

**Aristeu Rosendo Pontes Lima**

**Teoria de Campos com Estatística  
Fracionária**

Fortaleza

18 de novembro de 2005

Aristeu Rosendo Pontes Lima

# Teoria de Campos com Estatística Fracionária

Dissertação submetida à Coordenação do  
Curso de Pós-Graduação em Física, da Uni-  
versidade Federal do Ceará, como requisito  
parcial para a obtenção do grau de Mes-  
tre em Física

Orientador:

Ricardo Renan Landim de Carvalho

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARA - DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Fortaleza

18 de novembro de 2005

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Sistema de Bibliotecas  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

L696t Lima, Aristeu Rosendo Pontes.

Teoria de campos com estatística fracionária / Aristeu Rosendo Pontes Lima. – 2005.  
80 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2005.

Orientação: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho.

1. Teoria quântica de campos. 2. Física do estado sólido. 3. Estatística. I. Título.

CDD 530

---

Aristeu Rosendo Pontes Lima

# Teoria de Campos com Estatística Fracionária

Dissertação submetida à Coordenação do  
Curso de Pós-Graduação em Física, da Uni-  
versidade Federal do Ceará, como requisito  
parcial para a obtenção do grau de Mes-  
tre em Física

Aprovada em 18 de novembro de 2005

## BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho  
(Orientador)  
Universidade Federal do Ceará - UFC

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida  
Universidade Federal do Ceará - UFC

Prof. Dr. Márcio André de Melo Gomes  
Centro Federal de Ensino Tecnológico - CEFET/CE

Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Júnior  
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

*Aos Meus Pais.*

# Agradecimentos

Agradeço a meu pai, Aristeu, meu primeiro professor.

Agradeço à minha mãe, Fernanda, que tanto me apoiou e sofreu nos momentos difíceis.

Agradeço ao meu irmão, Hélio, companheiro de todas as horas.

Agradeço à minha noiva, Raquel, por seu apoio incondicional.

Agradeço a todos os meus companheiros e ex-companheiros de grupo: Abraão, Bruno Abagaro, Célio, Ednilson, Euclides, Geová, Hiroshi, Kleiton (Macho Vêi), Victor Hugo, Luciana, Luís Gonzaga, Marcio André, Makárius, Mário Pacheco, Pablo e Wilami, que foram fundamentais para minha formação através das discussões mantidas sobre Física, computação, política, etc.

Agradeço a todos os meus companheiros de graduação, em especial ao Alan, ao Bruno Bastos, ao David, à Kátia, ao Leandro, ao Valderlan, ao Vladimir e ao Wagner pelas longas horas que passamos juntos resolvendo listas de exercícios.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Agradeço à chefia do Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará.

Agradeço à chefia da Pós-Graduação do Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará.

Agradeço a todos os professores do departamento de Física da UFC, em especial ao Cleuton, ao Evangelista, ao Murilo, ao Raimundo e ao Ramos.

Agradeço ao grande Júlio Auto Neto.

Agradeço ao ilustríssimo Newton Teóphilo.

Agradeço ao Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida.

Por último, mas não menos importante, agradeço ao meu orientador de iniciação científica e de mestrado Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho.

# Resumo

Em 1988 G. W. Semenoff propôs um modelo teórico baseado no termo de Chern-Simons (C.S) para a realização explícita dos ânions. Ânions são partículas em um espaço  $(2 + 1)$ -dimensional capazes de explicar fenômenos importantes na física do estado sólido como, por exemplo, a supercondutividade de altas temperaturas e o efeito Hall quântico fracionário, entre outros. O modelo de Semenoff contém, além do termo de C. S., um acoplamento mínimo entre os campos de matéria  $\phi$  e de calibre  $A_\mu$ . Nesta dissertação, nós procuramos investigar a fundo a origem da estatística fracionária no modelo de Semenoff. Propomos, então, modelos com acoplamento não mínimo na busca de alternativas para a obtenção da estatística fracionária. Neles, o termo não mínimo do acoplamento é construído a partir de uma redefinição do campo  $A_\mu$ . Encontramos, de fato, modelos não mínimos com tal propriedade além de novos aspectos anteriormente mascarados pelo acoplamento mínimo. Uma outra forma de inserir a interação não mínima é apresentada com os mesmos resultados sendo obtidos.

# Abstract

In 1988 G. W. Semenoff proposed a theoretical model based on the Chern-Simons term (C.S) for the explicit accomplishment of anyons. Anyons are particles in a  $(2 + 1)$ -dimensional space involved in the explanation of important phenomena in solid state physics like, for example, the high temperature superconductivity and the fractional quantum Hall effect, among others. Semenoff's model contains, besides the C. S. term, a gauge field  $A_\mu$  which couples minimally to the matter field  $\phi$ . In this dissertation, we investigate further the origin of fractional statistics in the model of Semenoff. We consider, then, models with non-minimal coupling in the search of alternatives for the attainment of fractional statistics. In these models, the non-minimal term of the coupling is constructed from a field redefinition of the gauge field  $A_\mu$ . We find, in fact, non-minimal models with such property as well as new aspects previously masked by the minimal coupling. Another form to insert the non-minimal interaction is presented and the same results were obtained.

# Sumário

INTRODUÇÃO	p. 10
<b>1 SISTEMAS HAMILTONIANOS COM VÍNCULOS</b>	<b>p. 12</b>
1.1 Introdução . . . . .	p. 12
1.2 Invariância de calibre - Vínculos . . . . .	p. 12
1.3 Lagrangeana - Vínculos Primários . . . . .	p. 13
1.4 Condições de Regularidade . . . . .	p. 15
1.5 O Hamiltoniano Canônico . . . . .	p. 16
1.6 Princípio da Ação na Forma Hamiltoniana . . . . .	p. 18
1.7 Igualdades Fraca e Forte . . . . .	p. 20
1.8 Vínculos Secundários . . . . .	p. 20
1.9 Restrições nos Multiplicadores de Lagrange . . . . .	p. 22
1.10 Funções de Primeira e Segunda Classes . . . . .	p. 23
1.11 Vínculos de Primeira Classe: Geradores de Transformações de Calibre . . . . .	p. 24
1.11.1 Transformações de Calibre . . . . .	p. 25
1.11.2 Contra-exemplo à Conjectura de Dirac . . . . .	p. 28
1.11.3 O Hamiltoniano Estendido . . . . .	p. 29
1.12 Vínculos de Segunda Classe: Os Parênteses de Dirac . . . . .	p. 31
1.12.1 Separação em Vínculos de Primeira e Segunda Classes . . . . .	p. 31
1.12.2 Exemplo do Tratamento de Vínculos de Segunda Classe . . . . .	p. 32
1.12.3 O Parênteses de Dirac . . . . .	p. 33

1.13	Fixação de Calibre - Graus de Liberdade Independentes . . . . .	p. 35
1.13.1	Calibres Canônicos . . . . .	p. 35
1.13.2	Vínculos de Segunda Classe e Fixação de Calibre . . . . .	p. 37
1.14	Mais Sobre Transformações de Calibre . . . . .	p. 38
1.14.1	A Teoria Eletromagnética Enquanto Teoria de Calibre . . . . .	p. 38
1.14.1.1	Invariância de Calibre das Equações de Maxwell . . . . .	p. 40
1.14.2	Invariância de Calibre na Mecânica Quântica . . . . .	p. 41
1.14.2.1	Introdução do Eletromagnetismo na Mecânica Quântica de Schrödinger . . . . .	p. 41
1.14.3	O princípio de Calibre . . . . .	p. 44
<b>2</b>	<b>TEORIA DE CAMPOS COM ESTATÍSTICA FRACIONÁRIA</b>	p. 47
2.1	Introdução . . . . .	p. 47
2.2	Teoria de Campos Planar . . . . .	p. 50
2.2.1	Teoria de Calibre Topologicamente Massiva . . . . .	p. 50
2.2.2	Férmions em 2+1 dimensões . . . . .	p. 51
2.2.3	Simetrias Discretas . . . . .	p. 52
2.2.4	Álgebra de Poincaré em 2+1 dimensões . . . . .	p. 53
2.3	O sistema carga-fluxo e suas simetrias . . . . .	p. 54
2.4	O Termo de Chern-Simons com Acoplamento Mínimo . . . . .	p. 56
2.5	Chern-Simons Acoplado a Campos de Matéria: Uma Visão Geométrica . . . . .	p. 61
<b>3</b>	<b>O TERMO DE CHERN-SIMONS COM ACOPLAMENTO NÃO- MÍNIMO</b>	p. 66
	<b>CONCLUSÃO</b>	p. 73

**Apêndice A – Formas Diferenciais e Redefinição de Campos** p. 74

**Referências** p. 78

# INTRODUÇÃO

A Física em 2+1 dimensões apresenta aspectos muito interessantes. Tanto do ponto de vista teórico, pois permite testar a consistência matemática de nossas teorias, como do ponto de vista experimental, pois, como veremos, há fenômenos que ocorrem com simetria total no eixo  $Oz$  de tal forma que podemos considerar apenas duas dimensões espaciais, o espaço-tempo tridimensional tem recebido cada vez mais atenção dos cientistas. Por conta disso nós resolvemos dedicar esta dissertação de mestrado a este assunto tão fértil, tão amplo e, por isso mesmo, tão fascinante.

Em três dimensões espaciais todas as partículas da natureza estão divididas conforme o tipo de estatística que obedecem. Os *férmions*, que recebem este nome porque obedecem à estatística de Fermi-Dirac, são partículas cujo spin é dado por múltiplos semi-inteiros de  $\hbar$ . Estas partículas se caracterizam pelo fato de que a função de onda de muitos corpos a elas associadas troca de sinal ao serem permutadas as posições de duas partículas quaisquer. Já os bósons, que recebem este nome por obedecerem à estatística de Bose-Einstein, são partículas cujo spin é dado por múltiplos inteiros de  $\hbar$ . Quando se permuta duas partículas bosônicas a função de onda de muitos corpos não sofre alteração alguma.

Em 2+1 dimensões tudo é bem diferente. Quando se acopla um campo de calibre a um termo de Chern-Simons a natureza deste impõe certos vínculos que levam a um termo de spin anômalo no operador momento angular. O valor do spin não é mais múltiplo de  $\hbar$ , podendo assumir um valor arbitrário. As partículas com esta propriedade são chamadas de *ânions* e em 1982 mostrou-se que o conjunto formado por partículas carregadas e vórtices em 2+1 dimensões e conjuntos carga-tubo de fluxo em 3+1 se comportam assim. Neste contexto uma transformação contínua entre férmions e bosons é possível a partir da variação da constante adequada. Em nossa dissertação vamos procurar mostrar como isso acontece.

No capítulo 1 faremos uma descrição do método adotado para o tratamento de sistemas com vínculos, a saber, o método de Dirac. Este método é geral, podendo ser usado em qualquer tipo de sistema em qualquer dimensão. Ele é apropriado para tratar sistemas hamiltonianos de tal forma que permite remover as inconsistências a que os vínculos

levam ao se calcular os parênteses de Poisson de grandezas que os contêm.

No segundo capítulo abordaremos o problema propriamente dito. Começando por uma descrição um tanto quanto caricata das particularidades de se trabalhar em duas dimensões espaciais e uma temporal chegaremos até o modelo apresentado em agosto de 1988 contendo a propriedade que define os ânions, a estatística fracionária. Neste modelo, o operador de momento angular canônico contém um termo a mais que é proporcional ao quadrado da carga elétrica total.

O terceiro capítulo será usado para apresentar os resultados obtidos neste trabalho de mestrado. Usando um acoplamento diferente do descrito acima nós encontramos resultados que concordam entre si. Através da constante de acoplamento que usamos podemos rastrear a influência do novo termo. Além do termo proporcional ao quadrado da carga, encontramos um termo proporcional à energia magnética contida no sistema, ressaltando que isto só é possível devido ao tipo de associação entre carga e campo magnético que só existe em 2+1 dimensões e que já podia ser esperado em virtude das conclusões do trabalho de 1982.

Para o apêndice resta a dedução do termo referido acima e a demonstração de seu caráter não trivial.

# 1 SISTEMAS HAMILTONIANOS COM VINCULOS

## 1.1 Introdução

A quantização de sistemas Hamiltonianos com vínculos por nós empregada nesta tese foi desenvolvida notadamente pelo físico inglês de descendência francesa Paul Adrien Maurice Dirac (1), a quem chamaremos apenas de Dirac daqui para a frente.

Dirac percebeu que a existência dos vínculos implica necessariamente que nem todos os graus de liberdade do sistema tenham a mesma importância física. Na realidade, ele mostrou, e nós o repetiremos aqui, que a cada vínculo independente corresponde um grau de liberdade espúrio, que deve ser removido para se poder quantizar devidamente um tal sistema. Ele, então, procurou desenvolver uma maneira sistemática de fazer a referida remoção dos graus de liberdade não interessantes fisicamente. Alguns outros autores levaram mais adiante as idéias de Dirac. Dentre estes consideramos de maior relevância para os nossos estudos Marc Henneaux e Claudio Teitelboim em (2) e D. M. Gitman e I. V. Tyutin em (3). Dessa forma se chegou ao que chamamos hoje de Método de Dirac de Quantização de Sistemas Hamiltonianos com Vínculos. Este método será esboçado no presente capítulo desta dissertação.

## 1.2 Invariância de calibre - Vínculos

Nesta seção procuraremos esclarecer a relação entre invariância de calibre de uma teoria física e a existência ou não de vínculos nessa teoria. Para tanto vamos explicitar o que entendemos por invariância de calibre.

Para descrevermos um sistema físico precisamos estabelecer um sistema de coordenadas de referência no qual anotaremos os valores das propriedades do sistema em cada instante de tempo. Por exemplo, no caso de um oscilador harmônico unidimensional é

preciso de uma coordenada espacial onde anotaremos o valor da posição da partícula em cada instante, e de uma coordenada de momento onde anotaremos o valor do momento da partícula em cada instante de tempo. Temos, assim, um sistema de coordenadas bidimensional. A escolha da origem desse sistema pode ser feita de maneira completamente arbitrária. Qualquer que seja a posição de equilíbrio da partícula o movimento dela será sempre o de oscilação em torno daquele ponto sem importar o seu valor numérico. Da mesma forma podemos escolher a velocidade do sistema de referência (lembramos que este sistema é clássico) de forma a alterar arbitrariamente valor numérico do momento da partícula, mas as equações de movimento serão as mesmas de forma que, fisicamente, nada foi alterado. Dizemos então que as coordenadas deste sistema são invariantes por uma transformação de calibre, ou seja, são independentes do sistema de referência, de forma a serem consideradas variáveis verdadeiramente físicas.

Entretanto existem teorias em que algumas variáveis dinâmicas precisam ser especificadas em um sistema arbitrário de referência para que se possa efetuar os cálculos e obter resultados físicos. Tais teorias são chamadas Teorias de Calibre. Estas teorias têm como propriedade o fato de suas equações de movimento conterem funções arbitrárias do tempo devido ao fato de nem todas as variáveis canônicas serem independentes, ou seja, da existência de vínculos entre elas. Tornaremos isso mais claro adiante assim como daremos precisão ao conceito de vínculo. Concluimos o raciocínio dizendo que toda teoria de calibre é um sistema hamiltoniano com vínculos e alertando para o fato de que nem sempre podemos associar os vínculos de uma teoria a uma simetria de calibre.

### 1.3 Lagrangeana - Vínculos Primários

Tomaremos como ponto de partida o princípio da ação mínima. Assumimos a existência de uma ação integral que depende do movimento de modo que, quando se varia o movimento e se exige que a ação seja estacionária, as equações do movimento são obtidas. Dirac escolheu começar assim porque esta é a maneira mais fácil de tornar a teoria relativística, pois isto só depende das propriedades da lagrangeana.

Denotamos a ação integral por

$$I = \int L(q, \dot{q}) dt. \quad (1.1)$$

Variando a ação obtemos as  $N$  equações de Euler-Lagrange que determinam o movi-

mento para  $N$  graus de liberdade;

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^n}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (1.2)$$

Se efetuarmos o cálculo da derivada temporal obteremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \right) &= \frac{\partial^2 L}{\partial q^{n'} \partial \dot{q}^n} \frac{dq^{n'}}{dt} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n} \frac{d\dot{q}^{n'}}{dt} \\ &= \frac{\partial^2 L}{\partial q^{n'} \partial \dot{q}^n} \dot{q}^{n'} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n} \ddot{q}^{n'}, \end{aligned}$$

$$\ddot{q}^{n'} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n} = \frac{\partial L}{\partial q^n} - \dot{q}^{n'} \frac{\partial^2 L}{\partial q^{n'} \partial \dot{q}^n}. \quad (1.3)$$

Para que seja possível obter univocamente  $\ddot{q}^n$  é necessário que

$$\left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n} \right| \neq 0 \quad (1.4)$$

O determinante da matriz (hessiana) acima é chamado de hessiano e quando ele for nulo não se poderá determinar  $\ddot{q}^n$  de maneira única, e funções arbitrárias do tempo aparecerão. A teoria é, então, dita singular.

Para se chegar ao formalismo hamiltoniano é necessário definir os momentos canonicamente conjugados às coordenadas  $q^n$ ,

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}. \quad (1.5)$$

Usando a equação (1.5) podemos escrever a equação (1.4) como

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial \dot{q}^1} & \frac{\partial p_1}{\partial \dot{q}^2} & \dots & \frac{\partial p_1}{\partial \dot{q}^N} \\ \frac{\partial p_2}{\partial \dot{q}^1} & \frac{\partial p_2}{\partial \dot{q}^2} & \dots & \frac{\partial p_2}{\partial \dot{q}^N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_N}{\partial \dot{q}^1} & \frac{\partial p_N}{\partial \dot{q}^2} & \dots & \frac{\partial p_N}{\partial \dot{q}^N} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Vemos a partir da equação (1.3) que a nulidade do hessiano implica necessariamente na existência de relações do tipo

$$\Phi_m(q, p) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (1.6)$$

Agora já podemos ver melhor como, devido aos vínculos contidos nessas teorias, funções arbitrárias do tempo aparecem nas soluções das equações de movimento nas teorias de calibre. A equação (1.6), que também pode conter derivadas de  $p_n$  e  $q_n$ , é nossa definição de vínculo. Ressaltamos ainda que quando os  $p_n$  são substituídos em (1.6) por sua definição (1.5) obtém-se uma identidade. Daqui em diante não usaremos mais o índice  $n$  deixando claro que  $q$  e  $p$  devem sempre ser entendidos com se referindo às  $N$  variáveis  $q$  e às  $N$   $p$ .

Os  $\Phi_m(q, p)$  são chamados de *vínculos primários* porque não usam as equações de Euler-Lagrange (1.2) nem impõem restrições em  $q$  ou  $\dot{q}$ .

Algumas considerações de natureza matemática devem ser feitas aqui. Assumimos que o posto da matriz hessiana é constante em todo o espaço  $(q, \dot{q})$  e que as relações (1.6) definem uma subvariedade suavemente submersa no espaço de fases. Se o posto da matriz hessiana é  $N - M'$ , então existem  $M' < M$  relações independentes entre os  $\Phi_m(q, p)$ . Daí vemos que a subvariedade definida por (1.6), conhecida como superfície dos vínculos primários, tem dimensão  $2N - M'$ . A existência dos  $\Phi_m(q, p)$  implica que a transformação inversa dos  $p$ 's para os  $\dot{q}$ 's não é unívoca. Dito de outra forma, a definição dos  $p$ 's é um mapeamento de uma variedade de dimensão  $2N$  para uma de dimensão  $2N - M'$ . Para fazer com que essa transformação seja unívoca é preciso introduzir pelo menos  $M'$  parâmetros extras. Estes parâmetros aparecerão como multiplicadores de Lagrange.

## 1.4 Condições de Regularidade

Condições de regularidade são restrições impostas nos vínculos (1.6) para se passar para o formalismo hamiltoniano. Nesta altura tais condições podem parecer um pouco obscuras mas seu uso futuro justifica completamente sua inclusão neste ponto de nosso trabalho.

Podemos colocar as condições de regularidade de várias formas e o faremos de pelo menos três maneiras diferentes (embora equivalentes) para facilitar a compreensão:

- As funções  $\Phi_m(q, p)$  podem ser localmente tomadas como  $M'$  coordenadas (já que, delas todas,  $M'$  são independentes por hipótese) de um novo e regular sistema de coordenadas na superfície dos vínculos (1.6);

- Os gradientes  $d\Phi_1, \dots, d\Phi_{M'}$  são localmente independentes entre si na superfície dos vínculos;
- As variações  $\delta\Phi_m$  são de ordem  $\epsilon$  para variações arbitrárias  $\delta q$  e  $\delta p$  de ordem  $\epsilon$ .

Com a ajuda destas condições, provaremos dois teoremas que serão muito importantes logo mais adiante.

**Teorema 1** *Se uma função  $G$  do espaço de fases se anula na superfície  $\Phi_m = 0$ , então  $G = g^m \Phi_m$  para  $g^m$  arbitrárias.*

*Demonstração:* Se é possível escolher localmente  $\Phi_{M'}$  entre as  $\Phi_m$  como as primeiras coordenadas de um sistema  $(y_{m'}, x_\alpha)$ , com  $y_{m'} \equiv \Phi_{m'}$ , então, por hipótese  $G(0, x) = 0$ , daí

$$G(y, x) = \int_0^1 \frac{dG(yt, x)}{dt} dt = \int_0^1 \frac{dG(yt, x)}{d(yt)} (\dot{y}t) dt = y_{m'} \int_0^1 dG(yt, x) = g^m \Phi_m.$$

**Teorema 2** *Se  $\lambda_n \delta q^n + \mu^n \delta p_n = 0$  para variações arbitrárias  $\delta q^n$ ,  $\delta p_n$  tangentes à superfície dos vínculos, então*

$$\lambda_n = u^m \frac{\partial \Phi_m}{\partial q^n} \quad e \quad \mu^n = u^m \frac{\partial \Phi_m}{\partial p_n}.$$

*A igualdade aqui é válida na superfície dos vínculos.*

*Demonstração:* Seja  $G$  uma função tal que  $\delta G = 0$  na superfície dos vínculos. Pelo teorema 1, temos que  $\delta G$  é uma função dos  $\Phi_m(q, p)$ , daí

$$\delta G = \frac{\partial G}{\partial \Phi_m} \delta \Phi_m = \frac{\partial G}{\partial \Phi_m} \left( \frac{\partial \Phi_m}{\partial q^n} \delta q^n + \frac{\partial \Phi_m}{\partial p_n} \delta p_n \right),$$

demonstrando o teorema.

## 1.5 O Hamiltoniano Canônico

O Hamiltoniano é definido como sendo dado pela transformação de Legendre

$$H(q, p) = \dot{q}p - L(q, \dot{q}). \quad (1.7)$$

Repare que a definição acima deveria fazer com que a função  $H$  fosse uma função das variáveis  $q$  e  $\dot{q}$ . Entretanto, como veremos a seguir, isto não acontece. Calculemos uma variação total na função  $H$ .

$$\begin{aligned}\delta H &= \delta(\dot{q})p + \dot{q}\delta(p) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q}\delta(q) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}}\delta(\dot{q}) \\ &= \dot{q}\delta(p) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q}\delta(q)\end{aligned}\quad (1.8)$$

Da equação (1.8) podemos ver que realmente a função hamiltoniana só depende de  $q$  e  $p$ ;

$$H \equiv H(q, p).$$

Devemos ter em mente que  $H(q, p)$  não é unicamente definido a não ser na subvariedade (1.6) já que as variações  $\delta(p)$  devem preservar tais equações. Qualquer combinação linear das equações (1.6) pode ser adicionada ao hamiltoniano sem alterar de maneira nenhuma a física por ele descrita, uma vez que cada um dos  $\Phi_m(q, p)$  se anula. Portanto, o hamiltoniano mais geral que se pode obter é a função definida pela transformada de Legendre (1.7) mais uma combinação linear dos vínculos (1.6)

$$H \rightarrow H + C^m(q, p)\Phi_m(q, p).\quad (1.9)$$

Vamos procurar esclarecer um pouco mais este ponto. Se encararmos  $H$  como  $H(q, p)$ , teremos

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial q^n}\delta q^n + \frac{\partial H}{\partial p_n}\delta p_n.\quad (1.10)$$

Somando (1.10) à equação (1.8), obtemos

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q^n} + \frac{\partial L}{\partial q^n}\right)\delta q^n + \left(\frac{\partial H}{\partial p_n} - \dot{q}^n\right)\delta(p_n) = 0.$$

Pelo teorema 2,

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + u^m \frac{\partial \Phi_m}{\partial p_n}; \quad -\frac{\partial L}{\partial q^n} \Big|_{\dot{q}} = \frac{\partial H}{\partial q^n} \Big|_p + u^m \frac{\partial \Phi_m}{\partial q^n}. \quad (1.11)$$

Vamos supor que todos os  $\Phi_m(q, p)$  sejam independentes, ou seja,  $M = M'$ . Isto implica que os vetores  $\frac{\partial \Phi_m}{\partial p_n}$  também são independentes. Neste caso, a primeira das equações acima tem uma grande importância pois ela permite que, a partir do conhecimento dos  $u^m$ , se possa determinar unicamente os  $\dot{q}^n$ .

Vamos encarar os  $u^m$  como coordenadas das imagens de um dado  $p_n$  no espaço  $(q, \dot{q})$ . Definindo a transformação de Legendre do espaço  $(q, \dot{q})$  para a superfície  $\Phi_m(q, p) = 0$  do espaço  $(q, p, u)$  em termos de

$$\begin{cases} q^n = q^n \\ p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \\ u^m = u^m(q, p) \end{cases},$$

vemos que esta transformação entre espaços de dimensão  $2N$  é perfeitamente inversível:

$$\begin{cases} q^n = q^n \\ \dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n} \\ \Phi_m(q, p) = 0 \end{cases}.$$

É importante notar que se  $M' < M$  as coordenadas  $u^m$  serão funções não só de  $q$  e  $\dot{q}$  mas também de  $\alpha = M - M'$  parâmetros.

## 1.6 Princípio da Ação na Forma Hamiltoniana

As equações de Lagrange podem ser postas sob a forma hamiltoniana

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + u^m \frac{\partial \Phi_m}{\partial p_n}; \quad -\dot{p}_n = \frac{\partial H}{\partial q^n} + u^m \frac{\partial \Phi_m}{\partial q^n}; \quad \Phi_m(q, p) = 0. \quad (1.12)$$

Elas também podem ser obtidas através do princípio variacional

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}^n p_n - H - u^m \Phi_m) dt = 0. \quad (1.13)$$

Vamos explicitar como. Fazendo a variação da equação (1.13) temos

$$\begin{aligned}
\delta \int L_{\text{total}} dt &= \int \left[ \delta \dot{q}^n p_n + \dot{q}^n \delta p_n - \left( \frac{\partial H}{\partial q^n} \delta q^n + \frac{\partial H}{\partial p_n} \delta p_n \right) \right] dt \\
&\quad - \int [\delta u^m \Phi_m - u^m \delta \Phi_m] dt \\
&= \int \left[ \delta p_n \left( \dot{q}^n - \frac{\partial H}{\partial p_n} - \frac{\partial \Phi_m}{\partial p_n} \right) \right] dt \\
&\quad - \int \left[ \left( p_n \frac{d}{dt} - \frac{\partial H}{\partial q^n} - u^m \frac{\partial \Phi_m}{\partial q^n} \right) \delta q^n - \delta u^m \Phi_m \right] dt \\
&= 0
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Dessa forma podemos identificar claramente a primeira e a terceira das equações (1.12). Fazendo uma integral por partes e lembrando que as variações arbitrárias  $\delta q^n$ ,  $\delta p_n$  e  $\delta u^m$  estão sujeitas às condições  $\delta q^n(t_1) = \delta q^n(t_2) = 0$ , obtemos a segunda das equações (1.12).

À luz do princípio variacional fica mais fácil entender porque a teoria é invariante sob uma transformação do tipo (1.9). Basta observar que uma tal transformação não vai além de uma renomeação nos parâmetros multiplicadores de Lagrange  $u^m$ .

As equações de movimento para qualquer função  $F \equiv F(q, p)$  é, então, dada por

$$\begin{aligned}
\dot{F} &= \frac{\partial F}{\partial q^n} \dot{q}^n + \frac{\partial F}{\partial p_n} \dot{p}_n \\
&= \frac{\partial F}{\partial q^n} \left( \frac{\partial H}{\partial p_n} + u^m \frac{\partial \Phi_m}{\partial p_n} \right) - \frac{\partial F}{\partial p_n} \left( \frac{\partial H}{\partial q^n} + u^m \frac{\partial \Phi_m}{\partial q^n} \right) \\
\dot{F} &= \{F, H\} + u^m \{F, \Phi_m\}.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Aqui o operador  $\{ \ , \ }$  não é nada mais do que o Parênteses de Poisson clássico (4)

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q^n} \frac{\partial B}{\partial p_n} - \frac{\partial A}{\partial p_n} \frac{\partial B}{\partial q^n}.$$

## 1.7 Igualdades Fraca e Forte

Ao lidar com o formalismo hamiltoniano e, especificamente, com parênteses de Poisson é necessário tomar algum cuidado ao se implementar os vínculos (1.6).

Os vínculos devem ser entendidos como condições a serem satisfeitas pelas variáveis dinâmicas da teoria e não como identidades que podem ser usadas a qualquer instante. Por exemplo, se calcularmos  $\{\Phi_m(q, p), G(q, p)\}$ , sendo  $G(q, p)$  uma função qualquer, não necessariamente obteremos um resultado nulo apesar de termos, sempre  $\Phi_m(q, p) = 0$ , quaisquer que sejam  $m$  ou o ponto do espaço de fases  $(q, p)$ . Utilizar as condições (1.6) antes de calcular todos os parênteses de Poisson da teoria pode levar a erros. Portanto devemos distinguir a maneira como os vínculos se anulam da maneira usual. Para isso usamos o símbolo  $\approx$ , chamado de símbolo de *igualdade fraca*, para denotar a propriedade dos vínculos, distinguindo-a, assim, da igualdade usual, chamada de *igualdade forte*.

Daqui para frente deveremos entender a equação (1.6) como sendo dada por

$$\Phi_m(q, p) \approx 0, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (1.16)$$

Dito de outra forma: igualdade forte é aquela que é válida em todo o espaço de fases; igualdade fraca só é válida na superfície (1.6).

Destaquemos ainda que, pelo teorema 1, se  $F$  e  $G$  são fracamente iguais, então estas duas funções diferem por uma combinação linear dos vínculos (1.16). À volta também vale, ou seja, se duas funções diferem por uma combinação linear dos vínculos, elas são fracamente iguais. Em linguagem matemática,

$$F \approx G \Leftrightarrow F - G = c^j(q, p)\Phi_j. \quad (1.17)$$

## 1.8 Vínculos Secundários

Tendo estabelecido as equações de movimento, ou seja, a evolução temporal para qualquer grandeza física através das equações (1.15), nós agora vamos analisar as conseqüências dessas equações.

Para manter a consistência da teoria faz-se necessário que os vínculos (1.16) se conservem com o passar do tempo. Logo deveremos ter  $\dot{\Phi}_m(q, p) \approx 0$  para qualquer valor de

$m$ , ou seja;

$$\{\Phi_m(q, p), H\} + u^{m'} \{\Phi_m(q, p), \Phi_{m'}\} \approx 0. \quad (1.18)$$

Pode ser que as equações acima levem à identidades do tipo  $1 = 1$ , neste caso não há problema nenhum e saberemos prontamente que aquele vínculo (aquele valor particular de  $m$ ) não gerará novos aspectos físicos para o problema. Mas e se em vez disso obtivermos uma situação do tipo  $1 = 0$ ? Bem agora tudo é diferente pois há algo claramente inconsistente na teoria. Vamos aproveitar este ponto e fazer algumas considerações sobre a função Lagrangeana de um determinado sistema. Esta função, importantíssima pois determina completamente as equações de movimento do sistema, contém uma certa arbitrariedade uma vez que a ela pode ser adicionada uma derivada total com relação ao tempo sem alterar a física por ela descrita (5). Isto pode ser visto facilmente notando que o principio variacional de Hamilton exige que as variações nas coordenadas sejam nulas nas extremidades do movimento considerado implicando na anulação do termo que pode ser integrado totalmente. Entretanto, a arbitrariedade na escolha da Lagrangeana do sistema termina aí. Há que se ter o cuidado de usar Lagrangeanas que levem a equações de movimento consistentes. Caso contrário, situações como  $1 = 0$  podem ocorrer.

É possível, ainda, que a equação acima resulte numa restrição sobre as funções  $u^m$ , mas também pode gerar uma relação entre os  $p$ 's e  $q$ 's independente dos outros vínculos. Neste caso, dizemos que esta relação é um *vínculo secundário*. Secundário porque difere dos primários no sentido de que aqueles não requerem as equações do movimento (1.15) como estes, advindo somente a definição dos momentos (1.5). Quando vínculos secundários são gerados é necessário impor a eles as mesmas condições impostas aos primários e, assim, sucessivamente até que não se tenha mais vínculos a serem descobertos, ou seja, todas as equações (1.18) gerem identidades ou restrições sobre os  $u^m$ . Sobre estas restrições falaremos mais na próxima seção. Os vínculos secundários serão denotados por

$$\Phi_k(q, p) \approx 0, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (1.19)$$

Os vínculos da teoria serão agrupados todos (tanto os primários como os secundários) numa mesma notação já que esta distinção, como será visto na seção 1.11.3, não é de primeira importância

$$\Phi_j(q, p) \approx 0, \quad j = 1, 2, \dots, M + 1, \dots, M + K = J. \quad (1.20)$$

Assumimos que as mesmas condições de regularidade (veja seção 1.4) valem para os (1.20).

## 1.9 Restrições nos Multiplicadores de Lagrange

Como já vimos, as restrições nos  $u^m$  são

$$\{\Phi(q, p)_j, H\} + u^m \{\Phi(q, p)_j, \Phi_m\} \approx 0, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (1.21)$$

Tais equações podem ser vistas como equações lineares não homogêneas nos  $u^m$ , de forma que a solução mais geral  $u^m = u^m(q, p)$  é dada por uma solução particular da equação não-homogênea somada à solução geral da equação homogênea (6). Uma tal solução deve existir pois o contrário significaria que a Lagrangeana do sistema não leva à equações de movimento consistentes, e nós não estamos considerando este caso. Naturalmente, a solução não é única. Não chega nem perto disso.

A equação homogênea é dada por

$$V^m \{\Phi_j, \Phi_m\} \approx 0. \quad (1.22)$$

A solução mais geral é uma combinação linear de todas as soluções independentes  $V_a^m(q, p)$ , onde  $a = 1, 2, \dots, A$ . Para que o número  $A$  de soluções independentes seja o mesmo para todos os  $(q, p)$ , assumimos que o posto da matriz  $\{\Phi_j, \Phi_m\}$  é constante em todo o espaço  $(q, \dot{q})$ .

Se  $U^m$  for uma solução particular da equação não-homogênea, então

$$u^m \approx U^m + v^a V_a^m. \quad (1.23)$$

Com relação ao hamiltoniano (1.9), vamos substituir os coeficientes dos vínculos (1.6) pelas soluções encontradas

$$\begin{aligned} H_T &= H + U^m \Phi_m + v^a V_a^m \Phi_m \\ &= H' + v^a \Phi_a, \end{aligned} \quad (1.24)$$

com

$$H' = H + U^m \Phi_m \text{ e} \quad (1.25)$$

$$\Phi_a = V_a^m \Phi_m. \quad (1.26)$$

Assim as equações de movimento ficam

$$\dot{F} = \{F, H_T\}. \quad (1.27)$$

$H_T$  é chamado de hamiltoniano total.

Conforme o exposto acima os coeficientes  $v^a$  são completamente arbitrários. Como resultado da análise acima, nós implementamos todas as condições de consistência da teoria e ainda temos funções arbitrárias do tempo nas equações de movimento, mostrando que, em teorias com vínculos as condições iniciais não determinam o resto do movimento como em teorias sem vínculos.

## 1.10 Funções de Primeira e Segunda Classes

Mais algumas definições são necessárias para um melhor apreciação do poder do método de Dirac para a abordagem de sistemas hamiltonianos com vínculos.

Como já dissemos, a distinção entre vínculos primários e secundários não é importante para o nosso estudo. Bem diferente é o caso da distinção entre vínculos de primeira e segunda classe. Ela tem um papel fundamental para nós.

Funções de *primeira classe* são aquelas que têm parênteses de Poisson fracamente nulo com cada um dos (1.20). Ou seja, a função  $F(q, p)$  é dita de primeira classe se

$$\{F, \Phi_j\} \approx 0, \quad j = 1, 2, \dots, J. \quad (1.28)$$

Caso contrário, a função  $F(q, p)$  é dita de *segunda classe*. Aos poucos vai ficar mais claro porque esta definição é tão importante.

A respeito desta definição vamos demonstrar o seguinte teorema, que pode ser entendido como uma generalização do teorema de Poisson da mecânica clássica, que afirma que

o parênteses de Poisson entre duas constantes do movimento (que possuem parênteses de Poisson nulo com o hamiltoniano) também é uma constante do movimento(4).

**Teorema 3** O parênteses de Poisson de duas funções de primeira classe é também de primeira classe.

*Demonstração:* Sejam  $A$  e  $B$  tais que  $\{A, \Phi_j\} = a_j^k \Phi_k$  e  $\{B, \Phi_l\} = b_l^m \Phi_m$ . Pela identidade de Jacobi (4, 5),

$$\begin{aligned}
 \{\{A, B\}, \Phi_s\} &= \{A, \{B, \Phi_s\}\} - \{B, \{A, \Phi_s\}\} \\
 &= \{A, b_s^m \Phi_m\} - \{B, a_s^m \Phi_m\} \\
 &= \{A, b_s^m\} \Phi_m + b_s^m \{A, \Phi_m\} - \{B, a_s^m\} \Phi_m - a_s^m \{B, \Phi_m\} \\
 &= \{A, b_s^m\} \Phi_m + b_s^k a_k^m \Phi_m - \{B, a_s^m\} \Phi_m - a_s^k b_k^m \Phi_m \\
 &\approx 0.
 \end{aligned}$$

É importante notar que tanto o hamiltoniano  $H'$  definido por (1.25) quanto os  $\Phi_a$  definidos por (1.26) são funções de primeira classe. Dessa forma o hamiltoniano total (1.24) é separado em duas partes ambas de primeira classe. A primeira delas (1.25) é responsável por satisfazer as condições de consistência da teoria em si. Já a segunda, (1.26), contém os termos arbitrários característicos das teorias com vínculos.

## 1.11 Vínculos de Primeira Classe: Geradores de Transformações de Calibre

Nesta seção vamos tentar entender fisicamente os resultados até aqui obtidos.

Nós partimos de uma Lagrangeana geral que supomos descrever um dado sistema hamiltoniano com vínculos. Chegamos, através de uma transformada de Legendre, ao hamiltoniano do problema e fizemos todas as considerações que nos pareceram necessárias para encontrar a solução mais geral possível para as equações de movimento. Tal solução contém termos que dependem do tempo que são completamente arbitrários de forma a deixar claro que as condições iniciais do problema não determinam unicamente sua evolução. Dito de outra forma, no início do movimento nós conhecemos todas as variáveis  $q$  e  $p$  e estas determinam as propriedades físicas iniciais do sistema, ou seja, o estado físico inicial. Com o passar do tempo nós não somos mais capazes de determinar os  $q$  e os  $p$

por causa das funções arbitrárias  $v^a$  que aparecem. Entretanto, nós sabemos da mecânica clássica que o estado físico final deve ser determinado pelo estado inicial. Concluimos que, para acomodar o determinismo e a arbitrariedade dos  $v^a$  deve haver vários conjuntos  $(q, p)$  que correspondem ao mesmo estado físico. Nos propomos, agora, a procurar tais conjuntos.

### 1.11.1 Transformações de Calibre

Na discussão no começo desta seção, vimos que o estado físico final é o mesmo quaisquer que sejam os valores das funções arbitrárias  $v^a$  e, portanto, a distinção entre estados que diferem entre si somente pelos valores das  $v^a$  é fisicamente irrelevante. Queremos dizer com isso que qualquer transformação nas coordenadas que gere alterações somente nas  $v^a$  é considerada uma transformação que não altera o estado físico, ou seja, uma *transformação de calibre*.

Para entendermos como funciona este tipo de transformação, vamos tomar valores específicos das coordenadas  $q$  e  $p$  no instante  $t$  e ver o que acontece a uma variável física qualquer  $F(q, p, t)$  depois de um pequeno intervalo de tempo  $\delta t$ . Vejamos.

$$\begin{aligned} F(t + \delta t) &= F(t) + \dot{F}\delta t \\ &= F(t) + \{F, H_T\}\delta t \\ &= F(t) + \delta t[\{F, H'\} + v^a\{F, \Phi_a\}]. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Os parâmetros  $v^a$  são, como já sabemos, completamente arbitrários de modo que temos a intenção de repetir o processo usando desta vez parâmetro diferentes e verificar o que acontece. A diferença será dada por

$$\Delta F(t + \delta t) = \delta t(v^a - w^a)\{F, \Phi_a\}. \quad (1.30)$$

A equação acima pode ser escrita como

$$\Delta F(t + \delta t) = \epsilon^a\{F, \Phi_a\}, \quad (1.31)$$

onde

$$\epsilon^a = \delta t(v^a - w^a) \quad (1.32)$$

é um número pequeno e arbitrário.

Aqui nós usamos uma função  $F(q, p, t)$  que é a mais geral possível. Vê-se, então, claramente que qualquer uma das variáveis canônicas pode ser modificada por uma transformação do tipo (1.31), sem que o estado físico seja alterado.

É importante notar que esta mudança nas variáveis hamiltonianas é equivalente a uma *transformação de contato* com uma *função geratriz* (4, 5) dada por  $\epsilon^a \Phi_a$ .

Pelo que foi exposto até aqui, vemos que as funções  $\Phi_a$  que apareceram na teoria como vínculos primários de primeira classe podem ser vistas como funções geratrizes de transformações de calibre nessa teoria.

Acontece que as (1.31) não são as únicas transformações de calibre possíveis. Se nós fizermos duas dessas transformações, a primeira gerada por  $\epsilon^a \Phi_a$  e a segunda por  $\gamma^{a'} \Phi_{a'}$ , teremos

$$F_1(t + \delta t) = F(t) + \epsilon^a \{F, \Phi_a\} + \gamma^{a'} \{F + \epsilon^a \{F, \Phi_a\}, \Phi_{a'}\}.$$

Se invertermos a ordem das transformações teremos

$$F_2(t + \delta t) = F(t) + \gamma^{a'} \{F, \Phi_{a'}\} + \epsilon^a \{F + \gamma^{a'} \{F, \Phi_{a'}\}, \Phi_a\}.$$

Na equação acima nós desprezamos os termos de segunda ordem ( $\epsilon^2$  e  $\gamma^2$ ). Calculando a variação como de costume obtemos

$$\Delta F = \epsilon^{a'} \gamma^a [\{\{F, \Phi_a\}, \Phi_{a'}\} - \{\{F, \Phi_{a'}\}, \Phi_a\}]. \quad (1.33)$$

Usando a identidade de Jacobi, temos

$$\Delta F = \epsilon^{a'} \gamma^a \{F, \{\Phi_a, \Phi_{a'}\}\}. \quad (1.34)$$

A variação acima também não promove nenhuma alteração no estado físico final pois é composta de duas outras com esta propriedade. Logo  $\{\Phi_a, \Phi_{a'}\}$  também gera transformações de calibre.

A situação agora é a seguinte: os vínculos primários de primeira classe  $\Phi_a$  geram transformações de calibre, os parênteses de Poisson desses vínculos entre si  $\{\Phi_a, \Phi_{a'}\}$  também geram transformações de calibre mas estes, embora sejam vínculos de primeira classe (veja teorema 3), não necessitam ser primários. Como resultado é possível que vínculos secundários sirvam de geradores para transformações de calibre.

Há ainda um resultado importante a ser provado: os parênteses de Poisson do Hamiltoniano com os vínculos de primeira classe  $\{H', \Phi_a\}$  também geram transformações de calibre. Para mostrarmos este resultado vamos fazer o seguinte: primeiro nós faremos na função  $F$  uma transformação de calibre denotado por  $\delta_C$  e depois uma evolução temporal ( $\delta_t$ ) com o Hamiltoniano (1.24). Em seguida nós voltamos a realizar as duas operações só que, desta vez, na ordem inversa e então calculamos a diferença. Temos, então

$$\begin{aligned}
\Delta F(t) &\equiv \delta_t(\delta_C F(t)) - \delta_C(\delta_t F(t)) \\
&= \delta_t(\epsilon^a \{F(t), \Phi_a\}) - \delta_C(F(t) + \{F(t), H_T\} \delta t) \\
&= \epsilon^a \{F(t), \Phi_a\} - \{\epsilon^a \{F(t), \Phi_a\}, H_T\} \delta t - \epsilon^a \{F(t), \Phi_a\} - \\
&\quad - \delta_C(\{F(t), H_T\} \delta t) \\
&= \{\epsilon^a \{F(t), \Phi_a\}, H'\} \delta t + \{\epsilon^a \{F(t), \Phi_a\}, v^a \Phi_a\} \delta t - \delta_C(\{F(t), H'\} \delta t) + \\
&\quad + \{\{F(t), v^a \Phi_a\} \delta t\} \\
&= \{\epsilon^a \{F(t), \Phi_a\}, H'\} \delta t - \epsilon^a \delta t \{\{F(t), H'\}, \Phi_a\} \\
&= \{F(t), \{\Phi_a, H'\}\} \epsilon^a \delta t.
\end{aligned} \tag{1.35}$$

No penúltimo passo nós, como fizemos até aqui, desprezamos um termo de ordem 2 nos parâmetros da transformação de calibre e no último usamos a identidade de Jacobi.

Até este ponto nós fomos capazes de provar que os vínculos de primeira classe geram transformações de calibre. Já os últimos resultados nos levam a crer que também vínculos secundários gerariam este tipo de transformação uma vez que os vínculos de segunda classe aparecem através das equações  $\{\Phi_a, \Phi_{a'}\}$  ou  $\{H', \Phi_a\}$ . Entretanto não se pode afirmar, como conjecturou Dirac, que *todos os vínculos de primeira classe estão associados a transformações de calibre*. É possível, inclusive, encontrar contra-exemplos à esta

conjetura. Entretanto há muitas boas razões para tomá-la como verdadeira ao se tentar desenvolver um método geral de quantização de sistemas com vínculos de tal forma que preferimos postular a conjetura de Dirac. Para começar podemos dizer que a distinção entre vínculos primários e secundários, sendo oriunda da formulação lagrangeana, não é muito adequada do ponto de vista hamiltoniano. Já a divisão entre vínculos de primeira e segunda classe está fundamentada nos parênteses de Poisson, que constitui o alicerce do formalismo hamiltoniano. Além do mais a conjetura parece bem consistente se levarmos em conta que uma transformação gerada por um vínculo de primeira classe preserva todos os vínculos (sejam de primeira ou segunda classe). Logo leva um estado permitido em outro estado permitido e que, da mesma forma que a propriedade de gerar transformações de calibre, a propriedade de ser de primeira classe, é preservada por uma operação de parênteses de Poisson. Temos ainda mais uma razão para postular a conjetura de Dirac: segundo o que se sabe da literatura, os métodos de quantização de sistemas com vínculos tratam todos os vínculos de primeira classe em pé de igualdade, a saber, como geradores de transformações de calibre. Por último apresentamos um argumento de menor beleza teórica mas de enorme importância prática: em todas as aplicações que se conhece até aqui a conjetura de Dirac vale, logo não temos nenhum motivo sólido para descartá-la.

### 1.11.2 Contra-exemplo à Conjectura de Dirac

Como reforço ao que tem sido dito nesta seção, apresentamos agora um contra-exemplo à conjetura de Dirac e alguns dos aspectos que o não emprego dela pode trazer.

Considere a Lagrangeana seguinte:

$$L = \frac{1}{2} \exp(y) \dot{x}^2. \quad (1.36)$$

As equações lagrangeanas do movimento (1.2) nada dizem sobre a variável  $y$  mas implicam que a variável  $x$  permaneça constante no tempo em algum valor  $x_0$ . A variável  $y$ , portanto, não representa Física e o estado físico deste sistema pode ser inteiramente descrito pelo valor da sua coordenada  $x$ . Ao se passar ao formalismo hamiltoniano, encontramos o vínculo primário

$$\Phi_y \equiv p_y \approx 0. \quad (1.37)$$

O Hamiltoniano é, então, dado por

$$H = \frac{1}{2} \exp(-y) P_x^2. \quad (1.38)$$

Há também um vínculo secundário

$$\dot{\Phi}_y \approx 0 \Rightarrow P_x^2 \approx 0 \Rightarrow P_x \approx 0. \quad (1.39)$$

Ambos os vínculos são de primeira classe. No entanto somente (1.37) gera transformações que não alteram o estado físico do sistema. Como vimos, este estado é caracterizado por seu valor da coordenada  $x$  e o que o vínculo (1.39) faz é justamente gerar transformações no valor desta coordenada, constituindo um flagrante exemplo de desobediência à conjectura de Dirac.

Poder-se-ia esperar que o sistema pudesse ser quantizado considerando-o como está, ou seja, sem necessidade de se postular a conjectura de Dirac. Acontece que não é bem assim. Senão vejamos. O sistema físico é, então, unidimensional e o mesmo acontece com o espaço de fases fisicamente distinguível para (1.36). Neste espaço não há estrutura de parênteses e não fica claro como a passagem para a Mecânica Quântica poderia se dar. A saída para este impasse é postular que o vínculo (1.39) também gera transformações de calibre. Desta forma o espaço de fases físico se torna zero-dimensional e a quantização é direta: assume-se que o espaço de Hilbert do sistema contém um único estado.

### 1.11.3 O Hamiltoniano Estendido

Encerramos esta seção com uma pequena alteração em nossa notação e mais uma definição. Os benefícios da primeira estão embasados nas discussões anteriores e os da segunda ficarão claros mais à frente.

Como vimos, a distinção mais importante entre os vínculos é aquela entre os de primeira e os de segunda classes. Vamos, daqui por diante, denotar os vínculos primeira por  $\gamma$  e os de segunda classe por  $\chi$ . Como antes, o conjunto de todos os vínculos será denotado por  $\{\Phi_j\}$ . Em termos da nova notação, a transformação de calibre mais geral se escreve como

$$\Delta F = \epsilon^a \{F, \gamma_a\}. \quad (1.40)$$

O movimento mais geral possível deve permitir que todas as transformações de calibre possíveis possam ser feitas durante a evolução temporal do mesmo. Entretanto o

hamiltoniano (1.24) contém apenas vínculos primários, logo não é o mais apropriado. Por isso, definimos o *Hamiltoniano Estendido* através de

$$H_E = H' + u^a \gamma_a. \quad (1.41)$$

Como o índice  $a$  corre sobre todos os vínculos de primeira classe, o hamiltoniano estendido (1.41) satisfaz nossas considerações.

Aproveitamos para definir o conceito de funções *invariantes de calibre*. Uma função  $f(q, p, t)$  é dita invariante de calibre se

$$\{f(q, p, t), \gamma_a\} \approx 0. \quad (1.42)$$

Para entender melhor a motivação desta definição basta lembrar que (1.42) implica em variações nulas sob as transformações de calibre (1.31).

Devemos ainda notar que para funções invariantes de calibre (1.42), os hamiltonianos  $H'$ ,  $H_T$  e  $H_E$  predizem o mesmo movimento. Todavia isto não é verdade para funções que não satisfazem (1.42) e, neste caso, devemos usar o hamiltoniano estendido  $H_E$  para ter acesso a todas as simetrias de calibre.

Por último, chamamos atenção para o fato de que também é possível obter equações de movimento "estendidas" usando-se o hamiltoniano (1.41), assim como fizemos para o hamiltoniano total (1.24). Basta partir da ação "estendida"

$$S_E = \int (\dot{q}^n p_n - H' - u^j \Phi_j). \quad (1.43)$$

As equações de movimento estendidas se reduzem a

$$\dot{F} = \{F, H_E\}, \quad (1.44)$$

$$\Phi_j \approx 0. \quad (1.45)$$

## 1.12 Vínculos de Segunda Classe: Os Parênteses de Dirac

Nesta seção vamos procurar entender um pouco melhor o papel dos vínculos de segunda classe nos sistemas hamiltonianos com vínculos. Veremos também como tratá-los de modo a levá-los em conta de maneira correta na implementação do método de Dirac.

### 1.12.1 Separação em Vínculos de Primeira e Segunda Classes

Vínculos de segunda classe estão presentes sempre que a matriz  $C_{jj'} \equiv \{\Phi_j, \Phi_{j'}\}$  for não nula na superfície dos vínculos. Vamos assumir que o posto da matriz acima é constante na superfície dos vínculos. É importante mostrar um teorema muito simples mas enriquecedor.

**Teorema 4** *Se  $|C_{jj'}| \approx 0$ , existe (pelo menos) um vínculo de primeira classe entre os  $\Phi_j$ .*

*Demonstração:* Se  $|C_{jj'}| \approx 0$  é possível encontrar uma solução não trivial para a equação

$$\lambda^j C_{jj'} \approx 0. \quad (1.46)$$

Logo o vínculo  $\lambda^j \Phi_j$  é de primeira classe.

Com a ajuda do teorema que acabamos de demonstrar vamos agora expor a maneira que Dirac encontrou para separar os vínculos de primeira dos de segunda classe.

Usando uma matriz  $M_j^{j'}$  para redefinir os vínculos ( $\Phi_j \rightarrow M_j^{j'} \Phi_{j'}$ ) poderemos fazer com que os vínculos de primeira classe, a serem identificados através da equação (1.46), sejam as primeiras coordenadas de um representação equivalente da superfície dos vínculos (1.6).

A matriz definida pelos parênteses de Poisson entre os vínculos tem os elementos que contém vínculos de primeira classe com a seguinte propriedade

$$C_{aj} = -C_{ja} \approx 0.$$

Usando esta propriedade podemos escrever a matriz  $C_{jj'}$ , ou, melhor dizendo, uma matriz equivalente a ela, da seguinte maneira

$$\begin{array}{c} \gamma_a \quad \chi_\alpha \\ \gamma_b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{\beta\alpha} \end{pmatrix} \\ \chi_\beta \end{array}$$

$C_{\beta\alpha}$  é uma matriz anti-simétrica e inversível em toda a superfície dos vínculos (1.6).

Desta maneira separamos completamente os vínculos de primeira classe ( $\gamma_a$ ) dos de segunda classe ( $\chi_\alpha$ ). Chamamos atenção para o fato de que o número de vínculos de segunda classe deve ser par pois do contrário teríamos  $|C_{\beta\alpha}| = 0$ .

Gostaríamos de destacar que a separação acima não é única pois ela claramente permite as seguintes redefinições

$$\gamma_a \rightarrow M_a^b \gamma_b \quad \text{e} \quad \chi_\alpha \rightarrow N_\alpha^\beta + M_\alpha^a \gamma_a \quad (1.47)$$

dado que  $|M_a^b| \neq 0$  e que  $|N_\alpha^\beta| \neq 0$ . Destacamos também que é possível também adicionar quadrados de vínculos de segunda classe às  $\gamma_a$  sem que deixem de ser de primeira classe (2).

Neste posto fazem-se necessárias algumas observações. Primeira: enfatizamos que partimos da idéia de que  $|C_{\beta\alpha}| \neq 0$  em toda a superfície  $\chi_\alpha = 0$  e não somente em  $\gamma_a = 0$ . Segunda: notemos que é sempre possível que se tenha vínculos entre os  $\Phi_J$  que sejam conseqüências de outros vínculos. Isto poderia levar à dependência do posto da matriz  $C_{jj'}$  no conjunto  $\Phi_j(q, p)$  escolhido. Entretanto eles podem ser removidos sem que se perca informação alguma sobre o sistema de forma que sempre podemos escolher um conjunto  $\Phi_j(q, p)$  mínimo, ou *irreduzível*. E é assumindo uma tal escolha que acabamos de demonstrar o teorema 4. Salientamos ainda que embora esta escolha facilite o tratamento matemático ela não é obrigatória e a análise pode ser feita à revelia dela (2).

### 1.12.2 Exemplo do Tratamento de Vínculos de Segunda Classe

Vínculos de segunda classe não podem gerar transformações. Uma vez que, por definição, uma transformação gerada por eles não preserva os vínculos (1.20), ela mapeia um estado permitido em um não permitido. Para que se possa compreender melhor como se pode implementar adequadamente os vínculos de segunda classe vamos agora dar um exemplo concreto.

Considere uma teoria com  $N$  pares de coordenadas e que apresenta como vínculos as

seguintes equações

$$\begin{aligned}\chi_1 &= q^1 \approx 0 \\ \chi_2 &= p_1 \approx 0.\end{aligned}\tag{1.48}$$

É fácil ver que estes vínculos são de segunda classe

$$\{\chi_1, \chi_2\} \approx 1 \neq 0.\tag{1.49}$$

Neste caso vemos que, já que nem a coordenada  $q^1$  nem o seu momento canonicamente conjugado  $p_1$  podem ser não-nulos, este grau de liberdade associado não tem nenhuma importância física e nós podemos simplesmente jogá-lo fora. Passamos, então, a trabalhar com o parênteses de Poisson modificado

$$\{F, G\}^* \equiv \sum_{n=2}^N \left( \frac{\partial F}{\partial q^n} \frac{\partial G}{\partial p_n} - \frac{\partial G}{\partial q^n} \frac{\partial F}{\partial p_n} \right).\tag{1.50}$$

Este parênteses de Poisson modificado é bom para nossa descrição da teoria porque podemos implementar os vínculos (1.48) mesmo antes de calculá-lo. Além disso, ele dá resultado nulo se calculado entre um dos vínculos (1.48) e qualquer outra função das variáveis canônicas. Há também sua clara interpretação física no sentido de excluir da teoria o grau de liberdade espúrio.

### 1.12.3 O Parênteses de Dirac

O exemplo anterior foi muito importante porque dá uma idéia a cerca de como tratar os vínculos de segunda classe. Agora vamos procurar generalizar essa idéia modificando o parênteses de Poisson.

Vamos procurar motivar este conceito que às vezes parece um pouco obscuro. Para implementarmos os vínculos de segunda classe de maneira correta é preciso encontrar uma definição de parênteses que permita fazer  $\chi_\alpha = 0$  a qualquer instante sem levar aos problemas mencionados na seção 1.7, ou seja, permita tratar os vínculos de segunda classe como igualdades fortes. Logo a nossa definição de parênteses deve satisfazer

$$\{F, \chi_\alpha\}^* = 0.\tag{1.51}$$

O parênteses modificado também não pode ser muito diferente do parênteses de Poisson já que deve preservar algumas de suas propriedades. Vamos supor que o parênteses modificado seja dado por

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} + f(F, G, \chi_\alpha)$$

onde  $f(F, G, \chi_\alpha)$  vai a zero se não houver vínculos. Esta suposição é razoável porque satisfaz as condições ditas acima e, além disso, se reduz ao parênteses de Poisson caso tenhamos  $\chi_\alpha \neq 0$  para todo  $\alpha$ .

Para que a condição (1.51) seja satisfeita, deveremos ter

$$f(F, \chi_\beta, \chi_\alpha) = -\{F, \chi_\beta\}.$$

Isto nos leva a supor que o segundo termo da equação (1.12.3) pode ser escrito como  $-\{F, \chi_\beta\}D(G - \chi_\beta)$ , onde  $D(G - \chi_\beta)$  é igual à unidade se  $G = \chi_\beta$  para qualquer valor de  $\beta$ .

Uma vez que a matriz  $C_{\alpha\beta}$  é inversível então existe  $C^{\alpha\beta}$  tal que

$$C^{\alpha\beta}C_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha.$$

Definimos então o parênteses modificado

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} - \{F, \chi_\alpha\}C^{\alpha\beta}\{\chi_\beta, G\}, \quad (1.52)$$

conhecido com parênteses de Dirac.

Não é difícil ver que o parênteses de Dirac  $\{F, G\}^*$  tem a mesma álgebra do parênteses de Poisson  $\{F, G\}$ :

- é linear em  $F$  e em  $G$ ;
- é anti-simétrico na troca de  $F$  por  $G$ ;
- satisfaz a regra do produto  $\{F_1F_2, G\}^* = F_1\{F_2, G\}^* + \{F_1, G\}^*F_2$ ;
- e obedece a identidade de Jacobi  $\{\{F, G\}^*, H\}^* + \{\{G, H\}^*, F\}^* + \{\{H, F\}^*, G\}^* = 0$ .

As três primeiras propriedades podem ser inferidas após uma breve apreciação da definição (1.52). Já a última propriedade requer um pouco mais de esforço, meramente algébrico é verdade. Demonstrações podem ser encontradas em (7) e (8).

A pergunta natural depois do que discutimos até aqui nesta seção é se o parênteses de Dirac será capaz de substituir completamente o parênteses de Poisson ou se a nova definição nos faz perder alguma informação sobre o nosso sistema físico. Para responder adequadamente a esta pergunta deveremos olhar para as equações do movimento. Vamos tentar escrevê-las em termos do parênteses de Dirac e ver se há alguma diferença fisicamente observável. Escrevendo as equações de movimento através do parênteses de Dirac para uma função arbitrária  $F$ , temos

$$\begin{aligned}\{F, H_E\}^* &= \{F, H_E\} - \{F, \chi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \{\chi_\beta, H_E\} \\ &\approx \{F, H_E\}.\end{aligned}$$

A última igualdade pode ser justificada se lembrarmos que o hamiltoniano estendido (1.41) é de primeira classe. Podemos, então, escrever

$$\dot{F} \approx \{F, H_E\}^*. \quad (1.53)$$

## 1.13 Fixação de Calibre - Graus de Liberdade Independentes

### 1.13.1 Calibres Canônicos

Como vimos, a existência de vínculos de primeira classe na teoria implica que temos uma liberdade de calibre de modo que a um determinado estado físico correspondem vários pontos no espaço de fases, o que nem sempre é interessante. Às vezes temos a necessidade de ter uma correspondência um para um e, neste caso, precisamos impor certas condições a serem obedecidas pelas variáveis canônicas do sistema de modo a obter a correspondência desejada. Essas condições recebem o nome de condições de calibre. Podemos fazer essas imposições porque elas somente alteram graus de liberdade não-físicos, de maneira tal que os graus de liberdade fisicamente interessantes do sistema não sofrem alteração alguma.

É importante notar que a necessidade de se impor condições de calibre é um aspecto próprio da teoria mas o conteúdo delas não. Isto significa que há uma certa arbitrariedade na escolha dessas condições e que elas são postas à mão na teoria como um artifício para se obter a resposta física adequada no que se refere ao espaço de fases. Vamos denotar as condições de calibre por

$$C_b(q, p) \approx 0. \quad (1.54)$$

À primeira vista poder-se-ia pensar que as condições de calibre (1.54) são completamente arbitrárias. Entretanto não é bem assim e, por isso, preferimos usar acima a expressão "uma certa arbitrariedade" que pode até parecer restritiva demais mas serve ao propósito de destacar que a arbitrariedade na escolha das condições de calibre não é total. O que restringe, então, as condições de calibre?

- A primeira restrição a ser obedecida pelas condições de calibre é bem clara: o calibre escolhido deve ser acessível ao sistema, ou seja, dado um conjunto de variáveis canônicas (um ponto no espaço de fases) o calibre escolhido deve diferir daquele conjunto por uma transformação de calibre do tipo (1.40). Esta restrição tem como objetivo evitar que a imposição do calibre altere de alguma forma os graus de liberdade fisicamente relevantes e fazer com que somente os graus de liberdade não-físicos sejam atingidos. Note-se que, uma vez que o número de parâmetros  $\epsilon^a$  independentes é igual ao número de funções  $\gamma_a$  independentes, nós podemos concluir que o número de condições de calibre (1.54) não pode ser maior que o número de funções  $\gamma_a$  independentes.
- A segunda restrição é que as equações (1.54) devem fixar o calibre completamente. Esta restrição pode ser menos óbvia do que a anterior mas também é simples de entender: se queremos eliminar a ambiguidade na correspondência entre estado físico e conjunto de variáveis canônicas, então não adianta remover alguns graus de liberdade espúrios e outros não. Ela implica que não deve haver outra transformação de calibre que a identidade com a propriedade de preservar as equações (1.54). Matematicamente temos que as equações

$$\epsilon^a \{C_b, \gamma_a\} \approx 0 \quad (1.55)$$

devem implicar em

$$\epsilon^a = 0. \quad (1.56)$$

Acontece que as equações (1.55) só podem implicar (1.56) se o número de equações independentes for maior ou igual ao número de parâmetros  $\epsilon^a$ . Chegamos dessa forma a um resultado bastante interessante: as restrições a serem obedecidas pelas condições de calibre implicam que o número condições de calibre independentes seja igual ao número de vínculos de primeira classe independentes. Daí vemos que os parênteses de Poisson

$\{C_b, \gamma_a\}$  formam uma matriz quadrada e que

$$|\{C_b, \gamma_a\}| \neq 0. \quad (1.57)$$

Mas isso equivale a dizer que os vínculos  $C_b$  e  $\gamma_a$  formam um conjunto de segunda classe, ou seja, os vínculos de primeira classe foram removidos da teoria pela completa fixação do calibre. Melhor dizendo: a propriedade de primeira classe é que foi removida já que os vínculos  $\gamma_a$  permanecem.

Os resultado acima são bastante plausíveis e podem até ser justificados por uma argumentação simples. A liberdade de calibre está fundamentalmente associada à existência dos vínculos de primeira classe. Se vamos remover esta liberdade, é de se esperar a remoção também desses vínculos ou pelo menos de sua propriedade que gera a liberdade de calibre.

Uma vez tendo fixado o calibre na teoria podemos passar ao parênteses de Dirac. Nossa teoria agora pode ser vista como sendo livre de vínculos no sentido de que agora os vínculos são meramente identidades entre as coordenadas e não mais representam o perigo de nos levar a inconsistências.

### 1.13.2 Vínculos de Segunda Classe e Fixação de Calibre

Na subseção anterior vimos que existe uma estreita relação entre a fixação de calibre e o surgimento de um conjunto de segunda classe (vínculos de primeira classe junto com as condições de calibre). Naturalmente emerge a indagação sobre a possibilidade de se associar de maneira mais forte vínculos de segunda classe à fixação de calibre. Através do exemplo a ser dado a seguir veremos que é possível restringir um sistema com graus de liberdade espúrios através de uma fixação de calibre e ter somente vínculos de segunda classe. Assim como também é possível adicionar graus de liberdade espúrios a uma teoria e, com apenas um rearranjo dos vínculos, ter de volta a propriedade de primeira classe. Em princípio é possível obter de uma maneira geral tais conclusões mas não nos preocuparemos com isso aqui.

Imagine que temos uma teoria com dois graus de liberdade e os seguintes vínculos

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= q^1 + q^2 = 0 \\ \Phi_2 &= p_1 - p_2 = 0. \end{aligned}$$

Tais vínculos são de primeira classe e são invariantes sob

$$\begin{aligned} q^1 &\rightarrow q^1 + \epsilon_1 & q^2 &\rightarrow q^2 - \epsilon_1, \\ p_1 &\rightarrow p_1 - \epsilon_2 & p_2 &\rightarrow p_2 - \epsilon_2. \end{aligned}$$

Se resolvermos impor as condições de calibre  $q^2 = 0$  e  $p_2 = 0$ , que são permitidas por (1.57), o segundo grau de liberdade desaparece e ficamos com  $q^1 = 0$  e  $p_1 = 0$  no lugar dos vínculos originais. Os novos vínculos são, como se pode facilmente ver, de segunda classe. Entretanto podemos ver o primeiro como uma condição de fixação de calibre para a transformação gerada pelo segundo:  $q^1 \rightarrow q^1 + u$ . Dessa forma os dois vínculos são equivalentes a  $p_1 = 0$ .

Considere agora uma teoria com os seguintes vínculos  $q^1 = 0$  e  $p_1 = 0$ . Vemos que são vínculos de segunda classe. Se adicionarmos um grau de liberdade e impusermos os vínculos  $q^2 = 0$  e  $p_2 = 0$  voltamos ao início do caso anterior onde tínhamos somente vínculos de primeira classe. Note que nem a adição de graus de liberdade nem a imposição de condições de calibre mudou o conteúdo dinâmico da teoria.

## 1.14 Mais Sobre Transformações de Calibre

Para encerrar este primeiro capítulo vamos falar um pouco mais sobre as transformações de calibre. Desta vez procuraremos ilustrar a teoria através de exemplos concretos. O primeiro deles é a teoria eletromagnética que costuma ser o primeiro contato de um físico com a simetria de calibre. Esta teoria é usada para descrever a interação da matéria (elétrons) com os campos elétrico e magnético e nela a simetria de calibre representa um papel fundamental. Aproveitando a conexão entre invariância de calibre e interações, falaremos também de simetrias de calibre na teoria quântica como forma de incluir o eletromagnetismo na teoria de Schrödinger.

### 1.14.1 A Teoria Eletromagnética Enquanto Teoria de Calibre

A teoria eletromagnética foi inicialmente desenvolvida a partir de fatos experimentais que foram estabelecendo as equações que descrevem o movimento das cargas quando expostas a campos elétricos  $\vec{E}$  e magnéticos  $\vec{B}$ . Estas equações são

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho \quad (\text{Lei de Gauss}) \quad (1.58)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Inexistência de cargas magnéticas}) \quad (1.59)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Lei de Faraday-Lenz}) \quad (1.60)$$

$$(1.61)$$

e, no caso de correntes estacionárias, a última equação da teoria eletromagnética se escreve como

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{J} \quad (\text{Lei de Ampère}). \quad (1.62)$$

Entretanto as equações acima entram em conflito com a equação de continuidade para a carga elétrica

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0. \quad (1.63)$$

Se tomarmos o divergente da equação (1.62) teremos pela equação (1.63) que  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , o que nem sempre é verdade. A equação (1.63) é de vital importância para a Física e uma teoria não pode ser boa se não estiver de acordo com ela. A equação (1.63) afirma que a carga elétrica líquida é conservada *localmente*. Isto significa que não se pode criar nem destruir cargas elétricas a não ser que os processos de criação e destruição ocorram no mesmo ponto do espaço-tempo e, que, além disso, as magnitudes criada e destruída sejam as mesmas ou, o que é equivalente mas fisicamente mais significativo, que sejam criadas quantidades iguais de cargas de ambos os sinais.

Maxwell resolveu este problema adicionando na equação (1.62) um termo, chamado de corrente de deslocamento elétrico, capaz conciliar as equações (1.62) e (1.63), modificando a Lei de Ampère para

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.64)$$

As equações (1.58), (1.59) e (1.60) junto com a equação (1.64) formam o que chamamos de teoria eletromagnética de Maxwell.

Um aspecto muito importante desta teoria é que, dadas as fontes e as condições de contorno do problema, não se pode determinar unicamente os campos elétrico  $\vec{E}$  e magnético  $\vec{B}$ , porque as equações acima estão acopladas de forma que para se determinar

$\vec{E}$  é preciso que se conheça  $\vec{B}$  e vice-versa, ou que se imponha condições adicionais de modo a restringir os valores de  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  possíveis. Essas são as chamadas condições de calibre a que nos referíamos (1.54). Vamos ver de que maneira esta liberdade de calibre está expressa na teoria.

### 1.14.1.1 Invariância de Calibre das Equações de Maxwell

Para se ter uma melhor compreensão de como a simetria de calibre está embutida na teoria eletromagnética, vamos reescrevê-la usando uma formulação mais poderosa tanto do ponto de vista físico como matemático. Para tanto vamos introduzir os potenciais escalar  $A_0$  e vetor  $\vec{A}$  de forma que

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\nabla A_0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A}.\end{aligned}$$

É fácil ver que as equações (1.65) não são alteradas se fizermos as substituições

$$\begin{aligned}A_0 &\rightarrow A'_0 = A_0 - \frac{\partial \chi}{\partial t} \\ \vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \chi,\end{aligned}\tag{1.65}$$

onde  $\chi$  é uma função arbitrária. Quando  $\chi$  depende do espaço-tempo dizemos que a transformação de calibre é *local*. Caso contrário, dizemos que a transformação é *global*, ou seja, a mesma em todo o espaço-tempo.

Podemos obter uma notação ainda mais concisa se definirmos  $A_\mu \equiv (A_0, \vec{A})$ , o quadripotencial eletromagnético, onde  $A_0$  é o potencial escalar e  $\vec{A}$  é o potencial vetor. Em termos de  $A_\mu$  o tensor eletromagnético é definido por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,\tag{1.66}$$

e o quadri-vetor corrente por  $J^\mu \equiv (\rho, \vec{J})$ .

Nessa nova notação, lembrando que os operadores  $(\partial/\partial t, -\nabla)$  se comportam como um quadrivetor  $\partial^\mu$ , as transformações (1.65) podem ser escritas como

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi \quad (1.67)$$

e as equações de Maxwell como

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu. \quad (1.68)$$

Note que agora a invariância de calibre das equações de Maxwell (1.68) é explícita e vem da definição do tensor eletromagnético (1.66) que claramente não é alterado pelas transformações (1.67). A razão para isso é que  $F_{\mu\nu}$  se comporta como um "rotacional" em quatro dimensões. Usando o formalismo de formas diferenciais é possível ver isto de maneira ainda mais elegante, mas isso ficará para o apêndice.

## 1.14.2 Invariância de Calibre na Mecânica Quântica

Vamos falar um pouco sobre o efeito das transformações de calibre na Mecânica Quântica, e aproveitar este tópico para ilustrar um aspecto importante da simetria de calibre. Está claro que se pode escolher livremente o calibre da teoria. Entretanto alguma escolha deve necessariamente ser feita. Do contrário não se pode tirar resultados. Porque não se pode deixar esta escolha por fazer é o que veremos com a ajuda da Mecânica Quântica.

### 1.14.2.1 Introdução do Eletromagnetismo na Mecânica Quântica de Schrödinger

A força de Lorentz para um corpo com carga  $q$ , massa  $m$  e velocidade  $\vec{v}$  imerso em um campo eletromagnético,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (1.69)$$

pode ser encontrada através das equações de Hamilton e do hamiltoniano clássico

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + qA_0. \quad (1.70)$$

Seguindo a maneira geral de se obter as equações quânticas a partir do problema clássico, chegamos à equação de Schrödinger para este problema

$$\left(\frac{1}{2m}(-i\nabla - q\vec{A})^2 + qA_0\right)\Psi(\vec{x}, t) = i\frac{\partial\Psi(\vec{x}, t)}{\partial t}. \quad (1.71)$$

Por razões a serem explicadas a seguir, definimos os operadores de *derivação covariante* como

$$\begin{aligned}\vec{D} &\equiv \vec{\nabla} - iq\vec{A} \\ D^0 &\equiv \frac{\partial}{\partial t} + iqA_0.\end{aligned}\quad (1.72)$$

Note que eles aparecem na equação (1.71).

Para que o eletromagnetismo possa ser incorporado à mecânica quântica sem que precise ser alterado, é necessário que também aqui ele exiba a propriedade de invariância sob as transformações (1.65). Para que isso seja verdade, é necessário que exista uma equação do tipo

$$\left(\frac{1}{2m}(-i\nabla - q\vec{A}')^2 + qA'_0\right)\Psi'(\vec{x}, t) = i\frac{\partial\Psi'(\vec{x}, t)}{\partial t}.\quad (1.73)$$

e que a função de onda  $\Psi'(\vec{x}, t)$  descreva a mesma Física que a função de onda  $\Psi(\vec{x}, t)$ . Resta-nos encontrar  $\Psi'(\vec{x}, t)$ . Um pouco de intuição matemática nos leva a

$$\Psi'(\vec{x}, t) = \exp\{iq\chi(\vec{x}, t)\}\Psi(\vec{x}, t).\quad (1.74)$$

Não é difícil verificar que estamos corretos. Senão, vejamos

$$\begin{aligned}(-i\nabla - q\vec{A}')\Psi' &= \{-i\nabla - q\vec{A} - q\nabla\chi\}\{\exp(iq\chi)\}\Psi \\ &= q(\nabla\chi)\{\exp(iq\chi)\}\Psi + \exp(iq\chi)(-i\nabla\Psi) \\ &\quad + \exp(iq\chi)(-\vec{A}\Psi) - q(\nabla\chi)\{\exp(iq\chi)\}\Psi \\ &= \{\exp(iq\chi)\}(-i\nabla - q\vec{A})\Psi, \text{ que ainda pode ser escrito como} \\ -i\vec{D}'\Psi' &= \{\exp(iq\chi)\}(-i\vec{D})\Psi.\end{aligned}\quad (1.75)$$

Prosseguindo da mesma maneira, encontramos outros dois resultados úteis

$$iD'^0\Psi' = \exp(iq\chi)(iD^0)\Psi\quad (1.76)$$

$$-i(\vec{D}')^2\Psi' = \{\exp(iq\chi)\}(-i\vec{D})^2\Psi.\quad (1.77)$$

Observando os resultados (1.76) e (1.77), não é difícil ver que (1.74) é a relação correta entre  $\Psi'$  e  $\Psi$  para que as equações (1.71) e (1.73) sejam consistente entre si.

A pergunta a que ainda devemos dar resposta é se  $\Psi'(\vec{x}, t)$  e  $\Psi(\vec{x}, t)$  descrevem de fato a mesma Física. Para tanto vamos olhar para o que chamamos de "Física". Uma boa teoria quântica que inclua o eletromagnetismo, pelo menos até um certo ponto, deve necessariamente fornecer as probabilidades de se encontrar as partículas que ela pretende descrever em cada ponto do espaço a cada instante de tempo. Por definição, isto se faz por meio da grandeza física *densidade de probabilidade*  $\mathcal{P}(x, t)$  definida por

$$\mathcal{P}(x, t) \equiv \Psi^*(\vec{x}, t)\Psi(\vec{x}, t). \quad (1.78)$$

Como a relação entre  $\Psi'$  e  $\Psi$  é apenas uma diferença de fase, fica fácil de ver que  $\mathcal{P}(\vec{x}, t) = \mathcal{P}'(\vec{x}, t)$ .

Entretanto outros observáveis físicos incluindo operadores de derivada como  $\frac{\partial}{\partial t}$  e  $\nabla$  podem não ser invariantes sob (1.74). Vejamos o caso da corrente de probabilidade que depende essencialmente de  $\Psi^*(\nabla\Psi) - (\nabla\Psi)^*\Psi$ . Claramente esta grandeza não é invariante sob (1.74) uma vez que o parâmetro de fase  $\chi$  depende de  $\vec{x}$ . O que fazer, então, para contornar este problema? As equações (1.75) e (1.77) sugerem que a solução é o operador de derivação covariante. Se trocarmos  $\nabla$  por  $\vec{D}$  poderemos construir uma corrente covariante, pois ela passa a ser constituída de operadores covariantes, e invariante sob a transformação (1.74)

$$\Psi'^*(\vec{D}'\Psi') = \Psi^* \exp(-iq\chi) \cdot \exp(iq\chi)(\vec{D}\Psi) = \Psi^*(\vec{D}\Psi). \quad (1.79)$$

Podemos concluir do que foi dito acima que, para que a invariância de calibre das equações de Maxwell permaneça na mecânica quântica, basta fazer as transformações

$$\begin{aligned} A_0 &\rightarrow A'_0 = A_0 - \frac{\partial\chi}{\partial t} \\ \vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi \\ \Psi &\rightarrow \Psi' = \exp(iq\chi)\Psi. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Um pouco de atenção à equação de Schrödinger da partícula livre nos leva a uma conclusão interessante: para se chegar à equação de Schrödinger que inclui a interação eletromagnética basta fazer as substituições (1.65) na equação da partícula livre. Isto

que acaba de ser dito constitui a base do *princípio de calibre* segundo o qual a forma da interação é determinada pela imposição da invariância de calibre local.

Gostaríamos, ainda, de justificar porque a escolha de calibre deve necessariamente ser feita embora ela seja arbitrária. Como uma transformação de calibre não significa mais do que uma mudança de fase, a imposição do calibre pode ser vista como a escolha de uma fase de referência para a função de onda. Esta escolha deve ser feita para que se possa determinar como a função de onda evoluiu a partir do momento da escolha. Vamos dar um exemplo. Considere o bem conhecido experimento da fenda dupla, onde se faz um feixe de elétrons colimado vindo de uma fonte pontual passar por dois orifícios de tamanho da mesma ordem de grandeza do comprimento de onda de De Broglie do feixe e, então, colidir com um anteparo colocado atrás das fendas. Se não se atribui uma fase, qualquer que seja ela, à função de onda do feixe antes dele passar pelas fendas não se poderá, de maneira alguma, prever o padrão de interferência a ser observado no anteparo porque as fases das funções de onda depois da passagem pelas fendas continuam arbitrárias. Mas, na mecânica quântica, a escolha da fase inicial equivale à escolha do calibre. Isto é uma ilustração de porque a escolha de calibre tem de ser feita.

### 1.14.3 O princípio de Calibre

O caminho que vamos seguir nesta seção é o oposto daquele da seção anterior, onde partimos da equação de Schrödinger com interação eletromagnética e vimos que a invariância de calibre da teoria exige as transformações (1.80). Agora vamos exigir que nossa teoria seja invariante sob uma transformação de fase do tipo

$$\Psi(\vec{x}, t) \rightarrow \Psi'(\vec{x}, t) = \exp\{i\alpha\}\Psi(\vec{x}, t). \quad (1.81)$$

Esta exigência é bastante razoável uma vez que a fase da função de onda nunca pode ser medida em mecânica quântica. Somente diferenças de fase são observáveis. Uma simetria deste tipo é um exemplo emblemático do que se requer de uma simetria de calibre.

Agora resta-nos explorar as possibilidades para o parâmetro da transformação (1.81). Primeiro vamos considerá-lo constante para todo o espaço-tempo.

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{x}, t) &\rightarrow \Psi'(\vec{x}, t) && \exp\{i\alpha\}\Psi(\vec{x}, t), \\ \alpha &&& \text{constante.} \end{aligned} \quad (1.82)$$

Esta transformação significa que a mesma fase deve ser escolhida em todos os pontos do espaço ao mesmo tempo, de forma que não se pode, por exemplo, colocar uma placa de meia onda ou de um quarto de onda em uma das fendas no experimento de fenda dupla (9). A teoria de Schrödinger é, obviamente, invariante sob esta transformação. Há ainda uma outra razão para se procurar um outro tipo de transformação de fase, a saber, uma em que o parâmetro dependa de  $x^\mu$ . A transformação global implica que, uma vez que determinada convenção de fase é adotada num ponto qualquer do espaço, esta também é *simultaneamente* adotada em todos os outros. Isto viola a teoria da relatividade que diz que nenhum tipo de informação pode viajar com velocidade maior que a da luz. Para obtermos uma transformação de fase que seja relativística é preciso que ela seja local.

Na transformação de calibre local, temos

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{x}, t) &\rightarrow \Psi'(\vec{x}, t) && \exp\{i\alpha\}\Psi(\vec{x}, t), \\ \alpha &&& \alpha(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (1.83)$$

A invariância da teoria de Schrödinger sob esta transformação não é, de maneira alguma, óbvia. Pelo contrário, ela requer que acrescentemos novos aspectos para obtermos a desejada invariância. Vamos ver aonde a imposição da invariância sob (1.83) nos leva.

Acontece que a equação de Schrödinger da partícula livre não é nem pode ser invariante sob a transformação (1.83), uma vez que o parâmetro depende de  $x^\mu$ . Entretanto podemos ver a permissão para uma escolha da fase dependendo de  $x^\mu$  como sendo equivalente à existência de uma determinada interação de forma que, com esta interação, a teoria de Schrödinger seja invariante sob (1.83). Mas que interação seria essa? Se lembrarmos da subseção passada, não é difícil ver que a interação é justamente a eletromagnética. Para fazermos com que

$$\left(\frac{1}{2m}(-i\nabla - q\vec{A})^2\right)\Psi(\vec{x}, t) = i\left(\frac{\partial}{\partial t} - qA_0\right)\Psi(\vec{x}, t) \quad (1.84)$$

satisfaça a transformação (1.83) basta impor que  $\vec{A}$  e  $A_0$  se transformem de acordo com

$$\begin{aligned}\vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \frac{1}{q}\nabla\alpha \\ A_0 &\rightarrow A'_0 = A_0 - \frac{1}{q}\frac{\partial\alpha}{\partial t}.\end{aligned}\tag{1.85}$$

Numa notação covariante escreve-se  $A^\mu$  em lugar de  $\vec{A}$  e  $A_0$  e  $\partial^\mu$  em lugar de  $-\nabla$  e  $\frac{\partial}{\partial t}$ . O campo  $A^\mu$  é, então, dito de calibre porque é introduzido em uma teoria livre para estabelecer a invariância local de calibre.

Terminamos dizendo que o que fizemos aqui ao encontrar a forma da interação ao impor a invariância de calibre foi aplicar a definição de *princípio de calibre*.

## 2 TEORIA DE CAMPOS COM ESTATÍSTICA FRACIONÁRIA

### 2.1 Introdução

O capítulo anterior foi dedicado à elaboração de um método geral que pudesse elucidar a questão de como tratar teorias que contenham vínculos. Essas teorias costumam apresentar problemas na hora de serem quantizadas pelo fato de que aos vínculos estão associados graus de liberdade não-físicos. No presente capítulo temos a intenção de apresentar um exemplo particular dessas teorias e desenvolvê-lo tendo o método do capítulo passado como um importante instrumento para que se possa detalhar as propriedades da teoria, mas sempre tendo em vista que é na teoria física (representada por sua lagrangeana) que temos interesse. Queremos com isso dizer que o método do capítulo 1 não é mais o ponto central da discussão e sim as implicações que ele ajuda a tirar da teoria.

Antes de entrar no problema propriamente dito, vamos fazer uma excursão através dos aspectos mais importantes para a sua descrição. Para tanto faz-se necessário falar um pouco da física em duas dimensões espaciais e uma dimensão temporal ou, como é mais comum, física em  $(2+1)-d$ , ou ainda, física planar.

A física em  $(2+1)-d$  apresenta muitos aspectos diferentes e interessantes tanto do ponto de vista teórico como do ponto de vista experimental. O comportamento dos férmions e dos campos de calibre (elétrons e fótons, respectivamente) difere bastante daquele a que estamos acostumados em  $(3+1)-d$ . Para falar dos aspectos que nos interessam mais, podemos dizer, por exemplo, que existe um tipo de teoria de calibre em  $(2+1)-d$  que é completamente diferente da teoria de Maxwell. Tais teorias são conhecidas como teorias de Chern-Simons, em homenagem a Shiing-Shen Chern e James Harris Simons (10). Elas são importantes tanto por seus novos aspectos teóricos como por suas aplicações em alguns fenômenos planares na matéria condensada, como, por exemplo: no efeito Hall

quântico fracionário (11–16) onde, em particular, as equações do eletromagnetismo clássico são derivadas de uma ação de Chern-Simons pura (17); nos vórtices em filmes de Hélio superfluido (18); na supercondutividade aniônica (19) e de alta temperatura (20–22). Nesta última, a teoria de Chern-Simons com o termo de Higgs de quebra espontânea de simetria é considerada como um modelo para a supercondutividade (23). Cristais de Wigner e defeitos do tipo solitônico são soluções de um sistema com férmions ligados a um número par de tubos de fluxo magnético descritos por um campo de calibre de Chern-Simons (24). Nesses sistemas, vê-se uma relação de auto dualidade precisa entre a carga elétrica e os vórtices de fluxo magnético no modelo de calibre de Higgs com o termo de Chern-Simons (25).

Nesta dissertação, abordaremos as teorias de Chern-Simons do ponto de vista da teoria de campos. Para tanto, começaremos apresentando a notação a ser usada e que é comum no tratamento de teorias de calibre. A teoria de Maxwell é definida em termos do campo de calibre  $A_\mu = (A_0, \vec{A})$  (que se comporta como uma conexão), onde  $A_0$  é o campo escalar e  $\vec{A}$  é o potencial vetor. A lagrangeana de Maxwell é então dada por

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu J^\mu, \quad (2.1)$$

onde o tensor eletromagnético é dado por  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  e  $J^\mu$  é a corrente de matéria.

As equações de movimento são dadas por:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu. \quad (2.2)$$

Note que a corrente de matéria é conservada pela propriedade de anti-simetria do tensor  $F_{\mu\nu}$ . Para ver isto basta diferenciar as equações (2.2) com relação a  $x^\nu$ . Outro aspecto importante da teoria de Maxwell (2.1) e, portanto, de suas equações de movimento (2.2) é a invariância manifesta sob as transformações de calibre

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda. \quad (2.3)$$

A teoria de Maxwell em  $(3+1)$ - $d$ , por ser baseada em um tensor anti-simétrico, pode facilmente ser estendida a um espaço tempo  $d$ -dimensional bastando para isso que o índice  $\mu$  passe a tomar os valores  $\mu = 0, 1, 2, \dots, d-1$ . A única diferença real a ser percebida é que agora teremos um número diferente de campos independentes contidos no tensor eletromagnético. Já que  $F_{\mu\nu}$  é anti-simétrico, ele tem  $\frac{1}{2}d(d-1)$  entradas independentes,

onde  $d$  é a dimensão de espaço-tempo. Dessa forma, vemos que a teoria de Maxwell em  $(3+1)-d$  é bem parecida com a teoria de Maxwell planar, sendo que agora o número de campos independentes é menor: somente 3. Como definido em termos do potencial  $A_\mu$  o campo magnético  $B$  agora é um pseudo-escalar em vez de um pseudo-vetor

$$B = \epsilon^{ij} \partial_i A_j. \quad (2.4)$$

Isto se deve ao fato de que, em duas dimensões, o rotacional gera um escalar e não um vetor. Por outro lado, o campo elétrico gera um vetor bidimensional

$$\vec{E} = -\nabla A_0 - \dot{\vec{A}} \quad (2.5)$$

Vemos, então, que o tensor eletromagnético  $3 \times 3$  tem 3 componentes não-nulas: uma referente ao campo magnético  $\vec{B}$  e outras duas ao campo elétrico  $\vec{E}$ .

Agora vem um fato realmente interessante. Em vez de lidarmos com a teoria de Maxwell "reduzida", podemos obter a mesma física através da seguinte lagrangeana em  $(2+1)-d$ :

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{\alpha}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho - A_\mu J^\mu. \quad (2.6)$$

A lagrangeana (2.6) recebe o nome de Chern-Simons. Ela possui algumas características importantes para que seja útil como teoria de calibre. Ela é uma teoria local, invariante de calibre e invariante de Lorentz. Embora não pareça ser invariante de calibre, pois essa invariância não é manifesta, a teoria de Chern-Simons muda apenas por uma derivada total quando se faz uma transformação de calibre do tipo (2.3)

$$\delta \mathcal{L}_{CS} = \frac{\alpha}{4\pi} \partial_\mu (\Lambda \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho).$$

Assim, se os termos da fronteira puderem ser desprezados, a ação de Chern-Simons  $S_{CS} = \int d^3x \mathcal{L}_{CS}$  é invariante de calibre. Isto fica mais evidente após uma olhada nas equações de movimento da lagrangeana (2.6):

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} &= J^\mu, & \text{que pode ser escrita como} \\ F_{\mu\nu} &= \frac{2\pi}{\alpha} \epsilon_{\mu\nu\rho} J^\rho. \end{aligned} \quad (2.7)$$

A estrutura canônica desta teoria difere de maneira fundamental da teoria de Maxwell pelo fato de que ela contém apenas derivadas primeiras no espaço e no tempo. Gostaríamos de dizer apenas de passagem que é possível construir termos do tipo Chern-Simons em qualquer espaço-tempo de dimensão ímpar e que apenas em  $(2+1)-d$  este termo é de ordem 2 no campo  $A_\mu$ .

A teoria de Maxwell livre de fontes leva às equações de propagação da luz. Já as equações de Chern-Simons sem fontes levam a  $F_{\mu\nu} = 0$ , cujas soluções são calibres puros ou conexões chatas. Isto pode fazer a teoria de Chern-Simons parecer trivial ou pouco interessante. Entretanto há várias maneiras de se usar a teoria de Chern-Simons para descrever fenômenos interessantes do ponto de vista físico. Algumas delas são:

- Acoplamento a campos de matéria;
- Acoplamento a um termo de Maxwell;
- Topologia não-trivial do espaço-tempo;
- Campos de calibre não-abelianos;
- Gravidade.

Nesta dissertação vamos nos prender ao primeiro item mas, para ilustrarmos a importância do termo de Chern-Simons, vamos apresentar alguns dos principais resultados dos itens que mais nos interessam na próxima seção.

## 2.2 Teoria de Campos Planar

### 2.2.1 Teoria de Calibre Topologicamente Massiva

É de se esperar que fazendo um acoplamento entre a teoria de Maxwell e a de Chern-Simons em 2+1 dimensões, resultados interessantes sejam obtidos, uma vez que já sabemos que a teoria de Maxwell é uma teoria de calibre neste espaço e que, como veremos, a teoria de Chern-Simons também é.

Considere, então, a lagrangeana de Maxwell-Chern-Simons

$$\mathcal{L}_{MCS} = -\frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\alpha}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho, \quad (2.8)$$

cujas equações clássicas de movimento são

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{\alpha e^2}{4\pi} \epsilon^{\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 0. \quad (2.9)$$

Se escrevermos as equações de movimento para o campo dual  $F^\mu \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho}$ , que são

$$[\square + (\frac{\alpha}{2\pi} e^2)^2] F^\mu = 0, \quad (2.10)$$

podemos ver que existe um termo de "massa",  $m_{MCS} = (\frac{\alpha}{2\pi} e^2)$ .

Este termo pode, ainda, ser identificado de duas outras maneiras. A primeira é através da representação correspondente da álgebra de Poincaré em 2+1 dimensões. A outra é através do cálculo do propagador do campo em um calibre covariante com um termo de fixação de calibre do tipo  $\mathcal{L}_{fc} = -\frac{1}{2\xi e^2} (\partial_\mu A^\mu)$ ,

$$\Delta_{\mu\nu} = e^2 \left( \frac{p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu - i(\alpha/4\pi) e^2 \epsilon_{\mu\nu\rho} p^\rho}{p^2 (p^2 - \frac{\alpha}{2\pi} e^2)} + \xi \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2)^2} \right), \quad (2.11)$$

donde se identifica o termo de massa como sendo o pólo do propagador.

Esta teoria é, então, chamada de "teoria de calibre topologicamente massiva" (26).

### 2.2.2 Férmions em 2+1 dimensões

O tratamento de férmions em duas dimensões espaciais apresenta aspectos interessantes. O primeiro deles é que podemos construir as matrizes gama da representação de Dirac diretamente das matrizes de Pauli (27):

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \sigma^3 & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \gamma^1 &= i\sigma^1 & \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^2 &= i\sigma^2 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Estas satisfazem a relação  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ , onde  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$ .

A equação de Dirac em 2+1 dimensões é

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = (-i\alpha \cdot \nabla + m\beta)\Psi,$$

para o caso livre. E

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m)\Psi = 0, \quad (2.13)$$

para o caso em que há a interação eletromagnética.

### 2.2.3 Simetrias Discretas

Um outro aspecto importante da Física em duas dimensões espaciais é que as simetrias discretas, de paridade  $\mathcal{P}$ , conjugação de carga  $\mathcal{C}$  e reversão temporal  $\mathcal{T}$ , se apresentam de maneira bem diferente do caso quadridimensional. Por exemplo a transformação de paridade em três dimensões espaciais leva  $\mathbf{x}$  em  $-\mathbf{x}$ . Em duas dimensões espaciais esta transformação é definida como

$$\begin{aligned} x^1 &\rightarrow -x^1 \\ x^2 &\rightarrow x^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Sob (2.14), temos

$$\Psi \rightarrow \gamma^1 \Psi.$$

Isto leva a

$$\bar{\Psi}\Psi \rightarrow -\bar{\Psi}\Psi, \quad (2.15)$$

de forma que um termo de massa fermiônico em 2+1 dimensões quebra a simetria de paridade.

Ainda sob (2.14), o campo de calibre se transforma como

$$\begin{aligned} A^1 &\rightarrow -A^1 \\ A^2 &\rightarrow A^2 \\ A^3 &\rightarrow A^3. \end{aligned} \quad (2.16)$$

A equação (2.16) nos permite concluir que

$$\epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho \rightarrow -\epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho. \quad (2.17)$$

Ressaltamos que esta maneira similar no comportamento sob  $\mathcal{P}$  do termo de Chern-Simons e de massa fermiônica não é por acaso. Pode-se mostrar que estes termos são parceiros supersimétricos em 2+1 dimensões (28).

Sobre a simetria  $\mathcal{C}$  gostaríamos de dizer que, como é padrão, ela é atingida por uma matriz  $C$  tal que a equação de Dirac do elétron (2.13) se transforme na equação para o pósitron

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m)\Psi_C = 0, \quad (2.18)$$

com  $\Psi_C = C\gamma^0\Psi^*$  e  $C$  satisfazendo

$$(\gamma^\mu)^T = -C^{-1}\gamma^\mu C.$$

Na representação de Dirac  $C = \gamma^2$ .

Note que o termo fermiônico de massa é invariante sob  $\mathcal{C}$ .

Resta-nos somente a simetria de reversão temporal ( $\mathcal{T} : i \rightarrow -i$ ) de tal forma que  $x^0 \rightarrow -x^0$  mas preservando  $P^0 \equiv \mathcal{H}$ . Seu efeito nos campos espinorial e de calibre é, portanto,

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow \gamma^2\Psi \\ \mathbf{A} &\rightarrow -\mathbf{A} \\ A^0 &\rightarrow A^0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Donde concluímos que o termo de Chern-Simons muda de sinal sob reversão temporal.

## 2.2.4 Álgebra de Poincaré em 2+1 dimensões

O grupo de Poincaré em 2+1 dimensões é definido como o grupo de transformações

$$(a, \Lambda) : x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad (2.20)$$

em um espaço pseudo-euclídeano que deixa invariante a grandeza

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = (x^0 - y^0)^2 - (x^1 - y^1)^2 - (x^2 - y^2)^2. \quad (2.21)$$

Ele é constituído de três translações, dois boosts e uma rotação. Seus geradores formam a álgebra de Poincaré

$$\begin{aligned}\{P_\mu, P_\nu\} &= 0, \\ \{J^\mu, J^\nu\} &= i\epsilon^{\mu\nu\rho} J_\rho, \\ \{J^\mu, P^\nu\} &= i\epsilon^{\mu\nu\rho} P_\rho.\end{aligned}\tag{2.22}$$

$P^\mu$  é o gerador de translação no espaço e no tempo.  $J_0$  é o gerador de rotação espacial e  $J_i$  geram os boosts nas direções  $Ox$  e  $Oy$ .

Os operadores de Casimir são

$$\begin{aligned}(P^2 - m^2)\Psi &= 0 \\ (\mathbf{P} \cdot \mathbf{J} + sm)\Psi &= 0.\end{aligned}\tag{2.23}$$

Seus valores caracterizam as representações irredutíveis do grupo.

Destacamos ainda que o valor de  $s$  é arbitrário, diferentemente do caso quadridimensional onde os valores de  $s$  só podem ser múltiplos inteiros ou semi-inteiros de  $\hbar$ .

## 2.3 O sistema carga-fluxo e suas simetrias

Considere uma partícula não relativística de massa  $m$  e carga  $e$  que se move no campo magnético de um solenóide longo e fino orientado ao longo do eixo  $Oz$ . Podemos desprezar o movimento ao longo do solenóide e, desta forma, o movimento é governado pela lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{e}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}),\tag{2.24}$$

onde  $\mathbf{r} \equiv (x, y)$  é a posição no plano,  $\mathbf{v}$  é a velocidade e  $\mathbf{A}$  o potencial vetor para o solenóide que é dado por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{(-y\hat{x} + x\hat{y})}{x^2 + y^2},\tag{2.25}$$

onde  $\hat{x}_i$  é o vetor unitário na direção do eixo  $Ox_i$ .

O campo magnético  $B$  é dado por

$$B = \nabla \wedge \mathbf{A} = \Phi \delta^2(\mathbf{r}). \quad (2.26)$$

Dessa forma, vemos que, por construção,  $\Phi$  é o fluxo do solenóide.

O momento canônico é

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A}. \quad (2.27)$$

O hamiltoniano é

$$H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \quad (2.28)$$

O momento angular canônico é

$$\begin{aligned} L_C &= \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} \\ &= \mathbf{r} \wedge m\mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{r} \wedge \mathbf{A} \\ &= L + \frac{e\Phi}{2\pi c} \end{aligned} \quad (2.29)$$

O operador  $L_C$ , quando atua numa função cuja dependência angular é  $\exp(im\varphi)$ , dá como auto-valor  $m\hbar$ . Portanto, o auto-valor de  $L$  é

$$L = \hbar \left( m - \frac{e\Phi}{hc} \right), m \in \mathbb{Z}. \quad (2.30)$$

O espectro de  $L$  é então composto inteiros mas adicionados de  $-\frac{e\Phi}{hc}$ . Assim interpretamos o último termo em (2.30) como sendo o spin do conjunto carga-solenóide.

$$s = \frac{L(m=0)}{\hbar} = -\frac{e\Phi}{hc} \quad (2.31)$$

Para ver a conexão spin-estatística, analisemos o que acontece à função de onda de dois conjuntos carga-solenóide quando se lhes permuta a posição. Em nível clássico nada acontece, mas em nível quântico, Aharanov e Bohm mostraram que há o surgimento de uma fase dada por

$$\exp\left(-i\frac{e}{\hbar c}\oint_{\Gamma}\mathbf{dr}\cdot\mathbf{A}\right).$$

Com a ajuda do teorema de Stokes, podemos escrevê-la como

$$\exp\left(-2\pi i\frac{e\Phi}{\hbar c}\right). \quad (2.32)$$

Deduzimos, então, que a estatística do sistema é dada por

$$\nu = -\frac{2e\Phi}{\hbar c}, \quad (2.33)$$

e que os spin e a estatística estão relacionados da maneira convencional  $\nu = 2s$

Daqui pra frente faremos  $\hbar = c = 1$ .

## 2.4 O Termo de Chern-Simons com Acoplamento Mínimo

Nesta seção vamos mostrar o primeiro modelo de teoria de campos a apresentar estatística fracionária. Trata-se de uma lagrangeana no espaço-tempo tridimensional, com uma corrente conservada  $U(1)$  modificada através da adição de um acoplamento mínimo, e de um termo de Chern-Simons. Este modelo foi primeiramente introduzido por G. W. Semenoff em (29).

A lagrangeana à que nos referimos é

$$S = \int d^3\mathbf{x}[(\partial_\mu + \imath A_\mu)\phi^*(\partial^\mu - \imath A^\mu)\phi - m^2\phi^*\phi + \frac{\alpha}{4\pi}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho]. \quad (2.34)$$

Os momentos canonicamente conjugados aos campos são dados por

$$\pi \equiv \frac{\partial L}{\partial(\partial_0\phi^*)} = (\partial_0 - \imath A_0)\phi = D_0\phi, \quad (2.35)$$

$$\pi^* \equiv \frac{\partial L}{\partial(\partial_0\phi)} = (\partial_0 + \imath A_0)\phi^* = \overline{D_0\phi}, \quad (2.36)$$

$$\pi_0 \equiv \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A_0)} \approx 0, \text{ e} \quad (2.37)$$

$$\pi_i \equiv \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A_i)} = \frac{\alpha}{4\pi}\epsilon_{ij}A_j. \quad (2.38)$$

O símbolo  $\approx$  identifica um vínculo do sistema ou, como já foi dito, uma relação que só pode ser implementada depois do cálculo de todos os parênteses de Poisson da teoria. Estas relações, como sabemos, eliminam variáveis dinâmicas do espaço de fases do sistema.

Através da transformação de Legendre, podemos obter a densidade hamiltoniana do sistema

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= D_0\phi\partial_0\phi^* + \overline{D_0\phi}\partial_0\phi + \frac{\alpha}{4\pi}\epsilon^{ij}A_j\partial_0A_i - \mathcal{L} \\ &= D_0\phi\partial_0\phi^* + \overline{D_0\phi}\partial_0\phi + \frac{\alpha}{4\pi}\epsilon^{ij}A_j\partial_0A_i - \\ &\quad - (\partial_\mu + iA_\mu)\phi^*(\partial^\mu - iA^\mu)\phi + m^2\phi^*\phi - \frac{\alpha}{4\pi}\epsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda.\end{aligned}$$

A forma final do hamiltoniano é

$$\begin{aligned}H &= \int d^3x \mathcal{H} \\ &= \int d^3x \left[ \pi^*\pi + \phi^*(\overleftarrow{\partial} + i\mathbf{A}) \cdot (\overrightarrow{\partial} - i\mathbf{A})\phi + m^2\phi^*\phi - A_0\left[J_0 + \frac{\alpha}{2\pi}B\right] \right], \quad (2.39)\end{aligned}$$

onde  $J_0 = i(\phi^*\pi - \pi^*\phi)$  é a densidade de carga associada à simetria  $U(1)$  e  $B$  é o campo magnético.

Para prosseguirmos de maneira consistente com o método de Dirac, exposto no primeiro capítulo, devemos exigir a conservação do vínculo (2.37). Neste caso teremos

$$J_0 + \frac{\alpha}{2\pi}B \approx 0. \quad (2.40)$$

Agora vamos determinar a forma, do campo de calibre com base nos vínculos acima e nas condições de calibre a serem impostas. Escolhemos essas condições como sendo

$$A_0 \approx 0, \quad \text{e} \quad \partial \cdot \mathbf{A} \approx 0. \quad (2.41)$$

Para encontrar o campo de calibre basta usar as condições (2.41) junto com (2.40) e lembrar que a função de Green em duas dimensões é dada por  $\frac{1}{2\pi} \ln |\vec{x} - \vec{y}|$ , ou seja

$$\nabla^2 \frac{1}{2\pi} \ln |\vec{x} - \vec{y}| = \delta(\vec{x} - \vec{y}).$$

Desta forma chegamos a

$$\hat{A}^i(\vec{x}) = \frac{1}{\alpha} \int d^2y \epsilon^{ij} \frac{(x_j - y_j)}{|\vec{x} - \vec{y}|^2} \rho(\vec{y}, t). \quad (2.42)$$

Nos será bastante útil escrever o campo de calibre da seguinte forma

$$\hat{A}_i = \partial_i \left[ \frac{1}{\alpha} \int d^2y \arctan\left(\frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1}\right) \right], \quad (2.43)$$

fazendo uso da identidade  $\partial_i \arctan(x_2/x_1) J_0(\vec{y}) = -\epsilon_{ij}/|\vec{x}|^2$ . Embora este pareça um detalhe matemático sem tanta importância, isto não é verdade. Podemos notar que o campo de calibre (2.42) pode ser escrito como a derivada de um operador claramente não unívoco. Basta notar que existem infinitos valores do ângulo entre o vetor  $\vec{x} - \vec{y}$  e o eixo  $Ox$  que darão o mesmo valor de  $\hat{A}$ .

Poderemos remover a interação do hamiltoniano (que é dado por (2.39) com  $A_0 = 0$  e  $A_i$  trocado por  $\hat{A}_i$ ) se fizermos a transformação de calibre

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\mathbf{x}) &= \exp \left[ (i/\alpha) \int d^2y \arctan(\mathbf{x} - \mathbf{y}) J_0(\mathbf{y}) \right] \phi(\mathbf{x}) \\ \hat{\pi}(\mathbf{x}) &= \exp \left[ (i/\alpha) \int d^2y \arctan(\mathbf{x} - \mathbf{y}) J_0(\mathbf{y}) \right] \pi(\mathbf{x}) \\ \hat{\phi}^*(\mathbf{x}) &= \phi^*(\mathbf{x}) \exp \left[ (i/\alpha) \int d^2y \arctan(\mathbf{x} - \mathbf{y}) J_0(\mathbf{y}) \right] \\ \hat{\pi}^*(\mathbf{x}) &= \pi^*(\mathbf{x}) \exp \left[ (i/\alpha) \int d^2y \arctan(\mathbf{x} - \mathbf{y}) J_0(\mathbf{y}) \right]. \end{aligned} \quad (2.44)$$

O hamiltoniano é, agora, dado por

$$\mathcal{H} = \hat{\pi}^* \hat{\pi} + \hat{\phi}^* \overleftarrow{\partial} \cdot \overrightarrow{\partial} \hat{\phi} + m^2 \hat{\phi}^* \hat{\phi}. \quad (2.45)$$

Para o campo  $\hat{\phi}$  as equações de movimento são  $\partial^\mu \partial_\mu \hat{\phi} + m^2 \hat{\phi} = 0$ . Estas descrevem um campo escalar sem interação.

As relações de comutação a tempos iguais obedecidas pelos campos  $\hat{\phi}(\mathbf{x})$  e  $\hat{\pi}(\mathbf{x})$  agora são

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\mathbf{x}) \hat{\phi}(\mathbf{y}) - e^{(-\frac{i\Delta}{\alpha})} \hat{\phi}(\mathbf{y}) \hat{\phi}(\mathbf{x}) &= 0, & \hat{\phi}^*(\mathbf{x}) \hat{\phi}(\mathbf{y}) - e^{(\frac{i\Delta}{\alpha})} \hat{\phi}(\mathbf{y}) \hat{\phi}^*(\mathbf{x}) &= 0, \\ \hat{\phi}(\mathbf{x}) \hat{\pi}^*(\mathbf{y}) - e^{(-\frac{i\Delta}{\alpha})} \hat{\pi}^*(\mathbf{y}) \hat{\phi}(\mathbf{x}) &= 0, & \hat{\phi}(\mathbf{x}) \hat{\pi}(\mathbf{y}) - e^{(-\frac{i\Delta}{\alpha})} \hat{\pi}(\mathbf{y}) \hat{\phi}(\mathbf{x}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.46)$$

com  $\Delta = \pi(1 + 2n)$  e  $n \in \mathbb{N}$ .

Estas relações são obtidas através do emprego da fórmula de Campbell-Hausdorff (30)

$$\exp(-F)G \exp(F) = G + \frac{1}{1!}[G, F] + \frac{1}{2!}[[G, F], F] + \frac{1}{3!}[[[G, F], F], F] + \dots,$$

com  $F = (i/\alpha) \int d^2y \arctan(\mathbf{x} - \mathbf{y}) J_0(\mathbf{y})$  e  $G = \phi(\mathbf{x})$ . Notemos que a fase que aparece nas relações de comutação não é única mas possui infinitos valores discretos. Isto significa que os estados obtidos pela ação dos operadores  $\hat{\phi}(\mathbf{x})$  são funções multivalentes de  $\mathbf{x}$ , e isso se traduz na estatística exótica explicitamente apresentada por esses estados. Assim podemos ver a teoria de duas formas: através dos campos  $\phi(\mathbf{x})$  que tem interação complicada e hamiltoniano (2.39) e produzem estados univalentes; ou através dos campos livres  $\hat{\phi}(\mathbf{x})$  que têm hamiltoniano dado por (2.45) e estatística exótica explícita.

Com o objetivo de prosseguir a análise dos termos de Chern-Simons com acoplamento mínimo, vamos agora estudar as propriedades canônicas de rotação e translação da teoria, além da conexão entre spin e estatística para os campos clássicos  $\phi(\mathbf{x})$ . Para tanto vamos ao tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$  que é simétrico e invariante de calibre. Ele é obtido acoplando-se os campos à gravidade e então variando a ação com respeito à métrica

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}.$$

Aqui  $-g$  é o determinante do tensor métrica  $g^{\mu\nu}$ .

A natureza topológica do termo de Chern-Simons faz com que o mesmo não contribua em nada para o cálculo do  $T_{\mu\nu}$ . O que acontece é que, ao introduzirmos a gravidade, substituímos  $dx$  por  $\sqrt{-g}dx$ , mas também temos que trocar o tensor de Levi-Civita  $\epsilon^{\mu\nu\rho}$  por  $\frac{1}{\sqrt{-g}}\epsilon^{\mu\nu\rho}$  de forma a não alterar o termo de Chern-Simons na ação. Isto nos dá

$$T_{\mu\nu} = \overline{D_\mu \phi} D_\nu \phi + \overline{D_\nu \phi} D_\mu \phi - g_{\mu\nu} (\overline{D_\alpha \phi} D^\alpha \phi - m^2 \phi^* \phi). \quad (2.47)$$

Se lembrarmos de (2.39), podemos ver que, de fato,  $T_{00} = \mathcal{H}$ , indicando que o resultado está correto. Os geradores de translação são  $T_{0i} = \pi^* \partial_i \phi + \pi \partial_i \phi^* + A_i J_0$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \delta_i \phi(\mathbf{x}) &= \int d^2y \{ \phi(\mathbf{x}), T_{0i} \} \\ &= \int d^2y \{ \phi(\mathbf{x}), \pi^* \partial_i \phi + \pi \partial_i \phi^* + A_i J_0 \} \\ &= (\partial_i - i A_i) \phi(\mathbf{x}) \\ &= D_i \phi(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Quanto à rotação, temos que o momento angular é dado por  $L = \int d^2\mathbf{x} \epsilon^{ij} T_{0j}(\mathbf{x})$ . Vemos que ele gera a transformação

$$\begin{aligned}
\delta\phi(\mathbf{x}) &= \int d^2\mathbf{y} \{ \phi(\mathbf{x}), y_i \epsilon^{ij} T_{0j}(\mathbf{y}) \} \\
&= \int d^2\mathbf{y} \{ \phi(\mathbf{x}), y_i \epsilon^{ij} (\pi^* \partial_i \phi + \pi \partial_i \phi^* + A_i J_0) \} \\
&= (\mathbf{x} \times (\partial - iA)) \phi(\mathbf{x}) \\
&= \mathbf{x} \times D\phi(\mathbf{x}).
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Como era de se esperar, tanto a transformação (2.48) como a (2.49) são invariantes de calibre.

Uma pergunta surge naturalmente. Que aspectos serão acrescentados à teoria se fizermos os cálculos que acabamos de fazer mas, desta vez, implementando os vínculos (2.40) além das condições (2.41)? Veremos que, se resolvermos calcular as grandezas  $L = \int d^2\mathbf{x} \epsilon^{ij} T_{0j}(\mathbf{x})$  e  $P_i = \int d^2\mathbf{x} T_{0i}$  substituindo  $A$  por  $\hat{A}$ , encontraremos aspectos ainda mais interessantes.

Omitindo os detalhes matemáticos menos importantes, apresentamos como resultado da substituição sugerida no parágrafo anterior as seguintes soluções para  $P_i$  e  $L$

$$\begin{aligned}
P_i &= \int d^2\mathbf{x} (\pi^* \partial_i \phi + \partial_i \phi^* \pi) + \frac{1}{\alpha} \int d^2\mathbf{x} d^2\mathbf{y} J_0(\mathbf{y}) \epsilon_{ij} \frac{x_j - y_j}{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2} \\
&= \int d^2\mathbf{x} (\pi^* \partial_i \phi + \partial_i \phi^* \pi),
\end{aligned} \tag{2.50}$$

$$\begin{aligned}
L &= \int d^2\mathbf{x} (\pi^* \mathbf{x} \times \partial \phi + \pi^* \mathbf{x} \times \partial \phi^* \pi) + \frac{1}{\alpha} \int d^2\mathbf{x} d^2\mathbf{y} J_0(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2} J_0(\mathbf{y}) \\
&= \int d^2\mathbf{x} (\pi^* \mathbf{x} \times \partial \phi + \pi^* \mathbf{x} \times \partial \phi^* \pi) + \frac{Q^2}{2\alpha}.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

O último passo na equação (2.51) foi dado levando em consideração a simetria de integração em  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  na linha anterior, além da definição da carga total  $Q \equiv \int d^2\mathbf{x} J_0(\mathbf{x})$ , onde a integração é feita em todo o espaço.

O termo em  $Q^2$  foi encontrado por C. R. Hagen em (31), que o interpretou como uma anomalia nas propriedades de rotação da teoria. Ele ressaltou ainda que não se tratava da realização explícita de ânions. Mas Gordon W. Semenoff, em seu trabalho (29), mostrou que este termo pode ser visto como sendo um operador de spin. Hagen argumentou (32)

que a escolha de calibre (2.41) é conflitante com as equações de movimento para  $A_\mu$  (2.55). Disse também que a equação para  $A_i$  (2.43) está errada pois, segundo ele, não se pode permutar as operações de integração e derivação necessária para se escrever a equação (2.43) a partir de (2.42). Entretanto tais argumentações não se sustentam, como se vê em (33), uma vez que a escolha do referido calibre em nada contraria as equações (2.55), e que os requisitos para que se possa permutar as operações matemáticas citadas são plenamente obedecidos (34).

Calculando a variação gerada em  $\phi(\mathbf{x})$  pela equação (2.50) vemos que o resultado é o mesmo de (2.48). Já para o momento angular o resultado é bem diferente. O momento angular (2.51) gera em  $\phi(\mathbf{x})$  uma transformação dada por

$$\begin{aligned}\delta_i \phi(\mathbf{x}) &= \{\phi(\mathbf{x}), L\} \\ &= \mathbf{x} \times \partial \phi(\mathbf{x}) + \frac{Q}{\alpha} \phi(\mathbf{x}).\end{aligned}\tag{2.52}$$

O último termo não pode ser removido por uma redefinição do momento angular sem que seja quebrada a álgebra de Poincaré (2.22), já que deveremos ter  $\{K_i, K_j\} = \epsilon_{ij} L$ . Usando a definição dos parênteses de Poisson

$$\{F, G\} = \int d^2x \left[ \frac{\delta F}{\delta \phi^a(\mathbf{x})} \frac{\delta G}{\delta \pi_a(\mathbf{x})} - \frac{\delta F}{\delta \pi_a(\mathbf{x})} \frac{\delta G}{\delta \phi^a(\mathbf{x})} \right],\tag{2.53}$$

e a definição dos boosts de Lorentz

$$K_i = \int d^2x x_i [\pi^* \pi + \phi^* (\overleftarrow{\partial} + \imath \mathbf{A}) \cdot (\overrightarrow{\partial} - \imath \mathbf{A}) \phi + m^2 \phi^* \phi]\tag{2.54}$$

podemos verificar a necessidade da presença do termo  $\frac{Q^2}{2\alpha}$ .

## 2.5 Chern-Simons Acoplado a Campos de Matéria: Uma Visão Geométrica

Nesta seção esboçaremos o comportamento geométrico da teoria de Chern-Simons acoplado a campos de matéria. Para tanto vamos estudar as equações de movimento para densidades de carga arbitrárias, e depois vamos considerar um caso específico com o objetivo de exemplificar o que foi dito.

Para entender melhor o significado do acoplamento do termo de Chern-Simons a uma corrente de matéria  $J^\mu = (\rho, \vec{J})$ , vamos considerar as equações (2.7) escritas em termos de componentes:

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\alpha}{2\pi} B \\ J^i &= \frac{\alpha}{2\pi} \epsilon^{ij} E_j.\end{aligned}\tag{2.55}$$

A primeira das equações (2.55) já mostra uma característica única da teoria de Chern-Simons em 2+1 dimensões, que é a de combinar a carga elétrica ao fluxo magnético tal que sempre que houver carga elétrica haverá fluxo magnético e vice-versa. Diz ainda que carga e fluxo são localmente proporcionais.

A segunda das equações (2.55) assegura que a primeira é preservada no tempo. Para ver isso basta derivar esta com relação ao tempo

$$\dot{\rho} = \frac{\alpha}{2\pi} \dot{B} = \frac{\alpha}{2\pi} \epsilon^{ij} \partial_i \dot{A}_j\tag{2.56}$$

e usar a equação de continuidade para a carga,  $\dot{\rho} + \partial_i J^i = 0$ , para obter

$$\partial_i (J^i + \frac{\alpha}{2\pi} \epsilon^{ij} \partial_i \dot{A}_j) = 0.\tag{2.57}$$

O termo entre parênteses na equação acima pode ser nulo ou, de maneira mais geral, igual a um termo do tipo  $\epsilon^{ij} \partial_j \chi$ , onde  $\chi$  é arbitrário. A equação (2.57) continua válida. Por isso podemos escrever

$$J^i = -\frac{\alpha}{2\pi} \epsilon^{ij} \partial_i \dot{A}_j + \epsilon^{ij} \partial_j \chi.\tag{2.58}$$

Se identificarmos  $\chi$  como sendo igual a  $\frac{\alpha}{2\pi} A_0$ , veremos que (2.58) é a segunda das equações (2.55), provando o que dissemos sobre o seu significado.

Neste ponto podemos considerar o termo de Chern-Simons como tendo o efeito de um vínculo sobre os campos ligando a carga elétrica ao fluxo magnético. Esta relação entre carga e fluxo é a propriedade que define os *anions* (35–41).

Considere, por exemplo, um conjunto de  $N$  partículas pontuais carregadas se movendo no plano conforme a Figura 1.

A densidade de carga do sistema é dada por

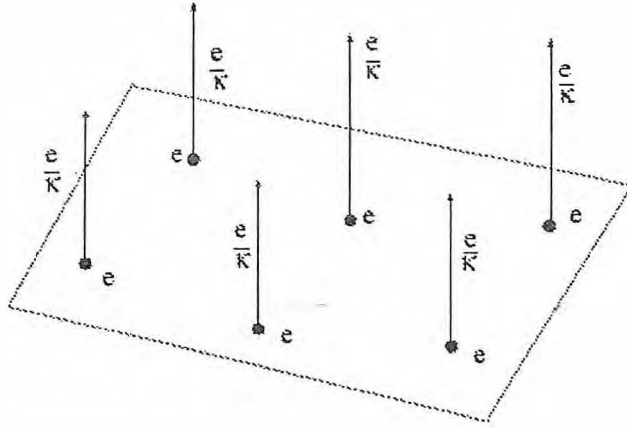


Figura 1: Vários ânions pontuais com carga  $e$  e fluxo magnético  $\frac{e}{\kappa}$ , com  $\kappa = 2\pi\alpha$ .

$$\rho(\vec{x}, t) = e \sum_{i=1}^N \delta(\vec{x} - \vec{x}^i(t)). \quad (2.59)$$

As equações (2.55) associam a esta densidade de carga o campo magnético

$$B(\vec{x}, t) = \frac{2\pi e}{\alpha} \sum_{i=1}^N \delta(\vec{x} - \vec{x}^i(t)). \quad (2.60)$$

Por causa de suas propriedades, tais partículas não podem ser entendidas como cargas na presença de campos magnéticos, mas, sim como partículas que têm como propriedades intrínsecas carga e fluxo e estes simplesmente não podem ser dissociados.

Ao se observar a 1 surge naturalmente a pergunta sobre como é possível, em apenas duas dimensões espaciais, desenhar o plano de movimento e ainda as linhas de fluxo de forma a dar uma visão geométrica do problema físico. Deixamos claro neste ponto que o uso da expressão "linhas de fluxo" serve para ilustrar nossas idéias mas não corresponde ao sentido físico estrito uma vez que o campo magnético aqui é apenas um escalar. Para responder a esta pergunta, vamos relembrar o problema do eletromagnetismo clássico em três dimensões espaciais, onde temos um fio estendido por todo o eixo  $Oz$  onde está distribuída uma densidade linear de carga elétrica. Como sabemos, este problema tem simetria cilíndrica e seu potencial é dado por  $\Phi(\rho) = (\text{constante}) \ln(\rho)$ . Logo, para qualquer valor de  $z$  que possamos escolher para colocar uma carga de prova, será observada a mesma Física. Podemos, então, esquecer que estamos em três dimensões espaciais e considerar o problema como sendo o de um potencial  $\Phi \equiv \Phi(\rho) = (\text{constante}) \log(\rho)$  em duas dimensões espaciais. Isto acontece porque cada plano pode ser visto como sendo

uma folha. Cada folha vai sendo superposta às outras infinitas folhas cada uma arbitrariamente próxima à seguinte de forma a constituírem o espaço tridimensional. É neste sentido que devemos entender a 1.

Se considerarmos que cada partícula tem massa  $m$ , a ação é então dada por

$$S = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^N \int dt \vec{v}_i^2 + \frac{\alpha}{4\pi} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho - \int d^3x A_\mu J^\mu. \quad (2.61)$$

As equações de movimento (2.7) determinam o campo de calibre  $A_\mu$  em termos da corrente de matéria  $J^\mu$ . Os detalhes serão omitidos aqui uma vez que já foram apresentados. O campo de calibre é então dado por

$$A^i(\vec{x}, t) = \frac{1}{\alpha} \int d^2y \epsilon^{ij} \frac{(x_j - y_j)}{|\vec{x} - \vec{y}|^2} \rho(\vec{y}, t) = \frac{e}{\alpha} \sum_{k=1}^N \epsilon^{ij} \frac{(x_j - y_j^k(t))}{|\vec{x} - \vec{y}|^2}. \quad (2.62)$$

Que pode ainda ser escrito como

$$A^i(\vec{x}, t) = \frac{e}{\alpha} \sum_{k=1}^N \partial^i \text{arg}(\vec{x} - \vec{x}^k). \quad (2.63)$$

Inicialmente este campo pode parecer um campo de calibre puro que pode ser removido por uma transformação de calibre. Mas não é isso o que acontece. Depois de uma tal transformação, o campo não-relativístico  $\phi(\vec{x})$  adquire um fator de fase

$$\phi(\vec{x}) \rightarrow \phi'(\vec{x}) = \exp\left(\frac{-ie^2}{\alpha} \sum_{k=1}^N \text{arg}(\vec{x} - \vec{x}^k)\right) \phi(\vec{x}). \quad (2.64)$$

A equação (2.64) mostra que o campo  $\phi(\vec{x})$  é agora multivalente e esta é a principal característica do acoplamento com o termo de Chern-Simons. Embora pareça que o campo de calibre tenha sido levado embora deixando somente um campo livre, a interação estatística complicada está escondida nas condições de contorno para o campo  $\phi'(\vec{x})$ .

Como exemplo de interação podemos citar que, em nível quântico, quando um ânion se movendo adiabaticamente dá uma volta completa em torno de outro (Figura 2), ele adquire uma fase de Aharanov-Bohm (42)

$$\exp\left(ie \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}\right) = \exp\left(\frac{2\pi ie^2}{2\pi\alpha}\right). \quad (2.65)$$

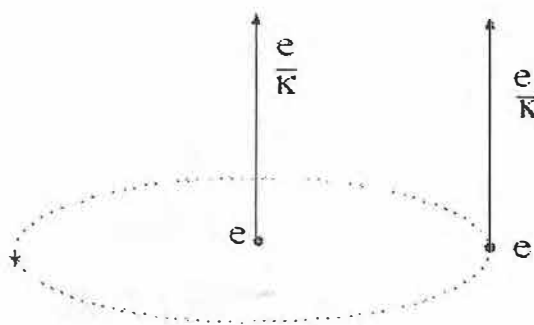


Figura 2: Interação de Aharanov-Bohm entre a carga  $e$  de um ânion e o fluxo  $\frac{e}{\kappa}$  do outro.

Se este movimento pode ser interpretado como uma dupla permuta de ânions, então podemos ver que a mudança de fase ao se trocar uma partícula pela outra duas vezes é

$$\frac{ie^2}{\alpha}. \quad (2.66)$$

A fase (2.66) pode ser alterada conforme se altera a constante de acoplamento de Chern-Simons. Dessa forma pode se fazer com que a partícula se comporte como férmion ou bóson. Esta é a origem da estatística fracionária em partículas pontuais. Um exemplo explícito dessa "transmutação" de estatística pode ser encontrado em (43).

### 3 O TERMO DE CHERN-SIMONS COM ACOPLAMENTO NÃO-MÍNIMO

Nos perguntamos se não é possível obter resultados físicos análogos aos do capítulo 2 com um outro tipo de acoplamento, ou seja, uma outra interação. É de se esperar que a resposta seja positiva uma vez que os referidos resultados se sustentam sobre o pilar da invariância de calibre, e não sobre características particulares da interação. Tendo esta invariância como ponto de partida, vamos em busca de um tal termo de interação.

Para encontrar um termo que, tal qual o campo  $A_\mu$ , permita construir uma interação invariante de calibre, é conveniente migrarmos para o formalismo de *formas diferenciais*. Para não mudar o foco neste momento dos aspectos físicos para os matemáticos do nosso trabalho, preferimos deixar para o apêndice a explicação de como se usa este formalismo para construir o acoplamento invariante de calibre que queremos. Por enquanto, nos limitamos a dizer que decidimos usar uma redefinição de campos que conecta o termo de Chern-Simons, que parece ser de vital importância para a estatística fracionária, com a teoria de Maxwell-Chern-Simons (MCS) e a teoria Auto-Dual (AD). Esta redefinição foi escolhida porque em (44) e em (45) foi mostrado que o termo de Chern-Simons gera o modelo MCS através de uma redefinição de campos e, em (46), que a dualidade entre os modelos MCS e AD implica que a redefinição é a mesma para ambos.

Usando esta redefinição somos levados ao seguinte campo de calibre:

$$A'_\mu \rightarrow A_\mu + c_1 \epsilon_{\mu\nu\rho} \partial^\nu A^\rho + c_2 [\partial^2(A_\mu) - \partial_\mu \partial_\nu A^\nu] + \dots, \quad (3.1)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes numéricas e os termos omitidos não são mais do que potências dos dois primeiros, porquanto não se espera que eles adicionem novos aspectos às nossas investigações.

Nós, então, nos pomos a testar nossa teoria em que a derivada covariante é a seguinte

$$D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu + ig\epsilon_{\mu\nu\rho}\partial^\nu A^\rho. \quad (3.2)$$

Para tanto, nós empregamos o método de quantização de Dirac à seguinte lagrangeana:

$$S = \int d^3x [(\partial_\mu + iA_\mu + ig\epsilon_{\mu\nu\rho}\partial^\nu A^\rho)\phi^*(\partial^\mu - iA^\mu - ig\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho)\phi - m^2\phi^*\phi + \frac{\alpha}{4\pi}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho], \quad (3.3)$$

onde  $g$  é o parâmetro de acoplamento.

Os momenta são:

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0\phi^*)} = D_0\phi, \quad \pi^* = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0\phi)} = \overline{D_0\phi} \quad (3.4)$$

$$\pi_0 = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A_0)} \approx 0, \quad \pi_i = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A_i)} = \frac{\alpha}{4\pi}\epsilon_{ij}A_j + ig\epsilon^{ij}[\phi^*D_j\phi - \phi\overline{D_j\phi}] \quad (3.5)$$

Fazendo uma transformação de Legendre obtemos o hamiltoniano.

$$\mathcal{H} = p\dot{q} - \mathcal{L}$$

$$\mathcal{H} = \pi^*\pi - A_0\left(\frac{\alpha}{2\pi}\epsilon^{ij}\partial_i A_j + J_0\right) + D_i\phi\overline{D_i\phi} + m^2\phi^*\phi + g\epsilon^{ij}\partial_i A_j J_0, \quad (3.6)$$

onde  $J_0 = i(\phi^*\pi - \pi^*\phi)$ .

Como condição de consistência para a teoria temos que

$$\frac{\alpha}{2\pi}B + J_0 = 0. \quad (3.7)$$

Acontece que o  $J_0$  na (3.7) carrega em si dependência no campo  $A_\mu$ . Isto se deve ao fato de que os momentos  $\pi$  dependem de  $A_\mu$  e essa dependência não pode ser removida por uma escolha de calibre. Isto implica que não existe o vínculo entre uma corrente de matéria e o fluxo magnético.

Como resultado, obtemos que este modelo não apresenta estatística fracionária. Isto

pode ser visto à luz das mudanças introduzidas pelo termo  $\epsilon_{\mu\nu\rho}\partial^\nu$  na derivada covariante. Este termo, embora respeite a simetria de calibre devido à anti-simetria nos índices  $\nu$  e  $\rho$ , quebra a simetria de paridade da teoria uma vez que o tensor de Levi-Civita não é invariante sob a transformação de paridade (47).

Outra maneira de ver que este modelo não apresenta estatística fracionária será dada no apêndice.

Já para o segundo termo em (3.1) isto é bem diferente. Ele é dado pelo quadrado do termo  $\epsilon_{\mu\nu\rho}\partial^\nu$  e, portanto, obedece tanto à simetria de calibre quanto à de paridade. Isto nos faz esperar que ele apresente estatística e spin fracionários. Além disso, esperamos que ele também apresente novos aspectos ainda não desvendados da teoria, que tenham sido até agora mascarados pelo acoplamento não-mínimo usado até aqui na literatura (48).

Com a derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + \imath A_\mu + \imath g(\partial^2 A_\mu - \partial_\mu \partial_\nu A^\nu) \quad (3.8)$$

construímos nossa lagrangeana

$$\begin{aligned} S = \int d^3x \{ & [\partial_\mu + \imath A_\mu + \imath g(\partial^2 A_\mu - \partial_\mu \partial_\nu A^\nu)] \phi^* \\ & \times [\partial^\mu - \imath A^\mu - \imath g(\partial^2 A_\mu - \partial_\mu \partial_\nu A^\nu)] \phi \\ & - m^2 \phi^* \phi + \frac{\alpha}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho \}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

O próximo passo no procedimento de Dirac é calcular os momenta canonicamente conjugados aos campos. São eles:

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \phi^*)} = D_0 \phi, \quad \pi^* = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \phi)} = \overline{D_0 \phi} \quad (3.10)$$

$$\pi_0 = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A_0)} \approx 0, \quad \pi_i = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A_i)} = \frac{\alpha}{4\pi} \epsilon_{ij} A_j. \quad (3.11)$$

Como de costume, o símbolo  $\approx$  serve para identificar um vínculo da teoria. O hamiltoniano obtido é, então:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} = & \pi^* \pi - A_0 \left( \frac{\alpha}{2\pi} \epsilon^{ij} + J_0 \right) + D_i \phi \overline{D_i \phi} + m^2 \phi^* \phi + \\
& + ig (\partial^2 A_0 - \partial_0 \partial_\nu A^\nu) \\
& \times (\phi \partial_0 \phi^* - \phi^* \partial_0 \phi) - 2g^2 (\partial^2 A_0 - \partial_0 \partial_\nu A^\nu) \phi^* \phi A_0 - \\
& - 2g^2 [(\partial^2 A_0 - \partial_0 \partial_\nu A^\nu)]^2 \phi^* \phi.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

É importante ressaltar que uma escolha de calibre apropriada, a saber

$$A_0 \approx 0 \text{ and } \partial \cdot \mathbf{A} \approx 0, \tag{3.13}$$

é capaz de remover completamente as duas últimas linhas do hamiltoniano assim como o acoplamento não-mínimo. Isto sugere fortemente que estamos no caminho certo.

Para que a teoria seja consistente é necessário que a primeira das equações (3.11) seja conservada no tempo. Isto acarreta a seguinte igualdade

$$\frac{\alpha}{2\pi} B + J_0 + \text{termos} \approx 0, \tag{3.14}$$

onde  $B = \epsilon^{ij} \partial_i A_j$  é o campo magnético e os termos omitidos se anulam na escolha de calibre (3.13).

As condições de calibre (3.13) e os vínculos (3.11) determinam que o campo de calibre  $A_\mu$  tenha a forma

$$\hat{A}_i(\mathbf{x}) = \frac{\epsilon^{ij}}{\alpha} \int d^2y \frac{x_j - y_j}{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2} J_0(\mathbf{y}). \tag{3.15}$$

O Hamiltoniano é dado por (3.12) com as condições de calibre e  $\mathbf{A}$  substituído por  $\hat{\mathbf{A}}$  e os campos escalares satisfazendo os parênteses de Poisson

$$\begin{aligned}
\{\phi(\mathbf{x}), \pi^*(\mathbf{y})\} &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
\{\phi^*(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})\} &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}),
\end{aligned} \tag{3.16}$$

todos os outros sendo nulos.

Novamente podemos escrever o campo de calibre como a divergência de um operador multivalente:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) &= \partial \omega, \\
\text{onde } \omega &= \frac{1}{\alpha} \int d^2y \arctan(\mathbf{x} - \mathbf{y}) J_0(\mathbf{y}).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Se tentarmos remover a interação através de uma transformação para os campos com álgebra graduada  $\hat{\phi}(\mathbf{x})$  e  $\hat{\pi}(\mathbf{x})$  através da transformação (2.44), nós não obtemos um hamiltoniano livre mas

$$\mathcal{H} = \pi^* \pi + \phi^* (\overleftarrow{\partial} + ig \partial^2 \mathbf{A}) \cdot (\overrightarrow{\partial} - ig \partial^2 \mathbf{A}) \phi + m^2 \phi^* \phi. \quad (3.18)$$

Estudemos agora o tensor energia-momento  $T^{\mu\nu}$  dado por

$$T^{\mu\nu} = \overline{D_\mu \phi} D_\nu \phi + \overline{D_\nu \phi} D_\mu \phi - g_{\mu\nu} (\overline{D_\lambda \phi} D^\lambda \phi - m^2 \phi^* \phi). \quad (3.19)$$

A partir do tensor Energia-Momento podemos verificar as propriedades de rotação e translação do sistema. Consideremos primeiramente as translações. A dependência de  $\phi$  no calibre escolhido é contrabalançada pelo gerador de translação que é, também, dependente do calibre de tal forma que a transformação como um todo é invariante de calibre  $\delta_i \phi = \{\phi(\mathbf{x}), \int d^2 y T_{0i}(\mathbf{y})\} = (\partial_i - iA_i - ig \partial^2 A_i) \phi(\mathbf{x}) = D_i \phi(\mathbf{x})$ . Para levar as rotações em consideração é necessário, primeiro, calcular o operador momento angular que  $L = \int d^2 x x_i \epsilon^{ij} T_{0j}(\mathbf{x})$ . Veremos que ele gera em  $\phi$  rotações invariantes de calibre. Substituindo  $\mathbf{A}$  por  $\hat{\mathbf{A}}$  obtemos os operadores de rotação e translação físicos.

$$\begin{aligned} P_i &= \int d^2 x (\pi^* \partial_i \phi + \partial_i \phi^* \pi) + \frac{1}{\alpha} \int d^2 x \int d^2 y J_0(\mathbf{y}) \epsilon_{ij} \frac{x_j - y_j}{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2} \\ &\quad + g \int d^2 x J_0(\mathbf{x}) \partial^2 A_i \\ &= \int d^2 x (\pi^* \partial_i \phi + \partial_i \phi^* \pi) \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} L &= \int d^2 x (\pi^* \mathbf{x} \times \partial \phi + \pi \times \partial \phi^*) + \frac{1}{\alpha} \int d^2 x \int d^2 y J_0(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2} \\ &\quad + g \int d^2 x x_i \epsilon^{ij} J_0(\mathbf{x}) \partial^2 A_i \\ &= \int d^2 x (\pi^* \mathbf{x} \times \partial \phi + \pi \times \partial \phi^*) + \frac{Q^2}{2\alpha} + g \frac{2\pi}{\alpha} \int d^2 x J_0^2(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Os dois primeiros termos no lado direito da equação (3.23) são já conhecidos. O último termo é que nos interessa. Tendo em mente a equação 3.14, ele pode ser escrito como

$$g \frac{2\pi}{\alpha} \int d^2 x J_0^2(\mathbf{x}) = g \frac{\alpha}{2\pi} \int d^2 x B^2(\mathbf{x}) = 4g\alpha W_M, \quad (3.22)$$

onde  $W_M$  é a densidade de energia magnética em unidades gaussianas.

Calculando o parêntese de Poisson entre o operador momento angular e o campo  $\phi$ , vemos que ele gera uma rotação no espaço (explicitada pelo primeiro termo), uma transformação de spin anômala (termo em  $Q$ ) e uma terceira transformação ligada ao campo magnético naquele ponto

$$\{\phi(\mathbf{x}), L(\mathbf{y})\} = \mathbf{x} \times \partial\phi(\mathbf{x}) - iQ\phi(\mathbf{x})/\alpha + 2igB(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}). \quad (3.23)$$

Tal qual o termo em  $Q$ , termo em  $B$  não pode ser removido por uma redefinição do momento angular sem que seja quebrada a álgebra de Poincaré. Da mesma forma que no capítulo anterior, devemos ter  $\{K_i, K_j\} = \epsilon_{ij}L$ . Assim a definição dos parênteses de Poisson (2.53) e a definição dos boosts de Lorentz (2.54) implicam na necessidade do termo em  $B$ .

Novamente nos referindo ao apêndice para mais detalhes nós salientamos que estes resultados podem ser obtidos através de uma maneira um pouco diferente. Considere a lagrangeana

$$\mathcal{L} = D_\mu\phi^*D^\mu\phi - m^2\phi^*\phi + \frac{\alpha}{4\pi}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho + \frac{\kappa}{2}A_\mu\partial^2\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho, \quad (3.24)$$

$$\text{com } D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu.$$

Prosseguindo com o método de Dirac encontramos os mesmos momentos (2.35) e (2.36). Entretanto uma diferença crucial surge quando se implementa o vínculo responsável pela conservação de  $A_0 \approx 0$  no tempo, a saber

$$J_0 + \epsilon^{ij}\left(\frac{\alpha}{2\pi} + \kappa\partial^2\right)\partial_i A_j = 0. \quad (3.25)$$

Esta equação pode ser modificada para

$$J'_0 + \frac{\alpha}{2\pi}\epsilon^{ij}\partial_i A_j = 0, \quad (3.26)$$

$$\text{com } J'_0 \equiv \left(1 + \frac{2\pi\kappa}{\alpha}\partial^2\right)^{-1} J_0.$$

Neste momento não é tarefa difícil encontrar  $A'_i$  até uma ordem arbitrária em  $\frac{2\pi\kappa}{\alpha}\partial^2$ . Fazemos isso incluindo correções de primeira ordem. Fazendo as transformações (2.44),

obtemos

$$\mathcal{H} = \pi^* \pi + \phi^* \left( \overleftarrow{\partial} + i \frac{2\pi\kappa}{\alpha} \partial^2 \mathbf{A} \right) \cdot \left( \overrightarrow{\partial} - i \frac{2\pi\kappa}{\alpha} \partial^2 \mathbf{A} \right) \phi + m^2 \phi^* \phi. \quad (3.27)$$

Comparando as equações (3.18) e (3.27), vemos que, de fato, o resultado obtido para o hamiltoniano na teoria (3.24) e na teoria (3.9) é o mesmo. Com os operadores (3.21) e (3.20) acontece o mesmo mas com  $g$  no lugar de  $\frac{2\pi\kappa}{\alpha}$ .

# CONCLUSÃO

Acreditamos ter encontrado na paridade do campo de calibre  $A_\mu$  e do acoplamento, que são o mesmo em essência, um requisito fundamental para a estatística fracionária. O acoplamento e o campo de calibre foram construídos com o foco nas invariâncias de calibre e de paridade e isso nos levou a obter os resultados desejados. Estes são destruídos se a paridade é quebrada como em (3.2). A redefinição que mencionamos é, portanto, constituída pelos termos em (3.1) que obedecem à simetria de paridade. Ela leva à lagrangeana (3.24) como uma teoria de campo que apresenta estatística fracionária bem como outras propriedades. A lagrangeana (3.9) é igualmente importante embora completamente análoga.

Em síntese:

- Nosso principal resultado foi mostrar que existe pelo menos uma teoria de campos com estatística fracionária diferente da de Semenoff.
- A teoria encontrada não fere as simetrias de calibre nem de Poincaré e é local, como era de se esperar.
- Encontramos, uma relação entre o termo de spin e a energia magnética do sistema, portanto análoga à relação do modelo de Semenoff que se dá entre o termo de spin e a carga elétrica.

## APÊNDICE A – Formas Diferenciais e Redefinição de Campos

Aqui vou falar sobre formas diferenciais e redefinição de campos o suficiente para justificar os resultados já apresentados nesta dissertação. Primeiro algumas convenções e definições.

Uma  $p$ -forma geral é do tipo

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}, \quad (\text{A.1})$$

onde uma há soma nos índices repetidos de 1 até  $n$  em um espaço  $n$ -dimensional.  $\wedge$  é o produto wedge.

A métrica que nós usamos é  $(+ - -)$ . O produto interno de duas  $p$ -formas  $w_p$  and  $\eta_p$  é designado por  $(w_p, \eta_p) = \int w_p \wedge * \eta_p$ .

Definimos o operador estrela de Hodge que leva uma  $p$ -forma em uma  $(n - p)$ -forma da seguinte maneira

$$*(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) = \frac{1}{(n - p)!} \epsilon_{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_n} dx_{i_{p+1}} \wedge dx_{i_{p+2}} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}. \quad (\text{A.2})$$

Sobre o operador estrela de Hodge destacamos ainda que  $** = (-1)^{(n-s)/2+p(n-p)}$ , onde  $s$  é a diferença entre o número de "+1" e o de "-1" na métrica. Em nosso caso, portanto,  $** = 1$ .

Definimos ainda o operador de derivação exterior  $d$  que leva uma  $p$ -forma em uma  $(p + 1)$ -forma

$$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x_i} dx_i. \quad (\text{A.3})$$

E sobre ele destacamos que  $d^2 = 0$ .

Usando o formalismo de formas diferenciais podemos escrever as equações de Maxwell (1.68) sob a forma

$$\begin{aligned} d * F &= J, \quad \text{com} \\ F &= dA. \end{aligned}$$

$A$ ,  $F$  e  $J$  são, respectivamente, as 1, 2 e 3-formas

$$\begin{aligned} A &= A_0 dx_0 - A_1 dx_1 - A_2 dx_2 - A_3 dx_3, \\ F &= dx_0 \wedge (E_1 dx_1 + E_2 dx_2 + E_3 dx_3) + E_{x_1} dx_2 \wedge dx_3 + E_{x_2} dx_3 \wedge dx_1 + E_{x_3} dx_1 \wedge dx_2, \\ J &= \rho dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - dx_0 \wedge (J_{x_1} dx_2 \wedge dx_3 + J_{x_2} dx_3 \wedge dx_1 + J_{x_3} dx_1 \wedge dx_2). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Desta maneira é bem simples de se entender porque a transformação  $A \rightarrow A + d\Lambda$  não altera as equações de Maxwell.

$$\begin{aligned} dA &\rightarrow dA + d^2\Lambda, \quad \text{logo} \\ F &\rightarrow F. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Agora vamos vêr como chegamos à redefinição de campos referida anteriormente (3.1). Primeiro escrevemos a ação de Maxwell-Chern-Simons

$$S_{MCS} = \int \frac{1}{2} dA * dA - \frac{m}{2} AdA = \frac{1}{2} (dA, dA) + \frac{m}{2} (A, * dA). \quad (\text{A.6})$$

Sabemos (45) que essa ação pode ser escrita como

$$\frac{1}{2} (dA, dA) + \frac{m}{2} (A, * dA) = \frac{m}{2} (\hat{A}, * d\hat{A}), \quad (\text{A.7})$$

com  $\hat{A} \equiv \mathcal{O}A$  e

$$\mathcal{O} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \left( \frac{*d}{m} \right)^j. \quad (\text{A.8})$$

Levando em conta algumas propriedades do operador  $\mathcal{O}$ , a saber

$$(\mathcal{O}A, \mathcal{B}) = (A, \mathcal{O}\mathcal{B}) \text{ e} \quad (\text{A.9})$$

$$[\mathcal{O}, *d] = 0, \quad (\text{A.10})$$

não é difícil ver que

$$\left(\frac{*d}{m} - 1 + \mathcal{O}^2\right) *dA = 0, \quad (\text{A.11})$$

e desta maneira obter  $\mathcal{O}$  na forma (A.8).

É a expansão (A.8) que gera a redefinição (3.1). Ela contém termos pares e ímpares.

À luz do exposto acima, podemos entender melhor porque o acoplamento não-mínimo usual, dado por  $A' = (1 + *d)A \equiv \mathcal{O}'A$ , não apresenta estatística fracionária. Considere a ação (3.3). Ela é escrita como

$$\begin{aligned} S &= ((d + i(1 + *d)A)\phi, (d - i(1 + *d)A)\phi^*) + \frac{m}{2} (A, *dA) \\ &= ((d + iA')\phi, (d - iA')\phi^*) + \frac{m}{2} (A, *dA). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Fazendo a redefinição  $A \rightarrow A' \equiv (\mathcal{O}')^{-1}A$ , temos

$$S = ((d + iA')\phi, (d - iA')\phi^*) + S_{MCS}(A') + \text{termos} \quad (\text{A.13})$$

As constantes de acoplamento dos termos MCS podem ser ligeiramente diferentes mas é fácil ver que estes termos realmente surgirão. Já que  $\mathcal{O}'$  contém os mesmos termos de  $\mathcal{O}$ , a forma expandida de  $\mathcal{O}'$  diferirá da de  $\mathcal{O}$  somente pelos coeficientes. Como é conhecido na literatura (49), modelos com MCS não apresentam estatística fracionária, a não ser, é claro, em regiões em que o termo de Maxwell seja dominado pelo de Chern-Simons.

Agora vejamos como se faz para incluir somente os termos pares de (3.1). Suponha que  $\mathcal{O}''$  satisfaz esta condição. Então

$$\frac{m}{2}(A'', *dA'') = \frac{m}{2}(A, *d\mathcal{O}''^2 A) = \frac{m}{2}(A, *dA) + \frac{m\kappa}{2}(A, (*d)^3 A). \quad (\text{A.14})$$

A última igualdade vem do fato de que, para conter somente termos pares,  $\mathcal{O}''$  deve satisfazer

$$\mathcal{O}^{n^2} = 1 - \left(\frac{*d}{m}\right)^2. \quad (\text{A.15})$$

Notemos ainda que os coeficientes dos termos pares advindos de (A.11) e de (A.15) são diferentes mas que isso não afeta nossa análise.

## Referências

- 1 DIRAC, P. A. M. *Lectures on Quantum Mechanics*. [S.l.]: Courier Dover Publications, 2001.
- 2 HENNEAUX, M.; TEITELBOIM, C.; TEITELBOIM, H. *Quantization of Gauge Systems*. [S.l.]: Princeton University Press, 1994.
- 3 GITMAN, I. V. T. D. M. *Quantization of fields with constraints*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1990.
- 4 GOLDSTEIN, H.; POOLE, C. P.; SAFKO, J. L. *Classical Mechanics*. [S.l.]: Addison-Wesley Press, 1950.
- 5 LANDAU, L. D. *Mécanique*. [S.l.]: Editions Mir, 1969.
- 6 PRIMA, B. di. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. [S.l.]: Wiley, 1969.
- 7 DIRAC, P. A. M. Generalized hamiltonian dynamics. *Can. J. Math.-J. Can. Math.*, v. 2, n. 2, p. 129–148, 1950.
- 8 BERGMANN, P. G.; GOLDBERG, I. Transformations in phase space and dirac brackets. *Phys. Rev.*, v. 98, n. 4, p. 1175–1175, 1955.
- 9 THOOFT, G. Gauge-theories of the forces between elementary-particles. *Sci.Am.*, v. 242, n. 6, p. 104, 1980.
- 10 CHERN, S. S.; SIMONS, J. Characteristic forms and geometric invariants. *Ann. Math.*, v. 99, n. 1, p. 48–69, 1974.
- 11 HALPERIN, B. I. Correction. *Phys. Rev. Lett.*, v. 52, n. 26, p. 2390–2390, 1984.
- 12 PRANGE, R.; GIRVIN, S. *The Quantum Hall Effect*. [S.l.]: Springer, 1987.
- 13 SEMENOFF, G. W.; SODANO, P. Non-abelian adiabatic phases and the fractional quantum hall-effect. *Phys. Rev. Lett.*, v. 57, n. 10, p. 1195–1198, 1986.
- 14 NIEMI, A. J.; SEMENOFF, G. W. Gauge algebras in anomalous gauge-field theories. *Phys. Rev. Lett.*, v. 56, n. 10, p. 1019–1022, 1986.
- 15 BOWICK, M. J.; KARABALI, D.; WIJEWARDHANA, L. C. R. Fractional spin via canonical quantization of the  $o(3)$  nonlinear sigma model. *Nucl. Phys. B*, v. 271, n. 2, p. 417–428, 1986.
- 16 SHANKAR, R.; MURTHY, G. Towards a field theory of fractional quantum hall states. *Phys. Rev. Lett.*, v. 79, n. 22, p. 4437–4440, 1997.

- 17 FROHLICH, J.; KERLER, T. Universality in quantum hall systems. *Nucl. Phys. B*, v. 354, n. 2-3, p. 369–417, 1991.
- 18 HALDANE, F. D. M.; WU, Y. S. Quantum dynamics and statistics of vortices in two-dimensional superfluids. *Phys. Rev. Lett.*, v. 55, n. 26, p. 2887–2890, 1985.
- 19 EZAWA, Z. F.; IWAZAKI, A. Chern-simons gauge-theories for the fractional-quantum-hall-effect hierarchy and anyon superconductivity. *Phys. Rev. B*, v. 43, n. 4, p. 2637–2641, 1991.
- 20 KIVELSON, S. A.; ROKHSAR, D. S.; SETHNA, J. P. Topology of the resonating valence-bond state - solitons and high- $T_c$  superconductivity. *Phys. Rev. B*, v. 35, n. 16, p. 8865–8868, 1987.
- 21 KALMEYER, V.; LAUGHLIN, R. B. Equivalence of the resonating-valence-bond and fractional quantum hall states. *Phys. Rev. Lett.*, v. 59, n. 18, p. 2095–2098, 1987.
- 22 LAUGHLIN, R. B. The relationship between high-temperature superconductivity and the fractional quantum hall-effect. *Science*, v. 242, n. 4878, p. 525–533, 1988.
- 23 HONG, S. I.; KIM, J. K. Phase-transition in the maxwell chern-simons theory with the higgs term. *Phys. Rev. D*, v. 46, n. 4, p. 1810–1819, 1992.
- 24 LOPEZ, A.; FRADKIN, E. Fractional quantum hall-effect and chern-simons gauge-theories. *Phys. Rev. B*, v. 44, n. 10, p. 5246–5262, 1991.
- 25 REY, S. J.; ZEE, A. Self-duality of 3-dimensional chern-simons theory. *Nucl. Phys. B*, v. 352, n. 3, p. 897–921, 1991.
- 26 DESER, S.; JACKIW, R.; TEMPLETON, S. Topologically massive gauge-theories. *Ann. Phys.*, v. 140, n. 2, p. 372–411, 1982.
- 27 SAKURAI, J. J. *Advanced Quantum Mechanics*. [S.l.: s.n.], 1967.
- 28 GATES, S. J. et al. *Superspace*. [S.l.]: Benjamin-Cummings, 1983.
- 29 SEMENOFF, G. W. Canonical quantum-field theory with exotic statistics. *Phys. Rev. Lett.*, v. 61, n. 5, p. 517–520, 1988.
- 30 WYBOURNE, B. G. *Classical Groups for Physicists*. [S.l.]: Wiley, 1974.
- 31 HAGEN, C. R. Rotational anomalies without anions. *Phys. Rev. D*, v. 31, n. 8, p. 2135–2136, 1985.
- 32 HAGEN, C. R. Comment on canonical quantum-field theory with exotic statistics. *Phys. Rev. Lett.*, v. 63, n. 9, p. 1025–1025, 1989.
- 33 SEMENOFF, G. W. Canonical quantum-field theory with exotic statistics - reply. *Phys. Rev. Lett.*, v. 63, n. 9, p. 1026–1026, 1989.
- 34 FIGUEIREDO, D. G. de. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. [S.l.]: Instituto de Matematica Pura e Aplicada, 1977.

- 35 FINKELSTEIN, D.; RUBINSTEIN, J. Connection between spin statistics and kinks. *J. Math. Phys.*, v. 9, n. 11, p. 1762, 1968.
- 36 WILLIAMS, J. G. Topological analysis of a nonlinear field theory. *J. Math. Phys.*, v. 11, n. 8, p. 2611, 1970.
- 37 LAIDLAW, M. G. G.; DEWITT, C. M. Feynman functional integrals for systems of indistinguishable particles. *Phys. Rev. D*, v. 3, n. 6, p. 1375, 1971.
- 38 DOWKER, J. S. Quantum-mechanics and field-theory on multiply connected and on homogeneous spaces. *J. Phys. Pt. A. Gen.*, v. 5, n. 7, p. 936, 1972.
- 39 WU, Y. S. General-theory for quantum statistics in 2 dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, v. 52, n. 24, p. 2103–2106, 1984.
- 40 WU, Y. S. Multiparticle quantum-mechanics obeying fractional statistics. *Phys. Rev. Lett.*, v. 53, n. 2, p. 111–114, 1984.
- 41 RAVENEL, D. C.; ZEE, A. Spin and statistics of solitons and j-homomorphism. *Commun. Math. Phys.*, v. 98, n. 2, p. 239–243, 1985.
- 42 AHARONOV, Y.; BOHM, D. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.*, v. 115, n. 3, p. 485–491, 1959.
- 43 ZHANG, S. C.; HANSSON, T. H.; KIVELSON, S. Effective field-theory model for the fractional quantum hall-effect. *Phys. Rev. Lett.*, v. 62, n. 1, p. 82–85, 1989.
- 44 LEMES, V. E. R. et al. A simple remark on three dimensional gauge theories. *Phys. Lett. B*, v. 418, n. 3-4, p. 324–328, 1998.
- 45 LEMES, V. E. R. et al. Chern-simons as a geometrical setup for three-dimensional gauge theories. *Phys. Rev. D*, v. 58, n. 4, p. 045010, 1998.
- 46 GOMES, M. A. M.; LANDIM, R. R. Duality and field redefinition in three dimensions. *J. Phys. A-Math. Gen.*, v. 38, n. 1, p. 257–262, 2005.
- 47 BUTKOV, E. *Mathematical physics*. [S.l.]: Addison-Wesley, 1973.
- 48 STERN, J. Topological action at a distance and the magnetic-moment of point-like anyons. *Phys. Lett. B*, v. 265, n. 1-2, p. 119–123, 1991.
- 49 HARVEY, J. A.; LIU, J. Strings and statistics. *Phys. Lett. B*, v. 240, n. 3-4, p. 369–374, 1990.