO DE UM GUJA COAXIAL, CASO (1).

```

.ICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
.NSION XW1(1000),XW2(1000)
.NSION VECV(1000),RA(1000),RA1(1000,20),RT(1000,20)

/PATH/ XN1,XN2,XN3,XN4,XQ,XP
/VEIA/ XVI,XINC,NIN
/COU/ NOUT0,NOUT1,NOUT2,NOUT3

99 I=1,1000
30 99 J=1,20
   RA1(I,J)=0.DO
   RT(I,J)=0.DO

'E(*,*)' QUAL A OPCAO DE ANALISE
'E(*,*)' (1) - HE1n '
'E(*,*)' (2) - HE2n '
'E(*,*)' (3) - HE3n '
'E(*,*)' (4) - HE4n '
'E(*,*)' (5) HE5n '
'E(*,*)' '
'E(*,*)' O PROGRAMA ESTA HABILITADO A ANALIZAR MODOS'
'E(*,*)' PARA n=1,2 e 3'
'E(*,*)' '
'E(*,*)' PARA SELECIONAR A OPCAO, ENTRE COM O NUMERO'
'E(*,*)' ENTRE PARENTESSES'
(*,*) MCONTROL
'E(*,*)'

'E(*,*)' ENTRE COM N1,N2,N3,N4,A,B,C NESTA ORDEM'
(*,*) XN1,XN2,XN3,XN4,XA,XB,XC
=1.4658
=1.4587

-1.4587
VXC e P=XB/XC
=.072
=.352

'E(*,*)' '
'E(*,*)' ENTRE COM O LIMITE INFERIOR,SUPERIOR E O'
'E(*,*)' NUMERO DE PONTOS DA VARIÁVEL V, NESTA ORDEM'
(*,*) XVI,XVF,NIN

=(XN2*XN2-XN4*XN4)/(XN1*XN1-XN4*XN4)
=(XN3*XN3-XN4*XN4)/(XN1*XN1-XN4*XN4)
'E(*,*)' XN =',XCUT,', YN =',Y CUT

```

RACAO DOS DADOS DE ENTRADA : N,NB,X1,X2,XACC , ONDE ;

N= NUMERO DE PONTOS EM QUE O INTERVALO (X1,X2) DEVE SER DIVIDIDO.

```

NB=NUMERO PROVAVEL DE RAIZES QUE EXISTEM NO INTEVALO (X1,X2).
X1=LIMITE INFERIOR DO INTERVALO.
X2=LIMITE SUPERIOR DO INTERVALO. (X2 > X1)
XACC= PRECISAO COM QUE AS RAIZES DEVEM SER DETERMINADAS.

```

```
=DABS(XVF-XVI)/NIN
```

```

X2=XCUT-1.0d-4
X1=1.0d-4

```

```

DO K=1,NIN
WRITE(*,*) ' '
VECV(K)=V
WRITE(*,10) VECV(K)
FORMAT(6H** V = ,F10.5,'      A(S) RAIZ(ES) SAO  ')
N=1001
NB=20
XACC=1.D-10

```

```
.....DETERMINACAO DOS INTERVALOS ONDE ESTAO AS RAIZES.....
```

```

NB=20
CALL ZBRA(F,V,X1,X2,N,XW1,XW2,NB)

```

```
.....DETERMINACAO DAS RAIZES.....
```

```

DO 40 I=1,NB
  W1=XW1(I)
  W2=XW2(I)
  RA(I)=ZBRENT(F,V,W1,W2,XACC)
CONTINUE
DO 50 I=1,NB
  RA1(K,I+2)=RA(I)
  WRITE(*,45) RA1(K,I+2)
  FORMAT('                X = ',F15.10)
CONTINUE

```

```
LHA DO MAIOR VALOR DA RAIZ PARA UM DADO VALOR DE K
```

```

RT(K,1)=RA1(K,NB+2)
RT(K,2)=RA1(K,NB+1)
RT(K,3)=RA1(K,NB)

```

```

V=V+XINC
INUE

```

```
0=0
```

```
2=0
```

```
3=0
```

```

WRITE(*,*)'
WRITE(*,*) 'DESEJA GERAR ARQUIVOS ? (1- SIM, 0- NAO) '
READ(*,*)NFAU
WRITE(*,*) '
IF (NFAU.EQ.1) THEN
  WRITE(*,*)'DESEJA ARQUIVAR OS DADOS EM UM SO ARQUIVO?'
  WRITE(*,*)' (1-SIM,0-NAO) '
  READ(*,*) NOUT0
  IF (NOUT0.EQ.1) THEN
    WRITE(*,*)'O NOME DO ARQUIVO SERA: caso1T.dat'
    WRITE(*,*)
  ELSE
    DO 200 K=1,NIN
      IF (RT(K,1).NE.0) KAU1=1
      IF (RT(K,2).NE.0) KAU2=1
      IF (RT(K,3).NE.0) KAU3=1

  WRITE(*,*)' '
  WRITE(*,*)'PARA CADA UMA DAS OPCOES QUE APARECERA, DIGA SE '
  WRITE(*,*)'DESEJA ARQUIVAR OS DADOS (1- SIM, 0- NAO)'

  IF (KAU1.EQ.1) THEN
    WRITE(*,*) '
    WRITE(*,*)'HEm1 -> NOME DO ARQUIVO caso11.dat'
    READ(*,*) NOUT1
    END IF

  IF (KAU2.EQ.1) THEN
    WRITE(*,*) '
    WRITE(*,*)'HEm2 -> NOME DO ARQUIVO caso12.dat'
    READ(*,*) NOUT2
    END IF

  IF (KAU3.EQ.1) THEN
    WRITE(*,*)'
    WRITE(*,*)'HEm3 -> NOME DO ARQUIVO caso13.dat'
    READ(*,*) NOUT3
    END IF

  END IF
  CALL ARQUI(RT)
END IF

END

SUBROUTINE ARQUI(RT)
  IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
  CHARACTER*30 LIVIA0,LIVIA1,LIVIA2,LIVIA3
  DIMENSION RT(1000,250)
  COMMON /VEIA/ XVI,XINC,NIN
  COMMON /COUT/ NOUT0,NOUT1,NOUT2,NOUT3

  GERACAO DOS  ARQUIVOS

  LIVIA0='caso1T.dat'
  LIVIA1='caso11.dat'
  LIVIA2='caso12.dat'

```

LIVIA3='caso13.dat'

V=XVI
DO 100 K=1,NIN

IF (NOU0.EQ.1) THEN

KAU1=0

KAU2=0

KAU3=0

DO 200 L=1,NIN

IF (RT(L,1).NE.0) KAU1=1

IF (RT(L,2).NE.0) KAU2=1

IF (RT(L,3).NE.0) KAU3=1

OPEN(10,FILE=LIVIA0)

IF (KAU1.EQ.1.AND.KAU2.EQ.1.AND.KAU3.EQ.1) THEN

WRITE(10,'(F10.6,3F14.10)') V,RT(K,1),RT(K,2),RT(K,3)

END IF

IF (KAU1.EQ.1.AND.KAU2.EQ.1.AND.KAU3.EQ.0) THEN

WRITE(10,'(F10.6,2F14.10)') V,RT(K,1),RT(K,2)

END IF

IF (KAU1.EQ.1.AND.KAU2.EQ.0.AND.KAU3.EQ.0) THEN

WRITE(10,'(F10.6,6F14.10)') V,RT(K,1)

END IF

END IF

IF (NOU1.EQ.1) THEN

OPEN(11,FILE=LIVIA1)

WRITE(11,'(F10.6,F14.10)') V,RT(K,1)

END IF

IF (NOU2.EQ.1) THEN

OPEN(12,FILE=LIVIA2)

WRITE(12,'(F10.6,F14.10)') V,RT(K,2)

END IF

IF (NOU3.EQ.1) THEN

OPEN(13,FILE=LIVIA3)

WRITE(13,'(F10.6,F14.10)') V,RT(K,3)

END IF

V=V+XINC

CONTINUE

CLOSE(10)

CLOSE(11)

CLOSE(12)

STOP

END

EQUACAO TRANSCENDENTAL

FUNCTION F(X,V)

```

IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
COMMON /CONTROLE/ MCONTROL
COMMON /PATH/ XN1,XN2,XN3,XN4,XQ,XP

```

```

U1=DSQRT(1.D0-X)*V*XQ
U3=DSQRT((XN3*XN3-XN4*XN4)/(XN1*XN1-XN4*XN4)-X)*V*XP
U4=DSQRT((XN3*XN3-XN4*XN4)/(XN1*XN1-XN4*XN4)-X)*V
W2=DSQRT((XN2*XN2-XN4*XN4)/(XN1*XN1-XN4*XN4)-X)*V*XQ
W3=DSQRT((XN2*XN2-XN4*XN4)/(XN1*XN1-XN4*XN4)-X)*V*XP
W4=DSQRT(X)*V

```

```

IF (MCONTROL.EQ.1) THEN

```

```

A=U1*BESSJ1(U1)*BESSJ0(W2)-W2*BESSJ1(W2)*BESSJ0(U1)
C=U1*BESSJ1(U1)*BESSY0(W2)-W2*BESSY1(W2)*BESSJ0(U1)
B=W3*BESSY1(W3)*BESSJ0(U3)-U3*BESSJ1(U3)*BESSY0(W3)
D=W3*BESSJ1(W3)*BESSJ0(U3)-U3*BESSJ1(U3)*BESSJ0(W3)
G=W3*BESSY1(W3)*BESSY0(U3)-U3*BESSY1(U3)*BESSY0(W3)
H=W3*BESSJ1(W3)*BESSY0(U3)-U3*BESSY1(U3)*BESSJ0(W3)

```

```

E1=U4*BESSY1(U4)*BESSK0(W4)-W4*BESSK1(W4)*BESSY0(U4)
E2=U4*BESSJ1(U4)*BESSK0(W4)-W4*BESSK1(W4)*BESSJ0(U4)

```

```

CT1=(A*B-C*D)*E1
CT2=(A*G-C*H)*E2
CONTROL = CT1-CT2
F = CONTROL
END IF

```

```

IF (MCONTROL.EQ.2) THEN

```

```

A=U1*BESSJ2(U1)*BESSJ1(W2)-W2*BESSJ2(W2)*BESSJ1(U1)
C=U1*BESSJ2(U1)*BESSY1(W2)-W2*BESSY2(W2)*BESSJ1(U1)
B=W3*BESSY2(W3)*BESSJ1(U3)-U3*BESSJ2(U3)*BESSY1(W3)
D=W3*BESSJ2(W3)*BESSJ1(U3)-U3*BESSJ2(U3)*BESSJ1(W3)
G=W3*BESSY2(W3)*BESSY1(U3)-U3*BESSY2(U3)*BESSY1(W3)
H=W3*BESSJ2(W3)*BESSY1(U3)-U3*BESSY2(U3)*BESSJ1(W3)

```

```

E1=U4*BESSY2(U4)*BESSK1(W4)-W4*BESSK2(W4)*BESSY1(U4)
E2=U4*BESSJ2(U4)*BESSK1(W4)-W4*BESSK2(W4)*BESSJ1(U4)

```

```

CT1=(A*B-C*D)*E1
CT2=(A*G-C*H)*E2
CONTROL = CT1-CT2
F = CONTROL
END IF

```

```

IF (MCONTROL.EQ.3) THEN

```

```

A=U1*BESSJ3(U1)*BESSJ2(W2)-W2*BESSJ3(W2)*BESSJ2(U1)
C=U1*BESSJ3(U1)*BESSY2(W2)-W2*BESSY3(W2)*BESSJ2(U1)
B=W3*BESSY3(W3)*BESSJ2(U3)-U3*BESSJ3(U3)*BESSY2(W3)
D=W3*BESSJ3(W3)*BESSJ2(U3)-U3*BESSJ3(U3)*BESSJ2(W3)
G=W3*BESSY3(W3)*BESSY2(U3)-U3*BESSY3(U3)*BESSY2(W3)
H=W3*BESSJ3(W3)*BESSY2(U3)-U3*BESSY3(U3)*BESSJ2(W3)

```

```

E1=U4*BESSY3(U4)*BESSK2(W4)-W4*BESSK3(W4)*BESSY2(U4)
E2=U4*BESSJ3(U4)*BESSK2(W4)-W4*BESSK3(W4)*BESSJ2(U4)

```

```

CT1=(A*B-C*D)*E1
CT2=(A*G-C*H)*E2
CONTROL = CT1-CT2
F = CONTROL
END IF

```

```

IF (MCONTROL.EQ.4) THEN

```

```

A=U1*BESSJ4(U1)*BESSJ3(W2)-W2*BESSJ4(W2)*BESSJ3(U1)
C=U1*BESSJ4(U1)*BESSY3(W2)-W2*BESSY4(W2)*BESSJ3(U1)
B=W3*BESSY4(W3)*BESSJ3(U3)-U3*BESSJ4(U3)*BESSY3(W3)
D=W3*BESSJ4(W3)*BESSJ3(U3)-U3*BESSJ4(U3)*BESSJ3(W3)
G=W3*BESSY4(W3)*BESSY3(U3)-U3*BESSY4(U3)*BESSY3(W3)
H=W3*BESSJ4(W3)*BESSY3(U3)-U3*BESSY4(U3)*BESSJ3(W3)

```

```

E1=U4*BESSY4(U4)*BESSK3(W4)-W4*BESSK4(W4)*BESSY3(U4)
E2=U4*BESSJ4(U4)*BESSK3(W4)-W4*BESSK4(W4)*BESSJ3(U4)

```

```

CT1=(A*B-C*D)*E1
CT2=(A*G-C*H)*E2
CONTROL = CT1-CT2
F = CONTROL
END IF

```

```

IF (MCONTROL.EQ.5) THEN

```

```

A=U1*BESSJ5(U1)*BESSJ4(W2)-W2*BESSJ5(W2)*BESSJ4(U1)
C=U1*BESSJ5(U1)*BESSY4(W2)-W2*BESSY5(W2)*BESSJ4(U1)
B=W3*BESSY5(W3)*BESSJ4(U3)-U3*BESSJ5(U3)*BESSY4(W3)
D=W3*BESSJ5(W3)*BESSJ4(U3)-U3*BESSJ5(U3)*BESSJ4(W3)
G=W3*BESSY5(W3)*BESSY4(U3)-U3*BESSY5(U3)*BESSY4(W3)
H=W3*BESSJ5(W3)*BESSY4(U3)-U3*BESSY5(U3)*BESSJ4(W3)

```

```

E1=U4*BESSY5(U4)*BESSK4(W4)-W4*BESSK5(W4)*BESSY4(U4)
E2=U4*BESSJ5(U4)*BESSK4(W4)-W4*BESSK5(W4)*BESSJ4(U4)

```

```

CT1=(A*B-C*D)*E1
CT2=(A*G-C*H)*E2
CONTROL = CT1-CT2
F = CONTROL
END IF

```

```

RETURN
END

```

```

FUNCTION ZBRENT(FUNC,V,X1,X2,TOL)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
PARAMETER (ITMAX=100, EPS=3.E-8)
A=X1

```

```

B=X2
FA=FUNC(A,V)
FB=FUNC(B,V)
IF(FB*FA.GT.0.) PAUSE 'Root must be bracketed for ZBRENT.'
FC=FB
DO 11 ITER=1,ITMAX
  IF(FB*FC.GT.0.) THEN
    C=A
    FC=FA
    D=B-A
    E=D
  ENDIF
  IF(DABS(FC).LT.DABS(FB)) THEN
    A=B
    B=C
    C=A
    FA=FB
    FB=FC
    FC=FA
  ENDIF
  TOL1=2.*EPS*DABS(B)+0.5*TOL
  XM=.5*(C-B)
  IF(DABS(XM).LE.TOL1 .OR. FB.EQ.0.)THEN
    ZBRENT=B
    RETURN
  ENDIF
  IF(DABS(E).GE.TOL1 .AND. DABS(FA).GT.DABS(FB)) THEN
    S=FB/FA
    IF(A.EQ.C) THEN
      P=2.*XM*S
      Q=1.-S
    ELSE
      Q=FA/FC
      R=FB/FC
      P=S*(2.*XM*(Q-R)-(B-A)*(R-1.))
      Q=(Q-1.)*(R-1.)*(S-1.)
    ENDIF
    IF(P.GT.0.) Q=-Q
    P=DABS(P)
    IF(2.*P.LT. MIN(3.*XM*Q-DABS(TOL1*Q),DABS(E*Q))) THEN
      E=D
      D=P/Q
    ELSE
      D=XM
      E=D
    ENDIF
  ELSE
    D=XM
    E=D
  ENDIF
  A=B
  FA=FB
  IF(DABS(D).GT. TOL1) THEN
    B=B+D
  ELSE
    B=B+DSIGN(TOL1, XM)
  ENDIF
  FB=FUNC(B,V)
CONTINUE
PAUSE 'ZBRENT exceeding maximum iterations.'

```

```
ZBRENT=B
RETURN
END
```

```
.....
SUBROUTINE ZBRA(FX,V,X1,X2,N,XW1,XW2,NB)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION XW1(200),XW2(200),XC1(200),XC2(200)
DIMENSION XXB1(200),XXB2(200)
NBB=NB
NB=0
X=X1
DX=(X2-X1)/N
FP=FX(X,V)
DO 11 I=1,N
X=X+DX
FC=FX(X,V)
IF(FC*FP.LT.0.) THEN
  NB=NB+1
  XXB1(NB)=X-DX
  XXB2(NB)=X
ENDIF
FP=FC
IF(NBB.EQ.NB)RETURN
CONTINUE
M=0
K=0
DO 20 J=1,NB
  E1=FX(XXB1(J),V)
  E2=FX(XXB2(J),V)
  IF (((E1.GT.0..AND.E2.LT.0.).OR.(E1.LT.0..AND.E2.GT.0.)).AND.
* (DABS(DABS(E1)-DABS(E2)).GT.10.DO))THEN
    K=K+1
    XC1(K)=XXB1(J)
    XC2(K)=XXB2(J)
  ELSE
    M=M+1
    XW1(M)=XXB1(J)
    XW2(M)=XXB2(J)
  END IF
CONTINUE
NB=M

RETURN
END
```

CALCULO DA CAMPO

PROGRAM CAMPO

IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

CHARACTER*25 PEPO

Q=XA/XC e P=XB/XC

XA=4.5

XC=62.5

XQ=0.072

XP=0.282

XN1=1.4658

XN2=1.4587

XN3=1.46

XN4=1.44

X=.0550388827

V=5.000800

XB=(XA*XP)/XQ

U1=DSQRT(1.D0-X)*V*XQ

U3=DSQRT((XN3*XN3-XN4*XN4)/(XN1*XN1-XN4*XN4)-X)*V*XP

U4=DSQRT((XN3*XN3-XN4*XN4)/(XN1*XN1-XN4*XN4)-X)*V

W2=DSQRT((XN2*XN2-XN4*XN4)/(XN1*XN1-XN4*XN4)-X)*V*XQ

W3=DSQRT((XN2*XN2-XN4*XN4)/(XN1*XN1-XN4*XN4)-X)*V*XP

W4=DSQRT(X)*V

T=U1*BESSY0(W2)*BESSJ1(U1)-W2*BESSJ0(U1)*BESSY1(W2)

T1=W2*BESSJ0(U1)*BESSJ1(W2)-U1*BESSJ0(W2)*BESSJ1(U1)

TT=W2*(BESSY0(W2)*BESSJ1(W2)-BESSJ0(W2)*BESSY1(W2))

B=T/T1

C=T1/TT

Z1=U3*BESSY1(U3)*BESSJ0(W3)-W3*BESSJ1(W3)*BESSY0(U3)

Z2=U3*BESSY1(U3)*BESSY0(W3)-W3*BESSY1(W3)*BESSY0(U3)

Z3=U3*BESSJ1(U3)*BESSJ0(W3)-W3*BESSJ1(W3)*BESSJ0(U3)

Z4=U3*BESSJ1(U3)*BESSY0(W3)-W3*BESSY1(W3)*BESSJ0(U3)

Z=U3*(BESSJ0(U3)*BESSY1(U3)-BESSY0(U3)*BESSJ1(U3))

ZZ=U3*(BESSY0(U3)*BESSJ1(U3)-BESSJ0(U3)*BESSY1(U3))

D=(Z1*B+Z2*C)/Z

E=(Z3*B+Z4*C)/ZZ

Q1=BESSJ0(U4)+U4*BESSJ1(U4)

Q2=BESSY0(U4)+U4*BESSY1(U4)

Q=BESSK0(W4)+W4*BESSK1(W4)

F=(Q1*D+Q2*E)/Q

R=0.

NIN=1000

RINC=0.1

PEPO='c112p.dat'

OPEN(10,FILE=PEPO)

DO 100 K=1,NIN

IF (R.LE.XA) WRITE(10,'(F10.6,F14.10)') R,BESSJ0(U1*R/XA)

```

IF (R.GE.XA.AND.R.LE.XB) THEN
  FO=B*BESSJO(W2*R/XA)+C*BESSYO(W2*R/XA)
  WRITE(10,'(F10.6,F14.10)') R,FO
END IF
IF (R.GE.XB.AND.R.LE.XC) THEN
  F1=D*BESSJO(U3*R/XB)+E*BESSYO(U3*R/XB)
  WRITE(10,'(F10.6,F14.10)') R,F1
END IF
IF (R.GE.XC) WRITE(10,'(F10.6,F14.10)') R,F*BESSKO(W4*R/XC)
R=R + RINC
CONTINUE
CLOSE(10)
STOP
END

```

GRUPO DE FISICA APLICADA
 DEPARTAMENTO DE FISICA DA UFC.
 PROGRAMA PARA MODELAMENTO DE UM GUIA COAXIAL,CORTE (1).

```

IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
CHARACTER*30 LIVIAO
DIMENSION XW1(1000),XW2(1000)
DIMENSION RA(1000)
EXTERNAL F
COMMON /PATH/ XN1,XN2,XN3,XN4,XQ,XP

```

SELECIONE O MODO

DECLARACAO DOS DADOS DE ENTRADA : N,NB,X1,X2,XACC , ONDE ;

N= NUMERO DE PONTOS EM QUE O INTERVALO (X1,X2) DEVE SER
 DIVIDIDO.
 NB=NUMERO PROVAVEL DE RAIZES QUE EXISTEM NO INTEVALO (X1,X2).
 X1=LIMITE INFERIOR DO INTERVALO DE V
 X2=LIMITE SUPERIOR DO INTERVALO DE V. (X2 > X1)
 XACC= PRECISAO COM QUE AS RAIZES DEVEM SER DETERMINADAS.

```

XN1=1.46
XN2=1.4587
XN3=1.4658
XN4=1.4504
Q=XA/XC e P=XB/XC

```

```

X2=20.D0
X1=0.0001D0

```

```

XQ=0.072D0
XP=0.001D0
XPINC=0.01D0

```

GERACAO DO ARQUIVO .DAT

```

LIVIAO='coiq12.dat'
OPEN(10,FILE=LIVIAO)

```

```

CONTINUE
WRITE(*,*) ' '

```

```
N=5000
NB=20
XACC=1.D-15
```

```
.....DETERMINACAO DOS INTERVALOS ONDE ESTAO AS RAIZES.....
```

```
NB=20
CALL ZBRA(F,X1,X2,N,XW1,XW2,NB)
```

```
.....DETERMINACAO DAS RAIZES.....
```

```
DO 20 I=1,NB
  W1=XW1(I)
  W2=XW2(I)
  RA(I)=ZBRENT(F,W1,W2,XACC)
  WRITE(*,15) XP,RA(I)
  FORMAT(' XP = ',F5.3,' V = ',F15.10)
CONTINUE
WRITE(10,'(F5.3,6F15.8)')XP,RA(1),RA(2),RA(3)

XP=XP+XPINC
IF (XP.LE.1.DO) GOTO 100

CLOSE(10)
END
```

```
.....
```

EQUACAO TRANSCENDENTAL

```
FUNCTION F(V)
  IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
  COMMON /PATH/ XN1,XN2,XN3,XN4,XQ,XP
```

```
PI=3.141592654D0
```

```
U1=DSQRT((XN1*XN1-XN4*XN4)/(XN3*XN3-XN4*XN4))*V*XQ
U3=V*XP
U4=V
W2=DSQRT((XN2*XN2-XN4*XN4)/(XN3*XN3-XN4*XN4))*V*XQ
W3=DSQRT((XN2*XN2-XN4*XN4)/(XN3*XN3-XN4*XN4))*V*XP
W4=0
```

```
A=U1*BESSJ1(U1)*BESSJ0(W2)-W2*BESSJ1(W2)*BESSJ0(U1)
B=U1*BESSJ1(U1)*BESSY0(W2)-W2*BESSY1(W2)*BESSJ0(U1)
C=U4*BESSJ1(U4)
D=U4*BESSY1(U4)
G=W3*BESSY1(W3)*BESSY0(U3)-U3*BESSY1(U3)*BESSY0(W3)
G1=W3*BESSY1(W3)*BESSJ0(U3)-U3*BESSJ1(U3)*BESSY0(W3)
H=W3*BESSJ1(W3)*BESSY0(U3)-U3*BESSY1(U3)*BESSJ0(W3)
H1=W3*BESSJ1(W3)*BESSJ0(U3)-U3*BESSJ1(U3)*BESSJ0(W3)
```

```
CT1=A*(C*G-D*G1)
CT2=B*(C*H-D*H1)
CONTROL=CT1-CT2
```

```
RETURN
END
```

```
FUNCTION ZBRENT(FUNC,X1,X2,TOL)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
PARAMETER (ITMAX=100,EPS=3.E-8)
A=X1
B=X2
FA=FUNC(A)
FB=FUNC(B)
IF(FB*FA.GT.0.) PAUSE 'Root must be bracketed for ZBRENT.'
FC=FB
DO 11 ITER=1,ITMAX
  IF(FB*FC.GT.0.) THEN
    C=A
    FC=FA
    D=B-A
    E=D
  ENDIF
  IF(DABS(FC).LT.DABS(FB)) THEN
    A=B
    B=C
    C=A
    FA=FB
    FB=FC
    FC=FA
  ENDIF
  TOL1=2.*EPS*DABS(B)+0.5*TOL
  XM=.5*(C-B)
  IF(DABS(XM).LE.TOL1 .OR. FB.EQ.0.)THEN
    ZBRENT=B
    RETURN
  ENDIF
  IF(DABS(E).GE.TOL1 .AND. DABS(FA).GT.DABS(FB)) THEN
    S=FB/FA
    IF(A.EQ.C) THEN
      P=2.*XM*S
      Q=1.-S
    ELSE
      Q=FA/FC
      R=FB/FC
      P=S*(2.*XM*Q*(Q-R)-(B-A)*(R-1.))
      Q=(Q-1.)*(R-1.)*(S-1.)
    ENDIF
    IF(P.GT.0.) Q=-Q
    P=DABS(P)
    IF(2.*P .LT. MIN(3.*XM*Q-DABS(TOL1*Q),DABS(E*Q))) THEN
      E=D
      D=P/Q
    ELSE
      D=XM
      E=D
    ENDIF
  ELSE
    D=XM
  ENDIF
END
```

```

      E=D
    ENDIF
    A=B
    FA=FB
    IF(DABS(D) .GT. TOL1) THEN
      B=B+D
    ELSE
      B=B+DSIGN(TOL1,XM)
    ENDIF
    FB=FUNC(B)
CONTINUE
PAUSE 'ZBRENT exceeding maximum iterations.'
ZBRENT=B
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE ZBRA(FX,X1,X2,N,XW1,XW2,NB)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION XW1(200),XW2(200),XC1(200),XC2(200)
DIMENSION XXB1(200),XXB2(200)
NBB=NB
NB=0
X=X1
DX=(X2-X1)/N
FP=FX(X)
DO 11 I=1,N
  X=X+DX
  FC=FX(X)
  IF(FC*FP.LT.0.) THEN
    NB=NB+1
    XXB1(NB)=X-DX
    XXB2(NB)=X
  ENDIF
  FP=FC
  IF(NBB.EQ.NB)RETURN
CONTINUE
M=0
K=0
DO 20 J=1,NB
  E1=FX(XXB1(J))
  E2=FX(XXB2(J))
  IF (((E1.GT.0..AND.E2.LT.0.).OR.(E1.LT.0..AND.E2.GT.0.)).AND.
      (DABS(DABS(E1)-DABS(E2)).GT.10.DO))THEN
    K=K+1
    XC1(K)=XXB1(J)
    XC2(K)=XXB2(J)
  ELSE
    M=M+1
    XW1(M)=XXB1(J)
    XW2(M)=XXB2(J)
  END IF
CONTINUE
NB=M

RETURN
END

```

```

REAL*8 FUNCTION BESSJ0(X)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
REAL*8 Y,P1,P2,P3,P4,P5,Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,R1,R2,R3,R4,R5,R6,
S1,S2,S3,S4,S5,S6
DATA P1,P2,P3,P4,P5/1.D0,-.1098628627D-2,.2734510407D-4,
-.2073370639D-5,.2093887211D-6/, Q1,Q2,Q3,Q4,Q5/-.1562499995D-
*1,
* .1430488765D-3,-.6911147651D-5,.7621095161D-6,-.934945152D-7/
DATA R1,R2,R3,R4,R5,R6/57568490574.D0,-13362590354.D0,651619640.7D
*0,
-11214424.18D0,77392.33017D0,-184.9052456D0/,
S1,S2,S3,S4,S5,S6/57568490411.D0,1029532985.D0,
9494680.718D0,59272.64853D0,267.8532712D0,1.D0/
IF(DABS(X).LT.8.)THEN
Y=X**2
BESSJ0=(R1+Y*(R2+Y*(R3+Y*(R4+Y*(R5+Y*R6))))
/(S1+Y*(S2+Y*(S3+Y*(S4+Y*(S5+Y*S6))))
ELSE
AX=DABS(X)
Z=8./AX
Y=Z**2
XX=AX-.785398164
BESSJ0=DSQRT(.636619772/AX)*(DCOS(XX)*(P1+Y*(P2+Y*(P3+Y*(P4+Y
*P5))))-Z*DSIN(XX)*(Q1+Y*(Q2+Y*(Q3+Y*(Q4+Y*Q5))))
ENDIF
RETURN
END

```

```

REAL*8 FUNCTION BESSJ1(X)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
REAL*8 Y,P1,P2,P3,P4,P5,Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,R1,R2,R3,R4,R5,R6,
S1,S2,S3,S4,S5,S6
DATA R1,R2,R3,R4,R5,R6/72362614232.D0,-7895059235.D0,242396853.1D0
-2972611.439D0,15704.48260D0,-30.16036606D0/,
S1,S2,S3,S4,S5,S6/144725228442.D0,2300535178.D0,
18583304.74D0,99447.43394D0,376.9991397D0,1.D0/
DATA P1,P2,P3,P4,P5/1.D0,.183105D-2,-.3516396496D-4,.2457520174D-5
-.240337019D-6/, Q1,Q2,Q3,Q4,Q5/.04687499995D0,-.2002690873D-3
.8449199096D-5,-.88228987D-6,.105787412D-6/
IF(ABS(X).LT.8.)THEN
Y=X**2
BESSJ1=X*(R1+Y*(R2+Y*(R3+Y*(R4+Y*(R5+Y*R6))))
/(S1+Y*(S2+Y*(S3+Y*(S4+Y*(S5+Y*S6))))
ELSE
AX=ABS(X)
Z=8./AX
Y=Z**2
XX=AX-2.356194491
BESSJ1=DSQRT(.636619772/AX)*(DCOS(XX)*(P1+Y*(P2+Y*(P3+Y*(P4+Y
*P5))))-Z*DSIN(XX)*(Q1+Y*(Q2+Y*(Q3+Y*(Q4+Y*Q5))))
*DSIGN(1.D0,X)
ENDIF
RETURN
END

```

```

REAL*8 FUNCTION BESSY0(X)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
REAL*8 Y,P1,P2,P3,P4,P5,Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,R1,R2,R3,R4,R5,R6,
S1,S2,S3,S4,S5,S6
DATA P1,P2,P3,P4,P5/1.D0,-.1098628627D-2,.2734510407D-4,
-.2073370639D-5,.2093887211D-6/, Q1,Q2,Q3,Q4,Q5/-.1562499995D-
*1,
.1430488765D-3,-.6911147651D-5,.7621095161D-6,-.934945152D-7/
DATA R1,R2,R3,R4,R5,R6/-2957821389.D0,7062834065.D0,-512359803.6D0

10879881.29D0,-86327.92757D0,228.4622733D0/,
S1,S2,S3,S4,S5,S6/40076544269.D0,745249964.8D0,
7189466.438D0,47447.2647D0D0,226.1030244D0,1.D0/
IF(X.LT.8.)THEN
Y=X**2
BESSY0=(R1+Y*(R2+Y*(R3+Y*(R4+Y*(R5+Y*R6)))))/(S1+Y*(S2+Y
*(S3+Y*(S4+Y*(S5+Y*S6))))+.636619772*BESSJ0(X)*DLOG(X)
ELSE
Z=8./X
Y=Z**2
XX=X-.785398164
BESSY0=DSQRT(.636619772/X)*(DSIN(XX)*(P1+Y*(P2+Y*(P3+Y*(P4+Y*
P5))))+Z*DCOS(XX)*(Q1+Y*(Q2+Y*(Q3+Y*(Q4+Y*Q5))))))
ENDIF
RETURN
END

```

```

REAL*8 FUNCTION BESSY1(X)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
REAL*8 Y,P1,P2,P3,P4,P5,Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,R1,R2,R3,R4,R5,R6,
S1,S2,S3,S4,S5,S6,S7
DATA P1,P2,P3,P4,P5/1.D0,.183105D-2,-.3516396496D-4,.2457520174D-5
-.240337019D-6/, Q1,Q2,Q3,Q4,Q5/.04687499995D0,-.2002690873D-3

.8449199096D-5,-.88228987D-6,.105787412D-6/
DATA R1,R2,R3,R4,R5,R6/-.4900604943D13,.1275274390D13,-.5153438139
*D11,
*.7349264551D9,-.4237922726D7,.8511937935D4/,
S1,S2,S3,S4,S5,S6,S7/.2499580570D14,.4244419664D12,
.3733650367D10,.2245904002D8,.102042605006,.354963288503,1.D0/
IF(X.LT.8.)THEN
Y=X**2
BESSY1=X*(R1+Y*(R2+Y*(R3+Y*(R4+Y*(R5+Y*R6))))/(S1+Y*(S2+Y*
(S3+Y*(S4+Y*(S5+Y*(S6+Y*S7)))))+.636619772
*(BESSJ1(X)*DLOG(X)-1./X)
ELSE
Z=8./X
Y=Z**2
XX=X-2.356194491
BESSY1=DSQRT(.636619772/X)*(DSIN(XX)*(P1+Y*(P2+Y*(P3+Y*(P4+Y
*P5))))+Z*DCOS(XX)*(Q1+Y*(Q2+Y*(Q3+Y*(Q4+Y*Q5))))))
ENDIF
RETURN
END

```

```

REAL*8 FUNCTION BESS10(X)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
REAL*8 Y,P1,P2,P3,P4,P5,P6,P7,
      Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,Q6,Q7,Q8,Q9
DATA P1,P2,P3,P4,P5,P6,P7/1.000,3.515622900,3.089942400,1.20674920
*0,
      0.265973200,0.3607680-1,0.458130-2/
DATA Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,Q6,Q7,Q8,Q9/0.3989422800,0.13285920-1,
      0.2253190-2,-0.1575650-2,0.9162810-2,-0.20577060-1,
      0.26355370-1,-0.16476330-1,0.3923770-2/
IF (ABS(X).LT.3.75) THEN
  Y=(X/3.75)**2
  BESS10=P1+Y*(P2+Y*(P3+Y*(P4+Y*(P5+Y*(P6+Y*P7))))))
ELSE
  AX=ABS(X)
  Y=3.75/AX
  BESS10=(DEXP(AX)/DSQRT(AX))*(Q1+Y*(Q2+Y*(Q3+Y*(Q4
    +Y*(Q5+Y*(Q6+Y*(Q7+Y*(Q8+Y*Q9)))))))
ENDIF
RETURN
END

```

```

REAL*8 FUNCTION BESS11(X)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
REAL*8 Y,P1,P2,P3,P4,P5,P6,P7,
      Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,Q6,Q7,Q8,Q9
DATA P1,P2,P3,P4,P5,P6,P7/0.500,0.8789059400,0.5149886900,
      0.1508493400,0.26587330-1,0.3015320-2,0.324110-3/
DATA Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,Q6,Q7,Q8,Q9/0.3989422800,-0.39880240-1,
      -0.3620180-2,0.1638010-2,-0.10315550-1,0.22829670-1,
      -0.28953120-1,0.17876540-1,-0.4200590-2/
IF (DABS(X).LT.3.75) THEN
  Y=(X/3.75)**2
  BESS11=X*(P1+Y*(P2+Y*(P3+Y*(P4+Y*(P5+Y*(P6+Y*P7))))))
ELSE
  AX=DABS(X)
  Y=3.75/AX
  BESS11=(DEXP(AX)/DSQRT(AX))*(Q1+Y*(Q2+Y*(Q3+Y*(Q4+
    Y*(Q5+Y*(Q6+Y*(Q7+Y*(Q8+Y*Q9)))))))
ENDIF
RETURN
END

```

```

REAL*8 FUNCTION BESSK1(X)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
REAL*8 Y,P1,P2,P3,P4,P5,P6,P7,
*   Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,Q6,Q7
DATA P1,P2,P3,P4,P5,P6,P7/1.000,0.1544314400,-0.6727857900,
*   -0.1815689700,-0.19194020-1,-0.1104040-2,-0.46860-4/
DATA Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,Q6,Q7/1.2533141400,0.2349861900,-0.36556200-1,
      0.15042680-1,-0.7803530-2,0.3256140-2,-0.682450-3/
IF (X.LE.2.0) THEN
  Y=X*X/4.0
  BESSK1=(LOG(X/2.0)*BESS11(X))+(1.0/X)*(P1+Y*(P2+
*   Y*(P3+Y*(P4+Y*(P5+Y*(P6+Y*P7))))))
ELSE
  Y=2.0/X

```

```

BESSK1=(DEXP(-X)/DSQRT(X))*(Q1+Y*(Q2+Y*(Q3+
Y*(Q4+Y*(Q5+Y*(Q6+Y*Q7))))))

```

```

ENDIF
RETURN
END

```

```

.....

FUNCTION BESSK0(X)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
REAL*8 Y,P1,P2,P3,P4,P5,P6,P7,
Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,Q6,Q7
DATA P1,P2,P3,P4,P5,P6,P7/-0.5772156600,0.4227842000,0.2306975600,
0.34885900-1,0.2626980-2,0.107500-3,0.740-5/
DATA Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,Q6,Q7/1.2533141400,-0.78323580-1,0.21895680-1,
-0.10624460-1,0.5878720-2,-0.2515400-2,0.532080-3/
IF (X.LE.2.0) THEN
Y=X*X/4.0
BESSK0=(-DLOG(X/2.0)*BESSI0(X))+(P1+Y*(P2+Y*(P3+
Y*(P4+Y*(P5+Y*(P6+Y*P7))))))
ELSE
Y=(2.0/X)
BESSK0=(DEXP(-X)/DSQRT(X))*(Q1+Y*(Q2+Y*(Q3+
Y*(Q4+Y*(Q5+Y*(Q6+Y*Q7))))))
ENDIF
RETURN
END

```

```

REAL*8 FUNCTION BESSJ2(X)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
EXTERNAL BESSJ1,BESSJ0

```

```

IF (X.EQ.0.D0) THEN
F=0.D0
ELSE
F=2.d0*BESSJ1(X)/X - BESSJ0(X)
END IF

```

```

BESSJ2=F

```

```

RETURN
END

```

```

REAL*8 FUNCTION BESSJ3(X)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

```

```

IF (X.EQ.0.D0) THEN
F=0.D0
ELSE
F=(8.D0/(X*X)-1.d0)*BESSJ1(X) - 4.D0*BESSJ0(X)/X
END IF

```

```

BESSJ3=F

```

```

RETURN
END

```

```

REAL*8 FUNCTION BESSJ4(X)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

```

```

IF (X.EQ.0.D0) THEN
  F=0.D0
ELSE
  F=8.D0*( 6.D0/(X*X)-1.D0 )*BESSJ1(X)/X + (1.D0-24.D0/(X*X))*BESSJ0(X)
END IF

```

```

BESSJ4=F

```

```

RETURN
END

```

```

.....
REAL*8 FUNCTION BESSJ5(X)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

```

```

IF (X.EQ.0.D0) THEN
  F=0.D0
ELSE
  F1=(64.D0*(6.D0/(X*X)-1.D0)/(X*X)- 8.D0/(X*X) + 1.D0)*BESSJ1(X)
  F2=4.D0*(2.D0*(1.D0-24.D0/(X*X)) + 1.D0)*BESSJ0(X)/X
  F=F1+F2
END IF

```

```

BESSJ5=F

```

```

RETURN
END

```

```

.....
AS FUNCOES Yn(X) DIVERGEM PARA -INFINITO NA ORIGEM

```

```

REAL*8 FUNCTION BESSY2(X)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

```

```

F=2.d0*BESSY1(X)/X - BESSY0(X)
BESSY2=F

```

```

RETURN
END

```

```

.....
REAL*8 FUNCTION BESSY3(X)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

```

```

F=(8.D0/(X*X)-1.d0)*BESSY1(X) - 4.D0*BESSY0(X)/X
BESSY3=F

```

```

RETURN
END

```

```

.....
REAL*8 FUNCTION BESSY4(X)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

```

```

F=8.D0*( 6.D0/(X*X)-1.D0 )*BESSY1(X)/X + (1.D0-24.D0/(X*X))*BESSY0(X)
BESSY4=F

```

```

RETURN
END

```

```

REAL*8 FUNCTION BESSY5(X)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

F1=( 64.D0*(6.D0/(X*X)-1.D0)/(X*X)- 8.D0/(X*X) + 1.D0 )*BESSY1(X)
F2=4.D0*( 2.D0*(1.D0-24.D0/(X*X)) + 1.D0 )*BESSY0(X)/X
F=F1+F2
BESSY5=F

RETURN
END

```

AS FUNCOES $K_n(X)$ DIVERGEM PARA INFINITO NA ORIGEM

```

REAL*8 FUNCTION BESSK2(X)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

F=2.D0*BESSK1(X)/X + BESSK0(X)
BESSK2=F

RETURN
END

```

```

REAL*8 FUNCTION BESSK3(X)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

F=(8.D0/(X*X)+1.D0)*BESSK1(X) + 4.D0*BESSK0(X)/X
BESSK3=F

RETURN
END

```

```

REAL*8 FUNCTION BESSK4(X)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

F=8.D0*( 6.D0/(X*X)+1.D0 )*BESSK1(X)/X + (1.D0+24.D0/(X*X))*BESSK0(X)
BESSK4=F

RETURN
END

```

```

REAL*8 FUNCTION BESSK5(X)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

F1=( 64.D0*(6.D0/(X*X)+1.D0)/(X*X) + 8.D0/(X*X) + 1.D0 )*BESSK1(X)
F2=4.D0*( 2.D0*(1.D0+24.D0/(X*X)) + 1.D0 )*BESSK0(X)/X
F=F1+F2
BESSK5=F

RETURN
END

```

```

REAL*8 FUNCTION BESSI2(X)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

F=BESSI0(X) - 2.D0*BESSI1(X)/X
BESSI2=F

```

```
RETURN  
END
```

```
REAL*8 FUNCTION BESS13(X)  
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
```

```
F=(8.D0/(X*X)+1.D0)*BESS11(X) - 4.D0*BESS10(X)/X  
BESS13=F
```

```
RETURN  
END
```

```
REAL*8 FUNCTION BESS14(X)  
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
```

```
F=(1.D0+24.D0/(X*X))*BESS10(X)-8.D0*(6.D0/(X*X)+1.D0)*BESS11(X)/X  
BESS14=F
```

```
RETURN  
END
```

```
REAL*8 FUNCTION BESS15(X)  
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
```

```
F1=( 64.D0*(6.D0/(X*X)+1.D0)/(X*X) + 8.D0/(X*X) + 1.D0 )*BESS11(X)  
F2=4.D0*( 2.D0*(1.D0+24.D0/(X*X)) + 1.D0 )*BESS10(X)/X  
F=F1-F2  
BESS15=F
```

```
RETURN  
END
```

APÊNDICE A

APROXIMAÇÃO LP

Neste apêndice são descritos os detalhes da aproximação LP e sua aplicação ao guia bastão mostrados no capítulo I.

A-1 - Fibra bastão

A fibra bastão é um guia de ondas que apresenta simetria cilíndrica, sendo composta de uma região interna, o núcleo, e uma externa, a casca. Tais regiões apresentam, respectivamente, índices N_1 e N_2 e a é o raio do núcleo, como está indicado na figura (A-1).

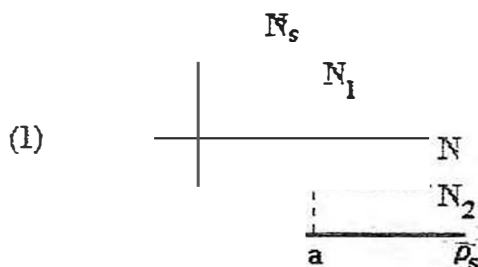


Fig. (A-1) Perfil do índice de refração do guia bastão.

Para se obter as soluções do guia bastão, toma-se as equações de Maxwell, para o caso de um meio dielétrico, que são dadas a seguir:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{A-1})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (\text{A-2})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (\text{A-3})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (\text{A-4})$$

Aplicando-se o rotacional à equação(A-2),

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \left(\nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \quad (\text{A-5}),$$

usando-se a seguinte identidade vetorial

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

e a condição das derivadas temporais e espaciais serem independentes entre si, logo se obtém:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (\text{A-6}).$$

Usando-se a equação (A-3) na eq.(A-6), vem a seguinte equação:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A-7}),$$

O mesmo procedimento pode ser feito para o campo magnético, resultando na seguinte equação :

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A-8}).$$

Como as equações (A-7) e (A-8) são análogas, pode-se escrever, genericamente, a seguinte equação de onda:

$$\nabla^2 \Psi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A-9})$$

Nesta equação Ψ pode ser tanto o campo elétrico quanto o campo magnético, os quais são uma função de (θ, ρ, z, t) . Fazendo-se o uso do método da separação de variáveis, escreve-se $\Psi = \Phi(\theta, \rho, z) T(t)$. Efetuando-se as devidas operações matemáticas, obtêm-se as seguintes equações:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \epsilon \mu k^2 T = 0 \quad (\text{A-10}),$$

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = 0 \quad (\text{A-11})$$

Usando-se $N^2 = \epsilon/\epsilon_0$ e $\omega = kc$, temos:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \quad (\text{A-12})$$

$$\nabla^2 \Phi + N^2 k^2 \Phi = 0 \quad (\text{A-13})$$

A equação (A-12) tem como solução:

$$T = T_0 e^{\pm i\omega t} \quad (\text{A-14})$$

A equação (1-7) precisa ser resolvida usando-se, novamente, o método da separação das variáveis. Para isso usa-se a seguinte mudança de variável, $\Phi = \varphi(\theta, \rho) Z(z)$;

$$Z(z) \nabla_1^2 [\varphi(\theta, \rho)] + N^2 k^2 \varphi(\theta, \rho) Z(z) + \varphi(\theta, \rho) \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A-15}),$$

$$\text{onde } \nabla_1^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right] + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} .$$

Dividindo a equação (A-15) por Φ , obtêm-se:

$$\frac{1}{\varphi} \nabla_1^2 \varphi(\theta, \rho) + N^2 k^2 + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A-16}).$$

Como φ é função de $(\theta$ e $\rho)$ e Z é função apenas de z , a equação (A-16) deverá satisfazer à seguinte condição:

$$\frac{1}{\varphi} \nabla_t^2 \varphi(\theta, \rho) + N^2 k^2 = -\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \beta^2 \quad (\text{A-17}),$$

onde β , a constante de separação de variáveis, é a constante de propagação. Logo, a equação (A-17) pode ser dada por:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \beta^2 Z = 0 \quad (\text{A-18})$$

$$\nabla_t^2 \varphi + [N^2 k^2 - \beta^2] \varphi = 0 \quad (\text{A-19})$$

A equação (A-18) tem como solução:

$$Z = Z_0 e^{-i\beta z} \quad (\text{A-20}).$$

Na equação (A-19) faz-se outra vez o uso do método da separação de variáveis, pois o índice de refração N depende apenas da variável ρ . Para isso usa-se a seguinte mudança, $\varphi = \Theta(\theta) R(\rho)$. Assim procedendo-se, chega-se à seguinte equação:

$$\frac{\Theta}{\rho} \left[\frac{dR}{d\rho} + \rho \frac{d^2 R}{d\rho^2} \right] + \frac{R}{\rho} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + [N^2 k^2 - \beta^2] \Theta R = 0 \quad (\text{A-21}).$$

Dividindo-se a equação (A-21) por $R \Theta$, obtêm-se:

$$\frac{\rho^2}{R} \left\{ \left[\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} \right] + [N^2 k^2 - \beta^2] \right\} + \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = 0 \quad (\text{A-22}).$$

Como R e Θ são variáveis independentes, a eq.(A-22) leva às equações:

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} - v^2 \Theta = 0 \quad (\text{A-23});$$

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left[N^2 k^2 - \beta^2 - \frac{v^2}{\rho^2} \right] R = 0 \quad (\text{A-24});$$

onde ℓ é a constante do método de separação de variáveis. A equação (A-23) tem solução do tipo, $\Theta = \theta_0 e^{-i\ell\theta}$. Esta é uma solução oscilante do tipo $\sin(v\theta + \theta_0)$ ou $\cos(v\theta + \theta_0)$, onde θ_0 é uma constante a ser determinada. Já a equação (A-24) é conhecida como equação diferencial de Bessel. Como o guia bastão apresenta dois índices de refração distintos, N_1 e N_2 , têm-se que a equação para esta fibra serão as seguintes:

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left[\frac{U^2}{a^2} - \frac{v^2}{\rho^2} \right] R = 0 \quad (\rho < a) \quad (\text{A-25})$$

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} - \left[\frac{W^2}{a^2} + \frac{v^2}{\rho^2} \right] R = 0 \quad (\rho > a) \quad (\text{A-26})$$

As soluções das eqs.(A-25) e (A-26) serão do tipo:

$$R(\rho) = \begin{cases} AJ_v\left(\frac{U\rho}{a}\right) + A^* Y_v\left(\frac{U\rho}{a}\right), & 0 < \rho < a \\ BK_v\left(\frac{W\rho}{a}\right) + B^* I_v\left(\frac{W\rho}{a}\right), & \rho > a \end{cases} \quad (\text{A-27}).$$

sendo U e W, definidos da seguinte forma:

$$U^2 = a^2(k^2 N_1^2 - \beta^2) \quad \text{e} \quad W^2 = a^2(\beta^2 - k^2 N_2^2) \quad (\text{A-28})$$

As constantes A^* e B^* são igualadas a zero, porque as funções de Bessel Y e I apresentam problemas de convergência nos intervalos nos quais são usados. A função de Bessel de segunda espécie, Y, diverge quando seu argumento tende a zero, enquanto a função modificada de Bessel de segunda, I, espécie diverge para argumentos que tendam para infinito. Então, a solução será reduzida a:

$$E_z = \begin{cases} \frac{AJ_v\left(\frac{U\rho}{a}\right)}{J_v(U)} & \rho < a \\ \frac{AK_v\left(\frac{W\rho}{a}\right)}{K_v(W)} & \rho > a \end{cases} \quad e \quad H_z = \begin{cases} \frac{BJ_v\left(\frac{U\rho}{a}\right)}{J_v(U)} & \rho < a \\ \frac{BK_v\left(\frac{W\rho}{a}\right)}{K_v(W)} & \rho > a \end{cases} \quad (\text{A-29})$$

Onde A e B são constantes a serem determinadas. Para encontrar as demais componentes do campo basta desenvolver as equações (A-1) e (A-2) em coordenadas cilíndricas, chegando-se às seguintes equações:

$$E_\rho = \begin{cases} \left| \begin{array}{cc} a^2 & \frac{\nu\omega\mu_0 BJ_v\left(\frac{U\rho}{a}\right)}{\rho J_v(U)} - \frac{\imath\beta U A J_v\left(\frac{U\rho}{a}\right)}{a J_v(U)} \end{array} \right| & \rho \leq a \\ \left| \begin{array}{cc} a^2 & \frac{\nu\omega\mu_0 BK_v\left(\frac{W\rho}{a}\right)}{\rho K_v(W)} - \frac{\imath\beta W A K_v\left(\frac{W\rho}{a}\right)}{a K_v(W)} \end{array} \right| & \rho > a \end{cases} \quad (\text{A-30})$$

$$\begin{cases} \left| \begin{array}{c} a^2 \frac{\imath\omega\mu_0 U B J_v\left(\frac{U\rho}{a}\right)}{a J_v(U)} + \frac{\beta \nu A J_v\left(\frac{U\rho}{a}\right)}{\rho J_v(U)} \\ \frac{a^2 \imath\omega\mu_0 W B K_v\left(\frac{W\rho}{a}\right)}{a K_v(W)} + \frac{\beta \nu A K_v\left(\frac{W\rho}{a}\right)}{\rho K_v(W)} \end{array} \right| & \rho > a \end{cases} \quad (\text{A-31})$$

$$H_p = \begin{cases} \frac{a^2}{U^2} \left| \frac{\nu N_1^2 \omega \epsilon_0 A J_v \left(\frac{U\rho}{a} \right)}{\rho J_v(U)} - \frac{i\beta U B J_v \left(\frac{U\rho}{a} \right)}{a J_v(U)} \right| & \rho \leq a \\ \frac{a^2}{W^2} \left| \frac{\nu N_2^2 \omega \epsilon_0 A K_v \left(\frac{W\rho}{a} \right)}{\rho K_v(W)} - \frac{i\beta W B K_v \left(\frac{W\rho}{a} \right)}{a K_v(W)} \right| & \rho > a \end{cases} \quad (\text{A-32})$$

$$\begin{cases} \frac{a^2}{U^2} \left| \frac{i N_1^2 \omega \epsilon_0 U A J_v \left(\frac{U\rho}{a} \right)}{a J_v(U)} - \frac{\beta \nu B J_v \left(\frac{U\rho}{a} \right)}{\rho J_v(U)} \right| & \\ \frac{a^2}{W^2} \left| \frac{i N_2^2 \omega \epsilon_0 W A K_v \left(\frac{W\rho}{a} \right)}{a K_v(W)} - \frac{\beta \nu B K_v \left(\frac{W\rho}{a} \right)}{\rho K_v(W)} \right| & \rho > a \end{cases} \quad (\text{A-33}),$$

onde J' e K' são as derivadas destas funções em relação a ρ .

Usando as condições de contorno em $\rho = a$ e calculando a razão entre as constantes A e B encontra-se a equação de autovalores. Na interface das regiões de mudança de índices de refração as componentes tangenciais dos campos elétricos e magnéticos são contínuas. Pela equação (A-31) afirma-se que as componentes dos campos são contínuas em $\rho = a$, sendo obtida a seguinte equação:

$$\frac{A}{B} = -\frac{i\omega\mu_0}{\beta\nu} \left(\frac{U^2 W^2}{v^2} \right) \left[\frac{J'_v(U)}{U J_v(U)} + \frac{K'_v(W)}{W K_v(W)} \right] \quad (\text{A-34})$$

a equação (A-33) também deve ser contínua em $\rho = 0$, logo encontra-se a seguinte equação.

$$\frac{A}{B} = -\frac{i\beta\nu}{\omega\epsilon_0} \left(\frac{v^2}{U^2 W^2} \right) \left[N_1^2 \frac{J'_v(U)}{U J_v(U)} + N_2^2 \frac{K'_v(W)}{W K_v(W)} \right]^{-1} \quad (\text{A-35})$$

igualando-se as equações (A-34) e (A-35) obtêm-se a seguinte equação de autovalores,

$$\left[\frac{J'_\nu(U)}{UJ'_\nu(U)} + \frac{K'_\nu(W)}{WK'_\nu(W)} \right] \left[\frac{J'_\nu(U)}{UJ'_\nu(U)} + (1-2\Delta) \frac{K'_\nu(W)}{WK'_\nu(W)} \right] = \left(\frac{v\beta}{kN_1} \right)^2 \left(\frac{v}{UW} \right)^4 \quad (\text{A-36}),$$

onde se usou:

$$N_2^2 \cong N_1^2(1-2\Delta) \text{ e } v^2 = (N_1^2 - N_2^2)k^2a^2 \quad (\text{A-37})$$

Para o caso especial em que $v = 0$, a equação (A-36) é bastante simplificada sendo possível obter os modos TE e TM, Mas para $v \geq 1$ a solução é complicada pois têm-se que resolver a eq.(A-36) completa. O interesse neste tipo de guia está no comprimento de onda óptico isto implica que a diferença entre os índices de refração seja muito pequena, da ordem de um por cento. Essa é a aproximação de guiamento fraco, $\Delta \ll 1$, que facilita bastante na solução da eq (A-36) pois tomando-se o limite em que $\Delta \rightarrow 0$ obtêm-se a seguinte expressão:

$$\left[\frac{J'_\nu(U)}{UJ'_\nu(U)} + \frac{K'_\nu(W)}{WK'_\nu(W)} \right] = \pm \frac{v\nu^2}{U^2W^2} \quad (\text{A-38})$$

usando as relações para as funções de Bessel,

$$J'_\nu(U) = \mp \frac{\nu J_\nu(U)}{U} \pm J_{\nu \mp 1}(U) \quad (\text{A-39})$$

$$K'_\nu(W) = \mp \frac{\nu K_\nu(W)}{W} - K_{\nu \mp 1}(W) \quad (\text{A-40})$$

tomando-se o sinal mais na eq.(A-38) e substituindo-se as equações (A-39) e (A-40) encontra-se seguinte equação para o modo EH:

$$\left[\frac{J_{\nu+1}(U)}{UJ_\nu(U)} + \frac{K_{\nu+1}(W)}{WK_\nu(W)} \right] = 0 \quad (\nu > 0) \quad (\text{A-41})$$

Para o sinal negativo, encontra-se a equação para os modos HE.

$$\left[\frac{J_{\nu-1}(U)}{UJ_{\nu}(U)} - \frac{K_{\nu-1}(W)}{WK_{\nu}(W)} \right] = 0 \quad (\nu > 0) \quad (\text{A-42})$$

Às eq.(A-37) e (A-38) são referentes aos modos denominados de híbridos. Usando as eq. (A-34), (A-35), (A-41) e (A-42) as razões entre as constantes A e B serão dadas a seguir:

$$\frac{A}{B} = -\frac{\nu}{N_1} \left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \right)^{1/2} \frac{\nu}{|V|} \quad (\text{A-43})$$

$$\frac{A}{B} = +\frac{\nu}{N_1} \left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \right)^{1/2} \frac{\nu}{|V|} \quad (\text{A-44})$$

a eq.(A-43) é a razão para o modo EH e a eq.(A-44) o modo HE.

A.2 - Aproximação LP

Para investigar os modos híbridos usa-se a aproximação LP, que consiste em escrevê-los através da combinação linear de pseudo-modos. Permanecendo a condição $\Delta \ll 1$. Substituindo as eq. (A-43) e (A-44) nas equações (A-30,31,32,33) obtêm-se as seguintes expressões:

$$E_z = \begin{cases} \frac{AJ_{\nu}\left(\frac{U\rho}{a}\right)}{J_{\nu}(U)} & \rho < a \\ \frac{AK_{\nu}\left(\frac{W\rho}{a}\right)}{K_{\nu}(W)} & \rho > a \end{cases} \quad (\text{A-45})$$

$$H_z = \begin{cases} \pm 1 A N \left(\begin{matrix} \epsilon_o \\ \mu_o \end{matrix} \right) \sqrt{v} \frac{J_v \left(\frac{U\rho}{a} \right)}{J_v(U)} & \rho < a \\ \pm 1 \left(\begin{matrix} \epsilon_o \\ \mu_o \end{matrix} \right) \sqrt{v} \frac{K_v \left(\frac{W\rho}{a} \right)}{K_v(W)} & \rho > a \end{cases} \quad (\text{A-46})$$

$$E_\rho = \begin{cases} \mp 1 A \frac{akN}{U} \frac{J_{v\pm 1} \left(\frac{U\rho}{a} \right)}{J_v(U)} & \rho < a \\ \pm 1 A \frac{akN}{W} \frac{K_{v\pm 1} \left(\frac{W\rho}{a} \right)}{K_v(W)} & \rho > a \end{cases} \quad (\text{A-47})$$

$$E_\theta = \begin{cases} -1 A \frac{akN}{U} \sqrt{v} \frac{J_{v\pm 1} \left(\frac{U\rho}{a} \right)}{J_v(U)} ; & \rho \leq a \\ \pm 1 A \frac{akN}{W} \sqrt{v} \frac{K_{v\pm 1} \left(\frac{W\rho}{a} \right)}{K_v(W)} ; & \rho > a \end{cases} \quad (\text{A-48})$$

$$H_\rho = \begin{cases} A \frac{akN^2}{U} \left(\frac{\epsilon_o}{\mu_o} \right)^{1/2} \sqrt{v} \frac{J_{v\pm 1} \left(\frac{U\rho}{a} \right)}{J_v(U)} ; & \rho \leq a \\ \pm A \frac{akN^2}{W} \left(\frac{\epsilon_o}{\mu_o} \right)^{1/2} \sqrt{v} \frac{K_{v\pm 1} \left(\frac{W\rho}{a} \right)}{K_v(W)} ; & \rho > a \end{cases} \quad (\text{A-49})$$

$$\begin{cases} \mp 1 A \frac{akN^2}{U} \left(\frac{\epsilon_o}{\mu_o} \right)^{1/2} \frac{J_{v\pm 1} \left(\frac{U\rho}{a} \right)}{J_v(U)} & \rho \leq a \\ \pm 1 A \frac{akN^2}{W} \left(\frac{\epsilon_o}{\mu_o} \right)^{1/2} \frac{K_{v\pm 1} \left(\frac{W\rho}{a} \right)}{K_v(W)} ; & \rho > a \end{cases} \quad (\text{A-50})$$

Lembrando-se da dependência em θ da eq. (A-22), as soluções tomam a seguinte forma:

$$\varphi(\theta, \rho) = \begin{cases} \text{AJ}_l\left(\frac{U_1 \rho}{a}\right) \cos(l\theta), & 0 < \rho < a \\ \text{BK}_l\left(\frac{W_2 \rho}{a}\right) \cos(l\theta), & \rho > a \end{cases} \quad (\text{A-51}),$$

onde φ pode ser o campo elétrico ou o campo magnético.

Seguindo a aproximação LP os campos existentes são considerados como polarizados linearmente da seguinte forma; $\mathbf{E} = \mathbf{E}(0, E_y, E_z)$ e $\mathbf{H} = \mathbf{H}(H_x, 0, H_z)$ ou $\mathbf{E} = \mathbf{E}(E_x, 0, E_z)$ e $\mathbf{H} = \mathbf{H}(0, H_y, H_z)$. Neste trabalho usa-se a primeira polarização. Desta forma a solução para o campo elétrico é dada por:

$$E_y = \begin{cases} \text{AJ}_l\left(\frac{U_1 \rho}{a}\right) \cos(l\theta) & \rho < a \\ \text{BK}_l\left(\frac{W_2 \rho}{a}\right) \cos(l\theta) & \rho > a \end{cases} \quad (\text{A-52}).$$

Os argumentos das funções de Bessel serão:

$$U_1 = [N_1^2 - N^2]^{1/2} k_0 a \quad \text{e} \quad W_2 = [N^2 - N_2^2]^{1/2} k_0 a \quad (\text{A-53});$$

onde N é o índice de refração efetivo, $N = \frac{\beta}{k}$, associado ao modo correspondente a β . A definição de N como índice de refração efetivo indica que o modo propagante vê não o índice de refração do meio mas N . Usando-se as equações de Maxwell pode-se encontrar as outras componentes do campo elétrico que são E_z e E_θ , visto que $E_\rho = E_y$, como é demonstrado no apêndice B. As expressões para as demais componentes serão:

$$E_{\theta} = \begin{cases} AJ_{\ell}\left(\frac{U_1\rho}{a}\right)\cos(\ell\theta)\cos\theta & \rho < a \\ BK_{\ell}\left(\frac{W_2\rho}{a}\right)\cos(\ell\theta)\cos\theta & \rho > a \end{cases} \quad (\text{A-54});$$

$$E_z = \begin{cases} -\frac{i}{k_0 N} \frac{U_1}{2a} A \left[J_{\ell-1}\left(\frac{U_1\rho}{a}\right)\text{sen}(\ell-1)\theta + J_{\ell+1}\left(\frac{U_1\rho}{a}\right)\text{sen}(\ell+1)\theta \right]; & \rho < a \\ \frac{i}{k_0 N} \frac{W_2}{2a} B \left[K_{\ell-1}\left(\frac{W_2\rho}{a}\right)\text{sen}(\ell-1)\theta + K_{\ell+1}\left(\frac{W_2\rho}{a}\right)\text{sen}(\ell+1)\theta \right]; & \rho > a \end{cases} \quad (\text{A-55});$$

Impondo-se, às soluções encontradas, as condições de continuidade dos campos nas interfaces de separação de regiões de índices de refração diferentes, chega-se à seguinte equação transcendental:

$$\frac{J_{\ell}(U)}{UJ_{\ell\pm 1}(U)} = \frac{K_{\ell}(W)}{WK_{\ell\pm 1}(W)} \quad (\text{A-56});$$

onde os argumentos U_1 e W_2 serão dados em função da frequência normalizada v e da constante de propagação normalizada B definidas a seguir;

$$v = [N_1^2 - N_2^2]^{1/2} k_0 a \quad \text{e} \quad B = \frac{N^2 - N_2^2}{N_1^2 - N_2^2} \quad (\text{A-57}).$$

Com elas a eq.(A-28), torna-se:

$$U = [1 - B]^{1/2} v; \quad W = B^{1/2} v \quad (\text{A-58}).$$

A equação (A-56) será solucionada numericamente e os resultados serão visto no capítulo I.

APÊNDICE B

FIBRA TUBO

Os cálculos detalhados para o guia tubo serão desenvolvidos neste apêndice.

B-1 - Fibra tubo

Este guia de ondas apresenta o seguinte perfil para os índices de refração.

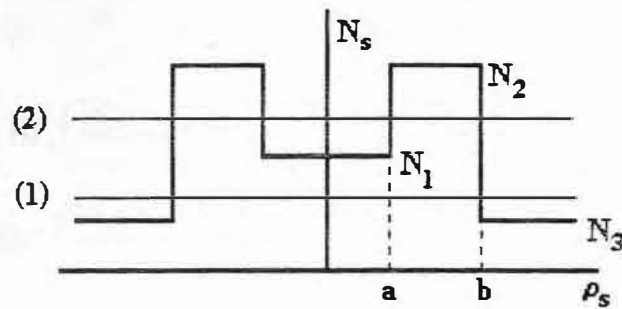


Fig.(B-1) Perfil de índice de refração para o guia tubo

Como está descrito na figura (B-1) o guia tubo apresenta duas situações para o índice de refração efetivo, onde ocorre guiamento de onda. Para resolver a situação (1) use o mesmo procedimento feito no apêndice A para fibra bastão. Sendo necessário usar a aproximação L P. Neste caso a componente transversal do campo elétrico é dada por:

$$E_y = \begin{cases} AJ_l \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \cos(\ell \theta); & \rho < a \\ \left[BJ_l \left(\frac{W_2 \rho}{b} \right) + CY_l \left(\frac{W_2 \rho}{b} \right) \right] \cos(\ell \theta); & a < \rho < b \\ DK_l \left(\frac{W_4 \rho}{b} \right) \cos(\ell \theta); & \rho > a \end{cases} \quad (B-1);$$

Na aproximação L P , a componente E_x será igual a zero e a componente do campo elétrico na direção z será dada por:

$$E_z \cong \frac{1}{kn} \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{1}{kn} \left[\text{sen} \theta \frac{\partial E_y}{\partial \rho} + \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial E_y}{\partial \theta} \right] \quad (\text{B-2});$$

onde E_θ será dada por, visto que a componente E_x é igual a zero;

$$E_\theta \cong E_y \cos \theta . \quad (\text{B-3})$$

Calcula-se então E_z e E_θ . Para calcular E_z encontra-se primeiro a derivada de E_y com relação a y.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial y} &= A \frac{U_1}{a} (\text{sen} \theta \cos \ell \theta) J'_\ell \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) - A \frac{\ell}{\rho} (\cos \theta \text{sen} \ell \theta) J_\ell \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \\ \frac{\partial E_y}{\partial y} &= \frac{W_2}{a} (\text{sen} \theta \cos \ell \theta) \left[\text{BJ}'_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + \text{CY}'_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] - \frac{\ell}{\rho} (\cos \theta \text{sen} \ell \theta) \left[\text{BJ}_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + \text{CY}_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \\ \frac{\partial E_y}{\partial y} &= F \frac{W_4}{c} (\text{sen} \theta \cos \ell \theta) K'_\ell \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) - F \frac{\ell}{\rho} (\cos \theta \text{sen} \ell \theta) K_\ell \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \end{aligned}$$

Usando-se as relações de recorrência para as funções de Bessel, dadas abaixo:

$$\begin{aligned} J_\ell(u) &= \frac{u}{2\ell} [J_{\ell-1}(u) + J_{\ell+1}(u)], \quad J'_\ell(u) = \frac{1}{2} [J_{\ell-1}(u) - J_{\ell+1}(u)], \\ Y_\ell(u) &= \frac{u}{2\ell} [Y_{\ell+1}(u) + Y_{\ell-1}(u)], \quad Y'_\ell(u) = \frac{1}{2} [Y_{\ell-1}(u) - Y_{\ell+1}(u)], \\ K_\ell(u) &= \frac{u}{2\ell} [K_{\ell-1}(u) - K_{\ell+1}(u)], \quad K'_\ell(u) = -\frac{1}{2} [K_{\ell-1}(u) + K_{\ell+1}(u)], \end{aligned} \quad (\text{B-4})$$

e as identidades trigonométricas;

$$\begin{aligned} \text{sen}(A + B) &= \text{sen} A \cos B + \cos A \text{sen} B, \\ \text{sen}(A - B) &= \text{sen} A \cos B - \cos A \text{sen} B, \end{aligned} \quad (\text{B-5})$$

a derivada para cada região será dada por.

Intervalo $0 < \rho < a$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_y}{\partial y} &= A \frac{U_1}{a} (\text{sen } \theta \cos \ell \theta) J'_\ell \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) - A \frac{\ell}{\rho} (\cos \theta \text{sen } \ell \theta) J_\ell \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \\
 &= A \frac{U_1}{2a} \left\{ (\text{sen } \theta \cos \ell \theta) \left[J_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) - J_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \right] - (\cos \theta \text{sen } \ell \theta) \left[J_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) + J_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \right] \right\} \\
 &= A \frac{U_1}{2a} \left\{ [\text{sen } \theta \cos \ell \theta - \cos \theta \text{sen } \ell \theta] J_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) - [\text{sen } \theta \cos \ell \theta + \cos \theta \text{sen } \ell \theta] J_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \right\} \\
 &= A \frac{U_1}{2a} \left\{ \text{sen}(1-\ell)\theta J_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) - \text{sen}(1+\ell)\theta J_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \right\} \\
 &= A \frac{U_1}{2a} \left\{ -\text{sen}(\ell-1)\theta J_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) - \text{sen}(\ell+1)\theta J_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \right\} \\
 \frac{\partial E_y}{\partial y} &= -A \frac{U_1}{2a} \left\{ \text{sen}(\ell-1)\theta J_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) + \text{sen}(\ell+1)\theta J_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Intervalo $a < \rho < b$,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_y}{\partial y} &= \frac{W_2}{a} (\text{sen } \theta \cos \ell \theta) \left[\text{BJ}'_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + \text{CY}'_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] - \frac{\ell}{\rho} (\cos \theta \text{sen } \ell \theta) \left[\text{BJ}_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + \text{CY}_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \\
 &= \frac{W_2}{2a} (\text{sen } \theta \cos \ell \theta) \left\{ \text{B} \left[J_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) - J_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] + \text{C} \left[\text{Y}_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) - \text{Y}_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \right\} + \\
 &\quad - \frac{W_2}{2a} (\cos \theta \text{sen } \ell \theta) \left\{ \text{B} \left[J_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + J_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] + \text{C} \left[\text{Y}_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + \text{Y}_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \right\} \\
 &= \frac{W_2}{2a} \left\{ \text{BJ}_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) [\text{sen } \theta \cos \ell \theta - \cos \theta \text{sen } \ell \theta] - \text{BJ}_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) [\text{sen } \theta \cos \ell \theta + \cos \theta \text{sen } \ell \theta] + \right. \\
 &\quad \left. + \text{CY}_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) [\text{sen } \theta \cos \ell \theta - \cos \theta \text{sen } \ell \theta] - \text{CY}_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) [\text{sen } \theta \cos \ell \theta + \cos \theta \text{sen } \ell \theta] \right\} \\
 &= \frac{W_2}{2a} \left\{ \left[\text{BJ}_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + \text{CY}_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \text{sen}(1-\ell)\theta - \left[\text{BJ}_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + \text{CY}_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \text{sen}(1+\ell)\theta \right\} \\
 \frac{\partial E_y}{\partial y} &= -\frac{W_2}{2a} \left\{ \left[\text{BJ}_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + \text{CY}_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \text{sen}(\ell-1)\theta + \left[\text{BJ}_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + \text{CY}_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \text{sen}(\ell+1)\theta \right\}
 \end{aligned}$$

Intervalo $b < \rho$;

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_y}{\partial y} &= F \frac{W_4}{c} (\sin \theta \cos \ell \theta) K_{\ell} \left(\frac{W_4 \rho}{2c} \right) - F \frac{\ell}{\rho} (\cos \theta \sin \ell \theta) K_{\ell} \left(\frac{W_4 \rho}{2c} \right) \\
 &= -F \frac{W_4}{2c} \left\{ (\sin \theta \cos \ell \theta) \left[K_{\ell-1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) + K_{\ell+1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \right] + (\cos \theta \sin \ell \theta) \left[K_{\ell+1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) - K_{\ell-1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \right] \right\} \\
 &= -F \frac{W_4}{2c} \left\{ [\sin \theta \cos \ell \theta - \cos \theta \sin \ell \theta] K_{\ell-1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) + [\sin \theta \cos \ell \theta + \cos \theta \sin \ell \theta] K_{\ell+1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \right\} \\
 &= -F \frac{W_4}{2c} \left\{ \sin(1-\ell) \theta K_{\ell-1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) + \sin(1+\ell) \theta K_{\ell+1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \right\} \\
 &= -F \frac{W_4}{2c} \left\{ -\sin(\ell-1) \theta K_{\ell-1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) + \sin(\ell+1) \theta K_{\ell+1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \right\} \\
 \frac{\partial E_y}{\partial y} &= F \frac{W_4}{2c} \left\{ \sin(\ell-1) \theta K_{\ell-1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) - \sin(\ell+1) \theta K_{\ell+1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Então a componente do campo elétrico na direção z , para cada região da fibra, é dado pelas seguintes equações:

$$E_z = \begin{cases} -\frac{1}{kN} \frac{U_1}{2a} A \left[J_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \sin(\ell-1)\theta + J_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \sin(\ell+1)\theta \right]; & \rho < a \\ -\frac{1}{kN} \frac{W_2}{2b} \left\{ \left[B J_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{b} \right) + C Y_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{b} \right) \right] \sin(\ell-1)\theta + \left[B J_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{b} \right) + C Y_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{b} \right) \right] \sin(\ell+1)\theta \right\}; & a < \rho < b \\ -\frac{1}{kN} \frac{W_4}{2a} D \left[K_{\ell-1} \left(\frac{W_4 \rho}{b} \right) \sin(\ell-1)\theta - K_{\ell+1} \left(\frac{W_4 \rho}{b} \right) \sin(\ell+1)\theta \right]; & \rho > a \end{cases} \quad (B-6);$$

A componente do campo na direção θ , por sua vez, é dada por:

$$E_{\theta} = \begin{cases} AJ_{\ell}\left(\frac{U_1\rho}{a}\right)\cos(\ell\theta)\cos\theta; & \rho < a \\ \left[BJ_{\ell}\left(\frac{W_2\rho}{b}\right) + CY_{\ell}\left(\frac{W_2\rho}{b}\right)\right]\cos(\ell\theta)\cos\theta; & a < \rho < b \\ DK_{\ell}\left(\frac{W_4\rho}{b}\right)\cos(\ell\theta)\cos\theta; & \rho > a \end{cases} \quad (\text{B-7}).$$

Onde os argumentos das funções de Bessel serão dados a seguir:

$$U_1 = [k_0 N_1^2 - \beta^2]^{1/2} a; \quad W_2 = [k_0 N_2^2 - \beta^2]^{1/2} b; \quad W_4 = [\beta^2 - k_0 N_3^2]^{1/2} b.$$

Pelas condições de contorno as componentes do campo elétrico devem ser iguais nas interfaces de cada região da fibra. Então, pode-se afirmar o seguinte; para $\rho = a$ as componentes E_{θ} e E_z serão as seguintes:

a componente E_{θ} nos leva a seguinte equação;

$$J_{\ell}(U_1)A = J_{\ell}\left(\frac{W_2 a}{b}\right)B + Y_{\ell}\left(\frac{W_2 a}{b}\right)C \quad (\text{B-8}).$$

Da componente E_z resultará as equações a seguir:

$$U_1 J_{\ell-1}(U_1)A = W_2 \left[J_{\ell-1}\left(\frac{W_2 a}{b}\right)B + Y_{\ell-1}\left(\frac{W_2 a}{b}\right)C \right] \quad (\text{B-9});$$

$$U_1 J_{\ell+1}(U_1)A = W_2 \left[J_{\ell+1}(W_2)B + Y_{\ell+1}(W_2)C \right] \quad (\text{B-10}).$$

Adicionando-se (B-9) a (B-10), encontra-se;

$$U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1)A = W_2 \left[J_{\ell\pm 1}\left(\frac{W_2 a}{b}\right)B + Y_{\ell\pm 1}\left(\frac{W_2 a}{b}\right)C \right] \quad (\text{B-11}).$$

Para $\rho = b$, a componente E_{θ} levará à seguinte equação:

$$J_{\ell}(W_2)B + Y_{\ell}(W_2)C = K_{\ell}(w_4)D \quad (\text{B-12}).$$

Da componente E_z resultará as equações a seguir;

$$-W_2[J_{\ell-1}(W_2)B + Y_{\ell-1}(W_2)C] = W_4K_{\ell-1}(W_4)D \quad (\text{B-13});$$

$$W_2[J_{\ell+1}(W_2)B + Y_{\ell+1}(W_2)C] = W_4K_{\ell+1}(W_4)D \quad (\text{B-14}).$$

Adicionando-se as equações (B-13) a (B-14), encontra-se a seguinte equação:

$$\pm W_2[J_{\ell\pm 1}(W_2)B + Y_{\ell\pm 1}(W_2)C] = W_4K_{\ell\pm 1}(W_4)D \quad (\text{B-15}).$$

Por conveniência faz-se a seguinte mudança de variável;

$$W_3 = \frac{W_2a}{b} \quad (\text{B-16}).$$

Substituindo nas equações (B-8) e (B-9), fica-se com o sistema de equações dado a seguir:

$$J_{\ell}(U_1)A - J_{\ell}(W_3)B - Y_{\ell}(W_3)C = 0 \quad (\text{B-17});$$

$$U_1J_{\ell\pm 1}(U_1)A - W_3J_{\ell\pm 1}(W_3)B - W_3Y_{\ell\pm 1}(W_3)C = 0 \quad (\text{B-18});$$

$$J_{\ell}(W_2)B + Y_{\ell}(W_2)C - K_{\ell}(W_4)D = 0 \quad (\text{B-19});$$

$$W_2J_{\ell\pm 1}(W_2)D + W_2Y_{\ell\pm 1}(W_2)C \mp W_4K_{\ell\pm 1}(W_4)D = 0 \quad (\text{B-20}).$$

Este é um sistema de equações homogêneo e compatível. Ele apresenta solução não-trivial caso o determinante dos coeficientes seja nulo. Disto vem:

$$\begin{vmatrix} J_{\ell}(U_1) & -J_{\ell}(W_3) & -Y_{\ell}(W_3) & 0 \\ U_1J_{\ell\pm 1}(U_1) & -W_3J_{\ell\pm 1}(W_3) & -W_3Y_{\ell\pm 1}(W_3) & 0 \\ 0 & J_{\ell}(W_2) & Y_{\ell}(W_2) & -K_{\ell}(W_4) \\ & W_2J_{\ell\pm 1}(W_2) & W_2Y_{\ell\pm 1}(W_2) & \mp W_4K_{\ell\pm 1}(W_4) \end{vmatrix} = 0.$$

Esse determinante é reduzido segundo a expressão,

$$J_{\ell}(U_1)\alpha(3) - U_1J_{\ell\pm 1}(U_1)\xi(3) = 0 \quad (\text{B-21}),$$

onde se têm dois determinantes de ordem 3. Os determinantes 3 x 3 são:

$$\alpha(3) = \begin{vmatrix} -W_3 J_{\ell\pm 1}(W_3) & -W_3 Y_{\ell\pm 1}(W_3) & 0 \\ J_{\ell}(W_2) & Y_{\ell}(W_2) & -K_{\ell}(W_4) \\ W_2 J_{\ell\pm 1}(W_2) & W_2 Y_{\ell\pm 1}(W_2) & \mp W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4) \end{vmatrix}$$

$$\xi(3) = \begin{vmatrix} -J_{\ell}(W_3) & -Y_{\ell}(W_3) & 0 \\ J_{\ell}(W_2) & Y_{\ell}(W_2) & -K_{\ell}(W_4) \\ W_2 J_{\ell\pm 1}(W_2) & W_2 Y_{\ell\pm 1}(W_2) & \mp W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4) \end{vmatrix}$$

Por conviniência pode-se ainda reduzir $\alpha(3)$ e $\xi(3)$ a dois determinantes, os quais serão encontrados através das expressões;

$$\alpha(3) = -W_3 J_{\ell\pm 1}(W_3)\alpha(2) + W_3 Y_{\ell\pm 1}(W_3)\xi(2) \quad (\text{B-22}),$$

$$\xi(3) = -J_{\ell}(W_3)\alpha(2) + Y_{\ell}(W_3)\xi(2) \quad (\text{B-23}),$$

onde $\alpha(2)$ e $\xi(2)$ serão os seguintes;

$$\alpha(2) = \begin{vmatrix} Y_{\ell}(W_2) & -K_{\ell}(W_4) \\ W_2 Y_{\ell\pm 1}(W_2) & \mp W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4) \end{vmatrix} = W_2 Y_{\ell\pm 1}(W_2)K_{\ell}(W_4) \mp W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)Y_{\ell}(W_2) \quad (\text{B-24}),$$

$$\xi(2) = \begin{vmatrix} J_{\ell}(W_2) & -K_{\ell}(W_4) \\ W_2 J_{\ell\pm 1}(W_2) & \mp W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4) \end{vmatrix} = W_2 J_{\ell\pm 1}(W_2)K_{\ell}(W_4) \mp W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)J_{\ell}(W_2) \quad (\text{B-25}).$$

As equações (B-24) e (B-25) podem ser escritas de outra forma:

$$\alpha(2) = W_2 W_4 Y_{\ell\pm 1}(\tilde{W}_2) K_{\ell\pm 1}(W_4) \left[\frac{K_{\ell}(W_4)}{W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)} \mp \frac{Y_{\ell}(W_2)}{W_2 Y_{\ell\pm 1}(W_2)} \right] \quad (\text{B-26});$$

$$\xi(2) = W_2 W_4 J_{\ell\pm 1}(W_2) K_{\ell\pm 1}(W_4) \left[\frac{K_{\ell}(W_4)}{W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)} \mp \frac{J_{\ell}(W_2)}{W_2 J_{\ell\pm 1}(W_2)} \right] \quad (\text{B-27}).$$

Para comodidade do leitor vamos re-escrever a equação transcendental a ser solucionada:

$$J_{\ell}(U_1)\alpha(3) - U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1)\xi(3) = 0.$$

Substituindo-se as equações (B-26) e (B-27) nas equações (B-22) e (B-23), e então substituindo-se na equação anterior obtêm-se a seguinte expressão:

$$\frac{J_{\ell\pm 1}(W_3) \left[\frac{J_\ell(W_3)}{W_3 J_{\ell\pm 1}(W_3)} - \frac{J_\ell(U_1)}{U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1)} \right]}{Y_{\ell\pm 1}(W_3) \left[\frac{Y_\ell(W_3)}{W_3 Y_{\ell\pm 1}(W_3)} + \frac{J_\ell(U_1)}{U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1)} \right]} = \frac{J_{\ell\pm 1}(W_2) \left[\frac{K_\ell(W_4)}{W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)} \mp \frac{J_\ell(W_2)}{W_2 J_{\ell\pm 1}(W_2)} \right]}{Y_{\ell\pm 1}(W_2) \left[\frac{K_\ell(W_4)}{W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)} \mp \frac{Y_\ell(W_2)}{W_2 Y_{\ell\pm 1}(W_2)} \right]} \quad (\text{B-28}).$$

Os argumentos das funções de Bessel serão dados em função da frequência normalizada “v” e da constante de propagação normalizada “B”, definidas a seguir;

$$v = [N_2^2 - N_3^2]^{\frac{1}{2}} k_0 b \quad \text{e} \quad B = \frac{N^2 - N_3^2}{N_2^2 - N_3^2} \quad (\text{B-29}).$$

Então os argumentos U_i e W_i serão os seguintes:

$$\begin{aligned} U_1 &= \left[\frac{N_1^2 - N_3^2}{N_2^2 - N_3^2} - B \right]^{1/2} v \frac{a}{b}; & W_3 &= [1 - B]^{1/2} v \frac{a}{b}; \\ W_2 &= [1 - B]^{1/2} v; & W_4 &= B^{1/2} v. \end{aligned} \quad (\text{B-30}).$$

Fazendo-se o mesmo procedimento para a situação(2), $N_1 < N < N_2$, as equações para as componentes do campo elétrico serão as seguintes:

$$E_y = \begin{cases} AI_\ell \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \cos(\ell\theta); & \rho < a \\ \left[BJ_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{b} \right) + CY_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{b} \right) \right] \cos(\ell\theta); & a < \rho < b \\ DK_\ell \left(\frac{W_4 \rho}{b} \right) \cos(\ell\theta); & \rho > a \end{cases} \quad (\text{B-31});$$

$$E_z = \begin{cases} -\frac{1}{kN} \frac{U_1}{2a} A \left[I_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \text{sen}(\ell-1)\theta - I_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \text{sen}(\ell+1)\theta \right]; & \rho < a \\ -\frac{1}{kN} \frac{W_2}{2b} \left\{ \left[B J_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{b} \right) + C Y_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{b} \right) \right] \text{sen}(\ell-1)\theta + \right. \\ \left. + \left[B J_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{b} \right) + C Y_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{b} \right) \right] \text{sen}(\ell+1)\theta \right\}; & a < \rho < b \\ \frac{1}{kN} \frac{W_4}{2a} D \left[K_{\ell-1} \left(\frac{W_4 \rho}{b} \right) \text{sen}(\ell-1)\theta - K_{\ell+1} \left(\frac{W_4 \rho}{b} \right) \text{sen}(\ell+1)\theta \right]; & \rho > a \end{cases} \quad (\text{B-32});$$

$$E_\theta = \begin{cases} A I_\ell \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \cos(\ell\theta) \cos\theta; & \rho < a \\ \left[B J_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{b} \right) + C Y_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{b} \right) \right] \cos(\ell\theta) \cos\theta; & a < \rho < b \\ D K_\ell \left(\frac{W_4 \rho}{b} \right) \cos(\ell\theta) \cos\theta; & \rho > a \end{cases} \quad (\text{B-33}).$$

Submetendo-se as soluções dadas nas equações (B-32) e (B-33), às condições de continuidade dos campos nas interfaces do guia, encontra-se a seguinte equação transcendental:

$$\frac{J_{\ell\pm 1}(W_3) \left[\frac{J_\ell(W_3)}{W_3 J_{\ell\pm 1}(W_3)} \pm \frac{I_\ell(U_1)}{U_1 I_{\ell\pm 1}(U_1)} \right]}{Y_{\ell\pm 1}(W_3) \left[\frac{Y_\ell(W_3)}{W_3 Y_{\ell\pm 1}(W_3)} \pm \frac{I_\ell(U_1)}{U_1 I_{\ell\pm 1}(U_1)} \right]} = \frac{J_{\ell\pm 1}(W_2) \left[\frac{K_\ell(W_4)}{W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)} \mp \frac{J_\ell(W_2)}{W_2 J_{\ell\pm 1}(W_2)} \right]}{Y_{\ell\pm 1}(W_2) \left[\frac{K_\ell(W_4)}{W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)} \mp \frac{Y_\ell(W_2)}{W_2 Y_{\ell\pm 1}(W_2)} \right]} \quad (\text{B-34})$$

Os argumentos das funções de Bessel serão dadas em função da frequência normalizada “v” e da constante de propagação normalizada “B”, que são definidas a seguir;

$$v = [N_2^2 - N_3^2]^{-1/2} k_0 b \quad \text{e} \quad B = \frac{N^2 - N_3^2}{N_2^2 - N_3^2} \quad (\text{B-35}).$$

Com isto, os argumentos U_i e W_i são dados pelas expressões:

$$\begin{aligned} U_1 &= \left[B - \frac{N_1^2 - N_3^2}{N_2^2 - N_3^2} \right]^{1/2} v \frac{a}{b}; & W_3 &= [1 - B]^{1/2} v \frac{a}{b}; \\ W_2 &= [1 - B]^{1/2} v; & W_4 &= B^{1/2} v. \end{aligned} \tag{B-36}$$

Com essas equações e usando-se métodos numéricos pode-se encontrar as curvas de dispersão e outras características.

APÊNDICE C

FIBRA COAXIAL

Neste apêndice serão apresentados os cálculos para fibra coaxial tipo W e M, dentro da aproximação L P.

C-1 - Fibra Coaxial W

Esta fibra apresenta duas estruturas diferenciáveis como indica a fig.(C.1) (I) e (II).

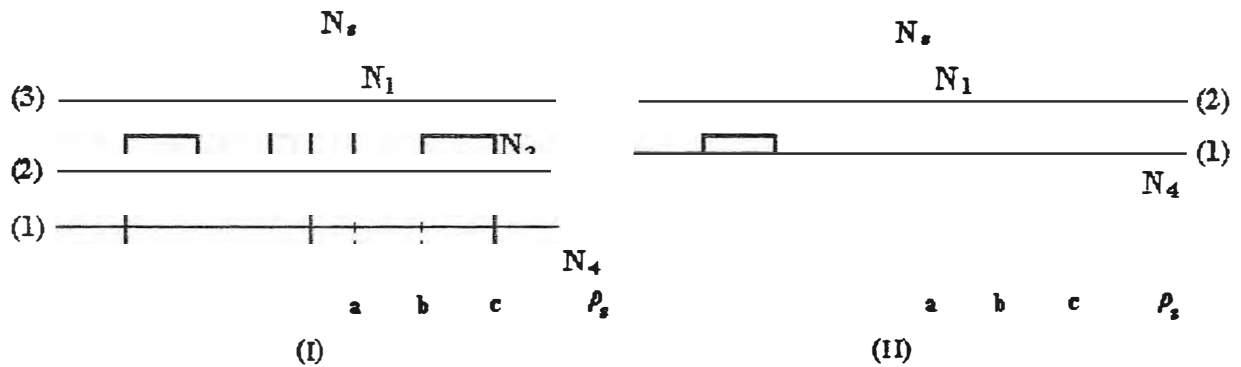


Fig. (C.1) Perfil dos índices de refração das estruturas I e II

Inicia-se o estudo da fibra W por sua estrutura I, ela apresenta três situações para o índice de refração efetivo, onde ocorre guiamento de onda. Para resolver a situação (1) usa-se o mesmo procedimento feito no apêndice A para fibra bastão. É necessário usar a aproximação L P. Neste caso a componente transversal do campo elétrico é dada por:

$$E_y = \begin{cases} AJ_l \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \cos \ell \theta & ; 0 < \rho < a \\ \left[BJ_l \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + CY_l \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \cos \ell \theta & ; a < \rho < b \\ \left[DJ_l \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EY_l \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \cos \ell \theta & ; b < \rho < c \\ FK_l \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \cos \ell \theta & ; c < \rho \end{cases} \quad (C-1).$$

Neste caso os parâmetros U_1 , U_3 , U_4 , W_2 , W_3 e W_4 são os seguintes:

$$\begin{aligned} U_1 &= [N_1^2 - N_2^2]^{1/2} k_0 a; & W_2 &= [N_2^2 - N_3^2]^{1/2} k_0 a; \\ U_3 &= [N_3^2 - N_4^2]^{1/2} k_0 b; & W_3 &= [N_2^2 - N_3^2]^{1/2} k_0 b; \\ U_4 &= [N_3^2 - N_4^2]^{1/2} k_0 c; & W_4 &= [N_2^2 - N_4^2]^{1/2} k_0 c. \end{aligned} \quad (C-2)$$

A partir da frequência normalizada v e da constante de propagação normalizada B , que serão definidas a seguir:

$$v = (N_1^2 - N_4^2)^{1/2} k_0 c \quad \text{e} \quad B = \frac{N^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \quad (C-3).$$

Os parâmetros W_i e U_i poderam ser re-escritos na forma.

$$\begin{aligned} W_2 &= \left[\left(\frac{N_2^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right) - B \right]^{1/2} av / c; & U_3 &= \left[\left(\frac{N_3^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right) - B \right]^{1/2} bv / c; \\ W_3 &= \left[\left(\frac{N_2^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right) - B \right]^{1/2} bv / c; & U_4 &= \left[\left(\frac{N_3^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right) - B \right]^{1/2} v; \\ W_4 &= B^{1/2} v; & U_1 &= [1 - B]^{1/2} av / c. \end{aligned} \quad (C-4)$$

Na aproximação LP, a componente E_x será igual a zero e a componente do campo elétrico na direção z será dada por:

$$E_z \cong \frac{1}{kn} \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{1}{kn} \left[\sin \theta \frac{\partial E_y}{\partial \rho} + \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial E_y}{\partial \theta} \right] \quad (C-5);$$

onde E_θ será dada por, visto que a componente E_x é igual a zero;

$$E_\theta \cong E_y \cos \theta .$$

Calcula-se então E_z e E_θ . Para calcular E_z encontra-se primeiro a derivada de E_y com relação a y .

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial y} &= A \frac{U_1}{a} (\sin \theta \cos \ell \theta) J'_\ell \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) - A \frac{\ell}{\rho} (\cos \theta \sin \ell \theta) J_\ell \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \\ \frac{\partial E_y}{\partial y} &= \frac{W_2}{a} (\sin \theta \cos \ell \theta) \left[B J'_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + C Y'_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] - \frac{\ell}{\rho} (\cos \theta \sin \ell \theta) \left[B J_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + C Y_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \\ \frac{\partial E_y}{\partial y} &= \frac{U_3}{c} (\sin \theta \cos \ell \theta) \left[D J'_\ell \left(\frac{U_3 \rho}{c} \right) + E Y'_\ell \left(\frac{U_3 \rho}{c} \right) \right] - \frac{\ell}{\rho} (\cos \theta \sin \ell \theta) \left[D J_\ell \left(\frac{U_3 \rho}{c} \right) + E Y_\ell \left(\frac{U_3 \rho}{c} \right) \right] \\ \frac{\partial E_y}{\partial y} &= F \frac{W_4}{c} (\sin \theta \cos \ell \theta) K'_\ell \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) - F \frac{\ell}{\rho} (\cos \theta \sin \ell \theta) K_\ell \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \end{aligned}$$

Usando-se as relações de recorrência para as funções de Bessel, dadas abaixo:

$$\begin{aligned} J_\ell(u) &= \frac{u}{2\ell} [J_{\ell+1}(u) + J_{\ell-1}(u)], \quad J'_\ell(u) = \frac{1}{2} [J_{\ell-1}(u) - J_{\ell+1}(u)], \\ Y_\ell(u) &= \frac{u}{2\ell} [Y_{\ell+1}(u) + Y_{\ell-1}(u)], \quad Y'_\ell(u) = \frac{1}{2} [Y_{\ell-1}(u) - Y_{\ell+1}(u)], \\ K_\ell(u) &= \frac{u}{2\ell} [K_{\ell+1}(u) - K_{\ell-1}(u)] \quad K'_\ell(u) = -\frac{1}{2} [K_{\ell-1}(u) + K_{\ell+1}(u)], \\ I_\ell(u) &= -\frac{u}{2\ell} [I_{\ell+1}(u) - I_{\ell-1}(u)], \quad I'_\ell(u) = \frac{1}{2} [I_{\ell-1}(u) + I_{\ell+1}(u)], \end{aligned}$$

e as identidades trigonométricas;

$$\begin{aligned} \sin(A + B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B, \\ \sin(A - B) &= \sin A \cos B - \cos A \sin B, \end{aligned}$$

a derivada para cada região será dada por.

Intervalo $0 < \rho < a$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_y}{\partial y} &= A \frac{U_1}{a} (\text{sen } \theta \cos \ell \theta) J'_\ell \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) - A \frac{\ell}{\rho} (\cos \theta \text{sen } \ell \theta) J_\ell \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \\
&= A \frac{U_1}{2a} \left\{ (\text{sen } \theta \cos \ell \theta) \left[J_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) - J_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \right] - (\cos \theta \text{sen } \ell \theta) \left[J_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) + J_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \right] \right\} \\
&= A \frac{U_1}{2a} \left\{ [\text{sen } \theta \cos \ell \theta - \cos \theta \text{sen } \ell \theta] J_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) - [\text{sen } \theta \cos \ell \theta + \cos \theta \text{sen } \ell \theta] J_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \right\} \\
&= A \frac{U_1}{2a} \left\{ \text{sen}(1-\ell)\theta J_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) - \text{sen}(1+\ell)\theta J_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \right\} \\
&= A \frac{U_1}{2a} \left\{ -\text{sen}(\ell-1)\theta J_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) - \text{sen}(\ell+1)\theta J_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \right\} \\
\frac{\partial E_y}{\partial y} &= -A \frac{U_1}{2a} \left\{ \text{sen}(\ell-1)\theta J_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) + \text{sen}(\ell+1)\theta J_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Intervalo $a < \rho < b$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_y}{\partial y} &= \frac{W_2}{a} (\text{sen } \theta \cos \ell \theta) \left[B J'_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + C Y'_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] - \frac{\ell}{\rho} (\cos \theta \text{sen } \ell \theta) \left[B J_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + C Y_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \\
&= \frac{W_2}{2a} (\text{sen } \theta \cos \ell \theta) \left\{ B \left[J_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) - J_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] + C \left[Y_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) - Y_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \right\} + \\
&\quad - \frac{W_2}{2a} (\cos \theta \text{sen } \ell \theta) \left\{ B \left[J_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + J_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] + C \left[Y_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + Y_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \right\} \\
&= \frac{W_2}{2a} \left\{ B J_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) [\text{sen } \theta \cos \ell \theta - \cos \theta \text{sen } \ell \theta] - B J_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) [\text{sen } \theta \cos \ell \theta + \cos \theta \text{sen } \ell \theta] + \right. \\
&\quad \left. + C Y_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) [\text{sen } \theta \cos \ell \theta - \cos \theta \text{sen } \ell \theta] - C Y_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) [\text{sen } \theta \cos \ell \theta + \cos \theta \text{sen } \ell \theta] \right\} \\
&= \frac{W_2}{2a} \left\{ \left[B J_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + C Y_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \text{sen}(1-\ell)\theta - \left[B J_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + C Y_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \text{sen}(1+\ell)\theta \right\} \\
\frac{\partial E_y}{\partial y} &= -\frac{W_2}{2a} \left\{ \left[B J_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + C Y_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \text{sen}(\ell-1)\theta + \left[B J_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + C Y_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \text{sen}(\ell+1)\theta \right\}
\end{aligned}$$

Intervalo $b < \rho < c$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{U_3}{b} (\sin \theta \cos \ell \theta) \left[DJ'_\ell \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EY'_\ell \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] - \frac{\ell}{\rho} (\cos \theta \sin \ell \theta) \left[DJ_\ell \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EY_\ell \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right],$$

Mudando apenas as constantes e os coeficientes, essa derivada é semelhante à do intervalo

anterior. Logo, tem-se:

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = -\frac{U_3}{2b} \left\{ \left[DJ_{\ell-1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EY_{\ell-1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \sin(\ell-1)\theta + \left[DJ_{\ell+1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EY_{\ell+1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \sin(\ell+1)\theta \right\}.$$

Intervalo $c < \rho$;

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial y} &= F \frac{W_4}{c} (\sin \theta \cos \ell \theta) K'_\ell \left(\frac{W_4 \rho}{2c} \right) - F \frac{\ell}{\rho} (\cos \theta \sin \ell \theta) K_\ell \left(\frac{W_4 \rho}{2c} \right) \\ &= -F \frac{W_4}{2c} \left\{ (\sin \theta \cos \ell \theta) \left[K_{\ell-1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) + K_{\ell+1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \right] + (\cos \theta \sin \ell \theta) \left[K_{\ell+1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) - K_{\ell-1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \right] \right\} \\ &= -F \frac{W_4}{2c} \left\{ [\sin \theta \cos \ell \theta - \cos \theta \sin \ell \theta] K_{\ell-1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) + [\sin \theta \cos \ell \theta + \cos \theta \sin \ell \theta] K_{\ell+1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \right\} \\ &= -F \frac{W_4}{2c} \left\{ \sin(1-\ell)\theta K_{\ell-1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) + \sin(1+\ell)\theta K_{\ell+1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \right\} \\ &= -F \frac{W_4}{2c} \left\{ -\sin(\ell-1)\theta K_{\ell-1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) + \sin(\ell+1)\theta K_{\ell+1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \right\} \\ \frac{\partial E_y}{\partial y} &= F \frac{W_4}{2c} \left\{ \sin(\ell-1)\theta K_{\ell-1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) - \sin(\ell+1)\theta K_{\ell+1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \right\} \end{aligned}$$

Então a componente do campo elétrico na direção z, para cada região da fibra, é dado pelas seguintes equações:

$$E_z = \begin{cases} -A \frac{iU_1}{nk2a} \left\{ J_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \text{sen}(\ell-1)\theta + J_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \text{sen}(\ell+1)\theta \right\} \\ -\frac{iW_2}{nk2a} \left\{ \left[BJ_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + CY_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \text{sen}(\ell-1)\theta + \left[BJ_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + CY_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \text{sen}(\ell+1)\theta \right\} \\ -\frac{iU_3}{nk2b} \left\{ \left[DJ_{\ell-1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EY_{\ell-1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \text{sen}(\ell-1)\theta + \left[DJ_{\ell+1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EY_{\ell+1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \text{sen}(\ell+1)\theta \right\} \\ F \frac{iW_4}{nk2c} \left\{ K_{\ell-1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \text{sen}(\ell-1)\theta - K_{\ell+1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \text{sen}(\ell+1)\theta \right\}. \end{cases} \quad (\text{C-6}).$$

A componente do campo na direção θ , por sua vez, é dada por:

$$E_\theta = \begin{cases} AJ_\ell \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \cos \ell\theta \cos \theta & ; 0 < \rho < a \\ \left[BJ_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + CY_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \cos \ell\theta \cos \theta & ; a < \rho < b \\ \left[DJ_\ell \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EY_\ell \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \cos \ell\theta \cos \theta & ; b < \rho < c \\ FK_\ell \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \cos \ell\theta \cos \theta & ; c < \rho. \end{cases} \quad (\text{C-7}).$$

Pelas condições de contorno as componentes do campo elétrico devem ser iguais nas interfaces de cada região da fibra. Então, pode-se afirmar o seguinte; para $\rho = a$ as componentes E_θ e E_z serão as seguintes:

a componente E_θ nos leva a seguinte equação;

$$J_\ell(U_1)A = J_\ell(W_2)B + Y_\ell(W_2)C \quad (\text{C-8}).$$

Da componente E_z resultará as equações a seguir:

$$U_1 J_{\ell-1}(U_1)A = W_2 [J_{\ell-1}(W_2)B + Y_{\ell-1}(W_2)C] \quad (\text{C-9});$$

$$U_1 J_{\ell+1}(U_1)A = W_2 [J_{\ell+1}(W_2)B + Y_{\ell+1}(W_2)C] \quad (\text{C-10}).$$

Adicionando-se (C-9) a (C-10), encontra-se;

$$U_t J_{t\pm 1}(U_1)A = W_2 [J_{t\pm 1}(W_2)B + Y_{t\pm 1}(W_2)C] \quad (C-11).$$

Para $\rho = b$ a componente E_θ leva à seguinte equação:

$$J_t \left(\frac{W_2 b}{a} \right) B + Y_t \left(\frac{W_2 b}{a} \right) C = J_t(U_3)D + Y_t(U_3)E \quad (C-12).$$

Da componente E_z resultará as equações a seguir;

$$\frac{W_2}{a} \left[J_{t-1} \left(\frac{W_2 b}{a} \right) B + Y_{t-1} \left(\frac{W_2 b}{a} \right) C \right] = \frac{U_3}{b} [J_{t-1}(U_3)D + Y_{t-1}(U_3)E] \quad (C-13);$$

$$\frac{W_2}{a} \left[J_{t+1} \left(\frac{W_2 b}{a} \right) B + Y_{t+1} \left(\frac{W_2 b}{a} \right) C \right] = \frac{U_3}{b} [J_{t+1}(U_3)D + Y_{t+1}(U_3)E] \quad (C-14).$$

Operando-se com as equações (C-13) e (C-14) obtêm-se:

$$\frac{W_2 b}{a} \left[J_{t\pm 1} \left(\frac{W_2 b}{a} \right) B + Y_{t\pm 1} \left(\frac{W_2 b}{a} \right) C \right] = U_3 [J_{t\pm 1}(U_3)D + Y_{t\pm 1}(U_3)E] \quad (C-15).$$

Para $\rho = c$, a componente E_θ levará à seguinte equação:

$$J_t \left(\frac{U_3 c}{b} \right) D + Y_t \left(\frac{U_3 c}{b} \right) E = K_t(w_4)F \quad (C-16).$$

Da componente E_z resultará as equações a seguir;

$$-\frac{U_3}{b} \left[J_{t-1} \left(\frac{U_3 c}{b} \right) D + Y_{t-1} \left(\frac{U_3 c}{b} \right) E \right] = \frac{W_4}{c} K_{t-1}(W_4)F \quad (C-17);$$

$$\frac{U_3}{b} \left[J_{t+1} \left(\frac{U_3 c}{b} \right) D + Y_{t+1} \left(\frac{U_3 c}{b} \right) E \right] = \frac{W_4}{c} K_{t+1}(W_4)F \quad (C-18).$$

Adicionando-se as equações (C-17) a (C-18), encontra-se a seguinte equação:

$$\pm \frac{U_3 c}{b} \left[J_{t\pm 1} \left(\frac{U_3 c}{b} \right) D + Y_{t\pm 1} \left(\frac{U_3 c}{b} \right) E \right] = W_4 K_{t\pm 1}(W_4)F \quad (C-19).$$

Por conveniência faz-se as seguintes mudanças de variáveis;

$$W_3 = \frac{W_2 b}{a} \quad e \quad U_4 = \frac{U_3 c}{b} \quad (C-20).$$

Substituindo-as nas equações anteriores, fica-se com o sistema de equações dado a seguir:

$$J_\ell(U_1)A - J_\ell(W_2)B - Y_\ell(W_2)C = 0 \quad (C-21);$$

$$U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1)A - W_2 J_{\ell\pm 1}(W_2)B - W_2 Y_{\ell\pm 1}(W_2)C = 0 \quad (C-22);$$

$$J_\ell(W_3)B + Y_\ell(W_3)C - J_\ell(U_3)D - Y_\ell(U_3)E = 0 \quad (C-23);$$

$$W_3 J_{\ell\pm 1}(W_3)B + W_3 Y_{\ell\pm 1}(W_3)C - U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3)D - U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3)E = 0 \quad (C-24);$$

$$J_\ell(U_4)D + Y_\ell(U_4)E - K_\ell(W_4)F = 0 \quad (C-25);$$

$$\pm U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4)D \pm U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4)E - W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)F = 0 \quad (C-26).$$

Este é um sistema de equações homogêneo e compatível. Ele apresenta solução não-trivial

caso o determinante dos coeficientes seja nulo. Disto vem:

$$\begin{vmatrix} J_\ell(U_1) & -J_\ell(W_2) & -Y_\ell(W_2) & 0 & 0 & 0 \\ U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1) & -W_2 J_{\ell\pm 1}(W_2) & -W_2 Y_{\ell\pm 1}(W_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_\ell(W_3) & Y_\ell(W_3) & -J_\ell(U_3) & -Y_\ell(U_3) & 0 \\ & W_3 J_{\ell\pm 1}(W_3) & W_3 Y_{\ell\pm 1}(W_3) & -U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3) & -U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_\ell(U_4) & Y_\ell(U_4) & K_\ell(W_4) \\ & 0 & 0 & \pm U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4) & \pm U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4) & -W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4) \end{vmatrix} = 0.$$

Esse determinante é reduzido segundo a expressão,

$$J_\ell(U_1)\alpha(\xi) - U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1)\xi(\xi) = 0 \quad (C-27).$$

onde se tem dois determinantes de ordem 5. Eles são:

$$\alpha(5) = \begin{vmatrix} -W_2 J_{\ell\pm 1}(W_2) & -W_2 Y_{\ell\pm 1}(W_2) & 0 & 0 & 0 \\ J_{\ell}(W_3) & Y_{\ell}(W_3) & -J_{\ell}(U_3) & -Y_{\ell}(U_3) & 0 \\ W_3 J_{\ell\pm 1}(W_3) & W_3 Y_{\ell\pm 1}(W_3) & -U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3) & -U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3) & 0 \\ 0 & 0 & J_{\ell}(U_4) & Y_{\ell}(U_4) & -K_{\ell}(W_4) \\ 0 & 0 & \pm U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4) & \pm U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4) & -W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4) \end{vmatrix}$$

$$\xi(5) = \begin{vmatrix} -J_{\ell}(W_2) & -Y_{\ell}(W_2) & 0 & 0 & 0 \\ J_{\ell}(W_3) & Y_{\ell}(W_3) & -J_{\ell}(U_3) & -Y_{\ell}(U_3) & 0 \\ W_3 J_{\ell\pm 1}(W_3) & W_3 Y_{\ell\pm 1}(W_3) & -U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3) & -U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3) & 0 \\ 0 & 0 & J_{\ell}(U_4) & Y_{\ell}(U_4) & -K_{\ell}(W_4) \\ 0 & 0 & \pm U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4) & \pm U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4) & -W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4) \end{vmatrix}$$

Os determinantes $\alpha(5)$ e $\xi(5)$ também são reduzidos de acordo com as seguintes expressões:

$$\alpha(5) = -W_2 J_{\ell\pm 1}(W_2) \alpha(4) + W_2 Y_{\ell\pm 1}(W_2) \xi(4) \quad (C-28);$$

$$\xi(5) = -J_{\ell}(W_2) \alpha(4) + Y_{\ell}(W_2) \xi(4) \quad (C-29),$$

resultando em dois determinantes 4×4 , os quais são mostrados a seguir:

$$\alpha(4) = \begin{vmatrix} Y_{\ell}(W_3) & -J_{\ell}(U_3) & -Y_{\ell}(U_3) & 0 \\ W_3 Y_{\ell\pm 1}(W_3) & -U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3) & -U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3) & 0 \\ 0 & J_{\ell}(U_4) & Y_{\ell}(U_4) & -K_{\ell}(W_4) \\ 0 & \pm U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4) & \pm U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4) & -W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4) \end{vmatrix}$$

$$\xi(4) = \begin{vmatrix} J_{\ell}(W_3) & -J_{\ell}(U_3) & -Y_{\ell}(U_3) & 0 \\ W_3 J_{\ell\pm 1}(W_3) & -U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3) & -U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3) & 0 \\ 0 & J_{\ell}(U_4) & Y_{\ell}(U_4) & -K_{\ell}(W_4) \\ 0 & \pm U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4) & \pm U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4) & -W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4) \end{vmatrix}$$

Esses determinantes, por sua vez, podem ser reduzidos a dois 3×3 , conforme as expressões:

$$\alpha(4) = Y_{\ell}(W_3) \alpha(3) - W_3 Y_{\ell\pm 1}(W_3) \xi(3) \quad (C-30);$$

$$\xi(4) = J_\ell(W_3)\alpha(3) - W_3 J_\ell(W_3)\xi(3) \quad (\text{C-31}).$$

Os determinantes 3 x 3 são:

$$\alpha(3) = \begin{vmatrix} -U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3) & -U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3) & 0 \\ J_\ell(U_4) & Y_\ell(U_4) & -K_\ell(W_4) \\ \pm U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4) & \pm U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4) & -W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4) \end{vmatrix};$$

$$\xi(3) = \begin{vmatrix} -J_\ell(U_3) & -Y_\ell(U_3) & 0 \\ J_\ell(U_4) & Y_\ell(U_4) & -K_\ell(W_4) \\ \pm U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4) & \pm U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4) & -W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4) \end{vmatrix}.$$

Por conviniência podemos ainda reduzir $\alpha(3)$ e $\xi(3)$ a dois determinantes, os quais serão encontrados através das expressões;

$$\alpha(3) = -U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3)\alpha(2) + U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3)\xi(2) \quad (\text{C-32}),$$

$$\xi(3) = -J_\ell(U_3)\alpha(2) + Y_\ell(U_3)\xi(2) \quad (\text{C-33}),$$

onde $\alpha(2)$ e $\xi(2)$ serão os seguintes;

$$\alpha(2) = \begin{vmatrix} Y_\ell(U_4) & -K_\ell(W_4) \\ \pm U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4) & -W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4) \end{vmatrix} = \pm U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4) K_\ell(W_4) - W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4) Y_\ell(U_4) \quad (\text{C-34}),$$

$$\xi(2) = \begin{vmatrix} J_\ell(U_4) & -K_\ell(W_4) \\ \pm U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4) & -W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4) \end{vmatrix} = \pm U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4) K_\ell(W_4) - W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4) J_\ell(U_4) \quad (\text{C-35}).$$

As equações (C-30) e (C-31) podem ser escritos de outra forma:

$$\alpha(2) = U_4 W_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4) K_{\ell\pm 1}(W_4) \left[\pm \frac{K_\ell(W_4)}{W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)} - \frac{Y_\ell(U_4)}{U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4)} \right] \quad (\text{C-36});$$

$$\xi(2) = U_4 W_4 J_{\ell\pm 1}(U_4) K_{\ell\pm 1}(W_4) \left[\pm \frac{K_\ell(W_4)}{W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)} - \frac{J_\ell(U_4)}{U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4)} \right] \quad (\text{C-37}).$$

Para comodidade do leitor vamos re-escrever a equação transcendental a ser solucionada:

$$J_\ell(U_1)\alpha(5) - U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1)\xi(5) = 0.$$

Substituindo-se as equações (C-28) e (C-29) na equação(C-27), obtêm-se a seguinte expressão:

$$J_{\ell\pm 1}(W_2) \left[\frac{J_\ell(W_2)}{W_2 J_{\ell\pm 1}(W_2)} - \frac{J_\ell(U_1)}{U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1)} \right] \alpha(4) - Y_{\ell\pm 1}(W_2) \left[\frac{Y_\ell(W_2)}{W_2 Y_{\ell\pm 1}(W_2)} - \frac{Y_\ell(U_1)}{U_1 Y_{\ell\pm 1}(U_1)} \right] \xi(4) = 0 \quad (C-38);$$

onde $\alpha(4)$ e $\xi(4)$ serão dados por;

$$\alpha(4) = U_3 W_3 Y_{\ell\pm 1}(W_3) \left\{ \begin{array}{l} J_{\ell\pm 1}(U_3) \left[\frac{J_\ell(U_3)}{U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3)} - \frac{Y_\ell(W_3)}{W_3 Y_{\ell\pm 1}(W_3)} \right] \alpha(2) + \\ - Y_{\ell\pm 1}(U_3) \left[\frac{Y_\ell(U_3)}{U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3)} - \frac{Y_\ell(W_3)}{W_3 Y_{\ell\pm 1}(W_3)} \right] \xi(2) \end{array} \right. \quad (C-39);$$

$$\xi(4) = U_3 W_3 J_{\ell\pm 1}(W_3) \left\{ \begin{array}{l} J_{\ell\pm 1}(U_3) \left[\frac{J_\ell(U_3)}{U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3)} - \frac{J_\ell(W_3)}{W_3 J_{\ell\pm 1}(W_3)} \right] \alpha(2) + \\ - Y_{\ell\pm 1}(U_3) \left[\frac{Y_\ell(U_3)}{U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3)} - \frac{J_\ell(W_3)}{W_3 J_{\ell\pm 1}(W_3)} \right] \xi(2) \end{array} \right. \quad (C-40).$$

Substituindo-se $\alpha(4)$, $\xi(4)$, $\alpha(2)$ e $\xi(2)$ na equação (C-38) encontra-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} \frac{J_{\ell\pm 1}(U_4)}{Y_{\ell\pm 1}(U_4)} \left[\frac{J_\ell(U_4)}{U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4)} \mp \frac{K_\ell(W_4)}{W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)} \right] \\ \frac{J_{\ell\pm 1}(W_4)}{Y_{\ell\pm 1}(W_4)} \left[\frac{Y_\ell(U_4)}{U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4)} \mp \frac{K_\ell(W_4)}{W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)} \right] \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \frac{Y_{\ell\pm 1}(W_3)}{Y_{\ell\pm 1}(W_2)} \left[\frac{Y_\ell(U_3)}{U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3)} - \frac{Y_\ell(W_3)}{W_3 Y_{\ell\pm 1}(W_3)} \right] + \\ \frac{J_{\ell\pm 1}(U_3)}{J_{\ell\pm 1}(U_1)} \left[\frac{J_\ell(U_1)}{U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1)} - \frac{Y_\ell(W_2)}{W_2 Y_{\ell\pm 1}(W_2)} \right] \\ \frac{J_{\ell\pm 1}(W_3)}{J_{\ell\pm 1}(W_2)} \left[\frac{Y_\ell(U_3)}{U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3)} - \frac{J_\ell(W_3)}{W_3 J_{\ell\pm 1}(W_3)} \right] \\ \frac{J_{\ell\pm 1}(U_3)}{J_{\ell\pm 1}(U_1)} \left[\frac{J_\ell(U_1)}{U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1)} - \frac{J_\ell(W_2)}{W_2 J_{\ell\pm 1}(W_2)} \right] \end{array} \right\} \\ & = \frac{J_{\ell\pm 1}(U_3)}{Y_{\ell\pm 1}(U_3)} \frac{Y_{\ell\pm 1}(W_3)}{Y_{\ell\pm 1}(W_2)} \left| \begin{array}{l} \frac{J_\ell(U_3)}{U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3)} - \frac{Y_\ell(W_3)}{W_3 Y_{\ell\pm 1}(W_3)} \\ \frac{J_\ell(U_1)}{U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1)} - \frac{Y_\ell(W_2)}{W_2 Y_{\ell\pm 1}(W_2)} \end{array} \right| \frac{J_{\ell\pm 1}(W_3)}{J_{\ell\pm 1}(W_2)} \left| \begin{array}{l} \frac{J_\ell(U_3)}{U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3)} - \frac{J_\ell(W_3)}{W_3 J_{\ell\pm 1}(W_3)} \\ \frac{J_\ell(U_1)}{U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1)} - \frac{J_\ell(W_2)}{W_2 J_{\ell\pm 1}(W_2)} \end{array} \right| \end{aligned} \quad (C-41).$$

Essa é a equação transcendental para a primeira situação, $N_4 < N < N_2$, da fibra coaxial W.

Usando-se um procedimento semelhante ao anterior, pode-se encontrar as outras situações das fibras coaxial W.

Situação(2) $N_2 < N < N_3$

Solucionando-se a situação (2) da fibra W, as componentes do campo elétrico, segundo a aproximação LP, E_z , E_θ , E_y serão dados a seguir:

$$E_z = \begin{cases} -A \frac{iU_1}{kn2a} \left\{ J_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \text{sen}(\ell-1)\theta + J_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \text{sen}(\ell+1)\theta \right\} \\ - \frac{iW_2}{kn2a} \left\{ \left[BI_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) - CK_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \text{sen}(\ell-1)\theta - \left[BI_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) - CK_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \text{sen}(\ell+1)\theta \right\} \\ - \frac{iU_3}{kn2b} \left\{ \left[DJ_{\ell-1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EY_{\ell-1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \text{sen}(\ell-1)\theta + \left[DJ_{\ell+1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EY_{\ell+1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \text{sen}(\ell+1)\theta \right\} \\ F \frac{iW_4}{kn2c} \left\{ K_{\ell-1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \text{sen}(\ell-1)\theta - K_{\ell+1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \text{sen}(\ell+1)\theta \right\}. \end{cases} \quad (C-42).$$

A componente do campo na direção θ é dada por:

$$E_\theta = \begin{cases} AJ_\ell \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \cos \ell \theta \cos \theta & ; 0 < \rho < a \\ \left[BI_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + CK_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \cos \ell \theta \cos \theta & ; a < \rho < b \\ \left[DJ_\ell \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EY_\ell \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \cos \ell \theta \cos \theta & ; b < \rho < c \\ FK_\ell \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \cos \ell \theta \cos \theta & ; c < \rho. \end{cases} \quad (C-43).$$

A componente do campo elétrico na direção y será ;

$$\begin{aligned}
 & AJ_l \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \cos \ell \theta && ; 0 < \rho < a \\
 E_y = & \left[BI_l \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + CK_l \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \cos \ell \theta && ; a < \rho < b \\
 & \left[DJ_l \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EY_l \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \cos \ell \theta && ; b < \rho < c \\
 & FK_l \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \cos \ell \theta && ; c < \rho
 \end{aligned} \tag{C-44}$$

Onde os argumentos das funções de Bessel são:

$$\begin{aligned}
 W_2 &= [N^2 - N_2^2]^{1/2} k_0 a; & U_1 &= [N_1^2 - N^2]^{1/2} k_0 a; \\
 W_3 &= \frac{b}{a} W_2; & U_3 &= [N_3^2 - N^2]^{1/2} k_0 b; \\
 W_4 &= [N^2 - N_4^2]^{1/2} k_0 c; & U_4 &= \frac{c}{b} U_3.
 \end{aligned} \tag{C-45}$$

Os argumentos W_i e U_i podem ser expressos como funções da frequência normalizada v e da constante de propagação normalizada B , já definidos no caso anterior eq.(C-2);

$$\begin{aligned}
 W_2 &= \left[B - \left(\frac{N_2^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right) \right]^{1/2} av / c, & U_3 &= \left[\left(\frac{N_3^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right) - B \right]^{1/2} bv / c, \\
 W_3 &= \left[B - \left(\frac{N_2^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right) \right]^{1/2} bv / c, & U_4 &= \left[\left(\frac{N_3^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right) - B \right]^{1/2} v, \\
 W_4 &= B^{1/2} v, & U_1 &= [1 - B]^{1/2} av / c.
 \end{aligned} \tag{C-46}$$

Usando-se a condição de continuidade dos campos nas interfaces do guia encontra-se equação transcendental para esse caso será dada a seguir:

$$\frac{J_{\ell\pm 1}(U_4)}{Y_{\ell\pm 1}(U_4)} \left\| \begin{array}{l} \frac{J_{\ell}(U_4)}{U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4)} \mp \frac{K_{\ell}(W_4)}{W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)} \\ \frac{Y_{\ell}(U_4)}{U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4)} \mp \frac{K_{\ell}(W_4)}{W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{l} \frac{K_{\ell\pm 1}(W_3)}{K_{\ell\pm 1}(W_2)} \pm \frac{Y_{\ell}(U_3)}{U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3)} - \frac{K_{\ell}(W_3)}{W_3 K_{\ell\pm 1}(W_3)} \\ \frac{J_{\ell}(U_1)}{U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1)} + \frac{K_{\ell}(W_2)}{W_2 K_{\ell\pm 1}(W_2)} \end{array} \right\| + = \quad (C-47).$$

$$= \frac{J_{\ell\pm 1}(U_3)}{Y_{\ell\pm 1}(U_3)} \frac{K_{\ell\pm 1}(W_3)}{K_{\ell\pm 1}(W_2)} \pm \frac{J_{\ell}(U_3)}{U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3)} \frac{K_{\ell}(W_3)}{W_3 K_{\ell\pm 1}(W_3)} - \frac{I_{\ell\pm 1}(W_3)}{I_{\ell\pm 1}(W_2)} \left\| \begin{array}{l} \frac{J_{\ell}(U_3)}{U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3)} \pm \frac{I_{\ell}(W_3)}{W_3 I_{\ell\pm 1}(W_3)} \\ \frac{J_{\ell}(U_1)}{U_1 J_{\ell\pm 1}(U_1)} \pm \frac{I_{\ell}(W_2)}{W_2 I_{\ell\pm 1}(W_2)} \end{array} \right\|$$

Situação (3) $N_3 < N < N_1$

Na solução para o situação (3), $N_3 < N < N_1$, faz-se o mesmo procedimento utilizado anteriormente, na resolução das situações (1) e (2). Usam-se novamente o campo elétrico que será.

A componente E_z dada por:

$$E_z = \left\{ \begin{array}{l} -A \frac{iU_1}{kn2a} \left\{ J_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \text{sen}(\ell-1)\theta + J_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \text{sen}(\ell+1)\theta \right\} \\ - \frac{iW_2}{kn2a} \left\{ BI_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) - CK_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right\} \text{sen}(\ell-1)\theta - \left[BI_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) - CK_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \text{sen}(\ell+1)\theta \\ - \frac{iU_3}{kn2b} \left\{ DI_{\ell-1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) - EK_{\ell-1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right\} \text{sen}(\ell-1)\theta - \left[DI_{\ell+1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) - EK_{\ell+1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \text{sen}(\ell+1)\theta \\ F \frac{iW_4}{kn2c} \left\{ K_{\ell-1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \text{sen}(\ell-1)\theta - K_{\ell+1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \text{sen}(\ell+1)\theta \right\}. \end{array} \right. \quad (C-48).$$

As componentes E_{θ} e E_y serão dadas a seguir:

$$E_{\theta} = \begin{cases} AJ_{\ell}\left(\frac{U_1\rho}{a}\right) \cos \ell\theta \cos\theta & ; 0 < \rho < a \\ \left[BI_{\ell}\left(\frac{W_2\rho}{a}\right) + CK_{\ell}\left(\frac{W_2\rho}{a}\right) \right] \cos \ell\theta \cos\theta & ; a < \rho < b \\ \left[DI_{\ell}\left(\frac{U_3\rho}{b}\right) + EK_{\ell}\left(\frac{U_3\rho}{b}\right) \right] \cos \ell\theta \cos\theta & ; b < \rho < c \\ FK_{\ell}\left(\frac{W_4\rho}{c}\right) \cos \ell\theta \cos\theta & ; c < \rho. \end{cases} \quad (C-49).$$

Componente E_y será:

$$E_y = \begin{cases} AJ_{\ell}\left(\frac{U_1\rho}{a}\right) \cos \ell\theta & ; 0 < \rho < a \\ \left[BI_{\ell}\left(\frac{W_2\rho}{a}\right) + CK_{\ell}\left(\frac{W_2\rho}{a}\right) \right] \cos \ell\theta & ; a < \rho < b \\ \left[DI_{\ell}\left(\frac{U_3\rho}{b}\right) + EK_{\ell}\left(\frac{U_3\rho}{b}\right) \right] \cos \ell\theta & ; b < \rho < c \\ FK_{\ell}\left(\frac{W_4\rho}{c}\right) \cos \ell\theta & ; c < \rho \end{cases} \quad (C-50).$$

As funções de Bessel possuem os seguintes argumentos:

$$\begin{aligned} W_2 &= [N^2 - N_2^2]^{1/2} k_0 a; & U_1 &= [N_1^2 - N^2]^{1/2} k_0 a; \\ W_3 &= \frac{b}{a} W_2; & U_3 &= [N^2 - N_3^2]^{1/2} k_0 b; \\ W_4 &= [N^2 - N_4^2]^{1/2} k_0 c; & U_4 &= \frac{c}{b} U_3. \end{aligned} \quad (C-51).$$

Os argumentos W_i e U_i são função da frequência normalizada v e da constante de propagação normalizada, já definidos na situação(1), eq.(C-2);

$$\begin{aligned}
 W_2 &= \left[B - \frac{(N_2^2 - N_4^2)}{(N_1^2 - N_4^2)} \right]^{1/2} av / c, & U_3 &= \left[B - \frac{(N_3^2 - N_4^2)}{(N_1^2 - N_4^2)} \right]^{1/2} bv / c, \\
 W_3 &= \left[B - \frac{(N_2^2 - N_4^2)}{(N_1^2 - N_4^2)} \right]^{1/2} bv / c, & U_4 &= \left[B - \frac{(N_3^2 - N_4^2)}{(N_1^2 - N_4^2)} \right]^{1/2} v, \\
 W_4 &= B^{1/2} v, & U_1 &= [1 - B]^{1/2} av / c.
 \end{aligned} \tag{C-52}$$

Utilizando-se essas componentes e a condição de continuidade dos campos nas interfaces da fibra, encontra-se a seguinte equação transcendental:

$$\begin{aligned}
 & \frac{I_{\ell \pm 1}(U_4)}{K_{\ell \pm 1}(U_4)} \frac{I_{\ell}(U_4)}{U_4 I_{\ell \pm 1}(U_4)} + \frac{K_{\ell}(W_4)}{W_4 K_{\ell \pm 1}(W_4)} \left| \frac{K_{\ell \pm 1}(W_3)}{K_{\ell \pm 1}(W_2)} \frac{\frac{K_{\ell}(W_3)}{W_3 K_{\ell \pm 1}(W_3)} - \frac{K_{\ell}(U_3)}{U_3 K_{\ell \pm 1}(U_3)}}{\frac{K_{\ell}(W_2)}{W_2 K_{\ell \pm 1}(W_2)} \mp \frac{J_{\ell}(U_1)}{U_1 J_{\ell \pm 1}(U_1)}} \right| + \\
 & \left| \frac{I_{\ell \pm 1}(U_4)}{K_{\ell \pm 1}(U_4)} \frac{K_{\ell}(U_4)}{U_4 K_{\ell \pm 1}(U_4)} - \frac{K_{\ell}(W_4)}{W_4 K_{\ell \pm 1}(W_4)} \right| + \frac{I_{\ell \pm 1}(W_3)}{I_{\ell \pm 1}(W_2)} \left| \frac{I_{\ell}(W_3)}{W_3 I_{\ell \pm 1}(W_3)} - \frac{K_{\ell}(U_3)}{U_3 K_{\ell \pm 1}(U_3)} \right| = \\
 & \frac{I_{\ell \pm 1}(U_3)}{K_{\ell \pm 1}(U_3)} \frac{K_{\ell \pm 1}(W_3)}{K_{\ell \pm 1}(W_2)} \frac{\frac{K_{\ell}(W_3)}{W_3 K_{\ell \pm 1}(W_3)} - \frac{I_{\ell}(U_3)}{U_3 I_{\ell \pm 1}(U_3)}}{\frac{K_{\ell}(W_2)}{W_2 K_{\ell \pm 1}(W_2)} \pm \frac{J_{\ell}(U_1)}{U_1 J_{\ell \pm 1}(U_1)}} + \frac{I_{\ell \pm 1}(W_3)}{I_{\ell \pm 1}(W_2)} \frac{\frac{I_{\ell}(W_3)}{W_3 I_{\ell \pm 1}(W_3)} - \frac{I_{\ell}(U_3)}{U_3 I_{\ell \pm 1}(U_3)}}{\frac{I_{\ell}(W_2)}{W_2 I_{\ell \pm 1}(W_2)} \pm \frac{J_{\ell}(U_1)}{U_1 J_{\ell \pm 1}(U_1)}} \\
 & = \frac{I_{\ell \pm 1}(U_3)}{K_{\ell \pm 1}(U_3)} \frac{K_{\ell \pm 1}(W_3)}{K_{\ell \pm 1}(W_2)} \frac{\frac{K_{\ell}(W_3)}{W_3 K_{\ell \pm 1}(W_3)} - \frac{I_{\ell}(U_3)}{U_3 I_{\ell \pm 1}(U_3)}}{\frac{K_{\ell}(W_2)}{W_2 K_{\ell \pm 1}(W_2)} \pm \frac{J_{\ell}(U_1)}{U_1 J_{\ell \pm 1}(U_1)}} + \frac{I_{\ell \pm 1}(W_3)}{I_{\ell \pm 1}(W_2)} \frac{\frac{I_{\ell}(W_3)}{W_3 I_{\ell \pm 1}(W_3)} - \frac{I_{\ell}(U_3)}{U_3 I_{\ell \pm 1}(U_3)}}{\frac{I_{\ell}(W_2)}{W_2 I_{\ell \pm 1}(W_2)} \pm \frac{J_{\ell}(U_1)}{U_1 J_{\ell \pm 1}(U_1)}}
 \end{aligned} \tag{C-53}$$

Essas são as equações transcendentais para a fibra coaxial W, estrutura I, as quais serão solucionadas numericamente.

A estrutura II é um caso particular da I e as suas equações transcendentais são as mesmas para as devidas situações, diferindo apenas nos argumentos das funções de Bessel.

Situação (1), $N_4 < N < N_3$

Na primeira situação, $N_4 < N < N_3$, desta estrutura têm-se que a equação transcendental é igual a eq.(C-47) a diferença fundamental está nos parâmetros U_i e W_i que são definidos a seguir:

$$\begin{aligned}
 W_2 &= \left[B + \left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_1^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{a}{c}, & U_3 &= \left[\left(\frac{N_3^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right) - B \right]^{1/2} v \frac{b}{c}, \\
 W_3 &= \left[B + \left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_1^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{b}{c}, & U_4 &= \left[\left(\frac{N_3^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right) - B \right]^{1/2} v, \\
 W_4 &= B^{1/2} v, & U_1 &= [1 - B]^{1/2} v \frac{b}{c}.
 \end{aligned} \tag{C-54}$$

Situação (2), $N_3 < N < N_1$.

Para a situação (2) desta estrutura, a equação transcendental é idêntica a eq.(C-53), diferindo apenas quanto aos argumentos das funções de Bessel, que são:

$$\begin{aligned}
 W_2 &= \left[B + \left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_1^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{a}{c}, & U_3 &= \left[B - \left(\frac{N_3^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{b}{c}, \\
 W_3 &= \left[B + \left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_1^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{b}{c}, & U_4 &= \left[B - \left(\frac{N_3^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v, \\
 W_4 &= B^{1/2} v, & U_1 &= [1 - B]^{1/2} v \frac{b}{c}.
 \end{aligned} \tag{C-55}$$

Com essas condições pode-se fazer uma análise completa da fibra coaxial W.

C-2 - Fibra M

A fibra M apresenta duas estruturas, que são mostradas na figura (C-2) abaixo.

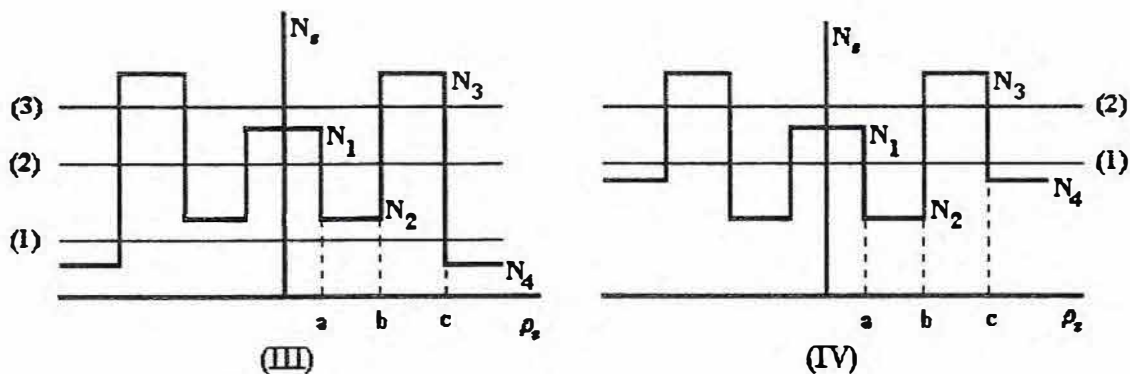


Fig. (C-2) Perfil de índice de refração das estruturas III e IV, da fibra M.

A análise da fibra M é facilitado por ser necessário calcular apenas a situação(3), $N_1 < N < N_3$, para o índice de refração efetivo da estrutura III, pois as demais foram calculadas para a fibra W. A diferença entre as fibras W e M esta na frequência normalizada v e na constante de propagação normalizada B . Para a fibra M têm-se a seguinte definição:

$$v = (N_3^2 - N_4^2)^{1/2} k_0 c \quad \text{e} \quad B = \frac{N^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \tag{C-56}$$

A seguir são analisadas as situações dessa estrutura.

Situação(1), $N_4 < N < N_2$.

Nesta situação a equação transcendental é idêntica à eq.(C-41), diferindo pelos parâmetros U_i e W_i os quais são mostrados abaixo;

$$\begin{aligned}
 W_2 &= \left[\left(\frac{N_2^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right) - B \right]^{1/2} v \frac{a}{c}, & U_1 &= \left[\left(\frac{N_1^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right) - B \right]^{1/2} v \frac{a}{c}, \\
 W_3 &= \left[\left(\frac{N_2^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right) - B \right]^{1/2} v \frac{b}{c}, & U_3 &= [1 - B]^{1/2} v \frac{b}{c}, \\
 W_4 &= B^{1/2} v, & U_4 &= [1 - B]^{1/2} v.
 \end{aligned} \tag{C-57}$$

Situação(2), $N_2 < N < N_1$.

Para esta situação a equação (C-47) e os argumentos das funções de Bessel, definidos abaixo, descrevem as características desse caso.

$$\begin{aligned}
 W_2 &= \left[B - \left(\frac{N_2^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right) \right]^{1/2} v \frac{a}{c}, & U_1 &= \left[\left(\frac{N_1^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right) - B \right]^{1/2} v \frac{a}{c}, \\
 W_3 &= \left[B - \left(\frac{N_2^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right) \right]^{1/2} v \frac{b}{c}, & U_3 &= [1 - B]^{1/2} v \frac{b}{c}, \\
 W_4 &= B^{1/2} v, & U_4 &= [1 - B]^{1/2} v.
 \end{aligned} \tag{C-58}$$

Situação(3), $N_1 < N < N_3$.

Para solucionar esta situação precisa-se encontrar o campo em todas regiões ao longo da fibra.

$$E_y = \begin{cases} AI_\ell \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \cos \ell \theta & ; 0 < \rho < a \\ \left[BI_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + CK_\ell \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \cos \ell \theta & ; a < \rho < b \\ \left[DJ_\ell \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EY_\ell \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \cos \ell \theta & ; b < \rho < c \\ FK_\ell \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \cos \ell \theta & ; c < \rho \end{cases} \tag{C-59}$$

Neste caso os parâmetros U_1 , U_3 , U_4 , W_2 , W_3 e W_4 são os seguintes:

$$\begin{aligned}
U_1 &= [N^2 - N_1^2]^{1/2} k_0 a; & W_2 &= [N^2 - N_2^2]^{1/2} k_0 a; \\
U_3 &= [N_3^2 - N^2]^{1/2} k_0 b; & W_3 &= [N^2 - N_2^2]^{1/2} k_0 b; \\
U_4 &= [N_3^2 - N^2]^{1/2} k_0 c; & W_4 &= [N^2 - N_4^2]^{1/2} k_0 c.
\end{aligned} \tag{C-60}$$

Usando novamente a frequência normalizada v e da constante de propagação normalizada B , definidas a seguir:

$$v = (N_1^2 - N_4^2)^{1/2} k_0 c \quad \text{e} \quad B = \frac{N^2 - N_4^2}{N_1^2 - N_4^2} \tag{C-61}$$

Com isto os parâmetros W_i e U_i poderam ser re-escritos na forma.

$$\begin{aligned}
W_2 &= \left[B - \left(\frac{N_2^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right) \right]^{1/2} v \frac{a}{c}, & U_1 &= \left[B - \left(\frac{N_1^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right) \right]^{1/2} v \frac{a}{c}, \\
W_3 &= \left[B - \left(\frac{N_2^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right) \right]^{1/2} v \frac{b}{c}, & U_3 &= [1 - B]^{1/2} v \frac{b}{c}, \\
W_4 &= B^{1/2} v, & U_4 &= [1 - B]^{1/2} v.
\end{aligned} \tag{C-62}$$

Segundo a aproximação L P escolhe-se os campos com polarizações lineares, neste caso optou-se pela seguinte polarização: $\mathbf{E} = \mathbf{E}(0, E_y, E_z)$ e $\mathbf{H} = \mathbf{H}(H_x, 0, H_z)$. Onde a componente do campo elétrico na direção z , segundo as equações de Maxwell, será dada pela eq.(C-5) e E_θ será dada pela eq.(C-6). Calcula-se então E_z e E_θ , para a região em que $\rho < a$, pois as demais regiões foram encontradas ao se estudar a fibra M. A derivada deste intervalo é dada a seguir:

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = A \frac{U_1}{a} (\sin \theta \cos \ell \theta) I'_\ell \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) - A \frac{\ell}{\rho} (\cos \theta \sin \ell \theta) I_\ell \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \tag{C-63}$$

Usando-se uma das relações de recorrência para as funções de Bessel, dadas pelas eq.(C-7);

$$I_\ell(u) = -\frac{u}{2\ell} [I_{\ell+1}(u) - I_{\ell-1}(u)], \quad \Gamma_\ell(u) = \frac{1}{2} [I_{\ell-1}(u) + I_{\ell+1}(u)] \quad (\text{C-64}).$$

e as identidades trigonométricas das pela eq.(C-8).

A eq.(C-65) será dada por:

Intervalo $0 < \rho < a$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial y} &= A \frac{U_1}{a} (\text{sen } \theta \cos \ell \theta) \Gamma_\ell \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) - A \frac{\ell}{\rho} (\cos \theta \text{sen } \ell \theta) I_\ell \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \\ &= A \frac{U_1}{2a} \left\{ (\text{sen } \theta \cos \ell \theta) \left[I_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) + I_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \right] + (\cos \theta \text{sen } \ell \theta) \left[I_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) - I_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \right] \right\} \\ &= A \frac{U_1}{2a} \left\{ [\text{sen } \theta \cos \ell \theta - \cos \theta \text{sen } \ell \theta] J_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) + [\text{sen } \theta \cos \ell \theta + \cos \theta \text{sen } \ell \theta] J_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \right\} \\ &= A \frac{U_1}{2a} \left\{ \text{sen}(1 - \ell) \theta I_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) + \text{sen}(1 + \ell) \theta I_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \right\} \\ &= A \frac{U_1}{2a} \left\{ -\text{sen}(\ell - 1) \theta I_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) + \text{sen}(\ell + 1) \theta I_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \right\} \\ \frac{\partial E_y}{\partial y} &= -A \frac{U_1}{2a} \left\{ \text{sen}(\ell - 1) \theta I_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) - \text{sen}(\ell + 1) \theta I_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \right\} \end{aligned}$$

Então a componente do campo elétrico na direção z, para cada região da fibra, é dado pelas seguintes equações:

$$E_z = \begin{cases} -A \frac{iU_1}{nk2a} \left\{ I_{\ell-1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \text{sen}(\ell - 1) \theta - I_{\ell+1} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \text{sen}(\ell + 1) \theta \right\} \\ -\frac{iW_2}{nk2a} \left\{ \left[\text{BI}_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) - \text{CK}_{\ell-1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \text{sen}(\ell - 1) \theta - \left[\text{BI}_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) - \text{CK}_{\ell+1} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \text{sen}(\ell + 1) \theta \right\} \\ -\frac{iU_3}{nk2b} \left\{ \left[\text{DJ}_{\ell-1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + \text{EY}_{\ell-1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \text{sen}(\ell - 1) \theta + \left[\text{DJ}_{\ell+1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + \text{EY}_{\ell+1} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \text{sen}(\ell + 1) \theta \right\} \\ F \frac{iW_4}{nk2c} \left\{ \text{K}_{\ell-1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \text{sen}(\ell - 1) \theta - \text{K}_{\ell+1} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \text{sen}(\ell + 1) \theta \right\}. \end{cases} \quad (\text{C-65}).$$

A componente do campo na direção θ , por sua vez, é dada por:

$$E_{\theta} = \begin{cases} AI_{\ell} \left(\frac{U_1 \rho}{a} \right) \cos \ell \theta \cos \theta & ; 0 < \rho < a \\ \left[BI_{\ell} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) + CK_{\ell} \left(\frac{W_2 \rho}{a} \right) \right] \cos \ell \theta \cos \theta & ; a < \rho < b \\ \left[DJ_{\ell} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) + EY_{\ell} \left(\frac{U_3 \rho}{b} \right) \right] \cos \ell \theta \cos \theta & ; b < \rho < c \\ FK_{\ell} \left(\frac{W_4 \rho}{c} \right) \cos \ell \theta \cos \theta & ; c < \rho . \end{cases} \quad (C-66).$$

Pelas condições de contorno as componentes do campo elétrico devem ser iguais nas interfaces de cada região da fibra.

Para $\rho = a$

as componentes E_{θ} e E_z serão as seguintes; a componente E_{θ} nos leva a seguinte equação;

$$I_{\ell}(U_1)A = I_{\ell}(W_2)B + K_{\ell}(W_2)C \quad (C-67).$$

Da componente E_z resultará as equações a seguir:

$$U_1 I_{\ell-1}(U_1)A = W_2 [I_{\ell-1}(W_2)B - K_{\ell-1}(W_2)C] \quad (C-68);$$

$$U_1 I_{\ell+1}(U_1)A = W_2 [I_{\ell+1}(W_2)B - K_{\ell+1}(W_2)C] \quad (C-69).$$

Adicionando-se (C-68) a (C-69), encontra-se;

$$U_1 J_{\ell \pm 1}(U_1)A = W_2 [J_{\ell \pm 1}(W_2)B + Y_{\ell \pm 1}(W_2)C] \quad (C-70).$$

Para $\rho = b$ a componente E_{θ} leva à seguinte equação:

$$I_{\ell} \left(\frac{W_2 b}{a} \right) B + K_{\ell} \left(\frac{W_2 b}{a} \right) C = J_{\ell}(U_3)D + Y_{\ell}(U_3)E \quad (C-71).$$

Da componente E_z resultará as equações a seguir;

$$\frac{W_2}{a} \left[I_{\ell-1} \left(\frac{W_2 b}{a} \right) B - K_{\ell-1} \left(\frac{W_2 b}{a} \right) C \right] = \frac{U_3}{b} [J_{\ell-1}(U_3)D + Y_{\ell-1}(U_3)E] \quad (C-72);$$

$$\frac{W_2}{a} \left[I_{\ell+1} \left(\frac{W_2 b}{a} \right) B - K_{\ell+1} \left(\frac{W_2 b}{a} \right) C \right] = \frac{U_3}{b} [J_{\ell+1}(U_3)D + Y_{\ell+1}(U_3)E] \quad (C-73).$$

Operando-se com as equações (C-72) e (C-73) obtêm-se:

$$\mp \frac{W_2 b}{a} \left[I_{\ell\pm 1} \left(\frac{W_2 b}{a} \right) B - K_{\ell\pm 1} \left(\frac{W_2 b}{a} \right) C \right] = U_3 [J_{\ell\pm 1}(U_3)D + Y_{\ell\pm 1}(U_3)E] \quad (C-74).$$

Para $\rho = c$, a componente E_θ levará à seguinte equação:

$$J_\ell \left(\frac{U_3 c}{b} \right) D + Y_\ell \left(\frac{U_3 c}{b} \right) E = K_\ell(w_4) F \quad (C-75).$$

Da componente E_z resultará as equações a seguir;

$$- \frac{U_3}{b} \left[J_{\ell-1} \left(\frac{U_3 c}{b} \right) D + Y_{\ell-1} \left(\frac{U_3 c}{b} \right) E \right] = \frac{W_4}{c} K_{\ell-1}(W_4) F \quad (C-76);$$

$$\frac{U_3}{b} \left[J_{\ell+1} \left(\frac{U_3 c}{b} \right) D + Y_{\ell+1} \left(\frac{U_3 c}{b} \right) E \right] = \frac{W_4}{c} K_{\ell+1}(W_4) F \quad (C-77).$$

Adicionando-se as equações (C-76) a (C-77), encontra-se a seguinte equação:

$$\pm \frac{U_3 c}{b} \left[J_{\ell\pm 1} \left(\frac{U_3 c}{b} \right) D + Y_{\ell\pm 1} \left(\frac{U_3 c}{b} \right) E \right] = W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4) F \quad (C-78).$$

Por conveniência faz-se as mesmas mudanças de variáveis feitas para fibra W, que é dada pela eq.(C-20).

Substituindo-as nas equações anteriores, fica-se com o sistema de equações dado a seguir:

$$I_\ell(U_1)A - I_\ell(W_2)B - K_\ell(W_2)C = 0 \quad (C-79);$$

$$U_1 I_{\ell\pm 1}(U_1)A - W_2 I_{\ell\pm 1}(W_2)B + W_2 K_{\ell\pm 1}(W_2)C = 0 \quad (C-80);$$

$$I_\ell(W_3)B + K_\ell(W_3)C - J_\ell(U_3)D - Y_\ell(U_3)E = 0 \quad (C-81);$$

$$\mp W_3 I_{\ell\pm 1}(W_3)B \pm W_3 K_{\ell\pm 1}(W_3)C - U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3)D - U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3)E = 0 \quad (C-82);$$

$$J_\ell(U_4)D + Y_\ell(U_4)E - K_\ell(W_4)F = 0 \quad (C-83);$$

$$\pm U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4)D \pm U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4)E - W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)F = 0 \quad (C-84).$$

Fazendo-se o mesmo procedimento dos casos anteriores para que o sistema apresente solução não-trivial então o determinante dos coeficientes será nulo, logo obtêm-se:

$$\begin{vmatrix} I_\ell(U_1) & -I_\ell(W_2) & -K_\ell(W_2) & 0 & 0 & 0 \\ U_1 I_{\ell\pm 1}(U_1) & -W_2 I_{\ell\pm 1}(W_2) & W_2 K_{\ell\pm 1}(W_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_\ell(W_3) & K_\ell(W_3) & -J_\ell(U_3) & -Y_\ell(U_3) & 0 \\ 0 & \mp W_3 I_{\ell\pm 1}(W_3) & \pm W_3 K_{\ell\pm 1}(W_3) & -U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3) & -U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_\ell(U_4) & Y_\ell(U_4) & -K_\ell(W_4) \\ & 0 & 0 & \pm U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4) & \pm U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4) & -W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4) \end{vmatrix} = 0.$$

Esse determinante é reduzido segundo a expressão,

$$I_\ell(U_1)\alpha(5) - U_1 I_{\ell\pm 1}(U_1)\xi(5) = 0 \quad (C-85),$$

onde se tem dois determinantes de ordem 5. Eles são:

$$\alpha(5) = \begin{vmatrix} -W_2 I_{\ell\pm 1}(W_2) & W_2 K_{\ell\pm 1}(W_2) & 0 & 0 & 0 \\ I_\ell(W_3) & K_\ell(W_3) & -J_\ell(U_3) & -Y_\ell(U_3) & 0 \\ \mp W_3 I_{\ell\pm 1}(W_3) & \pm W_3 K_{\ell\pm 1}(W_3) & -U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3) & -U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3) & 0 \\ 0 & 0 & J_\ell(U_4) & Y_\ell(U_4) & -K_\ell(W_4) \\ 0 & 0 & \pm U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4) & \pm U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4) & -W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4) \end{vmatrix}$$

$$\xi(5) = \begin{vmatrix} -I_\ell(W_2) & -K_\ell(W_2) & 0 & 0 & 0 \\ I_\ell(W_3) & K_\ell(W_3) & -J_\ell(U_3) & -Y_\ell(U_3) & 0 \\ \mp W_3 I_{\ell\pm 1}(W_3) & \pm W_3 K_{\ell\pm 1}(W_3) & -U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3) & -U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3) & 0 \\ 0 & 0 & J_\ell(U_4) & Y_\ell(U_4) & -K_\ell(W_4) \\ & 0 & \pm U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4) & \pm U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4) & -W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4) \end{vmatrix}$$

Os determinantes $\alpha(5)$ e $\xi(5)$ também são reduzidos de acordo com as seguintes expressões:

$$\alpha(5) = -W_2 I_{\ell\pm 1}(W_2)\alpha(4) - W_2 K_{\ell\pm 1}(W_2)\xi(4) \quad (C-86);$$

$$\xi(5) = -I_\ell(W_2)\alpha(4) + K_\ell(W_2)\xi(4) \quad (C-87),$$

resultando em dois determinantes 4x4, os quais são mostrados a seguir:

$$\alpha(4) = \begin{vmatrix} K_\ell(W_3) & -J_\ell(U_3) & -Y_\ell(U_3) & 0 \\ \pm W_3 K_{\ell\pm 1}(W_3) & -U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3) & -U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3) & 0 \\ 0 & J_\ell(U_4) & Y_\ell(U_4) & -K_\ell(W_4) \\ 0 & \pm U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4) & \pm U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4) & -W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4) \end{vmatrix}$$

$$\xi(4) = \begin{vmatrix} I_\ell(W_3) & -J_\ell(U_3) & -Y_\ell(U_3) & 0 \\ \mp W_3 I_{\ell\pm 1}(W_3) & -U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3) & -U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3) & 0 \\ 0 & J_\ell(U_4) & Y_\ell(U_4) & -K_\ell(W_4) \\ 0 & \pm U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4) & \pm U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4) & -W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4) \end{vmatrix}$$

Esses determinantes, por sua vez, podem ser reduzidos a dois 3x3, conforme as expressões:

$$\alpha(4) = K_\ell(W_3)\alpha(3) \mp W_3 K_{\ell\pm 1}(W_3)\xi(3) \quad (C-88);$$

$$\xi(4) = I_\ell(W_3)\alpha(3) \pm W_3 I_{\ell\pm 1}(W_3)\xi(3) \quad (C-89).$$

Os determinantes 3 x 3 são:

$$\alpha(3) = \begin{vmatrix} -U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3) & -U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3) & 0 \\ J_\ell(U_4) & Y_\ell(U_4) & -K_\ell(W_4) \\ \pm U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4) & \pm U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4) & -W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4) \end{vmatrix}$$

$$\xi(3) = \begin{vmatrix} -J_\ell(U_3) & -Y_\ell(U_3) & 0 \\ J_\ell(U_4) & Y_\ell(U_4) & -K_\ell(W_4) \\ \pm U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4) & \pm U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4) & -W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4) \end{vmatrix}$$

Por conviniência pode-se reduzir-se a dois determinantes, $\alpha(3)$ e $\xi(3)$, os quais serão encontrados através das expressões;

$$\alpha(3) = -U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3)\alpha(2) + U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3)\xi(2) \quad (C-90),$$

$$\xi(3) = -J_\ell(U_3)\alpha(2) + Y_\ell(U_3)\xi(2) \quad (C-91),$$

onde $\alpha(2)$ e $\xi(2)$ serão os seguintes;

$$\alpha(2) = \begin{vmatrix} Y_\ell(U_4) & -K_\ell(W_4) \\ \pm U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4) & -W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4) \end{vmatrix} = \pm U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4) K_\ell(W_4) - W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4) Y_\ell(U_4) \quad (C-92),$$

$$\xi(2) = \begin{vmatrix} J_\ell(U_4) & -K_\ell(W_4) \\ \pm U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4) & -W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4) \end{vmatrix} = \pm U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4) K_\ell(W_4) - W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4) J_\ell(U_4) \quad (C-93).$$

As equações (C-92) e (C-93) podem ser re-escritos da seguinte forma:

$$\alpha(2) = U_4 W_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4) K_{\ell\pm 1}(W_4) \left[\pm \frac{K_\ell(W_4)}{W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)} - \frac{Y_\ell(U_4)}{U_4 Y_{\ell\pm 1}(U_4)} \right] \quad (C-94);$$

$$\xi(2) = U_4 W_4 J_{\ell\pm 1}(U_4) K_{\ell\pm 1}(W_4) \left[\pm \frac{K_\ell(W_4)}{W_4 K_{\ell\pm 1}(W_4)} - \frac{J_\ell(U_4)}{U_4 J_{\ell\pm 1}(U_4)} \right] \quad (C-95).$$

Para comodidade do leitor re-escreve-se a equação transcendental (C-85), a ser solucionada:

$$I_\ell(U_1)\alpha(5) - U_1 I_{\ell\pm 1}(U_1)\xi(5) = 0.$$

Ao substituir-se as equações (C-86) e (C-87) na equação(C-85), encontra-se a seguinte expressão:

$$I_{\ell\pm 1}(W_2) \left[\frac{I_\ell(W_2)}{W_2 I_{\ell\pm 1}(W_2)} - \frac{I_\ell(U_1)}{U_1 I_{\ell\pm 1}(U_1)} \right] \alpha(4) + K_{\ell\pm 1}(W_2) \left[\frac{K_\ell(W_2)}{W_2 K_{\ell\pm 1}(W_2)} - \frac{I_\ell(U_1)}{U_1 I_{\ell\pm 1}(U_1)} \right] \xi(4) = 0 \quad (C-96);$$

onde $\alpha(4)$ e $\xi(4)$ serão dados por;

$$\alpha(4) = U_3 W_3 K_{\ell\pm 1}(W_3) \left\{ \begin{array}{l} J_{\ell\pm 1}(U_3) \left[\pm \frac{J_\ell(U_3)}{U_3 J_{\ell\pm 1}(U_3)} - \frac{Y_\ell(W_3)}{W_3 Y_{\ell\pm 1}(W_3)} \right] \alpha(2) + \\ - Y_{\ell\pm 1}(U_3) \left[\pm \frac{Y_\ell(U_3)}{U_3 Y_{\ell\pm 1}(U_3)} - \frac{Y_\ell(W_3)}{W_3 Y_{\ell\pm 1}(W_3)} \right] \xi(2) \end{array} \right\} \quad (C-97);$$

$$\xi(4) = U_3 W_3 I_{\ell \pm 1}(W_3) \left[\begin{array}{l} J_{\ell \pm 1}(U_3) \left[\mp \frac{J_{\ell}(U_3)}{U_3 J_{\ell \pm 1}(U_3)} - \frac{I_{\ell}(W_3)}{w_3 I_{\ell \pm 1}(W_3)} \right] \alpha(2) + \\ - Y_{\ell \pm 1}(U_3) \left[\mp \frac{Y_{\ell}(U_3)}{U_3 Y_{\ell \pm 1}(U_3)} - \frac{I_{\ell}(W_3)}{w_3 I_{\ell \pm 1}(W_3)} \right] \xi(2) \end{array} \right] \quad (C-98).$$

Substituindo-se $\alpha(4)$, $\beta(4)$, $\alpha(2)$ e $\beta(2)$ na equação (C-96) encontra-se a seguinte equação:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{J_{\ell \pm 1}(U_4)}{Y_{\ell \pm 1}(U_4)} \left[\frac{J_{\ell}(U_4) \mp K_{\ell}(W_4)}{U_4 J_{\ell \pm 1}(U_4) \mp W_4 K_{\ell \pm 1}(W_4)} \right] \\ \frac{K_{\ell \pm 1}(W_3)}{K_{\ell \pm 1}(W_2)} \left[\frac{\pm \frac{Y_{\ell}(U_3)}{U_3 Y_{\ell \pm 1}(U_3)} - \frac{K_{\ell}(W_3)}{W_3 K_{\ell \pm 1}(W_3)}}{\frac{I_{\ell}(U_1)}{U_1 I_{\ell \pm 1}(U_1)} + \frac{K_{\ell}(W_2)}{W_2 K_{\ell \pm 1}(W_2)}} \right] + \\ \frac{I_{\ell \pm 1}(W_3)}{I_{\ell \pm 1}(W_2)} \left[\frac{\pm \frac{Y_{\ell}(U_3)}{U_3 Y_{\ell \pm 1}(U_3)} + \frac{I_{\ell}(W_3)}{W_3 I_{\ell \pm 1}(W_3)}}{\frac{I_{\ell}(U_1)}{U_1 I_{\ell \pm 1}(U_1)} - \frac{I_{\ell}(W_2)}{W_2 I_{\ell \pm 1}(W_2)}} \right] \end{array} \right\} = \quad (C-100).$$

$$= \frac{J_{\ell \pm 1}(U_3)}{Y_{\ell \pm 1}(U_3)} \left\{ \frac{K_{\ell \pm 1}(W_3)}{K_{\ell \pm 1}(W_2)} \left[\frac{\pm \frac{J_{\ell}(U_3)}{U_3 J_{\ell \pm 1}(U_3)} - \frac{K_{\ell}(W_3)}{W_3 K_{\ell \pm 1}(W_3)}}{\frac{I_{\ell}(U_1)}{U_1 I_{\ell \pm 1}(U_1)} + \frac{K_{\ell}(W_2)}{W_2 K_{\ell \pm 1}(W_2)}} \right] \frac{I_{\ell \pm 1}(W_3)}{I_{\ell \pm 1}(W_2)} \left[\frac{\pm \frac{J_{\ell}(U_3)}{U_3 J_{\ell \pm 1}(U_3)} + \frac{I_{\ell}(W_3)}{W_3 I_{\ell \pm 1}(W_3)}}{\frac{I_{\ell}(U_1)}{U_1 I_{\ell \pm 1}(U_1)} - \frac{I_{\ell}(W_2)}{W_2 I_{\ell \pm 1}(W_2)}} \right] \right\}$$

A estrutura V é um caso particular da anterior, diferindo pela relação $N_2 < N_4$. Com essa condição tem-se apenas duas situações a serem solucionados, cujas equações transcendentais são iguais as situações correspondentes da estrutura IV, novamente a diferença esta nos argumentos das funções de Bessel.

Situação(1), $N_4 < N < N_1$.

É idêntico à situação(1) da estrutura anterior e a solução para a equação de onda é dada pela eq.(3-15) com os parâmetros U_i e W_i dados por:

$$\begin{aligned}
 W_2 &= \left[B + \left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_3^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{a}{c}, & U_1 &= \left[\left(\frac{N_1^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right) - B \right]^{1/2} v \frac{a}{c}, \\
 W_3 &= \left[B + \left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_3^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{b}{c}, & U_3 &= [1 - B]^{1/2} v \frac{b}{c}, \\
 W_4 &= B^{1/2} v, & U_4 &= [1 - B]^{1/2} v.
 \end{aligned} \tag{C-101}$$

Situação(2), $N_1 < N < N_3$.

A equação transcendental desse caso é igual a eq.(C-100) onde os argumentos das funções de Bessel serão:

$$\begin{aligned}
 W_2 &= \left[B + \left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_3^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{a}{c}, & U_1 &= \left[B - \left(\frac{N_1^2 - N_4^2}{N_3^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{a}{c}, \\
 W_3 &= \left[B + \left(\frac{N_4^2 - N_2^2}{N_3^2 - N_4^2} \right)^{1/2} \right] v \frac{b}{c}, & U_3 &= [1 - B]^{1/2} v \frac{b}{c}, \\
 W_4 &= B^{1/2} v, & U_4 &= [1 - B]^{1/2} v.
 \end{aligned} \tag{C-102}$$

Com essas equações pode-se analisar o comportamento de uma onda propagando nas fibras W e M.